Manoel Paiva
Ewerton Paiva
Beto Paiva
Rodrigo Paiva

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção:
0168P21205
Código da obra:
0168P21205130

MODERNA PLUS

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS E MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

OBRA ESPECÍFICA:
CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS EM DIÁLOGO COM A MATEMÁTICA

Áreas do conhecimento:
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Matemática e suas Tecnologias

MODERNA

MODERNA

MANOEL PAIVA
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André (SP). Professor.

EWERTON PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (RJ). Professor.

BETO PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (RJ).
Professor e coordenador pedagógico.

RODRIGO PAIVA
Doutor em Ciências Sociais pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Mestre em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Pós-Graduado em Aprendizagem Motora pela Universidade de São Paulo.
Bacharel em Educação Física pela Universidade Nove de Julho (SP).
Licenciado em Educação Física pela Universidade Nove de Julho (SP).
Professor e coordenador de cursos universitários.

MODERNA PLUS

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS E MATEMÁTICA

OBRA ESPECÍFICA:
CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS EM DIÁLOGO COM A MATEMÁTICA

Áreas do conhecimento:
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Glaucia Teixeira
Edição: Juliana Albuquerque, Juliana Rodrigues de Queiroz
Assistência editorial: Elizangela Gomes Marques
Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Coordenação de produção: Patricia Costa
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Otávio dos Santos
Capa: Daniel Messias
Fotos: Chuanchai Pundej/EyeEm/Getty Images
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine, Daiane Alves Ramos
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Ana Maria Marson, Arali Lobo Gomes, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Fabiana Nogueira, Elisa Rojas, Vanessa Trindade
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna plus : ciências humanas e sociais aplicadas e matemática : manual do professor / Manoel Paiva...[et al.]. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Outros autores: Ewerton Paiva, Beto Paiva, Rodrigo Paiva
"Obra específica: Ciências humanas e sociais aplicadas em diálogo com a matemática"

1. Ciências humanas (Ensino médio) 2. Ciências sociais (Ensino médio) 3. Matemática (Ensino médio) I. Paiva, Manoel. II. Paiva, Ewerton. III. Paiva, Beto. IV. Paiva, Rodrigo.

20-38612 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livro-texto : Ensino médio 373.19

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

MODERNA

SUMÁRIO

MODERNA

1. O novo Ensino Médio

Novo Ensino Médio diz respeito ao último ciclo de escolarização da Educação Básica, alterado pela lei nº 13.415/2017, que dispõe sobre modificações na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (9394/1996). O tempo mínimo de permanência dos estudantes na escola foi ampliado de 800 para 1.000 horas anuais, perfazendo um total de 3.000 horas para a conclusão do ciclo.

As mudanças têm como objetivos garantir a oferta de educação de qualidade a todos os jovens brasileiros e de aproximar as escolas à realidade dos estudantes, considerando as novas demandas e complexidades do mundo do trabalho e da vida em sociedade.

Os estudantes ficam mais tempo na escola e desenham suas unidades de aprendizagem com mais flexibilidade, alinhando-as às próprias expectativas. A ênfase se dará em atividades práticas e menos em aulas expositivas.

Os professores usam as competências e as habilidades como referência no processo de ensino-aprendizagem e trabalham as atividades educativas de forma mais personificada e contextualizada, ajustando suas estratégias ao perfil do estudante.

Aos gestores escolares é ampliada a possibilidade de estabelecimento de parcerias com outras escolas ou instituições, favorecendo um maior alinhamento ao perfil da comunidade escolar, em consonância com as expectativas dos professores e estudantes.

1.1. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular é um documento oficial que dispõe sobre as competências e habilidades previstas para os estudantes em todo o percurso de escolarização da Educação Básica, além de orientar a construção dos currículos em todo o território nacional e servir como um norteador da Educação em quaisquer espaços e comunidades educativas.

Ao mesmo tempo que valoriza os saberes locais, a BNCC apresenta-se como uma solução eficiente e justa às desigualdades educacionais de aprendizagens dos milhões de estudantes no país.

Com o objetivo de garantir um conjunto mínimo de habilidades, competências e conhecimentos, a BNCC conta, ainda, com uma parte que deve ser garantida a todos e outra que possibilita ajustes de acordo com a realidade local, comunitária.

Organizada em áreas do conhecimento – Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas –, a BNCC oferece oportunidades formativas aos estudantes em todas as dimensões do desenvolvimento humano.

Ao apresentar as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em diálogo com a Matemática, esta obra promove, de forma orgânica, articulações indispensáveis para o trabalho com competências e habilidades referentes ao indivíduo, à sociedade, à natureza, à cultura, ao território, à política e ao protagonismo juvenil, por meio da abstração e do estabelecimento de hipóteses, advindos do raciocínio lógico, da representação abstrata, da argumentação científica e da análise probabilística de complexos fenômenos do mundo.

1.2. Temas Contemporâneos Transversais (TCT) na BNCC

Desenvolver situações de ensino-aprendizagem condizentes com a realidade contemporânea dos estudantes é tarefa primordial de qualquer comunidade escolar. Essas situações devem proporcionar integração dos saberes e favorecer o aprimoramento dos sujeitos nas dimensões sociais, éticas, profissionais, culturais, políticas e cidadãs. Por meio do respeito à diversidade e da capacidade consciente de cuidar de si e dos outros, devem, ainda, possibilitar o desenvolvimento do pensamento científico e o contato com as mais modernas formas de tecnologia.

A articulação dessas formas de conhecimento e inserção dos estudantes na sociedade é facilitada quando da adoção de Temas Contemporâneos Transversais que perpassem, hamornicamente, os percursos formativos, superando reducionismos e fragmentações.

MODERNA

Veja, a seguir, algumas macroáreas temáticas que abrangem os TCTs trabalhados nesta obra.

Capítulo	Macroáreas temáticas
1. Matemática e Arte: a perspectiva geométrica	Multiculturalismo Ciência e Tecnologia
2. Orientação e localização	Ciência e Tecnologia Cidadania e Civismo Economia
3. Modelagem matemática	Cidadania e Civismo Meio ambiente Saúde
4. Medições surpreendentes	Ciência e Tecnologia Cidadania e Civismo Saúde
5. Os sistemas digitais e a base binária	Ciência e Tecnologia Economia
6. Análise de tendências	Meio Ambiente Economia Ciência e Tecnologia
7. Tratando dados experimentais	Saúde Cidadania e Civismo
8. Criptografia: da esfera militar ao domínio público	Ciência e Tecnologia Multiculturalismo Economia

2. Apresentação da obra

2.1. Abordagem teórico-metodológica

Educar é introduzir novas gerações no conhecimento historicamente produzido por determinado grupo cultural em certo tempo. É perfeitamente possível vislumbrarmos que esse processo ocorra em diferentes cenários, contextos, tempos e por diferentes grupos, mas parece indiscutível que o ambiente social mais organizado sistematicamente para que haja essa inserção cultural é a escola.

Com o intuito de evitar que o processo de ensino-aprendizagem fique restrito a conteúdos fragmentados, a Educação e a escola sugerem que é por meio de modificações e ressignificações que a aprendizagem será potencializada. Consideramos que a partir da integração de conteúdos será possível proporcionar aos estudantes ferramentas de compreensão mais coerentes com o mundo e os fenômenos que os cercam. Ainda, a adoção de técnicas e métodos de ensino mais alinhados ao dinamismo da sociedade contemporânea é urgente. Propomos, nesta obra, uma abordagem centrada no estudante e na aprendizagem. Priorizamos uma aprendizagem que possibilite o diálogo, a convivência, a construção de uma identidade crítica e participativa. As estratégias adotadas favorecem a formação de estudantes capazes de analisar e construir hipóteses, dialogar, aceitar, convencer, concordar, entre outras competências e habilidades socioemocionais indispensáveis para a convivência social.

São propostas, também, ações que permeiem as mais avançadas Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), pensamento computacional, o desenvolvimento de capacidades metacognitivas que estimulem a formação integral do estudante, articulando a sociedade, a política, a cultura e as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em diálogo com a Matemática, mas, prioritariamente, as relações que se estabelecem entre todas elas, superando reducionismos e fragmentações.

Outro aspecto fundamental a ser destacado é a atenção dedicada aos diferentes ritmos de aprendizagem. Cada jovem percorre trajetórias formativas humanas, culturais e educativas distintas. Educar integralmente e potencializar a superação de desigualdades ou distorções educativas pressupõe, indiscutivelmente, considerar a possibilidade de que cada estudante avance em seu próprio ritmo de aprendizagem. Auxiliados quando precisarem de maior apoio ou trilhando de maneira mais autônoma a rota de aprendizagem, cada um pode avançar em seu próprio ritmo. As atividades avaliativas propostas nesta obra se apresentam como estratégias educacionais e possibilitam aos professores uma revisão constante das aprendizagens e dos progressos individuais ou coletivos dos estudantes.

MODERNA

O desenvolvimento de competências gerais está organicamente ligado à adoção de estratégias de ensino que favoreçam a aquisição de conhecimentos, habilidades e atitudes, quais sejam cognitivas, sociais, afetivas, éticas, de inserção e relacionamento. Nesse sentido, o diálogo entre as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a Matemática se estabelece, não pela aproximação, mas pelo planejamento cuidadoso e técnico de formas de aprendizagem orientadas pela educação integral.

2.2. Objetivos e estratégias

2.2.1. Pensamento científico

Toda obra educacional deve conduzir o estudante a níveis de pensamento e compreensão cada vez mais autônomos, superando reducionismos e superficialidades. Ao longo deste livro, o estudante é encaminhado, por meio do pensamento científico, à confrontação de hipóteses, testagens de possibilidades, inferências com base em aspectos parciais da realidade, entre outras práticas formativas. A elaboração e constatação de hipóteses é embasada em leituras, dados reais e referências bibliográficas atualizadas.

Além disso, a obra favorece o uso de metodologias ativas de aprendizagem, tornando o estudante um sujeito protagonista de sua própria formação, conduzindo-o no processo de suplantar o senso comum e encontrar explicações objetivas a partir da Ciência, como é possível verificar no Capítulo 7, em que são apresentados dados epidemiológicos da saúde populacional, relacionando-os à Matemática, à Ciência, à saúde e à sociedade de maneira sistemática.

2.2.2. Pensamento computacional

O ensino meramente técnico de memorização contribui pouco para o desenvolvimento integral dos estudantes. Como forma de superar reducionismos e potencializar a formação holística, organizamos tarefas, textos e atividades que estimulam o pensamento complexo, as múltiplas inteligências, e tomamos como referência os eixos que compõem o pensamento computacional: **decomposição** (capacidade de fragmentação de situações-problema em partes menores, mais compreensíveis e solucionáveis), **reconhecimento de padrões** (capacidade de identificar regularidades e relações entre fenômenos), **abstração** (capacidade de inferir, a partir de partes do fenômeno, extrapolações e induções para contextos distintos) e **algoritmo** (capacidade de identificar e sequenciar corretamente os passos para a solução de uma situação-problema).

Ao longo da obra, propusemos atividades que os contemplassem, por exemplo:

- No Capítulo 3 (Atividade 3, p. 53), um problema é **decomposto** em situações mais simples. Supomos que a variação da temperatura do planeta seja diretamente proporcional à variação de tempo correspondente no intervalo (2000, 2100), em ano, indicando-o no eixo das abscissas de um sistema cartesiano. Para facilitar, representamos os anos 2000, 2001, 2002, ..., 2100 pelos números 0, 1, 2, 3, ..., 100. **Identificamos padrões** (se estamos supondo uma variação linear, então a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é constante, no caso, 0,058 °C por ano). **Abstraímos** para uma situação geral por meio de um **algoritmo**. Se em um intervalo (a, b), com $a < b$, a taxa de variação de uma função $y = f(x)$ é uma constante m, e $f(a) = c$ então para qualquer número real α, com $a \leq \alpha \leq b$, tem-se $f(\alpha) = m\alpha + c - ma$. *Nota:* Esse algoritmo foi elaborado a partir da equação fundamental da reta $(y - y_0) = m(x - x_0)$.
- No Capítulo 8, o texto “Um método da criptoanálise” (p. 122-124), apresenta um exemplo em que uma mensagem escrita na língua portuguesa, com 3.600 palavras, foi criptografada, substituindo-se cada letra por um símbolo. Observe o pensamento computacional na decifração do criptograma: inicialmente, **decompomos** o problema em situações mais simples (contamos quantas vezes cada símbolo aparece no texto; a seguir dividimos o resultado de cada contagem por 3.600, obtendo os respectivos percentuais); **identificamos padrões** (comparamos cada percentual obtido anteriormente com os da tabela das frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa, com o que conjecturamos sobre a letra representada por cada símbolo); **abstraímos** e generalizamos para uma situação geral por meio de um **algoritmo** (se uma mensagem criptografada por símbolos representa um texto da língua portuguesa em que cada símbolo representa uma letra, então é provável que a letra representada por cada símbolo seja determinada pelo percentual com que esse símbolo aparece no texto, de acordo com a tabela das frequências relativas das letras).

2.2.3. Práticas de pesquisa

Acreditamos que o incentivo às práticas de aprender a aprender deva perpassar todo o percurso formativo dos estudantes. Nesta obra, são apresentadas, de maneira sistemática, atividades que favoreçam o desenvolvimento da curiosidade, da investigação intelectual e da solução de situações-problema minuciosamente planejadas para a consecução desta competência tão importante para o mundo em constante transformação.

Organizamos práticas de revisão bibliográfica no Capítulo 2, por exemplo, em que o estudante se aprofunda intelectualmente no assunto desenvolvido. Também no Capítulo 2, apresentamos a realização de análises da realidade do contexto social por meio de amostragens, seguida de extrapolação e inferências. No Capítulo 3, os estudantes são convidados a realizar análises de mídias sociais e elaboração de questionários para grupo focal, o que lhes confere habilidades de interpretar dados de indivíduos, de grupos e de redes. Como forma de sensibilizar os estudantes à pesquisa e favorecer a percepção de que as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a Matemática não devem ser compreendidas de forma dicotômica, as tarefas são propostas de forma orgânica no desenvolvimento da obra.

© MODERNA

2.2.4. Uso de tecnologias digitais

A inserção de novas mídias e tecnologias, o ensino de discursos multimodais, a implantação de técnicas de programação básica estão presentes nesta obra, sempre de maneira integrada aos conteúdos de Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Ao longo dos capítulos, preparamos atividades que possibilitam aos estudantes a compreensão e o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).

Apresentamos, por exemplo, no Capítulo 8 (p. 117-118), o funcionamento das tecnologias de criptografia, do código de barras e como a informação é transmitida de forma segura. No Capítulo 3 (atividade 8, p. 56), o estudante é estimulado a trabalhar com análises de mídia por meio de consultas públicas que ocorrem de forma *on-line*, mas também oferecemos oportunidades educativas aos que, por quaisquer motivos, não tenham acesso a essas ferramentas. Há, ainda, atividades propostas para a apresentação de trabalhos na comunidade escolar por meio de *softwares* de imagens, elaboração de vídeos, entre outras linguagens multimodais como formas de favorecer o diálogo entre a educação escolar e às tecnologias digitais locais e globais.

2.3. A estrutura da obra

A familiaridade com a sala de aula e experiência dos autores com o cotidiano docente fazem desta obra uma das mais adaptadas ao conexto educacional contemporâneo. Este livro busca facilitar o trabalho do professor e promover, de forma mais significativa, as aprendizagens dos estudantes.

Visando abordar as competências e as habilidades das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em diálogo com a Matemática, de forma integrada, a obra foi sistematizada conforme descrito a seguir.

Os capítulos foram elaborados e sequenciados considerando as competências e habilidades prospectadas na BNCC e os conhecimentos prévios dos estudantes. Para que o percurso formativo fosse facilitado, organizamos seções explicativas que ajudam a abordagem dos conteúdos e permitem, ainda, que tópicos específicos sejam localizados com mais agilidade.

Veja itens que compõem os capítulos:

Abertura de capítulo

Cada capítulo inicia com um texto relevante sobre o assunto que será abordado e uma imagem relacionada a ele. Apresenta um caráter mais genérico e demonstra em que campos da vida o conteúdo pode ser observado.

Explorando conexões

Em toda a obra, de forma orgânica e integrada, as relações entre as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas estão presentes, mas nesta seção o professor e os estudantes podem visualizar tais conexões de forma sistemática, por meio de textos e atividades que abordam o conteúdo do capítulo.

Texto complementar

Esta seção traz textos que servem de suporte e ampliação do conhecimento apresentado ao longo do capítulo. Sempre aumentando a compreensão e possibilitando análises mais profundas, os textos complementares tornam a obra ainda mais fecunda e relacionada ao cotidiano social.

Entendimento do texto

Esta seção, parte do *Texto complementar*, possibilita a consolidação e o aprofundamento das expectativas de aprendizagens propostas no texto e no capítulo, além de estimular o pensamento crítico e autônomo e promover intersecção das áreas de Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Observação

Definições, conceitos ou contextualizações rápidas e objetivas em formato de boxe, que favorecem a compreensão de trechos específicos do texto-base.

Atividades

Exercícios de aplicação do conteúdo apresentado no capítulo. São orientadas predominantemente por metodologias de aprendizagem que favorecem o desenvolvimento das competências e habilidades indicadas na BNCC.

Atividade complementar

Esta seção traz propostas que envolvem recursos como vídeos, *softwares* e acesso à internet e deve ser desenvolvida conforme as características de cada turma e as necessidades didáticas. Exploramos as mídias digitais às quais alguns estudantes podem não ter acesso, por isso sugerimos ao professor que, se necessário, substitua a atividade.

3. Alinhamento com a BNCC

3.1. A concepção da obra e a BNCC

As competências gerais são trabalhadas em todos os seus aspectos ao longo da obra. As competências 8, 9 e 10, por exemplo, são trabalhadas em todos os capítulos, em especial nas atividades em grupo, ao promover debates, mobilizar ponderações condizentes com o convívio social e estimular atitudes de responsabilidade e cidadania nas pesquisas solicitadas.

As competências gerais 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são contempladas ao longo do livro, como nos exemplos a seguir: texto introdutório do Capítulo 1 ("Matemática e arte: A perspectiva geométrica", p. 12); no texto "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, cap. 2, p. 32-33); em "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, cap. 1, p. 26-27); na atividade complementar 9 (cap. 1, p. 18), que sugere o filme *2001 – Uma odisseia no espaço*; no texto "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, cap. 5, p. 87-88); no boxe *Sugestão*, cap. 5, p. 81); no texto "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas", (*Explorando conexões*, cap. 3, p. 56-58); e os vários exercícios para resolução em grupos, distribuídos pelos capítulos.

MODERNA

A Matemática exige, quase em sua totalidade, o **pensamento computacional**, pois ao nos depararmos com um problema fazemos sua decomposição em problemas menores, identificamos padrões, abstraímos para uma situação geral e criamos algoritmos ou utilizamos aqueles já estabelecidos. Por isso, as competências específicas dessa área e as habilidades correspondentes são trabalhadas sob a ótica do pensamento computacional.

No Capítulo 3 (*Modelagem matemática*), por exemplo, para o cálculo da capacidade, em litro, de um tanque ("Situação 3: usando figuras como modelos", p. 52), dividimos o problema em situações menores (comparando o tanque com um tronco de cone), identificamos padrões (semelhança de triângulos) e abstraímos para uma situação geral (o volume do tanque é igual à diferença entre os volumes de dois cones).

No Capítulo 4, no texto "Outro método para o cálculo do raio da Terra" (p. 67), partimos de uma situação mais simples (de um ponto P, localizado próximo a uma praia à altura h em relação ao nível do mar, mira-se um ponto Q da linha do horizonte marítimo, obtendo-se a medida θ do ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ forma com a vertical), identificamos padrões (a situação pode ser representada por um triângulo retângulo) e abstraímos para uma situação geral (fórmula do cálculo do seno em um triângulo retângulo).

Sob essa concepção, cujo foco é a formação integral do jovem, a obra busca o desenvolvimento de competências das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas em diálogo com a Matemática.

3.2. O trabalho com competências gerais, competências específicas e habilidades

No universo profissional, o conceito de habilidade pode ser entendido como a capacidade de pôr em prática os conhecimentos adquiridos. Já o conceito de competência é mais abrangente: consiste em reunir e coordenar conhecimentos sobre determinado assunto com atitudes e habilidades.

No contexto da Educação, a ideia de habilidade é, aproximadamente, a mesma do universo profissional. Por exemplo, podemos citar os seguintes tipos de habilidade:

- **Habilidades cognitivas:** interesse, autonomia de aprendizado, reflexão e crítica.
- **Habilidades práticas:** iniciativa na compreensão de um novo assunto e na resolução de problemas.
- **Habilidades sociais:** modéstia, comunicação, cooperação e interação.
- **Habilidades técnicas:** capacidade de unir conhecimentos de áreas afins na resolução de problemas.
- **Habilidades emocionais:** persistência, disciplina, capacidade de ouvir e respeitar opiniões diferentes.

Contudo, o conceito de competência é definido no universo escolar de diferentes maneiras pelos pesquisadores. Nesta obra adotamos a definição da BNCC, segundo a qual "competência é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". As competências são subdivididas em dois tipos: específica e geral, conforme detalhamento a seguir.

- As **competências específicas** de cada área do conhecimento estão relacionadas aos conteúdos da área e às habilidades afins.
- As **competências gerais** se relacionam com todas as áreas do conhecimento e suas competências específicas, com as respectivas habilidades, almejando a formação global do estudante.

A BNCC está estruturada em conformidade com essas competências e habilidades; logo, segundo essa orientação, o trabalho em sala de aula deve vincular os três conceitos: competência geral, competência específica e habilidade. Uma ou mais habilidades estão relacionadas a uma competência específica, e cada uma está relacionada a uma ou mais competências gerais.

A seguir, apresentamos exemplos da obra, destacando essas relações.

- O texto "Perspectiva exata" (cap. 1, p. 19), que demanda o conceito de semelhança de triângulos, explora, por exemplo, a habilidade EM13MAT105 relacionada à competência específica 1, que procura utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos. Conjuntamente, essa competência específica se relaciona às competências gerais 1, 2 e 6, ao valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, para entender e explicar a realidade; ao exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria da Matemática para resolver problemas com base em conhecimentos de diferentes áreas; e ao valorizar a diversidade de saberes, propiciando conhecimentos e experiências que possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho.
- O tópico "Situação 1: área máxima" (cap. 3, p. 48) que aborda cálculos para a determinação do valor máximo de uma função do 2º grau em um contexto envolvendo superfície, aborda, por exemplo, a habilidade EM13MAT503, relacionada à competência específica 5, que procura investigar e estabelecer conjecturas a respeito de conceitos e propriedades matemáticas, inclusive, por meio da observação e experimentação. Ao mesmo tempo, essa competência específica se relaciona às competências gerais 1, 2 e 4 ao valorizar e utilizar conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, para entender e explicar a realidade; exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria da Matemática para resolver problemas com base em conhecimentos de diferentes áreas; e utilizar as linguagens visual, matemática e científica para se expressar e compartilhar informações.
- No Capítulo 5, a atividade 5 (p. 83) que trata da resolução de problema de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis, por exemplo, trabalha a habilidade EM13MAT310, relacionada à competência específica 3, que busca utilizar

MODERNA

estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados. Ao mesmo tempo, essa competência específica se relaciona às competências gerais 2 e 6, na medida em que exercita a curiosidade intelectual, a investigação e a análise crítica; explora a diversidade de saberes e possibilita compreender as relações próprias do mundo do trabalho.

- No Capítulo 3 (*Modelagem matemática*, p. 47), diversas habilidades são potencializadas. Chamamos especial atenção à seção *Explorando conexões* ("Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias", p. 55), em que os estudantes são convidados a refletir sobre atividade física e sedentarismo, participação na tomada de decisão política de forma democrática e inserção nas atividades da comunidade por meio de atitude positiva. Esses aspectos possibilitam trabalhar as competências gerais 2 e 3, além das competências específicas 1 e 2. Destacamos, ainda, as habilidades EM13CHS103 e EM13CHS105.
- Em relação às formas de envolver o estudante ativamente em seu percurso educativo, engendramos metodologias ativas e habilidades que potencializam o protagonismo, sugerindo, inclusive, o uso de discursos multimodais, como é possível observar, por exemplo, no Capítulo 2 (*Orientação e localização*, p. 28). A competência geral 2 é abordada na seção *Explorando conexões* ("O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica", p. 39). A atividade 1 (p. 31) favorece a consecução da competência específica 1 e da habilidade EM13CHS106.
- No Capítulo 7, como forma de desenvolver nos estudantes as competências gerais 4, 7 e 8, optamos pelo texto "Saúde em primeiro lugar", seção *Explorando conexões* (p. 104). Nele são abordadas as relações existentes entre o sedentarismo no Brasil e os impactos na saúde e qualidade de vida da população. O texto inclui gráficos, análises e referências atualizadas, que possibilitaram promover a consecução da competência específica 1 e da habilidade EM13CHS103.

Distribuição das competências gerais

Competência geral	Justificativa	Capítulo
1	Essa competência diz respeito ao conhecimento e como compartilhá-lo e aplicá-lo, em todas as suas dimensões, no mundo contemporâneo, objetivando o bem-estar social. Para isso, apresentamos a Ciência como uma progressiva criação humana, capaz de descrever os fenômenos que nos cercam.	**Capítulo 1** "Perspectiva exata"(p. 19-21) "A perspectiva isométrica"(p. 22-24) "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, p. 26-27) **Capítulo 2** "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) **Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) **Capítulo 4** "Medições indiretas de distâncias" (p. 66-68) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74-75) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 5** "Sistemas numéricos e a representação interna dos dados no computador" (*Sugestão*, p. 78) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** Texto introdutório (p. 91-92) "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) **Capítulo 7** "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109-110)

MODERNA

Competência geral	Justificativa	Capítulo
2	Resumidamente, essa competência trata do pensamento científico, crítico e criativo. Em busca da competência fundamental (“aprender a aprender”) recorremos à progressão do pensamento científico, ao pensamento computacional, às relações interdisciplinares, à contextualização, aos aspectos históricos, aos múltiplos registros de representação, à tecnologia digital e ao raciocínio crítico de análise.	**Capítulo 1** Atividade complementar 9 (p. 18) Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 2** “Tecnologias, culturas e localização” (*Explorando conexões*, p. 32-33) “O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica” (*Explorando conexões*, p. 39) “GPS como rede social: deslocamento conectado” (*Explorando conexões*, p. 43-44) **Capítulo 3** “Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias” (*Explorando conexões*, p. 55) “Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas” (*Explorando conexões*, p. 56-57) **Capítulo 4** “Medindo conhecimentos” (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 5** "Sistemas numéricos e a representação interna dos dados no computador" (*Sugestão*, p. 78) “*Bytes* e o padrão ASCII” (p. 84-85) “O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*” (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** Texto introdutório (p. 91-92) “Entenda como analistas fazem projeções para a economia” (*Explorando conexões*, p. 98) **Capítulo 7** “Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)” (*Explorando conexões*, p. 109-110)
3	O repertório cultural, foco dessa competência, relaciona-se à cultura e à Arte. Entendendo as Ciências como uma herança cultural, recorremos frequentemente aos seus aspectos históricos para compreender o contexto em que foi concebido cada conceito. Em relação à Arte, poderíamos também citar aspectos da Matemática, mas de uma maneira mais específica, exploramos vídeos ilustrativos, disponíveis na internet.	**Capítulo 1** “A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick” (*Explorando conexões*, p. 17-18) Atividade complementar 9 (p. 18) “Movimentos artísticos” (*Explorando conexões*, p. 24-25) “Perspectiva aérea ou atmosférica” (*Texto complementar* e *Entendimento do texto*, p. 26-27) **Capítulo 3** “Ação da cidadania” (*Sugestão*, p. 57) **Capítulo 5** *Sugestões* (p. 85) “O que é CGI e computação gráfica?” (*Explorando conexões*, p. 87-88)

MODERNA

Competência geral	Justificativa	Capítulo
4	A comunicação é o fundamento dessa competência. Ela é contemplada por vários recursos, como a própria linguagem da Matemática, que pode ser escrita, simbólica, tabular ou gráfica; os infográficos e os vídeos sugeridos, como linguagens artística e visual; os trabalhos em equipe, que requerem a linguagem oral; e a utilização de *softwares*, que exploram a linguagem digital.	**Capítulo 1** "O ponto de fuga"(p. 13-16) "A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick" (*Explorando conexões*, p. 17-18) "Perspectiva exata" (p. 19-20) "Perspectiva isométrica" (p. 22-24) "Movimentos artísticos" (*Explorando conexões*, p. 24-25) "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, p. 26-27) **Capítulo 2** "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) **Capítulo 4** "Medições indiretas de distâncias" (p. 66-68) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH (*Explorando conexões*, p. 74-75) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 5** "Entenda como funciona o código de cores RGB" (*Sugestão*, p. 81) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) **Capítulo 7** "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109-110) **Capítulo 8** "A criptografia como tática de guerra" (p. 114-115) "A loira do banheiro" (*Sugestão*, p. 116) "Como funciona o código de barras?" (*Explorando conexões*, p. 117-118) Atividade 5 (p. 121) "Um método da criptoanálise" (p. 122-123)
5	Cada vez mais a cultura digital impõe novos desafios ao mundo contemporâneo e, consequentemente, à escola, na formação de novas gerações. Há pouco tempo, ainda se discutia o uso da calculadora em sala de aula. Atualmente, não só o uso da calculadora, como também o do computador em sala de aula são consenso entre os educadores. De acordo com essa orientação, mobilizamos a cultura digital por meio do uso da calculadora e de *softwares* matemáticos, além de sugestões de pesquisas na internet.	**Capítulo 1** Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 2** Atividades 6 e 8 (p. 40; p. 42) **Capítulo 5** "Entenda como funciona o código de cores RGB" (*Sugestão*, p. 81) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software" (Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) "A previsão como instrumento do planejamento" (*Texto complementar*, p. 99-101) **Capítulo 7** "Análise espacial (interpolação)" (*Sugestão*, p. 111) **Capítulo 8** Atividade 1 (p. 116) "Como funciona o código de barras?" (*Explorando conexões*, p. 117-118) "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)

MODERNA

Competência geral	Justificativa	Capítulo
6	Essa competência se relaciona ao trabalho e ao projeto de vida, com o objetivo de ajudar o jovem a direcionar o próprio futuro. Para isso são necessários reflexão, organização, planejamento, persistência e autoconfiança, entre outros. Buscando atender a essa competência, exploramos situações envolvendo um projeto de pesquisa ou formas de atuação profissional.	**Capítulo 3** Atividades 2; 4-6 (p. 53-54) **Capítulo 4** "O que é o Inmetro" (*Explorando conexões*, p. 64-65) **Capítulo 5** "Entenda como funciona o código de cores RGB" (*Sugestão*, p. 81) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90)
7	Argumentar não é opinar. A opinião é subjetiva, enquanto a argumentação é fundamentada em fatos, dados, lógica e provas capazes de embasar uma afirmação. Procuramos mobilizar essa competência por meio de textos jornalísticos ou científicos, demonstrações, atividades em grupos e trabalhos em equipe.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) **Capítulo 4** Imagem de abertura (o Pêndulo de Foucault, p. 62) "Medições indiretas de distâncias" (p. 66-68) "Medições indiretas de tempo" (p. 71-72) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74-75) **Capítulo 6** Texto introdutório (p. 91-92) "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109-110)
8	Essa competência trata do autoconhecimento e do autocuidado, em toda a extensão possível na faixa etária e no nível de ensino em que se encontra o estudante. O autoconhecimento diz respeito a reconhecer seus limites, o que ajuda a encontrar meios de superá-los, quando possível; o autocuidado se refere ao que se deve cultivar para melhorar a qualidade de vida física e emocional. Em relação à saúde física, a atenção é voltada à alimentação saudável, aos exercícios físicos e aos cuidados médicos. No entanto, zelar pela saúde emocional pode não ser tão óbvio, pois os seres humanos não reagem da mesma maneira diante das situações. Contudo, entendemos que há uma intersecção (não vazia) nessas reações, e é aí que podemos agir, por exemplo: despertar a autoconfiança e a autoestima diante do sucesso na resolução de um problema, reforçar o autocontrole e a socialização nos trabalhos em grupo. Entendemos que as atividades em grupo, distribuídas ao longo do livro, contribuem para o desenvolvimento emocional do estudante, na medida em que estimula atitudes, como empatia, respeito, doação, dedicação e autocontrole ao lidar com diferentes opiniões. Por isso, de forma geral, esta competência é trabalhada em todos os capítulos.	**Capítulos de 1 a 8** Atividades em grupo e propostas de pesquisa **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105)

MODERNA

Competência geral	Justificativa	Capítulo
9	Entendemos que as atividades em grupo, distribuídas ao longo do livro, mobilizam essa competência, na medida em que estimulam a discussão e contribuem para o desenvolvimento de atitudes, como saber esperar a vez de falar, dividir tarefas e se comprometer com elas, ajudar os colegas e lidar com diferentes opiniões. Por isso, de forma geral, esta competência é trabalhada em todos os capítulos.	**Capítulos de 1 a 8** Atividades em grupo e propostas de pesquisa
10	Responsabilidade e cidadania são os principais aspectos dessa competência, e a estreita ligação entre elas é possibilitada pelo trabalho em equipe. Entendemos que as atividades em grupo, distribuídas ao longo do livro, mobilizam essa competência, na medida em que estimulam a discussão e contribuem para o desenvolvimento de atitudes como saber esperar a vez de falar, dividir tarefas e se comprometer com elas, ajudar os colegas e lidar com diferentes opiniões. Por isso, de forma geral, esta competência é trabalhada em todos os capítulos.	**Capítulos de 1 a 8** Atividades em grupo e propostas de pesquisa

Distribuição das competências específicas e habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13CHS101	A habilidade é contemplada na medida em que confronta relações existentes entre tempo e espaço e tecnologias, possibilitando análises de diferentes relatos, expressos em diversas linguagens, na intenção de compreender processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais.	**Capítulo 1** “Perspectiva aérea ou atmosférica” (*Texto complementar*, p. 26-27) Atividade complementar 9 (p. 18) Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 2** “Tecnologias, culturas e localização” (*Explorando conexões*, p. 32-33) “O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica” (*Explorando conexões*, p. 39) **Capítulo 3** “Situação 2: cálculo de uma população” (p. 50-52) “Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas” (*Explorando conexões*, p. 56-57) “Dinâmicas populacionais” (*Texto complementar*, p. 59-61) **Capítulo 5** “*Bytes* e o padrão ASCII” (p. 84-85) “O que é CGI e computação gráfica?” (*Explorando conexões*, p. 87-88) “O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*” (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** “Entenda como analistas fazem projeções para a economia” (*Explorando conexões*, p. 98) **Capítulo 8** “A criptografia como tática de guerra” (p. 114-115)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13CHS102	Esta habilidade é contemplada ao abordarmos, historicamente, as transformações nos hábitos, estilo de vida e o conceito de saúde de acordo com as circunstâncias geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais.	**Capítulo 1** “Perspectiva aérea ou atmosférica” (*Texto complementar*, p. 26-27) Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 3** “Situação 2: cálculo de uma população” (p. 50-52) **Capítulo 7** “Saúde em primeiro lugar” (*Explorando conexões*, p. 104-105) **Capítulo 8** “A criptografia como tática de guerra” (p. 114-115) “Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho à distância” (*Explorando conexões*, p. 125)
	EM13CHS103	Esta habilidade é trabalhada ao sugerir ao estudante análises de dados reais, apresentados em gráficos e tabelas, relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos.	**Capítulo 1** Atividade complementar 9 (p. 18) “Perspectiva aérea ou atmosférica” (*Texto complementar*, p. 26-27) **Capítulo 2** “Orientando-se pelo Sol” (p. 30) “Tecnologias, culturas e localização” (*Explorando conexões*, p. 32-33) “Coordenadas geográficas” (p. 34-36) **Capítulo 3** “Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias” (*Explorando conexões*, p. 55) Atividades 7 e 8 (p. 56) **Capítulo 4** “O que é o Inmetro” (*Explorando conexões*, p. 64-65) Atividades 1 e 2 (p. 65) “Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH” (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) **Capítulo 5** “*Bytes* e o padrão ASCII” (p. 84-85) “O que é CGI e computação gráfica?” (*Explorando conexões*, p. 87-88) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) “Consumo de água no mundo” (*Explorando conexões*, p. 93) “Entenda como analistas fazem projeções para a economia” (*Explorando conexões*, p. 98) Atividade 3 (p. 99) **Capítulo 7** “Saúde em primeiro lugar” (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividade 1 (p. 105) “Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)”, (*Explorando conexões*, p. 109) Atividades 5 e 6 (p. 110) **Capítulo 8** “A criptografia como tática de guerra” (p. 114-115) “Como funciona o código de barras?” (*Explorando conexões*, p. 117-118)
	EM13CHS104	Referências que possibilitam a percepção de impactos e mudanças históricas em movimentos artísticos e culturais, decorrentes de valores, crenças e práticas de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço sustentam o trabalho com essa habilidade.	**Capítulo 1** Atividade 14 (p. 26) **Capítulo 2** “Tecnologias, culturas e localização” (*Explorando conexões*, p. 32-33) **Capítulo 8** “A criptografia como tática de guerra” (p. 114-115)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13CHS105	Esta habilidade é contemplada na abordagem das diferenças relacionadas a oposições dicotômicas como tipo de cultura, regionalismo, desenvolvimento tecnológico e formas de orientação e localização no tempo e no espaço, explicitando suas ambiguidades.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) Atividade 6 (p. 40) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) **Capítulo 8** "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)
	EM13CHS106	A habilidade é contemplada ao incentivar os estudantes no uso sistemático de linguagens multimodais, por meio da elaboração de gráficos, tabelas e vídeos para comunicar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.	**Capítulo 1** Atividade complementar 9 (p. 18) "Perspectiva aérea ou atmosférica" (*Texto complementar*, p. 26-27) **Capítulo 2** "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) Atividades 5 e 6 (p. 40) **Capítulo 3** Atividade 10 (p. 58) **Capítulo 5** "Visão computacional: como o computador vê uma imagem" (*Explorando conexões*, p. 80) "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** Atividade 3 (p. 99) **Capítulo 7** "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109) Atividades 5 e 6 (p. 110) **Capítulo 8** Atividade 1 (p. 116) "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho à distância" (*Explorando conexões*, p. 125)
2	EM13CHS201	A habilidade é contemplada na medida em que há propostas de análises da variação populacional em decorrência de muitos fatores, como, por exemplo, eventos políticos, econômicos, sociais e migrações.	**Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) "Dinâmicas populacionais" (*Texto complementar*, p. 59-61)
	EM13CHS202	A habilidade é trabalhada na abordagem de transformações sociais na forma de participação democrática nas decisões políticas, sociais, ambientais, econômicas e culturais.	**Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) Atividade 2 (p. 53) "Conselhos municipais: democratizando decisões comunitárias" (*Explorando, conexões*, p. 55) Atividade 8 (p. 56) "Dinâmicas populacionais" (*Texto complementar*, p. 59-61) **Capítulo 8** Atividade 1 (p. 116) "Como funciona o código de barras?" (*Explorando conexões*, p. 117-118) "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
2	EM13CHS204	A habilidade é contemplada ao apresentarmos como diferentes grupos de atores sociais podem se tornar agentes políticos, participarem do processo de superação de desigualdades e minimização de conflitos em decorrência da diversidade étnico-cultural e características socioeconômicas, políticas e tecnológicas.	**Capítulo 3** “Conselhos municipais: democratizando decisões comunitárias” (*Explorando, conexões*, p. 55) Atividades 7 e 8 (p. 56) **Capítulo 8** “A criptografia como tática de guerra” (p. 114-115) “Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma” (*Texto complementar*, p. 126-127)
3	EM13CHS301	A problematização do consumo responsável e a questão de alternativas para enfrentamento dos problemas advindos desses hábitos, além do reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas sustentam o trabalho com essa habilidade.	**Capítulo 3** “Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas” (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) “Consumo de água no mundo” (*Explorando conexões*, p. 93) **Capítulo 7** “Saúde em primeiro lugar” (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividades 1 (p. 105) “Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)” (*Explorando conexões*, p. 109)
	EM13CHS302	A habilidade é contemplada na abordagem das consequências econômicas e socioambientais do desperdício de água e alimentos em cadeias produtivas ligadas à obtenção de recursos naturais e às práticas agropecuárias em diferentes ambientes.	**Capítulo 3** “Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas” (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 6** “Consumo de água no mundo” (*Explorando conexões*, p. 93)
	EM13CHS303	A habilidade é contemplada na apresentação de técnicas utilizadas pela Arte e pela indústria cultural para aumentar a base de consumidores a partir de estratégias de massificação e seus impactos econômicos e socioambientais.	**Capítulo 1** “A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick” (*Explorando conexões*, p. 17-18) “Movimentos artísticos” (*Explorando conexões*, p. 24-25)
	EM13CHS304	Essa habilidade é observada na análise das repercussões socioambientais derivadas de diversas práticas, discutindo suas origens e incentivando o debate sobre sustentabilidades de forma consciente e coletiva.	**Capítulo 3** “Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas” (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 6** “Consumo de água no mundo” (*Explorando conexões*, p. 93)
	EM13CHS306	A explicitação do desequilíbrio entre produção sustentável, desperdício e escassez de recursos naturais e, ainda, os desdobramentos da agressão humana aos sistemas de agrobiodiversidade, agroflorestais e o impacto na economia global, regional, local e comunitária mobilizam essa habilidade.	**Capítulo 3** “Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas” (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 6** “Consumo de água no mundo” (*Explorando conexões*, p. 93)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
4	EM13CHS401	A habilidade é atendida na apresentação do desenvolvimento tecnológico e cultural entre classes sociais e sociedades com culturas diferentes, novas técnicas de trabalho ao longo do tempo e em diversos contextos e ocupação dos espaços urbanos e rurais.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) **Capítulo 5** "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 8** "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)
	EM13CHS402	A habilidade é contemplada na apresentação de indicadores de renda em diferentes espaços, escalas e tempos e das diferentes iniciativas de combate à desigualdade socioeconômica por meio de direitos sociais como emprego, saúde e educação.	**Capítulo 4** "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) **Capítulo 6** "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) Atividade 2 (p. 99)
	EM13CHS403	Essa habilidade é explorada na medida em que se favorece a discussão sobre o mundo das tecnologias, das senhas, das inúmeras possibilidades advindas das Tecnologias da Informação e Comunicação e dos riscos envolvidos nas comunicações remotas, tais como invasões de privacidade, entre outras.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões,* p. 39) Atividades 5 e 6 (p. 40) "GPS como rede social: deslocamento conectado", (*Explorando conexões*, p. 43-44) **Capítulo 4** "Medições indiretas de tempo" (p. 71-72) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) **Capítulo 5** Texto de abertura (p. 77) "Os sistemas de numeração no dia a dia e na informática" (p. 77-78) "A base binária e os computadores" (p. 79) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) **Capítulo 8** "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125) "Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma" (*Texto complementar*, p. 126-127)
	EM13CHS404	Essa habilidade é abordada na medida em que se discute como o desenvolvimento tecnológico tem impactado aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e as transformações nas novas gerações em relação à conectividade, às redes de relacionamentos e formas de ocupação e locomoção no espaço urbano.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) **Capítulo 5** "*Bytes* e o padrão ASCII" (p. 84-85) "O que é CGI e computação gráfica?" (*Explorando conexões*, p. 87-88) "O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*" (*Texto complementar*, p. 89-90) **Capítulo 6** "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) **Capítulo 8** "Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância" (*Explorando conexões*, p. 125)

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
5	EM13CHS502	A habilidade é contemplada na análise e problematização de questões como desigualdade, desperdício, intolerância, discriminação, Direitos Humanos, entre outros, desnaturalizando a desigualdade social.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 4** "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76)
	EM13CHS503	A habilidade é trabalhada na apresentação de aspectos relevantes de violência social e simbólica, tais como a falta de alimentos para uma parcela da população e na proposta da taxação de movimentações financeiras internacionais como mecanismo de enfrentamento e combate às violências e desigualdade sociais.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58) **Capítulo 4** "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76)
	EM13CHS504	Essa habilidade é contemplada na apresentação de transformações culturais e sociais decorrentes do surgimento constante de novas formas de comunicação em rede, que promovem avanços em diversas áreas do desenvolvimento humano (senão todas), mas possibilitam a manipulação de dados de usuários, situação em que os governos devem atuar como mediadores da expansão de redes de conexão.	**Capítulo 2** "GPS como rede social: deslocamento conectado" (*Explorando conexões*, p. 43-44) **Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) "Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias" (*Explorando conexões*, p. 55) "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57)
6	EM13CHS604	A habilidade é considerada na reflexão sobre as desigualdades no mundo e de que forma, positiva ou negativa, a atuação dos Estados, governos e organismos internacionais impacta as populações locais.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58)
	EM13CHS605	Essa habilidade é contemplada na medida em que se promove uma reflexão sobre Direitos Humanos, recorrendo às noções de acesso básico à alimentação, aspectos como justiça e insegurança alimentar e ações concretas diante da desigualdade e das violações desses direitos em diferentes espaços de vivência, respeitando a identidade de cada grupo e de cada indivíduo.	**Capítulo 3** "Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas" (*Explorando conexões*, p. 56-57) Atividades 9 e 10 (p. 58)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
6	EM13CHS606	Essa habilidade é atendida na medida em que analisa características socioeconômicas das sociedades; o protagonismo dos cidadãos; os impactos de variáveis como educação, saúde e renda na posição ocupada pelo Brasil; como o conhecimento é mensurado e quais os desdobramentos da desigualdade de formação etc.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" (*Explorando conexões*, p. 39) **Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) "Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias" (*Explorando conexões*, p. 55) Atividades 7; 9 e 10 (p. 56; p. 58) **Capítulo 4** "O que é o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 6** "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93) "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) Atividades 2 e 3 (p. 99) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividade 4 (p. 108) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109) Atividades 5 (p. 110)

De forma geral, as competências específicas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas são trabalhadas nesta obra conforme comentários a seguir:

- **Competência específica 1:** Desenvolver a capacidade de elaborar hipóteses, analisar dados, organizar o pensamento de forma sistematizada e argumentar com base em análise crítica dos fatos dicotômicos de maneira reflexiva e ética.
- **Competência específica 2:** Compreender conceitos de território e fronteira, o papel dos agentes sociais na delimitação de cidades, Estado, região ou nação. Conflitos e desigualdade também compõem o campo de expectativas. Análise política e histórica das questões geográficas e das desigualdades. Uso de diferentes linguagens enfatizando as novas tecnologias para o protagonismo juvenil.
- **Competência específica 3:** Analisar e compreender a forma como diferentes culturas e povos lidam com a transformação da natureza, produção de bem materiais, estimulam o consumismo ou preservam as relações ambientais.
- **Competência específica 4:** Perceber o papel do trabalho na desigualdade social, na renda, na Educação e cultura. Como as sociedades se organizam para dinamizar oportunidades de participação social e política. E, ainda, entender as transformações tecnológicas e seus impactos nas futuras gerações.
- **Competência específica 5:** Compreender como as diferenças de percepção em relação aos povos é construída, desnaturalizando as noções de desigualdade, soberania, superioridade e todas as narrativas de poder culturalmente determinadas. Compreender o impacto dessas narrativas nos Direitos Humanos.
- **Competência específica 6:** Compreender as transformações sociais e históricas pelas quais passaram conceitos e formas políticas de organização dos Estados. Entender a gênese de conflitos sociopolíticos em torno de termos descontextualizados no tempo e no espaço como direita e esquerda, comunismo e capitalismo, liberalismo, fascismo etc.

MODERNA

Distribuição das competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13MAT101	Ao transitar pelos registros algébrico e geométrico, facilitamos significativamente o estudo de grandezas interdependentes, pois, em muitos casos, uma simples relação geométrica observada no gráfico fornece informações que não seriam tão evidentes nas equações. Esse fato nos orientou a destacar o gráfico como um recurso indispensável no estudo de problemas de dados tabelados e/ou em problemas que envolvam a variação de grandezas por meio de equações.	**Capítulo 2** "Coordenadas geográficas" (p. 34-36) "Latitude, longitude e altitude: um sistema de três coordenadas" (p. 37) "Os fusos horários" (p. 37-38) "Os fundamentos do GPS" (p. 41-42) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividades 1, 2 e 3 (p. 105-106; p. 108)
	EM13MAT102	É comum que os meios de comunicação veiculem notícias e informações em forma de tabelas ou gráficos estatísticos. O mundo do trabalho também utiliza esses registros, por exemplo, ao representar estudos sobre a variação das vendas em determinado período e suas projeções. Enfim, o estudo de tabelas e gráficos e sua análise crítica é uma necessidade imperiosa da contemporaneidade.	**Capítulo 2** Atividades 3 e 5 (p. 36; p. 40) **Capítulo 3** Atividade 10 (*Entendimento do texto*, p. 61) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) "Consumo de água no mundo" (*Explorando conexões*, p. 93) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) Atividade 1 (p. 97)
	EM13MAT103	Neste livro, adotamos o Sistema Internacional de Unidades (SI), constituído de 7 unidades básicas e 22 unidades derivadas. Contudo, por serem adotadas com frequência, também exploramos as unidades de armazenamento digital, *bit* e seus múltiplos, que não fazem parte do SI.	**Capítulo 4** Texto de abertura (p. 62) "Medições diretas e medições indiretas" (p. 63-64) "Medições indiretas de distâncias" (p. 66-68) "Medições indiretas de tempo" (p. 71-72) "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) "Medindo conhecimentos" (*Texto complementar*, p. 75-76) **Capítulo 5** "O que são *bits* e *bytes*?" (p. 81-83) "Múltiplos do *byte*" (p. 82-83) "Um esclarecimento necessário" (p. 83) Atividades 5 e 6 (p. 83)
	EM13MAT104	O entendimento de um índice, como valor relativo entre grandezas, é um dos vínculos deste livro com esta habilidade. Perpassamos por diferentes tipos de índice socioeconômico, explorando suas interpretações em cada contexto e discutindo criticamente esses valores. Julgamos necessárias atividades que demandem cálculos de índices ou cálculo de medidas de grandezas a partir de índices conhecidos.	**Capítulo 3** "Índice de vulnerabilidade social" (*Observação*, p. 55) **Capítulo 4** "Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH" (*Explorando conexões*, p. 74) Atividades 9 e 10 (p. 75) **Capítulo 6** "Entenda como analistas fazem projeções para a economia" (*Explorando conexões*, p. 98) Atividade 2 (p. 99) **Capítulo 7** "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividades 1, 2 e 3 (p. 105-106; p. 108) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109) Atividades 5 e 6 (p. 110)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
1	EM13MAT105	As transformações geométricas fazem parte não só da Matemática, mas também da Engenharia, da Arquitetura, da Geografia e de outras Ciências. Até mesmo na Arte, elas são fundamentais, como no estudo da perspectiva geométrica, no desenho, e da computação gráfica, no cinema.	**Capítulo 1** "A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick" (*Explorando conexões*, p. 17-18) *"Kubrick – One-Point perspective" (Sugestão,* p. 16*)* "Perspectiva exata" (p. 19-21) Atividade 10 (p. 21) **Capítulo 5** Atividade complementar 8 (p. 88)
2	EM13MAT202	Um dos objetivos deste livro é iniciar o estudante na prática da pesquisa. E planejar uma pesquisa exige uma sequência de passos dos quais exploramos alguns, como organização, representação e análise de dados. Nessa análise estão envolvidos conceitos estatísticos, como interpolação e extrapolação de dados. Outro objetivo é contribuir para o bom andamento de um trabalho em equipe, em que cada participante deve aprender a dividir tarefas, cumprir prazos, ajudar colegas, saber ouvir, fazer exposições com desenvoltura, entre outros.	**Capítulo 2** "Tecnologias, culturas e localização" (*Explorando conexões*, p. 32-33) Atividades 1, 2 e 5 (p. 31; p. 33; p. 40) "GPS como rede social: deslocamento conectado" (*Explorando conexões*, p. 43-44) **Capítulo 6** Atividade 1 (p. 97) **Capítulo 7** "Interpolação linear" (p. 102-103) "Saúde em primeiro lugar" (*Explorando conexões*, p. 104-105) Atividades 1 e 2 (p. 105-106) "Interpolação polinomial" (p. 106-108) "Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)" (*Explorando conexões*, p. 109) Atividade 7 (p. 111) **Capítulo 8** Atividade 1 (p. 116) "Um método da criptoanálise" (p. 122-124)
2	EM13MAT203	A necessidade do computador em sala de aula já é um consenso. O estudo da Geometria, dos gráficos de funções e de tabelas e gráficos estatísticos é substancialmente facilitado pelos *softwares* de Geometria Dinâmica, planilhas eletrônicas e construção de gráficos. Particularmente, as planilhas eletrônicas nos fornecem rapidamente outros elementos estatísticos, além dos gráficos, como as linhas de tendência.	**Capítulo 2** Atividade 5 (p. 40) **Capítulo 3** Atividade 10, item **b** (p. 58) **Capítulo 6** "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) **Capítulo 7** Atividade 1, item **d** (p. 105) **Capítulo 8** Atividade 6 (p. 124)
3	EM13MAT301	Vários tipos de problema do cotidiano ou do universo científico relacionam valores conhecidos com dois ou mais valores desconhecidos. Em geral, nesse tipo de problema é necessária mais de uma equação para a determinação das incógnitas. Esta habilidade diz respeito a esse tipo de problema, envolvendo apenas equações do 1º grau, que exploramos em várias situações.	**Capítulo 6** "Determinação da linha de tendência estatística" (p. 93-97) Atividade 1 (p. 97) **Capítulo 7** "Interpolação linear" (p. 102-103) Atividades 1 e 2 (p. 105-106) "Interpolação polinomial" (p. 106-108) Atividades 3, 4 e 6 (p. 108; p. 110) "Interpolação espacial" (p. 110) Atividade 7 (p. 111) **Capítulo 8** "Cifras de Hill" (p. 119-121) Atividade 5 (p. 121)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
3	EM13MAT302	Entendemos que os Capítulos 3 e 6 trabalham essa habilidade, na medida em que vários exercícios recaem em equações polinomiais do 1º ou do 2º grau.	**Capítulo 3** "Situação 1: área máxima" (p. 48-50) Atividades 3 e 6 (p. 53-54) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) "Equação da reta de tendência" (p. 94) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) Atividade 1 (p. 97)
	EM13MAT304	Com que velocidade se espalham as *fake news* via internet? Qual o crescimento de uma população em determinado período? Qual a velocidade de decaimento radioativo de uma substância? Perguntas como essas, sob determinadas condições, são exploradas neste livro e modeladas pela função exponencial. Esperamos que, a partir desses exemplos, o estudante seja capaz de generalizar o raciocínio a seguir: se uma grandeza qualquer de valor inicial C cresce ou decresce durante t unidades de tempo até um valor M, à taxa percentual constante i por unidade de tempo, então: $M = (1 + i)^t$.	**Capítulo 2** Atividade 8 (p. 42) **Capítulo 3** "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) Atividades 2 e 5 (p. 53-54) **Capítulo 4** "A idade dos fósseis" (p. 72-73) Atividade 8 (p. 73)
	EM13MAT308	Além de sua frequência nas Ciências Exatas, a semelhança de figuras geométricas está presente também em outras áreas. Na Arte, por exemplo, no estudo da perspectiva; na Geografia, no estudo da cartografia; e em quase todas as áreas de atuação humana em que sejam necessárias representações por meio de gráficos estatísticos.	**Capítulo 1** "Com um único ponto de fuga" (p. 14) "Com dois pontos de fuga" (p. 15) "Com três pontos de fuga" (p. 15) Atividades de 1 a 8 (p. 16) "Um quadriculado em perspectiva exata" (p. 19-20) "Representando cubos de mesmo tamanho pelo método de Alberti" (p. 21) Atividades 10 e 11 (p. 21) **Capítulo 3** "Situação 3: usando figuras como modelos" (p. 52) **Capítulo 4** "Um método milenar" (p. 68-69)
	EM13MAT310	A contagem faz parte de qualquer área do conhecimento humano; porém, o processo elementar (contar unidades uma a uma) nem sempre é viável. Por isso, são necessários métodos de contagem que cheguem aos resultados mais rapidamente. Esses métodos são obtidos a partir dos princípios multiplicativo e aditivo de contagem.	**Capítulo 5** Texto de abertura (p. 77) "O que são *bits* e *bytes*?" (p. 81-83) Atividades 4 e 5 (p. 81; p. 83) **Capítulo 8** "Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma" (*Texto complementar*, p. 126-127)
	EM13MAT313	No cotidiano estamos acostumados a números de fácil representação, por exemplo, o comprimento de cada vagão do metrô é 21,75 m, a massa de 1 litro de água pura é 1 kg, e o volume de uma bola de futebol oficial cheia de ar é de 5.700 cm³, aproximadamente. Contudo, no universo científico, há números de representação incômoda, como a massa da Terra, que é de, aproximadamente 5.970.000.000.000.000.000.000.000 kg, e a medida do raio médio de um átomo de hidrogênio, que é aproximadamente 0,00000005 mm. Por isso, necessitamos de uma notação simplificada para representar números "enormes" ou "minúsculos", comuns em estudos científicos.	**Capítulo 3** Atividade 9 (p. 58) **Capítulo 4** Atividade 4 (p. 71)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
3	EM13MAT315	Um algoritmo é uma sucessão finita de procedimentos preestabelecidos, que conduz à solução de determinada classe de problemas. Nesse sentido, entendemos que os conceitos de algoritmo e fluxograma são intercambiáveis.	**Capítulo 3** "Situação 1: área máxima" (p. 48-50) "Situação 2: cálculo de uma população" (p. 50-52) "Situação 3: usando figuras como modelo" (p. 52) Atividades 1-6 (p. 53-54) **Capítulo 5** "Os sistemas de numeração no dia a dia e na informática" (p. 77-78) Atividades 1-3 (p. 79) **Capítulo 8** Texto de abertura (p. 113) "A criptografia como tática de guerra" (p. 114-115) "A loira do banheiro" (*Sugestão*, p. 116) Cifras de Hill (p. 119-121) Atividades 4 e 5 (p. 121) "Um método da criptoanálise" (p. 122-124) Atividade 6 (p. 124)
	EM13MAT316	Utilizar a média aritmética simples ou a média aritmética ponderada em modelos estatísticos é um procedimento adotado em várias situações socioeconômicas, como no cálculo da inflação, que se resume à média aritmética ponderada da variação de preços dos produtos de uma cesta ao longo de determinado período, em que a cada produto é atribuído um peso, que depende de seu nível de necessidade para famílias em determinada faixa de renda. Outras situações apresentadas neste livro exploram modelos como esse.	**Capítulo 3** Atividade 7 (p. 56) Atividade 10 (p. 58) **Capítulo 7** "Interpolação espacial" (p. 110) Atividade 7 (p. 111)
4	EM13MAT406	Recorremos às tabelas e gráficos estatísticos na organização e representação de dados colhidos nas várias pesquisas sugeridas ao longo da obra. Ao sugerir o uso do computador como recurso para essas atividades, deixamos uma alternativa para aqueles estudantes que não têm acesso a ele. Em outras situações, são apresentadas tabelas ou gráficos estatísticos em que esta habilidade também é trabalhada.	**Capítulo 2** Atividade 3 (p. 36) Atividade 5 (p. 40) **Capítulo 6** "Equação da reta de tendência" (p. 94) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) **Capítulo 7** Atividade 1 (p. 105)
	EM13MAT407	Essa habilidade é abordada na medida em que se discute a fundamental importância de uma escolha criteriosa, apropriada e objetiva de procedimentos adequados para efetuar uma análise estatística, ao interpretar e comparar diferentes conjuntos de informações, em diferentes circunstâncias.	**Capítulo 2** Atividades 3 e 5 (p. 36; p. 40)
5	EM13MAT501	As funções polinomiais do 1º grau são identificadas quando a variação de uma grandeza é diretamente proporcional à respectiva variação de outra. Elas são aplicadas em contextos socioeconômicos, por exemplo, em projeções de resultados por meio da reta de tendência.	**Capítulo 6** "Equação da reta de tendência" (p. 94) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) Atividades 1 e 2 (p. 97; p. 99)

MODERNA

Competência específica	Habilidade	Justificativa	Capítulo
5	EM13MAT502	As funções polinomiais do 2º grau do tipo $y = ax^2$ são identificadas quando uma grandeza é diretamente proporcional ao quadrado da outra. Não só esse tipo de função, mas também as do tipo $y = ax^2 + bx + c$ podem ser aplicadas em contextos socioeconômicos, como a projeção de resultados por meio da parábola de tendência.	**Capítulo 6** "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) Atividades 1 e 2 (p. 97; p. 99)
	EM13MAT503	A investigação de pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas é um estudo que desperta o interesse do estudante, pois possibilita que ele perceba a importância da otimização em outros contextos, além da Matemática.	**Capítulo 3** "Situação 1: área máxima" (p. 48-50)
	EM13MAT504	O nome dado aos processos de obtenção dos melhores resultados possíveis em situações definidas e sujeitas a recursos limitados (não necessariamente financeiros) é "otimização". Os processos de otimização são comuns em quase todas as áreas do conhecimento.	**Capítulo 3** "Situação 3: usando figuras como modelos" (p. 52)
	EM13MAT505	O ladrilhamento, tipo de construção geométrica que explora o conceito de polígonos (regulares ou não), incentiva o aprendizado de uma técnica que pode ser utilizada em obras de arte ou diversas formas de decoração, provocando forte apelo visual, além de despertar o interesse em descobrir quais as condições ideais de ângulos e vértices dos polígonos para que o ladrilhamento seja possível.	**Capítulo 1** "Um quadriculado em perspectiva exata" (p. 19-20) Atividade 10 (p. 21)
	EM13MAT508	Essa habilidade é contemplada ao incentivar o estudante a reconhecer, por meio de conteúdos e propriedades análogas, a importância da integração entre a progressão geométrica e a função exponencial, em situações-problema que podem ser solucionadas por ambos os conceitos.	**Capítulo 2** Atividade 8 (p. 42) **Capítulo 3** Atividades 1 e 2 (*Entendimento do texto*, p. 61)
	EM13MAT510	A magnitude dessa habilidade perpassa por inúmeras situações que requerem estudos, discussões e generalizações. Faz parte das Ciências e do mundo do trabalho a observação e o equacionamento do comportamento de duas ou mais variáveis interdependentes.	**Capítulo 4** Atividade 2 (p. 65) "Outro método para o cálculo do raio da Terra" (p. 67-68) "Um método milenar" (p. 68-69) "Distância da Terra ao Sol" (p. 69-70) "Distância entre um planeta inferior e o Sol" (p. 70) "Distância entre um planeta superior e o Sol" (p. 70-71) Atividades 4 e 5 (p. 71) "A idade dos fósseis" (p. 72-73) Atividades 8 e 9 (p. 73; p. 75) **Capítulo 6** Texto de abertura (p. 91-92) "Determinação da linha de tendência estatística" (p. 93-97) "Equação da reta de tendência" (p. 94) "Equação da parábola de tendência" (p. 95-96) "Linhas de tendência em planilhas eletrônicas" (p. 96-97) Atividades 1, 2 e 3 (p. 97; p. 99)

MODERNA

De forma geral, as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias são trabalhadas nesta obra conforme comentários a seguir:

- **Competência 1:** A Geometria plana, a Geometria espacial, a análise combinatória, as funções e as equações lineares, estudadas nesta obra, interpretam e modelam situações das Ciências e das atividades relativas ao cotidiano, sejam elas socioeconômicas ou tecnológicas, na medida em que:
  - a análise combinatória estuda métodos de contagem, modelando inúmeras situações, desde o cálculo do número de senhas eletrônicas, que podem ser compostas de determinado número de dígitos, até aplicações mais complexas, como o cálculo do número de códigos de barras representados com determinada quantidade de barras.
  - as Geometrias plana e espacial, aplicadas a obras de arte, que se apropriam de ferramentas como proporção direta, triângulos semelhantes e ponto de fuga, representam formas tridimensionais sobre objetos bidimensionais.
  - as funções modelam e analisam situações cotidianas, como estudos demográficos, áreas e volumes máximos, entre outros.
  - as equações lineares possibilitam as análises de tendência de fenômenos naturais e socioeconômicos.
- **Competência 2:** As construções cada vez mais ousadas da Engenharia, o uso de um novo *software*, a exigência de medições cada vez mais precisas e a necessidade de medicamentos que nos protejam contra novas doenças são alguns dos desafios impostos pelo mundo contemporâneo, que exigem, quase sempre, uma tomada de decisão. Procuramos fazer a nossa parte explorando alguns desses desafios com propostas de trabalho em equipe, que exigem diálogos e tomadas de decisão, nas atividades para discussão em grupo, nos projetos de pesquisa. A competência é também mobilizada em atividades individuais, que propõem o uso de *softwares* ou exploram formas de atuação profissional.
- **Competência 3:** Na análise combinatória interpretamos os agrupamentos como arranjos ou combinações, calculando o número de elementos de cada um pelos princípios multiplicativo ou aditivo de contagem. Permeando os contextos da segurança digital e o código de barras, possibilitando a construção de argumentos consistentes.
  - Na Geometria perpassamos os três estágios do pensamento científico: concreto, concreto/abstrato e abstrato.
  - Entendemos, acompanhando o pensamento de Gaston Bachelard (2007), que o estágio desejável do conhecimento é o abstrato; porém, devem-se percorrer, antes, o concreto e o concreto/abstrato.
  - Por meio da interdisciplinaridade e da contextualização exploramos os procedimentos computacionais na modelagem matemática e o uso de *softwares* como ferramenta de resolução de problemas e tomadas de decisão.
- **Competência 4:** Investigando a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático, o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (2009, p. 63) conclui que: A coordenação de vários registros de representação semiótica aparece como fundamental para uma apreensão conceitual dos objetos. Essa conclusão, que se constata verdadeira, não só em Matemática, mas em todas as Ciências, nos conduziu a conceituar noções ou resolver problemas a partir de dois ou mais registros de representação, quando possível.
- **Competência 5:** No estudo da Matemática como Ciência abstrata ou como ferramenta para resolver problemas do dia a dia é essencial a observação de padrões e de relações entre grandezas. Essa observação pode conduzir a uma conclusão ou, pelo menos, a conjecturar (supor, prever) resultados. Conjecturar é um procedimento altamente recomendável no estudo da Matemática, mas deve ser adotado com cautela, pois é dirigido pela intuição, que pode falhar. No Capítulo 6, por exemplo, a análise de tendência demanda a interpolação polinomial, aplicações por meio do método dos mínimos quadrados de Gauss. O trabalho em equipe possibilita a obtenção das linhas de tendências, por meio de fluxogramas, além do trabalho de estimar valores de grandezas envolvidas em indicadores socioeconômicos.

MODERNA

4. Sugestões de cronograma

Com o propósito de oferecer, de forma ágil, uma visão geral do que é trabalhado na obra, elaboramos quadros com os conteúdos separados por bimestres, trimestres e semestres para cada ano do Ensino Médio.

4.1. Planejamento bimestral

1º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º bimestre	**Capítulo 1** Ponto de fuga Perspectiva exata Perspectiva isométrica Perspectiva aérea ou atmosférica
2º bimestre	**Capítulo 2** Os sistemas cartesianos de duas e de três dimensões Coordenadas geográficas Fusos horários Cálculo de horários sobre a superfície da Terra O funcionamento do GPS
3º bimestre	**Capítulo 3** O conceito de modelo matemático Etapas da modelagem matemática Aplicações da modelagem matemática na otimização de recursos, cálculo de populações, projetos (por meio da Geometria) e na indústria
4º bimestre	**Capítulo 3** Aplicações da modelagem matemática na Ecologia, comércio, finanças, otimização de processos e políticas públicas Modelo predador-presa

2º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º bimestre	**Capítulo 4** Unidades de medida Medições diretas e medições indiretas Conhecendo o Inmetro Medição do raio da Terra Distâncias no Sistema Solar Medições indiretas de tempo Índice de desenvolvimento humano Como é calculada a nota do Enem (Teoria de Resposta ao Item)
2º bimestre	**Capítulo 5** Base de contagem A base binária A linguagem digital e a base binária Imagens e cores no computador *Bits* e *bytes* O padrão ASCII CGI e a computação gráfica Engenharia de *software*
3º bimestre	**Capítulo 6** O que é análise de tendência Reta de tendência e aplicações Parábola de tendência e aplicações
4º bimestre	**Capítulo 6** Linhas de tendência em planilhas eletrônicas Projeções econômicas A previsão como instrumento de planejamento

MODERNA

3º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º bimestre	**Capítulo 7** O que é interpolação Interpolação linear Aplicações da interpolação linear Obesidade e saúde
2º bimestre	**Capítulo 7** Interpolação polinomial Aplicações da interpolação polinomial Índice de desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) Interpolação espacial Aplicações da interpolação espacial Projeções populacionais
3º bimestre	**Capítulo 8** O que são Criptografia e Criptoanálise A cifra de César A Criptografia no cotidiano O funcionamento do código de barras Cifras de Hill: uma aplicação das matrizes na Criptografia
4º bimestre	**Capítulo 8** Os números primos e a Criptografia A probabilidade aplicada na Criptoanálise A máquina Enigma: a Criptografia na Segunda Guerra Mundial

4.2. Planejamento trimestral

A tabela abaixo sugere uma possível programação trimestral.

1º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1ª parte (1º trimestre)	**Capítulo 1** Ponto de fuga; perspectiva exata; perspectiva isométrica e perspectiva aérea ou atmosférica **Capítulo 2** Os sistemas cartesianos de duas e de três dimensões e coordenadas geográficas
2ª parte (metade inicial do 2º trimestre)	**Capítulo 2** Cálculo de horários sobre a superfície da Terra; o funcionamento do GPS
3ª parte (metade final do 2º trimestre)	**Capítulo 3** O conceito de modelo matemático Etapas da modelagem matemática Aplicações da modelagem matemática na otimização de recursos, cálculo de populações e projetos (por meio da Geometria)
4ª parte (3º trimestre)	**Capítulo 3** Aplicações da modelagem matemática, na indústria, Ecologia, comércio, finanças, otimização de processos e políticas públicas Modelo predador-presa

MODERNA

2º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1ª parte (1º trimestre)	**Capítulo 4** Unidades de medida; medições diretas e medições indiretas; conhecendo o Inmetro; medição do raio da Terra; distâncias no Sistema Solar; medições indiretas de tempo; índice de desenvolvimento humano; como é calculada a nota do Enem (Teoria de Resposta ao Item) **Capítulo 5** Base de contagem; a base binária; a linguagem digital e a base binária; imagens e cores no computador
2ª parte (metade inicial do 2º trimestre)	**Capítulo 5** *Bits* e *bytes*; o padrão ASCII; CGI e a computação gráfica; engenharia de *software*
3ª parte (metade final do 2º trimestre)	**Capítulo 6** O que é análise de tendência; reta de tendência e aplicações
4ª parte (3º trimestre)	**Capítulo 6** Parábola de tendência e aplicações; linhas de tendência em planilhas eletrônicas; projeções econômicas; a previsão como instrumento de planejamento

3º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1ª parte (1º trimestre)	**Capítulo 7** O que é interpolação; interpolação linear; aplicações da interpolação linear; obesidade e saúde; interpolação polinomial
2ª parte (metade inicial do 2º trimestre)	**Capítulo 7** Aplicações da interpolação polinomial; índice de desenvolvimento da Educação Básica (Ideb); interpolação espacial; aplicações da interpolação espacial; projeções populacionais
3ª parte (metade final do 2º trimestre)	**Capítulo 8** O que são criptografia e criptoanálise; cifra de César; a criptografia no cotidiano; funcionamento do código de barras
4ª parte (3º trimestre)	**Capítulo 8** Cifras de Hill: uma aplicação das matrizes na criptografia; os números primos e a criptografia; a probabilidade aplicada na Criptoanálise; a máquina Enigma: a criptografia na Segunda Guerra Mundial

4.3. Planejamento semestral

Em cada uma das tabelas anteriores (planejamento trimestral), as partes 1 e 2 constituem o planejamento do 1º semestre (escolar), e as partes 3 e 4 constituem o planejamento do 2º semestre. Assim, temos:

1º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º semestre	**Capítulo 1** Ponto de fuga; perspectiva exata; perspectiva isométrica e perspectiva aérea ou atmosférica **Capítulo 2** Os sistemas cartesianos de duas e de três dimensões e coordenadas geográficas; cálculo de horários sobre a superfície da Terra e o funcionamento do GPS
2º semestre	**Capítulo 3** O conceito de modelo matemático Etapas da modelagem matemática Aplicações da modelagem matemática na otimização de recursos, cálculo de populações e projetos (por meio da Geometria); aplicações da modelagem matemática na indústria, Ecologia, comércio, finanças, otimização de processos e políticas públicas; modelo predador-presa

MODERNA

2º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º semestre	**Capítulo 4** Unidades de medida; medições diretas e medições indiretas; conhecendo o Inmetro; medição do raio da Terra; distâncias no Sistema Solar; medições indiretas de tempo; índice de desenvolvimento humano; como é calculada a nota do Enem (Teoria de Resposta ao Item) **Capítulo 5** Base de contagem; a base binária; a linguagem digital e a base binária; imagens e cores no computador; *bits* e *bytes*; o padrão ASCII; CGI e a computação gráfica; engenharia de *software*
2º semestre	**Capítulo 6** O que é Análise de Tendência; reta de tendência e aplicações; parábola de tendência e aplicações; linhas de tendência em planilhas eletrônicas; projeções econômicas e a previsão como instrumento de planejamento

3º ano

Período	Capítulos e conteúdos
1º semestre	**Capítulo 7** O que é interpolação; interpolação linear; aplicações da interpolação linear; obesidade e saúde. Interpolação polinomial; aplicações da interpolação polinomial; índice de desenvolvimento da Educação Básica (Ideb); interpolação espacial; aplicações da interpolação espacial; projeções populacionais
2º semestre	**Capítulo 8** O que são criptografia e criptoanálise; cifra de César; a criptografia no cotidiano; funcionamento do código de barras; cifras de Hill: uma aplicação das matrizes na criptografia; os números primos e a criptografia; a probabilidade aplicada na criptoanálise; a máquina Enigma: a criptografia na Segunda Guerra Mundial

5. Etapas para a resolução de problemas

A seguir, apresentamos e comentamos as 4 etapas fundamentais, propostas pelo matemático húngaro George Polya (1887-1985), para se organizar e obter resultados satisfatórios na resolução de problemas.

A discussão dessas etapas com a turma certamente é de grande valia para professores e estudantes.

1. Compreensão das informações contidas no enunciado do problema

Faça uma leitura atenta e cuidadosa do problema a ser resolvido, destacando as informações e procurando identificar o que está sendo pedido, ou seja, qual é a incógnita do problema. Se necessário, faça um resumo, desenho ou esquema que ajude a visualizar e entender as informações fornecidas.

2. Estratégia de resolução

Traçar um plano para resolver o problema pode ser a parte mais difícil. Para isso, compare-o com problemas semelhantes que você já tenha resolvido e identifique de quais conhecimentos, técnicas resolutivas e fórmulas você vai precisar e como a incógnita se relaciona com o enunciado. Se necessário, faça um resumo, desenho ou esquema da estratégia escolhida.

3. Execução da estratégia

A execução da estratégia é mais simples, porém exige tempo e paciência. Não se apresse: concentre-se no problema e na resolução até ter certeza de que sua estratégia está correta. Verifique cada passagem executada, refaça os cálculos e convença-se de que não há erros. Caso perceba que escolheu a estratégia errada, mude-a.

4. Verificação dos resultados obtidos

Verifique se os resultados alcançados com a execução da estratégia são coerentes e não têm valores absurdos como, por exemplo, um número negativo de pessoas em uma reunião ou um ângulo de medida maior que 180° em um triângulo. Se possível, teste os valores obtidos e, por fim, dê a resposta de forma clara e simples.

Fonte dos dados: POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

MODERNA

6. Avaliação

Um dos aspectos mais importantes dos contextos educativos é, sem dúvida, a avaliação. Pode-se compreender a avaliação como a ação de atribuir valor. Historicamente, a avaliação foi entendida e utilizada de formas distintas: algumas vezes mais punitivas e classificatórias, indicando numericamente percentuais relativos de aprendizagens; outras, abordada em uma perspectiva mais formativa, auxiliando os processos de aprendizagem.

Ao observarmos as orientações pedagógicas para o trabalho com conhecimentos, competências, habilidades e atitudes deparamo-nos com uma complexa tarefa: desenvolver formas objetivas de avaliação de todos esses espectros.

Cabe, inicialmente, um apontamento sobre quais aspectos do processo de ensino devem ser avaliados. Usualmente, avalia-se somente o estudante e, a partir de seu resultado, infere-se maior ou menor eficiência do percurso educacional. Neste livro, alinhados às mais modernas tendências reflexivas do papel da avaliação no século XXI, os autores consideram que a avaliação deva fazer parte indissociável das atividades da comunidade escolar. Deve-se avaliar, portanto, todo e qualquer elemento que perpasse, direta ou indiretamente, o ensino e a aprendizagem, como os que seguem:

- a instituição escolar: identificar de que forma tem ocorrido o alinhamento institucional com as diretrizes nacionais, comparando os resultados obtidos em avaliações oficiais com escolas da mesma comunidade, com ela mesma em anos anteriores e, principalmente, com as metas e os objetivos prospectados pelo colegiado no projeto político-pedagógico.
- o professor: consideramos fundamental que as comunidades educacionais desenvolvam indicadores de acompanhamento do desempenho docente, ofereçam oportunidades de formação continuada e associem o desempenho discente à avaliação docente. Claro que essas atividades não podem ser absolutamente desvinculadas de sentido educativo. Avaliar o professor em função das aprendizagens dos estudantes não pode significar fazê-lo em relação às notas. A nota é um indicador muitas vezes arbitrário e, ainda, um professor que aplica avaliações mais simples que outro colega não pode ser, por este único critério, considerado melhor em função das notas obtidas. O que sugerimos é que se desenvolvam parâmetros de acompanhamento da aquisição das competências e habilidades previstas para a turma, avaliando o professor em relação às aprendizagens efetivas realizadas pelos estudantes.
- o currículo: compreendido como uma carta de intenções educativas que antecipa o que se pretende trabalhar em sala, sugerimos que o documento orientador da ação pedagógica seja frequentemente revistado pelos membros da comunidade educativa, com vistas à atualização das relações com o mercado de trabalho, os avanços tecnológicos, a pertinência dos conteúdos às comunidades locais, valorizando o princípio da autonomia e do regionalismo, articulando as propostas à inserção dos estudantes no mundo tecnológico e globalizado. Avaliar a estrutura curricular significa manter-se constantemente focado nas intersecções entre o regional e o mundial, o estudante e o professor, a aprendizagem e o ensino, a escola e a comunidade.
- os conteúdos e os objetivos: monitorar frequentemente as relações que se estabelecem entre esses dois aspectos possibilita maior alinhamento dos percursos educativos, pois os objetivos permitem a consecução dos conteúdos. Considerando os objetivos que se pretendem alcançar, desdobrados em expectativas de aprendizagens que se espera que os estudantes adquiram, a seleção criteriosa de conteúdos que possibilitem essas trajetórias e a avaliação constante desse engendramento é que aumentará a probabilidade de que efetivamente se alcancem as habilidades e competências planejadas no desenho curricular.
- as estratégias: muitas vezes as propostas curriculares e educativas estão muito bem desenhadas, mas as formas de execução falham por motivos diversos. Avaliar as estratégias supõe um movimento de humildade e empenho docente em requalificar-se constantemente, ajustando as formas de ensino às reais necessidades de aprendizagem dos estudantes e, ainda, às múltiplas modalidades de preferências de aprendizagem, quais sejam, visuais, auditivas, cinestésicas, entre outras.
- o estudante: tradicionalmente, ele é avaliado em relação aos conteúdos ensinados, mas uma avaliação justa deve compreender um aspecto tridimensional do processo de aprendizagem: 1) avaliar os estudantes em relação aos **objetivos** e expectativas de aprendizagens detalhados no currículo escolar, com vistas a monitorar a consecução das aprendizagens e do plano de curso; 2) avaliar o estudante em relação ao **grupo**, identificando as diferenças internas e como cada um se comportou frente às aprendizagens previstas; 3) avaliar o estudante em relação a ele mesmo, tomando, portanto, a avaliação como estratégia de acompanhamento das necessidades educativas individuais. Dessa forma, mais equânime, cada estudante torna-se referência de si mesmo.
- a própria avaliação: deve ser entendida como mais uma forma de ensino, como um mecanismo de compreensão das distorções entre o que os estudantes aprendem e o que se esperava que eles, efetivamente, aprendessem. Também a avaliação deve ser avaliada e realizada nas etapas diagnóstica, formativa e somativa. Dessa forma, realizada continuamente, a avaliação compõe o quadro de instrumentos indispensáveis para a promoção da aprendizagem e serve, ainda, como uma bússola para a atuação docente.

Sugerimos, ainda, que também a avaliação ocorra de forma dinâmica, priorizando atividades de protagonismo juvenil e metodologias como TBL (*Team Based Learning*, ou aprendizagens baseadas em equipes), PBL (*Problem Based Learning*, ou aprendizagens baseadas em problemas) e gameficação, com o uso de jogos eletrônicos e Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs).

MODERNA

6.1. Sugestões de avaliação

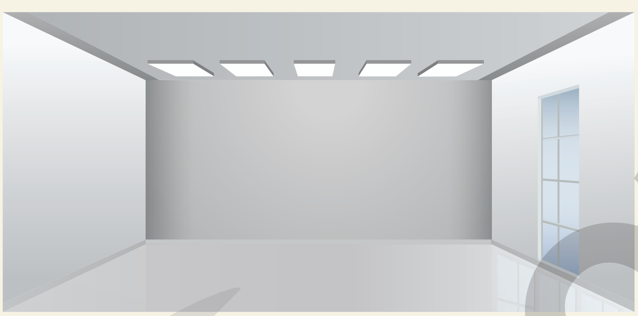
A avaliação é um instrumento fundamental para obter informações sobre o andamento do processo de ensino--aprendizagem. E, para avaliar esse processo, é preciso que os momentos de avaliação não se restrinjam ao final de cada bimestre. Somente o diagnóstico contínuo possibilita a reformulação de procedimentos e estratégias, visando ao sucesso efetivo do estudante.

A avaliação é, também, um instrumento explorador de competências. A variação na forma de avaliar aumenta as possibilidades do desenvolvimento de competências. Por isso, sugerimos a alternância na forma de verificação do aprendizado. A seguir, apresentamos alguns modelos dessas variações.

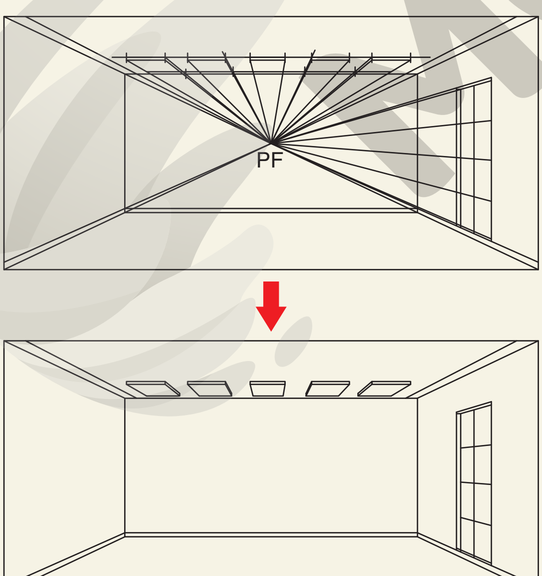
Questões que exploram a aprendizagem baseada em equipes (*Team Based Learning*)

Individualmente ou em grupos, os estudantes leem o tópico sobre ponto de fuga. A tarefa seguinte (exercícios 1 e 2) é proposta individualmente.

1 Em seu caderno, desenhe a figura abaixo usando apenas um ponto de fuga.



Resolução



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

2 A pintura renascentista a seguir, intitulada *Escola de Atenas*, é obra do artista italiano Rafael Sanzio (1483-1520). É um afresco retangular de dimensões 500 cm × 700 cm, pintado na Stanza della Segnatura, no Palácio Apostólico (Vaticano), entre 1510 e 1511. Nesse afresco, são retratados Platão e Aristóteles, personagens centrais, vestindo mantos vermelho e azul, respectivamente, entre outras grandes personalidades, como Pitágoras, Heráclito, Michelangelo e Euclides de Alexandria.

RAFAEL SANZIO – PALÁCIO APOSTÓLICO, VATICANO

SANZIO, Rafael. *Escola de Atenas*. 1510-1511. Afresco, 500 cm × 700 cm. Museus do Vaticano, Vaticano.

No desenho da sala onde estão essas personagens foi adotado um único ponto de fuga. Descreva o local em que está esse ponto.

O ponto de fuga está na intersecção das retas que contêm as geratrizes que limitam o teto semicilíndrico, conforme mostra a figura abaixo.
Note, portanto, que o ponto de fuga está localizado entre as figuras que representam Platão e Aristóteles, próximo à mão esquerda de Platão.

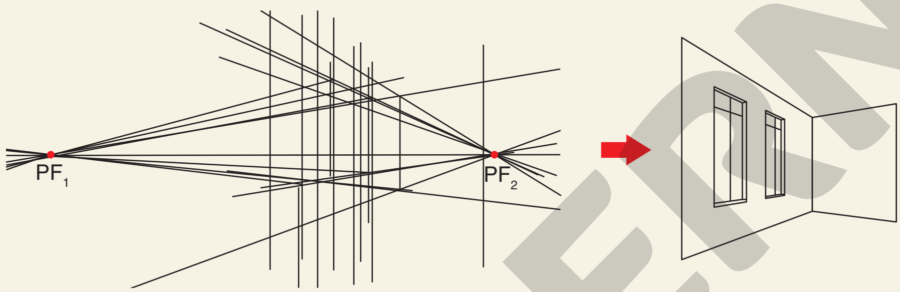
RAFAEL SANZIO - PALÁCIO APOSTÓLICO, VATICANO

A mesma tarefa é proposta aos grupos. As respostas são fornecidas imediatamente após a conclusão da tarefa em grupos. O tema é revisto pelo professor para o esclarecimento de eventuais dúvidas.

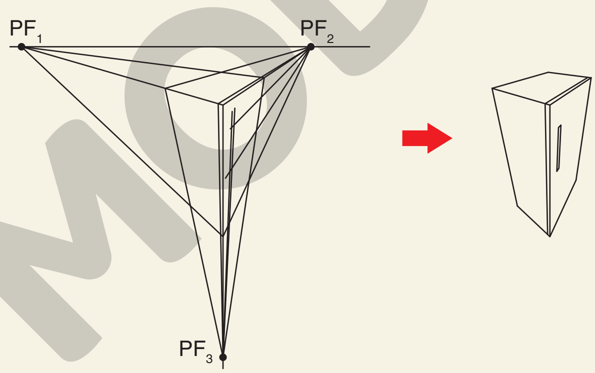
As atividades 3 e 4 são propostas aos grupos para novas discussões. As questões desta tarefa devem ser mais complexas que as anteriores e não devem ser encontradas facilmente no tópico lido pelos estudantes.

3 Desenhe em seu caderno a figura abaixo, usando apenas dois pontos de fuga.

Resolução possível:



4 Desenhe em seu caderno um refrigerador doméstico com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, usando três pontos de fuga.
Resolução possível:



Concluída a tarefa, as respostas são fornecidas, propiciando mais um momento de aprendizado. Finalmente, as eventuais dúvidas são esclarecidas pelo professor.

Avaliação com questões objetivas

As questões objetivas são aquelas que oferecem alternativas de respostas. As mais comuns são as de múltipla escolha, quando apenas uma das alternativas é a correta.

Sugerimos a aplicação desse tipo de avaliação, pois ele é adotado na maioria dos vestibulares e nos exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Veja alguns exemplos a seguir.

1 Dois pontos *A* e *B* sobre a linha do equador têm longitudes 135° 12' 22" Oeste e 95° 12' 22" Oeste. Supondo a Terra esférica e com 6.371 km de raio, assinale a alternativa que mais se aproxima da distância percorrida por um navio que se desloca no sentido leste de *A* até *B*, sobre a linha do equador. Use uma calculadora, se achar necessário.

a) 4.445,5 km **b)** 6.283,4 km **c)** 5.276,9 km **d)** 3.231,7 km

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

Alternativa **a**.

Como o arco $\overset{\frown}{AB}$, sobre a linha do equador, mede 40°, temos que a distância d percorrida pelo navio pode ser calculada pela regra de três:

Medida do arco (grau)		Comprimento do arco (quilômetro)
360	______	$2 \times \pi \times 6.371$
40	______	d

$$\therefore d \simeq 4.445{,}5 \text{ km}$$

2 A medida oficial de inflação no Brasil é o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). Seu objetivo é informar o público final sobre a variação dos preços de produtos e serviços em determinado período, normalmente mensal e anual.

Esse índice é a média aritmética ponderada da variação de preços de uma cesta de bens padrão estabelecida por uma Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF). Cada produto ou serviço tem um peso no IPCA de acordo com a POF e são agregados em 9 grupos, conforme mostra a tabela a seguir.

Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo – Brasil – Junho de 2020 (Custo de vida da população com renda de 1 a 40 salários mínimos, residentes nas áreas urbanas das regiões pesquisadas)		
Grupo de produtos e serviços	**Variação mensal (%)**	**Peso mensal (%)**
Alimentação e bebidas	0,38	20,0937
Habitação	0,04	15,6048
Artigos de residência	1,30	3,6841
Vestuário	−0,46	4,5173
Transportes	0,31	19,5495
Saúde e cuidados pessoais	0,35	13,5915
Despesas pessoais	−0,05	10,7785
Educação	0,05	6,4346
Comunicação	0,75	5,7461

Fonte: IBGE. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/pesquisa/snipc/ipca/quadros/brasil/junho-2020>. Acesso em: 4 ago. 2020.

De acordo com esses dados, assinale a alternativa que mais se aproxima do IPCA do mês de junho de 2020. Use uma calculadora, se achar necessário.

a) 0,34%
b) 3,40%
c) 0,26%
d) 2,6%
e) 0,43%

Alternativa **c**.

Calculando a média aritmética ponderada das variações mensais com os respectivos pesos, temos:

$$\frac{0{,}38 \cdot 20{,}0937 + 0{,}04 \cdot 15{,}6048 + 1{,}30 \cdot 3{,}6841 + (-0{,}46) \cdot 4{,}5173 + 0{,}31 \cdot 19{,}5495 + 0{,}35 \cdot 13{,}5915 + (-0{,}05) \cdot 10{,}7785 + 0{,}05 \cdot 6{,}4346 + 0{,}75 \cdot 5{,}7461}{100} = 0{,}2588092\%$$

3 Os principais impactos decorrentes das disputas político-econômicas no mundo são, indiscutivelmente, humanos. Populações inteiras são devastadas, comunidades extintas, vidas interrompidas e, muitas vezes, a única chance de sobrevivência é a migração em massa. De acordo com os dados da ACNUR (Alto Comissariado das Nações Unidas para os Refugiados), 1% da população total da Terra está deslocada, ou seja, refugiada. Entre essas pessoas, 73% delas está em territórios vizinhos. Outros dados importantes compõem esse cenário: 68% dos refugiados do mundo são de apenas 5 países, e 40% do total são crianças. No ano de 2018, todos os dias, aproximadamente 37 mil pessoas foram obrigadas a se deslocar em busca de sobrevivência.

Fonte dos dados: Agência da ONU para Refugiados. Disponível em: <https://www.acnur.org/portugues/dados-sobre-refugio/>. Acesso em: 3 ago. 2020. Nações Unidas Brasil. Disponível em: <https://nacoesunidas.org/numero-de-pessoas-deslocadas-no-mundo-chega-a-708-milhoes-diz-acnur/>. Acesso em: 3 ago. 2020.

MODERNA

Observe a situação hipotética a seguir e assinale a alternativa correta. Se necessário utilize uma calculadora eletrônica.

Dois países, *A* e *B*, receberam refugiados mensalmente de forma consecutiva durante o mesmo ano. Os governos de ambos declaram que o número limite de refugiados antes da calamidade humana seria 40.000. O país *A* recebeu 26.000 refugiados em janeiro e manteve uma taxa mensal de crescimento de 6% em relação ao mês anterior durante o 1º semestre. De julho a dezembro, a taxa mensal de crescimento foi de 9%. O país *B*, que em janeiro recebeu 20.000 refugiados, manteve durante o ano todo a mesma taxa mensal que o país *A* manteve no 2º semestre.

Identifique em que mês cada país declarou situação de calamidade humana e qual o total aproximado de refugiados que cada país recebeu durante o ano.

a) *A* (agosto, 58.351) e *B* (outubro, 51.606)
b) *A* (setembro, 45.058) e *B* (novembro, 47.435)
c) *A* (setembro, 58.351) e *B* (outubro, 51.609)
d) *A* (outubro, 53.533) e *B* (novembro, 46.633)
e) *A* (agosto, 56.747) e *B* (dezembro, 47.435)

Alternativa **a**.

	População do país *A* no mês	População do país *B* no mês
Janeiro	26.000	20.000
Fevereiro	26.000 × 1,06 = 27.560	20.000 × 1,09 = 21.800
Março	27.560 × 1,06 ≈ 29.214	21.800 × 1,09 = 23.762
Abril	29.214 × 1,06 ≈ 30.967	23.762 × 1,09 = 25.901
Maio	30.967 × 1,06 ≈ 32.825	25.901 × 1,09 = 28.232
Junho	32.825 × 1,06 ≈ 34.794	28.232 × 1,09 = 30.772
Julho	34.794 × 1,09 ≈ 37.925	30.772 × 1,09 = 33.541
Agosto	37.925 × 1,09 ≈ 41.338	33.541 × 1,09 = 36.560
Setembro	41.338 × 1,09 ≈ 45.058	36.560 × 1,09 = 39.850
Outubro	45.058 × 1,09 ≈ 49.113	39.850 × 1,09 = 43.437
Novembro	49.113 × 1,09 ≈ 53.533	43.437 × 1,09 = 47.435
Dezembro	53.533 × 1,09 ≈ 58.351	47.435 × 1,09 ≈ 51.606

Concluímos então que:

- O país *A* declarou situação de calamidade humana em agosto (com 41.338 refugiados) e recebeu, durante o ano, 58.351 refugiados, aproximadamente.
- O país *B* declarou situação de calamidade humana em outubro (com 43.437 refugiados) e recebeu, durante o ano, 51.606 refugiados, aproximadamente.

4 Considerada um ícone da arquitetura gótica, a catedral de Notre-Dame, em Paris, teve o início de sua construção em 1163 e é admirada, desde então, não só por sua tradição religiosa, mas também por sua geometria de proporções perfeitas. Monumento histórico mais visitado da Europa, essa catedral recebia aproximadamente 13 milhões de turistas por ano antes do incêndio que destruiu parte de sua estrutura do teto e da torre mais alta da igreja (agulha), interrompendo o fluxo de visitações, em abril de 2019.

Com um custo ainda incerto, mas estimado entre 300 e 600 milhões de euros, apenas nos primeiros meses após o incêndio as instituições responsáveis pela arrecadação de fundos para a restauração já contabilizavam mais de 700 milhões de euros doados.

Por sorte, a estrutura da catedral permaneceu praticamente intacta.

A engenharia de Notre-Dame é impressionante, como se pode verificar na tabela:

Medidas oficiais da catedral de Notre-Dame

Superfície total	aproximadamente 6.000 m^2
Comprimento	127 m
Altura das torres	69 m
Largura da fachada	43,5 m
Altura da fachada sem as torres	45 m

Fonte dos dados: Notre-Dame de Paris. Disponível em: <https://www.notredamedeparis.fr/decouvrir/architecture/plans/>. Acesso em: 3 ago. 2020.

MODERNA

Um grupo de investidores internacionais tenta identificar os custos, com o maior e menor orçamentos por m^2 da área total da igreja, por número de visitantes anuais no monumento e, ainda, pela idade da igreja desde o início de sua construção até a data do incêndio.

Suponha que o prefeito de Paris tenha de prestar contas aos financiadores da obra sobre o valor investido na restauração da catedral de Notre-Dame e utilize os dados acima como referência. O relatório do prefeito se assemelharia a qual das tabelas apresentadas a seguir?

a)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	60.000	120.000
Pelo número de visitantes anuais	23,07	46,14
Pela idade da igreja	350.200	700.400

b)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	55.000	110.000
Pelo número de visitantes anuais	11,05	22,10
Pela idade da igreja	320.264	900.554

c)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	50.000	100.000
Pelo número de visitantes anuais	23,07	46,14
Pela idade da igreja	350.467	700.934

d)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	50.000	100.000
Pelo número de visitantes anuais	11,05	22,10
Pela idade da igreja	350.467	600.500

e)

	Menor orçamento (em euro)	Maior orçamento (em euro)
Por m^2 da área total	45.000	90.000
Pelo número de visitantes anuais	11,05	22,10
Pela idade da igreja	250.250	900.554

Alternativa c.
Idade da igreja até a data do incêndio: $2019 - 1163 = 856$.
A tabela mostra o custo, em euro, nas condições do enunciado.

	Menor orçamento	Maior orçamento
Por m^2 da área total	$\frac{300.000.000}{6.000} = 50.000$	$\frac{600.000.000}{6.000} = 100.000$
Pelo número de visitantes anuais	$\frac{300.000.000}{13.000.000} = 23{,}07$	$\frac{600.000.000}{13.000.000} \approx 46{,}14$
Pela idade da igreja	$\frac{300.000.000}{856} \approx 350.467$	$\frac{600.000.000}{856} \approx 700.934$

MODERNA

Avaliação com questões discursivas, individual ou em grupos, com ou sem consulta e sem a intervenção do professor

Nesse tipo de avaliação, o estudante deve discorrer, por meio de um texto, sobre o que é perguntado em cada questão. Esse tipo de avaliação difere daquela apresentada no ***Team Based Learning (TBL)***, porque a prova é individual e não há participação do professor no processo.

1 No resultado de um recenseamento, a população de um município foi definida em 250.000 habitantes. Logo após a divulgação do resultado, os técnicos da secretaria de saneamento básico desse município reuniram-se e concluíram que, quando a população atingir 270.000 habitantes, será necessária uma reforma na infraestrutura de saneamento. Se a população desse município cresce 1% ao ano, daqui a quantos anos será necessária essa reforma? Use uma calculadora, se achar necessário.

Vamos modelar esse problema de acordo com a equação que expressa o montante acumulado M em função do tempo t e de um valor inicial C, que cresce a uma taxa constante i por unidade de tempo, isto é:

$$M = C(1 + i)^t$$

Assim, temos:

$$270.000 = 250.000(1 + 0,01)^t \Rightarrow 1,08 = (1,01)^t$$

$$\therefore t = \log_{1,01} 1,08 \Rightarrow t \approx 7,7$$

Concluímos, então, que a reforma será necessária daqui a 7,7 anos, aproximadamente, ou seja, 7 anos, 8 meses e 12 dias.

2 A **Geografia matemática** estuda a superfície da Terra e suas representações mapeais, investigando também as interações entre o nosso planeta, o Sol e a Lua. É subdividida em várias áreas como topografia, cartografia, fotogrametria, entre outras.

Suponha que, para mapear a região plana que contorna o estádio do Maracanã, uma equipe a fotografou com um *drone*, obtendo a foto abaixo.

VANDERLEI ALMEIDA/AFP

Vista aérea do estádio do Maracanã. Foto de 2016.

Sabendo que a elipse que contorna o estádio do Maracanã tem 279 m de eixo menor, determine a escala dessa foto.

Medindo, na foto, o eixo menor da elipse que contorna a imagem do estádio do Maracanã, obtemos 4 cm. Como 279 m equivalem a 27.900 cm, temos que a escala da foto é dada pela razão:

$$\frac{4 \cancel{cm}}{27.900 \cancel{cm}} = \frac{1}{6.975}$$

Logo a escala da foto é 1 : 6.975.

3 Apesar de grandes avanços nas áreas de inclusão social terem ocorrido nas últimas décadas, o Brasil ainda apresenta desigualdades em todo o território nacional. De acordo com um levantamento do IBGE, em 2018, havia aproximadamente 208 milhões de brasileiros, dos quais, aproximadamente, 75% tiveram acesso à internet, ou seja, 1 em cada 4 brasileiros ainda não dispunha de acesso à rede, representando um crescimento de 4% em relação a 2017.

Por mais que tenha ocorrido, simultaneamente, uma espécie de revolução nas tecnologias de orientação e localização na última década, boa parte da população brasileira está impossibilitada de utilizá-la por falta de conectividade. (**Fonte dos dados:** IBGE: Um a cada quatro brasileiros não tem acesso à internet. *Em Dia ES*. Disponível em: <https://www.emdiaes.com.br/Noticias/Utilidades/ibge-um-a-cada-quatro-brasileiros-nao-tem-acesso-a-internet>. Acesso em: 3 ago. 2020.)

Com base nessas informações, responda aos itens a seguir.

a) Identifique o número aproximado de brasileiros que não acessavam a internet à época da pesquisa.

O número de pessoas sem acesso à internet em 2018 era 25% de 208 milhões, ou seja: $0,25 \times 208.000.000 = 52.000.000$. Assim, o número aproximado de brasileiros que não acessavam a internet à época da pesquisa era 52 milhões.

b) Identifique o número aproximado de brasileiros que acessavam a internet em 2017.

Em 2018, $208.000.000 - 52.000.000 = 156.000.000$ de brasileiros tinham acesso à internet. De 2017 para 2018 houve um aumento de 4% no número de brasileiros com acesso à internet, ou seja, sendo n o número procurado, temos:

$$1,04 \cdot n = 156.000.000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{156.000.000}{1,04} = 150.000.000$$

Assim, o número aproximado de brasileiros com acesso à internet em 2017 era 150.000.000.

c) Com uma taxa de crescimento de 4% ao ano, em que ano o número de brasileiros com acesso à internet atingirá a marca de 196.560.000?

Se necessário utilize as aproximações $(1,04)^4 \approx 1,17$; $(1,04)^6 \approx 1,26$; e $(1,04)^9 \approx 1,42$.

No item **b**, calculamos que 156.000.000 brasileiros tinham acesso à internet em 2018, podemos modelar o problema de acordo com a equação que expressa o montante acumulado M em função do tempo t e de um valor inicial C, que cresce a uma taxa constante i por unidade de tempo, isto é: $M = C(1 + i)t$. Assim, temos:

$$196.560.000 = 156.000.000(1 + 0,04)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{196.560.000}{156.000.000} = 1,26$$

O enunciado sugere que se utilize a aproximação $(1,04)^6 \approx 1,26$, assim $t = 6$.

Concluímos, então, que o número de brasileiros com acesso à internet atingirá a marca de 196.560.000 no ano $2018 + 6 = 2024$.

d) Elabore um texto e apresente seus argumentos sobre os motivos pelos quais ainda não há acesso universal à internet em todo o Brasil.

MODERNA

Resposta pessoal. O Brasil é um país de dimensões continentais e apenas nas últimas décadas abriu seu mercado de telecomunicações para investimento de grupos privados. Há pouca concorrência no setor com um número mínimo de prestadores de serviço de internet, caracterizando um monopólio com pouca regulação e fiscalização. A tentativa de universalização pelo Estado tem demonstrado crescimento significativo, mas a amplitude do território associada à da população torna o desafio mais complexo. Existem regiões em que outros serviços básicos como saneamento e energia devem anteceder a chegada da internet.

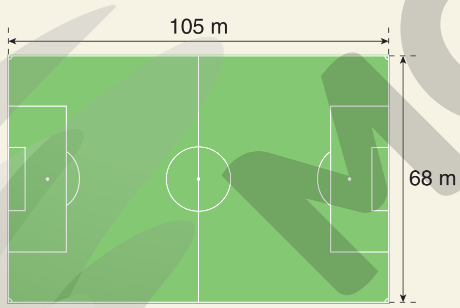
4 A adoção de medidas padronizadas favorece comparações e extrapolações quando se pretendem avaliar espaços muito amplos ou grandezas abstratas. Um dos exemplos mais comuns é a comparação da área desmatada na Amazônia com campos de futebol. Um campo de futebol oficial, de acordo com a padronização da Confederação Brasileira de Futebol (CBF), tem 105 metros de comprimento e 68 metros de largura.

Considerada uma área de preservação ambiental indispensável para a manutenção da vida humana na terra, a Amazônia é, também, o maior bioma do país e abriga mais de 2.500 espécies de árvores, além de 30.000 tipos de plantas.

Para que se tenha uma ideia dos impactos do desmatamento da Amazônia no meio ambiente, basta dizer que em junho de 2020 foram desmatados o equivalente a 1.000 campos de futebol por hora.

Praticamente um ano antes, em julho de 2019, um estudo publicado apontava uma taxa de desmatamento de aproximadamente 1 campo de futebol por minuto. (**Fonte dos dados:** Ministério do Meio Ambiente. Disponível em: <https://antigo.mma.gov.br/biomas.html>. Acesso em: 13 abr. 2021.)

ERICSON GUILHERME LUCIANO



Fonte: "Tudo igual dentro das 4 linhas: CBF padroniza gramados das Séries A e B". *Globo.com*. Disponível em: <http://globoesporte.globo.com/futebol/noticia/2016/01/tudo-igual-dentro-das-4-linhas-cbf-padroniza-gramados-das-series-e-b.html>. Acesso em: 3 ago. 2020.

Sendo a Amazônia um espaço de biodiversidade tão relevante para o Brasil e o mundo, monitorar os dados de desmatamento é crucial para controle dos ritmos de perda da floresta.

Tendo como referência o tamanho de 1 campo de futebol, calcule:

a) A área total do desmatamento em todo o mês de julho de 2019.

O mês de julho possui 31 dias de 24 horas, e cada hora tem 60 minutos; assim, a área A desmatada, em metro quadrado, é dada por: $A = 31 \cdot 24 \cdot 60 = 44.640$. Portanto, a área total do desmatamento em todo o mês de julho de 2019 foi 44.640 m^2.

b) A área total do desmatamento em todo o mês de junho de 2020.

O mês de junho tem 30 dias de 24 horas; assim, a área A' desmatada, em metro quadrado, é dada por: $A' = 30 \cdot 24 \cdot 1.000 = 720.000$. Então, a área total do desmatamento em todo o mês de junho de 2020 foi 720.000 m^2.

c) A taxa de variação de desmatamento entre os meses pesquisados.

A taxa i de variação é dada por:

$$i = \frac{\text{valor}_{\text{final}} - \text{valor}_{\text{inicial}}}{44.640}$$

Assim, $i = \dfrac{720.000 - 44.640}{44.640} \Rightarrow i \approx 15{,}13$. Concluímos, então, que a taxa i de variação de desmatamento entre os meses pesquisados foi 1.513%.

d) Elabore um texto argumentativo que demonstre os possíveis impactos ambientais, sociais e econômicos do desmatamento da Amazônia para o Brasil.

Resposta pessoal. Na perspectiva ambiental, o avanço do desmatamento descontrolado da Amazônia pode resultar na extinção de dezenas de espécies nativas (animais e vegetais), impactar o clima global com aumento da temperatura terrestre, além dos efeitos de gases poluentes na atmosfera terrestre. No âmbito social, ocorrem diversos conflitos de interesse entre comunidades locais, quilombolas e indígenas com grupos extrativistas, como, por exemplo, garimpeiros e grileiros, tornando o Brasil o país mais perigoso para indivíduos e grupos de ecologistas, ecoativistas e defensores do meio ambiente. Ainda, há perda significativa da capacidade produtiva de partes devastadas da floresta, além da diminuição de aporte de recursos internacionais para manutenção da biodiversidade do sistema Amazônico.

6.2. Autoavaliação

Muitas estratégias de avaliação são orientadas pela prática da prova conceitual. Realizadas de forma finalista, somativa, a avaliação que apenas verifica aprendizagem no fim do ciclo educativo e está centrada, exclusivamente no professor, tende a desconsiderar o sujeito principal do processo de ensino-aprendizagem: o estudante. Um dos aspectos mais enriquecedores do processo de avaliação é o estudante identificar suas aprendizagens, suas fragilidades e principais aspectos a avançar. Consideramos que a prática da autoavaliação deva fazer parte das estratégias educativas dos professores, sensibilizando, conscientizando e estimulando atividades de avaliação individual ou avaliação por pares e do desenvolvimento de indicadores objetivos que proporcionem aos jovens deste ciclo de ensino realizar criticamente suas próprias avaliações.

O objetivo desse instrumento de avaliação é verificar a visão que cada estudante tem de si mesmo, como pensa seu processo de aprendizagem e se consegue estabelecer estratégias para avançar nos conteúdos. Deve-se ressaltar que os estudantes podem obter ajuda do professor e dos colegas.

MODERNA

A seguir, sugerimos um modelo de ficha de autoavaliação, que pode ser adaptada de acordo com seu interesse. A proposta é que o próprio estudante se avalie quanto às atitudes em relação aos estudos. Cada um deve atribuir-se uma nota de 0 a 10, em cada um dos itens descritos neste quadro.

Ficha de autoavaliação de atitudes diante do processo de aprendizagem	
Nome do estudante:	**Nota**
Satisfação com a organização do material escolar	
Pontualidade	
Assiduidade	
Relacionamento com os colegas	
Relacionamento com os professores	
Adequação do meu comportamento durante as aulas	
Atenção na aula	
Participação na aula	
Interesse pelos assuntos abordados	
Interesse em estudar os assuntos desenvolvidos nos dias em que faltei às aulas	
Empenho nas tarefas de aula	
Empenho nas tarefas de casa	
Empenho frente aos novos desafios	
Participação nos trabalhos em grupo	
Empenho no estudo em casa	
Preparo para as avaliações	
Cumprimento de prazos	
Evolução no aprendizado	
Calcule a média aritmética das notas que você atribuiu a cada item, ou seja, some as notas e divida a soma por 18. O que essa média representa para você? Agora escreva em uma folha avulsa se você está satisfeito com suas atitudes no processo de aprendizagem e o que pretende fazer para mudá-las, caso julgue necessário.	

MODERNA

7. Referências bibliográficas comentadas

BACHELARD, Gaston. *A formação do espírito científico.* Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.

Apresenta o processo de construção do conhecimento pela superação de obstáculos epistemológicos.

BASSANEZ, Carlos B. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Contexto, 2002.

Permeando vários contextos, a obra traz uma proposta de estudo das ciências por meio da modelagem matemática.

BEE, Helen. *A criança em desenvolvimento.* 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 1996.

Apresenta as principais teorias de educação e desenvolvimento físico, mental, social, entre outros, do nascimento à idade adulta.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: Ensino Médio. Brasília, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 6 ago. 2020.

Dispõe sobre o ensino nas escolas brasileiras públicas e particulares de Educação Infantil, Ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Novo Ensino Médio*. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/#!/pagina-inicial>. Acesso em: 6 ago. 2020.

O *site* reúne as informações relativas às mudanças e à implementação do novo Ensino Médio.

CARAÇA, Bento J. *Conceitos fundamentais de Matemática*. Lisboa: Brás Monteiro, 1951.

A obra mostra a importância das circunstâncias históricas e das concepções filosóficas e visões de Ciência no desenvolvimento da Matemática.

COLEÇÃO DE MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. *Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio*. São Paulo: Unicamp. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/>. Acesso em: 6 ago. 2020.
O *site* traz mais de 300 recursos educacionais relacionando a Matemática com as ciências humanas e sociais.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano*: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
A obra apresenta estudos de psicologia cognitiva, tendo como foco a teoria dos registros de representação semiótica para pesquisas no âmbito da didática da Matemática.

GOLSE, Bernard. *O desenvolvimento afetivo e intelectual da criança*. 3. ed. São Paulo: Artmed, 1998.
De maneira integrada, aborda o papel do contexto e das relações humanas na inteligência e na cognição.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre: Globo, 1952.
Apresenta a influência e a função da Matemática no conhecimento humano.

HOUT, Réjean. *Métodos quantitativos para as ciências humanas*. Lisboa: Piaget, 2002.
Propõe a interpretação de medidas sociais, tais como taxas de inflação, de natalidade e de criminalidade, para o ensino de ciências humanas.

KARRARA, Kester. *Introdução à psicologia da educação*. São Paulo: Avercamp, 2004.
De maneira sintética, apresenta as abordagens da psicologia da educação de Piaget, Wallon, Freud, Skinner, Vygotsky e Lacan.

KARSON, Paul. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.
Com linguagem informal, narra o percurso da Matemática e suas relações com outras ciências, desde a Aritmética até o Cálculo diferencial e integral.

LEFRANÇOIS, Guy R. *Teorias de aprendizagem*: o que a velha senhora disse. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
Apresenta propostas de aprendizagem como desenvolvimentismo, construtivismo, behaviorismo, aprendizagem social, entre outras.

LIMA, Lauro de Oliveira. *Piaget*: sugestões aos educadores. Petrópolis: Vozes, 1998.
Traz algumas interpretações da teoria piagetiana para a educação.

MACHADO, Nilson José. Interdisciplinaridade e Matemática. *Pro-Posições*, n. 10, v. 4, São Paulo, Cortez, 1993.
O artigo aborda estratégias de adoção da interdisciplinaridade no ensino da Matemática.

MOLL, Luis C. *Vygotsky e a educação*. São Paulo: Artmed, 1996.
Apresenta as principais contribuições das pesquisas de Vygotsky para a educação.

MOREIRA, Márcio Borges; MEDEIROS, Carlos Augusto de. *Principios básicos de análise do comportamento*. São Paulo: Artmed: 2007.
Com base na psicologia comportamental, apresenta os métodos e as técnicas de ensino de comportamentos.

MORIN, Edgar. *Ciência com consciência*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1996.
Apresenta as implicações da teoria da complexidade nas práticas educativas e científicas.

NICOLESCU, Basarab. *O manifesto da transdisciplinaridade*. Trad. Lúcia Pereira de Souza. São Paulo: Triom, 1999.
Clássico sobre a transdisciplinaridade como forma de superar a fragmentação do conhecimento.

PERENOUD, Philippe. *Avaliação da excelência à regulação das aprendizagens*: entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.
A obra apresenta as visões atuais sobre o papel e as formas da avaliação no contexto educativo.

PERENOUD, Philippe *et al*. *As competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da educação. Porto Alegre: Artmed, 2002.
Apresenta as transformações necessárias para o professor se adequar às demandas educativas do século XXI.

PERENOUD, Philippe. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
Traz o conceito de competências e propõe uma ressignificação do conteúdo no ambiente escolar.

PERENOUD, Philippe. *Escola e cidadania*. O papel da escola na formação para a democracia. Porto Alegre: Artmed, 2005.
Para além da visão conteudista do ensino, a obra propõe que a escola participe de forma ativa na preparação para a vida e para o exercício da cidadania.

PIAGET, Jean. *Seis estudos de psicologia*. São Paulo: Forense Universitária, 1973.
Apresenta os estágios de desenvolvimento e a teoria de equilibração majorante.

RATNER, Carl. *A psicologia sócio-histórica de Vygotsky*: aplicações contemporâneas. Porto Alegre: Artmed, 1995.
Na obra são apresentadas estratégias de utilização das abordagens sócio-históricas aos contextos educacionais atuais.

ROSA, Carlos A. P. *História da ciência*. Brasília: Funag, 2012. v. 1, 2 e 3.
Narra a história da ciência do Renascimento ao mundo contemporâneo.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, publicação quadrimestral.
Traz alternativas para o ensino e narra experiências dos professores em sala de aula.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. *A formação social da mente*: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1991.
Aborda os conceitos clássicos de zonas de desenvolvimento e ritmos de aprendizagens.

MODERNA

As Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio e da BNCC balisaram a produção desta obra, o que justifica o planejamento que estabelece objetivos a serem atingidos.

A seguir, apresentamos orientações para o desenvolvimento dos capítulos.

CAPÍTULO 1 Matemática e Arte: a perspectiva geométrica

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias
EM13CHS101 EM13CHS102 EM13CHS103 EM13CHS104 EM13CHS106 EM13CHS303	EM13MAT105 EM13MAT308 EM13MAT505

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- A relação entre Matemática e Arte por meio de pontos de fuga.
- Várias formas de perspectiva aplicadas em representações planas de obras de arte.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Desenhar figuras planas ou sólidos geométricos usando um, dois ou três pontos de fuga.
- Diferenciar os conceitos de perspectiva exata e perspectiva isométrica.
- Identificar a aplicação da perspectiva em obras de arte.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Matemática e Arte: a perspectiva geométrica*.

1. **Relevância**: A escolha do tema se deve à possibilidade de unir a Matemática, a História e a Arte. Além disso, estudantes que pretendem cursar arquitetura e urbanismo, *design* gráfico, *design* de moda, desenho industrial etc. poderão ser submetidos à prova de Teoria e Habilidade Específica (THE) e deverão demonstrar conhecimentos de perspectiva e ponto de fuga.
2. **Atualidade**: Para artistas plásticos ou profissionais de áreas que exijam intervenção e planejamento de espaços em ambientes ou paisagens, interpretação e representação de objetos tridimensionais sobre um plano mantendo suas proporções, fazendo uso ou não de *softwares* gráficos, entre outros, é imperativo o domínio da perspectiva geométrica.
3. **Interesse**: A exploração da interdisciplinaridade é, sem dúvida, um exercício desafiador e atrairá a atenção dos estudantes, aumentando sua curiosidade e proporcionando uma teia de conhecimentos baseados em diversas áreas. O estudo da perspectiva aproxima o estudante do mundo da Arte contextualizada pela História, contribuindo, assim, com a sua formação intelectual e acadêmica.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia**: O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (2009) investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para a apreensão do conhecimento matemático. Diz ele: "A coordenação de vários registros de representação semiótica aparece como fundamental para uma apreensão conceitual dos objetos". Essa verdade não vale apenas no aprendizado de Matemática, mas em qualquer área do conhecimento, inclusive das vivências cotidianas. Uma das formas universais de registro de representação é o desenho, que também é uma linguagem. Além das obras de arte e do estudo da Geometria, ele é usado em mapas, nas ilustrações de livros, em peças publicitárias, em projetos arquitetônicos, entre outras situações.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a colaboração dos professores de Matemática (para comentar a Geometria, as proporções etc.), de Linguagens e suas Tecnologias (para comentar pontos de fuga, os desenhos e obras apresentadas, o vídeo e os filmes citados, os movimentos artísticos etc.) e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias (para comentar a óptica da visão).

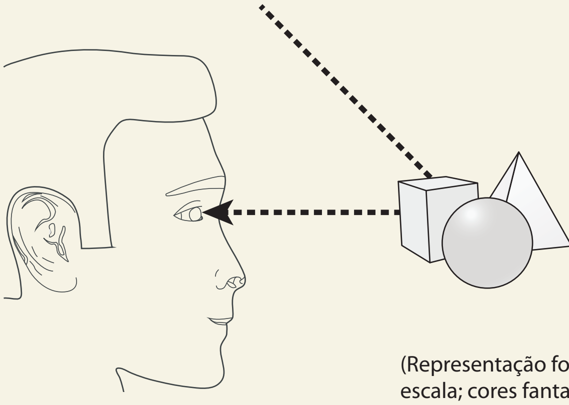
Um pouco de história: a teoria da visão na Antiguidade

Contextualize a história da perspectiva por meio da leitura a seguir.

Os antigos gregos classificavam a visão como a principal maneira pela qual acessamos a natureza e seus fenômenos, graças ao poder de observar e aprender com a natureza, gerando, assim, conhecimento. No entanto, eles acreditavam que o processo de visão ocorria por meio de raios luminosos

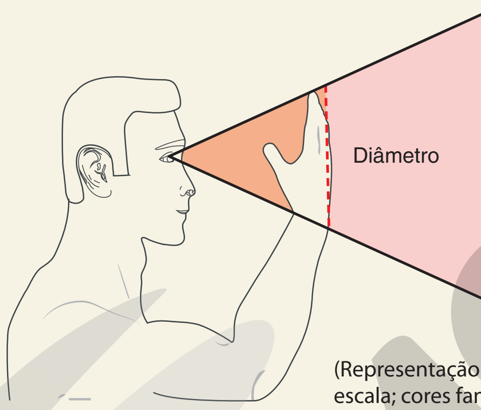
MODERNA

emitidos pelos olhos, isto é, nossos olhos seriam capazes de iluminar o ambiente, proporcionando imagens de objetos, paisagens, pessoas etc. Hoje sabemos que a imagem dos objetos é formada por meio da luz refletida por eles.



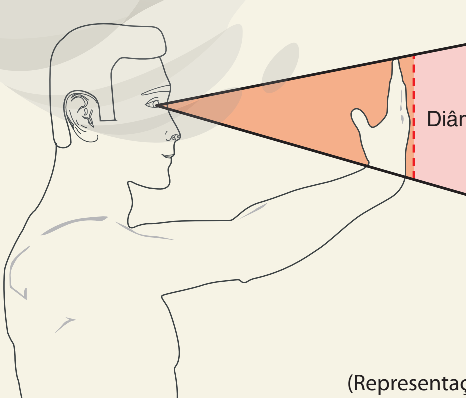
(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Peça aos estudantes que aproximem uma mão do rosto e percebam a sensação de profundidade que o sistema ocular propicia. Comente que o tamanho percebido é proporcional à distância da mão ao rosto: quanto mais perto a mão estiver do rosto, maior será o tamanho percebido.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Em seguida, peça a eles que afastem a mão do rosto o máximo possível. Embora a mão não tenha mudado de tamanho, ela parece bem menor. Um modelo matemático que representa adequadamente essa percepção visual é o cone, cujo vértice se encontra no olho do observador e o objeto observado, em sua base.



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

A perspectiva geométrica na Arte

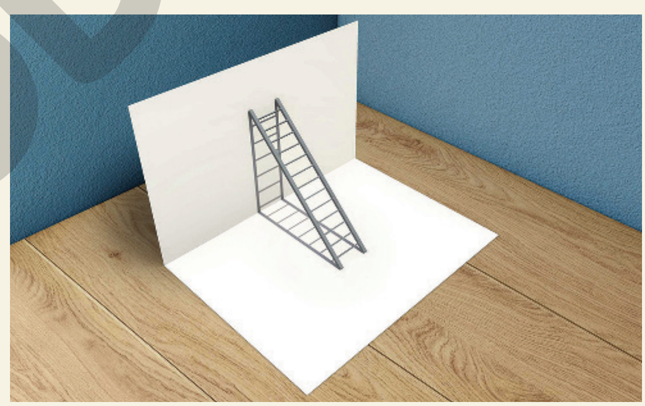
Mostre que a percepção de profundidade de um desenho sobre uma superfície plana é conseguida pela perspectiva. Ferramentas da Geometria plana são capazes de criar uma ilusão tridimensional em um desenho bidimensional.

ALBUM/FOTOARENA – BIBLIOTECA NACIONAL DA FRANÇA, PARIS

Gravura da construção de arcos de Hendrik Hondius I (1573-1650), inspirada nos desenhos de Hans Vredeman de Vries (1527-1609). Bilbioteca Nacional, Paris, França.

Pergunte se alguém da turma já viu outra maneira de se obter efeitos tridimensionais em desenhos e peça que a explique.

Por exemplo, na figura abaixo, vemos uma escada apoiada em dois planos (horizontal e vertical), mas, na verdade, isso é uma ilusão, pois a figura foi inteiramente desenhada em uma folha de papel.



RODRIGO PEREIRA DE FIGUEIREDO

Fonte: Como desenhar uma escada tridimensional. Disponível em: <https://www.videoman.gr/pt/111883>. Acesso em: 8 ago. 2020.

Sugestão

Se possível, reproduza o vídeo "Como desenhar uma escada tridimensional" em sala. Disponível em: <https://www.videoman.gr/pt/111883>. Acesso em: 8 ago. 2020.

Defina perspectiva e descreva os elementos da perspectiva:

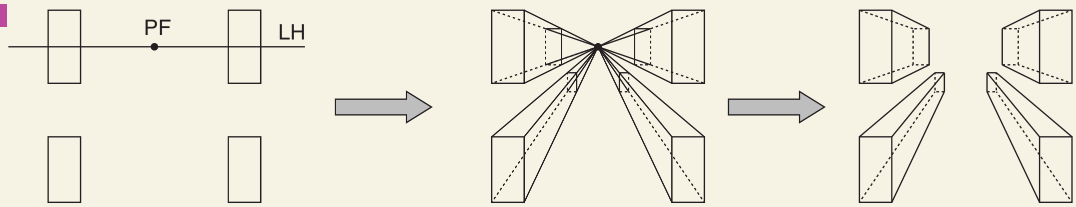
- linha do horizonte;
- pontos de fuga;
- linhas de fuga.

Explique as técnicas utilizadas para um, dois ou três pontos de fuga.

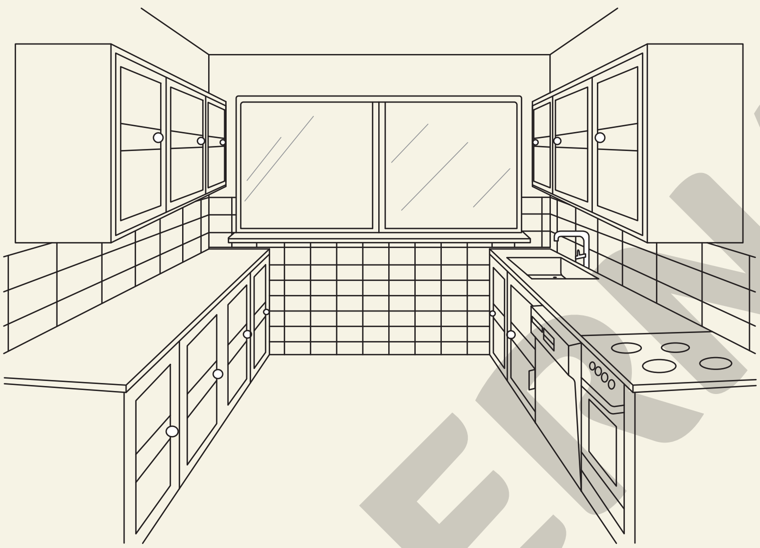
MODERNA

Atividades (p. 16)

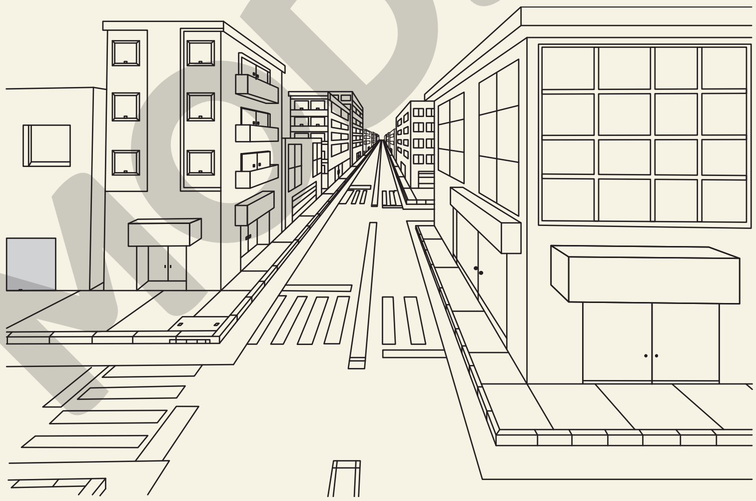
1



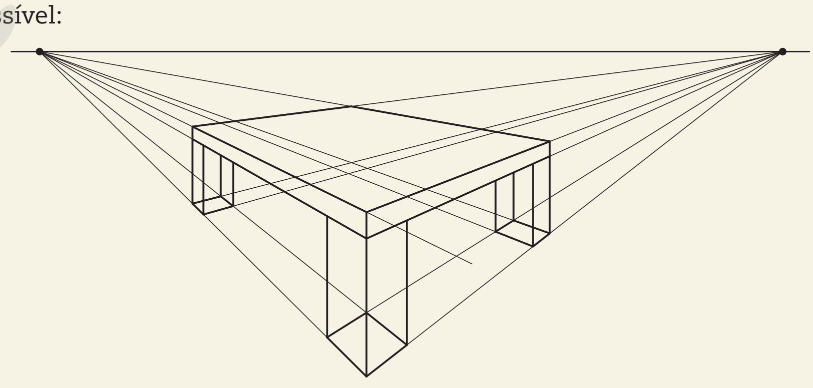
2 Resposta possível:



3 Resposta possível:

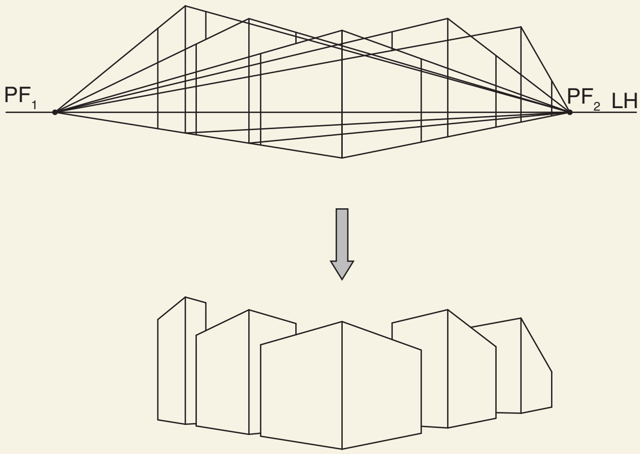


4 Resposta possível:

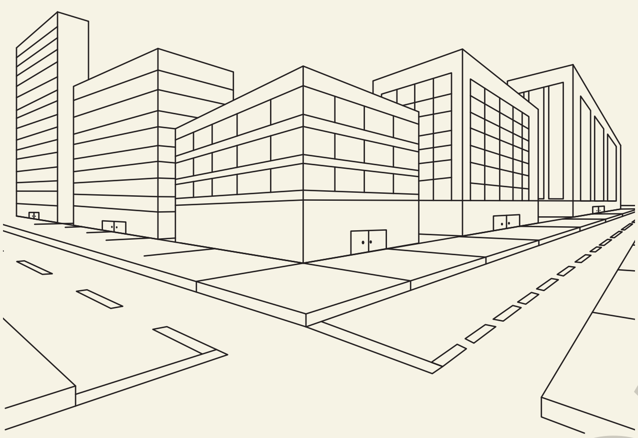


ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

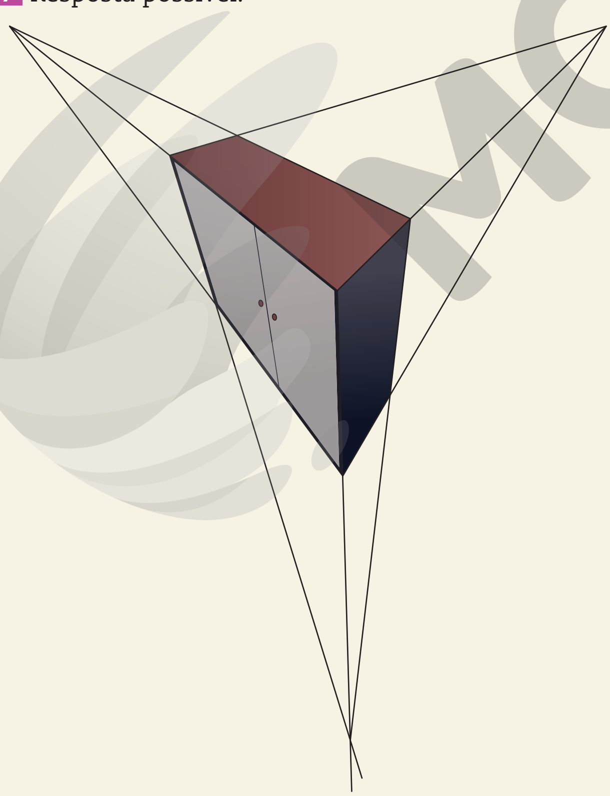
5 Resposta possível:



6 Resposta possível:

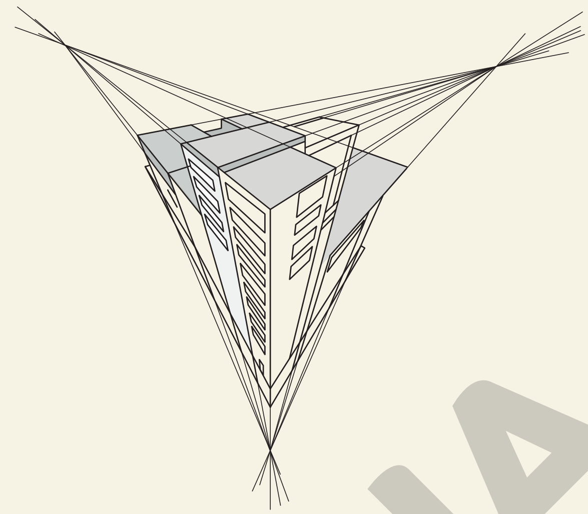


7 Resposta possível:



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

8 Resposta possível:



Explorando conexões (p. 17)

Professor, discuta com a turma de que forma a dedicação e a atenção cuidadosa e detalhista do diretor Stanley Kubrick dominavam a atenção do espectador, de maneira a causar inquietação, incômodo e medo. Comente que uma forma interessante de obter essa reação era trabalhar com o ponto de fuga da cena centrado no local exato que provocaria maior interesse por parte do observador. O diretor utilizava técnicas de enquadramento, luz, montagens etc. que mexiam com o estado psicológico e lógico do espectador, causando-lhe fortes emoções por meio do desconforto visual.

Atividade complementar (p. 18)

9 a) Com roteiro do escritor Arthur C. Clarke e do diretor e produtor cinematográfico Stanley Kubrick, o longa-metragem *2001: Uma odisseia no espaço*, lançado em 1968, é considerado uma obra-prima dos filmes de ficção científica. O enredo retrata várias etapas da evolução da espécie humana, desde o instante em que o homem primitivo descobre o uso de uma arma como forma de obter vantagens em confrontos físicos e, consequentemente, obter alimentos. Passa ainda pela dependência tecnológica de inteligências artificiais, ao ter suas viagens espaciais sujeitas ao comando de computadores, finalmente chegando à evolução suprema, em que o homem não mais necessita de um corpo físico para existir. Cada momento evolutivo é pontuado pela aparição de um monólito negro que representa um indício da presença de vida extraterrena.

b) Na primeira cena em que aparece o monólito, o enquadramento é feito de modo que o ponto de fuga seja o centro da Lua. Na cena em que a comissária de bordo entra com uma bandeja na seção de passageiros da aeronave, o enfoque é dado de modo que o ponto de fuga se localize no centro da tela. Na cena em que o Dr. David Bowman entra no computador Hal 9.000 para desligá-lo, percebe-se o enquadramento feito com destaque ao ponto de fuga.

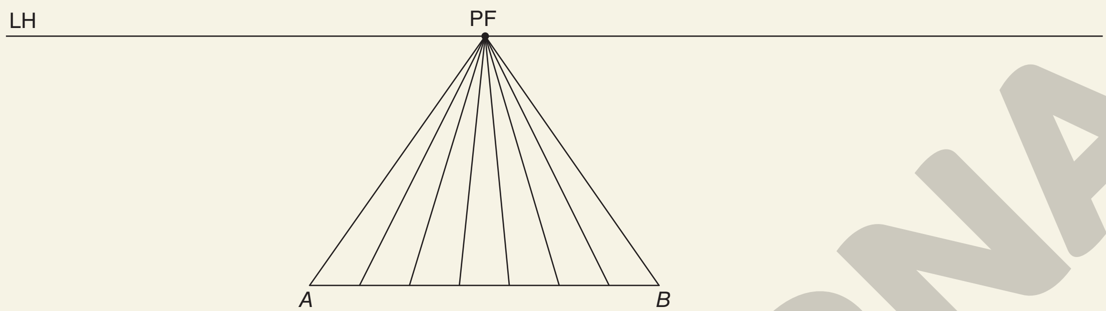
MODERNA

Perspectiva exata (p. 19)

Explique o conceito e as técnicas de Leon Battista Alberti e Piero della Francesca para representar figuras planas ou tridimensionais por meio da perspectiva. Explore os exemplos apresentados.

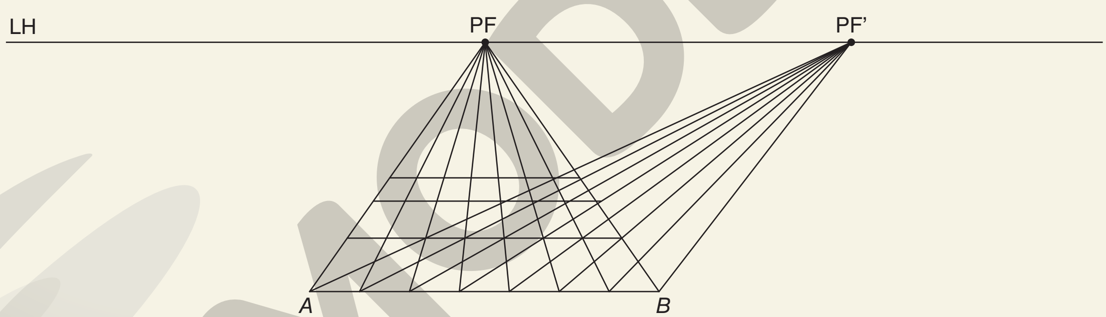
Atividades (p. 21)

10 Desenhamos um ponto de fuga (*PF*) na linha do horizonte (*LH*) e, abaixo dela, um segmento de reta $\overline{AB}$ dividido em 7 partes iguais, paralelo à *LH*. O comprimento de cada uma dessas partes representa a medida 1 *u*. A seguir, ligamos por linhas retas os extremos e os pontos de divisão do segmento $\overline{AB}$ ao ponto de fuga:

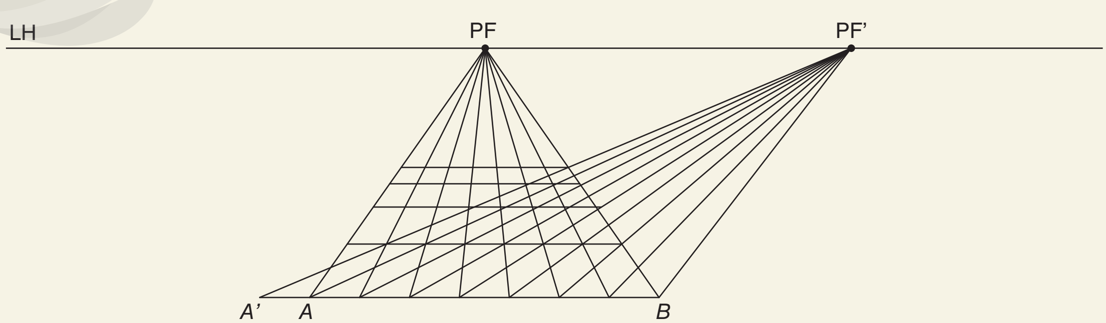


Ligamos por linhas retas os extremos e os pontos de divisão do segmento $\overline{AB}$ a outro ponto de fuga *PF*'.

Para que o comprimento de cada ladrilho tenha o dobro da largura, traçamos os seguintes segmentos de reta paralelos a $\overline{AB}$:

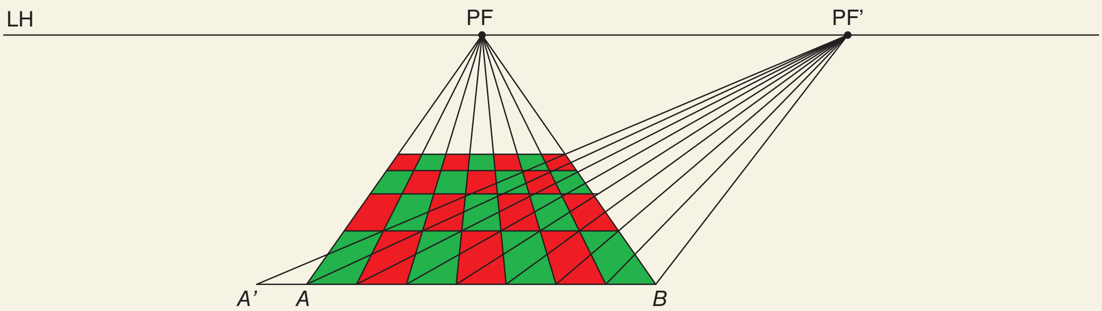


Observamos que falta uma fileira de ladrilhos paralela a $\overline{AB}$. Para obtê-la, marcamos um ponto *A*', à esquerda de *A*, tal que $\overline{AA'}$ tenha a mesma medida de cada uma das 7 partes em que foi dividido o segmento $\overline{AB}$. Em seguida, traçamos o segmento de reta com extremos *A*' e *PF*'. Pelo ponto de intersecção desse segmento com aquele que une *B* a *PF*, traçamos uma paralela ao segmento $\overline{AB}$, obtendo, assim, a fileira de ladrilhos que faltava.

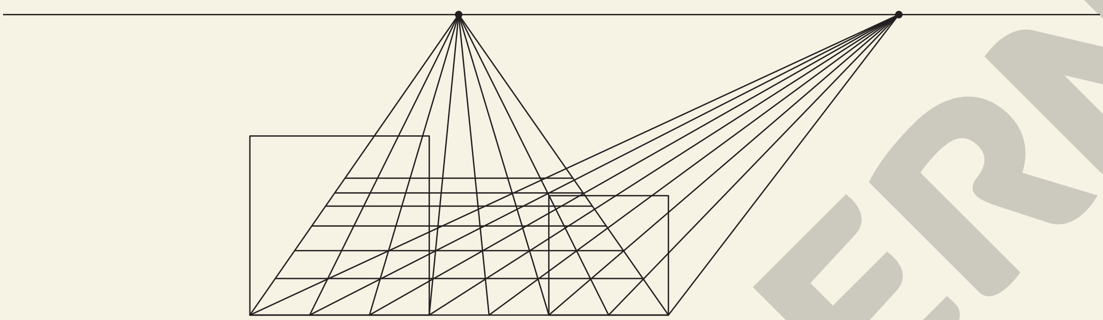


ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

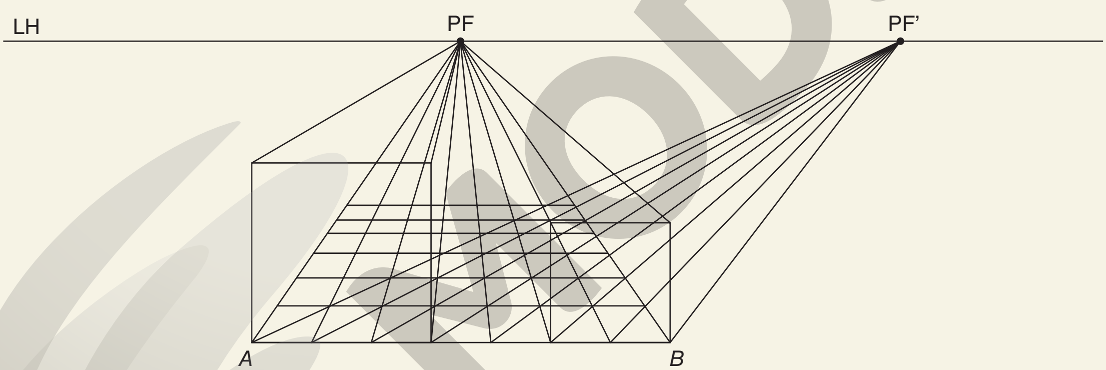
Concluímos, então, a perspectiva:



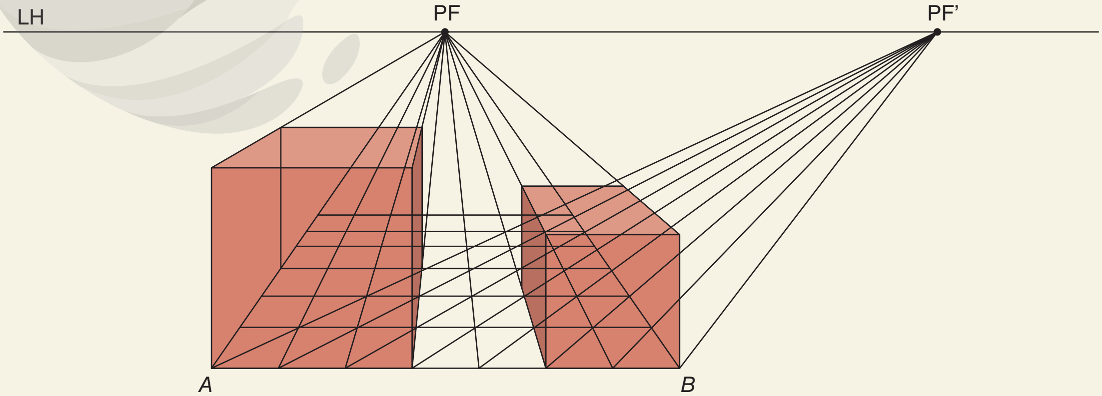
11 Considerando a segunda figura da resolução anterior, desenhamos dois quadrados com lados contidos no segmento $\overline{AB}$, e acima dele, tal que a medida dos lados do quadrado maior seja 3 *u* e a medida dos lados do menor seja 2 *u* (*u* equivale a $\frac{1}{7}$ de $\overline{AB}$). Por exemplo, admitindo que esses quadrados tenham os pontos *A* e *B* como vértices, temos a figura:



Pelos vértices dos quadrados traçamos as linhas de fuga até o ponto *PF*:



O ponto da linha de fuga que une *A* a *PF*, e dista 3 *u* de *A*, é um vértice do cubo maior; e o ponto da linha de fuga que une *B* a *PF*, e dista 2 *u* de *B*, é um vértice do cubo menor. Assim, concluímos a perspectiva:

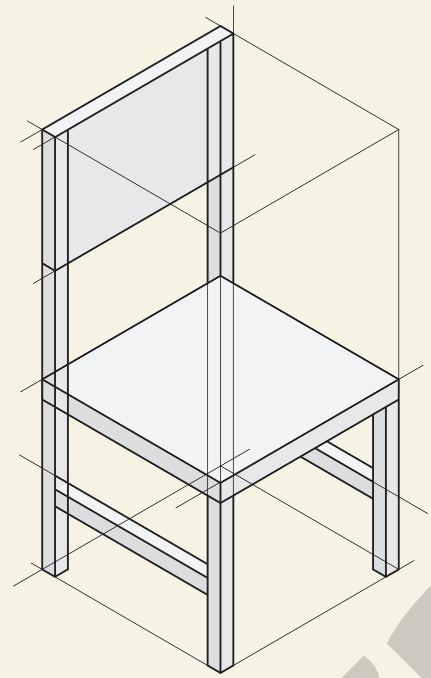


ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

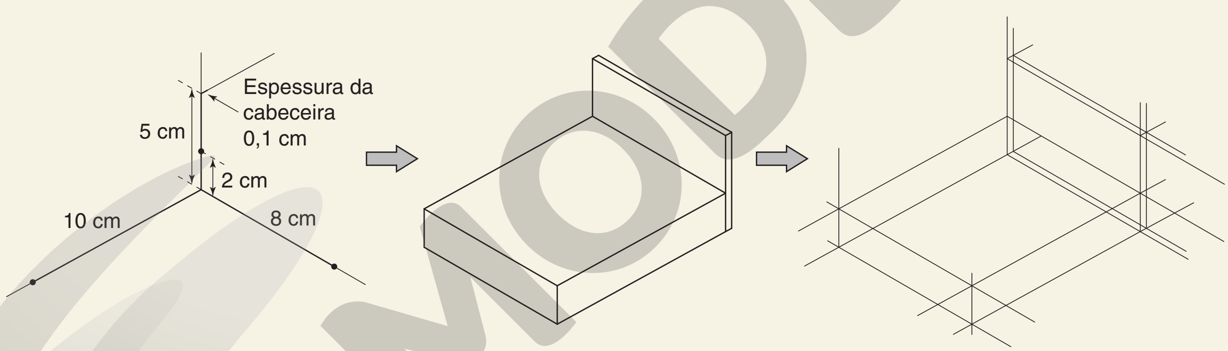
MODERNA

Atividades (p. 24)

12 Resposta possível:



13 Marcamos três pontos sobre os eixos isométricos, um em cada eixo, de modo que as distâncias dos pontos à origem O sejam diretamente proporcionais a 2,00; 1,60 e 0,40. Por exemplo, escolhemos as medidas 10 cm, 8 cm e 2 cm, respectivamente. Obedecendo a essa proporção, consideramos a cabeceira com 5 cm de altura e 0,1 cm de espessura. Assim, temos:



Explorando conexões (p. 24)

Theo van Doesburg (1883-1931) era um artista plástico holandês, poeta, arquiteto e *design*er que publicou, em 1930, o manifesto da arte concreta.

A intenção era o rompimento total com o lirismo, simbolismo e subjetivismo de qualquer outro movimento artístico e evidenciar a obra que não tenha outro significado a não ser ela própria. Isso resultou em muitas imagens relacionadas à precisão matemática, com padrões geométricos simples, tais como retas, triângulos, círculos etc. No Brasil, em São Paulo, a arte concreta era representada pelo Grupo Ruptura, que se baseava no manifesto de forma ortodoxa e, no Rio de Janeiro, pelo Grupo Frente, que seguia as mesmas regras, porém de um modo mais maleável. Essa diferença de postura entre os dois grupos criou desentendimentos. Após a 1ª Exposição Nacional de Arte Concreta, idealizada pelo Grupo Ruptura com a cooperação do Grupo Frente, ocorreu o fim da colaboração entre eles e, alguns anos depois, começou a se formar no Rio de Janeiro um dos mais importantes movimentos de arte no Brasil: o movimento neoconcreto.

Sugestão

Se possível, compartilhe o manifesto da arte concreta, de Theo van Doesburg, com os estudantes. Disponível em: <http://www.museuafrobrasil.org.br/pesquisa/indice-biografico/movimentosesteticos/arte-concreta>. Acesso em: 25 ago. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

Atividade complementar (p. 26)

14 Resposta pessoal. Professor, para esta atividade, é interessante que os professores de Matemática e suas Tecnologias, de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e de Linguagens e suas Tecnologias trabalhem em conjunto, para criar, com os estudantes, a narrativa que conduzirá a exposição, isto é, a curadoria que produzirá os textos que acompanham e explicam o movimento artístico e as obras, bem como a escolha do espaço onde será exposta e a disposição das obras no local.

Texto complementar (p. 26)

Explique o texto que descreve o efeito da luz e das cores na perspectiva das pinturas e comente que o conceito de perspectiva atmosférica se deve à percepção de Leonardo da Vinci a respeito da perspectiva.

Entendimento do texto (p. 27)

1. O artista emprega cores mais luminosas, contornos mais nítidos e textura mais espessa em objetos mais próximos. Os mais afastados, que na tela são dispostos mais acima, são retratados com menos nitidez e, normalmente, com cores semelhantes às aplicadas no fundo.
2. A atmosfera terrestre, que contém poeira e umidade, se interpõe e afeta a luminosidade dos objetos.
3. Leonardo da Vinci construiu seu entendimento da perspectiva não apenas por meio da rígida formulação da perspectiva linear, mas também compreendendo a perspectiva que leva em consideração o ar (ou a atmosfera) presente entre o observador e o objeto observado. Ele acreditava que não apenas o tamanho, mas também a aparência dos objetos mudava à medida que a distância entre objeto e observador aumentava. Da mesma forma, as linhas que delimitam a silhueta do objeto passariam a se tornar menos distintas com a distância. Estes dois elementos (atmosfera e bordas dos objetos) tornaram-se fundamentais na construção de sua perspectiva.
4. Na *Mona Lisa*, Leonardo da Vinci afasta as montanhas em último plano por meio da perspectiva atmosférica, criando um efeito esfumaçado, suprimindo os detalhes ao fundo e realçando-os no primeiro plano.
5. Em uma das diversas interpretações da obra, as montanhas representam o mundo medieval encoberto por misticismo e ignorância, em contraposição à figura da mulher, retratada em seus mínimos detalhes e iluminada pela racionalidade renascentista, representando a ideia de que o homem renascentista tinha consciência de seu lugar no tempo e espaço.

CAPÍTULO 2 Orientação e localização

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS101 EM13CHS103 EM13CHS104 EM13CHS105 EM13CHS106 EM13CHS401 EM13CHS403 EM13CHS404 EM13CHS504 EM13CHS606	EM13MAT101 EM13MAT102 EM13MAT202 EM13MAT203 EM13MAT304 EM13MAT406 EM13MAT407 EM13MAT508	Revisão bibliográfica Construção e uso de amostragens Construção e uso de questionários Análise de mídias sociais Pesquisa-ação

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- Diversas formas e instrumentos de orientação e localização, como a rosa dos ventos, destacando os pontos cardeais, colaterais e subcolaterais.
- A bússola (incluindo a confecção de uma bússola em sala de aula).
- A orientação pelo Sol nos hemisférios Norte e Sul.
- A orientação pelas estrelas nos hemisférios Norte e Sul.
- Paralelos e meridianos terrestres, incluindo fusos horários e coordenadas geográficas (latitude, longitude e altitude).
- O GPS.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Compreender a relevância da orientação e localização na superfície terrestre, seja por meio de elementos naturais, seja utilizando ferramentas, físicas ou virtuais, de navegação.
- Conhecer o processo de trilateração utilizado pelo sistema de posicionamento global (GPS).
- Calcular o horário local em qualquer parte do mundo.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Orientação e localização*.

1. **Relevância:** Localizar-se e orientar-se sobre a superfície terrestre foram, e continuam sendo, noções imprescindíveis para o desenvolvimento do ser humano. Em tempos passados, por exemplo, na época das grandes navegações (séculos XV e XVI), a localização e a orientação não tinham grande precisão, pois se baseavam em observações da posição do Sol, da Lua, das estrelas, de bússolas, de mapas pouco precisos etc.

MODERNA

Hoje, temos à nossa disposição, nos aparelhos celulares e computadores, o GPS (*Global Positioning System* ou sistema de posicionamento global, em português), que nos poupa trabalho e tempo, evitando cálculos complicados.

2. **Atualidade:** A comodidade, a utilidade e a facilidade de uso que o sistema GPS proporciona em nossa movimentação diária, estipulando itinerários e fornecendo orientações de forma relativamente segura (é raro, mas possível que o GPS nos dê uma indicação errada), tornaram essa importante ferramenta indispensável nos dias atuais, não apenas para localização, mas também para ganhar tempo.
3. **Interesse:** Orientação e localização são assuntos interdisciplinares, que incentivam a curiosidade, a criatividade e a participação dos estudantes na aula. A participação de professores de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas tornam a aula mais dinâmica.
   O professor pode sugerir que os estudantes desenhem, em uma folha de papel-cartão ou cartolina, uma rosa dos ventos ou então que comentem o funcionamento da bússola. Se possível, leve algumas bússolas para a sala de aula, para serem manuseadas pelos estudantes.
   Em seguida, o professor pode discutir o funcionamento do GPS utilizando um *smartphone*.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** O estudante deve ser levado a refletir sobre a presença da Matemática nas simetrias, nos ângulos retos e nas bissetrizes de ângulos utilizados na construção da rosa dos ventos, interpretar e entender as intersecções das esferas comentadas no texto "Os fundamentos do GPS" (p. 41), edificar hipóteses a respeito de mapeamentos e das medições de áreas de grandes regiões feitos pelo GPS etc.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar coordenadas planas e espaciais, gráficos, estatística etc.), Geografia (para comentar a respeito dos pontos cardeais, colaterais, subcolaterais, paralelos e meridianos terrestres etc.) e Física (para comentar os polos magnéticos da Terra).

Localização de pontos em um plano e no espaço (p. 29)

Inicie a exposição comentando algumas dificuldades que encontramos para nos localizar. Explore, se achar conveniente, os exemplos dados no texto.

Argumente sobre os aspectos da necessidade de orientação e localização por meio de informações colhidas com outras pessoas, pontos de referência, instrumentos etc.

Sugerimos que o professor desenvolva os comentários sobre a localização de pontos em um plano e a localização de pontos no espaço durante as aulas sobre o sistema cartesiano ortogonal de coordenadas ou, se desejar desenvolvê-lo em outro momento, faça uma breve revisão sobre o assunto.

Mostre aos estudantes como localizar pontos no espaço usando um sistema cartesiano ortogonal tridimensional.

Localização de pontos sobre a superfície da Terra (p. 30)

Solicitando a participação da turma, revise a rosa dos ventos, estudada no Ensino Fundamental, perguntando quais são os pontos cardeais, colaterais e subcolaterais. Durante a discussão, vá desenhando na lousa a rosa dos ventos.

Pergunte aos estudantes em quais dos pontos cardeais ocorrem o nascente e o poente do Sol. Explique que o Sol nasce a Leste e se põe a Oeste e enfatize que esse sentido, de Leste para Oeste, é uma aproximação, pois, na verdade, o Sol muda sua trajetória aparente durante o ano.

Há uma forma simples de orientação que costuma atrair bastante a atenção dos estudantes, utilizando apenas um relógio analógico em um dia de sol.

Em primeiro lugar, deve-se colocar o relógio analógico, que esteja marcando a hora certa, na palma da mão ou sobre uma superfície plana e horizontal, com o mostrador voltado para cima.

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Orientação no hemisfério Sul

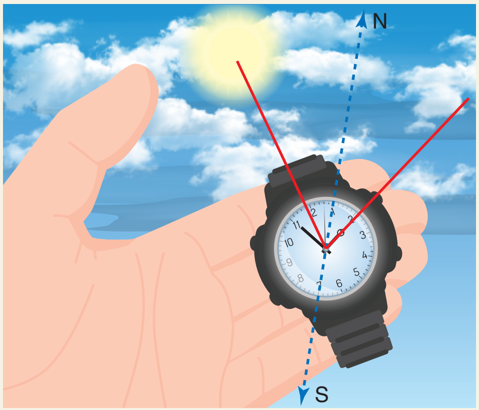
Quando o Sol **não** estiver a pino (zênite), ou seja, quando não estiver exatamente acima de nossas cabeças, posiciona-se o número 12 do marcador na direção do Sol (se for horário de verão, deve-se posicionar o número 1 do marcador na direção do Sol).

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

MODERNA

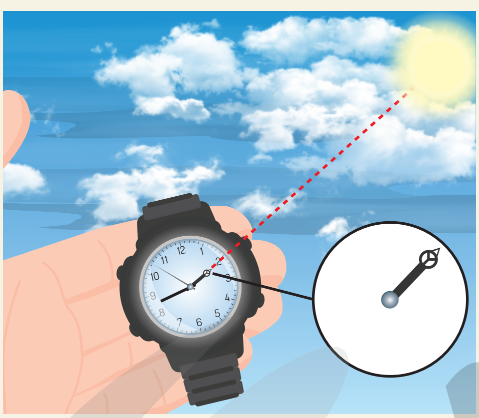
Em seguida, traça-se a bissetriz do ângulo formado entre o número 12 do relógio e o ponteiro das horas, obtendo a direção Norte/Sul. Sobre essa bissetriz, o sentido do menor arco entre o número 12 e a hora marcada indicará o Norte, e o sentido oposto indicará o Sul.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

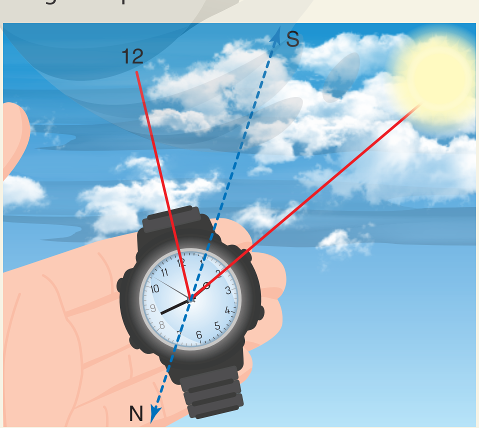
Orientação no hemisfério Norte

O procedimento é bastante parecido. Em vez de posicionar o número 12 do mostrador na direção do Sol, posiciona-se o ponteiro das horas na direção do Sol.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Em seguida, traça-se a bissetriz do ângulo formado entre o número 12 do relógio e o ponteiro das horas, obtendo a direção Norte/Sul. Sobre essa bissetriz, o sentido do menor arco entre o número 12 e a hora marcada indicará o Sul, e o sentido oposto indicará o Norte. Se for horário de verão, traça-se a bissetriz do ângulo formado entre o número 1 do relógio e o ponteiro das horas.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Orientação pelas estrelas

Comente também a orientação pelas estrelas, explicando que esse método requer um bom conhecimento da imaginária esfera celeste e suas constelações. Além disso, o céu avistado no hemisfério Sul é diferente do céu avistado no hemisfério Norte. O principal ponto de referência no hemisfério Sul é a constelação do Cruzeiro do Sul; já no hemisfério Norte é a Estrela Polar, que se encontra na cauda da constelação da Ursa Menor.

No hemisfério Sul, as constelações recebem o nome de constelações austrais, enquanto no hemisfério Norte são chamadas constelações boreais.

BRIAN DONOVAN/ALAMY/FOTOARENA

Imagem de parte do céu no hemisfério Sul destacando a constelação do Cruzeiro do Sul. Auckland, Nova Zelândia. Foto de 2014.

MAXAL TAMOR/ALAMY/FOTOARENA

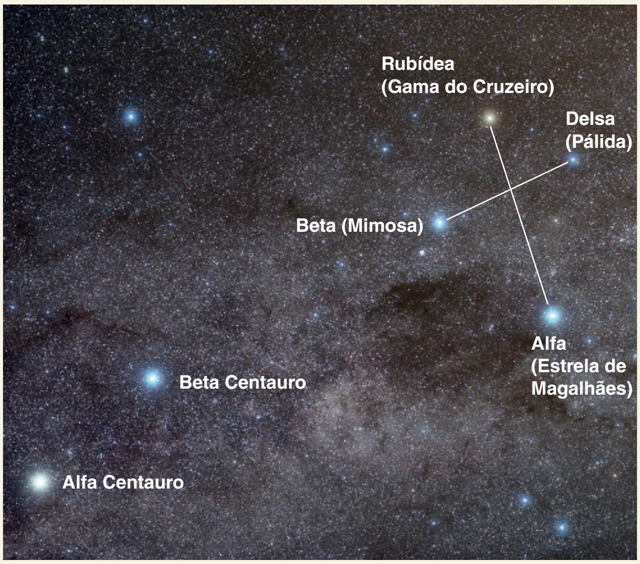
Imagem de parte do céu no hemisfério Norte destacando as constelações da Ursa Maior e da Ursa Menor. Kiev, Ucrânia. Foto de 2017.

Discuta com a turma como orientar-se pelas estrelas em uma noite sem nuvens.

Orientação no hemisfério Sul

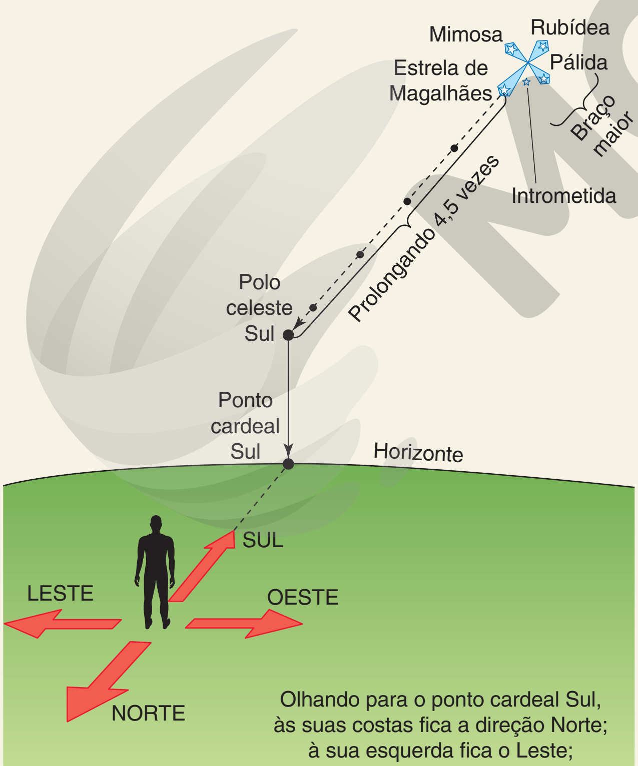
Em primeiro lugar, é necessário localizar a constelação do Cruzeiro do Sul. Próximo a ela existem duas estrelas muito brilhantes, a Alfa Centauro e a Beta Centauro, ditas as guardiãs da cruz, que "apontam" para o Cruzeiro do Sul.

Y. BELETSKY/ESO



Constelação Cruzeiro do Sul e estrelas Alfa Centauro e a Beta Centauro, fotografadas no céu do Brasil. Foto de 2009.

Ao localizar o Cruzeiro do Sul, deve-se imaginar o prolongamento do braço maior da cruz que tenha quatro vezes e meia o tamanho dele. O observador poderá esticar o braço e usar seus dedos para fazer essa medição. A partir daí, deve-se traçar uma perpendicular à Terra. Nesse ponto, estará o Sul e, consequentemente, às costas do observador estará o Norte; à esquerda, o Leste; e à direita, o Oeste.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

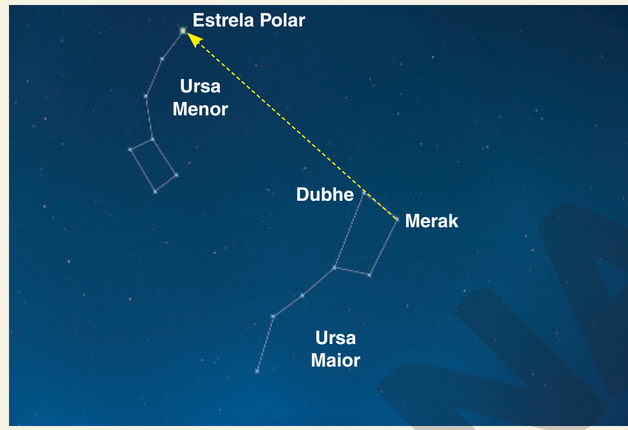
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Orientação no hemisfério Norte

Em primeiro lugar, é necessário localizar a constelação da Ursa Maior e suas "guardas", a estrela Merak e a estrela Dubhe.

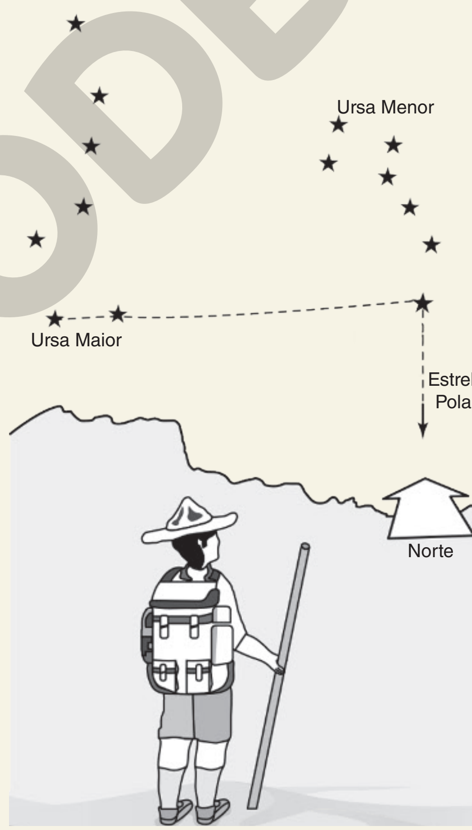
Em seguida, imagina-se o prolongamento de uma linha no sentido de Merak para Dubhe até encontrar a estrela Polar na cauda da constelação da Ursa Menor.

JOANNE EASTOPE/ALAMY/FOTOARENA



Constelações Ursa Maior e Ursa Menor, além das estrelas Merak, Dubhe e Polar. Inari, Finlândia. Foto de 2019.

A partir daí, deve-se traçar uma perpendicular à Terra. Nesse ponto estará o Norte; consequentemente, às costas do observador estará o Sul; à esquerda, o Oeste; e à direita, o Leste.

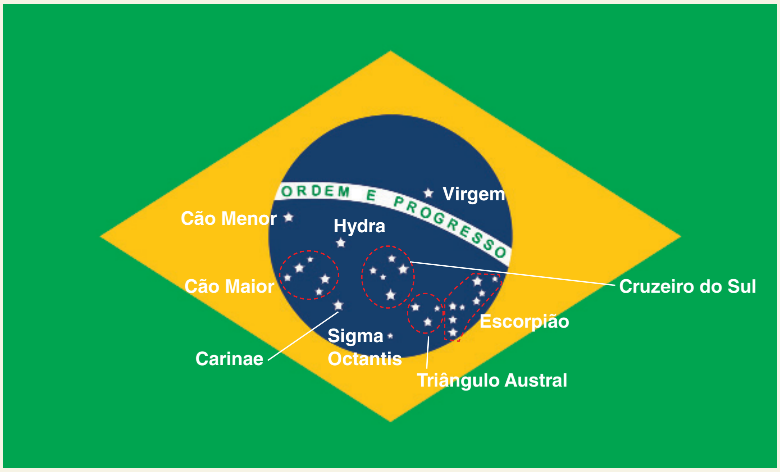


(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Comente com os estudantes que as estrelas da bandeira do Brasil representam algumas constelações avistadas em parte do céu no Rio de Janeiro às 8 horas e 30 minutos do dia 15 de novembro de 1889, dia da Proclamação da República.

MODERNA

WIRESTOCK IMAGES/SHUTTERSTOCK



Fonte dos dados: As estrelas da bandeira brasileira. UFMG – Observatório Astronômico Frei Rosário. Disponível em: <http://www.observatorio.ufmg.br/pas12.htm>. Acesso em: 7 ago. 2020.

Atividade (p. 31)

1 Professor, uma bússola é um instrumento de orientação no qual uma agulha imantada gira livremente sobre um eixo e é atraída por um campo magnético. São necessárias algumas precauções na elaboração desse experimento:

- A agulha precisa estar adequadamente imantada. Passe o imã na agulha na direção do comprimento e sempre no mesmo sentido. Se a agulha for pré-aquecida, obtêm-se melhores resultados.
- Não realize o experimento próximo a outros materiais magnetizados, tais como objetos de metal imantados, alto-falantes, fios elétricos energizados etc.

Orientando-se pelo GPS (*Global Positioning System*) (p. 31)

Ao discutir a orientação pelo GPS, o professor pode lançar mão de algum aplicativo de navegação disponível nos *smatphones* ou acessar algum *site* de rastreamento de aviões, navios etc. Esses rastreamentos despertam a curiosidade dos estudantes, pois é possível, por exemplo, digitar o número de um voo e rastrear a aeronave durante toda a sua viagem, em tempo real.

Sugestão

O *site* Flightradar24 possibilita rastrear voos comerciais em tempo real. Disponível em: <https://www.flightradar24.com/-23.43,-46.49/14>. Acesso em: 7 ago. 2020.

Rastreio de navios e busca pelo nome da embarcação são duas das funcionalidades do *site* MarineTraffic. Disponível em: <https://www.marinetraffic.com/pt/ais/home/centerx:-12.0/centery:25.0/zoom:4>. Acesso em: 7 ago. 2020.

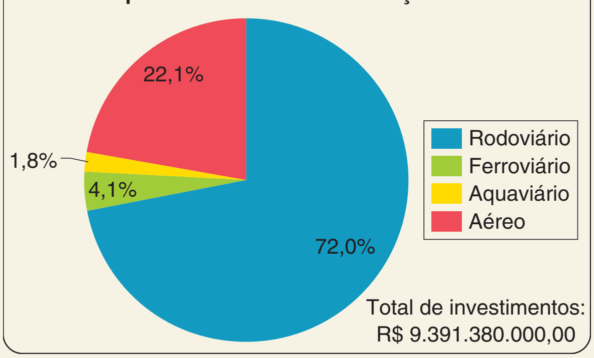
Explorando conexões (p. 32)

A abordagem do texto "Tecnologias, culturas e localização" possibilitará discutir com os estudantes aspectos, como transformações tecnológicas e culturais, mudanças nas formas de orientação em função do tempo e multiculturalismo tecnológico. Se possível, problematize a questão do avanço da Ciência e da tecnologia em determinada localidade ou avalie a velocidade das transformações em diferentes culturas.

Atividade (p. 33)

2 Os investimentos em transportes rodoviário, ferroviário, aquaviário e aéreo correspondem, respectivamente, a 72,0%, 4,1%, 1,8% e 22,1%, aproximadamente. Esses percentuais correspondem, respectivamente, a setores com ângulos centrais de 259,20°; 14,76°; 6,48°; e 79,56°. Assim, construímos o gráfico ao lado.

Investimentos Diretos da União Autorizados – Transporte – Acumulado até março de 2020



Fonte dos dados: Confederação Nacional do Transporte. Disponível em: <https://www.cnt.org.br/boletins>. Acesso em: 7 ago. 2020.

MODERNA

Coordenadas geográficas (p. 34)

Ao apresentar as coordenadas geográficas, discorra sobre os paralelos e meridianos terrestres. Destaque a importância da linha do equador e do meridiano de Greenwich, que são os marcos iniciais nas medições das latitudes e longitudes, respectivamente. Cite a Ciudad Mitad del Mundo (Cidade da Metade do Mundo, em português), no Equador.

À época das grandes navegações, os comandantes dos navios calculavam a latitude por meio de um instrumento naval chamado **astrolábio náutico**, citado em cartas do século XVI:

> [...] descemos em terra, eu e o piloto do capitão-mor e o piloto de Sancho de Tovar; tomamos a altura do sol ao meio-dia e achamos 56 graus, e a sombra era setentrional, pelo que, segundo as regras do astrolábio, julgamos estar afastados da equinocial por 17°, e ter, por conseguinte, a altura do polo antártico em 17° [...]

Fonte: "[Astronomia através da janela] – 520 anos de Brasil: O astrônomo de Cabral". *Observatório do Valongo*. Disponível em: <https://ov.ufrj.br/astronomia-atraves-da-janela-520-anos-de-brasil-o-astronomo-de-cabral/?utm_source5rss&utm_medium5rss&utm_campaign5astronomia-atraves-da-janela-520-anos-de-brasil-o-astronomo-de-cabral>. Acesso em: 10 ago. 2020.

Nesse trecho de uma carta ao rei, o mestre João Faras, médico e astrônomo da expedição de Pedro Álvares Cabral, narra seu desembarque em Porto Seguro, na Bahia. Nota-se a citação do astrolábio, que era usado para medir a altura dos astros em relação à linha do horizonte, com o que se determinava a latitude de um ponto sobre a superfície da Terra. Com base nessa latitude e no raio da Terra, calculavam-se comprimentos de arcos sobre a esfera terrestre, por meio da Trigonometria. Vale destacar que, na época das grandes navegações, ainda não havia um método preciso para o cálculo da longitude.

O astrolábio se desenvolveu ao longo dos séculos, fundamentado em trabalhos de Hiparco de Niceia (190 a.C.-120 a.C.), Cláudio Ptolomeu (90-168), Teão de Alexandria (335-395) e sua filha Hipátia de Alexandria (350-415), Synesius de Cirene (373-414) e Abraão Zacuto (1450-1522).

Professor, a utilização de um modelo do globo terrestre com certeza facilitará o seu trabalho e a visualização do estudante.

Atividade (p. 36)

3 O ponto *A* está 60° ao Norte do equador e 100° a Oeste do meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *A* são: 60° N e 100° O.

O ponto *B* está sobre a linha do equador e 60° a Oeste do meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *B* são: 0° e 60° O.

O ponto *C* está 20° ao Norte do equador sobre o meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *C* são: 20° N e 0°.

O ponto *D* está 40° ao Norte do equador e 100° a Leste do meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *D* são: 40° N e 100° L.

O ponto *E* está 20° ao Sul do equador e 140° a Leste do meridiano de Greenwich. Logo, as coordenadas do ponto *E* são: 20° S e 140° L.

Altitude de um ponto da Terra (p. 36)

Antes de falar da altitude de um ponto da Terra, pergunte à turma qual é a diferença entre altura e altitude. Esclareça que a altura de um ponto representa a medida de uma distância vertical em relação ao solo (superfície terrestre), enquanto a altitude de um ponto representa a medida de uma distância vertical em relação ao nível médio das águas do mar. Acima do nível médio do mar, a altitude é positiva e abaixo, negativa. Desenhe um sistema cartesiano ortogonal tridimensional e explique como se calcula a altura de um ponto em relação a um plano horizontal.

Comente com os estudantes que a cidade de Campos do Jordão (SP), na serra da Mantiqueira, está a uma altitude média de 1.628 metros, sendo o município brasileiro de maior altitude. Cite também alguns locais que têm altitude negativa, como o vale do rio Jordão, os Países Baixos, parte da cidade de New Orleans (Estados Unidos), a Laguna del Carbón (Argentina) etc.

Os fusos horários (p. 37)

Pergunte aos estudantes: Como é determinado o horário em um ponto da superfície da Terra?

Ao explicar os fusos horários, é conveniente enfatizar que as convenções para determiná-los sofreram ajustes por questões políticas e de fronteiras, que exigiram que as linhas imaginárias que determinam os fusos deixassem de ser semicircunferências. Na sequência, apresente o mapa dos fusos horários, comente como são feitos os cálculos dos horários em relação a Greenwich e dê alguns exemplos.

Explorando conexões (p. 39)

A leitura do texto "O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica" permitirá ao professor e aos estudantes discutir criticamente sobre a subjetividade da noção de tempo e como a hiperconexão no século XXI faz tudo parecer urgente. Será possível verificar com os estudantes como as redes de comunicação tornam obsoletos assuntos comentados há poucos dias, além de constatar a noção de que sempre há algo que deveria ter sido feito.

Atividades (p. 40)

4 Resposta pessoal. Professor, provavelmente o tempo encontrado pelos estudantes em conversas remotas pelas redes sociais será maior que o tempo dos diálogos presenciais. Certamente vai haver variações decorrentes de cada cultura ou região do país, mas é possível conduzir o diálogo e as apresentações dos estudantes, questionando os motivos pelos quais as conexões humanas estão se virtualizando. Identifique também se, na visão dos estudantes, há ganhos ou perdas com essa transformação. O uso de discursos multimodais apresenta-se muito alinhado às mudanças nas formas de comunicação neste século.

5 Resposta pessoal. Algumas possibilidades de respostas: haverá hologramas e diálogos com projeções 3D; a internet das coisas e a internet das roupas e acessórios manterá todo o mundo conectado; os aplicativos de tradução simultânea substituirão definitivamente cursos de idiomas; a barreira da língua, do tempo e do espaço serão suplantadas pela inteligência artificial e tecnologia 5G.

MODERNA

6 Atualmente existem ferramentas que possibilitam que nos comuniquemos em tempo real e simultaneamente com pessoas de diferentes lugares do mundo e, ainda, que possamos compartilhar nossa localização. Serviços de orientação por comando de voz também servem para exemplificar o impacto das TICs em nossa forma de orientação e localização.

7 a) O número de pessoas que receberiam o texto nas 10 primeiras horas é dado por:
$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} =$
$= 2.046.$

b) O número de pessoas que receberiam o texto nas 30 primeiras horas é dado por:
$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{30}.$
Esse resultado pode ser calculado pela fórmula da soma dos n primeiros termos de um PG, ou seja, $Sn = \dfrac{a^1\,(1 - q^n)}{1}$. Assim, temos:

$$S_{3D} = \frac{2(1 - 2^{30})}{1 - 2} = 2.147.483.646$$

c) O número de pessoas que teriam recebido o texto nas 30 primeiras horas seria de, aproximadamente, 10 vezes a população do Brasil.

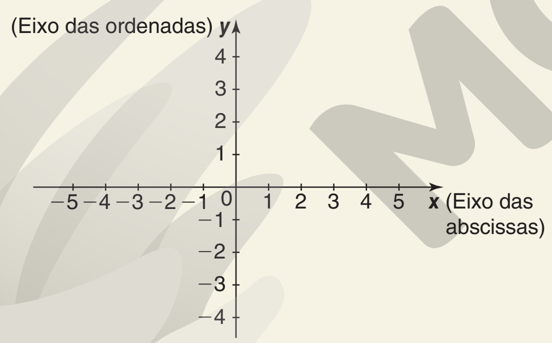
Os fundamentos do GPS (p. 41)

Pergunte à classe: Quem sabe como um receptor de GPS determina a posição em que está?

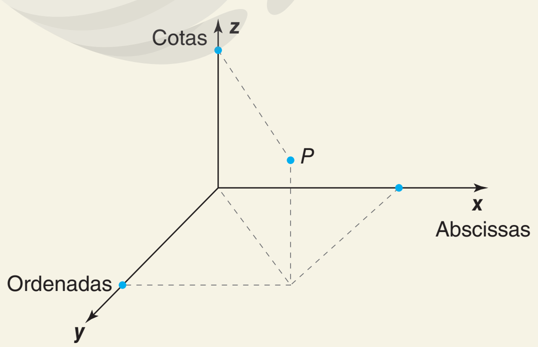
Discuta o processo pelo qual o receptor de sinal do satélite (ou de um *smartphone*) tem sua localização identificada. Discuta o sistema de trilateração mostrando a intersecção das esferas imaginárias, como aparece no texto, e comente que, para maior precisão, podem ser utilizados mais que três satélites.

Atividades (p. 42)

8 Duas coordenadas: abscissa e ordenada.



9 Três coordenadas: abscissa, ordenada e cota.



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

10 Duas coordenadas: latitude e longitude.

11 Adotada uma unidade u de comprimento (por exemplo, o metro), a altitude de um ponto é sua coordenada, na unidade u, em um eixo real vertical, orientado para cima, cuja origem O é um ponto do nível médio do mar. Assim, pontos acima do nível médio do mar têm altitude positiva, e pontos abaixo do nível do mar têm altitude negativa. Pontos do nível médio do mar têm altitude zero.

12 Alternativa **e**.

Observamos que os pontos A e B são extremos de um arco de 100° sobre um meridiano. O ângulo determinado pelas localidades A e B é igual a $20° + 80° = 100°$.

O perímetro p da circunferência que contém o meridiano que passa por A e B é dado por: $p = (2 \cdot \pi \cdot 6.370)$ km.

Adotando $\pi = 3$, chegamos a $p = 38.220$ km.

Assim, temos a regra de três:

Arco (grau)	Comprimento (quilômetro)
360	38.220
100	x

$$\therefore x \simeq 10.616{,}7 \text{ km}$$

Concluímos, então, que a distância entre as localidades A e B é de, aproximadamente, 10.617 quilômetros.

13 a) A localidade B está 10 fusos horários a leste de A, logo, em B são 18 h.

b) A localidade D está 7 fusos horários a oeste de C, logo, em D são 13 h.

c) A localidade F está 8 fusos horários a leste de E, logo, em F são 3 h do dia 13.

Explorando conexões (p. 43)

Professor, o texto “GPS como rede social: deslocamento conectado” permitirá explorar a necessidade da juventude contemporânea de manter-se sempre conectada e sempre dialogando. As novas ferramentas que visam melhorar a qualidade de vida da população já são desenvolvidas prevendo formas de interação e conexão. Com os aplicativos de deslocamento acontece o mesmo. Há aplicativos de ginástica, de bicicleta, de alimentação, além de muitos outros que estimulam a interação entre os usuários. Incentive os estudantes a realizar a pesquisa sugerida.

Atividade (p. 44)

14 É cada vez mais comum o uso de aplicativos de deslocamento urbano que permitem o compartilhamento de informações pessoais, de forma que as pessoas disponibilizem suas informações e acompanhem o deslocamento das demais.

MODERNA

Texto complementar (p. 45)

Nesta seção, é apresentado um texto para leitura complementar que trata dos instrumentos que orientam o piloto de um avião durante o voo, além de atividades de verificação. Antes da leitura, verifique os conhecimentos prévios dos estudantes, perguntando se conhecem o funcionamento de algum instrumento de navegação em aviões.

Entendimento do texto (p. 46)

1. O radar meteorológico é um dos principais equipamentos de navegação de um avião. Fixado no *radome* ou nariz da aeronave, o dispositivo tem uma antena plana que varre, de forma eletrônica, centenas de quilômetros à frente. Ele tem como missão buscar mudanças climáticas que possam afetar o voo, como tempestades, turbulências ou as chamadas "tesouras de vento", alterações rápidas de velocidade do ar, que tornam a viagem mais complexa no que diz respeito à segurança.
2. Se o *transponder* for desligado durante o voo, o avião simplesmente desaparece do controle aéreo e fica invisível também aos demais aviões.
3. O *Traffic Collision Avoidance* (TCAS) é uma evolução do *transponder*. Trata-se de um sistema anticolisão de tráfego que utiliza o *transponder* para que as aeronaves em voo "conversem" entre si com a troca de dados digitais em duas frequências de rádio (1030 MHz para enviar e 1090 MHz para receber). De posse dessas trocas de informações, o TCAS utiliza um potente processador para formar um mapa tridimensional das proximidades da aeronave, facilitando a localização de cada uma delas e fazendo as correções necessárias para que se evite a colisão com outro avião. Se um *transponder* estiver desligado, o avião em questão torna-se um potencial perigo para esse mapa 3D, pois o TCAS não terá dados dele nem dos demais aviões durante a "conversa".
4. O sistema de pouso por instrumento (*Instrument Landing System*, em inglês) é uma importante ferramenta para aproximação segura da pista, especialmente com visibilidade baixa ou nula. Ele se baseia nas informações obtidas por meio de rádio em frequência VHF para localização e UHF para rampa de planeio ou descida. O primeiro (VHF) possibilita que a aeronave se alinhe perfeitamente no eixo da pista, enquanto o segundo (UHF) indica a rampa de descida correta. As informações para o ILS são enviadas por um rádio transmissor (LOC, de *Localizer*) a 300 m da cabeceira da pista. Já o *Glide Path* (GP) é a outra antena de rádio para o ILS, localizada no máximo a 380 m da pista e que emite sinal automático em UHF para que o ângulo de descida da aeronave seja correto para aquele aeroporto.
5. O IFR é um conjunto de normas para pilotos que se orientam pela instrumentação de bordo. Elas determinam a separação entre aeronaves em voo, feitas pelo controle de tráfego aéreo por comunicação via rádio ou por meio de *transponder* e TCAS. Tempo, distância e altitudes são os principais parâmetros para que haja uma separação entre os aviões em diferentes rotas.
6. Os procedimentos para orientação em voo são de responsabilidade do piloto, que deve determinar visualmente direção, altitude e terreno, assim como observar outros aviões, nuvens, tempestades, entre outros obstáculos e referências sem a ajuda de instrumentos de precisão. Nesse caso o VFR tem como limite 14.500 pés de altitude (4.420 m). Acima disso, somente voos por IFR são permitidos. Cabe lembrar que, no VFR, o piloto se orienta também por comunicação com o controlador de voo, que determina o procedimento correto para a aproximação na pista ou mesmo após a decolagem.
7. Pontos fixos *fly by* não precisam ser alcançados durante o voo, mas os pontos *fly over* necessitam que o avião passe pelo marcador de forma obrigatória. No passado, os pilotos precisavam plotar manualmente a rota no piloto automático utilizando esses *waypoints*.
8. Esse sistema tem alguns modos de alerta, sendo eles: taxa de descida excessiva; taxa de excessiva proximidade com o solo; perda de altitude após decolagem; desvio excessivo para abaixo do ILS; proteção de ângulo de viragem excessivo; proteção contra tesoura de vento. Entretanto, o GPWS foi substituído em aeronaves comerciais (mas ainda usado na aviação geral) pelo EGPWS/TAWS. Este é o mesmo sistema, só que melhorado com GPS, permitindo que o piloto veja a topografia local e antecipe ações, assim como alerta sobre obstáculos na aproximação em mau tempo, como uma montanha, por exemplo.

Sugestão

Noções básicas de sistema de posicionamento global GPS, de Edison Alves de Carvalho e Paulo César de Araújo. *Programa Universidade a Distância – Unidis Grad*. Disponível em: <http://www.ead.uepb.edu.br/arquivos/cursos/Geografia_PAR_UAB/Fasciculos%20-%20Material/Leituras_Cartograficas_II/Le_Ca_II_A08_MZ_GR_260809.pdf>. Acesso em: 7 ago. 2020.

Como funciona o GPS e o sistema de trilateração. *Escola Interativa – Recursos Digitais*. Disponível em: <https://www.escolainterativa.diaadia.pr.gov.br/odas/como-funciona-o-gps>. Acesso em: 7 ago. 2020.

© MODERNA

CAPÍTULO 3 Modelagem matemática

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS101 EM13CHS102 EM13CHS103 EM13CHS106 EM13CHS201 EM13CHS202 EM13CHS204 EM13CHS301 EM13CHS302 EM13CHS304 EM13CHS306 EM13CHS502 EM13CHS503 EM13CHS504 EM13CHS604 EM13CHS605 EM13CHS606	EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT203 EM13MAT302 EM13MAT304 EM13MAT308 EM13MAT313 EM13MAT315 EM13MAT316 EM13MAT503 EM13MAT504 EM13MAT508	Construção e uso de amostragens Construção e uso de questionários Grupo focal Análise de mídias sociais Pesquisa-ação

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- a modelagem matemática como uma das formas de compreender, interpretar e resolver inúmeros problemas em situações reais, por meio de representações matemáticas, raciocínio lógico, imaginação e criatividade.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Estruturar modelos matemáticos por meio das quatro etapas de desenvolvimento discutidas no capítulo (1. Identificação e compreensão do problema; 2. Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas; 3. Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática; 4. Apresentação e validação dos resultados).
- Perceber o emprego de conteúdos matemáticos não apenas em relação à Matemática ou às Ciências da Natureza e suas Tecnologias, mas em diversas áreas do conhecimento humano.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Modelagem matemática*.

1. **Relevância:** O ensino da modelagem matemática na educação básica incentiva e auxilia o aperfeiçoamento da capacidade de criação, a originalidade, a estratégia eficaz de abordagem de assuntos que, aparentemente, podem não pertencer à Matemática, pois, por meio desse aprendizado, o estudante desenvolve habilidades, atitudes e conhecimentos necessários para representar circunstâncias reais por meio de modelos que, muitas vezes, são capazes de prever resultados. Além disso, um modelo matemático consistente criar possibilidades de interpretação e critérios que podem orientar decisões em contextos do dia a dia.
2. **Atualidade:** A modelagem matemática, aplicada como estratégia de pesquisa e verificação, é muito utilizada hoje em diferentes campos da cognição humana, como Medicina, Engenharia, Física, Química, estudos de oferta e demanda de produtos, evolução populacional, produção de alimentos, otimização de investimentos etc.
3. **Interesse:** Alguns motivos que despertam interesse são:
   a) Participação: o estudo da modelagem matemática incita o estudante ao questionamento e à pesquisa, despertando a curiosidade e a participação no processo de aprendizagem de forma ativa, individualmente ou em grupo.
   b) Interdisciplinaridade: a interação da Matemática com a Física, a Química, a Biologia, a Educação Física, as Ciências Sociais, entre outras, possibilita uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento da criatividade e do senso crítico do estudante.
   c) Inclusão: por meio da modelagem matemática o jovem tem a possibilidade de participar de discussões de forma articulada e consistente frente a notícias divulgadas pela mídia e de propor soluções a problemas de seu cotidiano.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** O estudante tem contato diário com modelos matemáticos por meio de noticiários, em questões econômicas no comércio e na indústria; na previsão do tempo; no cálculo da intensidade de um terremoto; na dosagem correta para a aplicação de um medicamento, ou seja, em pesquisas quantificáveis de inúmeros eventos.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar áreas, volumes, funções etc.), Biologia (para comentar como é desenvolvido o estudo de populações de bactérias, as consequências do efeito estufa etc.), Geografia (para comentar a respeito de crescimento demográfico, lei de Malthus, índice de vulnerabilidade social etc.) e Química (para comentar o efeito estufa).

MODERNA

Texto de abertura (p. 47)

Para iniciar a exposição do tema, o professor pode fazer a pergunta proposta no texto de abertura: Matemática para quê? Dê um tempo para que os estudantes façam suas considerações, formulando respostas e perguntas. Após ouvir algumas argumentações, faça, se necessário, algumas complementações a respeito do que for dito e apresente a modelagem matemática como forma de traduzir determinada situação-problema para a linguagem algébrica ou geométrica. Ilustre essa concepção por meio das três situações propostas.

Situação 1: área máxima (p. 48)

Descreva como é difícil e demorado para Fernando encontrar as medidas ideais do canil por meio da construção de uma tabela. Explique que ele está utilizando um método chamado de tentativa e erro e fale sobre a incerteza desse método.

Com a ajuda da modelagem matemática realizada por Fernando, a resolução do problema tornou-se bem mais simples, clara e encontrou-se exatamente o valor procurado. Se possível, faça uma breve revisão a respeito de gráficos das funções polinomiais do 2º grau, comentando que o vértice da parábola é ponto máximo, se a concavidade da parábola for voltada "para baixo", ou ponto mínimo, se a concavidade da parábola for voltada "para cima".

Comente cada uma das etapas envolvidas no processo da modelagem matemática:

1. Identificação e compreensão do problema.
2. Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas.
3. Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática.
4. Apresentação e validação dos resultados.

Situação 2: cálculo de uma população (p. 50)

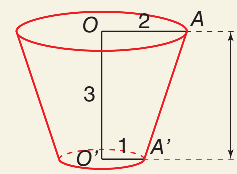
O professor de Geografia pode participar desta aula discutindo conceitos relativos à demografia humana. Comente o suposto estudo quantitativo da população humana P de uma cidade apresentado no texto da situação 2 e a conclusão a que se chegou: $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$.

Feito isso, mostre a aplicação da conclusão no exemplo dado e comente que, em determinadas situações, o estudo demográfico anual pode ser modelado por meio do mesmo raciocínio usado no cálculo do montante M, acumulado pela aplicação de um capital C, durante t anos à taxa anual constante i de juros compostos. Refaça, junto com a turma, o exemplo do outro modelo demográfico matemático possível.

Compare os dois modelos, enfatizando a insignificância da diferença entre os valores encontrados. Para criar um clima positivo, reforce a frase de George E. P. Box mencionada no boxe *Observação*: "Todos os modelos estão errados, mas alguns são úteis."

Situação 3: usando figuras como modelos (p. 52)

JULIO COSTA/FUTURA PRESS



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Use o exemplo apresentado na situação 3 para comentar com os estudantes a importância e eficiência dos desenhos na modelagem para resolução de problemas que envolvam visão espacial.

Atividades (p. 53)

1 **a)** Podemos aplicar o mesmo raciocínio usado no cálculo do montante M, acumulado pela aplicação de um capital C, durante o tempo t à taxa constante i de juros compostos, por unidade de tempo: $M = C(1 + i)^t$. Convertendo esse modelo para esse estudo populacional, temos:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + i)^t$$

em que P_0 é a população inicial de bactérias, i é a taxa de crescimento da população em cada hora, e t é o tempo, em hora. Assim, chegamos à equação:

$$P(t) = 2.000 \cdot (1 + 0{,}5)^t$$

que é equivalente a:

$$P(t) = 2.000 \cdot (1{,}5)^t$$

b) Fazendo $t = 5$ na função P obtida no item **a**, obtemos:

$$P(5) = 2.000 \cdot (1{,}5)^5 \Rightarrow P(5) \simeq 15.188$$

Concluímos, então, que, após 5 horas do início do estudo, a população de bactérias era de 15.188 indivíduos, aproximadamente.

c) Fazendo $t = 10$ na função P obtida no item **a**, obtemos:

$$P(10) = 2.000 \cdot (1{,}5)^{10} \Rightarrow P(5) \simeq 115.330$$

Concluímos, então, que, ao final do estudo, a população de bactérias era de 115.330 indivíduos, aproximadamente.

d) Fazendo $P(t) = 4.000$ na função P do item **a**, obtemos:

$$4.000 = 2.000 \cdot (1{,}5)^t \Rightarrow 2 = (1{,}5)^t$$

$$\therefore t = \log_{1,5} 2 \Rightarrow t \approx 1{,}7$$

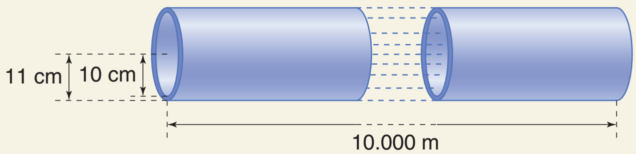
Concluímos, então, que a população de bactérias dobrou em 1,7 h (1 h 42 min) após o início do estudo.

2

1. **Identificação e compreensão do problema:** a massa de PVC necessária para a produção nos 10 dias equivale à massa de um cano cilíndrico com 10.000 m de comprimento, 10 cm de raio interno e 11 cm de raio externo.
2. **Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas:** deve-se calcular o volume V limitado por duas superfícies cilíndricas de mesmo eixo de rotação, geratrizes de 10.000 m de comprimento e raios 10 cm e 11 cm.

MODERNA

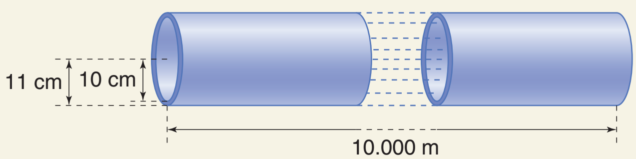
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO



Conhecendo o volume V e a densidade do PVC, obtém-se a massa do material que compõe o cano. É necessário saber:

- calcular o volume de um cilindro circular reto;
- relacionar o volume com a massa, a partir da densidade do material que compõe esse volume.

3. **Estruturar e interpretar o problema por meio da Matemática:** o volume V do material usado na confecção do cano é a diferença entre os volumes dos cilindros com 10.000 m de geratriz e raios de 11 cm e 10 cm, nessa ordem.



A razão entre a massa m do material que compõe o cano e o volume V, nessa ordem, é a densidade do material.

4. **Apresentação e validação dos resultados:** como 10.000 m equivalem a 1.000.000 cm, o volume V, em centímetro cúbico, citado no item anterior, é dado por:

$V = \pi \cdot 11^2 \cdot 1.000.000 - \pi \cdot 10^2 \cdot 1.000.000 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 1.000.000 \cdot \pi \cdot (11^2 - 10^2)$
$\therefore V = 1.000.000 \cdot \pi \cdot 21 \Rightarrow V = 21.000.000 \cdot \pi$

Adotando 3,14 como valor de π, obtém-se:
$V = 65.940.000$
Sendo m a massa, em grama, de PVC que compõe o volume V, temos:

$$\frac{m}{65.940.000} = 1{,}4 \Rightarrow m = 92.316.000$$

Convertendo essa massa para tonelada, obtém-se 92,316 t. Concluímos, assim, que a quantidade de PVC que deve ser encomendada é de 92,316 t.

3 **a)** Como a taxa média anual de variação da temperatura é constante, 0,058 °C, a temperatura média M do planeta, em grau Celsius, para cada valor de t no intervalo de 0 a 100 é dada por:

$$M(t) = 16 + 0{,}058\, t$$

b) O ano de 2045 corresponde a t = 45, na função obtida no item **a**. Calculando $M(45)$, temos:

$$M(45) = 16 + 0{,}058 \cdot 45 \Rightarrow M(45) = 18{,}61$$

Logo, a temperatura média do planeta em 2045 será de 18,61 °C.

c) Na função obtida no item **a**, consideramos $M(t) = 18{,}9$, obtendo:

$$18{,}9 = 16 + 0{,}058\, t \Rightarrow t = 50$$

Como t = 50 corresponde ao ano 2050, concluímos que a temperatura média do planeta atingirá 18,9 °C em 2050.

4

1. **Identificação e compreensão do problema:** ao aumentar o preço, as vendas diminuem. Até que ponto esse acontecimento interfere na receita da empresa? Será que quanto maior a quantidade vendida maior será a receita? Os estudantes devem buscar as respostas para essas perguntas, verificando com qual preço unitário se obtém receita máxima.

2. **Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas:** vamos construir uma tabela na qual serão inseridos os preços do quilograma de filé *mignon* e as quantidades vendidas semanalmente, em que n é o número de aumentos de R$ 1,00.

Preço unitário (R$)	Quantidade vendida semanalmente (kg)
40	500
40 + 1	500 − 10
40 + 2	500 − 2 · 10
40 + 3	500 − 3 · 10
40 + 4	500 − 4 · 10
...	...
40 + n	500 − n · 10

Sabe-se que a receita semanal R apurada com a venda de um artigo é dada pelo produto do preço unitário p pela quantidade vendida q em uma mesma semana.

$$R = p \cdot q$$

3. **Estruturar e interpretar o problema por meio da Matemática:**

$$R = p \cdot q \Rightarrow R(n) = (40 + n)(500 - 10n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R(n) = 20.000 - 400n + 500n - 10n^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R(n) = -10n^2 + 100n + 20.000$$

4. **Apresentação e validação dos resultados:** o gráfico de uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma parábola com a concavidade voltada para cima, se $a > 0$, ou voltada para baixo, se $a < 0$.

Nos dois casos, a abscissa x_V do vértice V da parábola é dada por $x_V = -\dfrac{b}{2a}$, tal que $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ é o valor mínimo de f, se $a > 0$, ou é o valor máximo, se $a < 0$. Assim, em $R(n) = -10n^2 + 100n + 20.000$, temos:

$$n_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow n_v = -\frac{100}{2 \cdot (-10)} = 5$$

Logo, para alcançar a receita máxima, o preço p do quilograma de filé *mignon*, em real, deve ser:

$$p = 40 + 5 \Rightarrow p = 45$$

Concluímos, então, que a maior receita possível com a venda do produto ocorre quando o preço do quilograma é de R$ 45,00.

5

1. **Identificação e compreensão do problema:** certa quantia C de dinheiro foi dividida em três partes iguais e uma parte foi investida no fundo A, que teve um rendimento negativo (−6%) e duas partes foram investidas no fundo B, que teve um lucro de 21%.

MODERNA

2. **Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas:** para equacionar o problema será necessária a fórmula de acréscimos (ou decréscimos) percentuais, ou seja, sendo M o montante, C o capital inicial e i a taxa anual, tem-se:
   - $M = C(1 - i)$ no caso de prejuízo; ou
   - $M = C(1 + i)$ no caso de ganho.
3. **Estruturar e interpretar o problema por meio da Matemática:** sendo C o total aplicado nos dois fundos, temos que:
   - $\frac{C}{3}$ foi aplicado no fundo A e houve uma perda de 6%, ou seja, o montante M_A obtido nesse fundo foi $M_A = \frac{C}{3}(1 - 6\%)$;
   - $\frac{3C}{3}$ foi aplicado no fundo B e houve um ganho de 21%, ou seja, o montante M_B obtido nesse fundo foi $M_B = \frac{2C}{3}(1 + 21\%)$.
4. **Apresentação e validação dos resultados:** ao final de um ano, tem-se:

$$M_A + M_B = \frac{C}{3}(1 - 6\%) + \frac{2C}{3}(1 + 21\%) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_A + M_B = \frac{C}{3} - \frac{C}{3} \cdot 6\% + \frac{2C}{3} + \frac{2C}{3} \cdot 21\% \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_A + M_B = C - 2\%C + 14\%C \Rightarrow M_A + M_B = C + 12\%C$$
$$M_A + M_B = C(1 + 12\%)$$

Concluímos, então, que a taxa anual de rentabilidade foi de 12%.

6 a) Para determinar os valores de a, b e c na função $P(x) = ax^2 + bx + c$, basta substituir x e y pelas coordenadas dos três pontos (0, 80), (20, 65) e (60, 0), obtendo o sistema:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 80 \\ a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 65 \\ a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c = 0 \end{cases}$$

do qual se obtém: $a = -\frac{7}{480}$, $b = -\frac{11}{24}$. Portanto, a função pedida é:

$$P(x) = -\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80$$

b) O número de apartamentos é dado, aproximadamente, por $P(30)$, isto é:

$$P(30) = -\frac{7 \cdot 30^2}{480} - \frac{11 \cdot 30}{24} + 80 =$$
$$= -\frac{6.300}{480} - \frac{6.600}{480} + \frac{38.400}{480} \Rightarrow P(30) \simeq 53$$

Logo, se o construtor optar por construir 30 casas, ele poderá construir também 53 apartamentos, aproximadamente.

c) O número de casas é dado, aproximadamente, pela raiz positiva da equação:

$$20 = -\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80$$

Resolvendo essa equação:

$$20 = -\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9.600}{480} = -\frac{7x^2}{480} - \frac{220x}{480} + \frac{38.400}{480}$$
$$\therefore 7x^2 + 220x - 28.800 = 0$$
$$\triangle = 220^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-28.800) = 854.800$$
$$x = \frac{-220 \pm \sqrt{854.800}}{2 \cdot 7}$$

Como nos interessa apenas a raiz positiva, temos:

$$x = \frac{-220 \pm \sqrt{854.800}}{2 \cdot 7} \Rightarrow x \simeq 50$$

Logo, se o construtor optar por construir 20 apartamentos, ele poderá construir também 50 casas, aproximadamente.

Explorando conexões (p. 55)

Antes da leitura do texto "Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias", se possível, solicite ao professor de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas que argumente com a turma a respeito de conselhos municipais e índice de vulnerabilidade social.

Atividades (p. 56)

7 Para os bairros A, B e C, respectivamente, indicamos por a, b e c as médias aritméticas ponderadas entre as populações das três faixas de índices de vulnerabilidade, com pesos respectivamente iguais a 0,150; 0,4005 e 0,7505. Assim, temos:

$$a = \frac{8.000 \cdot 0{,}150 + 10.000 \cdot 0{,}4005 + 6.000 \cdot 0{,}7505}{0{,}150 + 0{,}4005 + 0{,}7505} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \simeq 7.461{,}95$$
$$b = \frac{7.000 \cdot 0{,}150 + 11.000 \cdot 0{,}4005 + 5.800 \cdot 0{,}7505}{0{,}150 + 0{,}4005 + 0{,}7505} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b \simeq 7.539{,}12$$
$$c = \frac{10.000 \cdot 0{,}150 + 9.000 \cdot 0{,}4005 + 4.000 \cdot 0{,}7505}{0{,}150 + 0{,}4005 + 0{,}7505} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c \simeq 6.230{,}98$$

Concluímos, então, que, pelo modelo proposto, o bairro B deveria ser o escolhido para a construção da praça.

8 Respostas pessoais. Professor, deixe a realização das escolhas sob a responsabilidade dos estudantes, ou seja, permita que decidam de qual prefeitura vão acessar o *site* e que optem pela consulta pública *on-line* ou conselho municipal. Se achar conveniente, supervisione e faça sugestões a respeito do desenvolvimento da atividade.

Explorando conexões (p. 56)

Discuta o texto com a turma e discorra sobre algumas causas e consequências da relação entre fome e pobreza, fome e crises humanitárias, fome e crescimento econômico de um país, entre outros temas que os próprios estudantes podem sugerir.

Explique que não é um problema de fácil solução, mas pode ser amenizado com a Taxa Tobin e a diminuição do desperdício alimentar. Mostre alguns números implícitos no texto, por exemplo: "30% dos 4 bilhões de toneladas de alimentos

MODERNA

produzidos anualmente vão para o lixo", ou seja, 1,2 bilhão de toneladas de alimentos vai para o lixo todo ano. Se dividirmos essa quantidade de alimentos pelas 820 milhões de pessoas que passam fome, obtemos mais de 1 tonelada de alimento por ano para cada pessoa, em outras palavras, cada uma das 820 milhões de pessoas que passam fome teria, aproximadamente, 4 quilogramas de alimentos por dia.

Atividades (p. 58)

9 a) O valor anual a ser distribuído entre os n beneficiários seria $0{,}001t - g$. Logo, o valor anual v destinado a cada beneficiário é calculado por:

$$v = \frac{0{,}001t - g}{n}$$

b) Temos:

$t = 5 \cdot 10^{14}$ dólares

$g = 0{,}1 \cdot 0{,}001 \cdot 5 \cdot 10^{14}$ dólares

$n = 8{,}2 \cdot 10^{8}$ beneficiários

Substituindo esses valores na equação obtida no item **a**, deduzimos que:

$$v = \frac{0{,}001 \cdot 5 \cdot 10^{14} - 0{,}1 \cdot 0{,}001 \cdot 5 \cdot 10^{14}}{8{,}2 \cdot 10^{8}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow v \simeq 548{,}78$

Logo, cada beneficiário receberia anualmente 548,78 dólares, aproximadamente.

10 Respostas pessoais. Professor, aja como orientador das pesquisas. Permita aos estudantes que escolham as perguntas que farão parte do questionário e ofereça também algumas sugestões. No dia da apresentação dos resultados em sala de aula, seria interessante a presença de professores tanto de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas quanto de Matemática.

Texto complementar (p. 59)

A seguir é apresentado um texto para leitura complementar a respeito de dinâmicas populacionais e atividades de entendimento desse texto.

Sugerimos que se promova, com a turma, um debate sobre a ação predatória do ser humano na natureza, tendo como base a frase de encerramento do texto: "Resta saber o quanto a ambição desmedida e a sede de poder do homem, como predador da natureza, podem interferir na taxa *k* de predação".

Entendimento do texto (p. 61)

1. Malthus quis alertar para o fato de que a taxa de crescimento da população tenderia a ser maior que a taxa correspondente de crescimento da produção de alimentos. Com isso, haveria um momento em que não haveria alimento suficiente para toda população.
2. Comparando os termos da P.G. (a_n) com os correspondentes termos da P.A. (b_n), observamos que $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, $a_3 - b_3 = 1$, $a_4 - b_4 = 4$, $a_5 - b_5 = 11$, $a_6 - b_6 = 16$ etc., ou seja, a diferença $a_n - b_n$ tende a aumentar com o passar do tempo n.
3. Entre outras falhas, o modelo de Malthus não prevê uma limitação para o crescimento da população nem a introdução de novas tecnologias na produção de alimentos.
4. Na tentativa de corrigir as falhas do modelo malthusiano, o matemático Pierre François Verhulst (1804-1849) criou um modelo com considerações adicionais às propostas por Malthus. Verhulst ponderou, por exemplo, que o crescimento populacional tem necessariamente um limite, pois existem inibidores em seu crescimento, como guerras e epidemias.
5. Nesse contexto, competição é definida como a interação entre seres vivos de mesma espécie ou espécies diferentes, que disputam por algo necessário à sua sobrevivência, por exemplo, a água, o alimento, o território, o emprego etc.
6. Além das aplicações a populações de seres vivos interagentes, podemos citar aplicações na Agronomia, em controle de pragas; na Medicina, em pesquisas sobre a ação de um medicamento sobre vírus ou bactérias; nas Ciências Ambientais, em estudos relativos à captura e emissão de carbono; em Ciências Econômicas, em análises de competições de mercado ou de flutuações/oscilações em bolsas de valores, entre outros.
7. As expressões R_3 e G_3 representam, respectivamente, o número de indivíduos da população de raposas e o número de indivíduos da população de galinhas, na terceira unidade de tempo.
8. A expressão $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}^2$ representa a segunda potência da matriz $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}$, ou seja,
$$\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}$$
9. Sim, é possível deduzir o motivo. Se a taxa de predação ultrapassar o limite superior, haverá um momento em que não haverá mais galinhas, pois todas terão sido devoradas pelas raposas. Consequentemente, as raposas não terão com que se alimentar, portanto, morrerão de fome.
10. Até onde mostra a tabela 1, parece que o valor de k (0,1) é menor que o limite superior da taxa de predação, pois R_n e G_n são crescentes em função de n. A tabela 2 mostra que o valor de k, 0,18, é certamente maior que o limite superior da taxa de predação, pois as duas populações desapareceram no intervalo de tempo considerado.
11. O desmatamento ilegal de florestas, tendo o homem como predador e a árvore como presa; a pesca ilegal, tendo o homem como predador e o peixe como presa; a caça ilegal de jacarés, tendo o homem como predador e o jacaré como presa etc.

Sugestão

ALMEIDA, Lourdes Werle de; PESSOA, Karina; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Modelagem matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto, 2016.

MODERNA

Medições surpreendentes

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias
EM13CHS103 EM13CHS402 EM13CHS403 EM13CHS502 EM13CHS503 EM13CHS606	EM13MAT103 EM13MAT104 EM13MAT304 EM13MAT308 EM13MAT313 EM13MAT510

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- O conceito de medida e algumas das principais unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).
- Estratégias e mecanismos de medições objetivas e subjetivas.
- Índices que medem a desigualdade social, como o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e o Índice de Gini.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Resolver situações-problema presentes no cotidiano a partir de conceitos matemáticos.
- Pesquisar e confrontar ideias e teorias.
- Perceber formas variadas de medições.
- Identificar aplicações matemáticas no contexto social e suas transformações no tempo, assim como se sensibilizar frente à desigualdade social e comprometer-se de forma cidadã com as ações de políticas comunitárias.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Medições surpreendentes*.

1. **Relevância:** As medições são utilizadas com grande frequência, seja nas Ciências, seja no cotidiano: para avaliar o tempo e a distância de um passeio de férias, validar uma teoria científica, a intensidade de um terremoto, a pressão arterial, a taxa de oxigenação do sangue, a temperatura, a velocidade da luz etc., é necessário medir e, para tal, é preciso conhecer métodos de medições diretas ou indiretas.
2. **Atualidade:** Entender como medir é de vital importância para o desenvolvimento de uma sociedade. Medir o ângulo entre os átomos em uma molécula é fundamental para prever sua polaridade, e esse estudo cabe à Geometria angular molecular. Da mesma forma, o cálculo do índice que mede as desigualdades sociais é necessário para criar uma sociedade mais justa.
3. **Interesse:** A medição está presente em inúmeras atividades humanas, que vão do meio ambiente à área da saúde, passando por controle de materiais e avaliação da qualidade de produtos industrializados ou orgânicos. Tais medições garantem práticas seguras no comércio internacional e a proteção do consumidor, além de melhorar nossa qualidade de vida.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** A metrologia pode ser encontrada na área da indústria, do comércio, da saúde, entre outras. Diariamente estamos envolvidos com medições, como o tempo de cozimento de um alimento, a quantidade de alimento a ser cozido, o consumo de energia elétrica, a velocidade de um veículo, a temperatura ambiente, a pressão nos pneus de uma bicicleta, a dose correta de medicamento a ser ministrada a um paciente etc.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar as semelhanças, proporções, trigonometria etc.), Física (para comentar o pêndulo de Foucault, velocidade média, potência elétrica etc.), Geografia (para comentar a respeito do Sistema Solar, planetas inferiores e superiores, IDH, Índice de Gini etc.) e Química (para comentar a meia-vida de um isótopo radioativo e como é feita a datação pelo carbono-14).

Um pouco de história

Inicie a discussão perguntando aos estudantes: Por que medimos? Como são feitas as medições? Podemos começar a responder a essas questões com um pouco de história.

Descobertas arqueológicas sugerem que nossos ancestrais já conheciam os ciclos lunares e as estações do ano. No sul da França, no complexo de cavernas Lascaux, foram encontradas pinturas rupestres, datadas de 17.000 anos atrás, que representavam, possivelmente, o primeiro calendário elaborado pelo ser humano. Essas pinturas descrevem as fases da Lua, cada uma com duração de 7 dias, e incluem sequências de 13 pontos, que representam um quarto do ano ou as estações climáticas. A constelação Ursa Menor também é representada nessa pintura e define o início do ano.


PATRICK AVENTURIER/GETTY IMAGES

Grande Salão dos Touros, pintura em rocha paleolítica, em Lascaux (França). Foto de 2016.

MODERNA

Para elaborar esse calendário, o *Homo sapiens* observou padrões encontrados na natureza e registrou suas conclusões por meio de pinturas nas paredes das cavernas. Com essas medições, foi possível, então, planejar a caça e a agricultura, favorecendo a sobrevivência.

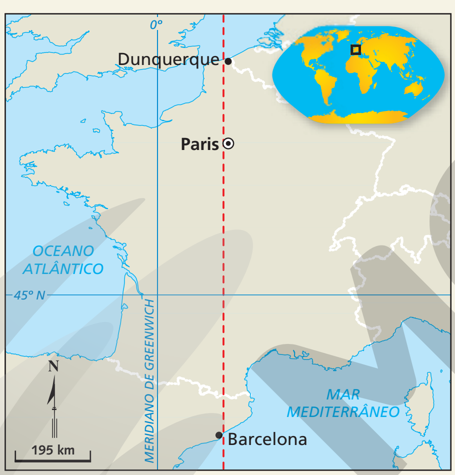
Sendo assim, podemos responder à primeira pergunta: Por que medimos?

Medimos para poder conhecer, explorar, transformar, planejar e construir, comercializar e permutar mercadorias, enfim, em quase toda experiência humana existe a necessidade de medir.

Durante a Revolução Francesa, um grupo de cientistas ficou encarregado de definir uma unidade-padrão de comprimento. Eles adotaram o metro (do grego, *metron* = medida) e, para definir o comprimento-padrão, decidiram por uma unidade imutável: o metro foi definido por um décimo de milionésimo $\left(\frac{1}{10.000.000}\right)$ da distância do polo norte à linha do equador. O problema é que eles não conheciam essa distância.

Os astrônomos Jean Baptiste Joseph Delambre (1749--1822) e Pierre François André Méchain (1744-1804) fizeram a medição da distância entre duas cidades localizadas sobre o mesmo meridiano, Dunquerque (França) e Barcelona (Espanha), passando por Paris (França). Essa distância representava a medida de um arco da circunferência da Terra e, considerando essa medida entre as cidades, foi possível deduzir a distância do polo norte ao equador usando Geometria da circunferência.

SONIA VAZ



Fonte: FERREIRA, G. M. L. *Atlas Geográfico* – Espaço Mundial. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2019. p. 89.

Sugestão

O vídeo "Medindo a Terra" contextualiza a necessidade da criação e definição do metro como unidade de medida de comprimento-padrão e universal. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1134>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Texto de abertura (p. 62)

Peça aos estudantes que leiam o texto introdutório e comente que podemos utilizar qualquer unidade de medida. No entanto, para facilitar a comunicação entre os povos, usamos as unidades padronizadas pelo **Sistema Internacional de Unidades (SI)**.

Saliente a definição de grandeza. Entendemos por **grandeza** todo atributo que pode ser medido, possibilitando associar uma unidade de medida. Cite as 7 unidades de medida fundamentais.

Grandeza básica	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Massa	quilograma	kg
Corrente elétrica	ampére	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de substância	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Cite e comente, também, algumas unidades derivadas.

Grandeza derivada	Símbolo
Velocidade	$v = \frac{m}{s}$
Aceleração	$a = \frac{m}{s^2}$
Força	$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$
Trabalho (energia, quantidade de calor)	$J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
Pressão (tensão)	$Pa = \frac{N}{m^2}$
Potência (fluxo de energia)	$W = \frac{J}{s}$
Diferença de potencial elétrico	$a = \frac{W}{A}$

Medições diretas e medições indiretas (p. 63)

Comente o que é uma medição direta e pergunte aos estudantes o que eles entendem por medição indireta. Com o exemplo da espessura de uma folha de papel sulfite, eles vão entender o significado de medição indireta.

Explorando conexões (p. 64)

Comente com os estudantes que, no Brasil, o Inmetro (Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia) é o órgão federal autônomo responsável por verificar se a produção de certo produto obedece a um conjunto de normas mínimas exigidas. Em seguida, discuta com a turma o texto "O que é o Inmetro" e quais suas competências e atribuições.

Atividades (p. 65)

1 Resposta possível: A Diretoria de Metrologia Aplicada às Ciências da Vida (Dimav) é uma seção do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) que se ocupa com as medições de parâmetros biológicos que afetam a saúde, o meio

MODERNA

ambiente, a agricultura etc. A Dimav é organizada em:

- Laboratório de Bioengenharia Tecidual: fornece à sociedade adiantado nível de excelência e segurança em pesquisas relacionadas à saúde e qualidade de vida em metodologias do cultivo de células e bioengenharia industrial.
- Laboratório de Macromoléculas: ocupa-se em identificar indícios de organismos com base em ácidos nucleicos e proteínas que os compõe.
- Laboratório de Microbiologia: trabalha com projetos de microbiologia industrial, ambiental e da saúde.
- Laboratório de Microscopia Aplicada às Ciências da Vida: ocupa-se das áreas industriais, ciências e saúde, especificando micro e nanoestruturas de células expostas a diversas circunstâncias experimentais.
- Laboratório de Química Biológica: atua no aperfeiçoamento de materiais de referência de biomoléculas de baixo peso molecular e moléculas bioativas e no reconhecimento e evolução de novos fármacos favoráveis a usos terapêuticos.

Fonte dos dados: Metrologia Aplicadas às Ciências da Vida. Inmetro. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/metvida/labmetVida.asp>. Acesso em: 10 ago. 2020.

2 **a)** $C = \left(\dfrac{\text{potência do aparelho em watt}}{1.000}\right) \cdot$

$\cdot$ (tempo de funcionamento, em hora) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}8 = \dfrac{\text{potência do aparelho em watt}}{1.000} \cdot 2\text{ h}$

$\therefore$ potência do aparelho em watt $= 1.400$ W

Concluímos, assim, que a marca *A* foi aprovada.

b) $C =$ (potência do aparelho em quilowatt) $\cdot$ (tempo de funcionamento, em hora)

$0{,}8 =$ (potência do aparelho em quilowatt) $\cdot$ 0,5 h

$\therefore$ potência do aparelho em quilowatt $= 1{,}6$ kW

Concluímos, assim, que a marca *B* foi reprovada.

Medindo o raio da Terra (p. 66)

Mostre como Erastóstenes conseguiu medir o raio da Terra usando o Sol, varetas, sombras e o método científico. Desenhe um modelo no quadro, explicando o procedimento geométrico empregado por Erastóstenes.

Sugestão

A série de televisão *Cosmos*, realizada por Carl Sagan na década de 1980, é um excelente complemento sobre o método de Erastóstenes. Já no primeiro episódio conta-se como, há 2.200 anos, ele deduziu a medida do raio da Terra com erro bastante pequeno. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=0jMOACMdgpo>. Acesso em: 10 ago. 2020.

Atividade (p. 67)

3 Sendo r a medida do raio da Terra, temos:

$2\pi r = 40.074$ km

$\therefore r = \dfrac{40.074\text{ km}}{2\pi} \Rightarrow r \simeq 6.381$ km

Ao comentar o texto "Outro método para o cálculo do raio da Terra" (p. 67), faça um desenho na lousa e, utilizando o triângulo retângulo, conclua a medida do raio da Terra em função do ângulo θ e da altura h.

Distância da Terra à Lua (p. 68)

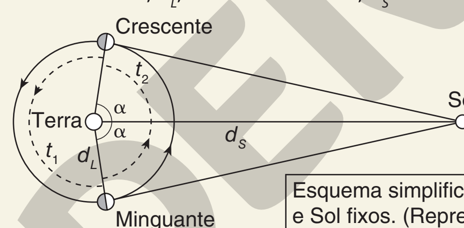
Sugerimos complementar a discussão sobre o cálculo da distância da Terra à Lua com o texto "O mais simples e mais bem-sucedido experimento da Apollo 11", que explora a experiência iniciada pelos tripulantes da Apollo 11, ao instalar o espelho retrorrefletor na superfície da Lua. Disponível em: <https://sciam.com.br/o-mais-simples-e-mais-bem-sucedido-experimento-da-apollo-11/>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Distância da Terra ao Sol (p. 69)

Pergunte se, com o que já foi estudado, alguém tem uma sugestão de como calcular a distância entre a Terra e o Sol. Em seguida, explique o raciocínio de Aristarco e comente o erro cometido.

Atividade sugerida

(Fuvest-SP) Quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, o triângulo formado pela Terra, pelo Sol e pela Lua é retângulo, com a Lua no vértice do ângulo reto. O astrônomo grego Aristarco, do século III a.C., usou este fato para obter um valor aproximado da razão entre as distâncias da Terra à Lua, d_L, e da Terra ao Sol, d_S.



Esquema simplificado com Terra e Sol fixos. (Representação fora de escala; cores fantasia.)

ERICSON GUILHERME LUCIANO

É possível estimar a medida do ângulo α, relativo ao vértice da Terra, nessas duas fases, a partir da observação de que o tempo t_1, decorrido de uma lua quarto crescente a uma lua quarto minguante, é um pouco maior do que o tempo t, decorrido de uma lua quarto minguante a uma lua quarto crescente. Supondo que a Lua descreva em torno da Terra um movimento circular uniforme, tomando $t_1 = 14{,}9$ dias e $t_2 = 14{,}8$ dias, conclui-se que a razão $\dfrac{d_L}{d_S}$ seria aproximadamente, dada por:

a) cos 77,7°
b) cos 80,7°
c) cos 83,7°
d) cos 86,7°
e) cos 89,7°

O enunciado informa que $t_1 + t_2$ equivale a uma volta completa da Lua em torno da Terra, portanto, 360°. Assim,

$$\begin{array}{lcl} 360° & \text{———} & t_1 + t_2 \\ 2\alpha & \text{———} & t_2 \end{array} \Rightarrow 2\alpha = \frac{360° \cdot t_2}{t_1 + t_2} \therefore \alpha = \frac{180° \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

$$\alpha = \frac{180° \cdot t_2}{t_1 + t_2}$$

Substituindo os valores t_1 e t_2,

$$\alpha = \frac{180° \cdot 14{,}8}{29{,}7} \simeq 89{,}7°$$

Pela figura, tem-se que:

$$\frac{d_L}{d_S} = \cos\alpha \Rightarrow \frac{d_L}{d_S} = \cos 89{,}7°$$

MODERNA

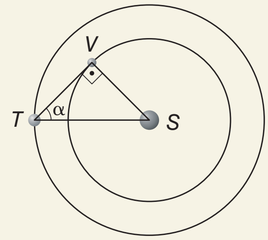
Distâncias planetárias no Sistema Solar (p. 70)

Pergunte o que são planetas inferiores e planetas superiores do nosso Sistema Solar. Explique que planetas inferiores são aqueles mais próximos do Sol do que a Terra (Mercúrio e Vênus), e planetas superiores são aqueles mais distantes do Sol do que a Terra (Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno).

Explique como, por meio da Trigonometria, é possível calcular as distâncias entre um desses planetas e o Sol e, também, a distância entre um desses planetas e a Terra.

Atividades (p. 71)

4 Indicando por α a medida do ângulo $V\hat{T}S$ e lembrando que $1{,}5 \cdot 10^8 = 150.000.000$, temos:



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

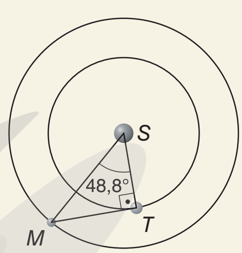
$$\text{sen } \alpha = \frac{VS}{TS} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{108.204.000}{150.000.000}$$

$$\text{sen } \alpha = 0{,}72136$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, concluímos:

$$\alpha \simeq 46{,}17°$$

5 Temos:



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

$$\cos 48{,}8° = \frac{ST}{SM}$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, concluímos:

$$0{,}6587 \simeq \frac{150.000.000}{SM} \Rightarrow SM \simeq 227.721.000$$

Logo, a distância entre o Sol e o planeta Marte é 227.721.000 km, aproximadamente.

Medições indiretas de tempo (p. 71)

Pergunte se alguém tem ideia da idade do Universo e estimule os estudantes a tentar adivinhar tanto o número quanto a maneira de chegar à resposta correta. Em seguida, explique que a idade do Universo é calculada de acordo com a teoria do astrofísico Edwin Hubble sobre o afastamento das galáxias.

Atividades (p. 72)

6 $V(R) = 16\,R \Rightarrow V(R) = 16 \cdot 200 = 3.200$

Logo, a velocidade de afastamento da galáxia é de 3.200 km/s.

7 Como 216.000 km/h equivalem a 60 km/s, temos:

$$V(R) = 16\,R \Rightarrow 60 = 16\,R$$

$$\therefore R = 3{,}75$$

Concluímos, então, que a distância entre a Terra e a galáxia é de 3,75 milhões de anos-luz.

A idade dos fósseis (p. 72)

Se possível, peça ao professor de Química que faça uma explanação sobre o isótopo radioativo carbono-14 (C14), comentando o que é meia-vida de um radioisótopo e o processo de datação por meio do carbono-14. O professor de História pode comentar sobre o crânio de Luzia, considerada a primeira brasileira, que possui mais 12 mil anos e sobreviveu a um incêndio no Museu Nacional do Rio de Janeiro (RJ) no dia 2 de setembro de 2018.

Atividade (p. 73)

8 O tempo t, em ano, para que uma massa m de C14 seja reduzida a 0,5 m é dado por:

$$0{,}5\,m = m(1 - 0{,}0001209)^t$$

de onde obtemos:

$$0{,}5\,m = (0{,}9998791)^t \Rightarrow t = \log_{0{,}9998791} 0{,}5$$

$$\therefore t \simeq 5.732$$

Logo, a meia-vida do C14 é de 5.700 anos, aproximadamente.

Explorando conexões (p. 74)

Professor, com o texto sobre Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) será possível ponderar, junto aos estudantes, aspectos como desigualdade, justiça social e os elementos fundantes do índice, quais sejam: saúde, educação e renda. Ainda, poderá discutir realidade local, nacional e global. Por meio do Índice de Gini, apresentado no tópico, os estudantes terão uma visão ampliada sobre possibilidades matemáticas de compreensão da concentração de renda e suas relações com a desigualdade. Mais uma medida surpreendente.

Atividades (p. 75)

9 Temos:

$$L = \frac{79 - 25}{60} \Rightarrow L = 0{,}900$$

$$E = \frac{2 \cdot 0{,}84 + 0{,}36}{3} \Rightarrow E = 0{,}680$$

$$R = \frac{\log_{10}(14.000) - 2}{2{,}60260} \Rightarrow L \simeq 0{,}825$$

Logo,

$$IDH \simeq \frac{0{,}900 + 0{,}680 + 0{,}825}{3} \Rightarrow IDH \simeq 0{,}802$$

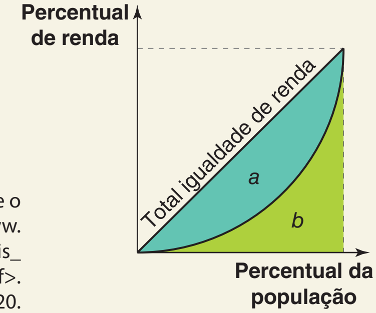
Concluímos, então, que o IDH do país é de 0,802, aproximadamente.

10 Resposta possível: O Índice de Gini é um recurso desenvolvido pelo matemático e sociólogo italiano Corrado Gini (1884-1965), que mede o grau de desigualdade social e econômica de certo grupo populacional. A medição varia em uma escala de 0 (igualdade total) a 1 (desigualdade total) e o grau de desigualdade é diretamente proporcional ao Índice de Gini correspondente àquela localidade, ou seja, quanto mais desigualdade, maior será o valor do

MODERNA

Índice de Gini, que é representado pela curva de Lorenz e determinado pela razão da área a para a soma das áreas a e b, ou seja, $G = \frac{a}{a + b}$.

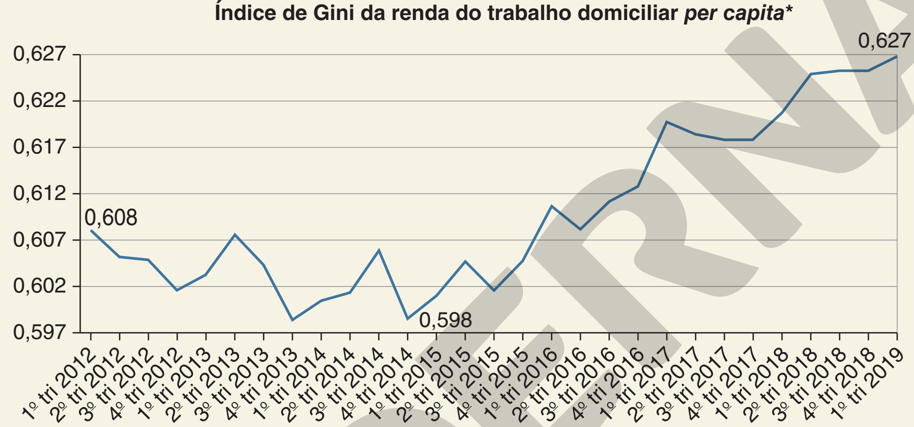
Curva de Lorenz



Fonte dos dados: A curva de Lorenz e o Índice de Gini. Disponível em: <https://www.cps.fgv.br/cps/Pesquisas/Politicas_sociais_alunos/2012/Site/Hoffmann_3_DL.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Segundo estudos do Instituto Brasileiro de Economia (IBRE-FGV), no 1º trimestre de 2019, o Brasil atingiu um Índice de Gini igual a 0,627, resultado que coloca o país entre os de maior desigualdade social no mundo.

Índice de Gini da renda do trabalho domiciliar *per capita**



*Quanto mais próximo de 1, maior a desigualdade.

Fonte: Desigualdade de renda no Brasil bate recorde, aponta levantamento do FGV IBRE. *Portal FGV*. Disponível em: <https://portal.fgv.br/noticias/desigualdade-renda-brasil-bate-recorde-aponta-levantamento-fgv-ibre>. Acesso em: 10 ago. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Texto complementar (p. 75)

Discuta com a turma o texto complementar "Medindo conhecimentos", que discorre sobre a Teoria de Resposta ao Item (TRI), um método de avaliação, adotado pelo Enem para a correção de suas provas, que não leva em consideração apenas a quantidade total de acertos, mas a habilidade do estudante em função de características individuais de cada questão.

Entendimento do texto (p. 76)

1. Não. Esse método considera o grau de dificuldade das questões que o candidato acertou e também daquelas que errou, além de avaliar a probabilidade de "chute".
2. Há muitos exemplos possíveis. Vamos citar um dos mais simples. Suponha que dos 180 testes da prova, 60 tenham sido classificados como fáceis, 60 como médios e 60 como difíceis. Suponha também que, entre os 120 testes respondidos corretamente por cada um dos dois candidatos, 119 sejam os mesmos e apenas um não coincida, e este tenha sido respondido pelo candidato *A* entre os difíceis e pelo candidato *B* entre os fáceis. Esse fato garante uma nota maior para *A*.
3. Não. No Brasil, a TRI é usada desde 1995 nas provas do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que mede o desempenho de estudantes do Ensino Fundamental e Médio e a própria Educação Básica. É utilizada no Enem desde 2009, com o objetivo de garantir a comparação das notas do exame em diferentes aplicações.
4. A redação do Enem (2019) avaliou cinco competências:
   - domínio da escrita formal;
   - desenvolvimento do tema em estilo dissertativo-argumentativo;
   - relacionar, organizar e interpretar informações e argumentos em defesa de uma opinião;
   - conhecimento de mecanismos linguísticos para construir a argumentação;
   - elaboração de proposta de intervenção para o problema proposto, com respeito aos direitos humanos.
5. Todas as redações são avaliadas por dois professores em plataforma *on-line*, sem identificação do estudante. Além disso, cada professor desconhece a nota atribuída pelo outro. Se a discrepância das notas for superior a 100 pontos no total ou 80 pontos em uma das cinco competências avaliadas, um terceiro professor fará a correção. A nota final da redação é a média aritmética das duas notas totais que mais se aproximam.

MODERNA

CAPÍTULO 5 Os sistemas digitais e a base binária

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias
EM13CHS101 EM13CHS103 EM13CHS106 EM13CHS401 EM13CHS403 EM13CHS404	EM13MAT103 EM13MAT105 EM13MAT310 EM13MAT315

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- Tecnologias digitais e sistemas de numeração na informática, com destaque para a base binária, padrões computacionais, *hardware*, *software* e computação gráfica.

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Reconhecer e utilizar mecanismos de dados digitais, relacionando-os com os números binários, com tecnologia, arte e trabalho.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente, gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Os sistemas digitais e a base binária*.

1. **Relevância:** A tecnologia da informação nos afeta continuamente, seja em casa ou na escola, no ambiente de trabalho ou de lazer, no carro ou no *shopping*. Estamos vivendo em plena era digital, e a maior parte das comunicações é comandada por computadores, que, por sua vez, dependem dos sistemas digitais e da base binária.

   A Informática esculpiu nossa maneira de ser, nosso comportamento, a ponto de interferir em nossas decisões. É comum, por exemplo, ouvir histórias de pessoas que esqueceram seus *smartphones* em casa e se atrasaram para algum compromisso importante porque voltaram para pegá-los. Nós não nos sentimos confortáveis sem o nosso telefone celular.

   As mudanças criadas pela tecnologia são irreversíveis; hoje não é mais possível imaginar o mundo sem a informática.
2. **Atualidade:** Os sistemas digitais e a base binária tornaram-se fundamentais para a velocidade vertiginosa e eficiente que alavanca o desenvolvimento em praticamente todas as áreas do conhecimento humano, tais como comunicação, robótica, medicina, engenharias, pesquisas científicas, entretenimento, transportes etc.

   Máquinas conectadas à internet comunicam-se entre si, trocando informações em tempo real, e nos possibilitam uma vida mais agradável ou maior produtividade profissional, delineando a chamada Internet das Coisas (ou *Internet of Things*, em inglês). É bastante cômodo levantar de manhã e saber que um aparelho eletrônico já preparou o café, que o carro já está ligado quando chegamos na garagem, nosso *smartphone* está conectado ao rádio do carro via *bluetooth*, o GPS nos informa o percurso, a distância percorrida, o comportamento do trânsito e a duração da viagem.
3. **Interesse:** Computadores, *tablets* e principalmente *smartphones* fazem parte do dia a dia de alguns jovens. Eles estão frequentemente conectados às redes sociais, ambientes de comunicação e entretenimento, buscam informações em noticiários, fazem pesquisas para trabalhos escolares, procuram compreender novos mercados de trabalho e carreiras profissionais, dentre muitas outras coisas. O estudo das bases binárias certamente contribuirá para que esses jovens entendam um pouco melhor o funcionamento da tecnologia da informação.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** A Informática e a Matemática estão intimamente relacionadas, pois foram os matemáticos que criaram os primeiros computadores e, consequentemente, criaram a tecnologia da informação. Sistemas de numeração, base binária, lógica, gráficos, planilhas, análise combinatória, enfim, muitos temas da Matemática são utilizados pela Informática, e não passamos um único dia sem utilizá-la.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar os sistemas digitais, as bases de numeração, os cálculos combinatórios etc.) e Linguagens (para comentar as cores primárias e o sistema RGB, nitidez e desfoque de imagens).

Os sistemas digitais e a base binária (p. 77)

Aborde o assunto "base de uma contagem" com algumas perguntas:

- Uma dezena tem quantas unidades?
  10 unidades
- Uma centena tem quantas dezenas?
  10 dezenas
- Um milhar tem quantas centenas?
  10 centenas

Observe que, para responder a essas perguntas, agrupamos as unidades de 10 em 10, agrupamos as dezenas de 10 em 10 e agrupamos as centenas de 10 em 10. Por isso, esses agrupamentos requerem a base 10 de contagem.

Continue perguntando:

- Um minuto tem quantos segundos?
  60 segundos

MODERNA

- Uma hora tem quantos minutos?
  60 minutos
- Para essas respostas, qual é a base de contagem exigida?
  Base 60.

Após essa discussão, comente o exemplo do náufrago ou prisioneiro que conta os dias fazendo riscos em uma caverna ou parede, agrupando-os em quantidades iguais, e diga que esta quantidade é a base da contagem. É bem mais prático contar os agrupamentos.

Em seguida, discuta os sistemas de numeração no dia a dia e na informática explicando o que é um sistema de numeração, como é a grafia dos números na base 10 e na base 2 (base binária) e como mudar a representação de um número de uma base para outra.

Mostre exemplos e, se achar conveniente, o professor pode ainda explicar outra forma para representar, na base 2, um número escrito na base 10. Vamos utilizar o mesmo número do exemplo dado, ou seja, 271. Devemos encontrar os dígitos a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1 e a_0, com $\{n, n-1, n-2, n-3, ..., 1, 0\} \subset \mathbb{N}$, tais que:

$$271 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

Para a obtenção desses dígitos, devemos procurar pela maior potência de 2 que seja menor ou igual a 271, que é $2^8 = 256$, assim:

$$271 = 2^8 + 15$$

Em seguida, devemos procurar pela maior potência de 2 que seja menor ou igual a 15, que é $2^3; = 8$; assim:

$$271 = 2^8 + 2^3 + 7$$

Agora devemos procurar pela maior potência de 2 que seja menor ou igual a 7, que é $2^2 = 4$; assim:

$$271 = 2^8 + 2^3 + 2^2 + 3$$

E, finalmente, escrevemos o número 3 como uma soma de potências de 2, ou seja, $3 = 2^1 + 2^0$, assim:

$$271 = 2^8 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

Comparamos com o desenvolvimento polinomial do número 271 relativo à base 2:

$$271 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

$$271 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Temos, então, que 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 e 1 são os valores de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1 e a_0, respectivamente. Assim:

$$271 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow 271 = 100001111_2$$

Atividades (p. 79)

1 Resolução:

165 | 2
1 82 | 2
0 41 | 2
1 20 | 2
0 10 | 2
0 5 | 2
1 2 | 2
0 1

Logo, $165 = 10100101_2$.

Há ainda outra possibilidade de resolução. Escreve-se o número 165 como uma soma de potências de base 2.

$$165 = 128 + 32 + 4 + 1 \Rightarrow 165 = 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^0$$

Comparamos com o desenvolvimento polinomial do número 165 relativo à base 2.

$$165 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

$$165 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Temos, então, que 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0 e 1 são os valores de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1 e a_0, respectivamente. Assim:

$$165 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow 165 = 10100101_2$$

2 $110101_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

Logo, $110101_2 = 53$.

3 a)

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\ + \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

Logo, $1011_2 + 101_2 = 10000_2$.

b)

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,1\ - \\ \hline 0\,0\,1\,0 \end{array}$$

Logo, $1101_2 - 1011_2 = 10_2$.

Atividade sugerida

Professor, se achar necessário, complemente a atividade apresentando outro exemplo, conforme a sugestão a seguir.

Represente na base 2 o número decimal 1.328.

1.328 | 2
0 664 | 2
0 332 | 2
0 166 | 2
0 83 | 2
1 41 | 2
1 20 | 2
0 10 | 2
0 5 | 2
1 2 | 2
0 1

Logo, $1.328 = 10100110000_2$.

Há ainda outra possibilidade de resolução. Escreve-se o número 1.328 como uma soma de potências de base 2.

$$1.328 = 1.024 + 256 + 32 + 16 \Rightarrow 1.328 = 2^{10} + 2^8 + 2^5 + 2^4$$

Comparamos com o desenvolvimento polinomial do número 1.328 relativo à base 2:

$$1.328 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + ... + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.328 = 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Temos, então, que 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0 e 0 são os valores de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1 e a_0, respectivamente. Assim:

$$1.328 = 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.328 = 10100110000_2$$

MODERNA

Sugestão

A título de aprofundamento, indique a leitura do trabalho “Sistemas numéricos e a representação interna dos dados no computador”. Disponível em: <https://www.inf.ufsc.br/~roberto.willrich/Ensino/INE5602/restrito/ii-cap2.PDF>. Acesso em: 11 ago. 2020.

A base binária e os computadores (p. 79)

Comente que a linguagem dos computadores surgiu muito antes de sua invenção. Ela foi criada pelo autodidata inglês George Boole (1815-1864), por volta de 1854, e é conhecida hoje como Álgebra de Boole. Nela, uma função representa a relação entre entrada e saída de um circuito lógico. Existem apenas dois estados para o circuito: **sim** e **não** (**ligado** e **desligado**; **verdadeiro** e **falso**), representados, respectivamente, por 1 e 0. Portanto, a Álgebra de Boole emprega a base binária.

Em 1937, cerca de 75 anos depois da morte de Boole, o estudante estadunidense Claude Shannon (1916-2001), estabeleceu uma relação entre a Álgebra booleana e os circuitos eletrônicos, identificando os estados (**sim** e **não**) com diferenças distintas de potencial no circuito. Pronto! Estava criada a base do que viria a ser a linguagem dos computadores.

Sugestão

Para quem quiser conhecer a Álgebra de Boole, sugira a leitura do artigo: “Sistemas de numeração com ênfase no sistema binário e sua aplicação por meio da Álgebra de Boole". *Jornada Científica*. Disponível em: <http://www.revista.unisal.br/lo/index.php/revistajornada/article/view/491>. Acesso em: 12 ago. 2020.

Explorando conexões (p. 80)

A discussão do texto “Visão computacional: como o computador vê uma imagem” é uma boa oportunidade para relacionar a abstração do pensamento computacional com o uso de tecnologias digitais. O professor pode encontrar mais subsídios no texto “Um guia sobre visão computacional: como os computadores enxergam?”. Disponível em: <https://medium.com/@suzana.svm/guia-visao-computacional-ae2a2ace0973#:~:text5O%20computador%20visualiza%20o%20objeto,c%C3%A2mera%20como%20se%20fossem%20olhos.&text5Associa%20o%20objeto%20que%20est%C3%A1,que%20o%20objeto%20%C3%A9%20desconhecido.>. Acesso em: 12 ago. 2020.

Atividade (p. 81)

4 a) O terno ordenado representa 0% de vermelho, 100% de verde e 100% de azul. Logo, segundo o diagrama, a cor resultante é azul-claro.

b) Sendo a, b e c os percentuais de vermelho, verde e azul que compõem a cor do *pixel*, respectivamente, temos:

$$\frac{51}{a} = \frac{255}{1} \Rightarrow a = 0{,}2$$

$$\frac{153}{b} = \frac{255}{1} \Rightarrow b = \mathbf{0{,}6}$$

$$\frac{255}{c} = \frac{255}{1} \Rightarrow c = \mathbf{1}$$

Logo, a cor do *pixel* é formada por 20% de vermelho, 60% de verde e 100% de azul.

c) Pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$\begin{matrix} (X, & Y, & Z) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$\text{Número de possibilidades} \longrightarrow 256 \cdot 256 \cdot 256 = 256^3 = 16.777.216$$

Logo, cada *pixel* pode apresentar 16.777.216 cores.

O que são *bits* e *bytes*? (p. 81)

Esclareça o que é um *bit*, mostre a tabela que apresenta os múltiplos do *byte* e comente por que eles são representados como potências de 2 e como potências de 10 e quais as diferenças dessas representações.

Atividades (p. 83)

5 O número de *pixels* que formam 24 fotografias é dado por: $24 \cdot 200 \cdot 200 = 960.000$. Assim, para 30 segundos de filme, o número de *pixels* é calculado por: $30 \cdot 960.000 = 28.800.000$. Como cada *pixel* é composto por 3 *bytes*, calculamos o total de *bytes* do filme: $3 \cdot 28.800.000 = 86.400.000$. Concluímos, então, que serão necessários 86.400.000 *bytes* para armazenar o filme no computador.

6 Como 1 MB $= 10^6$ B, temos:

$$86.400.000 \text{ B} = \frac{86.400.000}{10^6} \text{ MB} = 86{,}4 \text{ MB}$$

Logo, serão necessários 86,4 *megabytes* para armazenar o filme no computador.

Bytes e o padrão ASCII (p. 84)

Ao apresentar a tabela-padrão da ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*) com 128 comandos, comente que, na atividade 7 (p. 86), o estudante encontra a tabela estendida com todos os 256 comandos.

Atividade (p. 86)

7 a) A representação binária do número decimal 132 é 10000100_2. Logo, o *byte* que representa o caractere **ä** é 10000100.

b) A representação decimal do número binário 11000001_2 é 193. Assim, pela tabela, constatamos que o *byte* 11000001 representa o caractere ⊥.

Explorando conexões (p. 87)

Acreditamos que o texto “O que é CGI e computação gráfica” possa despertar grande curiosidade, pois trata da composição de imagens, não geradas por câmeras, mas sim por computadores. Comente o funcionamento básico da CGI, possibilitando ao estudante compreender o fenômeno da realidade 3D, da realidade aumentada e da virtualização do entretenimento, como *games* e filmes.

MODERNA

Atividade complementar (p. 88)

8 a) A computação gráfica é um campo bastante vasto. Nesta atividade, os estudantes podem apresentar pesquisas envolvendo formas de transformações geométricas já estudadas por eles, como homotetia, rotação, translação e reflexão, ou podem fazer um trabalho mais profundo, citando transformações afins, inversas, projetivas, entre outras.

b) Você pode encontrar mais informações sobre o tema nos *links* a seguir:

- "Transformações geométricas". Disponível em: <https://pt.slideshare.net/elainececiliagatto/computacao-grafica-transformadas-geometricas-parte-1>. Acesso em: 12 ago. 2020.
- "Transformações geométricas – Parte 2". Disponível em: <https://pt.slideshare.net/elainececiliagatto/computao-grfica-transformadas-geomtricas-2>. Acesso em: 12 ago. 2020.

Texto complementar (p. 89)

As transformações tecnológicas impactam drasticamente a vida dos estudantes; por isso, conhecer possíveis profissões relacionadas à tecnologia, às redes de relacionamentos virtuais e ao desenvolvimento de sistemas, *softwares* e aplicativos faz parte da expectativa principal da leitura deste texto.

Entendimento do texto (p. 90)

1. O crescimento foi de 4,5%.
2. A Softex estimava que o país poderia ter carência de mais de 400 mil profissionais de TI em 2020.
3. Basicamente, estes profissionais projetam e guiam o desenvolvimento de programas, aplicativos e sistemas, de forma que atendam aos requisitos e cumpram as funções determinadas.
   Entre as principais atribuições do engenheiro de *software*, estão:
   - desenvolver *softwares* e *apps*;
   - gerenciar projetos ligados aos *softwares*;
   - arquitetar o *design* estrutural dos programas;
   - realizar testes nos sistemas.

   Além disso, os engenheiros de *software* podem ter funções ligadas à administração de bancos de dados, à manutenção de sistemas e até atribuições relacionadas à documentação, à gestão de projetos e à composição de manuais de instruções.
4. Enquanto os engenheiros aprendem sobre os processos envolvidos em desenvolver e manter programas, os cientistas da computação têm estudos mais focados na teoria, ligados a modelos matemáticos, algoritmos e lógica dos processos.
5. Um engenheiro de computação é o profissional responsável, principalmente, pelo *hardware*, ou seja, pelo projeto e construção de computadores.
6. Entre os principais assuntos abordados estão: engenharia, matemática, arquitetura e gerenciamento de *softwares* e gestão de projetos.
7. Habilidades matemáticas são necessárias na engenharia de *software*. Os engenheiros, frequentemente, precisam criar algoritmos matemáticos, isto é, instruções das operações descritas passo a passo.

CAPÍTULO 6 Análise de tendências

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS101 EM13CHS103 EM13CHS106 EM13CHS301 EM13CHS302 EM13CHS304 EM13CHS306 EM13CHS402 EM13CHS404 EM13CHS606	EM13MAT101 EM13MAT102 EM13MAT104 EM13MAT202 EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT302 EM13MAT406 EM13MAT501 EM13MAT502 EM13MAT510	Revisão bibliográfica Análise de mídias sociais

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- O estudo da análise de tendências, por meio de polinômios de ajuste.
- Outros cálculos estatísticos, envolvendo estimativas, planejamento, previsibilidade e antecipação.

Objetivo específico

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Utilizar modelos matemáticos e/ou estatísticos para compreender tendências, prever crescimentos, decrescimentos ou estabilidades de fenômenos, desenvolvendo a capacidade crítica e abstrata de tomada de decisões.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Análise de tendências*.

1. **Relevância:** Em diversas atividades humanas, tais como política, saúde, educação, economia, transporte, entre outras, conseguir prever causas e impactos de problemas,

MODERNA

oportunidades ou identificar efeitos sazonais pode significar a diferença entre a vida e a morte de pacientes acometidos de certa doença, a aceitação ou a rejeição de um candidato a um cargo público, a continuidade ou não de um projeto científico, o sucesso ou o fracasso de um empreendimento etc. A **análise de tendência** é um valoroso recurso utilizado para prever acontecimentos e antecipar medidas para satisfazer, da forma mais rápida e com os maiores benefícios possíveis, os interesses e as expectativas do público-alvo, com base em dados estatísticos e no histórico de comportamento observado em situações anteriores.

2. **Atualidade:** A análise de tendência está presente em muitos momentos do nosso cotidiano, por exemplo, quando um usuário acessa as redes sociais, faz uma pesquisa *on-line* a respeito de temas relacionados à educação ou faz algum tipo de reclamação sobre produtos ou serviços, seus comportamentos e preferências ficam registrados e, a partir dessas informações, empresas e prestadores de serviços principiam a orientação de seus procedimentos de *marketing* na intenção de que este usuário passe a receber anúncios direcionados, com base em seus gostos pessoais.
3. **Interesse:** A demanda de empresas e prestadores de serviços por entender como o consumidor pensa fez surgir um novo ramo do conhecimento científico, o *neuromarketing*. O grupo de estudos no qual trabalhava o médico e pesquisador Gerald Zaltman, na Universidade de Harvard (Estados Unidos), submeteu voluntários a exames de ressonância magnética, buscando entender como a influência do *marketing* interfere na conduta do consumidor e, a partir dos dados obtidos, desenvolver novas estratégias de abordagem, novas propagandas que tornem mais atraentes os produtos. E foi o professor de *marketing* Ale Smidts, da Erasmus University (Holanda), quem batizou a nova ciência como *neuromarketing* na intenção de juntar as palavras neurologia e *marketing*.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** Estatística, Probabilidade, Álgebra e raciocínio lógico são quesitos indispensáveis à análise de tendências. Gráficos, tabelas, diagramas, quadros comparativos de desenvolvimento progressivo ou projeções e curvas de tendência são excelentes formas de obter uma informação visual da movimentação do objeto em estudo e facilitam, após análise e reflexão, a tomada da decisão a respeito da futura aplicação de determinada atitude a curto, médio ou longo prazo.

A seguir apresentamos algumas formas de uma curva de tendência.

- **Linear:** é uma reta de ajuste que, geralmente, mostra o crescimento ou decrescimento do objeto de estudo.
- **Exponencial:** é representada por uma curva exponencial crescente ou decrescente e pode ser utilizada quando as taxas de variações das informações (variável de resposta ou variável dependente) aumentam ou diminuem abruptamente em relação à variável independente (ou variável explicativa). Os valores fornecidos pela curva serão necessariamente positivos.
- **Logarítmica:** é representada por uma curva logarítmica crescente ou decrescente e pode ser utilizada quando, inicialmente, as taxas de variações das informações (variável de resposta ou dependente) aumentam ou diminuem abruptamente em relação à variável independente (ou variável explicativa) e depois tendem a uma estabilidade.
- **Polinomial:** é representada por uma curva e é utilizada quando há flutuação nos valores da variável dependente (ou variável de resposta).

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar as curvas de tendência, estatística etc.) e Geografia (para comentar sobre países desenvolvidos, subdesenvolvidos e emergentes e suas relações com o consumo de água, inflação, PIB etc.).

Texto de abertura (p. 91)

Professor, pergunte aos estudantes: O que vocês entendem por análise de tendência? Discuta a aplicação da análise de tendência, explorando o exemplo sobre o consumo de água em função da população (comente que x e y são as nossas variáveis de interesse e cada uma delas desempenha um papel na pesquisa; x é a variável explicativa ou variável independente, e y é a variável de resposta ou variável dependente).

Pode-se usar a análise de tendência em muitas outras situações, como método para descrever as peculiaridades ocorridas em uma pesquisa científica, prever a velocidade de avanço de um vírus em estudos epidemiológicos e tentar controlá-la, determinar o percentual de inflação em certa localidade daqui a alguns anos, enfim, analisar e interpretar dados numéricos que variam em função de uma grandeza, como o tempo.

Explorando conexões (p. 93)

Ao comentar o texto, cite a importância do consumo consciente e comedido da água, uma vez que aproximadamente 97,5% de toda a água do mundo é salgada, logo, não é apropriada para o consumo por seres humanos nem para a agricultura, e que apenas 0,3% da quantidade restante ($0{,}3\% \times 2{,}5\% = 0{,}0075\%$) compõe calotas polares, águas subterrâneas, rios e lagos. Discuta a variação entre o consumo diário de água nos países desenvolvidos e subdesenvolvidos e sugira aos estudantes que façam pesquisas em livros ou na internet e preparem um debate sobre o tema.

Sugestões

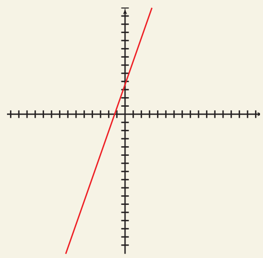
O texto "Situação da água no mundo", da Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA), pode ser apresentado aos estudantes como material de consulta. Disponível em: <https://www.gov.br/ana/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/cooperacao-internacional/agua-no-mundo>. Acesso em: 13 abr. 2021.

A cartilha Água, do Ministério do Meio Ambiente também pode ser usada para consulta. Disponível em: <https://www.mma.gov.br/estruturas/secex_consumo/_arquivos/3%20-%20mcs_agua.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2020.

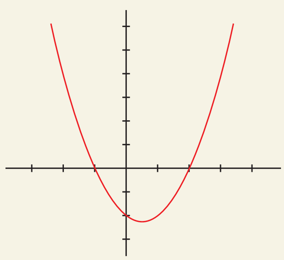
Determinação da linha de tendência estatística (p. 93)

Para desenvolver esse trabalho, o profissional de estatística lança mão de uma série de informações coletadas e constrói uma linha de tendência estatística. A partir da análise dessa linha, formula hipóteses sobre o comportamento futuro do objeto em estudo.

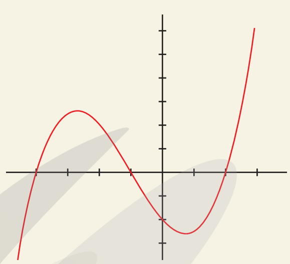
Explique que as linhas mais comumente utilizadas em previsões são determinadas por funções polinomiais de 1º, 2º, 3º e 4º graus.



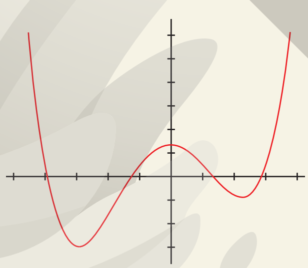
Exemplo de reta.



Exemplo de parábola.



Exemplo de cúbica.



Exemplo de quártica.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Discuta com a turma o sistema a seguir:

$$\begin{cases} bn + a\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ b\sum_{k=1}^{n} x_k + a\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) \end{cases}$$

Explique que as constantes a e b são os coeficientes da equação da reta de tendência $y = ax + b$. Em seguida, descreva o significado das expressões:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + ... + (x_n)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + ... + x_n y_n$$

Demonstre como encontrar a equação do exemplo introdutório (consumo de água em função da população) e, em seguida, apresente o sistema que fornece as constantes a, b e c da equação de uma parábola de tendência.

$$\begin{cases} cn + b\sum_{j=1}^{n} x_j + a\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j \\ c\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 + a\sum_{j=1}^{n} (x_j)^3 = \sum_{j=1}^{n} (x_j y_j) \\ c\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 + b\sum_{j=1}^{n} (x_j)^3 + a\sum_{j=1}^{n} (x_j)^4 = \sum_{j=1}^{n} (x_j)^2 y_j \end{cases}$$

Apresente e comente o exemplo sobre o cálculo do índice de inflação.

Linhas de tendência em planilhas eletrônicas (p. 96)

Editores de planilhas eletrônicas são uma poderosa ferramenta na construção de gráficos estatísticos e linhas de tendência.

Se houver possibilidade, organize uma atividade no laboratório de informática da escola. Escolha um desses programas e explique aos estudantes como utilizá-lo para construir linhas de tendência seguindo o passo a passo apresentado no exemplo.

Atividade (p. 97)

1 Observando que os pontos conhecidos, (x_k, y_k), são (1, 20), (2, 22), (3, 21), (4, 24) e (5, 23), temos que a equação da reta de tendência é da forma $y = ax + b$, tal que:

$$\begin{cases} 5b + a\sum_{k=1}^{5} x_k = \sum_{k=1}^{5} y_k \\ b\sum_{k=1}^{5} x_k + a\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2 = \sum_{k=1}^{5} (x_k y_k) \end{cases}$$

Calculando os somatórios:

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{k=1}^{5} y_k = 20 + 22 + 21 + 24 + 23 = 110$$

$$\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\sum_{k=1}^{5} (x_k y_k) = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 24 + 5 \cdot 23 = 338$$

Assim, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} 5b + 15a = 110 \\ 15b + 55a = 338 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $a = 0{,}8$ e $b = 19{,}6$.
Portanto, a equação da reta de tendência é:
$y = 0{,}8x + 19{,}6$ ou, ainda, $f(x) = 0{,}8x + 19{,}6$.

MODERNA

Assim, a tendência do número de acessos para o 6º dia é calculada por:

$f(6) = 0{,}8 \cdot 6 + 19{,}6 = 24{,}4$

Concluímos que a expectativa para o 6º dia é de 24.400 acessos, aproximadamente.

Explorando conexões (p. 98)

Ao comentar o texto, faça uma breve explanação sobre o significado de alguns termos importantes citados. **Banco Central do Brasil** é um órgão independente vinculado ao Ministério da Economia, que tem a responsabilidade de administrar nossa política econômica. **Boletim Focus** refere-se à interpretação dos dados estatísticos obtidos em relação às perspectivas do mercado. **Inflação** é o indicador econômico que expressa as variações nos preços de bens e serviços, e **inflação inercial** refere-se à soma do índice inflacionário de um período com a expectativa do índice do próximo período. **Produto Interno Bruto (PIB)** é um indicador da dinâmica econômica do país que retrata a soma de todos os bens e serviços, em um período de tempo, sinalizando possíveis crescimentos ou decrescimentos na economia.

Atividades (p. 99)

2 Professor, ao orientar a pesquisa, conceitue inflação e comente brevemente o porquê dos vários índices adotados no Brasil. Uma explicação resumida pode ser encontrada no *site* do Banco Central do Brasil (disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/indicepreco>; acesso em: 26 ago. 2020). Oriente o uso da Calculadora do Cidadão, recomendando aos estudantes que cliquem em "Metodologia", uma instrução que aparece no próprio *site* da Calculadora, em que estão explicados detalhadamente os passos para se obter o índice de inflação selecionado.

3 Professor, para essa atividade, é interessante que os professores de Matemática e suas Tecnologias, de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e de Linguagens e suas Tecnologias trabalhem em conjunto, para criar, com os estudantes, a dinâmica que orientará a pesquisa e a apresentação da atividade.

Texto complementar (p. 99)

Professor, o texto desta seção destaca a dissociabilidade entre previsão e planejamento, daí a relevância das curvas de tendência. Elas fazem parte da previsão, determinando a orientação do planejamento e de sua execução. Antes da leitura, sugerimos que seja apresentada uma situação prática que descreva a sequência: previsão, planejamento e execução. Por exemplo: uma fábrica de chocolate deve se preparar para a Páscoa, quando a demanda por chocolate aumenta consideravelmente. Para essa preparação, é necessário um estudo de vendas passadas, que projete vendas futuras por meios estatísticos, como as curvas de tendência. Com base nessa previsão, faz-se o planejamento. Quanto de matéria-prima devemos estocar? Quantos funcionários serão necessários? Quais serão os custos de produção? Cumprida cada etapa dos procedimentos anteriores, vem a fase final: iniciar a produção.

Entendimento do texto (p. 101)

1. O planejamento pode ser entendido como o processo de estabelecer compromissos de gerência, que possibilitam que a empresa atenda à demanda prevista e alcance, assim, os objetivos estratégicos de seu negócio.
2. A previsão pode ser vista como o estudo do nível da demanda futura mais provável, assumindo um conjunto de premissas sobre tecnologia, ambiente, competição, evolução dos preços, *marketing* e esforços de vendas.
3. O uso de métodos e modelos analíticos para a previsão é necessário em várias situações, por exemplo, ao analisar a evolução de fatores externos que afetam o desempenho das organizações, como a inflação, a variação dos preços, o produto interno bruto, o tamanho e a divisão do mercado. Da mesma forma, a previsão permite analisar a variação dos volumes importados em comparação aos exportados ao longo do tempo, que, por sua vez, tem impacto na determinação do tamanho do mercado em determinado período. Ela também possibilita acompanhar a evolução das condições econômicas de regiões ou países, que afetam o tamanho dos mercados, a quantidade de produtos vendidos e, em consequência, possibilita antever a receita esperada das vendas. No longo prazo, a ausência de efetiva gerência para monitorar e controlar os processos de previsão e planejamento dos negócios pode afetar até mesmo a sobrevivência da organização.
4. O planejamento da expansão (ou não) e o crescimento dos negócios devem se apoiar em estimativas de demandas futuras por serviços, produtos ou grupos de produtos. É importante antecipar informações sobre em que ponto a capacidade instalada não atende à demanda (ou vice-versa), de forma a planejar a utilização do capital em expansões ou retrações da organização, assim como avaliar se o nível de demanda esperado vai compensar o investimento necessário para atuar em determinado ramo de negócio.
5. Quando a demanda é prevista com precisão, ela pode ser atendida no tempo e da maneira adequados, satisfazendo tanto parceiros em canais logísticos quanto clientes finais. Matérias-primas e componentes podem ser adquiridos de forma programada, serviços logísticos com contratos de longo prazo podem ser estabelecidos com maior segurança, enquanto aquisições no mercado *spot* podem ser evitadas.
6. Estoques de segurança podem ser mais bem dimensionados por meio de previsões apuradas do nível de consumo por local e por tipo de produto ou serviço.
7. A previsão deve ser utilizada para decidir se a demanda em determinada região do mercado é suficiente para justificar a entrada da organização. Se a demanda existe, mas não em nível suficiente para cobrir os custos logísticos do produto final, a organização deverá rejeitar a oportunidade.
8. De forma sumária, são três as macroáreas de aplicação da previsão:
   - **Determinação de recursos desejados, correspondente a decisões de longo prazo:** essas decisões dizem respeito, por exemplo, a determinar as necessidades de

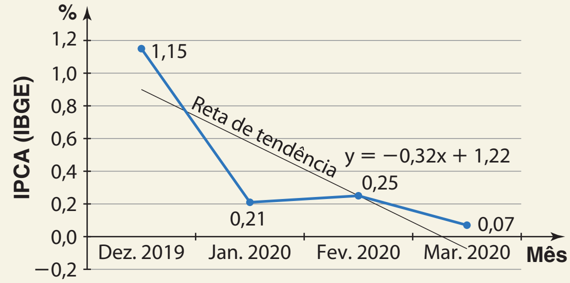
capacidade no longo prazo, ou seja, em períodos superiores a 2 anos, para o projeto da rede de instalações. Projeções da demanda para um número de anos no futuro podem significar redução dos gastos incorridos na expansão, ou na retração, da capacidade para atender à demanda projetada (devem-se usar as previsões para o planejamento de decisões de modo a evitar atender à demanda de forma insuficiente ou, ao contrário, ter capacidade ociosa em setores da empresa).

- **Aquisição de recursos adicionais, correspondente a decisões de médio prazo:** essas decisões dizem respeito, por exemplo, à programação da utilização de capacidade adicional de transporte e armazenagem em períodos de pico e ao relacionamento com fornecedores de tais serviços de forma a ter contratos favoráveis, preestabelecido, de média duração.
- **Programação de uso de recursos existentes, correspondente a decisões de curto prazo:** essas decisões dizem respeito, por exemplo, a acompanhar as flutuações da demanda de curto e curtíssimo prazos (de 1 semana a 3 meses) para o planejamento da produção, programação da força de trabalho, planejamento dos fluxos de materiais, entre outras necessidades. Essas previsões afetam, por exemplo, a produtividade operacional e as datas de entrega com as quais a organização se comprometeu.

Atividade complementar (p. 101)

4 Respostas pessoais, pois dependem dos meses escolhidos pelos estudantes. Por exemplo, se forem selecionados os meses de dezembro de 2019 a março de 2020, obtém-se o seguinte gráfico de linhas com a respectiva equação da reta de tendência:

IPCA mensal de dezembro de 2019 a março de 2020



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Calculadora do Cidadão. *Banco Central do Brasil*. Disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/exibirFormCorrecaoValores.do?method=exibirFormCorrecaoValores&aba=1>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Avaliando, pela equação da reta de tendência, o IPCA para o mês de abril de 2020, obtém-se:

$$y = -0{,}32 \cdot 5 + 1{,}22 = -0{,}38$$

Ou seja, o IPCA para o mês de abril seria $-0{,}38\%$, aproximadamente, perante o IPCA efetivo de $-0{,}31\%$, obtido para o mês de abril pela Calculadora do Cidadão. Note, portanto, que a previsão foi 0,07% menor que o IPCA efetivo, o que corresponde a um erro de 0,226%, aproximadamente.

Sugestão

O texto "Como usar linhas de tendência para previsão de dados" complementa este capítulo, apresentando novos tipos de linhas de tendência e o mais adequado a determinado conjunto de dados. Disponível em: <https://www.portal-gestao.com/artigos/7898-como-usar-linhas-de-tend%C3%AAncia-para-previs%C3%A3o-de-dados.html>. Acesso em: 12 ago. 2020.

CAPÍTULO 7 Tratando dados experimentais

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS102 EM13CHS103 EM13CHS105 EM13CHS106 EM13CHS301 EM13CHS606	EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT202 EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT316 EM13MAT406	Construção e uso de amostragens Construção e uso de questionários Grupo focal Análise de mídias sociais Pesquisa-ação

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- O tratamento de dados experimentais por meio de alguns tipos de interpolação e extrapolação de valores numéricos tabelados, utilizando conceitos de aproximação polinomial, o método das componentes geográficas, Estatística etc.

Objetivo específico

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Adotar as estratégias estudadas para identificar valores desconhecidos que se ajustam, da melhor forma possível, a conjuntos de valores conhecidos em situações variadas do cotidiano de modo que se possa estimar resultados ou estabelecer metas.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Tratando dados experimentais*.

1. **Relevância:** O tratamento de dados experimentais é de suma importância em várias áreas de atuação profissional, tais como Química, Biologia, Física, Matemática, *marketing*

MODERNA

etc. Pesquisas de dados experimentais são desenvolvidas procurando a cura de doenças, novas tecnologias, novos elementos químicos sintetizados em laboratório, maneiras inovadoras de utilização de algo já conhecido etc.

2. **Atualidade:** Na indústria e no comércio, é fundamental a pesquisa de mercado, com a qual é possível conhecer a tendência dos consumidores e o seu perfil. Essa informação direciona o planejamento e o *marketing* da empresa. Em época de eleições, partidos políticos precisam estar abastecidos de informações estratégicas e, por isso, encomendam pesquisas eleitorais para estimar qual candidato tem mais intenções de voto e como são os eleitores, ou seja, em quais regiões do país moram, a que classe social pertencem, qual sua faixa etária, que atitudes esperam de um candidato etc. Essas informações possibilitam a orientação das campanhas. O estudo e tratamento de dados está presente também no dia a dia. Quantas e quantas vezes, ao acessar a *internet*, o usuário é solicitado a fornecer seus dados e consentimento para a utilização deles para fins estatísticos e propagandísticos. Esses dados, no entanto, não podem ser usados indevidamente. A Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais (LGPD) regulamenta a coleta de informações e garante que aqueles dados serão utilizados apenas para o fim consentido.
3. **Interesse:** A análise e o tratamento de dados são imprescindíveis em grande parte de situações que envolvam decisões administrativas: maximizar, com eficiência, a possibilidade de sucesso quanto ao crescimento de uma empresa; possível diversificação de produtos fabricados/comercializados ou serviços prestados; aumento na receita, redução nos gastos, desempenho mais produtivo dos colaboradores etc.
4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** Muitas de nossas escolhas dependem de grandezas das quais conhecemos alguns valores e desconhecemos outros, até mesmo aqueles que não foram registrados. Por exemplo, em pesquisas médicas, a eficácia de um novo medicamento é avaliada a partir de testes com resultados tabelados e da confirmação ou não da tendência observada. No estudo de populações, é possível estimar valores intermediários entre valores conhecidos. Já em estudos econômicos, é possível estimar valores futuros a partir de sequências históricas. Essas estimativas são feitas por métodos estatísticos, como a interpolação e a extrapolação.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar as interpolações e extrapolações, os gráficos, médias etc.), História (para comentar o processo eleitoral no Brasil) e Educação Física (para comentar sobre obesidade, sedentarismo e atividades físicas).

Texto de abertura (p. 102)

Inicie perguntando o que os estudantes entendem por tratamento de dados experimentais e, em seguida, explique que o tratamento de dados experimentais incorpora análises, interpretações e mensurações de resultados obtidos de forma experimental.

Explique o que é interpolação polinomial comentando que as informações de certa pesquisa são representadas por meio de pares ordenados (x, y) e, por esses pontos, são traçadas curvas polinomiais que podem fornecer respostas a várias perguntas relativas à pesquisa desenvolvida.

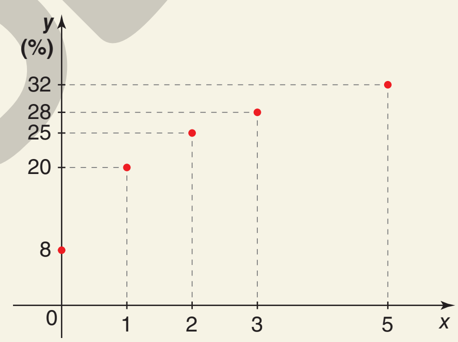
Explorando conexões (p. 104)

Essa seção abrange o tema saúde e traz comentários do professor Maiky Recke a respeito da saúde ligada às atividades físicas e à alimentação. Após a leitura do texto, faça perguntas sobre o que os estudantes entenderam do assunto e, se possível, promova um debate a respeito do crescimento da taxa percentual de prevalência de obesidade no Brasil.

Atividades (p. 105)

1 Respostas pessoais. Professor, comente que as atividades físicas são todos os movimentos do sistema musculoesquelético que promovam algum gasto calórico e estão presentes no cotidiano dos estudantes, como caminhar até a escola. Reforce que comunidades com espaços seguros de prática esportiva tendem a aumentar o número de praticantes; além disso, famílias com membros fisicamente ativos têm menor ocorrência de doenças decorrentes do sedentarismo e impactam menos o sistema de saúde.

2 Indicando no eixo x os números de semanas a partir do início da campanha e no eixo y o percentual de pessoas do município, com mais de 10 anos de idade, que praticavam exercícios físicos, temos o gráfico:



ERICSSON GUILHERME LUCIANO

A equação da reta r que passa pelos pontos (3, 28) e (5, 32) é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.
Assim, temos:

$$\begin{cases} 28 = 3a + b \\ 32 = 5a + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 22$$

Logo, a equação da reta r é $y = 2x + 22$. Para $x = 4$, temos: $y = 2 \cdot 4 + 22 = 30$.
Concluímos, então, que, ao final da 4ª semana, o percentual procurado era de 30%, aproximadamente.

Atividades (p. 108)

3 a) Pelo teorema descrito na página 106, temos que existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor que 3, cujo gráfico passa pelos pontos (1, 73), (3, 95) e (6, 113). Assim, o grau máximo que pode ter esse polinômio é 2, ou seja, $P(x)$ pode ser representado sob a forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

em que a, b e c são constantes reais.

Como os pontos (1, 73), (3, 95) e (6, 113) pertencem ao gráfico do polinômio, os valores de a, b e c são obtidos por:

$$\begin{cases} P(1) = 73 \\ P(3) = 95 \\ P(6) = 113 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 73 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 95 \\ a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 113 \end{cases}$$

Assim, chegamos ao sistema linear:

$$\begin{cases} a + b + c = 73 \\ 9a + 3b + c = 95 \\ 36a + 6b + c = 113 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $a = -1$; $b = 15$; e $c = 59$.
Logo:

$$P(x) = -x^2 + 15x + 59$$

b) Calculando P(5), temos:

$$P(5) = -5^2 + 15 \cdot 5 + 59 \Rightarrow P(5) = 109$$

Concluímos, então, que uma estimativa da altura ideal, em centímetro, para uma menina brasileira de 5 anos é 109 cm, aproximadamente.

4 a) Pelo teorema estudado, existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor que 4, cujo gráfico passa pelos pontos (0; 5,1), (1; 5,04), (2; 5,25) e (3; 5,22). Assim, o grau máximo que pode ter esse polinômio é 3, ou seja, $P(x)$ pode ser representado sob a forma:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

em que as constantes reais a, b, c e d são obtidas por:

$$\begin{cases} P(0) = 5{,}1 \\ P(1) = 5{,}04 \\ P(2) = 5{,}25 \\ P(3) = 5{,}22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 5{,}1 \\ a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 5{,}04 \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 5{,}25 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 5{,}22 \end{cases}$$

Assim, chegamos ao sistema linear:

$$\begin{cases} d = 5{,}1 \\ a + b + c + d = 5{,}04 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5{,}25 \\ 27a + 9b + 3c + d = 5{,}22 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $a = -0{,}085$; $b = 0{,}39$; $c = -0{,}365$; e $d = 5{,}1$.

Assim, deduzimos que o polinômio interpolador para esses dados é:

$$P(x) = -0{,}085x^3 + 0{,}39x^2 - 0{,}365x + 5{,}1$$

b) O preço, em real, do quilograma da uva rubi extra às 2,5 h é calculado por P(2,5):

$$P(2{,}5) = -0{,}085 \cdot (2{,}5)^3 + 0{,}39 \cdot (2{,}5)^2 - 0{,}365 \cdot (2{,}5) + 5{,}1 = \\ = 5{,}296875$$

Ou seja, o preço era de R$ 5,30, aproximadamente.

Explorando conexões (p. 109)

Discuta o texto da seção, que apresenta uma forma usada pelo Ministério da Educação para medir a qualidade da Educação no país. Depois da leitura, solicite a participação dos estudantes, propondo uma discussão sobre a Educação Básica no Brasil que problematize aspectos, como diferenças educacionais entre centros e periferias, ricos e pobres, regiões do país, ensino público e privado, entre outros. Atente-se ao fato de não atribuir juízo de valor às categorias descritas, apenas analisá-las à luz dos processos educativos.

Atividades (p. 110)

5 Resposta possível: Os dados demonstram que estabelecimentos públicos e privados não conseguem alcançar a meta estabelecida pelo IDEB, ciclo após ciclo, desde 2015. A média de consecução da rede privada aumentou de 2015 para 2018, mas as médias das redes pública e estadual não mudaram, o que aumenta a distância prospectada de execução da meta das redes pública e estadual para 2021.

6 a) Representamos os anos 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 e 2021 por 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Assim, os pares ordenados (2015; 4,0), (2017; 4,4) e (2021; 4,9) são representados por (0; 4,0), (2; 4,4) e (6; 4,9). Pelo teorema do polinômio interpolador, temos que existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor que 3, cujo gráfico contém os pontos (0; 4,0), (2; 4,4) e (6; 4,9). Assim, o grau máximo que pode ter esse polinômio é 2, ou seja, $P(x)$ pode ser representado sob a forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

em que a, b e c são constantes reais.

Como os pontos (0; 4,0), (2; 4,4) e (6; 4,9) pertencem ao gráfico do polinômio, os valores de a, b e c são obtidos por:

$$\begin{cases} P(0) = 4{,}0 \\ P(2) = 4{,}4 \\ P(6) = 4{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4{,}0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4{,}4 \\ a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 4{,}9 \end{cases}$$

Assim, chegamos ao sistema linear:

$$\begin{cases} c = 4{,}0 \\ 4a + 2b + c = 4{,}4 \\ 36a + 6b + c = 4{,}9 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $a = -0{,}0125$, $b = 0{,}225$ e $c = 4$.
Logo:

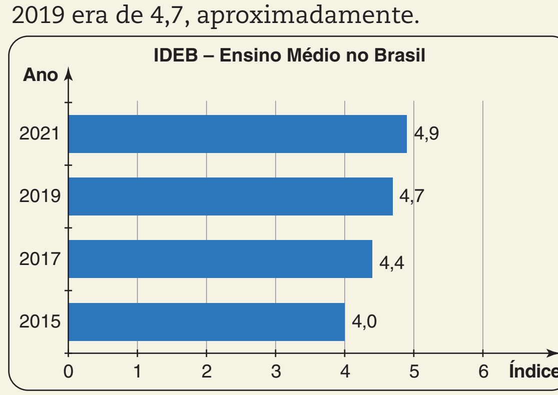
$$P(x) = -0{,}0125x^2 + 0{,}225x + 4$$

Calculando P(4), temos:

$$P(4) = -0{,}0125 \cdot 4^2 + 0{,}225 \cdot 4 + 4 \Rightarrow P(4) = 4{,}7$$

Concluímos, então, que a meta estabelecida para 2019 era de 4,7, aproximadamente.

b)



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte dos dados: Ideb – Resultados e Metas. *Instituto Nacional de Estudos Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep).* Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_Ideb_2005-2017.pdf>. Acesso em: 12 set. 2020.

Interpolação espacial (p. 110)

Informações a respeito de precipitação pluvial, setores de saturação da água, acúmulos de neve, densidade populacional etc. podem ser obtidas por meio da interpolação espacial.

MODERNA

Atividade (p. 111)

7 O percentual p de intenção de voto pode ser estimado por:

$$p \simeq \frac{16\% \cdot 18 + 18\% \cdot 30 + 15\% \cdot 10 + 19\% \cdot 24}{18 + 30 + 10 + 24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \simeq 17{,}49\%$$

Concluímos, então, que a intenção de voto favorável ao candidato X no ponto Q é de 17,49%, aproximadamente.

Texto complementar (p. 111)

Professor, neste texto são apresentados raciocínios matemáticos de compreensão da dinâmica de uma população com base em óbitos, nascimentos, fecundidade e movimentos migratórios, por meio de interpolações e extrapolações, em função de períodos determinados de tempo.

Entendimento do texto (p. 112)

1. A tendência observada na interpolação não deve se alterar significativamente no caso de horizontes de tempo muito curtos, mas pode se alterar substancialmente em um futuro distante.
2. O Método das Componentes Demográficas é o procedimento de estimativa de uma população, que incorpora as informações sobre as tendências observadas de natalidade, mortalidade, fecundidade e migração durante determinado intervalo de tempo.
3. Pelo Método das Componentes Demográficas, uma projeção populacional é feita em duas etapas. A primeira considera a população fechada à migração, ou seja, considera apenas os nascimentos e mortes. Na segunda etapa, consideram-se também os efeitos diretos e indiretos da migração.
4. A população aberta é a soma da população fechada e do saldo migratório que teria ocorrido nos 5 anos anteriores à data da projeção.
5. A primeira é: Qual deverá ser o limite das tendências passadas e atuais? Isto é, qual deverá ser o nível e a estrutura de cada um dos componentes, a partir dos quais as mudanças devem ocorrer? A segunda questão trata do tempo em que este limite deverá ser alcançado. Terá este limite sido alcançado antes do final do período da projeção? Após? Quão após?

CAPÍTULO 8 Criptografia: da esfera militar ao domínio público

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Matemática e suas Tecnologias	Práticas de pesquisa
EM13CHS101 EM13CHS102 EM13CHS103 EM13CHS104 EM13CHS105 EM13CHS106 EM13CHS202 EM13CHS204 EM13CHS401 EM13CHS403 EM13CHS404	EM13MAT202 EM13MAT203 EM13MAT301 EM13MAT310 EM13MAT315	Construção e uso de amostragens Construção e uso de questionários Grupo focal

Conteúdos

Neste capítulo, apresentamos:

- Um breve histórico a respeito de cifragens e técnicas básicas de criptografia, codificação e decodificação de informações multimodais.

Objetivo específico

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Compreender a estrutura de escritas multimodais codificadas, criptografadas, reconhecendo campos de aplicação na esfera militar e civil, no trabalho e nas variadas Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), agindo de forma ética e justa no uso do conhecimento compartilhado.

Sugestões de encaminhamento do capítulo e respostas sugeridas

Preliminares

Professor, inicialmente gostaríamos de comentar alguns dos motivos que nos levaram a optar pelo tema que dá título ao capítulo: *Criptografia: da esfera militar ao domínio público*.

1. **Relevância:** Temos conhecimento da importância e necessidade de proteção, pessoal ou corporativa, de sermos resguardados de perigos e ataques de qualquer tipo. Essa necessidade fez surgir um conjunto de mecanismos e equipamentos aos quais, genericamente, damos o nome de medidas de segurança ou, simplesmente, segurança. A criptografia é a ciência aplicada a diversos tipos de segurança, como segurança pessoal, segurança pública, segurança do trabalho, segurança nacional, segurança da informação, entre outras.
2. **Atualidade:** Embora exista há milênios, a criptografia é imprescindível e nunca esteve tão presente em nosso cotidiano como agora. Inicialmente, a codificação de mensagens restringia-se ao uso militar, mas, a partir da criação dos computadores, da internet, das comunicações e transações comerciais *on-line*, intensificou-se a necessidade, também para o cidadão comum, de manter informações confidenciais em segurança.
3. **Interesse:** O interesse por codificações normalmente surge bem cedo. Muitas crianças se utilizam, por exemplo, da chamada "língua do P" para codificar suas conversas. A brincadeira fundamenta-se no fato de se colocar a letra P antes de cada sílaba falada; assim, para dizer "Eu gosto de estudar", por exemplo, diz-se "*pê* eu, *pê* gos, *pê* to, *pê* de, *pê* es, *pê* tu, *pê* dar".

MODERNA

Outra forma de codificação consiste na troca de letras por números que lembram as letras substituídas, por exemplo: C4RL0S 3 8E4TR12 3574V4M P45534ND0 D3 M40S D4D45 P3L4 C4LÇ4D4 D4 PR4Ç4 3, 3M841X0 D3 UM 84NC0, 3NC0N7R4R4M UM 6471NH0 P3RD1D0. (Carlos e Beatriz estavam passeando de mãos dadas pela calçada da praça e, embaixo de um banco, encontraram um gatinho perdido.)

Já os adultos se veem às voltas com senhas bancárias, código de barras etc.

4. **Aplicação da Matemática no dia a dia:** Toda vez que uma senha é digitada em um computador, *tablet* ou *smartphone*, ou quando uma rede social é acessada, a criptografia é usada, ou seja, a Matemática garante que suas comunicações estejam seguras. Em aplicativos de mensagens instantâneas, por exemplo, as conversas são criptografadas.

Interdisciplinaridade

Para o desenvolvimento deste capítulo, seria conveniente a interação dos professores de Matemática (para comentar as bases binárias e as matrizes) e História (para comentar sobre o imperador Júlio César, as guerras e os eventos históricos mencionados nos diversos textos).

Texto de abertura (p. 113)

Professor, acreditamos que uma forma envolvente para introduzir o assunto seja por meio de exemplos. Inicie sua exposição mostrando formas simples de codificação, como as cifras de substituição e as cifras de transposição que descrevemos a seguir.

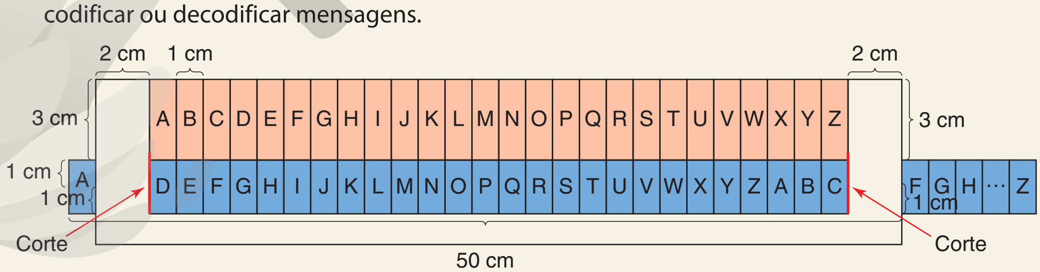
Cifras de substituição

Nesse tipo de cifra, uma letra é substituída por outra. Vejamos como exemplo o "código de César".

Na criptografia utilizada por Júlio César, a chave era: cada letra do alfabeto é associada à letra que está três posições adiante, isto é, a letra *A* é associada à letra *D*, a letra *B* é associada à letra *E*, a letra *C* é associada à letra *F*, ..., a letra *X* é associada à letra *A*, a letra *Y* é associada à letra *B* e a letra *Z* é associada à letra *C*. O trabalho de codificação e decodificação do "código de César" pode ser bastante simplificado com o auxílio de uma régua deslizante. Sugira aos estudantes que construam uma régua deslizante seguindo o passo a passo.

Passo a passo para a construção de uma régua deslizante

1. Desenhe e recorte, em uma folha de cartolina, um retângulo com 5 cm de largura e 30 cm de comprimento e uma fita com 1 cm de largura e 46 cm de comprimento.
2. No retângulo, usando uma caneta ou um lápis, marque divisões com 1 cm de largura, deixando 2 cm de cada lado no sentido do comprimento.
3. Marque, na fita, divisões com 1 cm de largura.
4. Faça dois cortes no retângulo, cada um medindo um pouco mais de um centímetro, como mostra a figura.
5. Escreva o alfabeto no retângulo e, na fita, escreva o alfabeto duas vezes. Os sinais como acentos, cedilha etc. não são considerados.
6. Passe a fita pelos cortes, como mostra a figura abaixo e pronto. Você já tem uma régua deslizante para codificar ou decodificar mensagens.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Cifras de transposição

Nas cifras de transposição, as letras não são substituídas, e sim reorganizadas. Por exemplo, para se codificar a frase "Precisamos de reforços urgentemente", um dos recursos a seguir pode ser usado.

Recurso 1

A frase será escrita da esquerda para a direita, em colunas e em uma tabela com o número de linhas e de colunas previamente combinado com o receptor (chave criptográfica) e, no fim da frase, se for necessário

MODERNA

para completar o número de colunas combinado, o emissor pode colocar letras que não formem uma palavra inteligível. Em seguida, os agrupamentos de letras são lidos em linha de cima para baixo.

Vamos escrever a frase da esquerda para a direita em uma tabela com 4 linhas e 9 colunas e acrescentar as letras N, R, T, U no fim da mensagem, apenas para confundir possíveis criptoanalistas.

P	I	O	R	R	U	N	E	N
R	S	S	E	Ç	R	T	N	R
E	A	D	F	O	G	E	T	T
C	M	E	O	S	E	M	E	U

A mensagem enviada fica assim:

PIORRUNENRSSEÇRTNREADFOGETTCMEOSEMEU

Para decodificar a mensagem, o receptor deve, simplesmente, fazer o processo inverso da codificação, ou seja, escrever o agrupamento de letras em linhas em uma tabela de quatro linhas e nove colunas e lê-la em colunas da esquerda para a direita.

Recurso 2

Note que a nossa mensagem possui 32 caracteres e acrescentamos os caracteres N, R, T e U para confundir. Assim, ficamos com 36 caracteres. Escolhem-se dois números cujo produto seja igual ao número de caracteres da mensagem, ou seja, 36. Como exemplo, tomamos os números 4 e 9.

Escolhe-se uma palavra com 4 ou com 9 letras, desde que não tenha letras repetidas, para ser a primeira linha (chave criptográfica) de uma tabela formada com as letras da mensagem. Em seguida, construímos uma tabela com 9 ou 4 colunas (dependendo da palavra-chave), sem contar a linha-chave, e escrevemos a mensagem da esquerda para a direita em linhas.

Considere a palavra MESQUINHO como chave.

M	E	S	Q	U	I	N	H	O
P	R	E	C	I	S	A	M	O
S	D	E	R	E	F	O	R	Ç
O	S	U	R	G	E	N	T	E
M	E	N	T	E	N	R	T	U

Colocam-se as letras da palavra-chave em ordem alfabética e escrevem-se, da esquerda para a direita, os agrupamentos de letras nas colunas abaixo de cada uma das letras da palavra-chave.

E	H	I	M	N	O	Q	S	U
R	M	S	P	A	O	C	E	I
D	R	F	S	O	Ç	R	E	E
S	T	E	O	N	E	R	U	G
E	T	N	M	R	U	T	N	E

A mensagem enviada fica assim:

RDSE MRTT SFEN PSOM AONR OÇEU CRRT EEUN IEGE

Para decodificar a mensagem, o receptor deve, simplesmente, fazer o processo inverso da codificação. Lembre-se sempre de que o receptor precisa conhecer as chaves de codificação e de decodificação.

Alguns comentários sobre criptografia apresentados no livro exigem conhecimentos de multiplicação de matrizes e matriz inversa; por esse motivo, sugerimos que o professor desenvolva este capítulo simultaneamente com as aulas sobre matrizes inversas. Se desejar desenvolvê-lo em outro momento do curso, faça uma breve revisão desses tópicos. (Veja uma sugestão mais adiante no tópico "A Matemática e a Estatística aplicadas à criptografia".)

A criptografia como tática de guerra (p. 114)

Comente a importância de manter uma informação em sigilo nas guerras e atividades militares e, com o transcorrer dos tempos, a sofisticação dos sistemas criptográficos, passando pelos escribas dos faraós, pelo bastão de Lícurgo (cítala), as cifras do imperador Júlio César, Alan Turing e a máquina *Enigma*.

A criptografia no domínio público (p. 115)

Professor, comente que este capítulo é dedicado à criptografia clássica. Atualmente estamos na era da criptografia moderna, da qual faz parte a criptografia quântica, fundamentada na parte da Física que estuda fenômenos associados aos átomos, moléculas, partículas subatômicas e quantização de energia. Essa evolução da criptografia foi impulsionada pelo fato de que todo canal clássico de comunicação pode ser monitorado, ou seja, usuários legítimos podem sofrer espionagem sem se darem conta.

Atividade (p. 116)

1 Respostas pessoais. Professor, verifique se a frequência com que os estudantes demonstram utilizar senhas convencionais de fácil decodificação é alta. Lembre-se de que este é o padrão de grande parte das pessoas no ambiente digital. Se houver, proporcionalmente, mais respostas que demonstrem alguma forma de fragilidade na segurança da informação dos estudantes, por exemplo, oriente-os sobre como tornar as senhas usadas mais fortes.

Comente que, mesmo com senhas muito fortes, não estamos seguros, pois existem programas que gravam tudo o que for digitado no teclado, permitindo aos *hackers* o acesso às senhas. Assim, utilizar soluções integrais de segurança ou um antivírus contribui para a proteção de dados secretos.

Explorando conexões (p. 117)

Depois da leitura do texto, se possível, reproduza o vídeo *Como os códigos de barras funcionam?* ou sugira que os estudantes assistam em casa. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1uJttCNfjLA>. Acesso em: 12 ago. 2020.

MODERNA

Atividade (p. 118)

2

Sequências	Dígito representado
0011001	1
0011011	2
0111101	3
0011101	4
1001110	5
1010000	6
1000100	7
1001000	8
1110100	9
1001110	5

A Matemática e a Estatística aplicadas à criptografia (p. 119)

Para discutir a ligação entre a criptografia, a Matemática e a Estatística, cite como exemplo as cifras de Hill, e nesse momento, faz-se necessária uma revisão sobre alguns tópicos do estudo das matrizes.

Solicite a participação dos estudantes, perguntando quem consegue definir uma matriz e como representá-la.

Chama-se matriz do tipo $m \cdot n$ (m por n) toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Tal tabela deve ser representada entre parênteses ( ) ou colchetes [ ].

Defina matriz e comente a representação A_{mxn} (matriz A do tipo m por n). Pergunte como é feita a multiplicação de matrizes.

> Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto de A por B, nessa ordem, é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$ de maneira que: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + ... + a_{in}b_{ni}$.

Explique a multiplicação de matrizes e comente que o produto de uma matriz A por uma matriz B, nessa ordem, só é possível se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B e que a matriz produto terá o número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz B.

Pergunte o que são matrizes inversas e esclareça que duas matrizes quadradas de ordem n são inversas quando o produto delas, em qualquer ordem, é igual à matriz identidade de ordem n e apresente a propriedade de que uma matriz só admite inversa se o seu determinante for diferente de zero.

Mostre, pelo menos, um exemplo de como calcular a inversa de uma matriz dada e, em seguida, discorra sobre as cifras de Hill, deixando claro que estamos trabalhando com uma forma simplificada do método.

Atividades (p. 121)

3 $A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 6 \end{bmatrix}$

Concluímos, portanto, que $A \cdot B = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$.

4 Seja $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$. Como A e B são inversas, temos que $A \cdot B = I_2$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 2a + c & 2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da igualdade das matrizes resulta o sistema

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \\ 2a + c = 0 \\ 3b + d = 0 \\ 2b + d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$ e $d = 3$.

Temos, então, a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Devemos encontrar a matriz $C = A + B$.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Concluímos, portanto, que $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

5 **a)** A matriz decodificadora é a inversa da matriz codificadora. Indicando a inversa de A por $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos:

$$A \cdot A-1 = I_2 - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1, c = -1 \text{ e } d = 2$$

Logo, a matriz decodificadora é: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Inicialmente, escrevemos a matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} \text{O} & \text{ESPAÇO} & \text{B} & \text{E} & \text{M} & \text{ESPAÇO} & \text{S} & \text{E} & \text{M} & \text{P} \\ \text{R} & \text{E} & \text{ESPAÇO} & \text{V} & \text{E} & \text{N} & \text{C} & \text{E} & . & \text{ESPAÇO} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 11 & 4 & 1 & 10 & 25 & 4 & 1 & 18 \\ 6 & 4 & 10 & 8 & 4 & 29 & 26 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

A seguir, efetuamos $A \cdot B$, obtendo a matriz C, que representa a mensagem codificada:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 & 11 & 4 & 1 & 10 & 25 & 4 & 1 & 18 \\ 6 & 4 & 10 & 8 & 4 & 29 & 26 & 4 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Logo, a mensagem codificada é representada pela matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 16 & 24 & 32 & 16 & 6 & 49 & 76 & 12 & 5 & 46 \\ 11 & 14 & 21 & 12 & 5 & 39 & 51 & 8 & 4 & 28 \end{bmatrix}$$

c) Efetuando $A^{-1} \cdot D$, obtemos a matriz E, que representa a mensagem decodificada:

$$E = A^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 & 12 & 22 & 21 & 36 & 24 \\ 20 & 7 & 13 & 11 & 28 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 9 & 10 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 4 & 1 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

A seguir, substituímos cada elemento da matriz E pela letra correspondente, segundo a tabela convencionada:

$$E = \begin{bmatrix} \text{B} & \text{O} & \text{A} & \text{ESPAÇO} & \text{V} & \text{I} \\ \text{A} & \text{G} & \text{E} & \text{M} & ! & \text{ESPAÇO} \end{bmatrix}$$

Logo, a mensagem é: BOA VIAGEM!

MODERNA

Atividade sugerida

(Fuvest-SP) A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo * corresponde a um espaço).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja **FUVEST** e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, respectivamente.

A matriz em que se escreve a mensagem é $M = \begin{bmatrix} F & U & V \\ E & S & T \end{bmatrix}$, que, numericamente, corresponde a $M = \begin{bmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{bmatrix}$. Para fazer a codificação da mensagem, é feito o produto de matrizes:

$$N = A \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{bmatrix}$$

O destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora com a matriz codificada recebida:

$$M = B \cdot N = \begin{bmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{bmatrix}.$$

a) Se a matriz codificadora é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, e a mensagem a ser transmitida é **ESCOLA**, qual é a mensagem codificada que o destinatário recebe?

A matriz em que se escreve a mensagem é $M = \begin{pmatrix} E & S & C \\ O & L & A \end{pmatrix}$,

que, numericamente, corresponde a $M = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix}$.

O destinatário recebe a matriz $N = A \cdot M =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$.

Assim, concluímos que o destinatário recebe a matriz

$N = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Se a matriz codificadora é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, e o destinatário recebe a matriz codificada $N = \begin{bmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{bmatrix}$, qual foi a mensagem enviada?

O enunciado informa que o destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora B com a matriz codificada N recebida, ou seja, $M = B \cdot N$.

Sabemos que $N = A \cdot M$ e desejamos isolar a matriz M, então:

$$N = A \cdot M \Rightarrow A^{-1} \cdot N = A^{-1} \cdot A \cdot M$$

$M = A^{-1} \cdot N$, portanto a matriz decodificadora B é a inversa da matriz codificadora A, isto é, $B = A^{-1}$. Precisamos, pois, encontrar a inversa da matriz A.

Seja $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$A \cdot B = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } c = -1$$

e

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \text{ e } d = 1$$

logo, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A mensagem enviada e dada pelo produto $M = B \cdot N$, assim:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 7 & 21 \\ 14 & 4 & 1 & 27 \end{pmatrix}$$

Efetuando as substituições das letras, tem-se:

$$M = \begin{pmatrix} S & E & G & U \\ N & D & A & * \end{pmatrix}.$$

Assim, concluímos que a mensagem enviada foi: **SEGUNDA**.

c) Nem toda matriz A é uma matriz eficaz para enviar mensagens. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}$, encontre 4 sequências de 4 letras de forma que as respectivas matrizes codificadas sejam sempre iguais a $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Seja $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a matriz codificada e $M = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ a matriz que contém a mensagem.

A matriz codificada é dada pelo produto $N = A \cdot M$, em que A é a matriz codificadora.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r - 7t & 2s - 7u \\ 4r - 14t & 4s - 14u \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 2r - 7t = 0 \\ 4r - 14t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{2r}{7}$, como os números associados às letras são inteiros positivos, tem-se, necessariamente, que r é um múltiplo de 7, assim $r \in \{7, 14, 21\}$ e $(r, t) \in \{(7, 2); (14, 4); (21, 6)\}$, ou seja, podemos escolher o par (r, t) de 3 maneiras diferentes.

$\begin{cases} 2s - 7u = 0 \\ 4s - 14u = 0 \end{cases} \Rightarrow u = \dfrac{2s}{7}$, como os números associados às letras são inteiros positivos, tem-se, necessariamente, que s é um múltiplo de 7, assim $s \in \{7, 14, 21\}$ e $(s, u) \in \{(7, 2); (14, 4); (21, 6)\}$, ou seja, podemos escolher o par (s, u) de 3 maneiras diferentes.

Assim, existem $3 \cdot 3 = 9$ maneiras diferentes para se representar a matriz M. Abaixo seguem quatro representações da matriz M.

$M = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & G \\ B & B \end{pmatrix}$, representando a sequência *GGBB*;

$M = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G & N \\ B & D \end{pmatrix}$, representando a sequência *GNBD*;

MODERNA

$M = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & G \\ D & B \end{pmatrix}$, representando a sequência *NGDB*;

$M = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & N \\ D & D \end{pmatrix}$, representando a sequência *NNDD*.

Assim, concluímos que *GGBB*, *GNBD*, *NGDB* e *NNDD* são quatro sequências de quatro letras representadas pela matriz *M*.

Os números primos e a criptografia (p. 122)

Pergunte aos estudantes sob que circunstâncias um número natural é classificado como número primo.

Um número natural é primo se, e somente se, possui exatamente dois divisores naturais distintos.

Após relembrar a definição de números primos naturais, explique a importância deles na criptografia, comentando a dificuldade em fatorar um produto de números primos muito grandes, uma vez que não existe uma fórmula para determiná-los.

Um método da criptoanálise (p. 122)

Ao discutir a criptoanálise, convém explicar que é um estudo de técnicas de decodificação sem o conhecimento prévio da chave que as gerou. Alguns tipos de criptografia em que as letras são simplesmente substituídas ou transpostas, como as cifras de César ou as cifras de transposição citadas nas páginas LXXVI e LXXVII deste Manual, podem ser muito frágeis e decodificados apenas pela frequência relativa das letras.

A pessoa ou entidade que tentar decodificar, via internet, um código sem autorização estará cometendo um crime cibernético.

Atividade (p. 124)

6 Calculando as frequências relativas desses símbolos, temos:

Símbolo	Frequência absoluta	Frequência relativa
ϟ	171	$\frac{171}{4.000} \simeq 4{,}3\%$
⌀	495	$\frac{495}{4.000} \simeq 12{,}4\%$
□	262	$\frac{262}{4.000} \simeq 6{,}6\%$
^	193	$\frac{193}{4.000} \simeq 4{,}8\%$
|	430	$\frac{430}{4.000} \simeq 10{,}8\%$

Comparando essas frequências relativas com as frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa, deduzimos que, provavelmente, os símbolos ϟ, ⌀, □, ^ e | representem as letras T, E, R, M e O, respectivamente. Assim, concluímos que, provavelmente, a sequência de símbolos ϟ⌀□□⌀^|ϟ| represente a palavra TERREMOTO.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Explorando conexões (p. 125)

Professor, esclareça que o trabalho executado em *home office* tem crescido exponencialmente no mundo. Isso implica maior vulnerabilidade e, consequentemente, necessidade de mais segurança no compartilhamento de informações na tentativa de evitar ataques cibernéticos. Comente que, por motivos como este, as técnicas de criptografia têm evoluído a níveis subatômicos.

Sugestão

O texto "Criptografia quântica" trata da troca de informações criptografadas, fundamentada na Física quântica. Disponível em: <https://www.gta.ufrj.br/grad/01_2/cripto/>. Acesso em: 26 ago. 2020.

Texto complementar (p. 126)

Ao trabalhar o texto desta seção, discuta com os estudantes as relações entre segurança da informação e segurança nacional. Comente como as nações, mesmo fora do contexto de guerra, competem para desenvolver tecnologias de interpretação e decodificação de segredos de outras nações.

Sugestão

O texto "CIA era dona da maior empresa de criptografia do mundo, diz jornal" aborda a criptografia na espionagem internacional. Disponível em: <https://noticias.r7.com/internacional/cia-era-dona-da-maior-empresa-de-criptografia-do-mundo-diz-jornal-17022020>. Acesso em: 26 ago. 2020.

Entendimento do texto (p. 127)

1. Era uma máquina usada para criptografar todas as comunicações militares alemãs.
2. Os documentos continham cópias dos mecanismos de encriptação que permitiram aos poloneses construírem uma réplica da Enigma.
3. 105.456 combinações
4. Rejewski descobriu que cada uma dessas 105.456 combinações gerava um único padrão matemático, como um DNA ou impressão digital usado por um detetive para rastrear um suspeito. Ele tentou então combinar uma chave de três letras para mensagens interceptadas com padrões conhecidos. Se Rejewski encontrasse uma correspondência, ele poderia decifrar a mensagem. Mas, se a mensagem era muito curta e o padrão era difícil de identificar por meio de conjecturas, o número de possibilidades era reduzido.
5. No final de 1938, os alemães aperfeiçoaram a Enigma, aumentando significativamente o número possível de configurações. Os poloneses não tinham mais os recursos suficientes para lidar com as mudanças. Além disso, os matemáticos poloneses tiveram de fugir do país.
6. Embora várias equipes tenham colaborado para decifrar o código, coube ao matemático inglês Alan Turing e à sua equipe, no Bletchley Park (norte de Londres, na Inglaterra), a descoberta da chave que decriptou o código Enigma.

MODERNA

MANOEL PAIVA
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André (SP). Professor.

EWERTON PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (RJ). Professor.

BETO PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (RJ).
Professor e coordenador pedagógico.

RODRIGO PAIVA
Doutor em Ciências Sociais pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Mestre em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Pós-Graduado em Aprendizagem Motora pela Universidade de São Paulo.
Bacharel em Educação Física pela Universidade Nove de Julho (SP).
Licenciado em Educação Física pela Universidade Nove de Julho (SP).
Professor e coordenador de cursos universitários.

MODERNA PLUS

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS E MATEMÁTICA

OBRA ESPECÍFICA:
CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS EM DIÁLOGO COM A MATEMÁTICA

Áreas do conhecimento:
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Glaucia Teixeira
Edição: Juliana Albuquerque, Juliana Rodrigues de Queiroz
Assistência editorial: Elizangela Gomes Marques
Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Coordenação de produção: Patricia Costa
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Otávio dos Santos
Capa: Daniel Messias
Fotos: Chuanchai Pundej/EyeEm/Getty Images
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine, Daiane Alves Ramos
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Ana Maria Marson, Arali Lobo Gomes, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Fabiana Nogueira, Elisa Rojas, Vanessa Trindade
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna plus : ciências humanas e sociais aplicadas e matemática / Manoel Paiva...[et al.]. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Outros autores: Ewerton Paiva, Beto Paiva, Rodrigo Paiva
"Obra específica: Ciências humanas e sociais aplicadas em diálogo com a matemática"

1. Ciências humanas (Ensino médio) 2. Ciências sociais (Ensino médio) 3. Matemática (Ensino médio) I. Paiva, Manoel. II. Paiva, Ewerton. III. Paiva, Beto. IV. Paiva, Rodrigo.

20-38611 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livro-texto : Ensino médio 373.19

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

APRESENTAÇÃO

Videotutorial

- Assista ao videotutorial de apresentação do volume.

As Ciências Humanas e Sociais Aplicadas estudam o comportamento humano nos contextos das sociedades. Permeiam todas as relações entre cidadãos, sejam elas culturais, artísticas, ambientais, econômicas, jurídicas, profissionais, políticas etc.

Neste livro, destacamos o diálogo entre essas relações e a Matemática, com o objetivo de contribuir para posicionamentos e tomadas de decisão fundamentados em argumentações lógicas e consistentes.

Teremos alcançado nosso objetivo se, ao final da leitura dos capítulos, você tiver compreendido que a Matemática pode orientá-lo também diante de questões sociais, de forma ética, solidária e responsável, com consciência de seus direitos e deveres.

Os autores

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

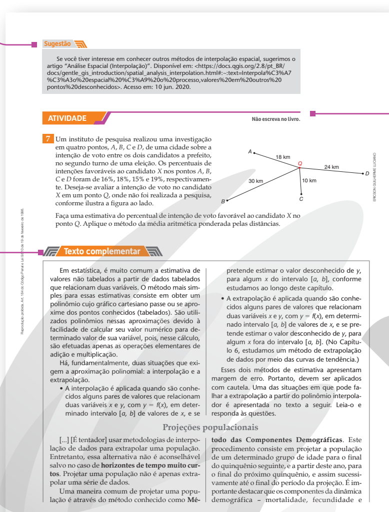
CONHEÇA SEU LIVRO

Os capítulos iniciam com uma imagem que introduz o tema tratado.

O boxe **Observação** traz uma breve explicação sobre um termo ou expressão do texto.

A seção **Explorando conexões** relaciona o tema do capítulo com outros contextos, além de trabalhar metodologias de pesquisa.

O boxe **Sugestão** apresenta livros, artigos, *sites*, filmes que pretendem ampliar seu repertório a respeito do tema em estudo.



A seção **Atividades** propõe exercícios que desenvolvem os temas trabalhados.

A seção **Atividade complementar** traz propostas que envolvem recursos como vídeos, *softwares* e acesso à internet.

A seção **Texto complementar** traz um texto de terceiros que amplia o debate sobre o tema do capítulo e é acompanhado de atividades, sob o título **Entendimento do texto**.

Há, ainda, atividades de **pesquisa** e aquelas que podem ser feitas **em dupla ou em grupo**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Objetivos

O entendimento da dinâmica das sociedades humanas depende da análise de interdependência dos inúmeros fatores que a compõem. Este livro é uma introdução às relações qualitativas e quantitativas dessa dinâmica. Podemos citar os seguintes objetivos deste trabalho:

- Destacar as afinidades entre Matemática e Arte na pintura e no cinema por meio da perspectiva geométrica. Como objetivo suplementar, pretendemos desenvolver a habilidade de desenhar figuras simples estudadas em Geometria.
- Apresentar as primeiras ideias sobre as metodologias de pesquisa, tais como: revisão bibliográfica (Estado da Arte), entrevistas, grupo focal, análise de mídias tradicionais (princípios de análise de discurso multimodal), análise de mídias sociais (análise das métricas das mídias e princípios de análise de discurso multimodal) e pesquisa-ação.
- Discutir políticas públicas, destacando o posicionamento do cidadão perante seus direitos e deveres.
- Desenvolver a progressão do pensamento científico como uma estrutura de pesquisa para todas as áreas do conhecimento.
- Estimular a leitura de textos científicos das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, valorizando seu entendimento e promovendo debates.
- Apresentar a Matemática como ferramenta de orientação e localização ao longo da história: da bússola ao GPS.
- Modelar fenômenos de várias áreas do conhecimento, por meio da Matemática, rompendo barreiras que possam separá-la das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.
- Trabalhar o pensamento computacional, que propõe a decomposição de um problema em problemas menores, a identificação de padrões, a abstração para uma situação geral e a criação de algoritmos ou a utilização de algoritmos já estabelecidos.
- Possibilitar a compreensão das medidas como parte das relações sociais humanas, desde medições cotidianas, como o cálculo do consumo de energia elétrica de um ferro de passar roupas, até o cálculo do IDH de um país.
- Introduzir conceitos básicos da linguagem digital dos computadores e destacar suas aplicações na rotina social, como equipamento de trabalho, veículo de comunicação ou, simplesmente, forma de lazer.
- Estabelecer métodos estimativos da Estatística, por meio da interpolação e da extrapolação, propiciando o entendimento de um mundo cada vez mais entremeado de números e previsões.
- Apresentar um estudo com extensão suficiente para o entendimento de linguagens criptografadas presentes nas relações sociais, seja nos códigos de barras, em senhas pessoais, usadas para acessar *e-mail*, contas bancárias, arquivos secretos armazenados em mídias digitais e até mesmo na impressão de cédulas de dinheiro.
- Debater as desigualdades sociais como obstáculo para o desenvolvimento do país.

Justificativa

Cada vez mais as Ciências são estudadas de forma integrada, sem uma nítida separação entre Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, Matemática e suas Tecnologias e Ciências da Natureza e suas Tecnologias, que se fundem em muitos aspectos. Basta observar novas áreas de estudo e trabalho, como Engenharia Ambiental, Engenharia de Segurança do Trabalho, Engenharia Biomédica, Geografia Matemática, Biofísica e muitas outras.

Esse movimento, por si só, justifica os objetivos citados acima, em que destacamos o diálogo da Matemática com as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, possibilitando uma visão mais ampla dos objetos de estudo.

Há ainda o aspecto didático-pedagógico, reforçando a interdisciplinaridade dos conteúdos escolares, além de suas aplicações nas diversas áreas do universo social.

Sobretudo, almejamos a autonomia intelectual, que resulta do raciocínio lógico-científico, do qual enfatizamos o pensamento computacional.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O livro e a A BNCC

A seguir, estão destacadas as competências gerais da Educação Básica trabalhadas nos capítulos.

Competências gerais da Educação Básica	Capítulos
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.	1, 3, 5
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.	1, 2, 4, 5, 7, 8
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.	1, 2, 5, 6, 7, 8
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.	3, 4, 5
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.	3, 4, 6, 7
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.	Todos
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.	Todos
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.	Todos

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

São apresentadas abaixo as principais competências específicas e habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e de Matemática e suas Tecnologias desenvolvidas ao longo da obra.

Competências específicas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Habilidades	Capítulos
1. Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.	**(EM13CHS101)** Analisar e comparar diferentes fontes e narrativas expressas em diversas linguagens, com vistas à compreensão e à crítica de ideias filosóficas e processos e eventos históricos, geográficos, políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais.	1, 2, 3, 5, 6, 8
	(EM13CHS102) Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos.	1, 3, 7, 8
	(EM13CHS103) Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros).	Todos
	(EM13CHS104) Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.	1, 2, 8
	(EM13CHS105) Identificar, contextualizar e criticar tipologias evolutivas (populações nômades e sedentárias, entre outras) e oposições dicotômicas (cidade/campo, cultura/natureza, civilizados/bárbaros, razão/emoção, material/virtual etc.), explicitando suas ambiguidades.	2, 7, 8
	(EM13CHS106) Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8
2. Analisar a formação de territórios e fronteiras em diferentes tempos e espaços, mediante a compreensão das relações de poder que determinam as territorialidades e o papel geopolítico dos Estados-nações.	**(EM13CHS201)** Analisar e caracterizar as dinâmicas das populações, das mercadorias e do capital nos diversos continentes, com destaque para a mobilidade e a fixação de pessoas, grupos humanos e povos, em função de eventos naturais, políticos, econômicos, sociais, religiosos e culturais, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a esses processos e às possíveis relações entre eles.	3
	(EM13CHS202) Analisar e avaliar os impactos das tecnologias na estruturação e nas dinâmicas de grupos, povos e sociedades contemporâneos (fluxos populacionais, financeiros, de mercadorias, de informações, de valores éticos e culturais etc.), bem como suas interferências nas decisões políticas, sociais, ambientais, econômicas e culturais.	3, 8
	(EM13CHS204) Comparar e avaliar os processos de ocupação do espaço e a formação de territórios, territorialidades e fronteiras, identificando o papel de diferentes agentes (como grupos sociais e culturais, impérios, Estados Nacionais e organismos internacionais) e considerando os conflitos populacionais (internos e externos), a diversidade étnico-cultural e as características socioeconômicas, políticas e tecnológicas.	3, 8

Continua na próxima página.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.	**(EM13CHS301)** Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.	3, 6, 7
	(EM13CHS302) Analisar e avaliar criticamente os impactos econômicos e socioambientais de cadeias produtivas ligadas à exploração de recursos naturais e às atividades agropecuárias em diferentes ambientes e escalas de análise, considerando o modo de vida das populações locais – entre elas as indígenas, quilombolas e demais comunidades tradicionais –, suas práticas agroextrativistas e o compromisso com a sustentabilidade.	3, 6
	(EM13CHS303) Debater e avaliar o papel da indústria cultural e das culturas de massa no estímulo ao consumismo, seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à percepção crítica das necessidades criadas pelo consumo e à adoção de hábitos sustentáveis.	1
	(EM13CHS304) Analisar os impactos socioambientais decorrentes de práticas de instituições governamentais, de empresas e de indivíduos, discutindo as origens dessas práticas, selecionando, incorporando e promovendo aquelas que favoreçam a consciência e a ética socioambiental e o consumo responsável.	3, 6
	(EM13CHS306) Contextualizar, comparar e avaliar os impactos de diferentes modelos socioeconômicos no uso dos recursos naturais e na promoção da sustentabilidade econômica e socioambiental do planeta (como a adoção dos sistemas da agrobiodiversidade e agroflorestal por diferentes comunidades, entre outros).	3, 6
4. Analisar as relações de produção, capital e trabalho em diferentes territórios, contextos e culturas, discutindo o papel dessas relações na construção, consolidação e transformação das sociedades.	**(EM13CHS401)** Identificar e analisar as relações entre sujeitos, grupos, classes sociais e sociedades com culturas distintas diante das transformações técnicas, tecnológicas e informacionais e das novas formas de trabalho ao longo do tempo, em diferentes espaços (urbanos e rurais) e contextos.	2, 5, 8
	(EM13CHS402) Analisar e comparar indicadores de emprego, trabalho e renda em diferentes espaços, escalas e tempos, associando-os a processos de estratificação e desigualdade socioeconômica.	4, 6
	(EM13CHS403) Caracterizar e analisar os impactos das transformações tecnológicas nas relações sociais e de trabalho próprias da contemporaneidade, promovendo ações voltadas à superação das desigualdades sociais, da opressão e da violação dos Direitos Humanos.	2, 4, 5, 8
	(EM13CHS404) Identificar e discutir os múltiplos aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial, os jovens, levando em consideração, na atualidade, as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais.	2, 5, 6, 8
5. Identificar e combater as diversas formas de injustiça, preconceito e violência, adotando princípios éticos, democráticos, inclusivos e solidários, e respeitando os Direitos Humanos.	**(EM13CHS502)** Analisar situações da vida cotidiana, estilos de vida, valores, condutas etc., desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificar ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.	3, 4
	(EM13CHS503) Identificar diversas formas de violência (física, simbólica, psicológica etc.), suas principais vítimas, suas causas sociais, psicológicas e afetivas, seus significados e usos políticos, sociais e culturais, discutindo e avaliando mecanismos para combatê-las, com base em argumentos éticos.	3, 4
	(EM13CHS504) Analisar e avaliar os impasses ético-políticos decorrentes das transformações culturais, sociais, históricas, científicas e tecnológicas no mundo contemporâneo e seus desdobramentos nas atitudes e nos valores de indivíduos, grupos sociais, sociedades e culturas.	2, 3
6. Participar do debate público de forma crítica, respeitando diferentes posições e fazendo escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.	**(EM13CHS604)** Discutir o papel dos organismos internacionais no contexto mundial, com vistas à elaboração de uma visão crítica sobre seus limites e suas formas de atuação nos países, considerando os aspectos positivos e negativos dessa atuação para as populações locais.	3
	(EM13CHS605) Analisar os princípios da declaração dos Direitos Humanos, recorrendo às noções de justiça, igualdade e fraternidade, identificar os progressos e entraves à concretização desses direitos nas diversas sociedades contemporâneas e promover ações concretas diante da desigualdade e das violações desses direitos em diferentes espaços de vivência, respeitando a identidade de cada grupo e de cada indivíduo.	3
	(EM13CHS606) Analisar as características socioeconômicas da sociedade brasileira – com base na análise de documentos (dados, tabelas, mapas etc.) de diferentes fontes – e propor medidas para enfrentar os problemas identificados e construir uma sociedade mais próspera, justa e inclusiva, que valorize o protagonismo de seus cidadãos e promova o autoconhecimento, a autoestima, a autoconfiança e a empatia.	2, 3, 4, 6, 7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias	Habilidades	Capítulos
1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	2, 6, 7
	(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.	2, 3, 6
	(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.	4, 5
	(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.	3, 4, 6, 7
	(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	1, 5
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	**(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.	2, 6, 7, 8
	(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.	2, 3, 6, 7, 8
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	6, 7, 8
	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	3, 6
	(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.	2, 3, 4

Continua na próxima página.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

	(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	1, 3, 4
	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	5, 8
	(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.	3, 4
	(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.	3, 5, 8
	(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).	3, 7
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	**(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.	2, 6, 7
	(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.	2
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.	6
	(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.	6
	(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.	3
	(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.	3
	(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.	1
	(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	2, 3
	(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.	4, 6

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUMÁRIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO 1

MATEMÁTICA E ARTE: A PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

GEORGES SEURAT - MUSEU DE ARTE METROPOLITANO, NOVA YORK

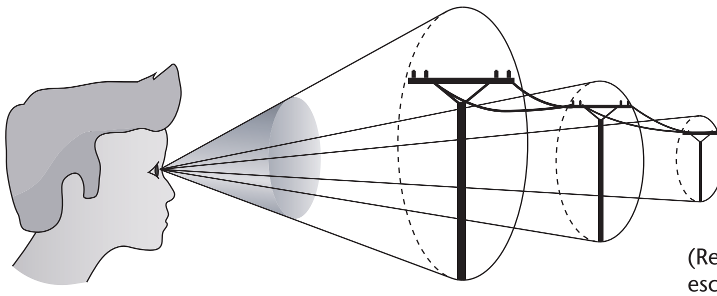
A intensidade das cores ajuda a criar a ilusão de profundidade em pinturas. (SEURAT, Georges. *Study for a sunday on La Grande Jatte*. 1885. Óleo sobre tela, 0,7 m × 1,04 m. Museu de Arte Metropolitano, Nova York.)

Você consegue estabelecer uma relação entre Matemática e Arte? Se existe alguma, onde acha possível verificá-la?

Ainda que essa relação não pareça evidente, Matemática e Arte estiveram lado a lado ao longo da História.

Na pintura artística, por exemplo, destaca-se a noção de perspectiva, técnica de desenho e pintura que causa a ilusão tridimensional e de distância dos objetos representados em superfícies bidimensionais. Os gregos e os romanos, durante a Antiguidade Clássica, produziam pinturas mediante uma perspectiva puramente intuitiva, a ilusão de profundidade se dava pela variação do tamanho e da intensidade das cores dos objetos retratados sobre uma superfície bidimensional: quanto mais distantes, menores eram retratados os objetos e menos intensas eram suas cores.

Nesse mesmo período da história, por volta do ano 300 a.C., o matemático grego Euclides de Alexandria publicou um tratado sobre a geometria da visão, reconhecido como a primeira elaboração em torno do que hoje chamamos de Óptica Geométrica. Euclides define o campo visual como um conjunto de semirretas divergentes (raios visuais), com origem no olho do observador. Essas semirretas formam um cone geométrico, chamado cone visual, em cuja base se encontra a imagem do objeto observado. Assim, quanto mais distante estiver o objeto, menor será o ângulo visual.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Embora esse trabalho de Euclides tenha sido um marco na aproximação entre a Matemática e a pintura artística, o início efetivo da relação de ambas só ocorreu no século XV, quando os artistas renascentistas italianos Filippo Brunelleschi (1377-1446) e Leon Battista Alberti (1404-1472) estabeleceram um método geométrico para desenhos em perspectiva, fundamentado no conceito de ponto de fuga.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O ponto de fuga

Em um desenho, para dar a ideia de uma estrada longa e reta, representamos suas margens por traços que convergem para um mesmo ponto, chamado de **ponto de fuga (PF)**.

DENIS BELITSKY/SHUTTERSTOCK

Em fotografias, também é possível identificar o ponto de fuga.

A descoberta do ponto de fuga teria surgido durante o Renascimento (séculos XIV-XVI) por meio de estudos do arquiteto e escultor italiano Filippo Brunelleschi. A partir daí, a representação da realidade por meio de desenhos passou a ter um aspecto geométrico exato. Ao mostrar os objetos no espaço em suas posições relativas reais, com dimensões proporcionais às da imagem observada dos objetos reais, produzia-se a ilusão tridimensional. Essa forma de representação passou a se chamar desenho em perspectiva.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY - THE NETHERLANDS. ALL RIGHTS RESERVED - COLEÇÃO PARTICULAR

Nessa obra, o artista cria, por meio da perspectiva e de pontos de fuga, uma realidade impossível, na qual os prédios servem de apoio aos livros e a rua termina em uma mesa, que serve de apoio a objetos do cotidiano. (ESCHER, M. C. *Still life and street*. 1937. Xilogravura, 48,7 cm × 49 cm. The M.C. Escher Company, Baarn, Países Baixos.)

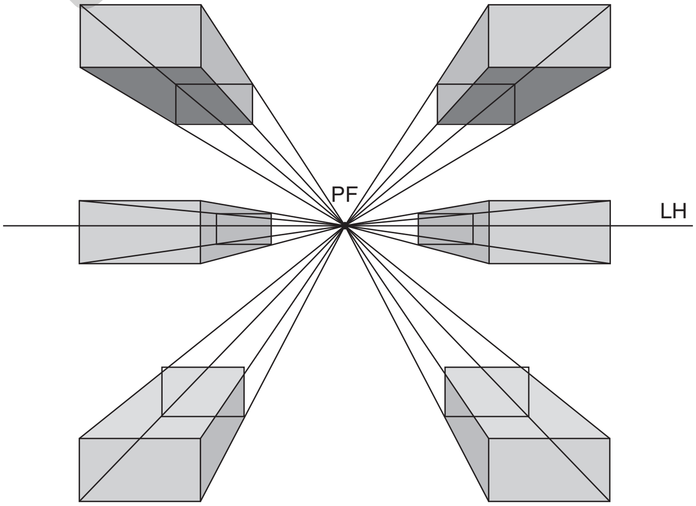
Vamos exercitar o desenho em perspectiva, inicialmente sem a preocupação com as dimensões do objeto, observando apenas a posição dele em relação ao plano horizontal de visão (da altura de nossos olhos). Para esse exercício, escolhemos uma figura bem simples: o paralelepípedo reto-retângulo.

Com um único ponto de fuga

Inicialmente, representamos uma reta horizontal, chamada **linha do horizonte (LH)**, pela qual passa o plano horizontal na altura dos nossos olhos. Em seguida:

- desenhamos um retângulo com dois lados paralelos à linha do horizonte (LH);
- assinalamos o ponto de fuga (PF) sobre a linha do horizonte;
- traçamos linhas retas unindo o PF aos vértices do retângulo (essas linhas são chamadas de **linhas de fuga**);
- desenhamos um retângulo menor que o original, com vértices sobre as linhas de fuga.

Observe alguns exemplos:



ERICSON GUILHERME LUCIANO

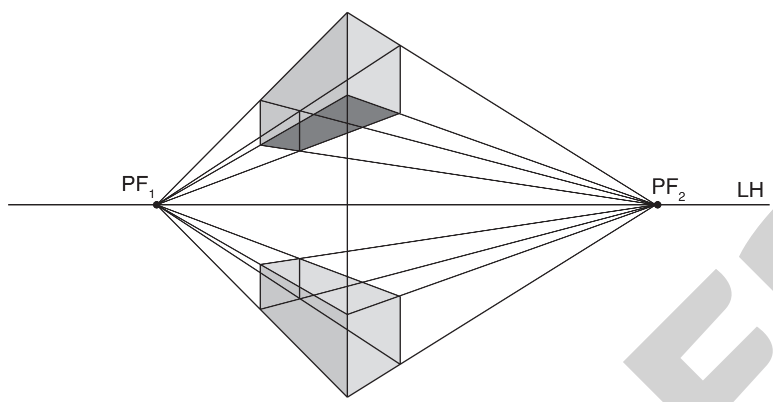
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Com dois pontos de fuga

Inicialmente, representamos a linha do horizonte (LH). Em seguida:

- desenhamos um segmento contido em uma reta perpendicular à LH;
- assinalamos dois pontos de fuga distintos (PF_1 e PF_2) sobre a linha do horizonte;
- traçamos linhas retas (linhas de fuga) unindo cada ponto de fuga aos extremos do segmento;
- desenhamos dois novos segmentos, paralelos ao segmento original, com extremos nas linhas de fuga já traçadas;
- desenhamos as linhas de fuga pelos extremos dos novos segmentos traçados;
- obtemos o lado de uma das faces que falta do paralelepípedo por meio de uma paralela ao segmento original.

Observe o exemplo:



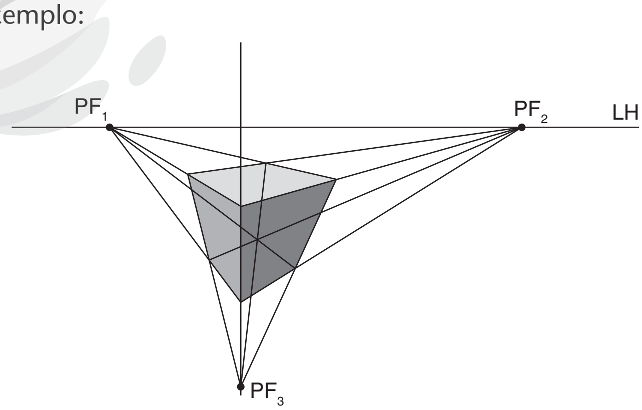
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Com três pontos de fuga

Inicialmente, representamos a linha do horizonte (LH). Em seguida:

- assinalamos dois pontos de fuga distintos sobre a LH;
- desenhamos uma reta perpendicular à LH em um ponto entre os pontos de fuga assinalados (também poderia ser uma concorrente qualquer à LH, em vez de uma perpendicular);
- nessa perpendicular, assinalamos o terceiro ponto de fuga, fora da LH;
- nessa perpendicular desenhamos um segmento de reta, por exemplo, abaixo da LH e acima do terceiro ponto de fuga;
- pelos extremos do segmento desenhado, traçamos as linhas de fuga;
- sobre duas linhas de fuga concorrentes, assinalamos dois pontos, um em cada linha;
- por esses dois pontos traçamos as linhas de fuga;
- pelos pontos de intersecção das linhas de fuga traçamos novas linhas de fuga.

Observe o exemplo:



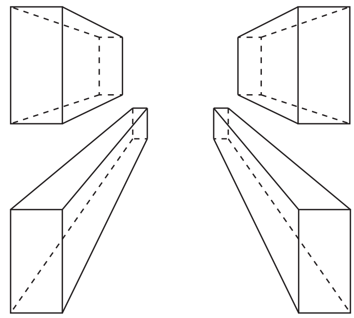
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

1 Usando um único ponto de fuga, reproduza em seu caderno a figura abaixo, em que são representados quatro paralelepípedos reto-retângulos.



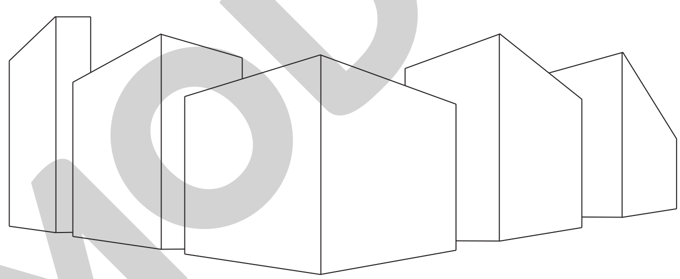
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

2 Usando a figura que você criou na atividade anterior, desenhe no caderno o interior de uma cozinha, tal que na parede lateral à esquerda do observador haja dois armários: um suspenso, com três portas, e o outro apoiado no piso, com quatro portas, sobre o qual haja um balcão. E, na parede lateral à direita do observador, deve haver um armário suspenso, com três portas, sob o qual haja um balcão, no qual se encaixam a pia, a máquina de lavar louças e o fogão.

3 Usando um único ponto de fuga, faça um desenho representando uma rua reta, plana e horizontal, margeada por prédios.

4 Usando dois pontos de fuga, desenhe uma mesa de quatro pés e tampo retangular.

5 Usando dois pontos de fuga, reproduza em seu caderno a figura abaixo, em que são representados seis paralelepípedos reto-retângulos apoiados em um mesmo plano.



6 Imagine duas ruas que se cruzam tal que a intersecção de ambas seja um quadrado e que você esteja em um vértice desse quadrado olhando para o vértice diagonalmente oposto, onde vê duas calçadas, uma em cada rua, margeadas por prédios. A partir da figura que você reproduziu em seu caderno na atividade anterior, desenhe a cena formada pelas duas ruas, as calçadas e os prédios que você observa.

7 Usando três pontos de fuga, faça um desenho que represente uma peça do mobiliário de sua casa.

8 Usando três pontos de fuga, desenhe alguns prédios, lado a lado, vistos de cima, de modo que, do prédio mais próximo do observador, sejam vistas a laje superior e duas paredes laterais.

Sugestão

Se você não conhece o trabalho do diretor de cinema Stanley Kubrick, sugerimos que, antes da leitura do texto a seguir, assista ao vídeo *Kubrick – One-Point perspective*. Ele pode ajudá-lo a entender melhor os enquadramentos desse notável cineasta. Disponível em: <https://vimeo.com/48425421>. Acesso em: 27 maio 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

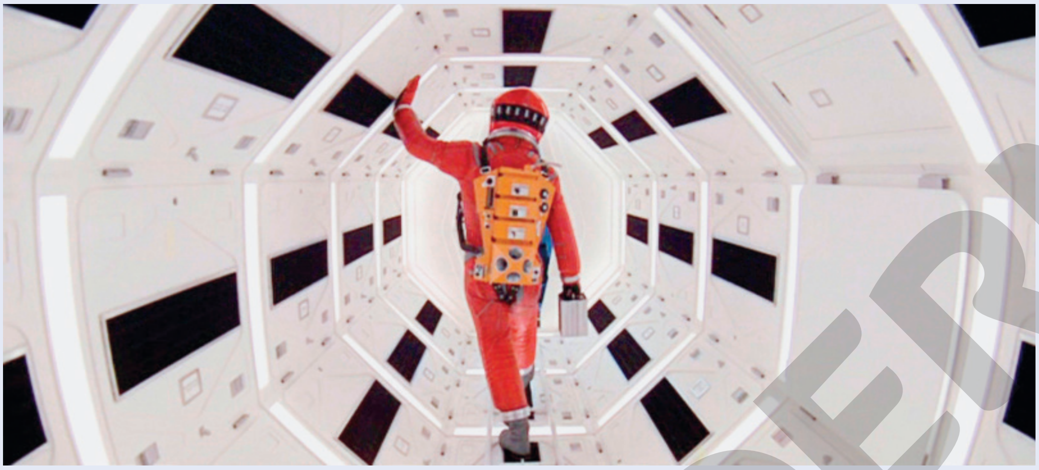
Explorando conexões

A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick

Kubrick era um gênio do cinema. Tal fato se corrobora em seus filmes – são considerados obras de arte e clássicos do cinema. O diretor americano também é conhecido por seu perfeccionismo, desde o roteiro – repetindo dezenas de vezes *takes* de seus filmes – até mesmo na parte visual de suas obras. *2001: A Space Odyssey (2001: Uma Odisseia no Espaço*, 1968) por exemplo, levou 5 anos para ser feita e é até hoje, 50 anos após seu lançamento, considerada por muitos o melhor filme de ficção científica já filmado.

Observação

Enquadramento cinematográfico é o ato de selecionar a parte do cenário a ser filmada.



BILDARCHIV MONHEIM GMBH/FLORIAN MONHEIM/AKG-IMAGES/ALBUM/FOTOARENA

Cena clássica do filme *2001: Uma odisseia no espaço* (1968), em que é possível identificar um ponto de fuga.

Stanley Kubrick era um homem muito à frente de seu tempo; essa frase é extremamente clichê, mas é necessária para descrevê-lo. A construção de suas obras cinematográficas se constituem através da síntese de diversos elementos de parelha importância. Os elementos visuais do filme, bem como os enquadramentos, a perspectiva e os pontos de fuga que Kubrick utiliza são essenciais para sua obra.

Quando assistimos a um filme ficcional, é feito um pacto entre o espectador e o diretor para causar o efeito de que aquilo é real. Uma das maneiras que Kubrick utiliza para produzir esse efeito é utilizar elementos em seus enquadramentos que contribuam para essa extensão da realidade. Ele resgata a perspectiva da pintura renascentista com pontos de fuga – através de linhas que se direcionam para um único ponto. A pintura renascentista e a fotografia (bem como a cinematografia) têm o mesmo objetivo: alcançar a tridimensionalidade a partir de imagens bidimensionais.

Imagem do ponto de fuga na arte renascentista, no interior da Basílica de São Lourenço, construída entre 1419 e 1460, em Florença, na Itália. Foto de 2019.

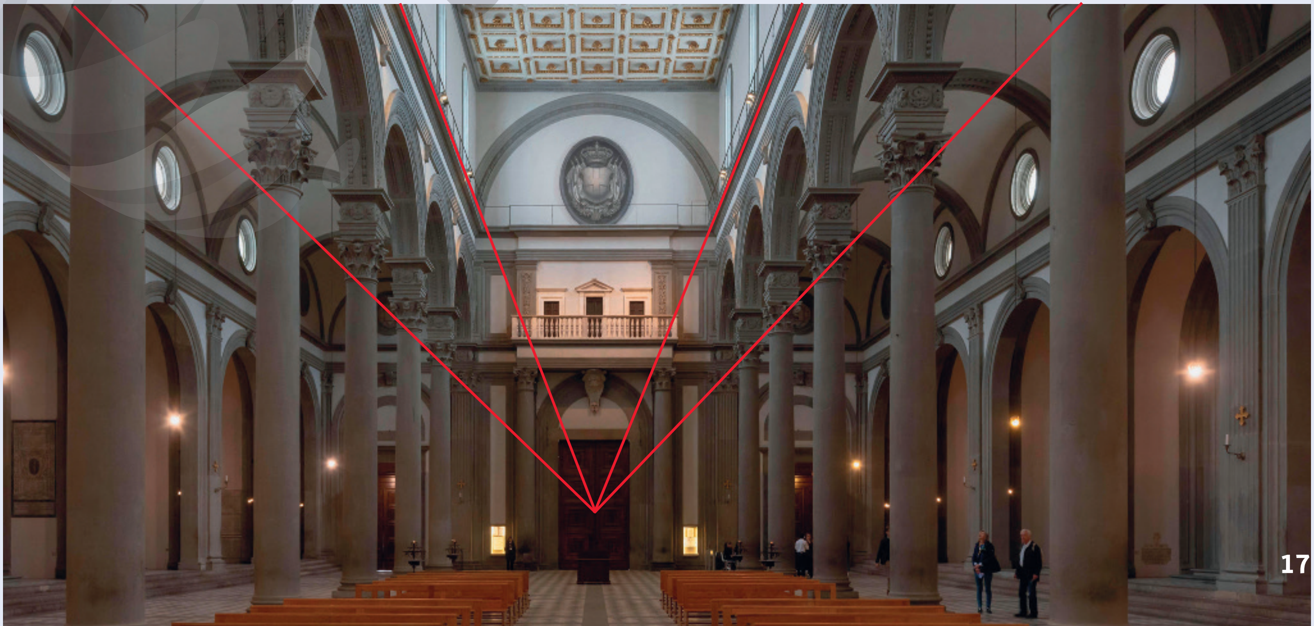


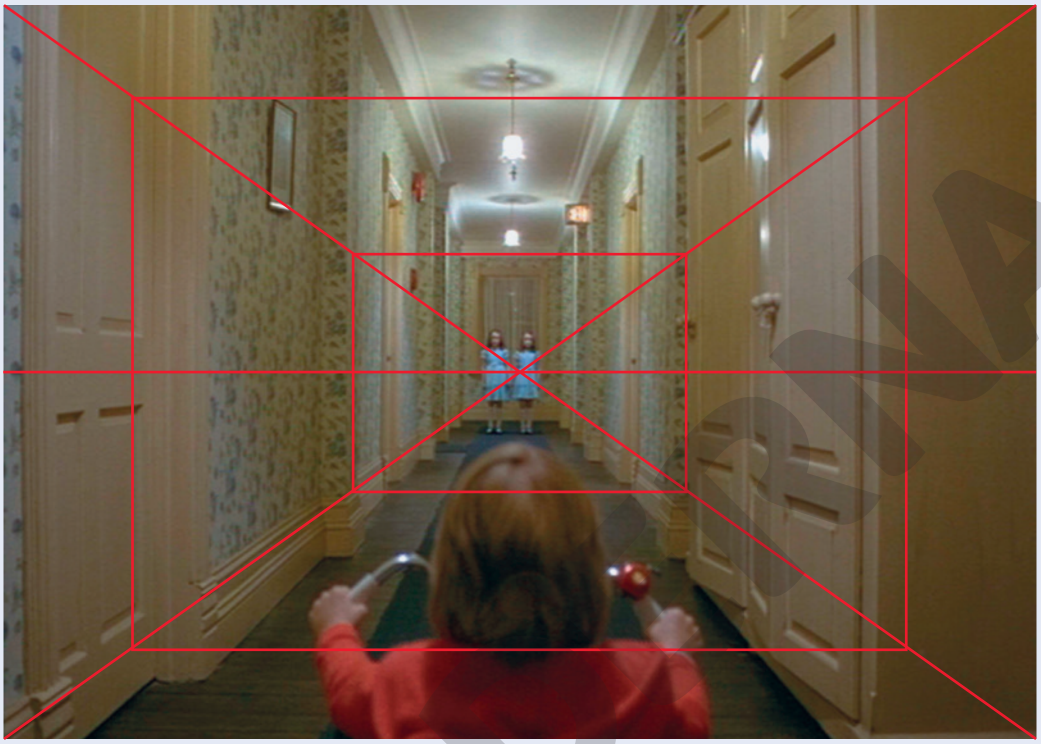
ILUSTRAÇÃO: ERICSON GUILHERME LUCIANO

ALAMY/FOTOARENA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Kubrick utiliza os ângulos de tomada, simetria, linhas imaginárias, centralização e profundidade para causar no espectador diversos efeitos, como por exemplo suspense e tensão. Um exemplo evidente é o filme *The Shining* (*O Iluminado*, 1980), onde ele utiliza esses elementos para causar enorme desconforto ao seu espectador. Na clássica cena das gêmeas no corredor, por exemplo, Kubrick utiliza o ponto de fuga situado nas gêmeas, direcionando o olhar do espectador para elas e, assim, obtendo a tensão no momento.

ILUSTRAÇÃO: ERICSON GUILHERME LUCIANO



ENTERTAINMENT PICTURES/ALAMY/FOTOARENA

O ponto de fuga presente na clássica cena das gêmeas no corredor de *O Iluminado* (1980).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Em incontáveis momentos de seus filmes podemos observar esses mesmos efeitos. Kubrick utiliza seu enquadramento para que se possa obter a sensação de imersão no filme, para que essa barreira entre espectador e tela de cinema se rompa e possamos ter uma extensão de nossa realidade. [...] Ele consegue aproximar o espaço fílmico (recorte promovido pelo quadro) do espaço real, permitindo que o espectador adentre a imagem e faça, assim, parte da obra.

Kubrick deixou sua marca na história do cinema – influenciou diversos cineastas e inspirou inúmeras obras cinematográficas. [...]

Bons cineastas possuem bom entendimento de toda a história da imagem, e portam imagens que admiram e influenciam seu trabalho. Kubrick influenciou, por exemplo, renomados cineastas como Martin Scorsese, Spielberg, Tarantino, David Lynch, David Fincher, entre muitos outros.

Fonte: ROQUE, G. A genialidade por trás dos enquadramentos de Kubrick. *Jornalismo Júnior*. ECA – USP. Disponível em: <http://jornalismojunior.com.br/a-genialidade-por-tras-dos-enquadramentos-de-kubrick/>. Acesso em: 26 maio 2020.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

9 Assistam ao filme *2001: Uma odisseia no espaço*.

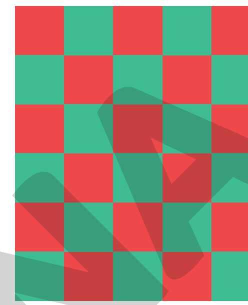
a) Façam uma reflexão coletiva sobre o enredo do filme e escrevam um breve resumo sobre o que vocês entenderam.

b) Citem pelo menos três cenas em que se perceba o ponto de fuga como elemento de destaque no enquadramento.

Perspectiva exata

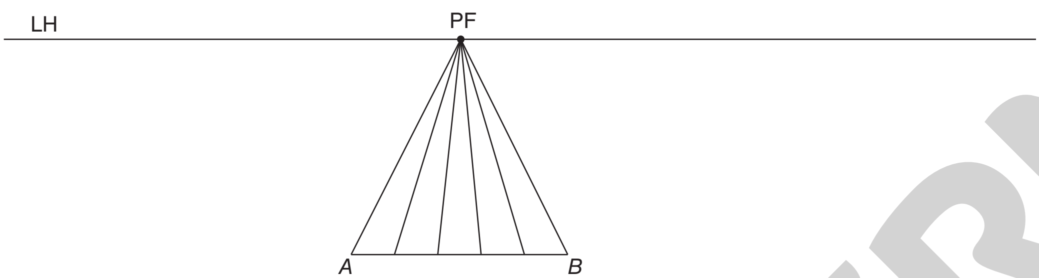
O arquiteto, escultor, pintor e músico italiano Leon Battista Alberti realizou o primeiro trabalho teórico sobre problemas da perspectiva, na obra *De pictura* (1435). Nesse trabalho, o autor descreve a construção de objetos em perspectiva, obedecendo rigorosamente às posições relativas e às proporções da imagem do objeto observado de determinada posição. A esse tipo de perspectiva dá-se o nome de **perspectiva exata**.

Um quadriculado em perspectiva exata



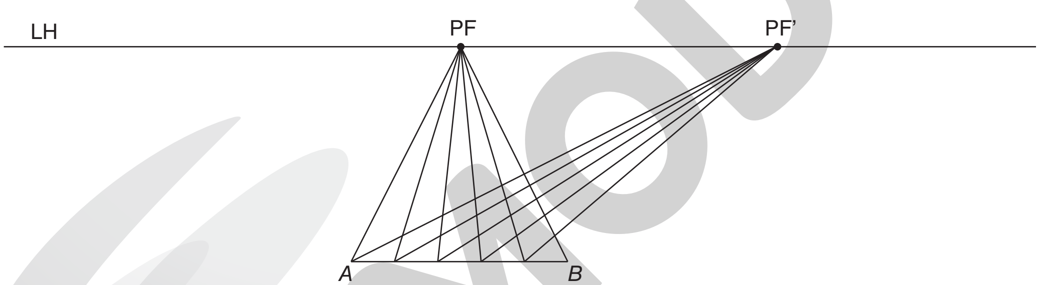
Considere desenhar em perspectiva exata o piso ao lado, formado por ladrilhos quadrados.

Para isso, Alberti desenhou um ponto de fuga (PF) na linha do horizonte (LH) e, abaixo dela, um segmento de reta $\overline{AB}$ dividido em cinco partes iguais, paralelo à LH. Em seguida, ligou por linhas retas os extremos e os pontos de divisão do segmento ao ponto de fuga:

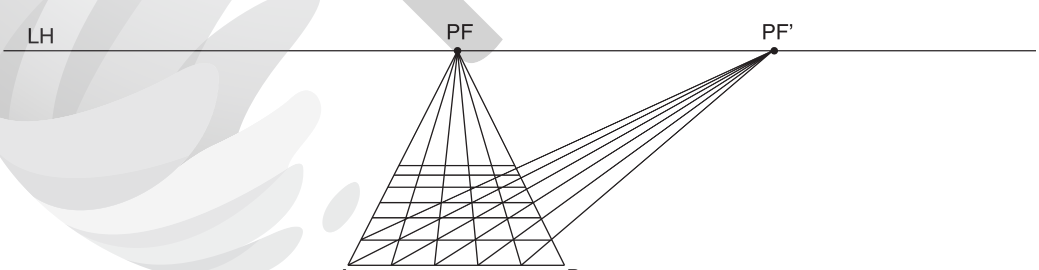


A dificuldade seria manter a proporção na perspectiva de modo que o desenho representasse rigorosamente a imagem do objeto observado. O que faltava para isso era determinar as linhas paralelas ao segmento $\overline{AB}$ que limitassem os ladrilhos.

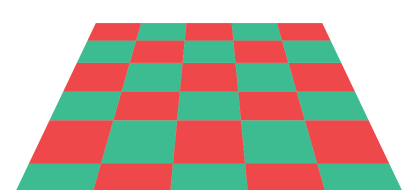
Alberti raciocinou do seguinte modo: na perspectiva, as retas que contêm as diagonais paralelas dos ladrilhos devem convergir para outro ponto de fuga PF':



Os pontos de intersecção das linhas de fuga determinam vértices dos ladrilhos, observe:



Assim, obtém-se a perspectiva desejada:



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esse método foi utilizado por vários pintores renascentistas, como se observa na reprodução do quadro do pintor italiano Pietro Perugino (1450-1523), a seguir.

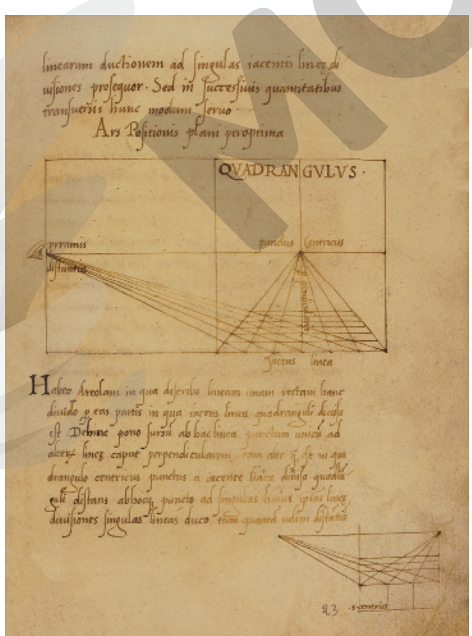
PIETRO PERUGINO - MUSEUS DO VATICANO, CIDADE DO VATICANO

Reprodução da obra *Entrega das chaves a São Pedro* (1481), de Pietro Perugino. (Afresco, 330 cm × 550 cm. Museus do Vaticano, Cidade do Vaticano.)

Outro pintor italiano, Piero della Francesca (1410-1492), escreveu uma importante obra sobre perspectiva, na qual aplicou rigorosamente o conceito de proporção.

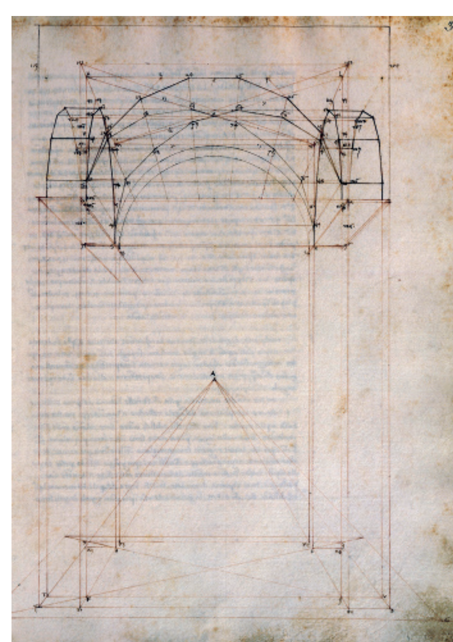
Leon Battista Alberti e Piero della Francesca são reconhecidos como precursores na aplicação da Geometria à Arte.

SERGIO ANELLI/ELECTA/MONDADORI PORTFOLIO/GETTY IMAGES - BIBLIOTECA STATALE, LUCCA



Página da obra *De pictura*, de Leon Battista Alberti. Século XVI. (Manuscrito em papel, 21,5 cm × 15,5 cm. Biblioteca Statale, Lucca, Itália.)

DE AGOSTINI PICTURE LIBRARY/ALBUM/FOTOARENA - BIBLIOTECA PALATINA DI PARMA

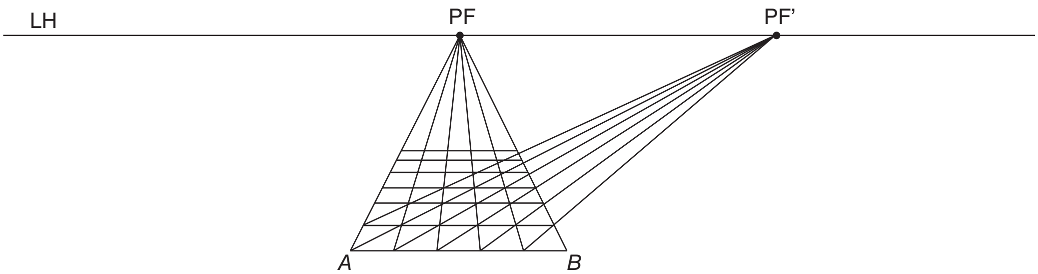


Página da obra *De prospective pingendi*, de Piero della Francesca (c. 1482). Biblioteca Palatina Di Parma, Parma, Itália.

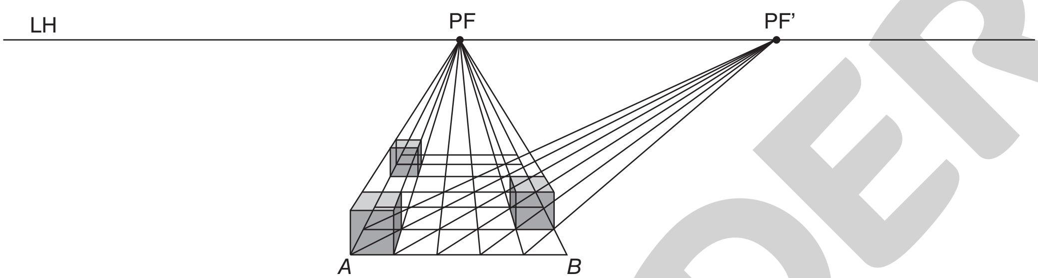
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Representando cubos de mesmo tamanho pelo método de Alberti

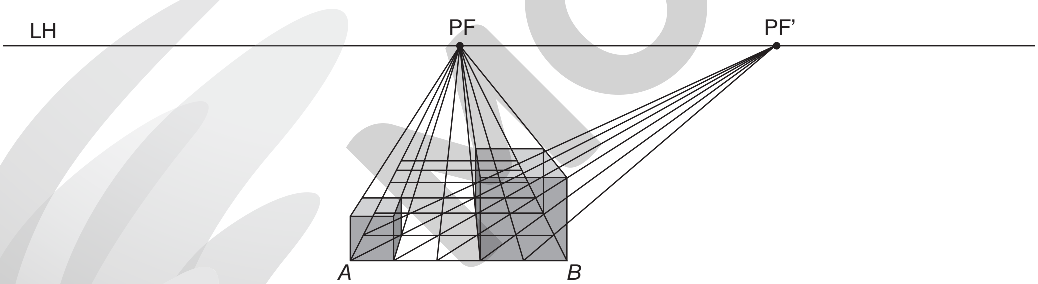
O método de Alberti pode ser aplicado na representação de figuras tridimensionais. Por exemplo, para representar cubos de mesmo tamanho e visão frontal, vamos aproveitar a figura usada anteriormente:



Desenha-se um quadrado cuja base coincida com um dos cinco segmentos em que foi dividido o segmento $\overline{AB}$, por exemplo, o segmento de vértice *A*. Pelos vértices desse quadrado traçam-se as linhas de fuga para o PF. A base desse cubo é o primeiro quadrado de vértice *A* da figura anterior. Repete-se o procedimento para alguns dos demais segmentos paralelos à LH:



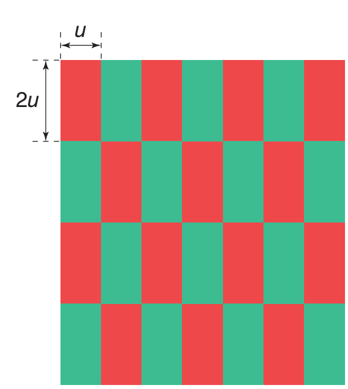
Para exercitar, vamos manter o cubinho de vértice *A*, acima, e construir um cubo de vértice *B* e vista frontal, cuja aresta tenha o dobro da medida da aresta do cubinho inicial. Observe:



ATIVIDADES Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

10 A figura ao lado representa um piso ladrilhado. Cada ladrilho, verde ou vermelho, tem dimensões 1 *u* e 2 *u*, em que *u* é uma unidade de comprimento. Aplicando o método de Alberti, desenhe esse piso em perspectiva exata.



11 Aplicando o método de Alberti, desenhe, em perspectiva, dois cubos de tamanhos diferentes, tais que a medida das arestas do maior e a medida das arestas do menor sejam diretamente proporcionais aos números 3 e 2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

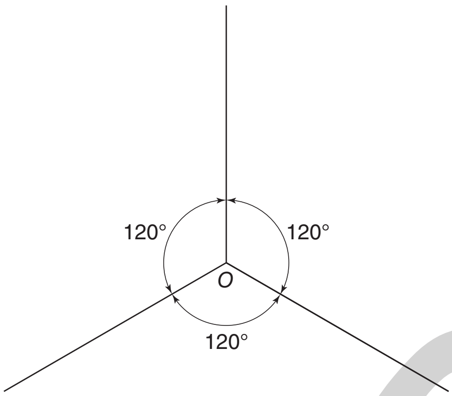
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

A perspectiva isométrica

A perspectiva isométrica (*iso* = mesma; *métrica* = medida) é uma das mais usadas em áreas como arquitetura, engenharia e desenho técnico, graças a sua simplicidade de execução e entendimento.

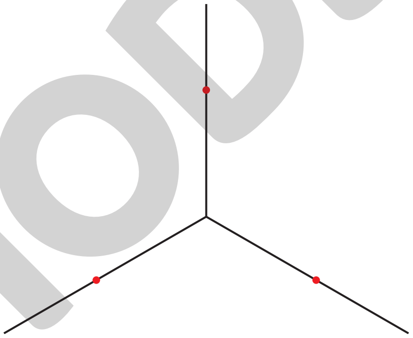
Em vez de apoiar-se na linha do horizonte e em pontos de fuga, a perspectiva isométrica é representada a partir de três semirretas coplanares de mesma origem *O*, chamadas de **eixos isométricos**, que formam entre si ângulos de 120º, sendo *O* a origem do sistema de eixos, conforme mostra a figura abaixo.



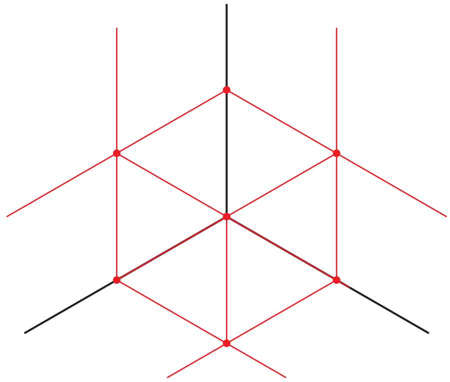
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Desenhando um cubo em perspectiva isométrica

Para desenhar um cubo em perspectiva isométrica, marcam-se sobre os eixos isométricos três pontos, um em cada eixo, equidistantes da origem *O*:



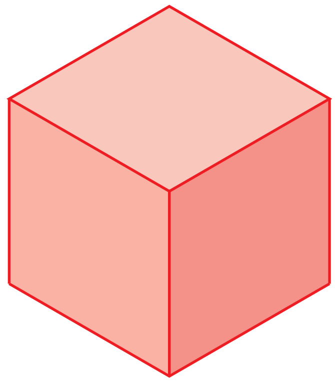
A partir desses três pontos, traçam-se semirretas paralelas aos eixos isométricos, obtendo a representação de alguns vértices do cubo nas intersecções das retas traçadas. Para obter os vértices restantes, traçam-se pelos vértices já obtidos semirretas paralelas aos eixos, conforme mostra a figura a seguir.



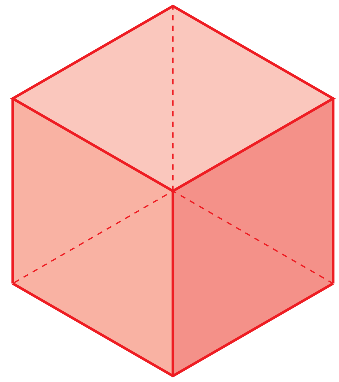
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Apagando-se as linhas auxiliares, obtemos, finalmente, a representação do cubo:



Com destaque apenas para as arestas visíveis sob este ponto de vista.

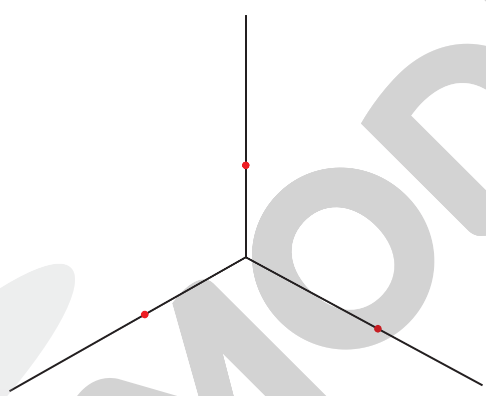


Com destaque para as arestas visíveis e não visíveis sob este ponto de vista.

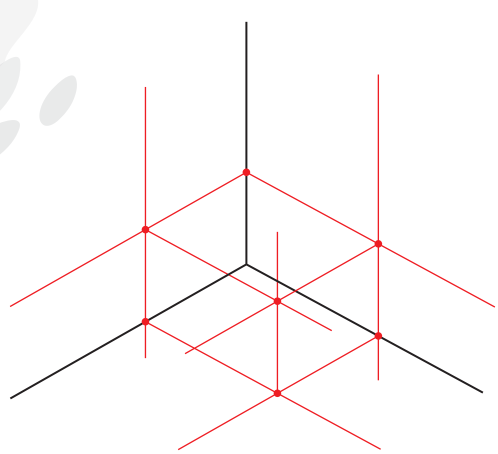
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Desenhando um paralelepípedo reto-retângulo em perspectiva isométrica

Um desenhista deve representar, em perspectiva isométrica, uma peça sob a forma de um paralelepípedo reto-retângulo com 8 m de comprimento por 6 m de largura e 3 m de altura. Para isso, ele marca três pontos sobre os eixos isométricos, um em cada eixo, de modo que as distâncias dos pontos à origem *O* sejam diretamente proporcionais a 8, 6 e 3:



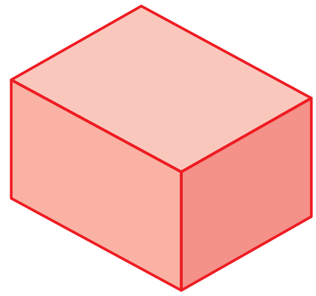
A partir desses três pontos, ele traça semirretas paralelas aos eixos isométricos, obtendo a representação de alguns vértices do paralelepípedo nas intersecções das retas traçadas. Para obter os vértices restantes, ele traça, pelos vértices já obtidos, semirretas paralelas aos eixos, conforme mostra a figura a seguir.



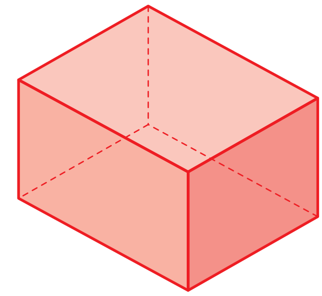
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Apagando-se as linhas auxiliares, o desenhista obtém, finalmente, a representação do paralelepípedo:



Com destaque apenas para as arestas visíveis sob este ponto de vista.



Com destaque para as arestas visíveis e não visíveis sob este ponto de vista.

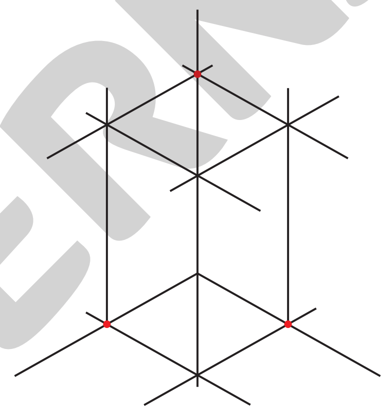
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

12 Usando o conceito de perspectiva isométrica, faça um desenho representando uma cadeira.
Sugestão: Comece desenhando a perspectiva isométrica de um prisma quadrangular regular, cuja medida da altura seja o dobro da medida de cada aresta da base.



13 Usando o conceito de perspectiva isométrica, represente uma cama sem colchão, com 2,00 m de comprimento, 1,60 m de largura e 0,40 m de altura. Acrescente uma cabeceira com 1,00 m de altura a partir do piso, a mesma largura da cama e com 0,02 m de espessura.
Sugestão: Comece desenhando a perspectiva isométrica de um paralelepípedo reto-retângulo, com altura e arestas das bases proporcionais a 2,00; 1,60 e 0,40.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

Movimentos artísticos

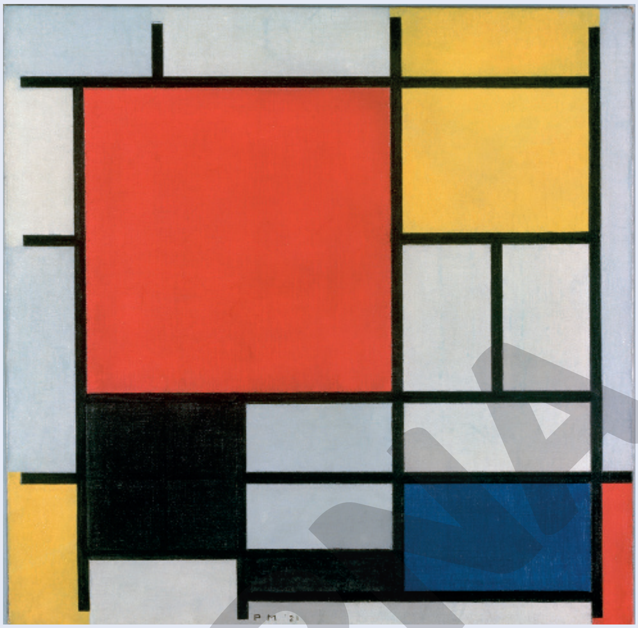
Como foi brevemente apresentado no início do capítulo, a relação entre Arte e Matemática data desde a Antiguidade e vem sendo desenvolvida até hoje. Um exemplo recente é o uso da abstração geométrica, desenvolvida durante o século XX, fundamental para diversos movimentos artísticos.

O rigor matemático e a simplificação da forma, a partir das pesquisas geométricas, foram fundamentais para o desenvolvimento da **arte abstrata** do século XX. As primeiras produções do abstracionismo ligado aos estudos geométricos podem ser encontradas nas vanguardas europeias de 1910 e 1920, como o **Construtivismo** russo, a experiência da **Escola de Arte Bauhaus**, o **Suprematismo** e o **Neoplasticismo**.

Esses movimentos, de formas diversas, utilizavam e propunham os estudos da imagem a partir de formas geométricas básicas, como quadrado, círculo, triângulo, retângulo e cruz, e com uma pequena gama de cores.

VLADIMIR EVGRAFOVICH TATLIN - MUSEU RUSSO, SÃO PETERSBURGO, RÚSSIA

O marinheiro (1911), de Vladmir Tatlin, faz parte do movimento construtivista. (Têmpera sobre tela, 71,5 cm × 71,5 cm. Museu Russo, São Petersburgo, Rússia.)



PIET MONDRIAN - MUSEU DE ARTE DE HAIA, HAIA, PAÍSES BAIXOS

A *Composição com vermelho, amarelo, azul e preto* (1921), de Piet Mondrian, faz parte do movimento neoplasticista. (Óleo sobre tela, 59,5 cm × 59,5 cm. Museu de Arte de Haia, Haia, Países Baixos.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Na segunda metade do século XX, após a Segunda Guerra Mundial, o abstracionismo sofre desdobramentos na Europa e nos Estados Unidos, relacionando-se de forma crítica com as vanguardas anteriores. Trabalhos orientados pela Geometria convivem com produções que apresentam diferentes inclinações geométricas.

No Brasil, o abstracionismo geométrico evidencia-se por meio de dois movimentos concretos: o **Grupo Ruptura** (1952), de São Paulo, e o **Grupo Frente** (1954), do Rio de Janeiro. As divergências entre esses grupos desencadeiam um rompimento, conhecido como **ruptura neoconcreta**, ocorrida em 1959.

Observação

Arte abstrata (ou **abstracionismo**): forma de arte que não representa a realidade como a vemos. Em vez disso, emprega relações entre cores, linhas e superfícies para compor a obra de maneira subjetiva, "não representacional".
Construtivismo: movimento que não entende a pintura e a escultura como simples representações, mas como construções. Dialoga com a arquitetura em relação a materiais, procedimentos e objetivos.
Escola de Arte Bauhaus: criada em 1920, na Alemanha, a partir da junção da Faculdade de Artes Decorativas e da Academia de Weimar.
Suprematismo: movimento artístico russo, em que as formas geométricas básicas, principalmente o quadrado e o círculo, eram o foco das cenas retratadas. É considerado a primeira escola sistemática de pintura abstrata do movimento moderno.
Neoplasticismo: estilo de arte criado em 1917 pelo pintor holandês Piet Mondrian. O movimento alerta para a necessidade de "clareza, certeza e ordem" e tem como proposta fundamental encontrar uma forma de expressão plástica que não se limite a formas representativas e que seja expressa a partir de componentes mínimos: a linha reta, o retângulo e as cores primárias (azul, vermelho e amarelo), além de preto, branco e cinza.
Grupo Ruptura: surgido em São Paulo em 1952, reunia os artistas pioneiros do movimento de arte concreta. A arte concreta teve início na Europa, no começo do século XX, com a proposta de produzir obras que usassem elementos próprios das linguagens, a princípio planos e cores, e depois passou a permear outras linguagens, como sons, silêncios, enquadramentos cenográficos etc.
Grupo Frente: criado em 1954, foi um conjunto de artistas que formaram o núcleo carioca do movimento concretista brasileiro.

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**
Não escreva no livro.

14 Organizem-se em grupos e façam uma pesquisa na internet ou em bibliotecas sobre o movimento concreto no Brasil (Grupo Frente e Grupo Ruptura), para compreender como os estudos de Geometria foram fundamentais na formação dos artistas e na concepção das obras desse movimento.

Com base nessa pesquisa, cada grupo deverá produzir uma obra de arte inspirada no Concretismo. Para isso, abusem da criatividade, tendo a possibilidade de criar usando diferentes materiais: pintura, colagem, fotografia, escultura, entre outros. Deem título à obra e, reunindo todas as obras produzidas pela turma, organizem uma exposição concretista na escola.

Texto complementar

Perspectiva aérea ou atmosférica

A perspectiva atmosférica joga com variações de luz e cor. De forma a obter-se uma ilusão de profundidade, o artista emprega cores mais luminosas, contornos mais nítidos e textura mais espessa nos objetos mais próximos, sendo os mais afastados – que na tela são colocados mais acima – pintados com menos nitidez e normalmente com cores semelhantes às aplicadas no fundo. Isto porque a atmosfera terrestre, que contém poeira e umidade, se interpõe e afeta a luminosidade dos objetos.

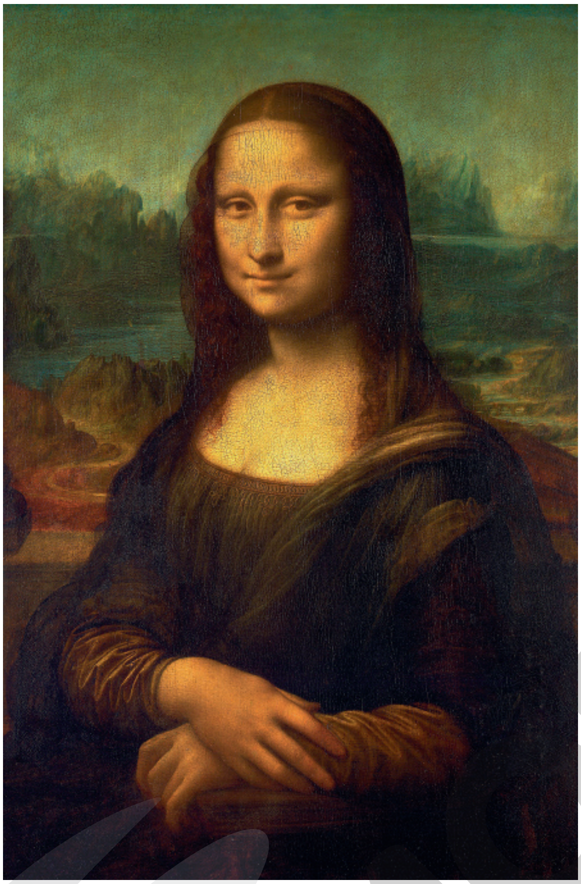
Leonardo da Vinci [1452-1519] construiu seu entendimento da perspectiva não apenas através da rígida formulação da perspectiva linear, mas também compreendendo a perspectiva levando em consideração o ar (ou a *atmosfera*) presente entre o observador e o objeto observado. Ele acreditava que não apenas o tamanho, mas também a aparência dos objetos mudava à medida que a distância entre objeto e observador aumentava. Da mesma forma, as linhas que delimitam a silhueta do objeto passariam a se tornar menos distintas com aquela distância. Estes dois elementos (atmosfera e bordas dos objetos) tornaram-se fundamentais na construção de sua perspectiva. Tal forma de entender a perspectiva veio, inclusive, a ser conhecida como *perspectiva atmosférica*. O pintor inglês Willian Turner [1775-1851] foi um dos grandes adeptos da perspectiva atmosférica, onde explorou com muita intensidade os efeitos luminosos na pintura.

WILLIAM TURNER - TATE BRITAIN, LONDRES

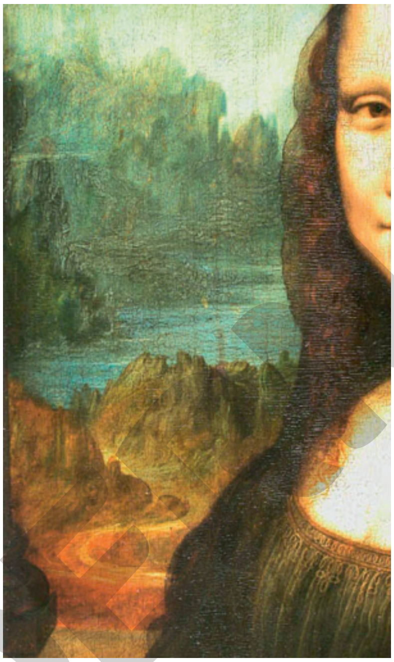
O contraste entre luz e sombra ajudam a compor a perspectiva atmosférica na obra. Nesse contexto, um barco a vapor no coração de um vórtice pode ser interpretado como um símbolo dos esforços inúteis da humanidade para combater as forças da natureza. *Steam-boat off Harbour's Mouth making signals* (1863), de William Turner. (Óleo sobre tela, 91,4 cm × 121,9 cm. Tate Britain, Londres.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Na *Mona Lisa*, Leonardo da Vinci afasta as montanhas em último plano através da perspectiva atmosférica, criando um efeito esfumaçado suprimindo os detalhes ao fundo e realçando-os no primeiro plano. Em uma das diversas interpretações do quadro, as montanhas representam o mundo medieval encoberto por misticismo e ignorância em contraposição à figura da mulher, representada em seus mínimos detalhes e iluminada pela racionalidade renascentista. O homem renascentista tinha a consciência de seu lugar no tempo e espaço.



FINE ART CLASSICS/ALAMY/FOTOARENA - MUSEU DO LOUVRE, PARIS, FRANÇA



THE PICTURE ART COLLECTION/ALAMY/FOTOARENA - MUSEU DO LOUVRE, PARIS, FRANÇA

Mona Lisa (à esquerda), também conhecida como *A Gioconda*, de Leonardo da Vinci. A vasta paisagem atrás da modelo dá profundidade à pintura (detalhe à direita). Além disso, com um pouco mais de atenção, é possível ver que o fundo está desequilibrado. O lado direito parece estar mais alto do que o esquerdo. (1503-1506. Óleo sobre painel, 77 cm × 53 cm. Museu do Louvre, Paris, França.)

Fonte: ALBUQUERQUE, M. Perspectiva (desenho). *História da Arte e Arquitetura*. Disponível em: <https://historiaartearquitetura.com/2017/04/26/perspectiva/>. Acesso em: 26 maio 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

O texto acima descreve o efeito da luz e das cores na perspectiva das pinturas. De acordo com esse texto, responda aos itens a seguir.

1. A perspectiva atmosférica é a técnica pela qual a noção de profundidade é obtida por meio do jogo de variações de luz e cor. Explique o que entendeu sobre essa técnica.
2. Qual é o fenômeno físico que nos faz ver os objetos próximos com maior intensidade de cores que os objetos mais distantes?
3. Que elementos se tornaram fundamentais na construção da perspectiva de Leonardo da Vinci? Explique o entendimento de Da Vinci sobre esses elementos.
4. Na *Mona Lisa*, de que forma é percebida a perspectiva atmosférica?
5. O texto cita uma das interpretações da obra *Mona Lisa*. Qual é essa interpretação?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 2

ORIENTAÇÃO E LOCALIZAÇÃO

SERGIO RANALLI/PULSAR IMAGENS

O GPS se tornou mais popular desde que passou a integrar os *smartphones*, o que possibilitou que mais pessoas tivessem acesso a essa ferramenta de localização. Foto de 2019.

Imagine as seguintes situações, em que você:

- deseja visitar um amigo, porém nunca foi à casa dele;
- decide atravessar um trecho longo e desconhecido de uma floresta densa;
- é o comandante de uma caravela que pretende se aventurar pelo mar inexplorado, no período das Grandes Navegações (séculos XV e XVI).

Nos três casos, evidencia-se a necessidade de conhecer a localização: para ir à casa do amigo, é necessário conhecer o endereço dele; para atravessar um trecho longo e desconhecido de uma floresta densa, é preciso dispor de mapas e bússola ou de um aparelho de GPS (*Global Positioning System*); e aventurar-se pelo mar inexplorado no período das Grandes Navegações exigia saber orientar-se pelas estrelas ou pela bússola, inventada no século I.

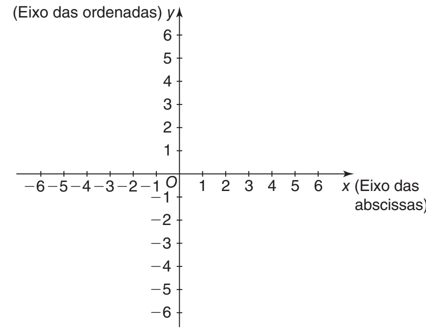
Enfim, ao se deslocar entre dois pontos relativamente distantes, é necessário conhecer instrumentos de orientação ou pontos de referência. É exatamente este o tema deste capítulo: orientação e localização.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

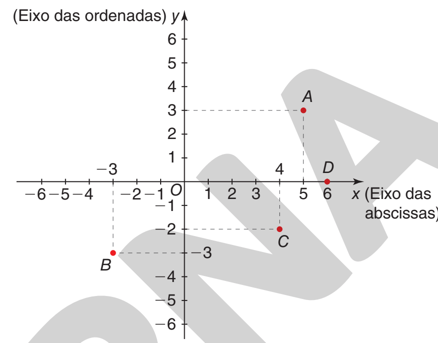
Localização de pontos em um plano

Para determinar a posição de um ponto em um plano, podemos associar um sistema de coordenadas com duas dimensões a esse plano. O mais usual é o sistema cartesiano ortogonal bidimensional, formado por dois eixos reais Ox e Oy, chamados de eixo das abscissas e eixo das ordenadas, respectivamente, perpendiculares entre si na origem O, conforme mostra a figura ao lado.



Ao associar um sistema cartesiano a um plano, ele passa a se chamar **plano cartesiano**. Podemos representar um ponto P qualquer de um plano cartesiano por meio de um par ordenado (x, y), em que x e y são números reais chamados, respectivamente, de **abscissa** e **ordenada** do ponto P. O número x é aquele do eixo das abscissas associado à projeção ortogonal P' do ponto P sobre esse eixo; e o número y é aquele do eixo das ordenadas associado à projeção ortogonal P'' do ponto P sobre esse eixo.

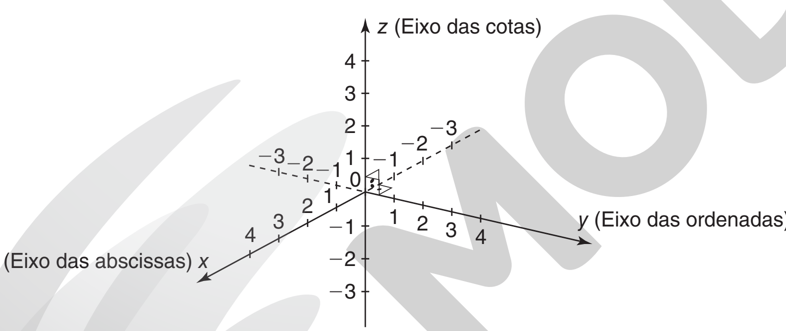
Por exemplo, no plano cartesiano ao lado estão representados os pontos $A(5, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(4, -2)$ e $D(6, 0)$.



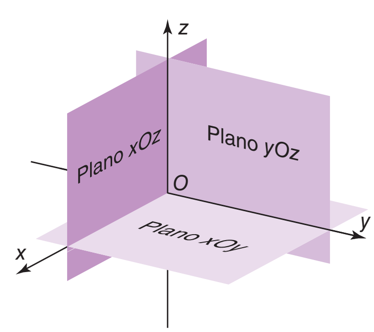
Note que, para qualquer ponto $P(x, y)$, o módulo de x representa a distância entre P e o eixo Oy, e o módulo de y representa a distância entre P e o eixo Ox.

Localização de pontos no espaço

Para determinar a posição de um ponto no espaço, podemos associar um sistema de coordenadas com três dimensões ao espaço. O mais usual é o **sistema cartesiano ortogonal tridimensional**, formado por três eixos reais Ox, Oy e Oz, chamados de eixo das **abscissas**, eixo das **ordenadas** e eixo das **cotas**, respectivamente, perpendiculares entre si na origem O, conforme mostram as figuras.



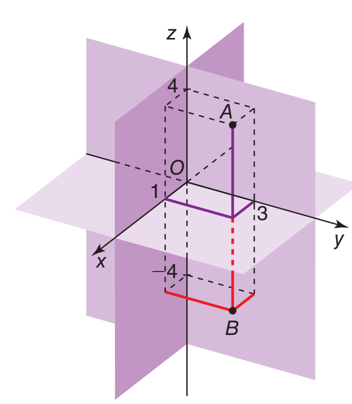
Sistema cartesiano ortogonal tridimensional



Espaço cartesiano

Ao associar um sistema cartesiano tridimensional ao espaço, ele passa a se chamar **espaço cartesiano**. Podemos representar um ponto P qualquer do espaço cartesiano por meio de um terno ordenado (x, y, z), em que x, y e z são números reais chamados, respectivamente, de abscissa, ordenada e cota do ponto P. O número x é aquele do eixo das abscissas associado à projeção ortogonal P' do ponto P sobre esse eixo, o número y é aquele do eixo das ordenadas associado à projeção ortogonal P'' do ponto P sobre esse eixo, e o número z é aquele do eixo das cotas associado à projeção ortogonal P''' do ponto P sobre esse eixo. Para visualizar melhor, trace por P as retas perpendiculares aos planos xOy, xOz e yOz.

Por exemplo, no espaço cartesiano ao lado estão representados os pontos $A(1, 3, 4)$ e $B(1, 3, -4)$.



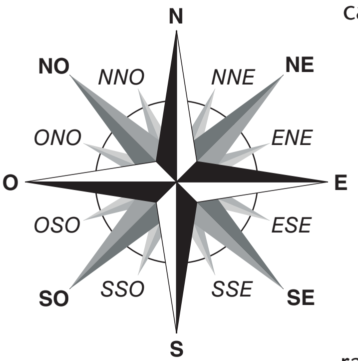
Note que, para qualquer ponto $P(x, y, z)$, o módulo de x representa a distância entre P e o plano yOz, o módulo de y representa a distância entre P e o plano xOz, e o módulo de z representa a distância entre P e o plano xOy.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Localização de pontos sobre a superfície da Terra

Pontos cardeais, colaterais e subcolaterais

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO



Rosa dos ventos com os pontos cardeais, os colaterais e os subcolaterais.

Os polos Norte e Sul e as regiões do nascer e do pôr do sol determinam os pontos cardeais, os principais referenciais para determinar direções e sentidos sobre a superfície da Terra.

A região onde nasce o Sol é chamada Leste (ou Este), que significa "alvorada", e a região onde o Sol se põe é chamada Oeste, que significa "descer". As siglas usadas internacionalmente para os pontos cardeais Norte, Sul, Oeste e Leste são, respectivamente, N, S, W (do inglês, *West*) e E (do inglês, *East*). Na língua portuguesa, adotam-se também as letras O e L para representar Oeste e Leste, respectivamente. Esses pontos são normalmente representados em uma estrela de quatro pontas, chamada **rosa dos ventos**.

Para determinar direções e sentidos mais precisos, foram acrescentados novos pontos à rosa dos ventos: os colaterais e os subcolaterais. Os pontos colaterais localizam-se nas bissetrizes dos ângulos formados pelas direções Norte-Sul e Oeste-Este, em que a rosa dos ventos é dividida em oito ângulos centrais. Nas bissetrizes desses oito ângulos, estão os pontos subcolaterais, conforme mostra a figura ao lado.

As siglas dos pontos colaterais e subcolaterais são lidas da seguinte maneira:

Pontos colaterais	
Sigla	**Leitura**
NO (ou **NW**)	Noroeste
NE	Nordeste
SE	Sudeste
SO (ou **SW**)	Sudoeste

Pontos subcolaterais	
Sigla	**Leitura**
NNO (ou **NNW**)	Nor-noroeste
NNE	Nor-nordeste
ENE	Lés-nordeste
ESE	Lés-sudeste
SSE	Sul-sudeste
SSO (ou **SSW**)	Sul-sudoeste
OSO (ou **WSW**)	Oés-sudoeste
ONO (ou **WNW**)	Oés-noroeste

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

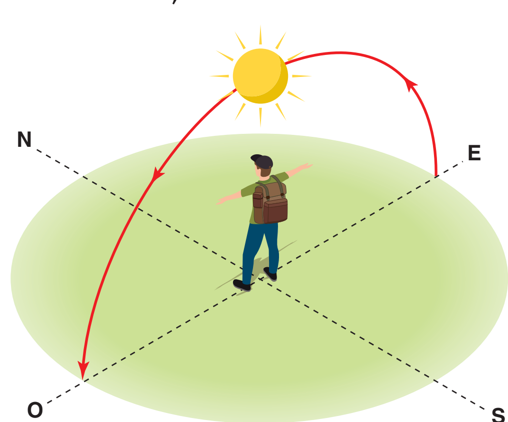
MODERNA

Orientando-se pelo Sol

Sabendo-se que o Sol nasce a Leste e se põe a Oeste, é possível determinar as direções e os sentidos dos pontos cardeais. Para isso, posicione-se com os braços abertos de modo que seu braço direito aponte para o nascer do sol e o esquerdo aponte para o pôr do sol. À sua frente estará o Norte, e às suas costas estará o Sul.

Observação

O sentido de deslocamento aparente do Sol, de Leste para Oeste, é uma aproximação, pois, na verdade, o Sol muda sua trajetória aparente durante o ano.

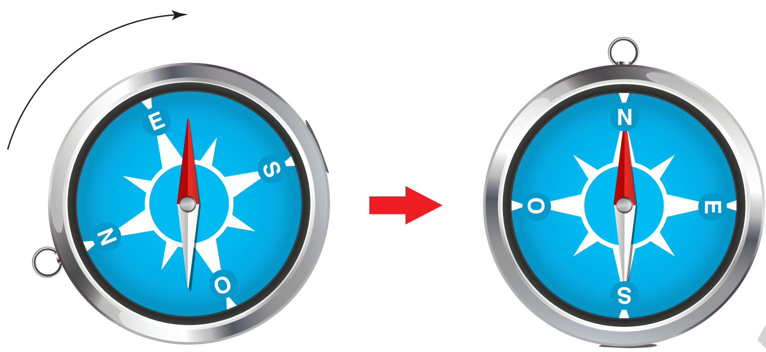


(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Orientando-se pela bússola

Inventada pelos chineses no século I, a bússola foi o instrumento mais importante de orientação geográfica durante muitos séculos. Hoje, embora ainda muito usada, vem sendo substituída pelos sistemas de GPS.

Na bússola, uma agulha imantada aponta sempre para o polo Norte magnético da Terra, que fica próximo ao polo Norte geográfico. Essa agulha se apoia em um eixo central perpendicular a uma base circular, na qual está impressa uma rosa dos ventos. Ao girar essa base na posição horizontal, a agulha se mantém sempre na mesma direção e sentido Sul-Norte. Assim, ao girar a base de modo que a sigla N (Norte) da rosa dos ventos fique sob a ponta da agulha, consegue-se determinar a direção e o sentido de cada um dos pontos cardeais, colaterais e subcolaterais.

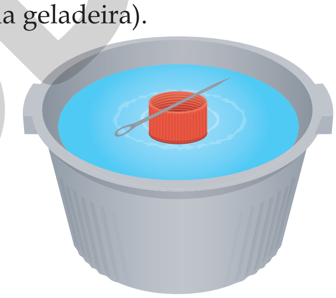


ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**. **Não escreva no livro.**

1 Nesta atividade, vocês vão construir uma bússola caseira. Para isso são necessários: uma bacia de plástico com água, uma tampa de plástico de garrafa PET com duas fendas diametralmente opostas na borda da parte aberta da tampa, uma agulha e um ímã (usem um desses que fixam enfeites na porta da geladeira).

- Esfreguem o ímã várias vezes na agulha, sempre no mesmo sentido a fim de direcionar o magnetismo, por exemplo, no sentido da ponta da agulha.
- Encaixem a agulha nas fendas da tampa de plástico.
- Coloquem a tampa flutuando sobre a superfície da água (com a parte aberta voltada para cima), conforme mostra a figura.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Pronto! Vocês construíram uma bússola.

Como a agulha foi magnetizada no sentido da ponta, observa-se que a ponta da agulha indicará sempre o mesmo sentido, ainda que vocês girem a bacia. Este é o sentido Norte.

Orientando-se pelo GPS (*Global Positioning System*)

Talvez você já tenha visto alguém recorrer a um aplicativo de GPS para se orientar no trânsito; porém, os usos desse sistema vão muito além de orientar motoristas. O GPS é utilizado, por exemplo, nas navegações aérea e marítima; na prospecção e exploração de recursos naturais; no mapeamento e na medição de áreas de grandes regiões, entre outras utilidades.

Atualmente, o GPS é tão popular que está disponível gratuitamente em aplicativos de celular.

Ao digitar o endereço desejado em um desses aplicativos, você será orientado passo a passo como chegar ao seu destino.

Mais adiante, quando estudarmos o sistema de coordenadas geográficas, mostraremos os fundamentos do funcionamento do GPS.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

Tecnologias, culturas e localização

Rali Dakar 2020 – Arábia Saudita

SONIA VAZ

Fonte: "Dakar estreia na Arábia Saudita; conheça a rota do maior rali do mundo". *Motorsport.com*. Disponível em: <https://motorsport.uol.com.br/dakar/news/conheca-a-rota-do-dakar-2020/4619667/>. Acesso em: 30 jun. 2020.

Acabamos de observar diferentes tecnologias de localização no espaço, compreendendo tecnologia como o emprego de técnicas, quaisquer que sejam.

Assim, quando um navegador se orienta pelas estrelas, há o emprego de uma tecnologia, da mesma forma que, durante uma corrida de aventura, por exemplo, o Rali Dakar, os navegadores se orientam por coordenadas de localização. Mais uma vez nota-se o emprego de uma tecnologia.

Queremos chamar sua atenção para as relações entre o desenvolvimento tecnológico de cada grupo social e as formas de orientação e localização em deslocamentos.

Há, basicamente, duas formas de avaliar essas relações.

A primeira delas diz respeito às mudanças de lugar. Dois grupos sociais em locais distintos utilizam meios de orientação e localização diferentes, relacionadas ao nível de desenvolvimento tecnológico, social e econômico dessas sociedades. Por exemplo, uma comunidade indígena isolada que não dispõe de energia elétrica, sinal de internet nem estradas, e a população que vive em grandes metrópoles, como a cidade de São Paulo. Não será incomum encontrar um habitante da comunidade isolada orientando-se por referenciais como montanhas, rios ou árvores, assim como será corriqueiro encontrar um paulistano orientando seu deslocamento com o uso de aplicativos de GPS, mesmo quando caminha a pé. Cada sociedade utiliza os modos de orientação que tem disponíveis e que melhor atendem a suas necessidades.

Outra forma de verificar a relação do avanço tecnológico nos métodos de orientação diz respeito às transformações derivadas do **tempo**. Os métodos de orientação nas cidades brasileiras, hoje, são muito distintos daqueles adotados há 40 anos, por exemplo.

Perceba que o avanço tecnológico se relaciona com o lugar e o tempo e impacta significativamente a vida das pessoas, como é o caso das formas de orientação.

O Rali Dakar foi realizado na América do Sul de 2009 a 2019, por causa de problemas políticos nos países africanos por onde passava. No entanto, pilotos realizam testes e se preparam para a prova oficial em países onde isso é possível, como no Marrocos. Foto de 2017.

CRISTIANO BARNI/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Revisão bibliográfica e pesquisa por amostragem

Para contrastar a hipótese de mudança nas formas de orientação e localização ao longo do tempo e em diferentes regiões do mundo, faça uma pesquisa de acordo com as orientações a seguir.

1. Realize uma **revisão bibliográfica**, uma pesquisa um pouco mais aprofundada sobre as formas de orientação e localização. Entenda revisão bibliográfica como um método de busca de informações em que você, o pesquisador, explora textos, livros, artigos e outras referências para apropriar-se do conhecimento acumulado sobre o assunto. Não deixe de registrar quais fontes de pesquisa foram utilizadas ou quais livros ou artigos foram lidos ou consultados.
2. Além da pesquisa bibliográfica, realize uma **pesquisa por amostragem**, estratégia usada para compreender fenômenos populacionais, sem que haja a necessidade de abordar toda a população, estratificando-a de modo que uma pequena parcela, um conjunto representativo do todo, forneça as informações necessárias.
   Para isso, entreviste algumas pessoas de gerações anteriores à sua sobre as formas de orientação e localização utilizadas por elas, no passado. Os resultados dessa pesquisa servirão como parâmetros para inferir o comportamento de outros grupos. Tente identificar quais meios eram empregados no passado, por exemplo, para se deslocar até um lugar desconhecido ou encurtar distâncias, identificando atalhos.
3. Registre os dados das entrevistas e compare com os resultados da revisão bibliográfica. Será que, ainda hoje, há lugar em que se utilize alguma das formas de orientação e localização registradas na entrevista?
4. Após a execução das duas modalidades propostas acima, sistematize os dados pesquisados, organizando-os em um texto para expor as conclusões obtidas tanto com a revisão bibliográfica quanto com a pesquisa por amostragem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sugestão

LUNA, S. V. de. *Planejamento de pesquisa:* uma introdução. São Paulo: Educ, 1997.
O autor propõe um estudo sobre a metodologia científica, abordando cada etapa da pesquisa.

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**. **Não escreva no livro.**

2 A tabela abaixo descreve os investimentos federais em transporte no ano de 2020, acumulados até março, em milhões de reais. Construa um gráfico de setores (frequência relativa percentual) correspondente a essa tabela, se possível usando um editor de planilhas eletrônicas.

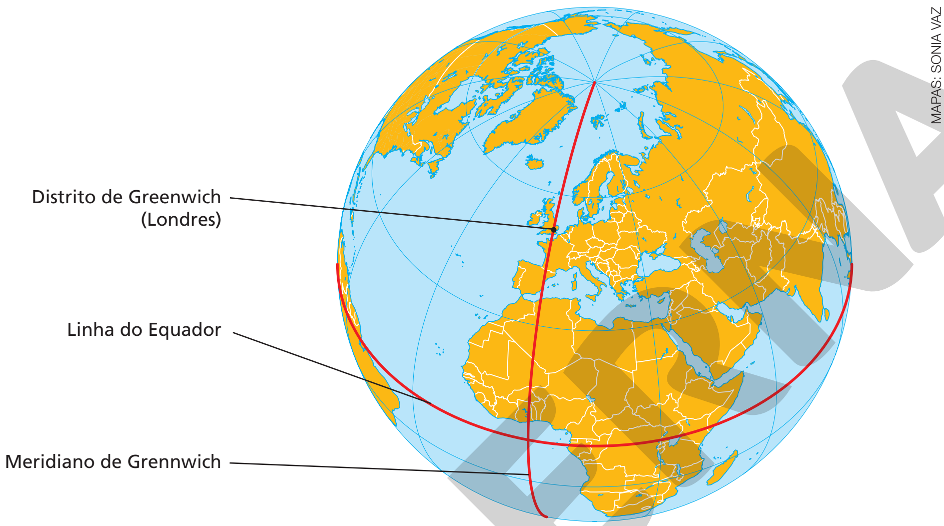
Investimentos Diretos da União (Orçamento Fiscal da União) – Transporte – Acumulado em R$ milhões, até março de 2020	
	Autorizado
Rodoviário	6.766,36
Ferroviário	380,59
Aquaviário	169,13
Aéreo	2.075,30
Total	9.391,38

Fonte: Confederação Nacional do Transporte (CNT). Disponível em: <https://www.cnt.org.br/boletins>. Acesso em: 27 maio 2020.

Paralelos e meridianos terrestres

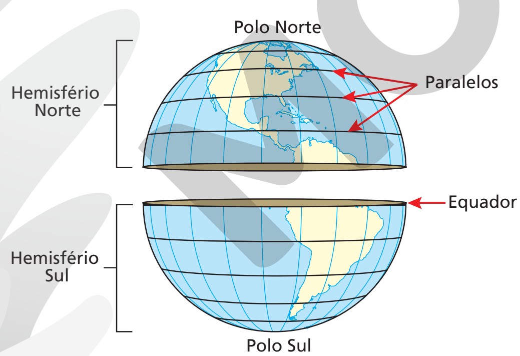
Os paralelos e meridianos terrestres são linhas imaginárias sobre a superfície da Terra, que servem como referência para a determinação de pontos sobre essa superfície. Os paralelos são circunferências contidas em planos perpendiculares ao eixo de rotação do planeta, e os meridianos são semicircunferências com extremidades nos polos Norte e Sul.

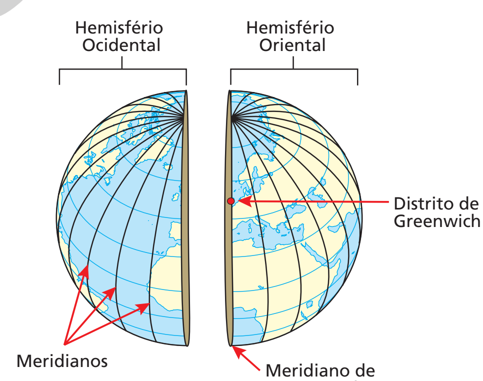
O paralelo concêntrico com a Terra é chamado **linha do Equador**, e o meridiano que passa pelo observatório real do distrito de **Greenwich**, em Londres (Inglaterra), é chamado **meridiano de Greenwich** (ou meridiano principal ou primeiro meridiano).



Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

O plano que contém a linha do Equador divide a Terra nos hemisférios Norte e Sul, e o plano que contém o meridiano de Greenwich divide a Terra nos hemisférios Ocidental (Oeste) e Oriental (Leste).





Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

Coordenadas geográficas

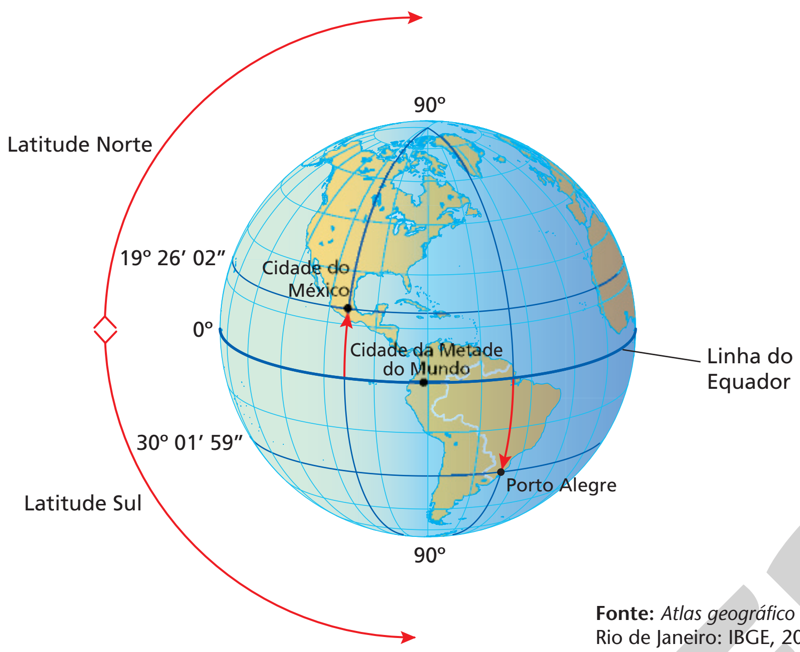
Qualquer ponto *P* da superfície terrestre é determinado por duas coordenadas: a latitude e a longitude, definidas a seguir.

Latitude de *P* é a medida, em grau, do menor arco contido em um meridiano terrestre, que une o ponto *P* à linha do Equador. Essa medida varia de 0°, sobre a linha do Equador, até 90° no sentido Norte ou no sentido Sul. Exemplos:

- Na *Ciudad Mitad del Mundo* (em português: Cidade da Metade do Mundo), a 26 km de Quito, capital do Equador, está localizado um monumento sobre a linha do Equador; assim, sua latitude é 0° 0′ 0″.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

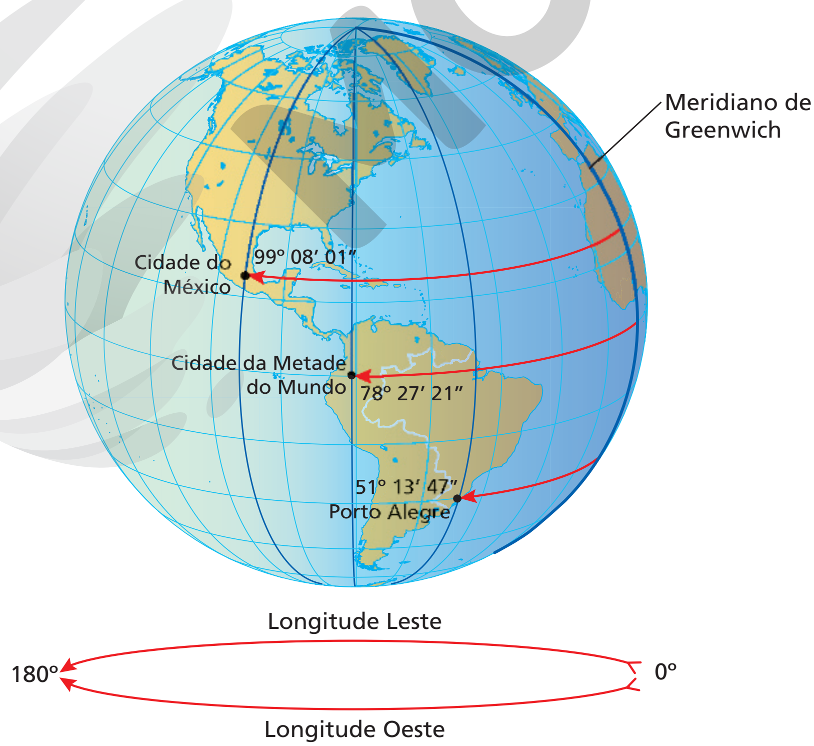
- A Cidade do México, capital do México, tem latitude 19° 26′ 02″ N (a letra *N* indica o sentido Norte).
- A cidade de Porto Alegre, capital do Rio Grande do Sul, tem latitude 30° 01′ 59″ S (a letra *S* indica o sentido Sul).



Fonte: *Atlas geográfico escolar.* 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

Longitude de *P* é a medida, em grau, do menor arco contido em um paralelo terrestre, que une *P* ao meridiano de Greenwich. Essa medida varia de 0°, sobre o meridiano de Greenwich, até 180° no sentido Oeste ou no sentido Leste. Exemplos:

- O monumento citado anteriormente, localizado na Cidade da Metade do Mundo, tem longitude 78° 27′ 21″ O (a letra *O* indica o sentido Oeste).
- A Cidade do México tem longitude 99° 08′ 01″ O.
- A cidade de Porto Alegre tem longitude 51° 13′ 47″ O.



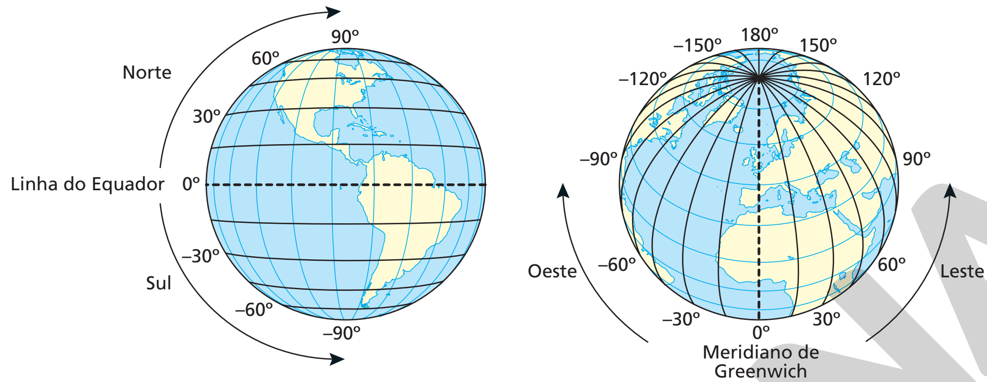
Fonte: *Atlas geográfico escolar.* 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Notas

1. Ao mencionar as coordenadas geográficas de um lugar, convenciona-se citar primeiro a latitude. Assim, por exemplo, dizemos que as coordenadas geográficas da Cidade do México são 19° 26′ 02″ N e 99° 08′ 01″ O.
2. Podem-se também indicar as latitudes Norte e Sul por números positivo e negativo, respectivamente; e as longitudes Leste e o Oeste por números positivo e negativo, respectivamente.



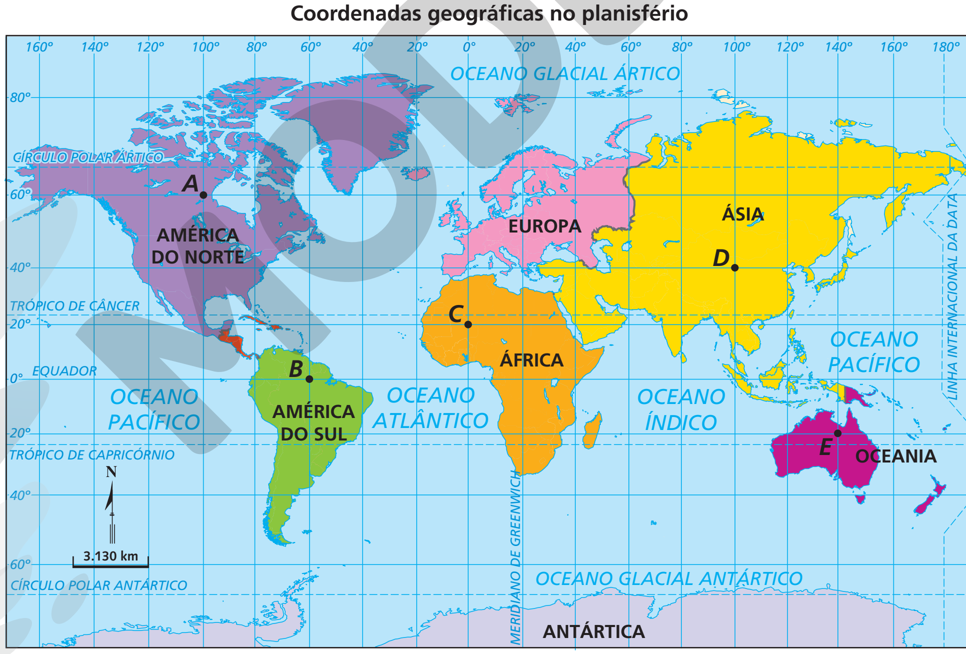
Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 18.

Assim, por exemplo, pode-se dizer que as coordenadas da Cidade do México são 19° 26′ 02″ e –99° 08′ 01″.

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

3 Determine as coordenadas geográficas dos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, indicados no mapa abaixo.

Coordenadas geográficas no planisfério



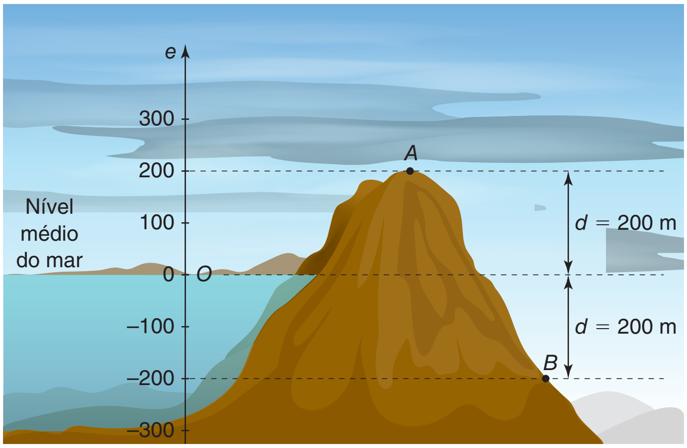
Fonte: FERREIRA, G. M. L. *Atlas geográfico*: Espaço mundial. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2019. p. 8-9.

Altitude de um ponto da Terra

Considere o metro como unidade em um eixo real vertical *e*, orientado para cima, tal que a origem *O* seja um ponto do nível médio das águas do mar. Chama-se **altitude** de um ponto a coordenada desse ponto no eixo *e*. Por exemplo, na figura a seguir, a altitude do ponto *A* é 200 m, e a altitude de *B* é –200 m. Note que a distância *d* entre cada um desses pontos e o nível médio do mar é a mesma, 200 m; porém, *A* está acima do nível médio do mar, e *B* está abaixo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Há diversos locais da Terra que, mesmo não submersos, estão abaixo do nível do mar. Por exemplo, algumas partes dos Países Baixos, além do vale do rio Jordão, que é o local não submerso de menor altitude do planeta, chegando a −420 m.


TATIANA POPOVA/SHUTTERSTOCK

Estrada na barragem Afsluitdijk, nos Países Baixos. Foto de 2018.


JALAA MAREY/AFP/GETTY IMAGES

Vale do rio Jordão, entre Israel, Jordânia e Cisjordânia. Foto de 2019.

Quando um lugar tem altitude negativa e está submerso, a sua altitude é denominada **profundidade**.

Latitude, longitude e altitude: um sistema de três coordenadas

Além da latitude e da longitude, certos estudos, como levantamentos topográficos, necessitam também da altitude. Assim, cada ponto da Terra é determinado por um terno ordenado: latitude, longitude e altitude. Por exemplo:

- a cidade de São Paulo tem coordenadas aproximadas de 23° 33′ 01″ S, 46° 38′ 02″ O, 760 m.
- o vale do rio Jordão tem coordenadas aproximadas de 31° 32′ 04″ N, 35° 29′ 04″ L, −420 m.

Os fusos horários

Durante a Conferência Internacional do Meridiano de 1884, realizada em Washington D.C., Estados Unidos, foram estabelecidos horários nos vários pontos da Terra, segundo uma convenção adotada em todas as regiões do planeta. Para isso, dividiu-se a superfície da Terra em fusos de modo que o horário fosse o mesmo em qualquer ponto de um mesmo fuso.

Como o movimento de rotação da Terra tem período de 24 horas, o planeta gira 15° por hora. Assim, convencionou-se que:

- a partir do meridiano de Greenwich (longitude 0°), são considerados os meridianos que dividem a linha do Equador em 24 arcos de 15° cada um;
- no intervalo entre 7,5° a Oeste e 7,5° a Leste de cada um desses meridianos, o horário é o mesmo (cada um desses intervalos é chamado de fuso horário);

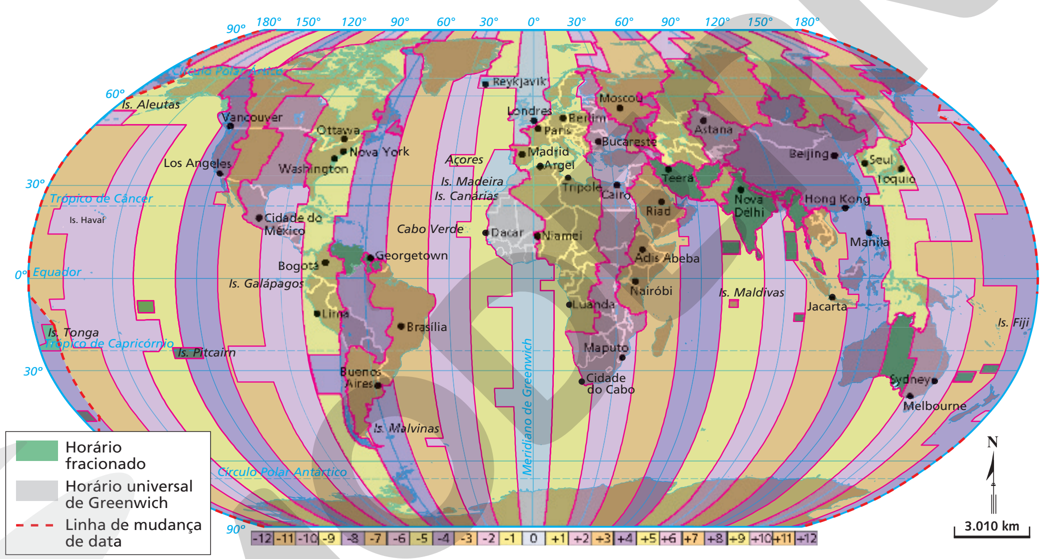
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- a partir do fuso horário que contém o meridiano de Greenwich, no sentido Leste, os horários aumentam em 1 hora de um fuso para o seguinte, até o fuso que contém o meridiano de longitude 180º (meridiano oposto ao de Greenwich);
- a partir do fuso horário que contém o meridiano de Greenwich (longitude 0º), no sentido Oeste, os horários diminuem em 1 hora de um fuso para o seguinte, até o fuso que contém o meridiano de latitude 180º (oposto ao de Greenwich);
- no fuso horário que contém o meridiano oposto ao de Greenwich, o horário é o mesmo, mas a data é diferente: a parte desse fuso no hemisfério Oriental está um dia adiantada em relação à parte do hemisfério Ocidental.

A linha que marca a mudança de data é chamada de **Linha Internacional de Mudança de Data** ou, simplesmente, **Linha Internacional de Data (LID)**, que não é exatamente o meridiano de longitude 180º (oposto ao de Greenwich), mas ele serve como referência para a determinação da LID.

Embora essas convenções tenham sido aceitas pelos membros participantes da Conferência, alguns ajustes foram necessários porque, na prática, questões políticas e de fronteiras exigiram que as linhas que delimitam os fusos fossem modificadas, deixando de ser semicircunferências, como se observa no mapa abaixo.

Mapa de fusos horários



Fonte: Fuso Horário Civil (2018). *IBGE*. Disponível em: <https://atlasescolar.ibge.gov.br/images/atlas/mapas_mundo/mundo_fuso_hor%C3%A1rio_civil.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Influenciado por necessidades comerciais e geopolíticas, os limites dos fusos horários podem se afastar dos meridianos, que servem apenas como referências.

Cálculo de horários

A Terra gira de Oeste para Leste em torno do seu eixo de rotação, o que faz com que o Sol seja visto da Terra em um movimento aparente de Leste para Oeste. Assim, entre dois pontos localizados em fusos diferentes da superfície do planeta, o que estiver mais a Leste terá o horário mais adiantado. Esse raciocínio possibilita relacionar os horários de dois pontos quaisquer localizados em fusos diferentes.

Por exemplo, supondo que os lugares citados a seguir não estejam em horário de verão:

- Quando forem 13 h em Bogotá, o horário em Brasília será dado por:
  13 h + 2 h = 15 h
  pois, como se observa no mapa anterior, Brasília está 2 fusos horários a Leste do fuso que contém Bogotá.
- Quando forem 8 h 12 min em Luanda, o horário em Lima será dado por:
  8 h 12 min − 6 h 00 min = 2 h 12 min
  pois, como se observa no mapa anterior, Lima está 6 fusos horários a Oeste do fuso que contém Luanda.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

O tempo e o fuso horário na era da sociedade hipertecnológica

Pode não parecer, mas houve um tempo em que as distâncias físicas pareciam maiores em decorrência da influência do tempo. Isso mesmo: o tempo exercia um papel importante na percepção da distância.

No final do século XIX, por exemplo, para que você pudesse se comunicar com um amigo ou familiar que morasse em outro país, outra região do seu próprio país ou mesmo em uma cidade próxima, seria necessário redigir uma carta, submetê-la pelo correio e aguardar até que a carta, objeto físico, chegasse às mãos do seu interlocutor, para que só então fosse possível dar continuidade à conversa.

Somente depois da invenção do telefone, registrado no dia 10 de março no ano de 1876 por Graham Bell, é que se tornou possível uma conversa em tempo real entre pessoas de diferentes lugares.


IZKES/SHUTTERSTOCK

Aplicativos de troca de mensagens e de videoconferência facilitam a interação entre pessoas distantes geograficamente. Foto de 2020.

Interessa-nos, agora, dar um verdadeiro salto na história das telecomunicações e abordar o que frequentemente se chama de **Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs)**. O avanço tecnológico das últimas três décadas, na transição entre os séculos XX e XXI, proporcionou formas de comunicação capazes de surpreender até os maiores entusiastas do gênero.

No ano de 2020, quando o mundo foi acometido por uma pandemia global, que impossibilitou a circulação de pessoas pelas ruas de muitas cidades em todo o planeta, as TICs foram indispensáveis para a manutenção das relações sociais, das atividades econômicas e realização de serviços de modo remoto.

Ao mesmo tempo que as TICs possibilitaram uma intensa rede de interações sociais, as empresas de telecomunicações, a pedido de alguns governos estaduais, utilizaram dados de *smartphones* dos usuários para monitorar o isolamento social a partir de sua localização, além de fornecer informações relevantes para, por exemplo, órgãos relacionados à saúde e à segurança pública (como ambulâncias e carros de polícia) poderem se orientar nos percursos urbanos de maneira ágil e eficiente.

Você provavelmente já utilizou algumas dessas ferramentas tecnológicas de comunicação que participaram desse fenômeno de encurtamento de distâncias.

A possibilidade de se comunicar com qualquer parte do mundo, em tempo real, com o uso das ferramentas das TICs faz-nos achar que as distâncias são menores do que realmente são, pois elas modificaram a percepção sobre o tempo, contribuíram para um achatamento virtual e simbólico dos fusos horários.

Este é um dos impactos da globalização dos meios de comunicação, a mudança na percepção de distância em função da aceleração do tempo de conexão.

Outro impacto, este menos positivo, diz respeito ao desenvolvimento de diversas doenças psicossociais resultantes da **hipertecnologização** das relações humanas. Nunca estivemos tão próximos, mas ao mesmo tempo tão distantes.

Vamos ver na prática uma **análise de mídias sociais**. Se você possui algum aplicativo que o conecte às demais pessoas, então você está inserido no mundo das redes sociais.

Fonte dos dados: WU, T. *Impérios da comunicação*: do telefone à internet, da AT&T ao Google. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Observação

O conceito de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) pode ser entendido como um conjunto integrado de recursos tecnológicos que, por meio de *hardware*, *software*, internet ou qualquer outro recurso, busca atingir um objetivo, que pode ser científico, educacional, comercial etc.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Para identificar o impacto dos aplicativos de comunicação nas relações sociais, vamos fazer um estudo, considerando a amostra formada pelos estudantes de sua sala de aula. Para isso, vocês vão se organizar em grupos, com aproximadamente o mesmo número de membros em cada um, e realizar as tarefas propostas a seguir.

a) Cada um de vocês deve registrar, nos próximos 5 dias:

I. O tempo aproximado de diálogos que manteve, por dia, com amigos e familiares, por meio de redes sociais digitais.

II. O tempo aproximado de diálogos presenciais que manteve, por dia, com amigos e familiares (considere apenas conversas prolongadas, como uma discussão sobre futebol, filme, namoro etc.).

b) Cada um de vocês deve elaborar uma tabela, registrando o tempo total de diálogos presenciais e o tempo total de diálogos via mídias sociais em cada um desses 5 dias, conforme o exemplo a seguir.

	Diálogos presenciais	Conversas em mídias sociais
Dias	**Tempo total de diálogo (hora)**	**Tempo total de diálogo (hora)**
1	//////////////////////////////	//////////////////////////////
2	//////////////////////////////	//////////////////////////////
3	//////////////////////////////	//////////////////////////////
4	//////////////////////////////	//////////////////////////////
5	//////////////////////////////	//////////////////////////////

c) Cada grupo vai elaborar uma tabela registrando a soma dos tempos de diálogos presenciais e a soma dos tempos de diálogos via mídias sociais, de todos os elementos do grupo, em cada um desses 5 dias.

d) Cada grupo vai construir um gráfico de colunas no caderno (ou usar um aplicativo digital de planilhas eletrônicas), comparando o tempo de diálogo presencial com o tempo de diálogo por mídias sociais, em cada dia descrito na tabela construída no item **c**.

e) Os grupos vão comparar entre si os gráficos construídos no item **d**.

f) Após esse estudo, cada grupo vai elaborar uma conclusão, expondo-a à turma por meio de uma **linguagem multimodal não textual**, que pode ser um gráfico, uma tabela, um vídeo etc.

5 Você é capaz de prever como serão as relações sociais e a comunicabilidade em um futuro próximo? Redija um texto sobre essas previsões e compare-as com as de seus amigos. Que coincidências ocorreram em suas previsões?

6 Explique como o avanço das TICs influenciaram as formas como nos orientamos e nos localizamos atualmente.

7 Nunca a circulação de notícias, conhecimento, informações ou mensagens foi tão veloz como na era da internet. Observe a seguir uma situação fictícia, mas perfeitamente possível, mostrando a velocidade dessa circulação pelas redes sociais.

Suponha que você tenha escrito um texto intitulado "Orientação e localização no mundo contemporâneo" e enviado para duas pessoas por meio de uma rede social da internet. Suponha ainda que cada uma dessas pessoas envie o material para outras duas e assim por diante, ou seja, cada pessoa que o recebe encaminha o texto a outras duas. Considere que o texto seja enviado sempre a pessoas diferentes daquelas que já o receberam. Indicando por **1ª geração de destinatários** aquela formada

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

pelas primeiras 2 pessoas que receberam o texto; **2ª geração de destinatários** aquela formada pelas 4 pessoas às quais a 1ª geração enviou o texto e assim por diante, obtemos a tabela:

Geração de destinatários	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	...	nª
Número de destinatários	2	4	8	16	32	...	2^n

Dados fictícios.

Supondo que qualquer geração de destinatários é formada a cada hora, responda aos itens seguintes, usando uma calculadora.

a) Calcule o número de pessoas que receberiam o texto nas 10 primeiras horas.

b) Calcule o número de pessoas que receberiam o texto nas 30 primeiras horas.

c) Compare o número obtido no item **b** com a população do Brasil.

Sugestões

Os Jetsons

Conheça algumas previsões dessa animação estadunidense da década de 1960, que antevia tecnologias do futuro: relógios inteligentes, videoconferências, robôs realizando tarefas domésticas, câmeras de vigilância espalhadas por todo canto e até tecnologias de medicina diagnóstica. Disponível em: <https://www.uol.com.br/tilt/noticias/redacao/2020/05/04/11-previsoes-que-os-jetsons-acertaram-sobre-a-tecnologia-no-seculo-21.htm>. Acesso em: 20 maio 2020.

ORWELL, G. *1984*. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.

Publicado originalmente em 1949, a obra de ficção possibilita estabelecer comparações com a sociedade atual.

HUXLEY, A. *Admirável mundo novo*. Rio de Janeiro: Biblioteca Azul, 2014.

Publicada originalmente em 1932, essa obra de ficção científica retrata uma sociedade que vive exclusivamente sob o domínio da Ciência e na qual a Arte é vista como símbolo de conformismo.

Os fundamentos do GPS

Vamos aprofundar um pouco mais o conhecimento sobre o já mencionado GPS.

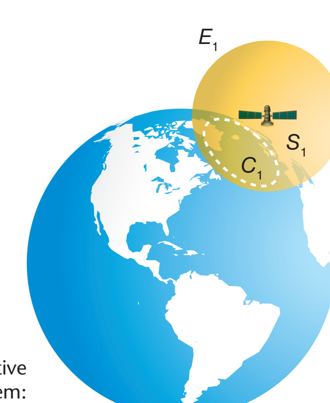
Trata-se de um sistema global de posicionamento via satélite capaz de localizar e identificar a latitude, a longitude e a altitude de qualquer objeto na Terra com uma margem de erro de 2 a 15 metros, dependendo da qualidade do receptor e do movimento detectado pelo satélite.

Mas qual é o processo adotado na localização do objeto? Os sinais emitidos, simultaneamente, por pelo menos três satélites são captados por um receptor, que pode ser um *smartphone*, e determinam, por um processo chamado trilateração, a posição do receptor.

A trilateração

O aparelho receptor mede o tempo que o sinal enviado pelo satélite S_1 demora para atingi-lo, determinando, então, o raio da esfera E_1 cujo centro é S_1. O aparelho receptor está sobre a circunferência C_1, determinada pela intersecção da superfície da Terra com a superfície de E_1 (Figura 1, ao lado).

O aparelho receptor mede o tempo que o sinal enviado pelo satélite S_2 demora para atingi-lo, determinando, então, o raio da esfera E_2 cujo centro é S_2. O aparelho receptor está em um dos dois pontos em que se cruzam as circunferências C_1 e C_2, determinadas pelas intersecções da superfície da Terra com as superfícies de E_1 e E_2 (Figura 2, na página seguinte).



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Figura 1

Fonte dos dados: National Coordination Office. *Space segment*. NCO/National Executive Committee for Space-Based Positioning, Navigation, and Timing (PNT). Disponível em: <https://www.gps.gov/systems/gps/space/>. Acesso em: 3 ago. 2020.
(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

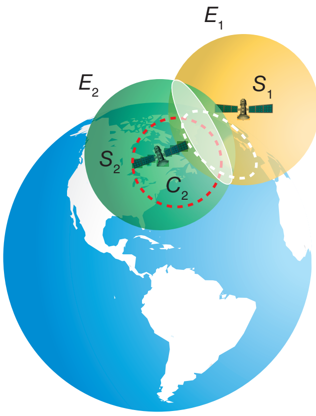


Figura 2

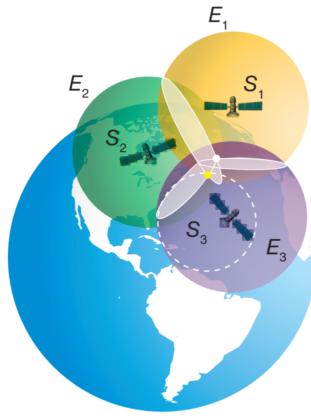


Figura 3

O aparelho receptor mede o tempo que o sinal enviado pelo satélite S_3 demora para atingi-lo, determinando, então, o raio da esfera E_3 cujo centro é S_3. O aparelho receptor está em um dos dois pontos de intersecção das superfícies das esferas E_1, E_2 e E_3 (Figura 3, ao lado). O GPS seleciona aquele ponto localizado à menor altitude, que é o ponto sobre a superfície terrestre.

O sistema pode usar mais de três satélites para diminuir a margem de erro.

Fonte dos dados: National Coordination Office. *Space segment*. NCO/ National Executive Committee for Space-Based Positioning, Navigation, and Timing (PNT). Disponível em: <https://www.gps.gov/systems/gps/space/>. Acesso em: 3 ago. 2020.

(Representações fora de escala; cores fantasia.)

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

8 Qual é o número mínimo de coordenadas cartesianas para localizar um ponto no plano? Quais são os nomes dessas coordenadas?

9 Qual é o número mínimo de coordenadas cartesianas para localizar um ponto no espaço? Quais são os nomes dessas coordenadas?

10 Qual é o número mínimo de coordenadas geográficas para localizar um ponto sobre a superfície da Terra? Quais são os nomes dessas coordenadas?

11 Vimos que, dependendo do grau de precisão exigido na localização de um ponto, pode ser necessária a altitude, além da latitude e da longitude. O que é a altitude de um ponto sobre a superfície terrestre?

12 Admitindo a Terra como uma esfera perfeita de raio 6.370 km, determine a distância aproximada, em quilômetro, entre as regiões A e B, destacadas no mapa abaixo, localizadas na Groenlândia e no Brasil, respectivamente. (Adote o valor $\pi = 3$.)

a) 14.140
b) 23.410
c) 16.706
d) 10.146
e) 10.617

Planisfério

SONIA VAZ

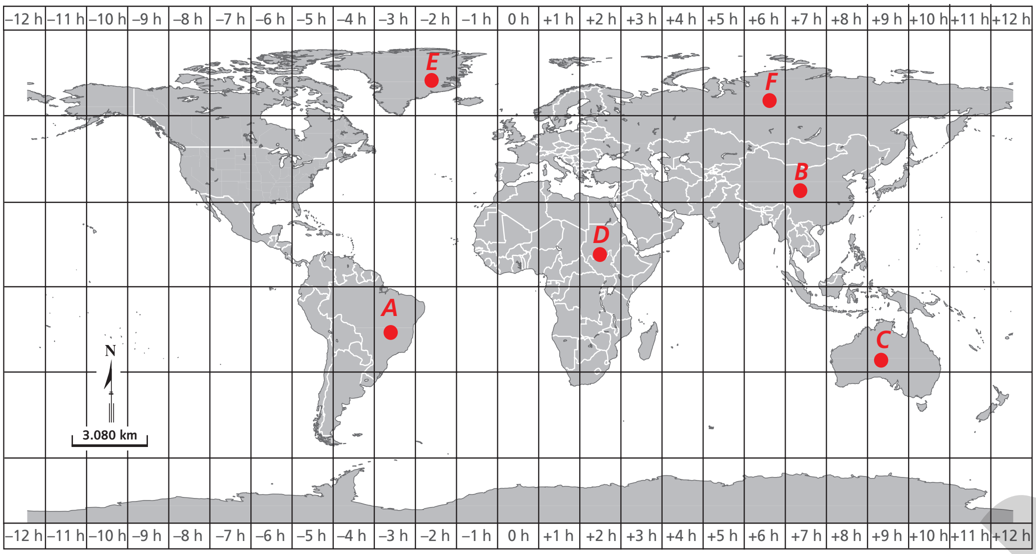
Fonte: FERREIRA, G. M. L. *Atlas geográfico*: Espaço mundial. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2019.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

13 Considerando o mapa de fusos horários abaixo, responda aos itens seguintes.

Fusos horários no planisfério



SONIA VAZ

Fonte: World Time Zone Map. Disponível em: <https://24timezones.com/timezone-map>. Acesso em: 1º jul. 2020.

a) Se na localidade *A* são 8 h, qual é o horário em *B*?
b) Se na localidade *C* são 20 h, qual é o horário em *D*?
c) Se na localidade *E* são 19 h do dia 12, qual é o dia e o horário na localidade *F*?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

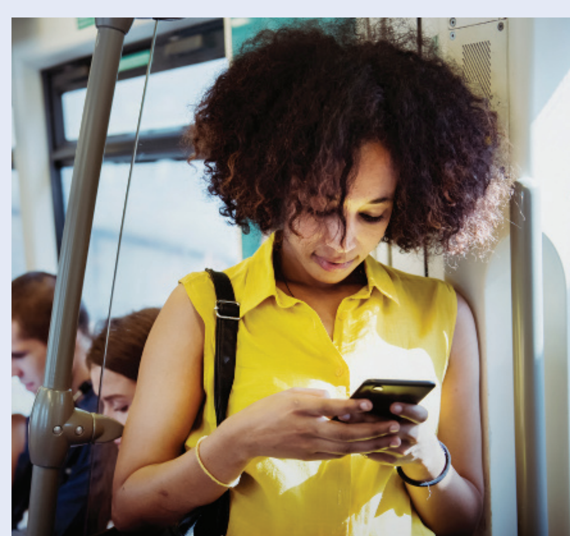
GPS como rede social: deslocamento conectado

Uma das mais interessantes características da sociedade contemporânea, chamada de **pós-modernidade**, é a necessidade que cada indivíduo desenvolveu de compartilhar informações pessoais. Praticamente tudo é publicável.

Hoje mesmo, quantas informações você já publicou? Quantas imagens e postagens já curtiu? Faça essas mesmas perguntas a seus colegas de classe e compare as respostas deles com as suas.

O desenvolvimento de tecnologias de localização e orientação proporcionou melhorias na vida da população mundial. Os deslocamentos de automóveis podem ser realizados de maneira mais inteligente, mais rápida e econômica. O uso de tecnologias de posicionamento global, como o GPS, possibilitou também o surgimento de redes sociais de comunicação e orientação de deslocamentos.

Há aplicativos para *smartphones* que calculam a posição global dos usuários e possibilitam, ainda, que sejam compartilhadas informações, como região preferida, trajetos comuns, horários de entrada e saída do trabalho, endereço profissional, entre outras.



RAWPIXEL/SHUTTERSTOCK

O GPS de *smartphones* também passou a ser amplamente usado por usuários de transportes coletivos, pois traz informações, por exemplo, de linhas e trajetos de ônibus e trens. Foto de 2018.

Observação

Pós-modernidade é uma forma de classificação da sociedade contemporânea, caracterizada principalmente pela velocidade das transformações tecnológicas, hiperconectividade, redução das barreiras de tempo e espaço e questionamento de estruturas sociais rígidas.

Além disso, há aplicativos com recursos de segurança, que possibilitam compartilhar a localização com alguém da sua agenda de contatos, permitindo, por exemplo, que um familiar acompanhe seu deslocamento.

Nesse tipo de aplicativo, tão importante quanto a posição global do celular é o compartilhamento de informações pelos usuários. Podem-se comunicar acidentes, perigos, policiamento, postos de abastecimento etc. Ao mesmo tempo que beneficia os usuários, pode também enganá-los.

Observe que, quando uma rua ou avenida ficam sobrecarregadas, os usuários podem começar a sinalizar no aplicativo que há congestionamento, influenciando o deslocamento dos demais da mesma rede. No entanto, é possível que uma rota esteja comprometida, mas, se os usuários não compartilharem as informações, o posicionamento global não será suficiente para detecção do trânsito.

Outras situações igualmente complexas podem ser exploradas, como nos casos em que o aplicativo tenta otimizar o tempo de deslocamento e acaba sugerindo trajetos sem pedágios, porém com trechos de estrada sem asfalto e distâncias mais longas do que as frequentemente percorridas pelos usuários. O desenvolvimento de tecnologias e aplicativos de deslocamento tem sido apontados, por muitos estudiosos, como estratégias promissoras para superação de problemas de grandes centros urbanos.


BETO BARATA/FOTOARENA

Smartphones e aparelhos de GPS podem ser úteis tanto para motoristas quanto para ciclistas, que também trafegam nas cidades. Ciclofaixa em Brasília (DF). Foto de 2016.

Acredita-se que, com o apoio de tecnologias e de inteligência artificial, poderão surgir **cidades inteligentes** (*smart cities*).

Nas cidades inteligentes, com o uso de tecnologias de orientação e localização, será possível eliminar os congestionamentos e reduzir o tempo de deslocamento dos trabalhadores, aumentando o tempo disponível para o lazer.

Atualmente estão disponíveis aplicativos para deslocamentos mais inteligentes, para deslocamentos compartilhados, para grandes trajetos etc.

O que pouco se discute é que as cidades inteligentes não necessariamente serão cidades mais justas. A diminuição do tempo no percurso casa–trabalho–casa pode, sim, significar alguma melhora na qualidade de vida para a população que reside muito distante de seu local de trabalho, mas muitas outras medidas e políticas públicas devem acompanhar o desenvolvimento de tecnologias de deslocamento.

Experimente realizar a seguinte pesquisa: elabore um questionário *on-line* para mapear quanto tempo, em média, seus amigos e familiares demoram para se deslocar no percurso casa–escola–casa, ou também casa–trabalho–casa. Aproveite para identificar a distância percorrida e se utilizam algum aplicativo para facilitar o percurso.

Separe em grupos de homens e mulheres e crie distribuições de faixa etária, por exemplo: até 20 anos; de 20 a 30 anos; de 30 a 40 anos; acima de 40 anos. Tente analisar os dados. Quem passa mais tempo se deslocando, os homens ou as mulheres? Os mais novos ou os mais velhos? Trabalhadores ou estudantes?

Em seguida, realize uma breve revisão bibliográfica, uma pesquisa em livros e artigos, e identifique em que posição o Brasil se encontra no *ranking* de países com maiores congestionamentos no mundo.

Compartilhe os dados dessa pesquisa, por exemplo, em uma de suas redes sociais ou por meio de cartazes fixados na sala de aula e dialogue com colegas de classe a respeito dos dados encontrados por todos. Podem construir um gráfico geral que permitirá uma visão ampliada do cenário do deslocamento na região.

Fonte dos dados: HALL, S. *A identidade cultural na pós-modernidade*. 10. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2005.
ANDRADE, J. N.; GALVÃO, D. C. O conceito *de smart cities* aliado à mobilidade urbana. *HUM@NÆ*. Questões controversas do mundo contemporâneo, v. 10, n. 1, 2016.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

14 De que forma a orientação e a localização compõem uma rede social?

Texto complementar

Como os aviões se orientam durante o voo?

NIKITICH VIKTORIYA/SHUTTERSTOCK

Aviões comerciais contam com sistemas de localização de última geração. Foto de 2019.

Já se perguntou como os pilotos se orientam durante um voo? Diferente do nosso dia a dia atrás do volante com o app de navegação ligado, o cotidiano dos que conduzem enormes aeronaves comerciais é bem mais complexo.

No entanto, todo esse processo se apoia em inúmeros instrumentos de precisão, que permitem aos pilotos realizar a navegação aérea de forma segura. [...]

[...] Neste artigo, falaremos de alguns deles.

Radar

O radar meteorológico é um dos principais equipamentos de navegação de um avião. Fixado no radome ou nariz da aeronave, o dispositivo possui uma antena plana que varre de forma eletrônica centenas de quilômetros à frente.

Ele tem como missão buscar mudanças climáticas que possam afetar o voo, como tempestades, turbulências ou as chamadas "tesouras de vento", alterações rápidas de velocidade do ar, que tornam a viagem mais complexa no que diz respeito à segurança.

[...]

Transponder

Este equipamento de comunicação é de suma importância para a navegação aérea como um todo. Trata-se de um dispositivo de rádio que envia e recebe dados codificados com informações sobre a identificação do avião, sua rota, altitude, velocidade e posição.

Ele se comunica através de um radar em solo e este replica seu sinal para o controle de tráfego aéreo, que assim sabe exatamente onde o avião está, para onde vai e de onde vem. Se for desligado, o avião simplesmente desaparece do controle aéreo e fica invisível também aos demais aviões.

[...]

TCAS

O *Traffic Collision Avoidance* ou TCAS é uma evolução do *Transponder*. Trata-se literalmente de um sistema anticolisão de tráfego que utiliza o *Transponder* para que as aeronaves em voo "conversem" entre si com a troca de dados digitais [...].

De posse dessas trocas de informações, o TCAS utiliza um potente processador para formar um mapa tridimensional das proximidades da aeronave, facilitando a localização de cada uma delas e fazendo as correções necessárias para que se evite a colisão com outro avião.

Se um *transponder* estiver desligado, o avião em questão torna-se um potencial perigo para esse mapa 3D, pois o TCAS não terá dados dele e nem dos demais aviões durante a "conversa". [...]

GPS

O *Global Positioning System* ou Sistema Global de Posicionamento é aquele mesmo que você usa em seu smartphone. Entretanto, nos aviões, sua importância é muito maior. Trata-se de um dispositivo ligado a uma rede de satélites controlada pelo Departamento de Defesa dos EUA.

Através da triangulação de satélites da rede, a posição de um determinado objeto é identificada e repassada ao receptor, que assim poderá saber exatamente onde está no espaço aéreo. Dados do GPS são enviados por *Transponder* e TCAS, por exemplo, indicando a localização para outros.

ILS

O sistema de pouso por instrumento (*Instrument Landing System*, em inglês) é uma importante ferramenta para aproximação segura da pista, especialmente com visibilidade baixa ou nula. Ele se baseia nas informações obtidas por meio de rádio em frequência VHF para localização e UHF para rampa de planeio ou descida.

O primeiro (VHF) permite que a aeronave se alinhe perfeitamente no eixo da pista, enquanto o segundo indica a rampa de descida correta. As informações para o ILS são envidas por um rádio transmissor (LOC de *Localizer*) a 300 m da cabeceira da pista.

Já o *Glide Path* (GP) é a outra antena de rádio para o ILS, localizada no máximo a 380 m da pista e que emite sinal automático em UHF para que o ângulo de descida da aeronave seja correto para aquele aeroporto.

[...]

IFR

O IFR (sigla em inglês) ou Regras de voo por instrumentos não é um sistema de navegação,

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

mas uma normativa que determina como os aviões voam em espaços aéreos gerenciados ou não por um controlador de tráfego.

As regras variam de acordo com o país, mas todos são signatários da Convenção de Chicago e seguem as normas da OACI. Em outras palavras, o IFR é um conjunto de normas para pilotos que se orientam pela instrumentação de bordo.

Elas determinam a separação entre aeronaves em voo, feitas pelo controle de tráfego aéreo por comunicação via rádio ou por meio de *Transponder* e TCAS. Tempo, distância e altitudes são os principais parâmetros para que haja uma separação entre os aviões em diferentes rotas.

[...]

VFR

Se o IFR rege a navegação por instrumentos, quando o piloto não pode ver o horizonte e determinar sua posição, VFR são as Regras do voo visual. Nesse caso, mais "purista", digamos assim, os procedimentos para orientação em voo são de responsabilidade do piloto.

Este deve determinar visualmente direção, altitude e terreno, assim como observar outros aviões, nuvens, tempestades, entre outros obstáculos e referências sem a ajuda de instrumentos de precisão. [...]

Cabe lembrar que, no VFR, o piloto se orienta também por comunicação com o controlador de voo, que determinará o procedimento correto para a aproximação na pista ou mesmo após a decolagem.

Waypoint

Durante a navegação aérea, existem pontos de notificação ou simplemente "fixos" onde o avião deve passar em determinada rota. Esses fixos são virtuais e indicados por um nome próprio, sendo coordenadas de latitude e longitude, adicionadas ao sistema GPS.

Alguns fixos (*fly by*) não precisam ser alcançados durante o voo, mas outros (*fly over*) necessitam que o avião passe pelo marcador de forma obrigatória.

[...]

VOR

Esta é a navegação por rádio, que utiliza uma série de estações de emissão de ondas direcionais em alta frequência (VHF). O equipamento receptor a bordo determina sua direção com base em radiais, que são os graus em relação a uma estação VOR, que tem 360 radiais e funciona como uma bússola.

[...]

GPWS e EGPWS/TAWS

Sistema de alerta de aproximação do solo. Trata-se de um sistema de segurança muito importante para as fases iniciais ou terminais do voo. É um alerta sonoro, visual ou vocal (aquela voz masculina ou feminina nos vídeos de pouso).

O GPWS utiliza principalmente o altímetro e outros dados do ILS para determinar a aproximação da aeronave em relação ao solo, dando uma série de alertas ao piloto durante decolagens e pousos.

Esse sistema tem alguns modos de alerta, sendo eles: Taxa de descida excessiva, Taxa de excessiva proximidade com o solo, Perda de altitude após decolagem, Desvio excessivo para abaixo do ILS, Proteção de ângulo de viragem excessivo e Proteção contra Tesoura de Vento.

Entretanto, o GPWS foi substituído em aeronaves comerciais (mas ainda usado na aviação geral) pelo EGPWS/TAWS. Este é o mesmo sistema, só que melhorado com GPS, permitindo que o piloto veja a topografia local e antecipe ações, assim como alerta sobre obstáculos na aproximação em mau tempo, como uma montanha, por exemplo.

Fonte: MORIAH, Ricardo. Como os aviões se orientam durante o voo? *Airway*, 4 fev. 2019. Disponível em: <https://www.airway.com.br/como-os-avioes-se-orientam-durante-o-voo/>. Acesso em: 17 ago. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.

Não escreva no livro.

De acordo com o a leitura do texto acima, responda aos itens seguintes.

1. O que é e qual é a função do radar meteorológico?
2. O *transponder* é um equipamento de comunicação do avião. Qual é a consequência do desligamento do *transponder* durante o voo?
3. Discorra sobre o TCAS.
4. Em um pouso por instrumentos, um importante equipamento é o sistema ILS. Escreva um breve texto sobre esse sistema.
5. O que é e para que serve o IFR?
6. Quais são as obrigações do piloto quando tem de fazer uso das regras VFR?
7. Explique a diferença entre pontos fixos *fly by* e *fly over*.
8. Cite alguns modos de alerta do sistema de aproximação do solo (GPWS).

CAPÍTULO

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

As aves migratórias voam em bando e na forma angular para gastar menos energia e cobrir distâncias maiores. Ao voar dessa maneira, cada ave cria atrás de si uma região menos densa de ar, facilitando o voo da que vem na sequência. Periodicamente elas revezam as posições. A economia de energia com essa formação faz com que os pássaros cheguem até 70% mais longe do que se voassem desordenados. Na imagem, vemos um grupo de gansos-do-egito (*Alopochen aegyptiacus*) no Parque Nacional Amboseli, no Quênia. Foto de 2017.

Matemática para quê? A resposta está à nossa volta, pois dificilmente passamos um dia sem o envolvimento com a Matemática. Ela está presente ao calcularmos comprimentos, áreas e volumes; ao medirmos o tempo; ao efetuarmos uma compra etc.

Contudo, a atuação da Matemática é ampla e vai muito além dessas situações triviais, como no uso da internet; na migração de animais selvagens; em estudos de mobilidade urbana; na propagação de doenças infecciosas; no impacto social causado pelas variações nos preços de produtos de consumo; nos sistemas eleitorais; em estimativas de crescimento populacional, entre muitos outros exemplos.

Enfim, a Matemática se apresenta em praticamente todos os ramos do conhecimento e investigação humanos. Mas como traduzir esses eventos para a linguagem matemática?

Descrever situações reais do cotidiano ou do universo científico e, possivelmente, resolver problemas por meio de simulações matemáticas que se assemelhem a tais circunstâncias são atribuições da **modelagem matemática**.

Simplificadamente, a modelagem matemática se resume em traduzir determinada situação do âmbito real para a linguagem algébrica ou geométrica. Para melhor entendimento desse significado, vamos exemplificá-lo com as três situações a seguir.

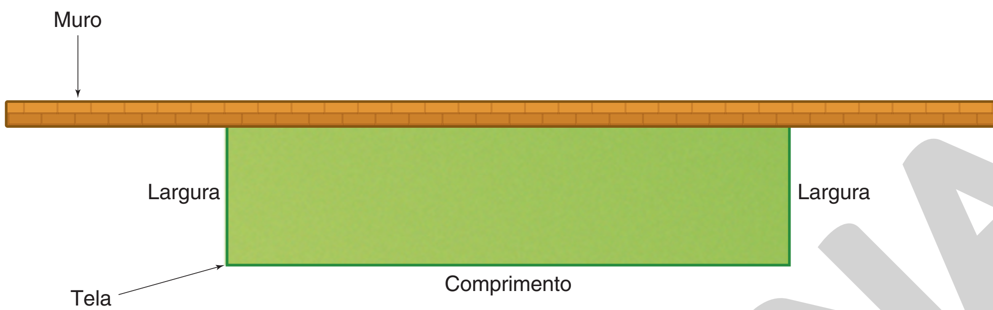
MODERNA

Modelagem na prática

Situação 1: área máxima

Para a construção de um canil, Fernando resolveu cercar um terreno retangular, usando uma tela com 20 m de comprimento e um muro, já existente, cujo comprimento é maior que o da tela. A tela deve cercar três lados do retângulo, e o muro, o quarto lado.

O esquema a seguir ajuda a visualizar melhor o cercado.

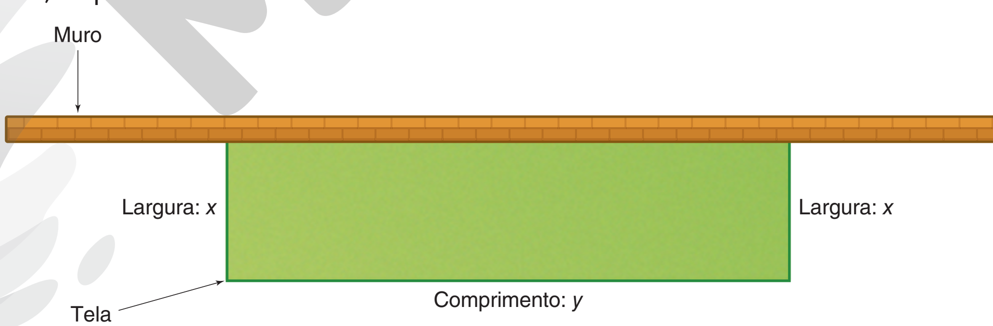


Procurando determinar a maior área possível que pode ser cercada com a tela e o muro, Fernando testou alguns valores para o comprimento e a largura do canil.

TELA	CANIL		
Comprimento (m)	Comprimento (m)	Largura (m)	Área (m^2)
20	18	1	18,0
20	17	1,5	25,5
20	16	2	32,0
20	15	2,5	37,5
20	14	3	42,0
20	13	3,5	45,5

Dados fictícios.

Como estava difícil encontrar a área máxima por tentativa, Fernando pediu ajuda ao seu irmão, Fábio, estudante de Matemática. Fábio explicou ao irmão que, para modelar matematicamente o problema, seria necessária a introdução de variáveis. Por isso, no retângulo do esquema anterior, Fábio indicou por x e y a largura e o comprimento, em metro, respectivamente.



Depois, aplicou o raciocínio descrito a seguir.

A soma das três medidas x, x e y é o comprimento da tela, ou seja, $x + x + y = 20$, de onde obtemos:

$$y = 20 - 2x$$

Como a área A do terreno retangular cercado para o canil é dada por $A = x \cdot y$, em que $y = 20 - 2x$, temos $A(x) = x(20 - 2x)$, ou seja:

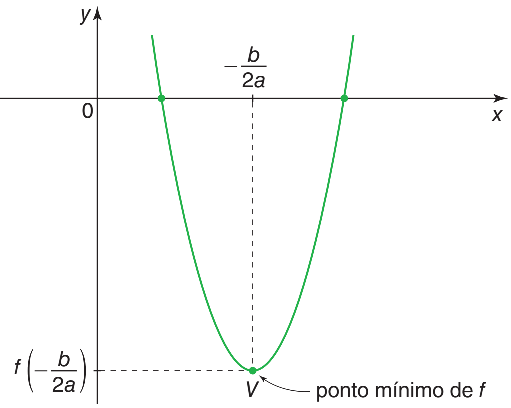
$$A(x) = -2x^2 + 20x$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

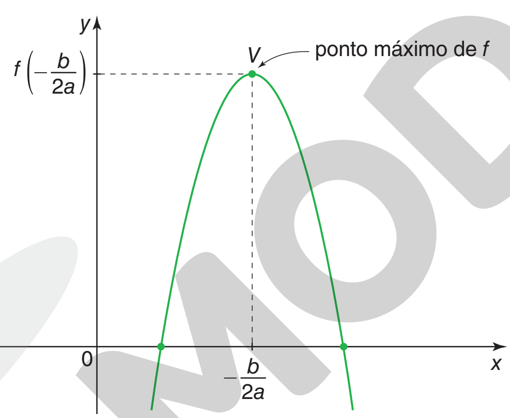
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fábio explicou que toda lei de associação da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, representa uma função polinomial do 2º grau. O gráfico desse tipo de função é uma parábola, obedecendo às seguintes condições:

- Se o coeficiente a for positivo, a parábola terá a concavidade voltada para cima. Portanto, f assumirá um valor mínimo, calculado por $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$. O valor $x = -\dfrac{b}{2a}$ é chamado de abscissa do ponto mínimo do gráfico de f.



- Se o coeficiente a for negativo, a parábola terá a concavidade voltada para baixo. Portanto, f assumirá um valor máximo, calculado por $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$. O valor $x = -\dfrac{b}{2a}$ é chamado de abscissa do ponto máximo do gráfico de f.



Assim, no caso da função $A(x) = -2x^2 + 20x$, temos:

$$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{20}{2 \cdot (-2)} = 5$$

Esse é o valor de x para que a função A atinja o valor máximo. Calculando $A(5)$, determinamos a área máxima:

$$A(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 \Rightarrow A(5) = 50$$

Dessa maneira, Fábio concluiu que a área máxima que o retângulo poderá ter é 50 m², o que ocorre quando a largura x for 5 m e, consequentemente, o comprimento y, 10 m.

Fernando agradeceu a ajuda de Fábio e construiu um espaçoso e aconchegante canil.

Nesse exemplo, observe as etapas envolvidas no processo de modelagem matemática:

1ª etapa: Identificação e compreensão do problema

Fernando reuniu e organizou dados importantes, além de identificar e compreender seu projeto por meio de uma representação simplificada da situação real (um desenho).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

2ª etapa: Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas

Era necessário conhecer a fórmula da área de um retângulo para testar as medidas dos lados em busca da área máxima do cercado. Construindo uma tabela, Fernando testou várias medidas.

3ª etapa: Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática

Neste ponto, Fábio, irmão de Fernando, foi quem deu uma modelagem algébrica ao problema, interpretando-o por meio do valor máximo de uma função polinomial do 2º grau.

4ª etapa: Apresentação e validação dos resultados

Após calcular as medidas que maximizam a área do cercado, Fábio as compara com a tabela construída por Fernando, mostrando que a área obtida pelo modelo é maior que as áreas calculadas por tentativa. Mas o que valida mesmo o resultado são os teoremas relativos à otimização da função polinomial do 2º grau.

Essas quatro etapas podem ser generalizadas para qualquer modelagem.

Situação 2: cálculo de uma população

As Ciências Humanas e Sociais Aplicadas estudam os aspectos quantitativos das populações humanas, área chamada **demografia humana**. As pesquisas incluem análises sobre natalidade, mortalidade, migrações, produção econômica, número de indivíduos das populações, distribuição étnica, entre outros. Assim, na elaboração de um modelo demográfico matemático, uma ou mais variáveis relativas a esses aspectos podem ser consideradas.

Para ilustrar, no estudo quantitativo da população humana P de uma cidade, convenciona-se que:

- $P(t)$ representa o número de indivíduos da população P no instante t, adotando o ano como unidade de tempo;
- Δt representa um intervalo de tempo, em ano, por exemplo, Δt pode representar 3 anos, 2 anos, 1 ano, $\frac{1}{2}$ ano etc.;
- n representa a taxa percentual anual de natalidade;
- m representa a taxa percentual anual de mortalidade.

Para elaborar um modelo que relacione apenas essas grandezas, vamos admitir que as taxas n e m sejam constantes. Assim, o número de indivíduos no instante $t + \Delta t$ é dado por:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + (\text{número de nascimentos no intervalo } \Delta t) - (\text{número de mortes no intervalo } \Delta t)$$

Quanto menor for o intervalo Δt, mais eficiente será esse modelo.

Observando que no intervalo de tempo Δt o número de nascimentos é dado por $P(t) \cdot n \cdot \Delta t$, e que o número de mortes é dado por $P(t) \cdot m \cdot \Delta t$, chegamos à equação:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + P(t) \cdot n \cdot \Delta t - P(t) \cdot m \cdot \Delta t$$

que é equivalente a:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + P(t) \cdot \Delta t \cdot (n - m)$$

Como a diferença $n - m$ é constante, vamos representá-la por k, obtendo:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + P(t) \cdot \Delta t \cdot k \Rightarrow P(t + \Delta t) - P(t) = P(t) \cdot \Delta t \cdot k$$

$$\therefore \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = k \cdot P(t)$$

Demonstra-se que, para Δt tendendo a zero, essa igualdade se torna equivalente a:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$$

em que P_0 representa a população inicial, e o número e é irracional, chamado **número de Neper**, que vale, aproximadamente, 2,72.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Em um instante, denominado instante 0 (zero), a população de uma cidade era de 100.000 habitantes. Durante os 10 anos seguintes, constatou-se que a taxa anual de nascimentos foi constante, 2,7%, e a taxa anual de mortes também foi constante, 1,2%. Calcule o número de habitantes dessa cidade ao final desses 10 anos, supondo que, nesse período, não tenha havido movimentos imigratórios nem emigratórios na cidade.

1ª etapa: Identificação e compreensão do problema

Inicialmente, observamos que a taxa de variação anual k de crescimento da população dessa cidade é constante e é dada por $k = 2{,}7\% - 1{,}2\% = 1{,}5\%$.

Queremos calcular a população $P(t)$ 10 anos após o instante 0 (zero), ou seja, $t = 10$, sabendo que a população inicial P_0 é igual a 100.000 habitantes, e a taxa de variação anual k de crescimento é igual a 1,5%.

2ª etapa: Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas

Vamos aplicar o modelo populacional $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$.

3ª etapa: Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática

Queremos calcular a população $P(t)$ 10 anos após o instante 0 (zero), ou seja, $t = 10$, sabendo que a população inicial P_0 é igual a 100.000 habitantes, e a taxa de variação anual k de crescimento é igual a 1,5%, logo:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt} \Rightarrow P(10) = 100.000 \cdot e^{0{,}015 \cdot 10}$$

4ª etapa: Apresentação e validação dos resultados

Recorrendo a uma calculadora eletrônica, temos:

$$P(10) = 100.000 \cdot e^{0{,}015 \cdot 10} \Rightarrow P(10) \approx 116.183$$

Portanto, 10 anos após o instante 0 (zero), a população dessa cidade era de, aproximadamente, 116.183 habitantes.

Outro modelo demográfico matemático possível

Podemos modelar esse estudo demográfico de outro modo, relacionando as mesmas grandezas: P_0, t, $P(t)$ e k.

Observando que k é a taxa percentual anual de variação da população em cada intervalo Δt, e adotando cada intervalo Δt como 1 ano, podemos raciocinar do seguinte modo: uma população inicial de 100.000 indivíduos cresceu à taxa de 1,5% o ano, durante 10 anos consecutivos. Determine o número de indivíduos dessa população ao final desses 10 anos.

1ª etapa: Identificação e compreensão do problema

Queremos calcular a população $P(t)$ 10 anos após o instante 0 (zero), ou seja, $t = 10$, sabendo que a população inicial P_0 é igual a 100.000 habitantes, e a taxa de variação anual k de crescimento é igual a 1,5%.

2ª etapa: Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas

Para resolver essa questão, podemos aplicar o mesmo raciocínio usado no cálculo do montante M, acumulado pela aplicação de um capital C, durante t anos à taxa anual constante i de juros compostos:

$$M = C(1 + i)^t$$

3ª etapa: Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática

Convertendo esse modelo para o estudo demográfico, temos:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + k)^t$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

O estatístico inglês George Edward Pelham Box (1919-2013) declarava em suas palestras que "todos os modelos estão errados, mas alguns são úteis". Em sua perspectiva, as informações imprecisas não devem intimidar o estatístico, pois, a cada modelo imperfeito, acrescentam-se novas informações corretas, que conduzem a um novo modelo, mais próximo da realidade.

4ª etapa: Apresentação e validação dos resultados

Calculando $P(10)$, para $P_0 = 100.000$ e $k = 0{,}015$, chegamos a:

$$P(10) = 100.000 \cdot (1 + 0{,}015)^{10} \Rightarrow P(10) \approx 116.054$$

Concluímos, então, que a população atingiu 116.054 habitantes, aproximadamente, ao final dos 10 anos considerados.

Comparando os dois modelos

Observe os valores aproximados obtidos no problema anterior com cada modelo:

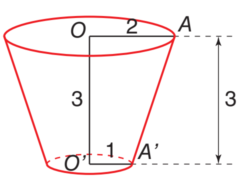
- Modelo 1: $P(t) = P_0 \cdot e^{kt} \Rightarrow P(10) \approx 116.183$
- Modelo 2: $P(t) = P_0 \cdot (1 + k)^t \Rightarrow P(10) \approx 116.054$

Não se admire com o fato de os resultados não serem exatamente iguais, pois, como o próprio nome sugere, trata-se de modelos; portanto, podem não refletir fielmente os resultados reais, apesar de estarem muito próximos disso. Por causa dessa proximidade é que os modelos são tão importantes em estudos científicos.

Situação 3: usando figuras como modelos

O desenho é um poderoso recurso na modelagem de problemas que envolvam visão espacial. Como exemplo, vamos calcular a capacidade, em litro, de um tanque cuja forma interna é a de um tronco de cone circular reto com 3 m de altura e bases paralelas, com raios de 1 m e 2 m.

1ª etapa: Identificação e compreensão do problema



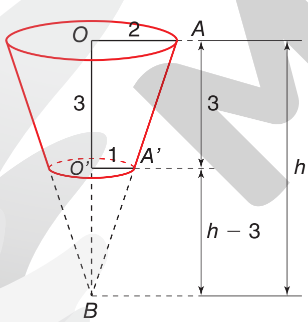
Adotamos o modelo ao lado para representar o tanque, do qual queremos calcular a capacidade.

2ª etapa: Experimentação e/ou conhecimento das fórmulas matemáticas aplicadas

Devemos calcular o volume de um tronco de cone.

3ª etapa: Estruturação e interpretação do problema por meio da Matemática

Representamos o prolongamento das geratrizes desse tronco, modelando o cone que o contém, e indicamos por h a altura, em metro, desse cone:



Pela semelhança dos triângulos OAB e $O'A'B$, temos:

$$\frac{2}{1} = \frac{h}{h-3}$$

De onde deduzimos que $h = 6$ m.

Logo, o volume V do tanque, em metro cúbico, é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 7\pi$$

Substituindo π pelo valor aproximado 3,14, deduzimos que o volume V é, aproximadamente, expresso por:

$$V = 21{,}98 \text{ m}^3$$

ou, de modo equivalente:

$$V = 21.980 \text{ dm}^3$$

4ª etapa: Apresentação e validação dos resultados

Como cada decímetro cúbico equivale a 1 litro, concluímos que a capacidade aproximada do tanque é de 21.980 L.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 Muitos conceitos aplicados em estudos de populações humanas podem ser extrapolados para o estudo de qualquer população. Suponha, por exemplo, que um estudo realizado durante 10 horas consecutivas revelou que o número de indivíduos de uma população de bactérias cresceu 50% a cada hora. Sabendo que, no instante inicial desse estudo, a população tinha 2.000 indivíduos, responda aos itens seguintes, utilizando uma calculadora, se necessário.

a) Elabore uma equação que expresse o número P de indivíduos dessa população em função do tempo t, em hora, a partir do instante inicial do estudo.

b) Calcule o número de indivíduos dessa população após 5 horas do início do estudo.

c) Calcule o número de indivíduos dessa população ao final do estudo.

d) Em quanto tempo, após o início do estudo, a população de bactérias dobrou?


KATERYNA KON/SHUTTERSTOCK

Proliferação de bactérias e fungos em uma placa de Petri.

2 O departamento de planejamento de uma indústria de tubos para encanamentos de PVC (policloreto de vinila) encaminhou ao departamento de compras a programação da produção para os próximos 10 dias. Para um dos setores da indústria, o plano é a fabricação diária de 1.000 m lineares de canos cilíndricos com 10 cm de diâmetro interno e 11 cm de diâmetro externo. Assim, o comprador deve encomendar ao fornecedor uma quantidade suficiente de PVC. Sabendo que a densidade do PVC é de 1,4 g/cm^3, e supondo que a massa do material encomendado seja exatamente a mesma utilizada na fabricação dos canos, calcule a quantidade de PVC, em tonelada, que deve ser adquirida.

3 **Efeito estufa** é o nome dado à retenção de calor na Terra, possibilitada pela concentração de diversos gases na atmosfera, que formam uma camada térmica isolante ao redor do planeta. Graças a esse fenômeno natural, a temperatura média na superfície da Terra se mantém em torno de 16 °C. Sem isso, esse valor poderia chegar a −18 °C. Logo, o efeito estufa é fundamental para a existência e a manutenção da vida no planeta. Contudo, a intensificação dele pela ação humana é motivo de preocupação.

Estudos têm mostrado que as indústrias, as queimadas, os automóveis etc. liberam anualmente na atmosfera bilhões de toneladas de gases, que aumentam de forma significativa a espessura da camada que mantém o planeta aquecido. A consequência é o aquecimento global.


IGOR GROCHEV/SHUTTERSTOCK

A emissão de gases intensifica o efeito estufa e contribui para o aquecimento global. Na imagem, a maior usina a carvão da China, em Shangai. Foto de 2017.

De acordo com a Cetesb (Companhia Ambiental do Estado de São Paulo), há quase um consenso entre os cientistas de que, se as emissões de gases na atmosfera não diminuírem, a consequência mais direta será o aumento médio anual de 0,058 ºC da temperatura da Terra, a partir de 2000 até 2100.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Supondo que a temperatura média da Terra fosse 16 °C no ano 2000, faça o que se pede.

a) Indicando os anos 2000, 2001, 2002, ..., 2100 pelos números 0, 1, 2, 3, ..., 100, respectivamente, obtenha uma equação que expresse temperatura média M do planeta, em grau Celsius, em função do tempo t, em ano, para qualquer valor de t do intervalo de 0 a 100.

b) Qual é a estimativa da temperatura média da Terra em 2045?

c) Em que ano a temperatura média do nosso planeta será estimada em 18,9 °C?

4 O departamento comercial de uma rede de supermercados constatou que, quando o preço do quilograma de filé *mignon* é R$ 40,00, são vendidos 500 kg por semana; para cada aumento de R$ 1,00 nesse preço, 10 kg deixam de ser vendidos semanalmente. Essas constatações serão usadas pelos técnicos do departamento para estabelecer o preço do quilograma de filé *mignon* para que a receita semanal com a venda desse produto seja a maior possível. Qual deve ser esse preço?

5 O gerente de um banco sugeriu a um cliente que diversificasse suas aplicações financeiras e indicou dois fundos de investimentos, A e B. Seguindo essas sugestões, o cliente aplicou um terço de seu dinheiro no fundo A e o restante, no fundo B. Ao final de um ano, o fundo A apresentou um prejuízo de 6%, e o fundo B apresentou um ganho de 21%. Determine a taxa anual de rentabilidade que o cliente obteve com suas aplicações nesse ano.

6 Ao planejar um processo de produção, admite-se um total fixo de recursos disponíveis, inteiramente aplicado na produção, e que o nível tecnológico não se altera no decorrer do processo. Sob essas condições, fica estabelecido o limite de produção, cuja representação gráfica é chamada, na Economia, de curva de possibilidade de produção (CPP). Essa curva representa as possíveis escolhas que podem ser feitas no âmbito da produção, com os recursos disponíveis.

No planejamento da produção de muitos itens, as possíveis escolhas representadas pela CPP dependem de múltiplas variáveis, o que exige um estudo informatizado. Para exemplificar esse conceito de modo simples, vamos considerar o problema em sua forma mais básica, em que só podem ser produzidos dois bens, conforme o exemplo a seguir.

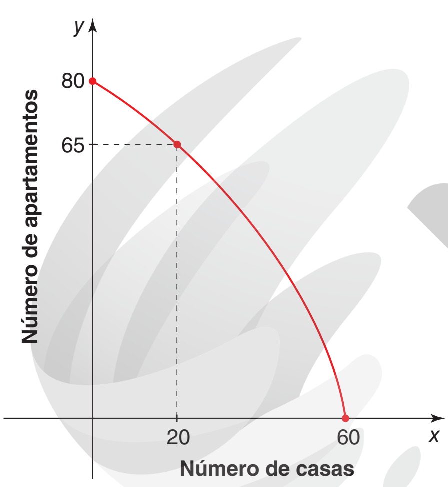
Um construtor destinou determinada verba à construção de casas de alto padrão ou de apartamentos populares. O dinheiro pode ser empregado apenas na construção de casas, apenas na construção de apartamentos ou, ainda, uma parte na construção de casas e a outra na construção de apartamentos.

Após o estudo das possibilidades de construção com os recursos disponíveis, o construtor obteve o gráfico ao lado, em que cada ponto (x, y) representa o número aproximado x de casas e o número aproximado y de apartamentos a serem construídos. Esses números podem, eventualmente, representar o número exato de casas e de apartamentos.

Esse gráfico apresenta a curva de possibilidade de produção, que pode ser aproximada pelo gráfico de uma função polinomial do tipo $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Possibilidades de construção

ERICSON GUILHERME LUCIANO



Dados fictícios.

De acordo com essas informações, faça o que se pede.

a) Determine a função polinomial do 2º grau cujo gráfico passa pelos três pontos destacados no gráfico acima. Essa função representa uma aproximação das possibilidades de produção de casas e/ou apartamentos.

b) Se o construtor optar pela construção de 30 casas, qual será o número de apartamentos que poderá construir?

c) Se o construtor optar pela construção de 20 apartamentos, qual será o número de casas que poderá construir?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

Conselhos municipais: democratizando as decisões comunitárias

Como meio de aproximar as ações públicas das necessidades das comunidades, espalharam-se pelo país iniciativas como conselhos municipais de educação, saúde, finanças e de lazer. Essas iniciativas visam alinhar os interesses e as necessidades de determinadas populações às possibilidades de execução dos governos municipais. A modelagem matemática é uma ferramenta importante em situações como essa. Observe a situação a seguir.

Após algumas reuniões do conselho municipal, a prefeitura de uma cidade resolveu atender às reivindicações da população de três bairros vizinhos entre si e dar encaminhamento ao projeto de construção de uma praça pública de esporte e lazer.

Todos os moradores da região gostariam que as praças fossem construídas perto de suas residências; porém, a escolha do lugar mais adequado dependeria de um estudo que levasse em conta a população total de cada bairro e o **índice de vulnerabilidade social**.

Observação

Conselho municipal é uma instituição formada por membros da sociedade civil e da prefeitura. Seu objetivo é incluir a participação popular na gestão do município, contribuindo com propostas e implementação de políticas públicas.

Observação

A expressão **vulnerabilidade social** diz respeito à situação socioeconômica de grupos de pessoas com poucos recursos financeiros, de moradia, educação e acesso a oportunidades para seu desenvolvimento como cidadão. O Índice de Vulnerabilidade Social (IVS) varia de 0,000 a 1,000, escalonado nas seguintes faixas:

- 0,000 a 0,200 – muito baixa VS;
- 0,201 a 0,300 – baixa VS;
- 0,301 a 0,400 – média VS;
- 0,401 a 0,500 – alta VS;
- 0,501 a 1,000 – muito alta VS.

Fonte dos dados: *Atlas da Vulnerabilidade Social*. Disponível em: <http://ivs.ipea.gov.br/index.php/pt/>. Acesso em: 24 jun. 2020.

Após esse estudo, o secretário de desenvolvimento urbano do município apresentou um modelo a ser apreciado pelo conselho municipal, defendendo sua plausibilidade, visto que não havia grande diferença no número de habitantes dos três bairros. De acordo com o modelo:

- a população de cada bairro seria dividida segundo três faixas de índice de vulnerabilidade social: [0,000; 0,300], [0,301; 0,500] e [0,501; 1,000];
- para cada bairro seria calculada a média aritmética ponderada entre as populações dessas três faixas, com pesos respectivamente iguais aos valores médios das faixas, ou seja, 0,150; 0,4005 e 0,7505;
- o bairro com a maior média seria o escolhido para a construção da praça.

É importante destacar que o modelo proposto pelo secretário é apenas um dentre vários possíveis. O modelo poderia levar em conta outras variáveis, como o número de pessoas fisicamente ativas e o número de pessoas sedentárias de cada bairro, a idade média dos moradores, a distância média percorrida pelos moradores até o local escolhido etc.

Enfim, quanto mais variáveis relevantes forem incorporadas ao modelo, mais confiável ele será.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADES Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.

Não escreva no livro.

7 Suponha que os três bairros citados na situação descrita no texto anterior sejam *A*, *B* e *C*, cujas populações por faixa de índice de vulnerabilidade social são apresentadas nas tabelas abaixo.

Bairro *A*	
IVS	**População**
[0,000; 0,300]	8.000
[0,301; 0,500]	10.000
[0,501; 1,000]	6.000

Bairro *B*	
IVS	**População**
[0,000; 0,300]	7.000
[0,301; 0,500]	11.000
[0,501; 1,000]	5.000

Bairro *C*	
IVS	**População**
[0,000; 0,300]	10.000
[0,301; 0,500]	9.000
[0,501; 1,000]	4.000

Dados fictícios.

De acordo com a proposta do secretário de desenvolvimento urbano do município, em qual dos bairros deveria ser construída a praça?

8 Outra estratégia, além dos conselhos municipais, que tem se tornado bastante comum no território nacional, é a realização de consultas públicas *on-line*. Para isso, os governos federal, estadual e municipal criam plataformas multimídia em que a população possa emitir sua opinião sobre diferentes projetos de políticas públicas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por exemplo, recebeu milhares de sugestões populares por meio dos mecanismos de consulta pública e conselhos municipais.

Agora que vocês já sabem que existem formas diversificadas de participação nas decisões políticas em sua comunidade, como os conselhos municipais e as consultas públicas *on-line*, realizem as atividades a seguir.

a) Acessem o *site* da prefeitura de seu município (ou de outro município, se preferirem) e escolham uma consulta pública, realizada *on-line* ou por conselhos municipais, sobre cada uma das quatro áreas de serviços públicos: esporte e lazer, educação, saúde e segurança pública. Esses dados também podem ser obtidos diretamente na prefeitura.

b) Modelem os dados em um gráfico de colunas, cujas classes sejam as quatro áreas citadas no item **a**, e as frequências sejam os respectivos números de consultas realizadas.

c) Identificando as áreas em que houve a maior e a menor participação social, escrevam um texto que defenda por que essas áreas tiveram muita ou pouca aderência na comunidade.

d) Identifiquem a área que apresentou maiores carências da população consultada.

e) Simulem uma reunião de conselho municipal, discutindo e apresentando propostas para a melhoria da área de maior carência.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas

O crescimento desordenado da população mundial e da extração e consumo excessivos de matérias-primas resulta em desequilíbrio do ecossistema global. Da urgência das economias capitalistas em crescer sempre, e cada vez mais, decorre a escassez de recursos naturais dos mais variados tipos, entre eles, os alimentícios. Atualmente mais de 820 milhões de pessoas passam fome em todo o mundo.

Denomina-se **insegurança alimentar** a condição em que uma comunidade, ou parte dela, não tem garantido acesso regular e permanente a alimentos de qualidade, em quantidade suficiente, sem comprometer o acesso a outras necessidades essenciais, tendo como base práticas alimentares promotoras de saúde, que respeitem a diversidade cultural e que sejam ambiental, econômica e socialmente sustentáveis.

Um dos dados mais surpreendentes sobre a fome no mundo é que 30% dos 4 bilhões de toneladas de alimentos produzidos anualmente vão para o lixo. Conscientes de que o desperdício é um dos principais vilões desse contexto, líderes de Estado desenvolvem campanhas de conscientização para minimizá-lo e economizar aproximadamente US$ 1 trilhão por ano.

JOSÉ LAZARETE JÚNIOR/FOTOARENA

Estima-se que cerca de 1 bilhão e 200 milhões de toneladas de alimento acabam no lixo, todos os anos. Na imagem, descarte de alimentos no Ceagesp (Companhia de Entrepostos e Armazéns Gerais de São Paulo), na capital paulista. Foto de 2019.

Outras boas ideias sobre o combate à fome no mundo já haviam surgido, mas, infelizmente, não prosperaram. Uma das mais extraordinárias foi sugerida pelo economista estadunidense James Tobin, ganhador do prêmio Nobel de Economia em 1981, que propôs, em 1972, uma taxação de 0,1% sobre as transações financeiras especulativas internacionais. O dinheiro assim recolhido serviria para criar um fundo internacional para ajudar no combate à pobreza. Esse imposto ficou conhecido como Taxa Tobin.

Vez ou outra, artistas e esportistas de projeção promovem campanhas de arrecadação de recursos para o combate à pobreza, mas isso é pouco. É preciso uma ação efetiva dos governos internacionais que dê condições à população carente de se inserir no mercado de trabalho e prover, com dignidade, o sustento de sua família.

A Matemática pode ajudar a chegar a uma solução por meio de modelos que incorporem o maior número possível de variáveis e que demonstrem que a contribuição de cada cidadão não é um dispêndio, mas um investimento para um mundo melhor.

Fonte dos dados: Mundo está longe de cumprir metas dos Objetivos do Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionadas a alimentos e agricultura. *ONU News*. Disponível em: <https://news.un.org/pt/story/2019/07/1680491>. Acesso em: 23 jun. 2020.

BEZERRA, T. A.; OLINDA, R. A.; PEDRAZA, D. F. Insegurança alimentar no Brasil segundo diferentes cenários sociodemográficos. *Ciência & Saúde Coletiva*,. 2017, v. 22, n. 2, p. 637-651. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1413-81232017000200637&script=sci_abstract&tlng=pt>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Desperdício de comida custa quase US$ 1 trilhão por ano em todo o mundo. *ONU News*. Disponível em: <https://news.un.org/pt/story/2019/10/1689492#:~:text5Desperd%C3%ADcio%20de%20comida%20custa%20quase%20US%24%201%20trilh%C3%A3o,ano%20em%20todo%20o%20mundo&text5O%20tema%20%C3%A9%20%E2%80%9CPare%20o,quase%20US%24%201%20trilh%C3%A3o%20anuais>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Sugestão

"A França agita o debate sobre a introdução da taxa Tobin"

Nesse artigo, divulgado pela Wharton University of Pennsylvania, são discutidos os prós e contras desse imposto. Disponível em: <http://www.knowledgeatwharton.com.br/article/a-franca-agita-o-debate-sobre-a-introducao-da-taxa-tobin/>. Acesso em: 27 jun. 2020.

Ação da cidadania

Em junho de 1993, o sociólogo Herbert José de Sousa, o Betinho, convocou os brasileiros a participarem ativamente no combate à fome. O movimento, chamado "Ação da cidadania", teve grande repercussão e adesão. O vídeo dessa campanha aponta o alto índice de desigualdade social no Brasil. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=P3ocrAqJY2E>. Acesso em: 27 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

9 Suponha que a proposta de James Tobin, descrita no texto anterior, tivesse sido aceita e todos os países a estabelecessem. Imagine ainda que todas as pessoas que tivessem direito aos recursos provenientes dessa taxa recebessem a mesma quantia, em dólares.

a) Construa um modelo matemático (equação) que expresse o valor anual v, em dólares, destinado a cada beneficiário, em função das variáveis n, t e g, tais que:

- n seja o número de pessoas que teriam direito a receber esse recurso (beneficiários);
- t seja o total anual aplicado, em dólares, nos mercados de todo o mundo em transações especulativas;
- g seja o total anual de gastos, em dólares, nas operações (cobrança, administração, distribuição etc.) que levassem os recursos aos beneficiários.

b) Considere que, em determinado ano, sejam aplicados 500 trilhões de dólares em transações especulativas em todo o mundo e que os gastos com todas as operações intermediárias, desde a arrecadação até a distribuição da Taxa Tobin aos 820 milhões de beneficiários, seja 10% de todo o valor arrecadado com o tributo naquele ano. De acordo com o modelo obtido no item **a**, calcule o valor anual v, em dólares, recebido por beneficiário no ano em questão.

10 Considerem o universo das famílias dos estudantes de sua escola. Para avaliar os índices de desperdício de alimentos nesse universo, em grupos, realizem uma pesquisa em uma amostra dos estudantes, em que vocês também vão participar como entrevistados. As entrevistas com os colegas podem ser feitas presencialmente ou via rede social, e as perguntas, respondidas com a ajuda dos familiares. Para isso, sigam estes passos:

a) Elaborem um breve questionário, com perguntas que revelem dados referentes ao desperdício. As perguntas a seguir são apenas sugestões. Elaborem vocês mesmos outras perguntas.

I. Qual é a média diária, em quilograma, de desperdício de alimentos em sua casa?

II. Qual é a média diária, em R$, desse desperdício? Sugira, aos entrevistados, um modelo para o cálculo dessa média. Pode ser uma regra de três relacionando a média obtida no item **I** com a média mensal, em R$, de gastos com alimentação.

III. Em que ocasiões o nível de desperdício é maior que a média citada no item **I**?

IV. Em que ocasiões o nível de desperdício é menor que a média citada no item **I**?

V. Que atitudes são tomadas para diminuir o desperdício?

VI. Qual é o tipo de alimento mais desperdiçado?

VII. Qual é o tipo de alimento menos desperdiçado ou com desperdício zero?

b) Elaborem uma tabela para cada item do questionário anterior. Por exemplo, no item **I**, separe os níveis de desperdício em classes: de 0 a 0,5 kg; de 0,6 a 1 kg; de 1,1 kg a 1,5 kg, e assim por diante; no item **VI**, considerem as classes: frutas, verduras, legumes, grãos, ou as que se mostrarem necessárias.

c) Modelem os resultados do item **b** por meio de gráficos de colunas.

d) Elaborem cartazes, um vídeo ou *slides* feitos em um *software* de apresentação gráfica, divulgando o resultado da pesquisa. Sugerimos uma comparação com os dados apresentados no texto anterior.

e) Finalmente, as equipes apresentam os resultados da pesquisa em sala de aula, promovendo um debate que relacione o desperdício de alimentos com a fome no mundo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Texto complementar

Dinâmicas populacionais

JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

A ONG Projeto Arrastão, da zona Sul de São Paulo (SP), oferece atividades pedagógicas, além de alimentação e acolhimento das famílias, por meio do desenvolvimento comunitário. Foto de 2016.

Um dos primeiros modelos matemáticos elaborados para descrever a dinâmica de populações foi proposto pelo economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834), em sua obra *Ensaio sobre a população*, publicada em 1798. Em seu modelo, Malthus considerava que a taxa de crescimento demográfico tenderia a ser maior que a taxa correspondente de crescimento da produção de alimentos, pois, enquanto a primeira se daria em progressão geométrica, a segunda ocorreria em progressão aritmética. Nessas condições, afirmava ele, "será inevitável que a pressão demográfica seja superior à capacidade do planeta de fornecer meios de subsistência ao homem, assim a morte prematura visitará a raça humana".

Entre outras falhas, o modelo de Malthus não prevê uma limitação para o crescimento da população nem a introdução de novas tecnologias na produção de alimentos. Por isso, esse modelo é considerado inapropriado.

Na tentativa de corrigir as falhas do modelo malthusiano, o matemático belga Pierre François Verhulst (1804-1849) criou um modelo com considerações adicionais às propostas por Malthus. Verhulst ponderou, por exemplo, que o crescimento populacional tem necessariamente um limite, pois existem inibidores em seu crescimento, tais como guerras e epidemias.

GRANGER, NYC./ALAMY/FOTOARENA - COLEÇÃO PARTICULAR

O economista britânico Thomas R. Malthus é considerado o pai da demografia. Gravura do século XIX.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No mesmo período, outros modelos foram elaborados para descrever o crescimento de populações; porém todos consideravam populações isoladas ou populações de espécies sem interação entre si.

As populações tendem a competir pela sobrevivência. Nesse contexto, competição é definida como a interação entre seres vivos de mesma espécie ou espécies diferentes, que disputam por algo necessário à sobrevivência, por exemplo, água, alimento, território, emprego etc.

Em algumas situações, a competição contribui para o processo de seleção, com a preservação dos indivíduos mais bem adaptados ao *habitat* e extinção dos menos adaptados. Em outras circunstâncias, as espécies interagentes podem atingir um equilíbrio de coexistência.

Em 1925 e 1926, respectivamente, os cientistas Alfred Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940) propuseram um modelo para descrever a dinâmica de sistemas populacionais entre duas espécies interagentes, em que uma população era predadora e a outra, presa. Esses modelos serviram de base para os modelos matemáticos posteriores utilizados para descrever a dinâmica de sistemas do tipo predador-presa.

E qual a importância dos modelos predador-presa? Ela está justamente em suas múltiplas aplicações. Além do óbvio estudo das populações de seres vivos interagentes, podemos citar aplicações na Agronomia, no controle de pragas; em Medicina, nas pesquisas sobre a ação de um medicamento sobre vírus ou bactérias; em Ciências Ambientais, nos estudos relativos à captura e emissão de carbono; em Ciências Econômicas, nas análises de competições de mercado ou de oscilações em bolsas de valores, entre outros.

Para entendermos um pouco melhor a modelagem matemática de sistemas predador-presa, apresentamos um exemplo simples desse tipo de modelo.

Os professores Ben Noble e James W. Daniel, no livro *Álgebra linear aplicada*, apresentam um **modelo matricial** para o estudo do equilíbrio entre o crescimento de duas populações: uma de 1.000 galinhas e outra de 100 raposas, em que as raposas se alimentam exclusivamente de galinhas.

Admitindo certas taxas de variação para o número de indivíduos das duas populações, em n unidades de tempo, os autores obtêm a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} R_n \\ G_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Nessa equação, R_n e G_n representam, respectivamente, o número de raposas e o número de galinhas na enésima unidade de tempo; a expressão $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}^n$ é a enésima potência da matriz $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}$; e k é a taxa de predação (razão do número de galinhas mortas pelas raposas para o número total de galinhas em cada unidade de tempo).

A partir dessa equação, os professores mostram que, mantendo-se a taxa de predação dentro de certos limites, as duas populações crescem indefinidamente; mas para taxas mais altas, além do limite superior, as duas populações desaparecem.

Esse é apenas um exemplo da importância dos modelos matemáticos no equilíbrio de sistemas ecológicos. Resta saber o quanto a ambição desmedida e a sede de poder do homem, como predador da natureza, podem interferir na taxa k de predação.

Fonte dos dados: NOBLE, B.; DANIEL, J. W. *Álgebra linear aplicada*. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1986. p. 33.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Não escreva no livro.

De acordo com o texto, faça o que se pede em cada item.

1. Malthus afirmou que a população cresce em progressão geométrica enquanto a produção de alimentos cresce em progressão aritmética. O que ele quis dizer com essa afirmação?

2. Considere que para *n* unidades de tempo, a população cresça segundo a P.G. $(a_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32 ...)$ e que a produção de alimentos cresça segundo a P.A. $(b_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6 ...)$. Explique o alerta de Malthus, citado na atividade anterior, comparando cada termo de P.G. com o correspondente termo da P.A.

3. Cite duas falhas no modelo malthusiano.

4. Pierre François Verhulst criou um modelo a partir do modelo de Malthus, adicionando algumas considerações. Cite uma delas.

5. No contexto das dinâmicas populacionais, como é definida a competição entre seres vivos?

6. Cite algumas aplicações dos modelos predador-presa.

7. Para $n = 3$, qual é o significado das expressões R_n e G_n no modelo matricial apresentado como exemplo?

8. Para $n = 2$, qual é o significado da expressão $\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -k & 1{,}2 \end{bmatrix}^n$ no modelo matricial apresentado como exemplo?

9. Embora o texto não demonstre explicitamente por que as duas populações, de raposas e de galinhas, desaparecem para taxas maiores que o limite superior da taxa de predação, é possível deduzir o motivo? Explique.

10. Em relação ao modelo matricial apresentado como exemplo, as tabelas abaixo mostram os valores de R_n e G_n para $k = 0{,}1$ e $k = 0{,}18$, respectivamente.

Tabela 1 ($k = 0{,}1$)

N	1	2	3	4	5	6	8	12	16	20	30	100
R_n	100	560	931	1.244	1.523	1.783	2.292	3.470	5.107	7.483	19.409	15.328.199
G_n	1.000	1.190	1.372	1.553	1.739	1.934	2.367	3.488	5.111	7.483	19.409	15.328.199

Tabela 2 ($k = 0{,}18$)

n	1	2	3	4	5	8	12	16	20	30	40	60	80	100
R_n	100	560	927	1.214	1.434	1.808	1.854	1.654	1.371	713	312	43	3	0
G_n	1.000	1.182	1.317	1.413	1.477	1.530	1.400	1.177	940	459	193	25	2	0

Fonte: NOBLE, B.; DANIEL, J. W. *Álgebra linear aplicada*. 2. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1986. p. 33.

O que se pode concluir sobre os valores de *k* em relação ao limite superior da taxa de predação?

11. Dê exemplos do cotidiano que se enquadrem no alerta que finaliza o texto.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

4 MEDIÇÕES SURPREENDENTES

CHESNOT/GETTY IMAGES

O pêndulo de Foucault, no Panteão de Paris (França), consiste em uma bola que oscila constantemente pendurada na extremidade de um fio de 67 m de comprimento. Com esse experimento, o físico e astrônomo francês Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) demonstrou o movimento de rotação da Terra e mediu o seu período, obtendo 23 horas, 56 minutos e 4 segundos. Foto de 2016.

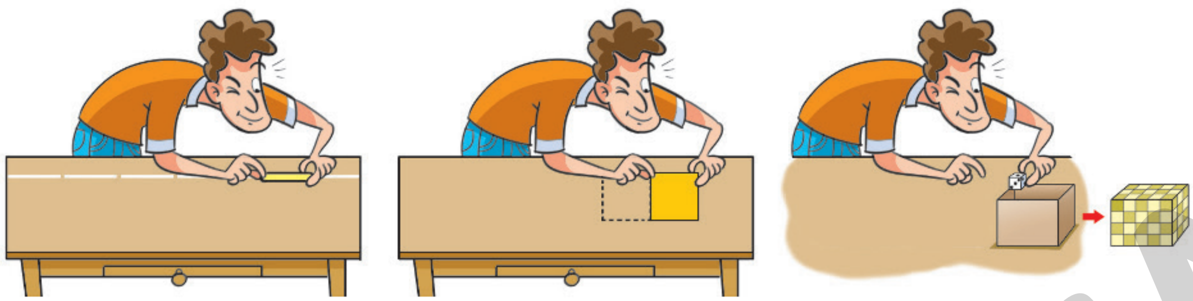
Todo atributo que pode ser medido é uma grandeza. Comprimento, área e volume são exemplos de grandezas. Para o cálculo da medida de qualquer grandeza, adota-se uma parte dela como unidade de medida *u* e avalia-se quantas vezes essa parte cabe no todo. O número de vezes é a medida da grandeza na unidade *u*.

Sugestão

Leia o texto “O pêndulo de Foucault” e assista ao vídeo para conhecer mais sobre esse experimento. Disponível em: <http://masimoes.pro.br/fisica/foucault/>. Acesso em: 30 jun. 2020.

Medições diretas e medições indiretas

Nas imagens abaixo, o rapaz adotou um palito de picolé como unidade *c* para medir o comprimento de uma mesa, um quadrado de papelão como unidade *a* para medir a área do tampo da mesa e um dadinho cúbico como unidade *v* para medir o volume de uma caixa de papelão.


JOSÉ LUÍS JUHAS

Se o palito couber exatamente 6 vezes no comprimento da mesa, o quadrado couber exatamente 16 vezes na superfície do tampo da mesa e o dadinho couber exatamente 60 vezes na caixa de papelão, dizemos que o comprimento da mesa é 6 *c*, a área da superfície do tampo da mesa é 16 *a*, e o volume da caixa é 60 *v*.

Embora seja permitido usar qualquer unidade de medida, é conveniente adotar as unidades padronizadas pelo **Sistema Internacional de Unidades (SI)**, o que facilita a comunicação entre as pessoas. Por exemplo, para unidades de comprimento, área e volume são adotados os múltiplos e submúltiplos do metro (m), do metro quadrado (m^2) e do metro cúbico (m^3), respectivamente.

As grandezas não se resumem a comprimento, área e volume. Existem muitas outras: velocidade, tempo, pressão, massa, corrente elétrica, ângulo, temperatura, potência, força etc.

Nos três exemplos apresentados (comprimento e área do tampo da mesa e volume da caixa), as medições foram feitas pelo processo direto, pois cada grandeza (comprimento, área e volume) foi comparada diretamente com a correspondente unidade de medida (palito, quadrado de papelão e dadinho). Em muitas medições, porém, principalmente no universo científico, adotam-se processos indiretos, isto é, obtém-se a medida de uma grandeza a partir de medições de outras correlacionadas. Para ilustrar, apresentamos dois exemplos.

Observação

O **Sistema Internacional de Unidades (SI)** foi criado com a finalidade de padronizar as unidades de medida de grandezas fundamentais e suas derivações. As grandezas fundamentais e seus símbolos são: metro (m), segundo (s), quilograma (kg), ampere (A), kelvin (K), mol (mol) e candela (cd). Dessas unidades resultam 22 derivações, representadas como produtos ou quocientes das fundamentais, como velocidade (m/s), aceleração (m/s^2) e força newton ($kg \cdot m/s^2$).

Exemplo 1

Suponha que você tenha comprado um pacote de 500 folhas de papel sulfite e necessite calcular a espessura de cada folha. Como você agiria, usando sua régua graduada em centímetro e milímetro?


DG-STUDIO/SHUTTERSTOCK


KIKOVIC/ISTOCK/GETTY IMAGES

Observe a dificuldade ao tentar medir diretamente a espessura de uma folha. O instrumento de medida (régua) e as unidades de que dispomos (centímetro e milímetro) são inadequados para a medição direta, por isso opta-se pela medição indireta, com a qual é possível ter uma boa aproximação da medida almejada.

Inicialmente medimos a espessura do pacote de 500 folhas, obtendo, digamos, 5 cm. A seguir, dividimos 5 cm por 500, obtendo 0,01 cm ou, de maneira equivalente, 0,1 mm.

Concluímos, então, que a medida aproximada da espessura de cada folha é de 0,1 mm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo 2

Considere que, em uma viagem, um automóvel percorreu 240 km em 3 horas. Como você calcularia a velocidade média do automóvel, em quilômetro por hora, nessa viagem?

A medida da velocidade média v do automóvel pode ser obtida por um cálculo indireto, dividindo-se a distância percorrida pelo tempo correspondente:

$$v = \frac{240\ \text{km}}{3\ \text{h}} \Rightarrow v = 80\ \text{km/h}$$

Assim, a velocidade média do automóvel nessa viagem foi de 80 km/h.

Neste capítulo estudaremos algumas medições surpreendentes ao longo da História.

EVGENY BAKHAREV/SHUTTERSTOCK

Explorando conexões

O que é o Inmetro

O Instituto Nacional de **Metrologia**, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) é uma **autarquia** federal, vinculada ao Ministério da Economia, que atua como Secretaria Executiva do Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Conmetro), colegiado interministerial, que é o órgão normativo do Sistema Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Sinmetro).

Observação

Metrologia é a ciência da medição que abrange todos os aspectos teóricos e práticos relativos às medições e suas aplicações.
O decreto-lei nº 200/1967 define **autarquia** como "serviço autônomo, criado por lei, com personalidade jurídica, patrimônio e receita próprios para executar atividades típicas de Administração Pública, que requeiram, para seu melhor funcionamento, gestão administrativa e financeira descentralizada".

Objetivando integrar uma estrutura sistêmica articulada, o Sinmetro, o Conmetro e o Inmetro foram criados pela Lei nº 5.966, de 11 de dezembro de 1973, cabendo a este último substituir o então Instituto Nacional de Pesos e Medidas (INPM) e ampliar significativamente o seu raio de atuação a serviço da sociedade brasileira.

No âmbito de sua ampla missão institucional, o Inmetro objetiva fortalecer as empresas nacionais, aumentando sua produtividade por meio da adoção de mecanismos destinados à melhoria da qualidade de produtos e serviços.

Sua missão é prover confiança à sociedade brasileira nas medições e nos produtos, por meio da metrologia e da avaliação da conformidade, promovendo a harmonização das relações de consumo, a inovação e a competitividade do País.

Dentre as competências e atribuições do Inmetro destacam-se:

- executar as políticas nacionais de metrologia e da qualidade;
- verificar e fiscalizar a observância das normas técnicas e legais, no que se refere às unidades de medida, métodos de medição, medidas materializadas, instrumentos de medição e produtos pré-medidos;

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- manter e conservar os padrões das unidades de medida, assim como implantar e manter a cadeia de rastreabilidade dos padrões das unidades de medida no País, de forma a torná-las harmônicas internamente e compatíveis no plano internacional, visando a sua aceitação universal e a sua utilização com vistas à qualidade de bens e serviços;
- fortalecer a participação do País nas atividades internacionais relacionadas com Metrologia e Avaliação da Conformidade, promovendo o intercâmbio com entidades e organismos estrangeiros e internacionais;
- prestar suporte técnico e administrativo ao Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Conmetro) e aos seus comitês assessores, atuando como sua secretaria executiva;
- estimular a utilização das técnicas de gestão da qualidade nas empresas brasileiras;
- planejar e executar as atividades de Acreditação de Laboratórios de Calibração e de Ensaios, de provedores de ensaios de proficiência, de Organismos de Avaliação da Conformidade e de outros necessários ao desenvolvimento da infraestrutura de serviços tecnológicos no País;
- coordenar, no âmbito do Sistema Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Sinmetro), a atividade de Avaliação da Conformidade, voluntária e compulsória de produtos, serviços, processos e pessoas;
- planejar e executar as atividades de pesquisa, ensino, desenvolvimento tecnológico em Metrologia e Avaliação da Conformidade; e
- desenvolver atividades de prestação de serviços e transferência de tecnologia e cooperação técnica, quando voltadas à inovação, à pesquisa científica e tecnológica em Metrologia e Avaliação da Conformidade.

Fonte: Inmetro. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/inmetro/oque.asp?iacao5imprimir> Acesso em: 22 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.

Não escreva no livro.

1 O decreto-lei nº 7.938, de 19 de fevereiro de 2013, criou a Diretoria de Metrologia Aplicada às Ciências da Vida (Dimav), um órgão do Inmetro. Pesquisem sobre a Dimav, escrevendo um breve texto sobre o que é esse órgão e quais são suas competências e objetivos.

2 O Inmetro testou algumas marcas de ferro de passar roupa para verificar se as potências medidas dos aparelhos eram compatíveis com os valores declarados pelos fabricantes. A marca seria reprovada se a potência medida do aparelho fosse menor que a declarada; caso contrário, seria aprovada. Para isso, os técnicos deixaram cada aparelho ligado durante determinado tempo, medindo o consumo C, em quilowatt-hora (kWh), e aplicaram uma das fórmulas abaixo para calcular a potência:

$$C = \left(\frac{\text{potência do aparelho em watt}}{1.000}\right) \cdot (\text{tempo de funcionamento, em hora})$$

ou

$$C = (\text{potência do aparelho em quilowatt}) \cdot (\text{tempo de funcionamento, em hora})$$

a) Um ferro da marca *A* declarava em seu manual a potência de 1.400 W. Durante o teste, esse aparelho ficou ligado por 2 h, consumindo 2,8 kWh. Essa marca foi aprovada ou reprovada? Justifique.

b) Um ferro da marca *B* declarava em seu manual a potência de 1,8 kW. Durante o teste, esse aparelho ficou ligado por 0,5 h, consumindo 0,8 kWh. Essa marca foi aprovada ou reprovada? Justifique.

Medições indiretas de distâncias

Medindo o raio da Terra

MAPS4MEDIA/GETTY IMAGES

Fotografia da Terra feita pelo satélite NOAA Goes-East, com a visão das Américas. Foto de 2017.

Com a tecnologia atual não é difícil imaginar um processo para medir o raio da Terra, mas como isso poderia ser feito há 2.200 anos?

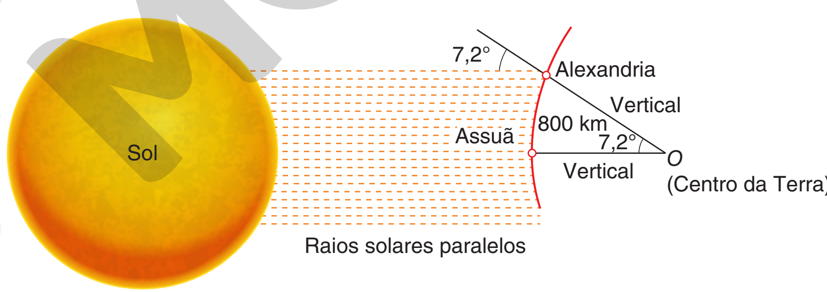
Embora na Idade Média (século V ao XIV) muitos acreditassem que a Terra fosse plana como o tampo de uma mesa, terminando em abismos sem fim, os sábios da Grécia Antiga (século XX a.C. a I a.C.) já tinham consciência da esfericidade do planeta. Vários estudiosos gregos avaliaram o perímetro de uma circunferência máxima da Terra e, consequentemente, a medida de seu raio.

Sem dúvida, a mais célebre dessas medições deve-se ao filósofo grego Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-195 a.C.). Ele tinha conhecimento de que em Siena (atual Assuã, no Egito), precisamente ao meio-dia do solstício de verão, o Sol alcança o zênite, isto é, os raios solares incidem verticalmente à superfície da Terra, ao mesmo tempo que em Alexandria, considerada no mesmo meridiano, a 800 km de Assuã, formam um ângulo de 7,2° com uma vertical.

Observação

> Nesse modelo, para facilitar o entendimento, adotamos o quilômetro como unidade de comprimento, porém Eratóstenes usou o *stadium*, unidade usual na época. Como não havia padronização naquele período da História, as cidades adotavam diferentes medidas para 1 *stadium*, variando de 156 m a 210 m; por isso, as medidas usadas atualmente para estudar o método de Eratóstenes são aproximadas.

Considerando que, devido à grande distância entre a Terra e o Sol, os raios solares que incidem em nosso planeta podem ser considerados paralelos, Eratóstenes concluiu que essa diferença angular se deve à esfericidade da Terra e, por meio de uma simples proporção, obteve o perímetro *c* da circunferência que passa por Assuã e Alexandria e é concêntrica com a Terra.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Quando o Sol está no zênite em Assuã, as retas paralelas correspondentes aos raios solares formam ângulos de 7,2° com a reta vertical que passa por Alexandria. (Representação fora de escala; cores fantasia.)

$$\frac{7{,}2°}{800 \text{ km}} = \frac{360°}{c} \Rightarrow c = 40.000 \text{ km}$$

Note que a partir do comprimento *c* deduz-se facilmente a medida *r* do raio da Terra:

$$c = 2\pi r \Rightarrow 2\pi r = 40.000 \text{ km}$$

$$\therefore r = \frac{40.000 \text{ km}}{2\pi} \Rightarrow r \approx 6.369 \text{ km}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Medições atuais estimam o comprimento da circunferência do Equador terrestre em 40.074 km. Assim, a medida da circunferência da Terra calculada por Eratóstenes (40.000 km) apresenta um erro inferior a 2% em relação à medida adotada hoje.

Esse pequeno erro se deve a medições imprecisas e aproximações utilizadas. Por exemplo, a distância entre Assuã e Alexandria é maior que 800 km e essas cidades não se localizam exatamente sobre um mesmo meridiano, embora estejam próximas disso. Mesmo assim, o valor encontrado por Eratóstenes é surpreendente!

Localização de Alexandria e Assuã (Egito)

SONIA VAZ

Pelo sistema de coordenadas geográficas adotado atualmente, sabe-se que Alexandria e Assuã têm longitudes de 29° 55′ 09″ E e 32° 53′ 59″ E, respectivamente. Nota-se, portanto, que essas cidades estão muito próximas de um mesmo meridiano.

Fonte: *Atlas geográfico escolar*. 6. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 45.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

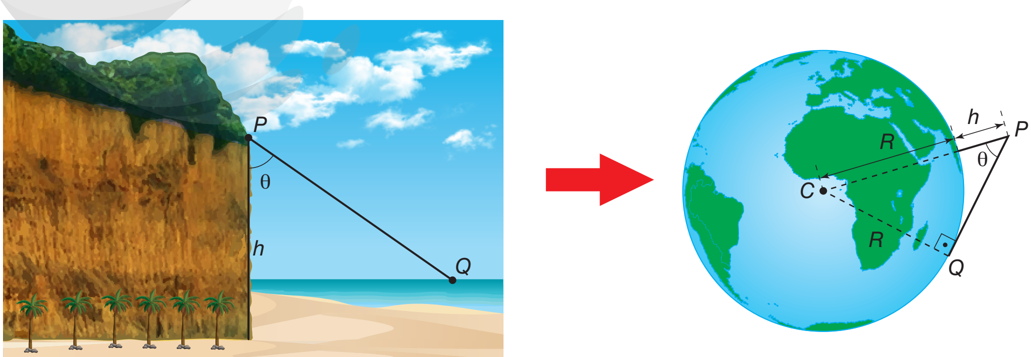
3 Supondo que a Terra seja perfeitamente esférica, calcule a medida de seu raio, considerando o comprimento adotado atualmente para a linha do Equador terrestre.

Outro método para o cálculo do raio da Terra

Também data da Antiguidade grega o método descrito a seguir para o cálculo da medida do raio da Terra, mas não se sabe quem foi seu idealizador.

De um ponto *P*, localizado próximo a uma praia à altura *h* em relação ao nível do mar, mira-se um ponto *Q* da linha do horizonte marítimo, obtendo-se a medida θ do ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ forma com a vertical.

ERICSON GUILHERME LUCIANO



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

MODERNA

Assim, supondo-se que a Terra seja uma esfera de centro C e raio R, e lembrando que a reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio no ponto de contato, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{R}{R+h} \Rightarrow R = R \cdot \operatorname{sen}\theta + h \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore R - R \cdot \operatorname{sen}\theta = h \cdot \operatorname{sen}\theta \Rightarrow R(1 - \operatorname{sen}\theta) = h \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore R = \frac{h \cdot \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

Desse modo, determina-se a medida R em função de θ e h.

GRANGER/GLOW IMAGES

Espelho retrorrefletor instalado na Lua pelos astronautas da Apollo 14. Esse tipo de espelho reflete a luz, com o mínimo de dispersão, na mesma direção da luz incidente. Foto de 1971.

Distância da Terra à Lua

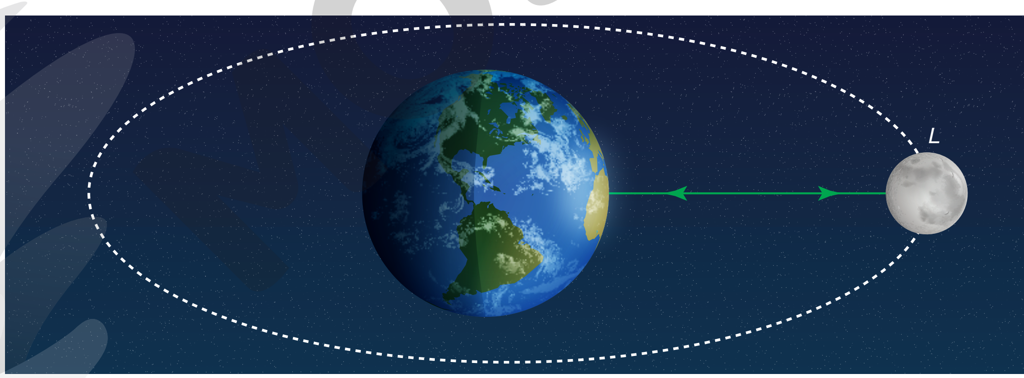
Um método atual

Nas missões espaciais do programa Apollo (1961-1972), foram instalados, na superfície da Lua, espelhos retrorrefletores que possibilitam calcular a distância entre a Terra e a Lua com alta precisão, de qualquer ponto da órbita lunar. A medida é feita enviando-se um feixe de *laser* que é refletido por esse espelho e depois é captado na Terra. A distância é calculada em função da velocidade da luz e do intervalo de tempo entre a emissão e a recepção do *laser*.

Por exemplo, em determinado ponto L da órbita lunar, um feixe de *laser* emitido da Terra demora 2,566 s no trajeto de ida e volta à superfície da Lua.

Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é de 300.000 km/s, aproximadamente, calcula-se facilmente a distância d da Terra à Lua. Como o tempo de ida (ou de volta) da luz da Terra à Lua é 1,283 s, temos:

$$d = (300.000 \cdot 1{,}283) \text{ km} \Rightarrow d = 384.900 \text{ km}$$



ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Assim, a distância da Terra à Lua, quando esta se posiciona no ponto L de sua órbita, é de 384.900 km.

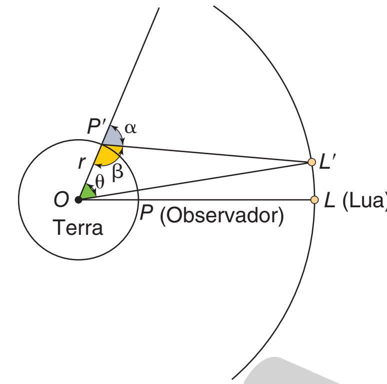
Vale salientar que a distância da Terra à Lua varia de 363.000 km a 406.000 km, aproximadamente, pois a órbita lunar é elíptica.

Um método milenar

Cláudio Ptolomeu é reconhecido como o último dos notáveis sábios da Antiguidade grega. Viveu entre os séculos I e II da era cristã, deixando um imenso legado para a Astronomia, Matemática, Física e Geografia. Um de seus trabalhos na Astronomia é o cálculo da distância entre a Terra e a Lua, descrito a seguir.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Suponha que, em dado instante, um observador P na superfície da Terra, a Lua L e o centro O da Terra estejam alinhados. Algum tempo depois, devido aos movimentos dos dois astros, o observador esteja em uma posição P', e a Lua, em uma posição L', com P e P' no plano da órbita lunar, conforme sugere o esquema ao lado, em que r é a medida do raio da Terra.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Os ângulos $P\widehat{O}P'$ e $P\widehat{O}L'$ são determinados pelo período de rotação da Terra e o de translação da Lua. Logo, calcula-se a medida θ do ângulo $L'\widehat{O}P'$, pois:

$$L'\widehat{O}P' = P\widehat{O}P' - P\widehat{O}L'$$

A medida β do ângulo $O\widehat{P'}L'$ é o suplemento da medida α do ângulo externo relativo ao vértice P' do triângulo $OP'L'$, que é calculada diretamente.

Assim, o triângulo $OP'L'$ está determinado, pois são conhecidas as medidas de um lado (r) e de dois ângulos internos adjacentes a esse lado (β e θ). Portanto, podemos calcular a medida OL':

$$\frac{OL'}{\text{sen}\,\beta} = \frac{r}{\text{sen}\,[180° - (\theta + \beta)]} \Rightarrow \frac{OL'}{\text{sen}\,\beta} = \frac{r}{\text{sen}\,(\theta + \beta)}$$

$$\therefore OL' = \frac{r \cdot \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,(\theta + \beta)}$$

Subtraindo-se de OL' a medida r do raio da Terra, obtém-se a distância d entre a Terra e a Lua:

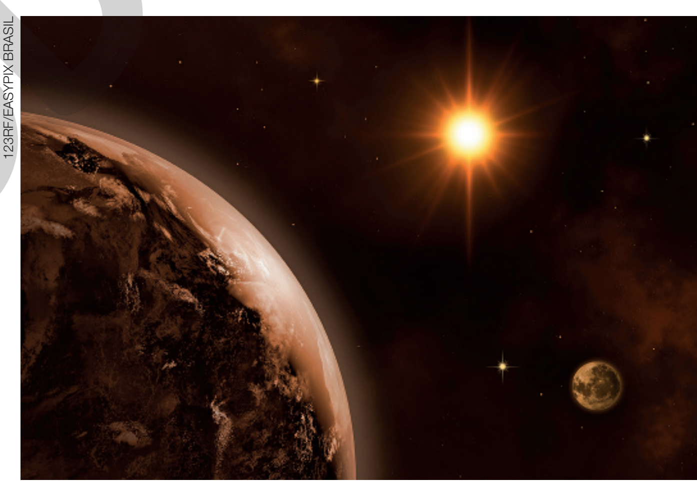
$$d = OL' - r \Rightarrow d = \frac{r \cdot \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,(\theta + \beta)} - r$$

Distância da Terra ao Sol

O matemático e astrônomo grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) foi, pelo que se sabe, o primeiro a lançar a audaciosa hipótese heliocêntrica (que entende que o Sol é o centro do Sistema Solar) antecipando-se em 1.700 anos ao astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543), que usou o sistema heliocêntrico para descrever os movimentos dos corpos celestes.

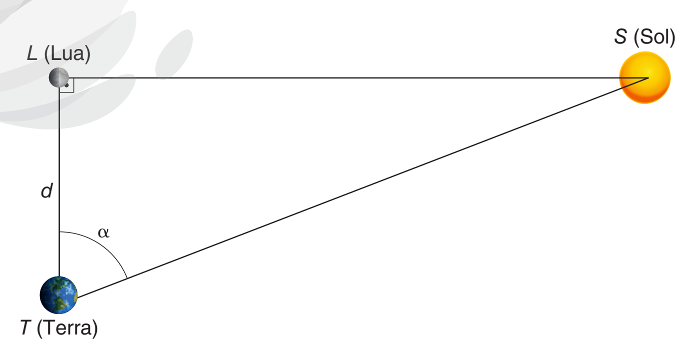
Aristarco foi também pioneiro no cálculo de distâncias entre corpos celestes. Um dos problemas a que dedicou especial atenção foi a determinação da distância entre a Terra e o Sol. Ele observou que, quando a Lua é avistada da Terra em seu quarto crescente, os raios solares que incidem na Lua são perpendiculares à reta que passa pelos centros da Terra e da Lua, conforme a representação esquemática a seguir.

123RF/EASYPIX BRASIL



A partir da distância entre a Terra e a Lua é possível calcular a distância entre a Terra e Sol. (Representação fora de escala; cores fantasia.)

ERICSON GUILHERME LUCIANO



Nessa disposição dos astros, Aristarco estimou a medida α do ângulo $L\widehat{T}S$. (Representação fora de escala; cores fantasia.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Com esse dado, e conhecendo a distância d da Terra à Lua, calculou a distância TS da Terra ao Sol da seguinte maneira:

$$\cos \alpha = \frac{d}{TS} \Rightarrow TS = \frac{d}{\cos \alpha}$$

Embora o método seja correto, Aristarco cometeu um erro ao estimar a medida α em 87°, o que o fez concluir, equivocadamente, que a distância da Terra ao Sol seria cerca de 20 vezes a distância da Terra à Lua. Medições atuais mostram que $\alpha \approx 89{,}86°$, com o que se conclui que a distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua.

Distâncias planetárias no Sistema Solar

Admitindo a hipótese de que a Terra é esférica e de que as órbitas dos planetas do Sistema Solar são circulares e coplanares, tendo o Sol como centro, vamos estudar um método para o cálculo da distância entre um planeta qualquer e o Sol, a partir da distância conhecida entre a Terra e o Sol.

Esse método fornece um valor muito próximo da realidade, pois as órbitas elípticas dos planetas, além de poderem ser consideradas coplanares, são muito próximas de circunferências.

Distância entre um planeta inferior e o Sol

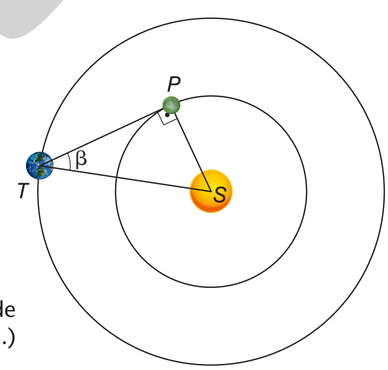
Os planetas inferiores são aqueles cujo raio orbital é menor que o da Terra, ou seja, são planetas mais próximos do Sol do que a Terra. Existem apenas dois planetas inferiores: Mercúrio e Vênus.

Conhecida a distância entre a Terra (T) e o Sol (S), calculamos a distância entre um planeta inferior (P) e o Sol, considerando a medida máxima β do ângulo $P\widehat{T}S$, obtida quando o ângulo $T\widehat{P}S$ é reto, conforme a representação esquemática abaixo.

Assim, deduzimos que:

$$\text{sen } \beta = \frac{PS}{TS} \Rightarrow PS = TS \cdot \text{sen } \beta$$

Note, portanto, que a distância entre o planeta e o Sol é calculada em função da distância entre a Terra e o Sol e da medida do ângulo β.

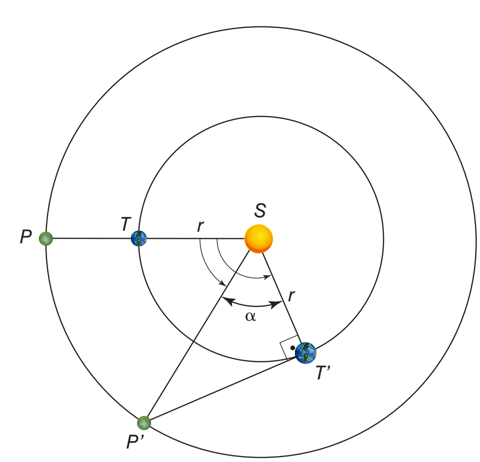


(Representação fora de escala; cores fantasia.)

Distância entre um planeta superior e o Sol

Os planetas superiores do Sistema Solar são aqueles cujo raio orbital é maior que o da Terra, ou seja, são planetas mais distantes do Sol do que a Terra. Existem cinco planetas superiores: Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

Conhecida a distância r entre a Terra (T) e o Sol (S), calcula-se a distância entre um planeta superior (P) e o Sol, considerando a medida α do ângulo $P'\widehat{S}T'$, que é obtida quando o ângulo $P'\widehat{T'}S$ é reto, conforme a representação esquemática ao lado e a explicação a seguir.



(Representação fora de escala; cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Na figura anterior, em dado momento, o planeta superior, a Terra e o Sol estão alinhados, ocupando as posições P, T e S, respectivamente. Após uma medida t de tempo, o planeta e a Terra ocupam as posições P' e T', respectivamente, com $\overline{P'T'}$ perpendicular a $\overline{ST'}$.

Tendo em vista que todos os planetas do Sistema Solar giram em torno do Sol no mesmo sentido (adote na figura anterior o sentido anti-horário) e que os períodos orbitais da Terra e do planeta são conhecidos, calculamos a medida α, em função de t (basta resolver duas regras de três para calcular as medidas dos ângulos $P\widehat{S}T'$ e $P\widehat{S}P'$, observando que $P'\widehat{S}T' = P\widehat{S}T' - P\widehat{S}P'$).

Finalmente, concluímos:

$$\cos \alpha = \frac{r}{P'S} \Rightarrow P'S = \frac{r}{\cos \alpha}$$

Note, portanto, que a distância entre o planeta e o Sol é calculada em função da distância r entre a Terra e o Sol e da medida do ângulo α.

ATIVIDADES Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**. **Não escreva no livro.**

Dado que a distância entre a Terra e o Sol é de $1{,}5 \cdot 10^8$ km, aproximadamente, responda aos itens a seguir.

4 O raio orbital do planeta Vênus (V) é menor que o raio orbital da Terra (T). Sabendo que a distância entre o Sol (S) e o planeta Vênus é de 108.204.000 km, calcule um valor aproximado da medida máxima que assume o ângulo $V\widehat{T}S$.

5 O raio orbital do planeta Marte (M) é maior que o raio orbital da Terra (T). Calcule a distância aproximada entre o Sol (S) e o planeta Marte, sabendo que, quando o ângulo $S\widehat{M}T$ assume sua medida máxima, a medida do ângulo $T\widehat{S}M$ é 48,8º, aproximadamente.

Medições indiretas de tempo

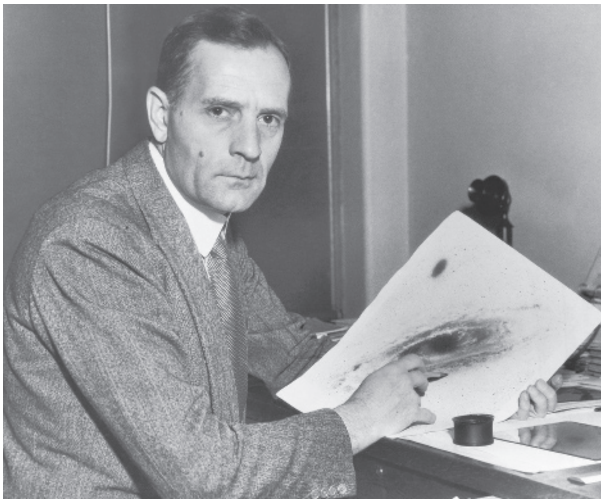
A idade do Universo

No início do século XX, o astrofísico estadunidense Edwin Powell Hubble (1889-1953) descobriu que o Universo está em constante expansão. Suas conclusões eram fundamentadas em observações de estrelas conhecidas como cefeidas. Essas estrelas são referenciais que possibilitam determinar distâncias entre corpos celestes muito afastados da Terra.

As medições efetuadas por Hubble levaram-no a concluir que as galáxias se afastam da Via Láctea a uma velocidade diretamente proporcional à distância em que se encontram dela: quanto mais distante, maior a velocidade de afastamento. A função linear, deduzida por Hubble, para descrever a velocidade de afastamento da galáxia é:

$$V(R) = 16R$$

Essa relação é apenas numérica (não leva em consideração as unidades de medida), mas $V(R)$ deve ser interpretada como a velocidade de afastamento da galáxia, em quilômetro por segundo, e R como a distância em milhão de anos-luz entre a galáxia e a Terra.


EMILIO SEGRE VISUAL ARCHIVES/AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS/ SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Graças aos estudos de Edwin P. Hubble, hoje sabemos que as nebulosas, antes consideradas nuvens de poeira e gases, são, na verdade, galáxias fora da Via Láctea.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

HENNING DALHOFF/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Representação artística do *Big Bang* feita por computação gráfica.

A descoberta de Hubble fez surgir a hipótese de que, em algum instante, todas as galáxias estiveram em um mesmo ponto e, a partir de uma grande explosão – *o Big Bang* – iniciou-se a expansão do Universo.

Relacionando a velocidade de afastamento das galáxias com a variação das distâncias entre elas, pode-se calcular o instante em que ocorreu o *Big Bang* e, então, determinar a idade do Universo, estimada em cerca de 15 bilhões de anos.

ATIVIDADES Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

6 Qual é a velocidade de afastamento de uma galáxia que, neste momento, está a 200 milhões de anos-luz da Terra?

7 A que distância da Terra, em anos-luz, encontra-se uma galáxia cuja velocidade de afastamento é 216.000 quilômetros por hora?

A idade dos fósseis

O carbono-14 (C14) é um isótopo radioativo formado na atmosfera terrestre por meio de reações químicas provocadas pelo constante bombardeamento de raios cósmicos.

Os seres vivos, animais e plantas, absorvem e perdem o C14 ao longo da vida, mantendo constante a quantidade desse isótopo em seu organismo, por unidade de volume. A morte põe fim a esse equilíbrio, pois, a partir de então, só há perda do C14 por meio da desintegração. Como o C14 se desintegra a uma taxa constante, de aproximadamente 0,01209% ao ano, os cientistas conseguem calcular a idade dos fósseis ao medir a quantidade de C14 remanescente nesses materiais.

MUSEU NACIONAL BRASIL /AP PHOTO/GLOW IMAGES/MUSEU NACIONAL, RIO DE JANEIRO

Crânio descoberto em 1975, durante uma escavação em Belo Horizonte (MG). Na década de 1990, testes feitos por cientistas determinaram ser o fóssil da mais antiga habitante das Américas, datado de 11,5 mil anos antes de Cristo. Foto de 2018.

MUSEU NACIONAL BRASIL /AP PHOTO/GLOW IMAGES/MUSEU NACIONAL, RIO DE JANEIRO

Reconstituição do rosto de Luzia, nome dado ao fóssil em homenagem ao fóssil denominado Lucy, encontrado na África. Foto de 2018.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para exemplificar, vamos mostrar como os cientistas estimaram a idade de uma ossada humana encontrada por arqueólogos da Universidade de São Paulo (USP) em um **sambaqui** do Vale do Ribeira, sul do estado de São Paulo.

Com um contador Geiger (aparelho que mede a radioatividade), constatou-se que a massa de C14 remanescente no esqueleto era 0,337 da massa de C14 presente em um ser humano vivo. Raciocinando como no cálculo do montante a juro composto, temos que o valor M de uma grandeza qualquer a partir de seu valor inicial C, do tempo t e da taxa constante i de crescimento ou decrescimento pode ser calculado pela fórmula:

$$M = C(1 + i)^t$$

em que t e i se referem à mesma unidade de tempo.

Assim, a relação entre o tempo e a massa de C14 remanescente no esqueleto pode ser expressa por:

$$0{,}337 = (1 - 0{,}0001209)^t \Rightarrow 0{,}337 = (0{,}9998791)^t$$

$$\therefore t = \log_{0{,}9998791} 0{,}337$$

Utilizando uma calculadora científica, obtemos:

$$t \approx 8.996$$

Logo, o esqueleto encontrado tem aproximadamente 9.000 anos.

Vale salientar que a técnica de datação por meio do carbono-14 possibilita estimar a idade de fragmentos orgânicos de até 50 mil anos. Em períodos de tempo mais longos que esse, a radiação remanescente do C14 nesses materiais se torna muito baixa para poder ser detectada com precisão suficiente, mas existem outras técnicas que possibilitam a datação de fósseis mais antigos.

Observação

Sambaquis são montes construídos pelos povos que viviam às margens de rios ou mar no Brasil da Pré-História. São formados por cascas de moluscos, ossos e materiais de uso doméstico. Ao longo do tempo sofreram fossilização, transformando-se em uma estrutura petrificada. Alguns povos utilizavam os sambaquis para enterrar seus mortos.

RICARDO AZOURY/PULSAR IMAGENS

Esqueleto datado de cerca de 3.000 anos, encontrado no Sambaqui de Cabeçuda, em Laguna (SC). Foto de 2016.

Sugestão

A reportagem "São Paulo tem sambaqui de 9.000 anos" conta detalhes do sítio arqueológico localizado no sul do estado de São Paulo. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/fsp/ciencia/fe1210200201.htm>. Acesso em: 30 jun. 2020.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.

Não escreva no livro.

8 Nos processos radioativos, a meia-vida de um radioisótopo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa desse isótopo. Por exemplo, se a meia-vida de um material radioativo é 10 anos, isso significa que qualquer porção de massa m desse material se reduz a uma porção de massa $\frac{m}{2}$ em 10 anos.

De acordo com esse conceito, calcule a meia-vida do C14, com base nos dados fornecidos no texto anterior.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

Uma medida indireta de desenvolvimento humano: o IDH

Como medir o desenvolvimento humano de uma nação? Será que basta comparar a renda *per capita* com a média global? O texto a seguir responde a essas questões.

O que é o IDH


ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

Embora o Brasil seja considerado um país com alto desenvolvimento humano, milhões de brasileiros ainda vivem em precárias condições de renda, saúde e educação. Na imagem, comunidade flutuante no Lago Janauari, no Parque Ecológico de Janauari, Iranduba (AM). Foto de 2020.

O objetivo da criação do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) foi o de oferecer um contraponto a outro indicador muito utilizado, o Produto Interno Bruto (PIB) *per capita*, que considera apenas a dimensão econômica do desenvolvimento. Criado por Mahbub ul Haq com a colaboração do economista indiano Amartya Sen, ganhador do Prêmio Nobel de Economia de 1998, o IDH pretende ser uma medida geral, sintética, do desenvolvimento humano. Apesar de ampliar a perspectiva sobre o desenvolvimento humano, o IDH não abrange todos os aspectos de desenvolvimento e não é uma representação da "felicidade" das pessoas, nem indica "o melhor lugar no mundo para se viver". Democracia, participação, equidade, sustentabilidade são outros dos muitos aspectos do desenvolvimento humano que não são contemplados no IDH.

O IDH tem o grande mérito de sintetizar a compreensão do tema e ampliar e fomentar o debate.

Desde 2010, quando o Relatório de Desenvolvimento Humano completou 20 anos, novas metodologias foram incorporadas para o cálculo do IDH. Atualmente, os três pilares que constituem o IDH (saúde, educação e renda) são mensurados da seguinte forma:

- Uma vida longa e saudável (saúde) é medida pela expectativa de vida;
- O acesso ao conhecimento (educação) é medido por: I) média de anos de educação de adultos, que é o número médio de anos de educação recebidos durante a vida por pessoas a partir de 25 anos; e II) a expectativa de anos de escolaridade para crianças na idade de iniciar a vida escolar, que é o número total de anos de escolaridade que uma criança na idade de iniciar a vida escolar pode esperar receber se os padrões prevalecentes de taxas de matrículas específicas por idade permanecerem os mesmos durante a vida da criança;
- E o padrão de vida (renda) é medido pela Renda Nacional Bruta (RNB) *per capita* expressa em poder de paridade de compra (PPP) constante, em dólar. [...]

Publicado pela primeira vez em 1990, o índice é calculado anualmente. Desde 2010, sua série histórica é recalculada devido ao movimento de entrada e saída de países e às adaptações metodológicas, o que possibilita uma análise de tendências. Aos poucos, o IDH tornou-se referência mundial. É um índice-chave dos Objetivos de Desenvolvimento do Milênio das Nações Unidas. [...]

Fonte: PNUD Brasil. Disponível em: <https://www.br.undp.org/content/brazil/pt/home/idh0/conceitos/o-que-e-o-idh.html>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

9 A partir de 2010 o cálculo do Índice de Desenvolvimento Humano passou por algumas modificações, mas durante os 20 primeiros anos de existência, de 1990 a 2009, o IDH de uma localidade era calculado pela média aritmética a seguir.

$$IDH = \frac{L + E + R}{3}$$

tal que:

$$L = \frac{EV - 25}{60},\ E = \frac{2TA + TE}{3} \text{ e } R = \frac{\log_{10}(\text{PIB}_{pc}) - 2}{2{,}60206}$$

sendo:

- EV é a expectativa de vida ao nascer, em ano;
- TA é a taxa percentual de alfabetização;
- TE é a taxa percentual de escolarização;
- PIB_{pc} é o produto interno bruto *per capita*, em dólar.

Usando essa metodologia, utilize calculadora eletrônica para medir o IDH de um país com $EV = 79$, $TA = 84\%$, $TE = 36\%$ e $\text{PIB}_{pc} = 14.000$ dólares.

10 Criado pelo matemático italiano Corrado Gini, o Índice Gini, associado ao IDH, propicia uma visão mais abrangente do grau de desenvolvimento de um povo. Pesquisem sobre esse índice, escrevendo um breve texto sobre o que aprenderam.

Texto complementar

Medindo conhecimentos

O tipo mais comum de prova de múltipla escolha é aquela em que cada questão apresenta alternativas das quais deve ser assinalada apenas uma como correta.

Se você e um colega tivessem acertado o mesmo número de questões em uma prova desse tipo, mas sua nota fosse menor que a dele, você reclamaria com o professor? Sentindo-se injustiçado, você deveria reclamar mesmo, pois o professor poderia ter se enganado!

Saiba, porém, que as duas notas poderiam estar corretas se o método de avaliação fosse a Teoria de Resposta ao Item (TRI). Esse método não considera apenas o número de questões que você acertou, mas também o grau de dificuldade dos exercícios que acertou e dos que errou, além de avaliar a probabilidade de "chute".

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) adota a TRI na correção das provas, exceto em redação. Para entender melhor, leia o texto a seguir, transcrito do Portal do Ministério da Educação.

Entenda como é calculada a nota do Enem

O Inep [Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira] adota a Teoria de Resposta ao Item (TRI) para chegar à **nota final**. Esta, em cada uma das quatro **áreas de conhecimento**, é calculada a partir de uma escala, que é como uma régua que mede o nível de conhecimento do participante.

O desempenho médio dos candidatos encontra-se no meio dessa régua, os 500 pontos. Dessa forma, as questões da prova ocupam uma posição diferente, de acordo com o nível de dificuldade. Nesse sentido, as perguntas situadas abaixo de 500 têm um nível de dificuldade menor para a maioria dos estudantes; as acima de 500, maior.

Observação

Nota: teoricamente, a nota do Enem em cada prova de múltipla escolha pode variar de 0 a 1.000; porém, as notas mínima e máxima não são necessariamente 0 e 1.000, pois dependem de algumas características consideradas pela TRI. Apenas as notas de redação obedecem rigorosamente à escala de 0 a 1.000, pois sua correção não adota a TRI.

Áreas do conhecimento: as quatro áreas do conhecimento avaliadas no Enem são: Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O método busca priorizar a coerência no desempenho dos estudantes. Se alguém acerta as questões mais difíceis, mas erra aquelas consideradas fáceis, provavelmente "chutou" as respostas. Por isso, terá uma nota inferior à de um estudante que acertou o mesmo número de questões consideradas mais fáceis, mas errou as mais complexas. Assim, duas pessoas que fizeram a mesma edição do Enem e tiveram número igual de acertos podem ter notas diferentes.

A aplicação da TRI é frequente nas avaliações que utilizam testes de múltipla escolha aplicados em diversos países. No Brasil, a TRI é usada desde 1995 nas provas do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que mede o desempenho de estudantes do ensino fundamental e médio e a própria educação básica, e desde 2009 é utilizada no Enem, com o objetivo de garantir a comparação das notas do exame em diferentes aplicações.

Redação – A nota da redação não é calculada pela TRI. Os textos são corrigidos um a um por mais de 5 mil avaliadores. Destes, cada um recebe até 200 redações por dia, com o compromisso de analisar mais de 150 textos a cada três dias. A cada 50 redações, o corretor recebe duas já avaliadas por uma equipe de especialistas, que serão usadas para analisar o desempenho do corretor.

Todas as redações são avaliadas por dois professores em plataforma *on-line*, com texto sem identificação. Cada um desconhece a nota atribuída pelo outro. Se a discrepância das notas for superior a 100 pontos, no total, ou 80 pontos em uma das cinco competências avaliadas, um terceiro professor fará a correção. A nota final da redação é a média aritmética das duas notas totais que mais se aproximam.

A redação do Enem 2019 [por exemplo, avaliou] cinco competências:

- domínio da escrita formal;
- desenvolvimento do tema em estilo dissertativo-argumentativo;
- relacionar, organizar e interpretar informações e argumentos em defesa de uma opinião;
- conhecimento de mecanismos linguísticos para construir a argumentação;
- elaboração de proposta de intervenção para o problema proposto, com respeito aos direitos humanos.

A nota máxima prevista é 1.000. Textos com até sete linhas ou que fogem ao tema estão entre os critérios para zerar a redação.

Enem – O exame é composto por quatro provas objetivas, totalizando 180 questões, e uma redação. [...]

Fonte: Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/busca-geral/418-noticias/enem-946573306/84461-entenda-como-e-calculada-a-nota-do-enem>. Acesso em: 25 jun. 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

O texto acima trata da Teoria de Resposta ao Item (TRI) e de sua aplicação no Enem. De acordo com o texto, responda aos itens seguintes.

1. A Teoria de Resposta ao Item (TRI) considera apenas as questões respondidas corretamente em uma prova de múltipla escolha?
2. Dois candidatos *A* e *B* acertaram 120 testes cada um na prova do Enem; porém, a nota de *A* foi maior que a nota de *B*. Supondo que não houve erro na avaliação de ambos, explique, por meio de um exemplo, como isso pode ter ocorrido.
3. O Enem foi o primeiro exame em larga escala a adotar a TRI?
4. Quais foram as cinco competências avaliadas na redação do Enem de 2019?
5. Como são avaliadas as redações?

Sugestões

Consulte a "Cartilha do participante – Redação no ENEM" para saber mais sobre as competências avaliadas em 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/418-enem-946573306/81381-conheca-as-cinco-competencias-cobradas-na-redacao-do-enem#:~:text5%C3%89%20avaliado%20se%20a%20reda%C3%A7%C3%A3o,emprego%20de%20pronomes%20e%20crase.>. Acesso em: 30 jun. 2020.

O *site* do Inep também traz diversos documentos relacionados ao Enem, como manual de correção da redação e cartilha do participante de edições anteriores da prova. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem-outros-documentos>. Acesso em: 30 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

5 OS SISTEMAS DIGITAIS E A BASE BINÁRIA

Talvez você já tenha assistido a um filme em que um náufrago ou um prisioneiro conta os dias ao agrupar, em quantidades iguais, riscos feitos em uma parede.

GARFIELD, JIM DAVIS © 2019 PAWS, INC. ALL RIGHTS RESERVED / DIST. BY ANDREWS MCMEEL SYNDICATION

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O processo de contagem torna-se mais prático e fácil quando agrupamos em partes iguais os elementos a serem contados. O número de elementos de cada agrupamento é a **base** da contagem. Por exemplo:

- agrupando os elementos de 5 em 5, contamos na base 5;
- agrupando os elementos de 2 em 2, contamos na base 2.

Os sistemas de numeração no dia a dia e na informática

Um sistema de numeração é um conjunto de símbolos e regras usados na representação dos números. No dia a dia, o sistema de numeração mais empregado é o de base 10. Isso significa que, quando contamos, agrupamos as unidades de 10 em 10, de modo que 10 unidades formam uma dezena, 10 dezenas formam uma centena, 10 centenas formam 1 milhar e assim por diante.

Por exemplo, o número 271 pode ser representado pela seguinte decomposição, chamada de **desenvolvimento polinomial relativo à base 10**:

$$271 = 200 + 70 + 1$$

ou seja,

$$271 = \mathbf{2} \cdot 10^2 + \mathbf{7} \cdot 10^1 + \mathbf{1} \cdot 10^0$$

KK TAN/SHUTTERSTOCK

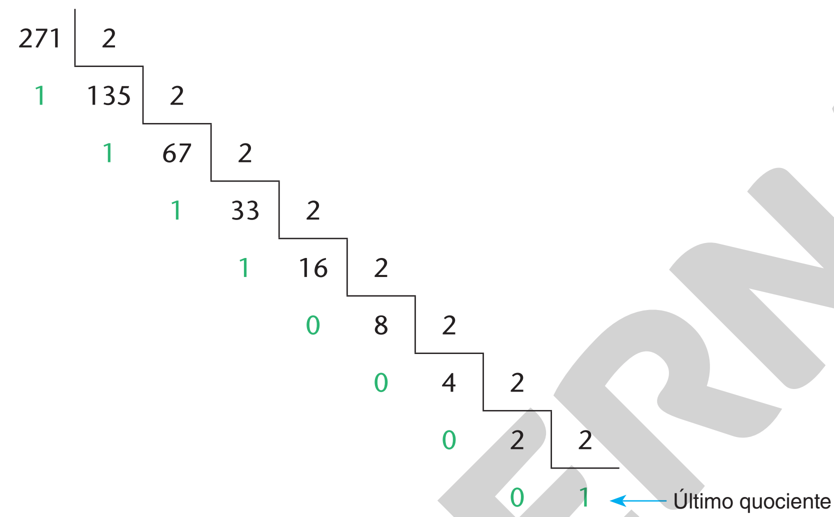
Observe que cada dígito (algarismo) do número 271 tem um valor relativo à sua posição; por exemplo, o dígito 2 representa 2 centenas. Logo, o valor relativo do dígito 2 é 200. Observe também que cada dígito é coeficiente de uma potência natural de 10, começando em 10^0, da direita para a esquerda.

Isso nos parece óbvio, já que trabalhamos com números decimais todos os dias. A base 10 provavelmente se desenvolveu pelo fato de o ser humano ter 10 dedos nas mãos, o que facilita esse tipo de agrupamento.

Embora a base 10 seja a mais usual, nada nos impede de adotar outra base na representação de um número. Por exemplo, se quisermos representar o número 271 na base 2, chamada **base binária**, devemos encontrar os dígitos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_1, a_0$, com $\{n, n-1, n-2, n-3, \dots, 1, 0\} \subset \mathbb{N}$, tais que:

$$271 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + a_{n-3} \cdot 2^{n-3} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

Para a obtenção desses dígitos, basta efetuar a divisão de 271 por 2, cujo quociente deve também ser dividido por 2; o novo quociente deve ser dividido por 2, e assim por diante, até obter um quociente menor que 2. Veja a representação abaixo:



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Os restos das divisões e o último quociente, na ordem inversa em que foram obtidos, isto é, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 e 1, são os valores de $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_1$ e a_0, respectivamente. Assim:

$$271 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 271 = 100001111_2$$

Esse número deve ser lido da seguinte maneira: "um, zero, zero, zero, zero, um, um, um, um na base dois".

Note, portanto, que um número representado na base 2 apresenta apenas dígitos zeros e uns (0 e 1).

Quando a base de contagem é diferente de 10, é necessário indicá-la subscrita, à direita do último algarismo do número representado, como em 100001111_2.

Quando a base é 10, não é necessário indicá-la; ela fica subentendida, como em 271, que significa 271_{10}.

Inversamente, como converter para a base 10 um número representado na base 2?

Dado um número representado na base 2, por exemplo, 1101010_2, para representá-lo na base 10, basta escrever seu desenvolvimento polinomial relativo à base 2, isto é:

$$1101010_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Assim, temos:

$$1101010_2 = 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 106$$

Ou seja, o número binário 1101010_2 representa o número decimal 106.

Sugestão

Para um estudo completo da Aritmética binária, sugerimos o trabalho "Sistemas numéricos e a representação interna dos dados no computador". Disponível em: <https://www.inf.ufsc.br/~roberto.willrich/Ensino/INE5602/restrito/ii-cap2.PDF>. Acesso em: 8 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 Represente na base 2 o número decimal 165.

2 Represente na base 10 o número binário 110101_2.

3 Efetue as operações entre números binários, sem convertê-los para a base 10.

a) $1011_2 + 101_2$ **b)** $1101_2 - 1011_2$

A base binária e os computadores

Os computadores utilizam **a base binária** de numeração. Todas as informações armazenadas ou processadas são representadas por códigos formados apenas por dígitos 1 ou 0, daí vem o nome **sistema digital**. Por exemplo, no código ASCII (do inglês, *American Standard Code for Information Interchange*, ou Código Padrão Norte-Americano para o Intercâmbio de Informações) a letra **A** é representada pela sequência 01000001, e o símbolo **@** é representado pela sequência 01000000.

A escolha do sistema binário, com a tecnologia eletrônica atual, deve-se aos custos de produção e ao fato de que esse sistema oferece a maior velocidade no armazenamento e no processamento de dados, pois o computador deve reconhecer apenas dois impulsos elétricos distintos, representados por 0 ou 1. Se tivesse de reconhecer mais de dois impulsos, o tempo necessário seria, obviamente, maior.

A base binária e as calculadoras eletrônicas

As calculadoras eletrônicas também são computadores, porém limitados a cálculos aritméticos. Mas como elas efetuam os cálculos?

Vamos descrever o processo, resumidamente, usando o cálculo $5 + 12 = 17$ como exemplo.

Ao digitar a tecla correspondente ao número 5, por exemplo, a calculadora armazena na memória o binário de oito dígitos 00000101. Ao digitar a tecla correspondente à soma, um *microchip* identifica que deve ser efetuada a adição do número armazenado com o próximo número que será digitado. Então, ao digitar o segundo número, digamos 12, a calculadora armazena na memória o binário de oito dígitos 00001100. Assim que digitamos a tecla "igual a", a operação é efetuada, resultando no binário de oito dígitos 00010001, que a calculadora converte para número decimal, exibindo no visor o número 17. De modo análogo são efetuadas as demais operações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA


WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK

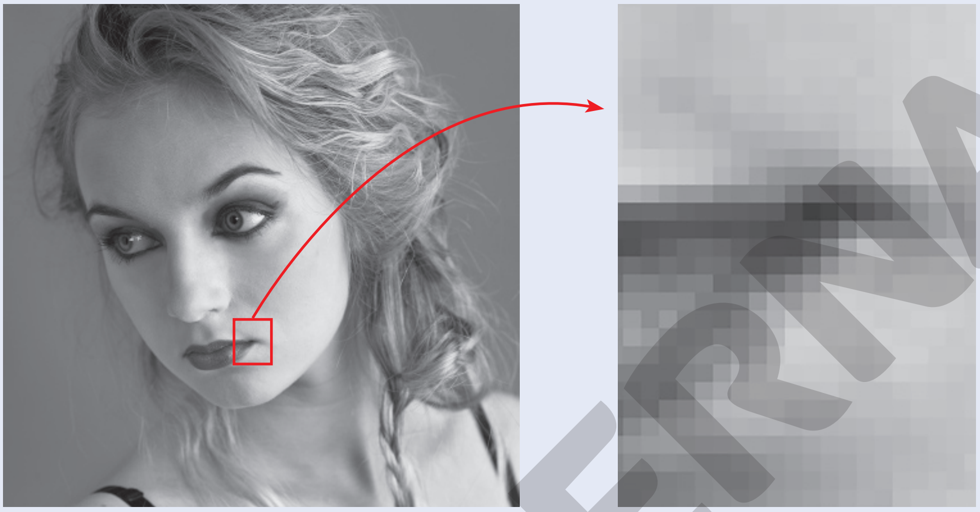
As calculadoras eletrônicas também usam o sistema binário, porém a conversão é rápida, de modo que vemos apenas os números decimais no visor.

Explorando conexões

Visão computacional: como o computador vê uma imagem

Se ampliarmos muito uma imagem vamos ver diversos "quadrinhos coloridos" (como o exemplo abaixo). Esses quadrados , chamados de *pixel*, são a menor divisão de uma imagem. Uma imagem é formada por diversos desses pontos (uma matriz de *pixels*).

A.KARNAUSHENKO/SHUTTERSTOCK



A imagem mais à direita é uma ampliação de um detalhe da fotografia ao lado. Nessa ampliação, é possível ver os *pixels*, as menores divisões de uma imagem.

Computadores trabalham com números e não cores, então cada *pixel* é salvo no computador como um valor que corresponde à intensidade de cor presente nele. Normalmente a cor é salva com intervalos de **0 a 255**; no caso da imagem acima, 0 é totalmente preto, e 255, totalmente branco. Concluímos que para um computador uma imagem é uma matriz de números. [...]

Observação

Os números que representam as cores devem ser naturais. O usuário os digita na base 10, e o computador os interpreta na base 2.

Cores

[No exemplo acima mostramos] uma imagem em tons de cinza. Então, como funciona com imagens coloridas?

Apesar de existirem diversas maneiras de trabalharmos com cores, nas imagens elas são representadas apenas pela combinação de 3 cores base: vermelho, verde e azul. Esse sistema é chamado de RGB (do inglês *red*, *green* e *blue*) e podemos colocar uma porcentagem de cada tonalidade para formar uma cor. Por exemplo: a cor vermelha é definida com um tom de 100% vermelho, 0% verde e 0% azul; já o amarelo combina igualmente verde e vermelho (100% vermelho, 100% verde e 0% azul). Para termos mais precisão, e consequentemente mais cores, dividimos a tonalidade entre valores de 0 a 255; assim, o vermelho seria (255,0,0) e o amarelo (255,255,0). Abaixo temos alguns exemplos de como o sistema funciona:

Nome da cor	RGB hexadecimal**	RGB decimal	Cor
Amarelo	#FFFF00	255,255,0	
Amarelo esverdeado	#99CC32	153,204,50	
Aquamarine	#70DB93	112,219,147	
Aquamarine médio	#32CD99	50,205,153	
Azul	#0000FF	0,0,255	

Fonte: Let's Code Academy. Disponível em: <https://letscode-academy.com/blog/visao-computacional-como-o-computador-ve-uma-imagem/>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sugestão

A rapidez da conversão de números hexadecimais (base 16) em números binários (base 2), e vice-versa, é o motivo pelo qual a base 16 também é usada na representação dos códigos das cores do sistema RGB. Para saber mais sobre isso, sugerimos o texto “Entenda como funciona o código de cores RGB”. Disponível em: <https://dicasdeprogramacao.com.br/entenda-como-funcionam-os-codigos-de-cores-rgb/>. Acesso em: 8 jun. 2020.

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**. **Não escreva no livro.**

4 De acordo com as informações do texto, responda aos itens seguintes.

a) Observando o diagrama da página anterior, formado pelos círculos coloridos, qual é a cor representada pelo terno ordenado (0,255,255)?

b) A cor de um *pixel* é determinada pelo terno ordenado (51,153,255). Quais percentuais de vermelho, verde e azul compõem esse *pixel*?

c) Quantas cores diferentes pode apresentar cada *pixel*?

O que são *bits* e *bytes*?

Provavelmente você já ouviu falar sobre *bits* e *bytes*. A capacidade da memória RAM (*Random Access Memory*, em português Memória de Acesso Aleatório) e do disco rígido, o tamanho dos arquivos e a capacidade de processamento de um computador são expressos em *bits* e *bytes*.

Por exemplo, um computador pode ter um processador de 64 *bits* com 8 *gigabytes* de memória RAM e 1 *terabyte* de espaço no disco rígido. Mas o que significam essas unidades?

Bit

Como vimos, os computadores operam utilizando o sistema numérico binário, isto é, de base 2. Assim, processam e armazenam informações por meio de sequências formadas apenas por zeros e uns (0 e 1). Cada um desses dígitos, que representa um impulso elétrico reconhecido pelo computador, é chamado de *bit*, abreviação da expressão *binary digit* (dígito binário).

CANBEDONE/SHUTTERSTOCK

Os computadores usam códigos binários compostos por zeros e uns, sendo que cada dígito corresponde a um *bit*.

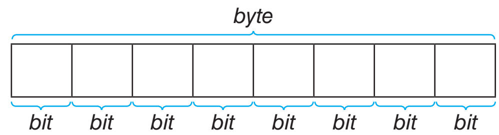
Byte

O *byte* é uma unidade de informação digital formada por uma sequência de 8 *bits*. Portanto, um *byte* é representado por um número binário, por exemplo, 10100110. A palavra *byte* é a abreviação de *binary term*.

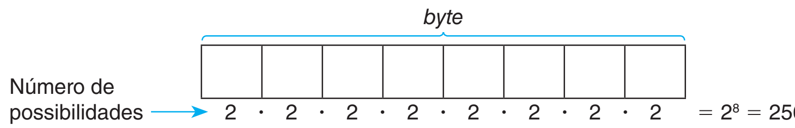
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

E quantos *bytes* diferentes podem ser formados? A resposta a essa pergunta pode ser obtida por meio do princípio fundamental da contagem, a partir do seguinte diagrama:



Como cada *bit* pode assumir apenas um dos valores 0 ou 1, temos:



Concluímos, então, que podem ser formados 256 *bytes* diferentes.

Por que cada *byte* é formado por 8 *bits*?

O *byte* de 8 *bits* é algo que os pesquisadores estabeleceram através de tentativas durante os últimos 50 anos.

Com 8 *bits* em cada *byte* é possível representar 256 números binários, cuja correspondência com os números decimais é mostrada abaixo:

Números decimais	Números binários
0	00000000
1	00000001
2	00000010
.	.
.	.
.	.
166	10100110
.	.
.	.
.	.
255	11111111

Observação

Sinais de controle são comandos não imprimíveis, como a função das teclas *Home*, que leva o cursor para o início da linha, e *End*, que leva o cursor para o final, em um editor de textos, por exemplo.

Como o número de caracteres (letras maiúsculas e minúsculas, sinais de pontuação ou acentuação etc.) e **sinais de controle** (não imprimíveis) enviado para o computador, por meio do teclado, não excede 256, e cada *byte* pode representar um único caractere ou sinal de controle, concluiu-se que 8 *bits* em cada *byte* seriam suficientes.

Múltiplos do *byte*

Indicamos os múltiplos do *byte* acrescentando prefixos, conforme a tabela:

Múltiplos do *byte*					
Prefixo binário (IEC)			Prefixo do SI		
Nome	**Símbolo**	**Múltiplo**	**Nome**	**Símbolo**	**Múltiplo**
byte	B	2^{0}	*byte*	B	10^{0}
kibibyte	kiB	2^{10}	*kilobyte*	kB	10^{3}
mebibyte	MiB	2^{20}	*megabyte*	MB	10^{6}
gibibyte	GiB	2^{30}	*gigabyte*	GB	10^{9}
tebibyte	TiB	2^{40}	*terabyte*	TB	10^{12}
pebibyte	PiB	2^{50}	*petabyte*	PB	10^{15}
exbibyte	EiB	2^{60}	*exabyte*	EB	10^{18}
zebibyte	ZiB	2^{70}	*zettabyte*	ZB	10^{21}
yobibyte	YiB	2^{80}	*yottabyte*	YB	10^{24}

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Um esclarecimento necessário

Até algum tempo atrás, o *quilobyte*, o *megabyte*, o *gigabyte*, o *terabyte* etc. eram representados por potências de 2 (2^{10}, 2^{20}, 2^{30}, 2^{40} etc.). No entanto, os fabricantes de mídias digitais passaram a expressar essas unidades em potência de 10 (10^3, 10^6, 10^9, 10^{12} etc.), cujos valores são aproximados das potências de 2 correspondentes, por exemplo $2^{10} \approx 10^3$.

Para padronizar a nomenclatura, a IEC (*International Electrotechnical Commission*, ou Comissão Eletrotécnica Internacional) estabeleceu, por volta de 1998, que as unidades *quilobyte* (kB), *megabyte* (MB), *gigabyte* (GB) etc. devem seguir a definição do Sistema Internacional de Unidades (SI) sendo representadas por potências de 10 (10^3, 10^6, 10^9 etc.), pois nesse sistema os prefixos quilo, mega, giga etc. significam 1.000, 1.000.000, 1.000.000.000 etc., respectivamente.

Para as unidades de armazenamento digital representadas por potências de 2, a IEC criou os termos *kibibyte*, *mebibyte*, *gibibyte* etc., representadas pelas potências 2^{10}, 2^{20}, 2^{30} etc., respectivamente. Os símbolos que representam essas novas unidades derivam de kB, MB, GB etc., com a letra **i** entre as duas letras, ou seja, kiB, MiB, GiB, TiB etc.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.

Não escreva no livro.

5 (IMT-SP) Fotografias coloridas são armazenadas em formato digital como matrizes de pontos (*pixels*), cada qual composto por três *bytes*. Sequências de 24 fotografias estáticas por segundo podem constituir um filme. Quantos *bytes* serão necessários para armazenar, em um computador, um filme de 30 segundos de duração, se cada fotografia apresentar resolução de 200 por 200 pontos?

INDEPENDENT BIRDS/SHUTTERSTOCK

6 No exercício anterior, quantos *megabytes* serão necessários para armazenar o filme no computador?

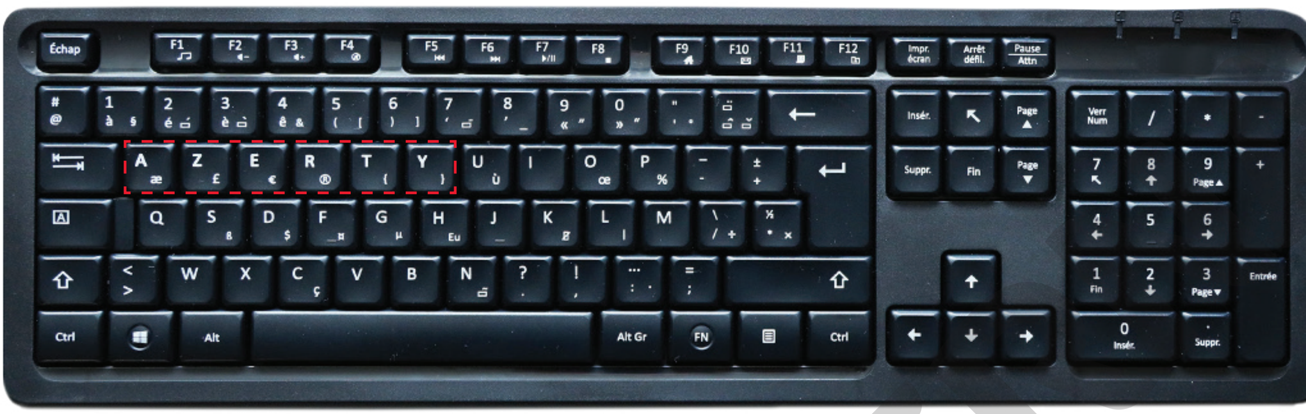
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Bytes e o padrão ASCII

Os *bytes* podem representar caracteres individuais (letras não acentuadas, pontuação, acentos etc.) ou operações de controle (não imprimíveis) em um documento de texto. No **sistema padrão de caracteres ASCII** cada um desses *bytes* é representado por um número binário correspondente a um dos números decimais de 0 a 127 e está associado a um caractere individual ou a um código de controle de texto. Dentre os demais valores binários, correspondentes aos decimais de 128 a 255, estão os representantes de elementos especiais, como caracteres acentuados de diversas línguas, como o francês.

GGAL CC BY-SA 4.0

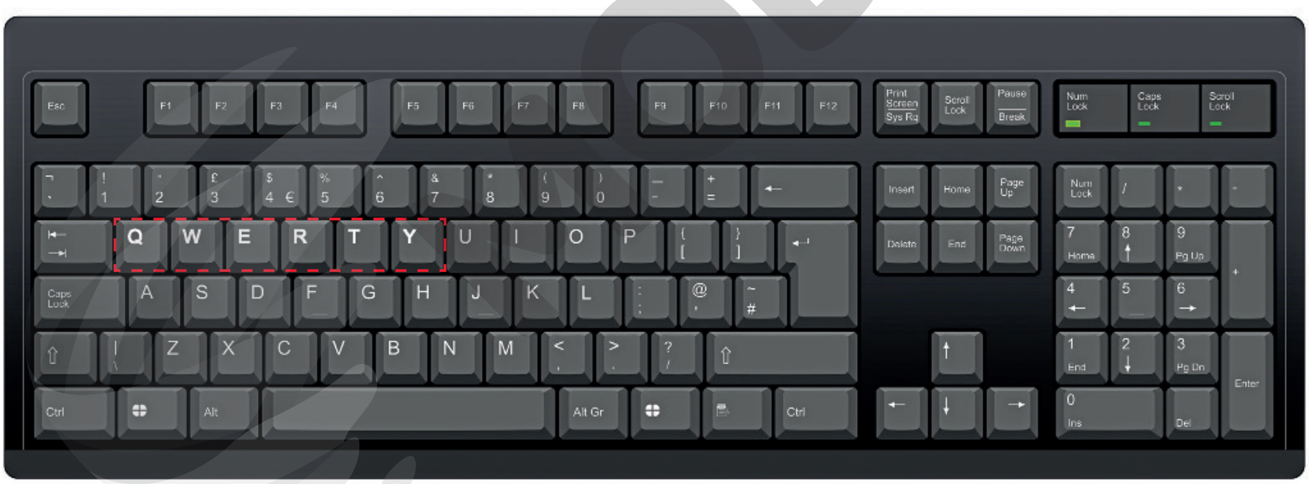


Variante francesa do teclado AZERTY, nome que vem da sequência das seis primeiras letras à direita da tecla *Tab* (⭾).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No Brasil, o teclado adotado é o QWERTY, que obedece às orientações da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). O nome QWERTY vem da sequência das seis primeiras letras à direita da tecla *Tab*, como destacado abaixo.

OJOVAGO/SHUTTERSTOCK



Teclado QWERTY, padrão adotado no Brasil.

Os 128 primeiros códigos padrão da tabela ASCII são apresentados a seguir. Os computadores armazenam documentos de texto utilizando esses códigos.

Tabela ASCII padrão

Os 32 primeiros códigos (00000000 a 00011111, em binário) e o 127º (01111111, em binário) são códigos de controle como ir para o começo do texto (STX) e entrar (CR), os demais são códigos de escrita.

TABELA ASCII PADRÃO

Decimal	Binário	Referência	Decimal	Binário	Referência	Decimal	Binário	Referência
0	00000000	Null – NUL	43	00101011	+	86	01010110	V
1	00000001	Start of Heading – SOH	44	00101100	,	87	01010111	W
2	00000010	Start of Text – STX	45	00101101	–	88	01011000	X
3	00000011	End of Text – ETX	46	00101110	.	89	01011001	Y
4	00000100	End of Transmission – EOT	47	00101111	/	90	01011010	Z
5	00000101	Enquiry – ENQ	48	00110000	0	91	01011011	[
6	00000110	Acknowledge – ACK	49	00110001	1	92	01011100	\
7	00000111	Bell, rings terminal bell – BEL	50	00110010	2	93	01011101	]
8	00001000	BackSpace – BS	51	00110011	3	94	01011110	^
9	00001001	Horizontal Tab – HT	52	00110100	4	95	01011111	_
10	00001010	Line Feed – LF	53	00110101	5	96	01100000	`
11	00001011	Vertical Tab – VT	54	00110110	6	97	01100001	a
12	00001100	Form Feed – FF	55	00110111	7	98	01100010	b
13	00001101	Enter – CR	56	00111000	8	99	01100011	c
14	00001110	Shift-Out – SO	57	00111001	9	100	01100100	d
15	00001111	Shift-In – SI	58	00111010	:	101	01100101	e
16	00010000	Data Link Escape – DLE	59	00111011	;	102	01100110	f
17	00010001	Device Control 1 – D1	60	00111100	<	103	01100111	g
18	00010010	Device Control 2 – D2	61	00111101	=	104	01101000	h
19	00010011	Device Control 3 – D3	62	00111110	>	105	01101001	i
20	00010100	Device Control 4 – D4	63	00111111	?	106	01101010	j
21	00010101	Negative Acknowledge – NAK	64	01000000	@	107	01101011	k
22	00010110	Synchronous idle – SYN	65	01000001	A	108	01101100	l
23	00010111	End Transmission Block – ETB	66	01000010	B	109	01101101	m
24	00011000	Cancel line – CAN	67	01000011	C	110	01101110	n
25	00011001	End of Medium – EM	68	01000100	D	111	01101111	o
26	00011010	Substitute – SUB	69	01000101	E	112	01110000	p
27	00011011	Escape – ESC	70	01000110	F	113	01110001	q
28	00011100	File Separator – FS	71	01000111	G	114	01110010	r
29	00011101	Group Separator – GS	72	01001000	H	115	01110011	s
30	00011110	Record Separator – RS	73	01001001	I	116	01110100	t
31	00011111	Unit Separator – US	74	01001010	J	117	01110101	u
32	00100000	Space – SPC	75	01001011	K	118	01110110	v
33	00100001	!	76	01001100	L	119	01110111	w
34	00100010	"	77	01001101	M	120	01111000	x
35	00100011	#	78	01001110	N	121	01111001	y
36	00100100	$	79	01001111	O	122	01111010	z
37	00100101	%	80	01010000	P	123	01111011	{
38	00100110	&	81	01010001	Q	124	01111100	|
39	00100111	'	82	01010010	R	125	01111101	}
40	00101000	(	83	01010011	S	126	01111110	~
41	00101001	)	84	01010100	T	127	01111111	Delete
42	00101010	*	85	01010101	U			

Fonte: *Tec Ciência* (UFBA). Disponível em: <http://teccienciapiloto.ufba.br/numeros-binarios/curiosidades/ascii-completa.png>. Acesso em: 12 jun. 2020.

Observe, por exemplo, que o número binário 01010010 representa a letra **R** (maiúscula), e 01110010 representa a letra **r** (minúscula).

Sugestões

Apresentamos a seguir duas sugestões de vídeos sobre a base binária:
O *hit* dos *bits*. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1116>. Acesso em: 8 jun. 2020.
O mágico das Arábias. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1131>. Acesso em: 8 jun. 2020.

Professor, se possível, reproduza os vídeos em sala e promova uma discussão com toda a turma.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

7 Observe a Tabela ASCII estendida, apresentada a seguir, que complementa a reproduzida anteriormente, e responda aos itens seguintes.

Nota: Dependendo do conjunto de caracteres adotado pelo sistema operacional de seu computador, os códigos ASCII estendidos podem não coincidir com os desta tabela. O conjunto de caracteres mais usual é conhecido como ISO 8859-1 ou ISO Latin 1, cujos caracteres são utilizados na maioria dos idiomas ocidentais, incluindo a língua portuguesa.

TABELA ASCII ESTENDIDA

Decimal	Referência	Decimal	Referência	Decimal	Referência
128	Ç	171	½	214	Í
129	ü	172	¼	215	Î
130	é	173	¡	216	Ï
131	â	174	«	217	┘
132	ä	175	»	218	┌
133	à	176	░	219	█
134	å	177	▒	220	▄
135	ç	178	▓	221	¦
136	ê	179	│	222	Ì
137	ë	180	┤	223	▀
138	è	181	Á	224	Ó
139	ï	182	Â	225	ß
140	î	183	À	226	Ô
141	ì	184	©	227	Ò
142	Ä	185	╣	228	õ
143	Å	186	║	229	Õ
144	É	187	╗	230	µ
145	æ	188	╝	231	þ
146	Æ	189	¢	232	Þ
147	ô	190	¥	233	Ú
148	ö	191	┐	234	Û
149	ò	192	└	235	Ù
150	û	193	┴	236	ý
151	ù	194	┬	237	Ý
152	ÿ	195	├	238	¯
153	Ö	196	─	239	´
154	Ü	197	┼	240	..
155	ø	198	ã	241	±
156	£	199	Ã	242	‗
157	Ø	200	╚	243	¾
158	×	201	╔	244	¶
159	ƒ	202	╩	245	§
160	á	203	╦	246	÷
161	ù	204	╠	247	¸
162	ó	205	═	248	°
163	ú	206	╬	249	¨
164	ñ	207	¤	250	·
165	Ñ	208	ð	251	¹
166	ª	209	Ð	252	³
167	º	210	Ê	253	²
168	¿	211	Ë	254	■
169	®	212	È	255	
170	¬	213	ı		

Fonte: *Tec Ciência* (UFBA). Disponível em: <http://teccienciapiloto.ufba.br/numeros-binarios/curiosidades/ascii-completa.png>. Acesso em: 12 jun. 2020.

a) O caractere **ä** corresponde ao número decimal 132. Qual é o *byte* que representa esse caractere?

b) Qual é o caractere representado pelo *byte* 11000001?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

O que é CGI e computação gráfica?

CGI é uma sigla em inglês para o termo ***Computer Graphic Imagery***, ou seja, imagens geradas por computador, a famosa computação gráfica. O termo se refere a todas as imagens geradas através de computadores feitas em três dimensões, com a profundidade de campo sendo possível graças apenas à computação. Parece uma conversa técnica, certo? Nem tanto. O CGI nada mais é que praticamente todo tipo de efeito ou animações que vemos hoje em dia, seja em filmes, ***videogames*** ou mesmo na televisão. [...]

Um pouquinho de história...

[...] Em 1962, o Dr. Ivan Sutherland, um dos pioneiros da Internet e realidade aumentada, lançou a tese “Sketchpad – A Man-Machine Graphical Communication System”, que se tornou bastante influente e despertou a curiosidade de empresas dos ramos automobilístico e aeroespacial. No final da década, o uso de computadores nestas empresas fez surgir a tecnologia **CAD**, ramo da computação gráfica voltada ao auxílio na criação de desenhos e estruturas, que se tornou um padrão até os dias de hoje. [...]

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observação

A sigla CAD (*Computer Aided Design*) é o nome genérico de *softwares* utilizados pela Engenharia, Geologia, Geografia, Arquitetura e *design* para facilitar a elaboração de projetos e desenhos técnicos.

Tecnologia + Arte = Entretenimento

Posteriormente, o grande avanço no poder de processamento gráfico dos computadores e a criação de mais e mais ferramentas que facilitam o uso de CGI permitiram que ela fosse usada em muitas mais áreas de aplicação. Um dos maiores exemplos é o uso na história do cinema. Hoje, mesmo uma cena simples pode ter bons recursos de CGI envolvidos em sua criação, pois além de tornar desnecessárias as gravações em locações externas, permite a elaboração de cenas que de outro modo seriam impossíveis.

Um dos primeiros filmes a usar essa técnica foi *Star Wars – Uma Nova Esperança*, de 1977. Os filmes da épica saga de George Lucas acabariam por ser referência no uso de CGI para criação de efeitos especiais, em grande parte por causa de sua empresa, a Industrial Light and Magic, uma subdivisão de sua produtora para efeitos especiais e responsável pelo desenvolvimento de novas câmeras e modos de filmagem. [...]

Em 1982, os estúdios Disney inovaram e marcaram a história da CGI cinematográfica com o filme *TRON*. O filme, que conta a história do *hacker* Kevin Flynn lutando num mundo inteiramente digital, foi o primeiro filme a usar a CGI em larga escala. [...]

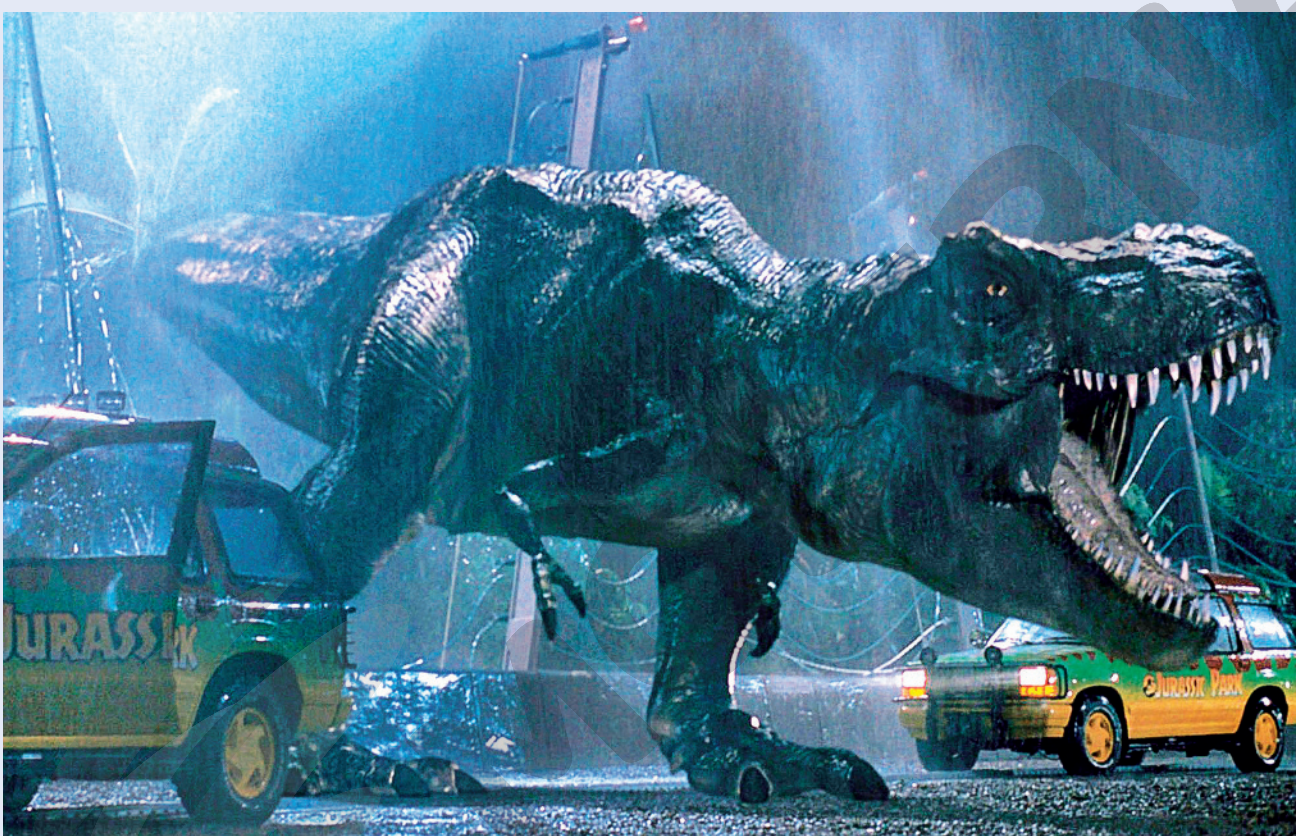
O próximo passo da revolução viria em 1985 com o lançamento de *O Enigma da Pirâmide*. O filme, de Barry Levinson e produção de Steven Spielberg, levou às telas o primeiro personagem criado e animado digitalmente: o Cavaleiro de Vitral. [...]

O domínio da técnica e uma nova indústria

Claro que Hollywood acabou se tornando a principal investidora do segmento. A própria ILM, que havia feito *Star Wars*, nos brindou com verdadeiros ícones do CGI logo no começo da década de 90, fosse o robô T-1000 de *Exterminador do Futuro II*, que combinava cenas reais com o androide de metal líquido, até os dinossauros de *Jurassic Park*, que novamente quebrou barreiras ao não só criar um personagem imaginário em cena, mas recriar um ser vivo, de ossos, músculos e movimentos, camada por camada, totalmente feito pelo computador. Esse processo de modelagem acabou se tornando padrão para os efeitos cada vez mais realistas que víamos no cinema, desenvolvidos agora à semelhança da vida real.

[...]

Fonte: O que é CGI e computação gráfica? *Canaltech*. Disponível em: <https://canaltech.com.br/software/O-que-e-CGI-e-computacao-grafica/>. Acesso em: 11 ago. 2020.



UNIVERSAL PICTURES/PHOTO 12/GLOW IMAGES

Cena do filme *Jurassic Park*. (Direção de Steven Spielberg. Estados Unidos: Amblin Entertainment, 1993). A criação envolveu um processo de modelagem feito no computador para obter os efeitos realistas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

8 Alguns dos fundamentos matemáticos da computação gráfica são as transformações geométricas. Façam uma pesquisa na internet ou em bibliotecas atendendo aos dois itens seguintes:

a) Escrevam um breve texto sobre transformações geométricas, com ilustrações, feitas à mão ou no computador, que complementem a pesquisa.

b) Escrevam um breve texto sobre aplicações das transformações geométricas na computação gráfica, ilustrado com exemplos.

Texto complementar

Para entender o texto a seguir, é importante conhecer a diferença entre *hardware* e *software*.

Hardware é qualquer componente físico do computador, ou seja, qualquer equipamento palpável que componha a máquina ou esteja acoplado a ela como acessório, por exemplo, placa-mãe, *cooler*, monitor, *mouse*, teclado e até mesmo um *pen drive*.

O *software* é um conjunto de instruções que o computador deve seguir para chegar a determinado resultado. Há *softwares* que fazem parte do sistema, como *firmware* e *drivers*; e *softwares* aplicativos, como editores de texto e planilhas eletrônicas, que permitem que o usuário realize atividades específicas.

Agora leia o texto e responda às perguntas a seguir.

ROMAN SAMBORSKYI/SHUTTERSTOCK

Uma engenheira de *software* trabalha com a parte lógica do computador, ou seja, com sistema operacional e outros programas. Foto de 2019.

O que é, o que faz (e como se tornar) um engenheiro de *software*

[...]

Com investimento de 38 bilhões de dólares em Tecnologia da Informação – *software*, *hardware* e serviços – em 2017, o Brasil é o 1º entre os países da América Latina, e o 9º no *ranking* mundial. Entre 2016 e 2017, o crescimento foi de 4,5%, taxa maior do que a expectativa, de 4,1%, segundo dados da Associação Brasileira das Empresas de *Software* (ABES). [...]

Ainda que o mercado esteja aumentando, a Associação para a Promoção da Excelência do *Software* (Softex) aponta que o país pode ter carência de mais de 400 mil profissionais de TI em 2020. Dentre os trabalhadores em falta, os engenheiros de *software*, área à qual 8,2 bilhões de dólares do investimento total foram destinados.

Profissão de engenheiro de *software*

Com cada vez mais empresas automatizando seus serviços e criando suas próprias plataformas digitais, a profissão de engenheiro de *software* foi considerada a 2ª melhor da área de TI em crescimento e remuneração [...].

O *software* consiste na "parte lógica" do computador, que inclui sistema operacional e programas. Então, basicamente, estes profissionais projetam e guiam o desenvolvimento de programas, aplicativos e sistemas, de forma que atendam aos requisitos e cumpram as funções determinadas.

Entre as principais atribuições do engenheiro de *software*, estão:

- Desenvolver *softwares* e *apps*
- Gerenciar projetos ligados aos *softwares*
- Arquitetar o *design* estrutural dos programas
- Realizar testes nos sistemas

Além destas, estes engenheiros podem ter funções ligadas à administração de bancos de dados, manutenção dos sistemas e até algumas de documentação, relacionadas à gestão de projetos e à composição dos manuais de instruções.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Formação para atuar em Engenharia de *software*

Além dos cursos de Engenharia de *software*, os de Ciências da Computação também capacitam profissionais para atuarem neste mercado. No entanto, há diferenças entre os dois tipos de formação.

Enquanto os engenheiros aprendem sobre os processos envolvidos em desenvolver e manter programas, os cientistas da computação têm estudos mais focados na teoria, ligados a modelos matemáticos, algoritmos e lógica dos processos.

Também não é o mesmo do que ser um engenheiro de computação, que são responsáveis, principalmente, pelo *hardware* – ou seja, projetar e construir computadores.

A duração média dos cursos de Engenharia de *software*, atualmente oferecidos por universidades públicas e privadas, é de 4 anos. Entre os principais assuntos abordados estão: engenharia, matemática, arquitetura e gerenciamento de *softwares* e gestão de projetos.

Certificação para exercer a profissão de engenheiro de *software*

Desde maio de 2018, a profissão de engenheiro de *software* é regulamentada. Atualmente, para ser registrado junto ao CREA (Conselho Regional de Engenharia e Agronomia) é obrigatório ter formação em Engenharia de *software*.

Nesse contexto, tendo outras graduações, mesmo com as competências necessárias para exercer a função, o profissional pode não ser considerado para empregos em que o registro é um dos requisitos.

[...]

Habilidades para exercer a profissão de engenheiro de *software*

Ainda que a programação não seja o foco principal da Engenharia de *software*, é necessário conhecer as linguagens mais utilizadas [...].

Da mesma forma, habilidades matemáticas são necessárias. Estes engenheiros, frequentemente, precisam criar algoritmos matemáticos – instruções das operações descritas "passo a passo".

Para facilitar o trabalho com *softwares*, os profissionais podem empregar uma série de ferramentas. Entre elas Ambientes de Desenvolvimento Integrado (IDE, do inglês *Integrated Development Environment*), que agilizam o processo de escrever códigos.

Além de mexer com as IDE, precisam saber utilizar ferramentas de teste automatizadas e bibliotecas de código aberto, que oferecem as funcionalidades prontas, diminuindo o trabalho de desenvolvê-las. Por muitos sistemas de *software* atuais interagirem com bancos de dados, o engenheiro de *software* também precisa ser capaz de administrá-los.

[...]

Fonte: *Estudar na Prática*. Disponível em: <https://www.napratica.org.br/profissao-engenheiro-de-software/>. Acesso em: 12 jun. 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

O texto acima apresenta uma visão geral sobre a Engenharia de *software*. De acordo com a leitura, responda aos itens seguintes.

1. Qual foi o crescimento percentual do mercado de TI no Brasil, entre 2016 e 2017?
2. Comparando o aumento do mercado em TI com a necessidade de profissionais dessa área, qual era a projeção para 2020?
3. Que tarefas são da responsabilidade dos engenheiros de *softwares*?
4. Qual é a diferença entre as formações em Engenharia de *software* e em Ciências da Computação?
5. O que faz um engenheiro da computação?
6. Cite alguns dos principais assuntos estudados nos cursos de Engenharia de *software*.
7. Comente sobre habilidades matemáticas necessárias na Engenharia de *software*.

Sugestão

Para conhecer um pouco mais sobre desenvolvimento de *softwares*, assista ao vídeo *Engenharia de* Software *– Apresentação*, da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (Univesp). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ciQ2FObc3tc>. Acesso em: 12 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

6 ANÁLISE DE TENDÊNCIAS

GAUDILAB/SHUTTERSTOCK

Antecipar-se aos acontecimentos aumenta as chances de sucesso tanto na vida profissional quanto em projetos pessoais.

Você sabia que, com base no estudo de dados atuais e do passado, se podem prever, com boa possibilidade de acerto, resultados futuros? É possível estudar e fazer estimativas sobre o consumo de água em uma cidade, o índice de desemprego em uma região, a taxa de variação do **Produto Interno Bruto (PIB)** de um país, a demanda de petróleo no mundo e seu impacto ambiental, entre outros. Além disso, essas previsões podem ter impacto não só econômico mas também sobre o bem-estar da população.

Esse tipo de estudo é atribuição de um ramo da Matemática chamado **análise de tendências**, utilizada para prever resultados com base em um histórico de dados, aumentando as possibilidades de previsões aproximadamente corretas de dados futuros. Por isso, esse estudo contribui muito na tomada de decisões e em planejamentos.

Nas Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, muitos dos aspectos quantitativos de processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais podem ser modelados pela análise de tendência, o que permite a construção de hipóteses, o desenvolvimento de argumentos e a sistematização de dados.

Observação

Produto Interno Bruto (PIB) é um indicador econômico que indica a soma dos valores monetários de todos os bens e serviços produzidos em uma área ou região, em determinado período.

Várias situações envolvem previsões que relacionam dois grupos de medidas correspondentes e distintas, em que a ocorrência de valores em um dos grupos condiciona os valores possíveis no outro. Por exemplo, para estabelecer um cronograma de obras, o departamento de saneamento básico de uma cidade deve fazer previsões sobre o aumento de consumo de água decorrente do crescimento populacional da região.

De acordo com os dados descritos pelo gráfico da figura 1, em que é apresentado o consumo (y) de água em função da população (x) dessa cidade, vamos considerar que seja necessário estimar o consumo de água quando a população atingir 200 mil habitantes.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Figura 1

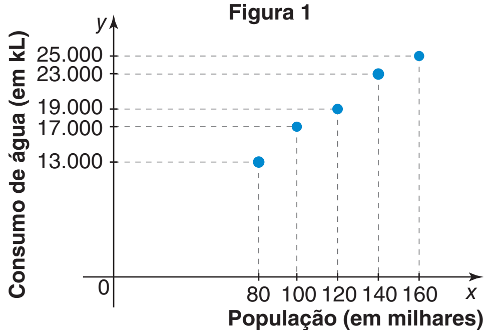
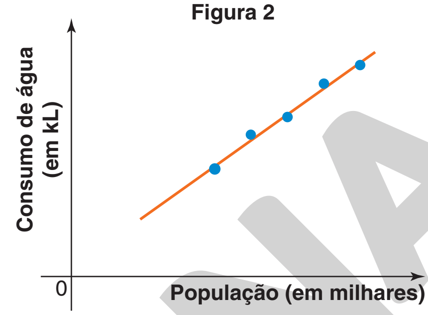


Figura 2



Dados fictícios.

A figura 2 mostra que os pontos do gráfico estão próximos de uma mesma reta e, portanto, as variáveis x e y podem ser relacionadas, aproximadamente, pela equação dessa reta. Por meio de métodos estatísticos, demonstra-se que a reta que melhor se ajusta a esses dados é dada pela equação:

$$y = 150x + 1.400$$

Assim, para $x = 200$ obtém-se uma estimativa do consumo de água quando a população for de 200 mil habitantes:

$$y = 150 \cdot 200 + 1.400 = 31.400$$

Logo, o consumo será de 31.400 kL, aproximadamente.

Nesse caso, utilizamos a equação de uma reta, mas equações de outras linhas de tendência podem ser adotadas, como veremos adiante.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

BRENO FORTES/D.A PRESS

O departamento de saneamento básico dos municípios faz previsões de consumo para que não falte água para a população. Estação de tratamento de água e captação de água do lago Paranoá, em Brasília (DF). Foto de 2017.

Explorando conexões

Consumo de água no mundo

O **consumo de água no mundo** é um dos grandes temas em debate na atualidade. Em uma média total, a maior parte da utilização da água é realizada pela agricultura, que detém 70% do consumo; seguida pela indústria, que detém 22%; e pelo uso doméstico e comercial com 8%. No entanto, nos países subdesenvolvidos, essa média é diferente: a agricultura representa 82%; a indústria, 10%; e as residências, 8%. Nos países desenvolvidos, a relação dessas atividades com o consumo é de 59% para a indústria, 30% para a agricultura e 11% para o uso doméstico.

Por razões econômicas, estruturais e sociais, os países desenvolvidos consomem muito mais água do que os subdesenvolvidos e emergentes, tanto nas práticas econômicas quanto no uso direto individual. Para ter uma ideia, em alguns países desenvolvidos, como nos Estados Unidos, uma pessoa consome em média 575 litros de água [diários], enquanto em países subdesenvolvidos a maior parte dos habitantes convive com apenas 15 litros por dia, o que revela as grandes desigualdades econômicas e sociais existentes ao redor do globo.

É claro que, à medida que alguns países periféricos ou emergentes vão promovendo uma relativa melhoria de suas economias e também de suas estruturas sociais, o consumo de água vai se acentuando, o que também eleva a média global. Na tabela ao lado podemos conferir o crescimento do consumo de água no mundo.

Ano	Água consumida (km^3/ano)
1900	580
1950	1.400
2000	4.000
2025 (estimativa)	5.200

Fonte: Organização das Nações Unidas.

Entre 1900 e 1950, o consumo passou de 580 para 1.400 km^3 anuais de água, o que representa um aumento de 2,4 vezes em um período de cinquenta anos. Nos cinquenta anos seguintes, o aumento foi de 2,8 vezes, saltando para 4.000 km^3/ano na virada do milênio. A ONU, seguindo esses dados e as tendências de consumo atuais, estima que, no ano de 2025, o consumo mundial de água será de 5.200 km^3/ano – uma alta de 1,3 vez em um período de 25 anos.

Fonte: *Mundo Educação*. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/geografia/consumo-agua-no-mundo.htm>. Acesso em: 11 maio 2020.

Na tabela acima, vê-se uma estimativa do consumo de água no mundo para o ano de 2025, com base no consumo registrado nos anos 1900, 1950 e 2000. Essa estimativa pode ser feita por meio de uma linha de tendência, que não necessariamente é uma reta.

Determinação da linha de tendência estatística

A partir da tendência revelada por uma série de dados é possível fazer uma projeção de resultados por meio de uma linha de tendência. Para isso, busca-se uma função cujo gráfico se aproxime desses pontos. As linhas mais comuns para esse tipo de previsão são a **reta**, a **parábola**, a **cúbica** e a **quártica**, cujas equações nas variáveis x e y têm as seguintes formas:

- reta: $y = ax + b$;
- parábola: $y = ax^2 + bx + c$;
- cúbica: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;
- quártica: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

Resíduo em relação a um ponto $P(x_0, y_0)$ é a distância entre P e o ponto de abscissa x_0 do polinômio de ajuste.

Por volta de 1800, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) demonstrou que, minimizando a soma dos quadrados dos **resíduos**, em relação aos pontos do gráfico do qual se quer ajustar por uma função polinomial, se obtêm os coeficientes da função polinomial que melhor se ajusta a esses pontos.

Não vamos aqui demonstrar o método de Gauss, mas vamos apresentar seu resultado para a determinação dos coeficientes de duas das funções polinomiais citadas na página anterior: a reta e a parábola.

NICKU/SHUTTERSTOCK

Johann Carl Friedrich Gauss, além de matemático, contribuiu para as Ciências em áreas como Geofísica, Eletrostática, Astronomia e Óptica.

Equação da reta de tendência

Gauss demonstrou que, dados n pontos do plano cartesiano, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n), a reta que melhor se ajusta a esses pontos tem equação $y = ax + b$, em que a e b são obtidos por meio do sistema linear:

$$\begin{cases} bn + a\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ b\sum_{k=1}^{n} x_k + a\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) \end{cases}$$

Note que o símbolo $\sum_{k=1}^{n} x_k$ é o somatório de todos os valores x dos n pontos, isto é, $\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$:

- o símbolo $\sum_{k=1}^{n} y_k$ é o somatório de todos os valores y dos n pontos, isto é, $\sum_{k=1}^{n} y_k = y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n$;
- o símbolo $\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2$ é o somatório dos quadrados das abscissas dos n pontos, isto é, $\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + ... + (x_n)^2$;
- o símbolo $\sum_{k=1}^{n} (x_k y_k)$ é o somatório dos produtos de cada abscissa pela respectiva ordenada dos n pontos, isto é, $\sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ... + x_ny_n$.

No exemplo introdutório (consumo de água em função da população), temos, na figura 1, os cinco pontos: (80, 13.000), (100, 17.000), (120, 19.000), (140, 23.000) e (160, 25.000). Assim, no sistema linear anterior, temos:

$n = 5$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = 80 + 100 + 120 + 140 + 160 = 600$$

$$\sum_{k=1}^{5} y_k = 13.000 + 17.000 + 19.000 + 23.000 + 25.000 = 97.000$$

$$\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2 = 80^2 + 100^2 + 120^2 + 140^2 + 160^2 = 76.000$$

$$\sum_{k=1}^{5} (x_k y_k) = 80 \cdot 13.000 + 100 \cdot 17.000 + 120 \cdot 19.000 + 140 \cdot 23.000 + 160 \cdot 25.000 = 12.240.000$$

Chegamos, então, ao sistema:

$$\begin{cases} 5b + 600a = 97.000 \\ 600b + 76.000a = 12.240.000 \end{cases}$$

cuja solução é dada por: $b = 1.400$ e $a = 150$.

Logo, a equação da reta que melhor se ajusta aos cinco pontos é:

$$y = 150x + 1.400$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

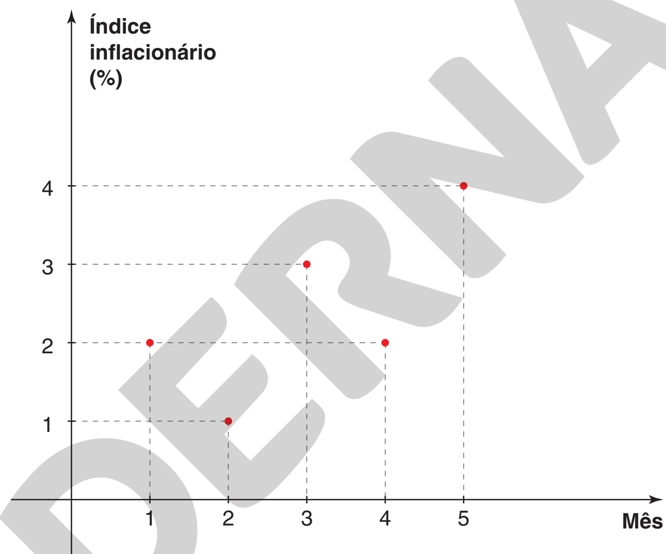
MODERNA

Equação da parábola de tendência

Gauss demonstrou que, dados n pontos do plano cartesiano, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),... ,(x_n, y_n), a parábola que melhor se ajusta a esses pontos tem equação $y = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são obtidos por meio do sistema linear:

$$\begin{cases} cn + b\sum_{j=1}^{n} x_j + a\sum_{j=1}^{n}(x_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j \\ c\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n}(x_j)^2 + a\sum_{j=1}^{n}(x_j)^3 = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \\ c\sum_{j=1}^{n}(x_j)^2 + b\sum_{j=1}^{n}(x_j)^3 + a\sum_{j=1}^{n}(x_j)^4 = \sum_{j=1}^{n}(x_j)^2 y_j \end{cases}$$

Como exemplo, vamos supor que, em cinco meses consecutivos, o índice de inflação de um país tenha variado de acordo com o gráfico ao lado, e desejemos estimar o índice de inflação para o sexto mês.



Dados fictícios.

Os cinco pontos do gráfico, (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 2) e (5, 4), podem ser aproximados por uma parábola que, nas variáveis x e y, tem equação $y = ax^2 + bx + c$, cujos coeficientes a, b e c são obtidos pelo sistema linear anterior. Calculando os somatórios, temos:

$n = 5$	$\sum_{j=1}^{5}(x_j)^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979$
$\sum_{j=1}^{5} x_j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$\sum_{j=1}^{5} y_j = 2 + 1 + 3 + 2 + 4 = 12$
$\sum_{j=1}^{5}(x_j)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$	$\sum_{j=1}^{5}(x_j y_j) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 41$
$\sum_{j=1}^{5}(x_j)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$	$\sum_{j=1}^{5}(x_j)^2 y_j = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 4 = 165$

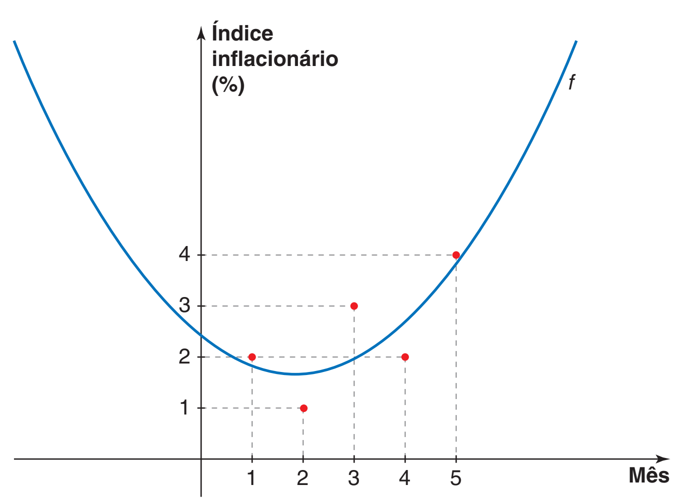
Com esses valores formamos o sistema:

$$\begin{cases} 5c + 15b + 55a = 12 \\ 15c + 55b + 225a = 41 \\ 55c + 225b + 979a = 165 \end{cases}$$

de onde obtemos: $c = \frac{12}{5}$, $b = -\frac{11}{14}$ e $a = \frac{3}{14}$; logo, a função polinomial de ajuste é:

$$f(x) = \frac{3x^2}{14} - \frac{11x}{14} + \frac{12}{5}$$

Observe a proximidade entre os cinco pontos dados inicialmente e a parábola determinada pela função f ao lado.



Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Por meio da função f, projeta-se o índice inflacionário para o mês 6, calculando-se $f(6)$:

$$f(6) = \frac{3 \cdot 6^2}{14} - \frac{11 \cdot 6}{14} + \frac{12}{5} = 5{,}4$$

Conclui-se, então, que, se a tendência inflacionária indicada pelos cinco pontos do gráfico inicial se mantiver, a inflação para o ano seguinte deverá ser próxima de 5,4%.

Notas

1. O método de Gauss, aplicado na obtenção dos coeficientes do polinômio de ajuste, é conhecido como **método dos mínimos quadrados**.
2. Há métodos estatísticos que permitem determinar o grau do melhor polinômio de ajuste.
3. Nos exemplos apresentados, a linha de tendência é o gráfico de um polinômio, mas é importante destacar que há outros tipos de linha de tendência, como o gráfico de uma função potência, exponencial, logarítmica etc.

Linhas de tendência em planilhas eletrônicas

SELINOFOTO/SHUTTERSTOCK

Editores de planilhas eletrônicas são ferramentas importantes na análise de tendências.

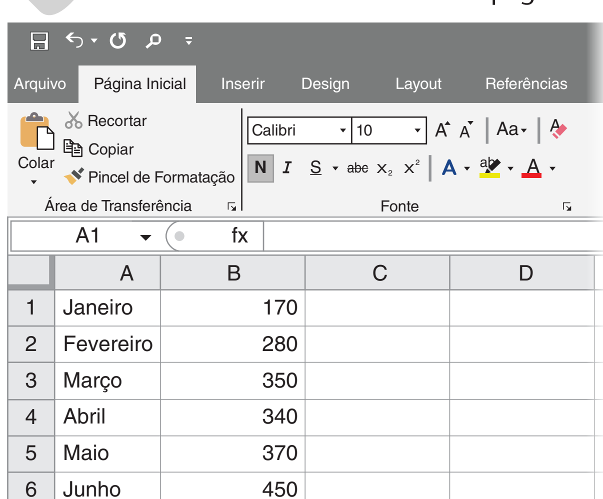
Em programas de criação e edição de planilhas eletrônicas, pode-se acrescentar a linha de tendência a diversos tipos de gráfico estatístico, como o gráfico de barras, de colunas ou de linha. Para mostrar como isso é feito, vamos apresentar um exemplo.

O quadro abaixo descreve, a cada mês do primeiro semestre de determinado ano, o número de eleitores que fizeram o cadastramento biométrico em um cartório eleitoral.

Ano	Número de eleitores
Janeiro	170
Fevereiro	280
Março	350
Abril	340
Maio	370
Junho	450

Para apresentar esses dados em um gráfico de linha em que no eixo horizontal sejam representados os meses e no eixo vertical, o número de eleitores, você pode usar um editor de planilhas eletrônicas. Veja, a seguir, uma maneira de construir gráficos usando essa ferramenta.

- Construa essa tabela em duas colunas consecutivas da página inicial do programa.



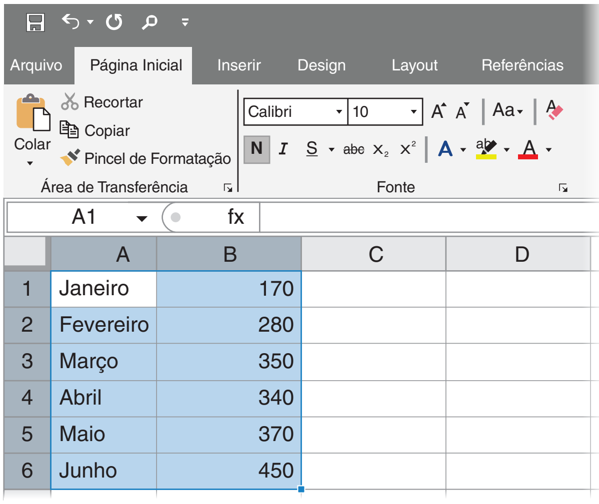
ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

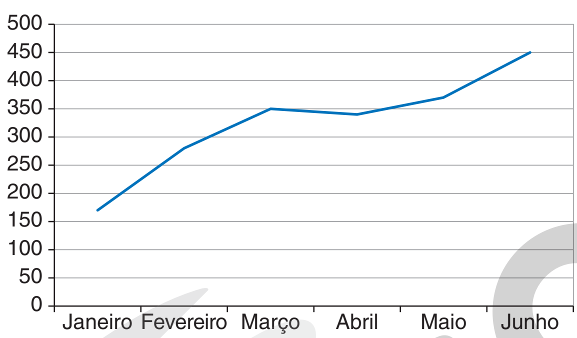
- Selecione as células preenchidas.



	A	B	C	D
1	Janeiro	170		
2	Fevereiro	280		
3	Março	350		
4	Abril	340		
5	Maio	370		
6	Junho	450		

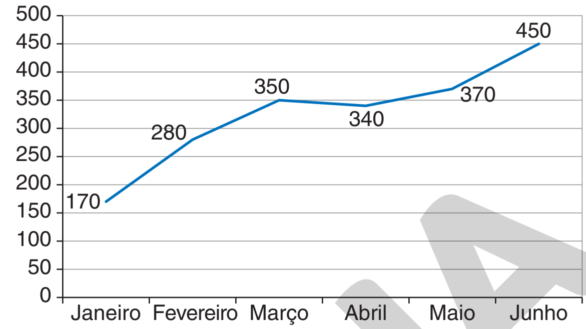
Dados fictícios.

- Com o botão esquerdo do *mouse*, clique na aba **Inserir**, na qual vários tipos de gráfico vão aparecer. Clique, com o mesmo botão, em "gráfico de linhas". O seguinte gráfico deve aparecer na tela:



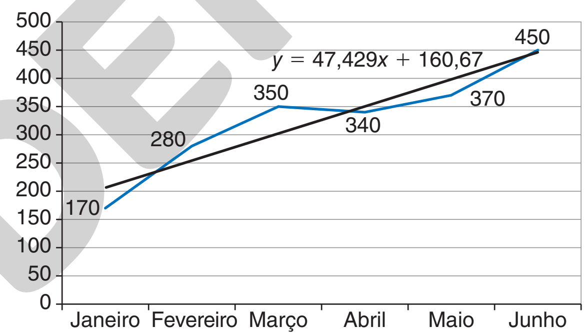
Dados fictícios.

- Clique sobre o gráfico, com o botão esquerdo do *mouse*. Os extremos dos segmentos de reta que compõem o gráfico aparecem em destaque. Depois, clique novamente sobre o gráfico, desta vez com o botão direito do *mouse* e, na janela que se abrir, selecione a opção para formatar rótulos de dados. Assim, aparecerá na tela:



Dados fictícios.

- Clique novamente sobre o gráfico, com o botão direito do *mouse*. Em seguida, escolha a opção que permite adicionar linha de tendência. Serão apresentadas várias opções para a linha de tendência. Ao escolher, por exemplo, a linear, com a opção de exibir a equação no gráfico, você terá, finalmente:

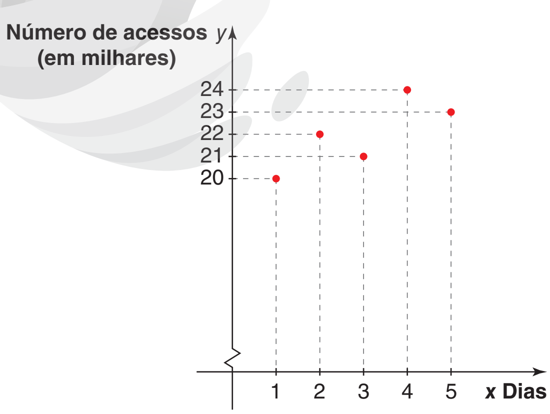


Dados fictícios.

ATIVIDADE

Não escreva no livro.

1 Um novo jornal diário *on-line* foi lançado há 5 dias. O gráfico abaixo mostra o número de acessos ao jornal em cada um desses dias. Supondo que a tendência observada no gráfico se mantenha, estime o número aproximado de acessos para o 6º dia, adotando a reta de tendência. Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.



Dados fictícios.

ALEX RUHL/SHUTTERSTOCK

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

Entenda como analistas fazem projeções para a economia

Toda segunda-feira, o Banco Central (BC) divulga um relatório de mercado conhecido como Boletim Focus, trazendo as apostas dos economistas para os principais indicadores econômicos do país.

Mais de 100 instituições são ouvidas e, excluindo os extremos, o BC calcula uma mediana das perspectivas do crescimento da economia (medido pelo Produto Interno Bruto, o PIB), perspectivas para a inflação e a taxa de câmbio, entre outros. Mediana apresenta o valor central de uma amostra de dados (desprezando os menores e os maiores valores).

Para cada um desses indicadores, há uma metodologia específica de cálculo. O que é comum a todos é que, além do modelo matemático ou estatístico, para fazer previsões acertadas é essencial que o economista tenha uma boa percepção do crescimento econômico do país e do mundo, e saiba relacionar os dados com alguns fundamentos essenciais da teoria econômica.

Inflação


LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

A inflação diminui o poder de compra do consumidor, à medida que aumenta o preço dos produtos. Como forma alternativa, consumidores encontram produtos vendidos diretamente pelo produtor. Centro de abastecimento de Ourolândia (BA). Foto de 2019.

O cálculo da inflação futura é apoiado, principalmente, pelo monitoramento dos preços aos consumidores, feito por vários institutos de pesquisa no país. Os principais, segundo analistas, são os relatórios do próprio IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística); os da FGV (Fundação Getúlio Vargas); e os da Fipe (Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas).

De acordo com o presidente da Ordem dos Economistas do Brasil e professor da FEA (Faculdade de Economia e Administração da Universidade de São Paulo), Manuel Enriquez Garcia, as projeções feitas para a inflação são feitas aplicando-se os valores a um modelo econométrico – que alia cálculos matemáticos, estatísticos e fundamentos de teoria econômica.

"Esses modelos são usados para calcular todas as projeções, e cada economista tem um modelo próprio. Mas o mais importante é a percepção do próprio economista sobre o momento do país", afirmou.

O professor da FGV Samy Dana apontou o fato de que as projeções para a inflação são feitas baseadas em dados do passado. Isso explicaria o efeito de inércia. "Quando os preços estão subindo, a tendência é de que eles continuem a subir", explicou.

O professor Garcia faz uma ressalva. "Não dá para prever a inflação para um prazo além de 2, 3 meses. O mundo econômico é dinâmico, e os modelos dos economistas também não são estáticos. Por isso essas projeções são feitas sempre a curto prazo.

PIB

As projeções para o crescimento da economia de um país são feitas com maior dose de subjetividade do que a inflação, por exemplo. De acordo com o professor Manuel Garcia, existem quatro critérios principais que constam em todos os modelos econômicos para projeção do PIB: consumo das famílias; investimentos em infraestrutura; gastos do governo; e análise do cenário internacional.

"Quando o economista negligencia uma das variáveis, terá um modelo muito fraco. A teoria fornece bons indícios para a coleta de informações que sirvam para montar as projeções. A ciência e arte dos economistas é saber dosar o peso de cada um dos aspectos que têm de ser levados em conta", explicou Garcia.

Aprofundando os conceitos, o professor Samy Dana explicou que as medidas do governo sobre a economia têm grande peso, especialmente aquelas relacionadas à taxa de juros, ao câmbio e à reforma tributária.

"Na economia internacional, deve-se prestar atenção especial em relação aos EUA e à China, nossos dois maiores parceiros comerciais. Nos incentivos a setores específicos, o setor de combustíveis é essencial, por causa do efeito cascata – quando aumenta o preço dos combustíveis, é certo que toda a cadeia produtiva será afetada", explicou.

Fonte: *UOL Economia*. Disponível em: <https://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2013/02/04/entenda-como-os-analistas-fazem-projecoes-para-a-economia.htm>. Acesso em: 11 maio 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 Vamos explorar um pouco mais o tema tratado no texto anterior, avaliando o percentual de erro da reta de tendência na previsão da inflação. Antes, porém, devemos entender que um **índice de preços** é uma média aritmética ponderada, calculada entre os preços de determinados produtos ou serviços praticados em uma região durante determinado intervalo de tempo. No Brasil, existem diversos índices que mensuram a inflação, por exemplo: IPC-Fipe, IPCA, IPCA-15, IGP-DI, IGP-M IGP-10, IPC-S, entre outros, porém o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é adotado como o índice oficial de inflação.

Façam uma pesquisa sobre a metodologia adotada no cálculo do IPCA e escrevam um breve texto sobre o que vocês entenderam. No *site* do IBGE, há material de leitura que pode ser consultado. (Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?5&t5conceitos-e-metodos>. Acesso em: 12 maio 2020.)

3 Com base no estudo da aplicação da análise de tendências, desenvolvam as etapas a seguir.

- Passo 1: Formem grupos.
- Passo 2: Cada grupo vai escolher um tema relacionado aos deveres de um prefeito, pesquisando na internet ou na biblioteca de sua escola.
- Passo 3: Os grupos devem comparar os resultados de sua pesquisa com o desempenho da prefeitura de seu município, com argumentos coerentes e éticos embasados em fontes confiáveis, científicas ou jornalísticas.
- Passo 4: Cada grupo vai produzir um vídeo sobre o tema escolhido, utilizando os argumentos construídos por vocês a partir da pesquisa. Podem ser utilizados conteúdo textual ou imagens; além disso o material pode ser apresentado, no vídeo, por um dos integrantes.
- Passo 5: Os vídeos serão apresentados em sala de aula, para que sejam feitas eventuais correções ou sugestões de melhoria.
- Passo 6: Os vídeos serão compartilhados na rede social escolhida pela turma (para isso, peçam ajuda ao professor).
- Passo 7: Estabeleçam um plano de divulgação dos vídeos para alcançar o maior número de pessoas possível. Contem com a ajuda de colegas, familiares, vizinhos, entre outros.
- Passo 8: Durante uma semana, cada grupo vai anotar, diariamente e sempre no mesmo horário, o número de visualizações do respectivo vídeo.
- Passo 9: Com esses números em mãos, cada grupo vai construir um gráfico, aplicando a análise de tendências para medir a capacidade de viralização do vídeo.

Texto complementar

A previsão como instrumento do planejamento

A previsão e o planejamento são processos sequenciais. O planejamento pode ser reconhecido como o processo de estabelecer compromissos de gerência que permitem que a empresa atenda à demanda prevista e alcance, assim, os objetivos estratégicos de seu negócio. Por outro lado, a previsão pode ser vista como o processo de desenvolver a visão mais provável de qual será o nível da demanda futura, assumido um conjunto de premissas sobre a tecnologia, o ambiente, a competição, a evolução dos preços, o *marketing* e os esforços de vendas.

O uso de métodos e modelos analíticos para a previsão é necessário em várias situações. Por exemplo, eles são usados ao analisar a evolução de fatores externos que afetam o desempenho das organizações como a inflação, a

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

variação dos preços, o produto interno bruto, o tamanho e a divisão do mercado. Da mesma forma, a previsão permite analisar a variação dos volumes importados em comparação aos exportados ao longo do tempo, que por sua vez tem impacto na determinação do tamanho dos mercados em determinado período de tempo. Ela também permite acompanhar a evolução das condições econômicas de determinadas regiões ou países, que afetam o tamanho dos mercados e a quantidade de produtos vendidos, e, em consequência, possibilita antever a receita esperada das vendas. No longo prazo, a ausência de efetiva gerência para monitorar e controlar os processos de previsão e planejamento dos negócios pode afetar até mesmo a sobrevivência da organização. O planejamento da expansão (ou não) e o crescimento dos negócios devem se apoiar em estimativas das demandas futuras por serviços, produtos ou grupos de produtos. É sumamente importante antecipar informações sobre onde a capacidade instalada não atende à demanda (ou vice-versa) de forma a planejar a utilização do capital para expansões ou retrações da organização, assim como avaliar se o nível de demanda esperado irá compensar o investimento necessário para atuar em determinado ramo de negócio. No médio e curto prazo, negligenciar as previsões pode resultar em não atendimento de pedidos de clientes, serviços mal dimensionados e subutilização de recursos produtivos.

Observação

Mercado ***spot*** é aquele que admite apenas transações em que a entrega da mercadoria é imediata e o pagamento é feito à vista.

Quando a demanda é prevista com precisão, ela pode ser atendida no tempo e da maneira adequados, satisfazendo os parceiros nos canais logísticos e os clientes finais. Matérias-primas e partes componentes podem ser adquiridos de forma programada, serviços logísticos com contratos de longo prazo podem ser estabelecidos com maior segurança, enquanto aquisições no mercado ***spot*** podem ser evitadas. Na programação da produção e dos níveis de estoque por produto, previsões de consumo de cada produto são necessárias para específicos períodos de tempo. Estoques de segurança podem ser melhor dimensionados, com previsões apuradas do nível de consumo por local e por tipo de produto ou serviço. Em departamentos de *marketing*, previsões da demanda devem estar disponíveis para que as estratégias de vendas sejam planejadas. A demanda por produtos deve ser prevista de forma a orientar esforços promocionais. Além disso, a previsão da demanda de produtos finais pode ser traduzida em previsões de necessidades de itens como produtos básicos, equipamentos, componentes/partes, e serviços. Em consequência dessas previsões de itens de demanda interdependente, a aquisição de produtos básicos pode ser programada, o que implica também a previsão da disponibilidade de recursos financeiros e em geral e o acompanhamento e previsão da variação dos preços dos itens e produtos analisados.

Assim, em primeiro lugar, a previsão deve ser utilizada para decidir se a demanda é suficiente para justificar a entrada da organização numa determinada região de mercado. Se a demanda existe mas não em nível suficiente para cobrir os custos logísticos do seu produto final, a organização deverá rejeitar a oportunidade.

De forma sumária, são três as macroáreas de aplicação da previsão:

- Determinação de recursos desejados, correspondente a decisões de longo prazo.

Essas decisões dizem respeito, por exemplo, a determinar as necessidades de capacidade no longo prazo ou seja, em horizontes de tempo de mais de 2 anos, para o projeto da rede de instalações. Projeções da demanda para um número de anos no futuro podem significar redução dos gastos incorridos na expansão, ou na retração, da capacidade para atender à demanda projetada (deve-se usar as previsões para o planejamento de decisões de forma a evitar atender à demanda de forma insuficiente ou, ao contrário, ter capacidade ociosa em setores da empresa).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- Aquisição de recursos adicionais, correspondente a decisões de médio prazo.

Essas decisões dizem respeito, por exemplo, à programação da utilização de capacidade adicional de transporte e armazenagem em períodos de pico e o relacionamento com fornecedores de tais serviços de forma a ter contratos favoráveis, preestabelecidos, de média duração.

- Programação de uso de recursos existentes, correspondente a decisões de curto prazo.

Essas decisões dizem respeito, por exemplo, a acompanhar as flutuações da demanda de curto e curtíssimo prazos (uma semana a três meses) para o planejamento da produção, programação da força de trabalho, planejamento dos fluxos de materiais, e outras necessidades. Essas previsões afetam, por exemplo, a produtividade operacional e as datas de entrega com as quais a organização se comprometeu. [...]

Fonte: MOON, M. M.; MENTZER, J. T.; THOMAS Jr., D. E. Customer demand planning at Lucent Technologies – A case study in continuous improvement through sales forecast auditing. *Industrial Marketing Management*, 2000, v. 29, p. 19-26. Disponível em: <https://document.onl/documents/a-previsao-como-instrumento-do-planejamento-ieufrjbr-1-1-a-previsao-como.html>. Acesso em: 2 jul. 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Não escreva no livro.

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

O texto acima descreve o planejamento e a previsão no âmbito das organizações empresariais. De acordo com esse texto, responda aos itens seguintes.

1. O que é o planejamento?
2. O que é previsão?
3. Descreva situações em que são aplicados os métodos e modelos analíticos para previsão.
4. Como deve ser pensado o planejamento da expansão (ou não) de uma organização?
5. Quais são os benefícios de atender uma demanda prevista com precisão?
6. Como os estoques de segurança podem ser mais bem dimensionados?
7. Em que situações uma organização deve rejeitar a entrada em determinada região do mercado?
8. Quais são as três macroáreas de aplicação da previsão? Dê um exemplo de cada uma delas.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

4 Acessem a "Calculadora do cidadão", disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/exibirFormCorrecaoValores.do?method=exibirFormCorrecaoValores> (acesso em: 12 maio 2020).

Usando essa calculadora:

a) Selecionem o índice IPCA (IBGE) e calculem seu valor mensal em 4 meses consecutivos.

b) Em seguida, usando um editor de planilhas eletrônicas, construam um gráfico de linha e determinem a equação da reta de tendência.

c) Por meio da equação da reta de tendência, estimem o IPCA para o 5º mês.

d) Finalmente, comparem o resultado obtido no item anterior com o IPCA do 5º mês fornecido pela "Calculadora do cidadão", obtendo o percentual de erro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

7

TRATANDO DADOS EXPERIMENTAIS


RAWPIXEL/SHUTTERSTOCK

O tratamento de dados experimentais abrange um amplo conjunto de operações efetuadas sobre resultados obtidos empiricamente, como pesquisas de opinião, populacionais e de laboratório.

Um procedimento muito comum na Estatística é a **interpolação**, que significa estimar valores não tabelados em um intervalo de valores tabelados. Neste capítulo, apresentaremos o tipo mais utilizado: a interpolação polinomial. Iniciaremos com a interpolação linear, método mais simples, depois generalizando para a interpolação por meio de um polinômio qualquer.

Interpolação linear

Geralmente, ao estudar um fenômeno natural, social, político etc., coletam-se dados, que são representados em uma tabela ou gráfico, formados por pontos isolados (x, y). Se, de alguma forma, sabemos que entre dois pontos consecutivos do gráfico a função não tem variações "bruscas", é razoável admitir, com alguma margem de erro, que a variação entre esses pontos é linear. É possível, portanto, ligá-los por um segmento de reta.

Essa técnica, chamada **interpolação linear**, possibilita estimar valores intermediários às observações realizadas na experiência por meio do conceito da colinearidade de pontos.

Para exemplificar, vamos considerar a situação descrita a seguir.

Ao estudar a variação do percentual de intenção de votos a um candidato, um cientista político construiu a tabela abaixo a partir de valores de pesquisas eleitorais.

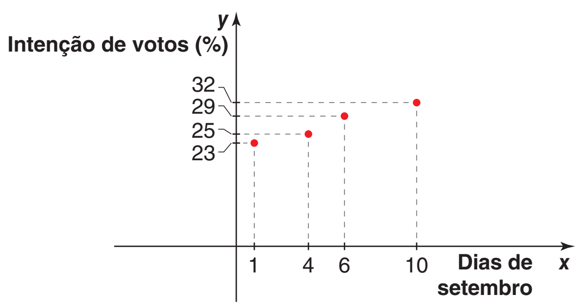
Dias de setembro	Intenção de votos (%)
1	23
4	25
6	29
10	32

Dados fictícios.

PROSTOCK-STUDIO/SHUTTERSTOCK

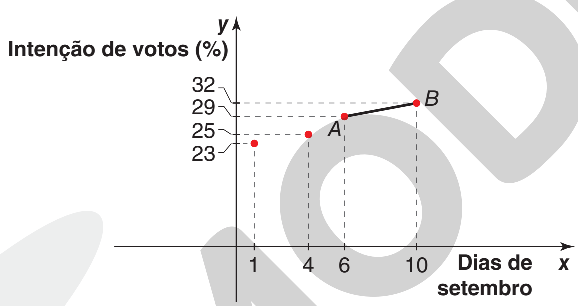
Além da coleta de dados por meio de entrevistas, as estimativas são uma parte importante de pesquisas.

Embora a tabela não apresente dados relativos ao dia 8 de setembro, é possível estimar o percentual de intenções de voto nesse dia. Para isso, o cientista construiu o gráfico cartesiano abaixo:



Dados fictícios.

Unindo os pontos $A(6, 29)$ e $B(10, 32)$ por um segmento de reta, a ordenada do ponto de abscissa 8 desse segmento é uma aproximação do percentual de votos no dia 8 de setembro. Observe:



Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Como a equação da reta $\overline{AB}$ é da forma $f(x) = ax + b$, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} f(6) = 29 \\ f(10) = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a + b = 29 \\ 10a + b = 32 \end{cases}$$

Cuja solução é dada por: $a = 0{,}75$ e $b = 24{,}5$. Assim, a equação da reta $\overline{AB}$ é $f(x) = 0{,}75x + 24{,}5$.

Calculando $f(8)$, obtemos a aproximação desejada:

$$f(8) = 0{,}75 \cdot 8 + 24{,}5 = 30{,}5$$

Concluímos, então, que no dia 8 de setembro as intenções de voto do candidato correspondiam a 30,5%, aproximadamente.

Notas:

1. O polinômio $f(x) = 0{,}75x + 24{,}5$ é chamado de polinômio interpolador para os dados considerados.
2. O valor obtido (30,5%) é uma estimativa sujeita a uma margem de erro, que também pode ser estimada por meio de métodos estatísticos.
3. Quanto mais próximo o valor estimado estiver de um valor efetivamente observado, mais confiável será essa estimativa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

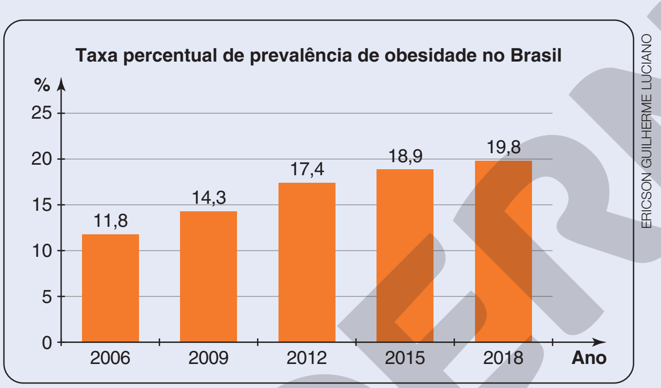
Explorando conexões

Saúde em primeiro lugar

> **Observação**
>
> O **Índice de Massa Corporal (IMC)** de uma pessoa de massa m, em quilograma, e altura h, em metro, é calculado por: $IMC = \frac{m}{h^2}$.

Em julho de 2019, o Ministério da Saúde do Brasil divulgou os resultados da Pesquisa de Vigilância de Fatores de Risco e Proteção para Doenças Crônicas por Inquérito Telefônico (Vigitel) de 2018, feita com 52.395 pessoas de todas as capitais e do Distrito Federal. Em relação à prevalência de obesidade, ou seja, indivíduos com **Índice de Massa Corporal (IMC)** igual ou maior que 30, a taxa saltou 11,8% em 2006 para 19,8% em 2018, um aumento de 67,8%.

Observe no gráfico abaixo, com dados trienais, um crescimento aproximadamente linear, o que possibilita estimar com boa precisão as taxas nos anos intermediários e prever a taxa para alguns anos seguintes.



Fonte dos dados: Vigilância de fatores de risco e proteção para doenças crônicas por inquérito telefônico. Vigitel Brasil 2018. Disponível em: <http://portalarquivos2.saude.gov.br/images/pdf/2019/julho/25/vigitel-brasil-2018.pdf>. Acesso em: 9 jun. 2020.

O mais preocupante desses resultados para a saúde dos brasileiros é que a maior taxa de crescimento ocorreu na faixa dos 25 aos 34 anos. Quanto mais jovem a pessoa se torna obesa, mais difícil será voltar ao peso ideal e por mais tempo estará em um grupo de risco para várias doenças decorrentes da obesidade, como hipertensão e diabetes.

Leia, a seguir, a entrevista do professor de Educação Física Maiky Recke, a respeito de hábitos saudáveis e sobre como prevenir a obesidade.

Mais da metade da população do país vive uma vida sedentária e com excesso de peso

[...]

Quem faz parte dessa realidade, mas pretende mudar os hábitos e levar uma vida saudável deve investir em exercícios e melhorar a alimentação.

Segundo o professor [Maiky Recke], o estilo de vida não saudável e, consequentemente, o excesso de peso corporal podem causar obesidade, diabetes e até doenças cardiovasculares. "Os exercícios físicos auxiliam na prevenção dessas doenças, fazem bem para o cérebro, trazem sensação de bem-estar e aumentam a capacidade de memória, aprendizado e raciocínio. Mas o ideal é que a prática seja iniciada ainda na infância e continue ao longo da vida, e não apenas quando estiver acima do peso, como muitos fazem", afirma.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Embora a obesidade também esteja relacionada a fatores genéticos, há grande influência dos padrões inadequados e sedentários da população. Alimentos industrializados, gordurosos e com alto índice de açúcar estão cada vez mais presentes no cardápio de muitos brasileiros. Além disso, a rotina acelerada faz com que as pessoas tenham menos tempo livre, o que faz o consumo de calorias aumentar, e a frequência dos exercícios físicos diminuir.

Segundo Maiky, o primeiro passo é escolher um exercício prazeroso e começar aos poucos. "O processo pode ser lento, mas sempre será recompensador. Com a ajuda de um profissional e orientação médica, os resultados chegam e o estilo de vida será muito satisfatório", completa.

Fonte dos dados: Mais da metade da população do país vive uma vida sedentária e com excesso de peso. *Folha Vitória*. Disponível em: <https://www.folhavitoria.com.br/saude/noticia/10/2019/mais-da-metade-da-populacao-do-pais-vive-uma-vida-sedentaria-e-com-excesso-de-peso>. Acesso em: 9 jun. 2020.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Fundamentados no texto anterior, façam uma pesquisa de campo e de levantamento de dados, da qual vocês também participarão como entrevistados. Para isso, orientem-se pelas etapas seguintes.

a) Reflitam sobre como atividades físicas fazem parte de sua vida e da vida de seus amigos e familiares.

b) Verifiquem se, em sua comunidade, há espaços para a prática de esportes e atividades físicas e com que frequência esses espaços são ocupados.

c) Investiguem se alguém da família dos entrevistados já precisou de suporte hospitalar em decorrência das doenças cardiovasculares, diabetes ou obesidade.

d) Elaborem uma entrevista a ser feita com membros de sua comunidade. Procurem reunir homens e mulheres, jovens, adultos e pessoas idosas, garantindo representatividade na amostra, e avaliem se, na percepção dessas pessoas, tem ocorrido alguma mudança nos níveis de atividade física com o passar dos tempos. Usem os dados da tabela a seguir como referência nas entrevistas:

Classificação do nível de atividade física	
Muito ativo	$\geqslant$ 5 dias/semana e $\geqslant$ 30 minutos por sessão
Ativo	$\geqslant$ 3 dias/semana e $\geqslant$ 20 minutos por sessão
Irregularmente ativo	5 dias/semana ou 150 minutos/semana, em intervalos irregulares
Sedentário	Não realizou nenhuma atividade física por pelo menos 10 minutos contínuos durante a semana.

Fonte dos dados: Classificação do nível de atividade física IPAQ (*International Physical Activity Questionnaire). Centro Coordenador do IPAQ no Brasil*. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3343547/mod_resource/content/1/IPAQ.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2020.

e) Informem-se sobre os gastos do Sistema Único de Saúde (SUS), nos últimos três anos, com doenças relacionadas a sobrepeso e obesidade.

f) Elaborem um texto sobre os resultados de suas tarefas, ilustrado com gráficos e tabelas.

g) Se os resultados obtidos possibilitarem, façam uma interpolação linear para a estimativa de algum valor desconhecido.

2 Em determinado município, a prefeitura lançou a campanha “Bamboleie-se”, que incentiva a prática de exercícios físicos. Para avaliar a eficácia da campanha, entre os habitantes, foram realizadas pesquisas, cujos resultados são apresentados na tabela a seguir.

Tempo de campanha	Habitantes que praticam exercícios físicos, com idade superior a 10 anos (%)
Início	8
Semana 1	20
Semana 2	25
Semana 3	28
Semana 5	32

Dados fictícios.

Alguns problemas técnicos impediram a realização da pesquisa na quarta semana, a partir do início da campanha. Aplicando o conceito de interpolação linear, estime o número de pessoas desse município, com idade superior a 10 anos, que praticavam exercícios físicos ao final da quarta semana.

Interpolação polinomial

A estimativa de valores não tabelados em um intervalo de valores tabelados pode ser feita também a partir do teorema:

Dados $n + 1$ pontos do plano cartesiano, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), com abscissas diferentes entre si, existe um único polinômio $P(x)$ de coeficientes reais e grau menor que o número de pontos representados tal que $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $P(x_3) = y_3$, ..., $P(x_n) = y_n$, $P(x_{n+1}) = y_{n+1}$.

Como exemplo, vamos considerar a situação descrita a seguir.

Os levantamentos que determinam os níveis de audiência de emissoras televisivas são feitos por amostragem, por meio de entrevistas, telefonemas ou dispositivos conectados a certo número de televisores, que recolhem informações sobre o horário, o tempo em que os aparelhos permanecem ligados e os canais sintonizados. A audiência é medida em pontos, e cada ponto indica determinado número de espectadores.

Para avaliar a aceitação de um novo programa, seus idealizadores construíram a tabela abaixo, que descreve o número de pontos de audiência em alguns instantes, em minuto, a partir do início da primeira transmissão do programa.

Tempo de programa (min)	Pontos de audiência
0	6,0
5	6,5
8	8,0

Dados fictícios.

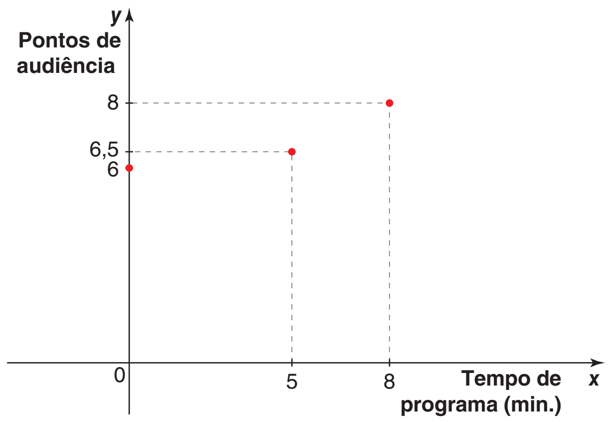
JEFF GILBERT/ALAMY/ FOTOAREANA

Medir a audiência é importante para as emissoras. Em geral, quanto maior o número de espectadores, mais anunciantes conseguem atrair. Sala de edição de um canal de emissora de televisão em Londres, Reino Unido. Foto de 2013.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A partir dessa tabela, é possível estimar o número de pontos de audiência para qualquer instante x, nos 8 primeiros minutos de programa. Para isso, vamos considerar cada par ordenado – (0; 6), (5; 6,5) e (8; 8,0) – como um ponto do plano cartesiano:



Dados fictícios.

Pelo teorema acima, temos que existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor que 3 cujo gráfico passa por esses três pontos. Assim, o grau máximo que pode ter esse polinômio é 2, ou seja, $P(x)$ pode ser representado sob a forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

em que a, b e c são constantes reais.

Como os pontos (0; 6), (5; 6,5) e (8; 8,0) pertencem ao gráfico do polinômio, os valores de a, b e c são obtidos por:

$$\begin{cases} P(0) = 6 \\ P(5) = 6{,}5 \\ P(8) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 6 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 6{,}5 \\ a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 8 \end{cases}$$

Assim, chegamos ao sistema linear:

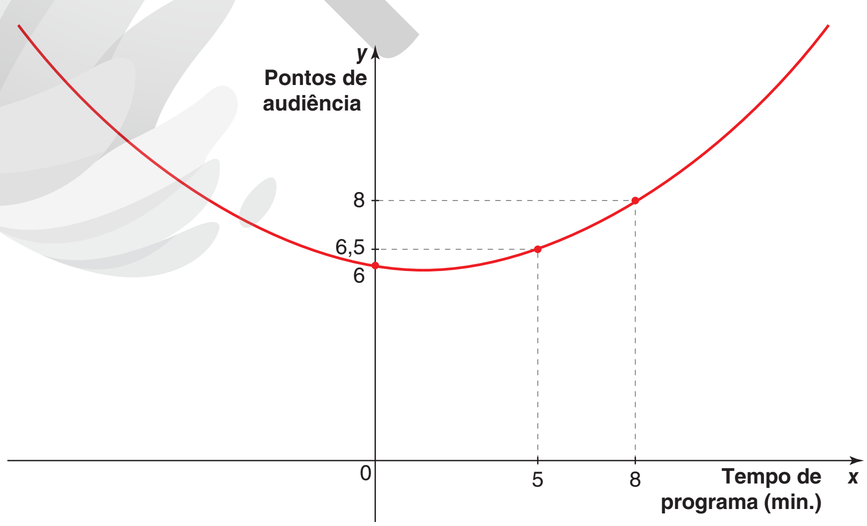
$$\begin{cases} c = 6 \\ 25a + 5b + c = 6{,}5 \\ 64a + 8b + c = 8 \end{cases}$$

Cuja solução é dada por: $a = 0{,}05$; $b = -0{,}15$ e $c = 6$.

Assim, deduzimos que:

$$P(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}15x + 6$$

Esse é o polinômio interpolador para os dados considerados. Observe sua representação gráfica:



Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

Se quisermos estimar os pontos de audiência aos 7 minutos de programa, basta calcular $P(7)$, isto é:

$$P(7) = 0,05 \cdot 7^2 - 0,15 \cdot 7 + 6 = 7,4$$

Concluímos, assim, que aos 7 minutos de programa, a audiência alcançou 7,4 pontos, aproximadamente.

Notas:

1. O valor obtido, 7,4, é uma estimativa sujeita a uma margem de erro, que também pode ser estimada por meio de métodos estatísticos.
2. Quanto mais próximo o valor estimado estiver de um valor efetivamente observado, mais confiável será essa estimativa.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

STONE/GETTY IMAGES

3 A Sociedade Brasileira de Pediatria utiliza uma tabela da Organização Mundial da Saúde (OMS) em que é apresentada a altura ideal para cada idade de uma criança de determinada região. Segundo essa tabela, meninas brasileiras nas idades de 1, 3 e 6 anos devem apresentar 73 cm, 95 cm e 113 cm de altura, respectivamente. Esses medidas são valores médios, admitindo uma variação, que deve ser levada em conta pelo médico. (Fonte dos dados: Gráficos de crescimento. *Sociedade Brasileira de Pediatria*. Disponível em: <https://www.sbp.com.br/departamentos-cientificos/endocrinologia/graficos-de-crescimento/>. Acesso em: 20 jun. 2020.)

De acordo com essas informações, faça o que se pede.

a) Considerando os pares ordenados da forma (idade, altura) como pontos do plano cartesiano, aplique o teorema apresentado anteriormente e encontre o polinômio interpolador para os dados apresentados no enunciado.

b) Usando o polinômio interpolador, obtido no item **a**, determine a altura ideal para uma menina brasileira de 5 anos de idade.

ALF RIBEIRO/SHUTTERSTOCK

Ceagesp da cidade de Marília (SP). Foto de 2019.

4 Na Companhia de Entrepostos e Armazéns Gerais de Marília (Ceagesp), da 0 h às 3 h de determinado dia, o preço do quilograma da uva rubi extra variou conforme a tabela abaixo:

Horário (h)	Preço por quilograma (R$)
0	5,10
1	5,04
2	5,25
3	5,22

Dados fictícios.

a) Aplicando o teorema estudado, obtenha o polinômio interpolador para esses dados, considerando cada par ordenado da forma (horário, preço) como um ponto do plano cartesiano.

b) De acordo com o polinômio obtido no item **a**, estime o preço, em real, do quilograma da uva rubi extra às 2 h 30 min.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explorando conexões

Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb)

A melhoria das condições gerais de vida de uma população envolve um conjunto articulado, planejado e duradouro de políticas públicas.

Parece não restar dúvidas de que um dos aspectos mais importantes para o aumento das condições de progresso pessoal e profissional é o acesso à educação de qualidade. Nesse sentido, universalização e qualidade devem ser os eixos centrais das políticas educativas de um Estado.

Como forma de mensurar os impactos da escolarização na vida de milhões de alunos de todo o Brasil, o Ministério da Educação utiliza o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).

Esse índice foi criado em 2007 e reúne, em um só indicador, os resultados de dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: o fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações. O Ideb é calculado a partir de dados sobre aprovação escolar, obtidos no Censo Escolar, e das médias de desempenho no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb).

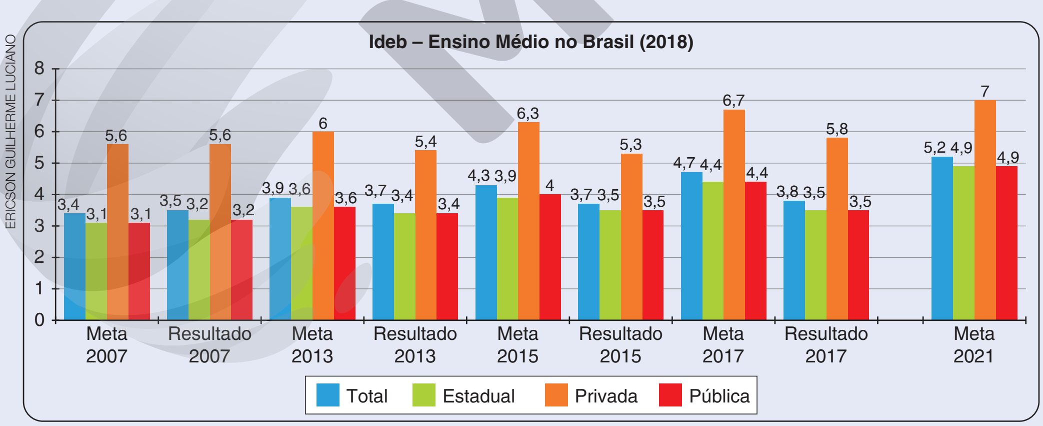
O Ideb agrega ao enfoque pedagógico das avaliações em larga escala a possibilidade de resultados sintéticos, facilmente assimiláveis, que permitam traçar metas de qualidade educacional para os sistemas de ensino, por meio de um índice que varia de 0 a 10.

A combinação entre fluxo e aprendizagem tem o mérito de equilibrar as duas dimensões: se um sistema de ensino retiver seus alunos para obter resultados de melhor qualidade no Saeb, o fator fluxo será alterado, indicando a necessidade de melhoria. Se, ao contrário, a aprovação do aluno for apressada, e não houver qualidade, o resultado das avaliações indicará igualmente a necessidade de melhoria do sistema.

O índice também é importante condutor de política pública em prol da qualidade da educação. É a ferramenta para acompanhamento da qualidade da Educação Básica, cuja meta para 2022 é alcançar média 6, valor que corresponde a um sistema educacional de qualidade comparável ao de países desenvolvidos.

O gráfico abaixo mostra as metas e os resultados obtidos no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica no Ensino Médio das redes pública, estadual e privada, em todo o Brasil.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Fonte dos dados: Ideb – Resultados e Metas. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_Ideb_2005-2017.pdf>. Acesso em: 12 set. 2020.

Esse levantamento foi feito em 2018, quando os resultados eram conhecidos apenas até 2017, porém já havia uma meta estabelecida pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep) para 2021, como se observa no gráfico.

Fonte dos dados: *Portal Ideb*. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/ideb>. Acesso em: 10 jun. 2020.

MODERNA

5 Vários aspectos da educação no Brasil podem ser discutidos a partir dos dados do texto anterior. Transforme os números em argumentos e elabore algumas questões, relacionando as metas para o ensino público e para o privado. Em seguida, realizem um debate em sala de aula.

6 Observando apenas as metas estabelecidas para o Ideb do Ensino Médio da rede pública para os anos 2015, 2017 e 2021, apresentadas no gráfico da página anterior, faça o que se pede.

a) Considerando cada par ordenado da forma (ano, índice) como um ponto do plano cartesiano, estime a meta estabelecida para 2019, usando um polinômio interpolador.

Sugestão: para facilitar os cálculos, represente os anos 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020 e 2021 por 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Assim, os pares ordenados (2015; 4,0), (2017; 4,4) e (2021; 4,9) são representados por (0; 4,0), (2; 4,4) e (6; 4,9).

b) Com os dados apresentados no gráfico da página anterior e a estimativa que você obteve no item **a**, construa um gráfico de barras horizontais que descreva a meta do Ideb para o Ensino Médio da rede pública para 2015, 2017, 2019 e 2021. O gráfico pode ser construído à mão ou em uma planilha eletrônica.

Interpolação espacial

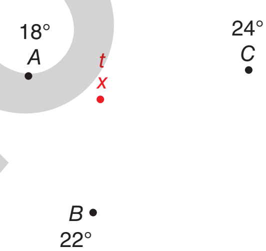
Observação

Interpolação espacial é o processo de utilização de medidas conhecidas, associadas a determinados pontos do espaço, para a estimativa da medida desconhecida associada a outro ponto desse espaço.

A interpolação tem aplicações em diversas áreas, como Estatística, Economia, Geografia, Computação gráfica, Engenharia, Medicina e até mesmo no comércio. Enfim, em qualquer área em que se estude a variação das medidas de grandezas interdependentes e sejam exigidas estimativas de medidas intermediárias entre outras conhecidas, lá estará a interpolação.

É importante destacar que há outros métodos de interpolação, além da polinomial. Por exemplo, imagine que em uma região aproximadamente plana haja três estações, *A*, *B* e *C*, de medição de temperatura média, nas quais, em determinado instante, são registrados 18 °C, 22 °C e 24 °C, respectivamente. Suponha que, para um estudo ambiental, seja necessário estimar a temperatura média *t*, nesse mesmo instante, em um ponto *X* dessa região, onde não há uma estação medidora, conforme ilustra a figura 1. Como você faria essa estimativa?

Figura 1



Vejamos algumas estimativas possíveis:

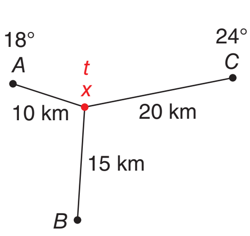
- estimar a temperatura t pela temperatura registrada na estação mais próxima: $t \approx 18°$;
- estimar a temperatura t pela média aritmética entre as temperaturas registradas nas três estações:

$$t \approx \frac{18° + 22° + 24°}{3} \Rightarrow t \approx 21{,}3°$$

- estimar a temperatura t pela média aritmética ponderada entre as temperaturas obtidas nas três estações, com pesos iguais às respectivas distâncias ao ponto X, conforme mostra a figura 2:

$$t \approx \frac{18 \cdot 10 + 22 \cdot 15 + 24 \cdot 20}{10 + 15 + 20} \Rightarrow t \approx 22°$$

Figura 2



Esse tipo de interpolação é chamado de **interpolação espacial**. Propositalmente, apresentamos três métodos bem simples. Há outros de maior precisão, porém muito mais complexos.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

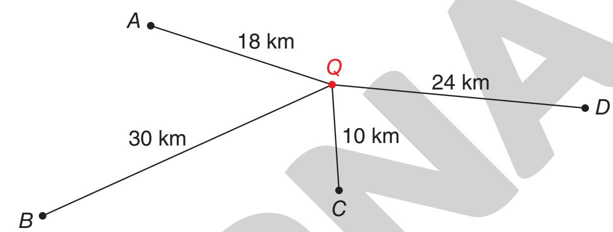
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sugestão

Se você tiver interesse em conhecer outros métodos de interpolação espacial, sugerimos o artigo “Análise Espacial (Interpolação)”. Disponível em: <https://docs.qgis.org/2.8/pt_BR/docs/gentle_gis_introduction/spatial_analysis_interpolation.html#:~:text=Interpola%C3%A7%C3%A3o%20espacial%20%C3%A9%20o%20processo,valores%20em%20outros%20pontos%20desconhecidos>. Acesso em: 10 jun. 2020.

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**. **Não escreva no livro.**

7 Um instituto de pesquisa realizou uma investigação em quatro pontos, A, B, C e D, de uma cidade sobre a intenção de voto entre os dois candidatos a prefeito, no segundo turno de uma eleição. Os percentuais de intenções favoráveis ao candidato X nos pontos A, B, C e D foram de 16%, 18%, 15% e 19%, respectivamente. Deseja-se avaliar a intenção de voto no candidato X em um ponto Q, onde não foi realizada a pesquisa, conforme ilustra a figura ao lado.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Faça uma estimativa do percentual de intenção de voto favorável ao candidato X no ponto Q. Aplique o método da média aritmética ponderada pelas distâncias.

Texto complementar

Em estatística, é muito comum a estimativa de valores não tabelados a partir de dados tabelados que relacionam duas variáveis. O método mais simples para essas estimativas consiste em obter um polinômio cujo gráfico cartesiano passe ou se aproxime dos pontos conhecidos (tabelados). São utilizados polinômios nessas aproximações devido à facilidade de calcular seu valor numérico para determinado valor de sua variável, pois, nesse cálculo, são efetuadas apenas as operações elementares de adição e multiplicação.

Há, fundamentalmente, duas situações que exigem a aproximação polinomial: a interpolação e a extrapolação.

- A interpolação é aplicada quando são conhecidos alguns pares de valores que relacionam duas variáveis x e y, com $y = f(x)$, em determinado intervalo $[a, b]$ de valores de x, e se pretende estimar o valor desconhecido de y, para algum x do intervalo $[a, b]$, conforme estudamos ao longo deste capítulo.
- A extrapolação é aplicada quando são conhecidos alguns pares de valores que relacionam duas variáveis x e y, com $y = f(x)$, em determinado intervalo $[a, b]$ de valores de x, e se pretende estimar o valor desconhecido de y, para algum x fora do intervalo $[a, b]$. (No Capítulo 6, estudamos um método de extrapolação de dados por meio das curvas de tendência.)

Esses dois métodos de estimativa apresentam margem de erro. Portanto, devem ser aplicados com cautela. Uma das situações em que pode falhar a extrapolação a partir do polinômio interpolador é apresentada no texto a seguir. Leia-o e responda às questões.

Projeções populacionais

[...] [É tentador] usar metodologias de interpolação de dados para extrapolar uma população. Entretanto, essa alternativa não é aconselhável salvo no caso de **horizontes de tempo muito curtos**. Projetar uma população não é apenas extrapolar uma série de dados.

Uma maneira comum de projetar uma população é através do método conhecido como **Método das Componentes Demográficas**. Este procedimento consiste em projetar a população de um determinado grupo de idade para o final do quinquênio seguinte, e a partir deste ano, para o final do próximo quinquênio, e assim sucessivamente até o final do período da projeção. É importante destacar que os componentes da dinâmica demográfica – mortalidade, fecundidade e

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

migração – são os principais ingredientes do método; portanto, o resultado da projeção está ligado diretamente às hipóteses de comportamento futuro do nível e da estrutura desses componentes.

Pelo Método das Componentes Demográficas, uma projeção populacional é feita em duas etapas. A primeira considera a população fechada à migração, ou seja, considera apenas os nascimentos e mortes. Posteriormente, incorporam-se a esta os efeitos diretos e indiretos da migração. Por facilidade de denominação, chamamos a população gerada na primeira etapa de "população fechada" e aquela gerada na segunda etapa, de "população aberta".

A população fechada são os sobreviventes de um determinado grupo de idade ao final de um período de cinco anos. A estimativa dos nascimentos está baseada nas taxas específicas de fecundidade para o meio dos períodos das projeções, que seriam aplicadas na população feminina de 15-49 anos de cada ano do período quinquenal em questão. Já a estimativa dos sobreviventes no fim do quinquênio seria obtida a partir das projeções das funções de mortalidade desta mesma população. A população aberta é a população fechada mais o saldo migratório que teria ocorrido nos cinco anos anteriores à data da projeção. O saldo migratório é obtido pela multiplicação da taxa líquida de migração no período quinquenal pela população fechada ao final deste período. Desta maneira, é importante ter em mente que a chave para [realizar] uma projeção populacional com sucesso é a capacidade que o demógrafo tem em formular as hipóteses futuras dos componentes da dinâmica populacional. Duas questões básicas devem nortear as hipóteses. A primeira é: qual deverá ser o limite das tendências passadas e atuais? Explicando melhor, qual deverá ser o nível e a estrutura de cada um dos componentes, a partir dos quais as mudanças devem ocorrer? A segunda trata do tempo em que este limite deverá ser alcançado. Terá este limite sido alcançado antes do final do período da projeção? Após? Quão após? Algumas tendências podem ser modeladas matematicamente baseadas em evidências históricas. Para outras, na maioria das vezes, as hipóteses são formuladas contrapondo as condições atuais e futuras ao conhecimento acumulado do que seria uma tendência plausível. [...]

Fonte: Introdução a métodos de estimativas e interpolações populacionais. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/319914044_INTRODUCAO_A_METODOS_DE_ESTIMATIVAS_E_INTERPOLACOES_POPULACIONAIS>. Acesso em: 10 jun. 2020.

Observação

Mesmo em **horizontes de tempo muito curtos**, são mais adequadas as curvas de tendência, em vez de polinômios interpoladores.
Método das Componentes Demográficas é o procedimento de estimativa de uma população que incorpora informações sobre tendências observadas de natalidade, mortalidade, fecundidade e migração, em determinado intervalo de tempo.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

1. O autor não aconselha usar metodologias de interpolação de dados para extrapolar uma população, salvo no caso de horizontes de tempo muito curtos. Explique o que você entende por essa afirmação.
2. O que é o Método das Componentes Demográficas?
3. Descreva as duas etapas observadas em uma projeção populacional realizada pelo Método das Componentes Demográficas.
4. População fechada é definida como os sobreviventes de determinado grupo de idade ao final de um período de 5 anos. Como ele define população aberta?
5. O autor afirma que a chave para realizar uma projeção populacional com sucesso é a capacidade que o demógrafo tem de formular as hipóteses futuras dos componentes da dinâmica populacional, que devem ser norteadas por duas questões básicas. Quais são elas?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

8 CRIPTOGRAFIA: DA ESFERA MILITAR AO DOMÍNIO PÚBLICO

PICTS/SHUTTERSTOCK

Codificar e decodificar mensagens pode parecer um recurso de filmes ou livros policiais, mas está presente em nosso dia a dia, como na senha das redes sociais e do cartão do banco.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Suponha que você e um amigo querem trocar mensagens escritas de modo que mais ninguém consiga compreendê-las. Para isso, vocês podem combinar um código com o qual o emissor codifique a mensagem e o receptor a decodifique. Esse código é chamado de **chave da escrita cifrada**. Por exemplo, se a cada número natural 1, 2, 3, 4, ..., 26 for associada uma das letras do alfabeto, A, B, C, D, ..., W, X, Y, Z, respectivamente, a mensagem:

PRECISO ESTUDAR MAIS

seria codificada pela sequência:

16–18–5–3–9–19–15 5–19–20–21–4–1–18 13–1–9–19

Embora esse exemplo seja bastante simples, foi aplicada uma técnica de criptografia. Em linhas gerais, a **criptografia** é a ciência da comunicação secreta em que princípios e técnicas são aplicados para codificar e decodificar mensagens. O estudo das técnicas de decodificação de mensagens cifradas, sem o conhecimento prévio da chave que as gerou, é chamado de **criptoanálise**.

A criptografia é tão antiga quanto a necessidade de se comunicar em segredo por meio da escrita. Há registros dessa prática em hieróglifos egípcios, datados de 1900 a.C., contando que os escribas dos faraós substituíam trechos e palavras em documentos por símbolos enigmáticos, que dificultavam o entendimento por parte de pessoas alheias aos interesses do império.

Sintetizando, criptografar uma mensagem significa torná-la ininteligível a quem não conhece o código. Esse código é chamado **chave criptográfica** ou **senha**. Apenas quem conhece a chave tem acesso à forma inteligível da mensagem.

RUSLAN KOKAREV/SHUTTERSTOCK/MUSEU DO LOUVRE, PARIS

Grande parte da história do Egito antigo é conhecida graças à atividade dos escribas. *O escriba sentado* (2620 a.C.-2500 a.C. Calcário, quartzo e cobre, 53,7 cm × 44 cm × 35 cm. Museu do Louvre, Paris, França).

A criptografia como tática de guerra

Um importante episódio da história da criptografia foi protagonizado pelo imperador romano Júlio César (100 a.C.-44 a.C.). Se tivesse de enviar uma mensagem confidencial a seus generais, o imperador a codificava, mudando a ordem das letras do alfabeto, para que nenhuma palavra fosse compreendida por um eventual interceptador inimigo. A letra **A** do alfabeto, na ordem habitual, era substituída por **D**, a letra **B**, por **E**, a letra **C**, por **F** e assim por diante. Esse código ficou conhecido como **cifra de César**.

No alfabeto atual, a correspondência entre as letras, segundo a cifra de César, é:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Essa é, portanto, a chave da codificação. Assim, por exemplo, a mensagem:

ATAQUEM PELOS FLANCOS

seria codificada pela sequência:

DWDTXHP SHORV IODQFRV

PARAMARTA BARI/SHUTTERSTOCK/MUSEU SANDI, YOGYAKARTA, INDONÉSIA

Júlio César não foi o primeiro estrategista a usar a criptografia como tática militar. Essa prática já teria sido usada nas guerras espartanas (séculos V a.C. e IV a.C.). Alguns historiadores citam o **bastão de Licurgo** ou **cítala** como um instrumento de cifragem de larga utilização em Esparta. Para a troca de mensagens, o transmissor e o receptor possuíam um bastão, ambos de mesma forma e mesmas dimensões. O emissor da mensagem enrolava uma faixa de couro ou tecido em seu bastão e escrevia o texto no sentido longitudinal do bastão, uma letra em cada volta da faixa, como mostra a imagem ao lado. Em seguida, a faixa era desenrolada e entregue a um mensageiro, que a usava como cinto para não despertar suspeitas caso fosse capturado. De posse da faixa, o receptor a enrolava em seu bastão e podia decifrar a mensagem.

Exemplares de bastão de Licurgo usados para transmitir mensagens cifradas.

Note, portanto, que a chave de decodificação era enrolar a faixa no bastão e ler, no sentido longitudinal, uma letra em cada volta da faixa.

Mais recentemente, a criptografia e a criptoanálise tiveram um importante papel na vitória dos aliados na Segunda Guerra Mundial (1939-1945). Por meio de uma máquina conhecida por Enigma, os nazistas transmitiam mensagens criptografadas com ordens de movimentação de tropas, posições estratégicas, futuros alvos, entre outras.

Ao interceptar essas comunicações, a **agência britânica de inteligência** convocou um grupo de matemáticos, liderados pelo inglês Alan Mathison Turing (1912-1954), para tentar decodificar as mensagens. Após muitas tentativas e erros, Turing e sua equipe aperfeiçoaram um dispositivo criado em 1938 pelo matemático polonês Marian Rejewski (1905-1980), construindo uma máquina capaz de decifrar os códigos nazistas.

Observação

O *Secret Intelligence Service* (SIS), também conhecido como MI6 (*Military Intelligence, Section 6*) é a **agência britânica de inteligência**, que fornece informações secretas estrangeiras ao governo britânico.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Segundo alguns historiadores, esse fato antecipou o fim da guerra em pelo menos dois anos, poupando milhares de vidas.

Por ser reconhecido como uma das mais importantes personalidades britânicas, a fotografia de Alan Turing foi escolhida, por votação popular, para estampar a cédula de 50 libras.

CHRISTOPHER FURLONG/GETTY IMAGES

Ilustração, revelada em 2019 pelo Banco da Inglaterra, com a foto de Alan Turing estampada na nota de 50 libras e a frase "Nós só podemos ver um pouco do futuro, mas o suficiente para perceber que há muito a fazer". Turing foi escolhido entre mil cientistas para representar o campo da Ciência.

Sugestão

A história de Alan Turing e sua equipe é retratada no filme *O jogo da imitação* (direção: Morten Tyldum, Estados Unidos/Reino Unido, 2014, 114 min.).

A criptografia no domínio público

Desde os primeiros registros até os dias atuais, as mensagens cifradas foram se tornando cada vez mais necessárias, ultrapassando os limites da esfera militar e passando a fazer parte do cotidiano das pessoas. Com o advento da informática, a comunicação codificada atingiu tal importância que motivou o desenvolvimento da criptografia como ciência que estuda os princípios e as técnicas de codificação e decodificação da escrita e de outras formas de mensagens gráficas.

Estamos tão habituados à presença da criptografia em nossas vidas que, às vezes, nem a percebemos. Vamos destacar o uso dela em algumas operações cotidianas:

- Senha bancária: sequência de caracteres que funciona como uma chave que abre a porta de acesso a uma conta em banco. Ao digitar a senha em um canal de atendimento, um sistema de segurança a criptografa de modo que algum eventual invasor (*hacker*) não consiga descriptografá-la.
- Compras pela internet: ao preencher formulários com os dados pessoais e do cartão de crédito em um ***site* confiável**, alguns recursos de segurança permitem que os dados sejam transmitidos por uma conexão criptografada e que se verifique a autenticidade do servidor e do cliente, por meio de certificados digitais.

Observação

Alguns detalhes podem ajudá-lo a reconhecer um *site* confiável:
- Se o *Uniform Resource Locator* (URL) da página começar com "https", seus dados serão criptografados e transferidos por meio de um protocolo seguro.
- Se ao lado do URL aparecer o ícone de um cadeado, então o *site* tem uma proteção especial para as informações inseridas pelo usuário, garantindo que trafeguem de forma segura entre o computador e o servidor. Ao clicar nesse ícone, você terá informações sobre o nível de segurança do *site*.

- Arquivos confidenciais: informações sigilosas podem ser armazenadas digitalmente em arquivos protegidos por senhas criptografadas. Algumas empresas, além das senhas, criptografam o conteúdo do arquivo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- Código de barras: dados numéricos ou alfanuméricos podem ser representados por sequências de barras, cujas larguras e espaçamento são decodificados por um leitor óptico.

8 600340 506509

TOTEMART/SHUTTERSTOCK

- Cédulas de dinheiro: a marca-d'água nas cédulas é um recurso da esteganografia, ramo da criptografia dedicado ao estudo de meios e métodos de ocultação de mensagens.

ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS – ACERVO BANCO CENTRAL DO BRASIL

Muitas cédulas, como a de 10 reais da fotografia, possuem marca-d'água, em destaque no detalhe. Esse recurso funciona como dispositivo de segurança, que diferencia uma cédula verdadeira de uma falsa.

Sugestão

O vídeo *A loira do banheiro* explica as origens da criptografia e alguns usos na atualidade. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1128>. Acesso em: 3 jun. 2020.

ATIVIDADE

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.

Não escreva no livro.

1 Agora que você já tem informações sobre criptografia e como ela está presente nas diversas atividades humanas, saiba também como aumentar a segurança de suas comunicações. As senhas mais usadas em todo o mundo são óbvias, como uma sequência de algarismos em ordem crescente (123456), uma sequência de letras em ordem alfabética (ABCDEFG), a data de nascimento, o próprio nome etc. Ou seja, a maioria das pessoas nem sequer elabora senhas que representem um desafio de decodificação para algum eventual espião, intruso ou mesmo um curioso. Para avaliar o nível de segurança das informações digitalizadas dos estudantes de sua turma, faça uma pesquisa com base nas etapas descritas a seguir.

a) Cada estudante da sala deve responder "sim" ou "não" à pergunta: Ao elaborar uma senha de *e-mail*, telefone celular, aplicativo, arquivo etc., você usa senhas óbvias, de fácil decodificação?

b) A tabulação do resultado é feita por dois estudantes, que divulgam as respostas divididas em "sim" e "não".

c) Reúna-se com seus colegas formando três grupos: um dos grupos constrói um gráfico de colunas com as classes "sim" e "não" e as respectivas frequências absolutas; outro grupo constrói um gráfico de colunas com as classes "sim" e "não" e as respectivas frequências relativas (percentuais); o terceiro grupo constrói um gráfico de setores com as classes "sim" e "não" e as respectivas frequências relativas (percentuais).

Nota: os gráficos podem ser construídos no caderno ou por meio de um aplicativo de planilhas eletrônicas.

d) Finalmente, discutam sobre o nível de segurança das informações digitalizadas pelos estudantes da turma.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando conexões

Como funciona o código de barras?

7 891234 567895

ERICSON GUILHERME LUCIANO

O **código de barras** nada mais é do que a representação gráfica da sequência de algarismos que vem impressa logo abaixo dele. A vantagem das barras é que elas podem ser identificadas rapidamente, e sem risco de erros, por aparelhos portáteis de leitura óptica, como os usados pelos caixas de supermercado. Mas o que realmente importa para identificar o produto é sua sequência numérica, que também pode ser digitada manualmente pelos caixas.

"Esse número funciona como uma espécie de RG do produto, ou seja, não existem dois produtos diferentes com o mesmo número", diz a desenhista industrial Cláudia Ferreira, consultora da EAN, organização internacional que gerenciava a distribuição dos códigos no mundo e tem uma representação no Brasil. Atualmente, o padrão EAN está sob os cuidados da GS1, organização sem fins lucrativos que cria padrões globais para comunicação empresarial.

O sistema de barras foi criado nos Estados Unidos em 1973 e acabou sendo adotado na Europa três anos depois. Mas, enquanto os americanos usam uma sequência numérica de 12 dígitos, os europeus optaram por um padrão com 13, que foi adotado no resto do mundo.

A partir de 2005, porém, os dois sistemas foram unificados. Mas isso não significa que toda a confusão numérica acabou, pois existem ainda outros tipos de códigos especiais, como o de oito dígitos, EAN-8 (utilizado quando a embalagem do produto é muito pequena).

Observação

O sistema de **código de barras** mais comum no Brasil é o EAN-13 (*European Article Numbering* – 13), também conhecido por GTIN-13 (*Global Trade Item Number* – 13). O número 13 indica a quantidade algarismos usados nas representações codificadas.

Linguagem cifrada

As barras são uma representação gráfica do código binário. Cada traço preto ou branco equivale a um *bit* (1 ou 0, respectivamente) e cada algarismo é sempre representado por sete *bits*. Uma barra escura mais grossa que as outras é, na verdade, a somatória de vários traços pretos. O mesmo princípio vale para as barras brancas.

Aviso inicial

Essas três primeiras barras mais compridas (uma branca no meio de duas pretas) são uma sinalização, indicando que a seguir vem o código do produto. As barras e seus respectivos algarismos não ficam alinhados – por isso o número 7 vem antes das barras de sinalização.

Registro nacional + RG do fabricante

Os três primeiros números (789) indicam que o produto foi cadastrado no Brasil, apesar de não necessariamente ter sido fabricado aqui. Cada país tem uma combinação própria. A da Argentina, por exemplo, é 779.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK

Ao ser escaneado, o código de barras dos produtos em um supermercado informa, por exemplo, o valor cobrado por ele.

Ainda nessa sequência inicial de números, que pode variar de sete a onze algarismos, é a identificação da empresa fabricante. Esse número é fornecido por uma organização internacional, a GS1, que faz o controle para que não sejam distribuídos números iguais.

RG do produto

A segunda sequência identifica o produto em si. A numeração varia conforme o tipo, o tamanho, a quantidade, o peso e a embalagem do produto [...].

Checagem final

O último número é um dígito verificador. Ao ler todo o código do produto, o computador faz um cálculo complexo, somando, dividindo e multiplicando os dígitos anteriores. Se a leitura estiver correta, o resultado desse cálculo estranho é igual ao do dígito verificador.

Fonte: *Superinteressante*. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-funciona-o-codigo-de-barras/>. Acesso em: 10 jun. 2020.

MODERNA

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

2 Como vimos no texto anterior, um código de barras é formado por listras de mesma espessura, sejam elas pretas ou brancas. Cada listra branca é representada por 0 (zero), e cada listra preta, por 1. Quando duas ou mais listras de mesma cor se sucedem, nos dá a impressão de uma listra mais larga, mas, na verdade, essa espessura é a soma das larguras de linhas padrão.

Na figura abaixo, o primeiro dígito (7) não é representado por listras; as três listras do início e do final do código, indicadas por 101, e o centro do código, indicado por 01010, não representam nenhum dígito. As demais listras, separadas de 7 em 7, representam os dígitos escritos abaixo do código, por exemplo, a sequência 0110111 representa o dígito 8, e a sequência 0010111 representa o dígito 9. Escreva em seu caderno todas as sequências de zeros e uns que representam os demais dígito escritos embaixo do código.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

A Matemática e a Estatística aplicadas à criptografia

A criptografia está estreitamente ligada à Matemática e à Estatística por meio de tópicos como matrizes, números primos, distribuição de frequências, congruência numérica e análise combinatória. Para ilustrar essa afirmação, apresentamos alguns exemplos de aplicação.

Cifras de Hill

O matemático estadunidense Lester S. Hill (1891-1961) criou, em 1929, um importante método de codificação de mensagens, que ficou conhecido como cifras de Hill. Esse método envolve múltiplos conceitos de Álgebra Linear, porém estudaremos uma variação simplificada, que necessita apenas de algumas noções elementares sobre matrizes.

Matriz

Uma matriz do tipo $m \times n$ (lemos: m por n) é toda tabela numérica na qual os elementos estão dispostos em m linhas e n colunas.

Exemplo:

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 5 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, o produto de A por B, nessa ordem, é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ de maneira que:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{ni}$$

Note que:

- para existir o produto $A \cdot B$, é necessário e suficiente que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B;
- a matriz produto C tem o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Exemplo:

Sendo $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-2) \\ -1\cdot 3 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & -1\cdot 2 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

Assim, $A \times B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Matrizes inversas

Uma matriz quadrada A de ordem n é **invertível** se, e somente se, existe uma matriz quadrada B de ordem n tal que: $AB = BA = I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n. As matrizes A e B são chamadas de **inversas entre si**, e tal fato é indicado por $B = A^{-1}$ (lemos: "B é igual à inversa de A") ou $A = B^{-1}$ (lemos: "A é igual à inversa de B").

Uma importante propriedade garante que se $AB = I_n$, então $BA = I_n$. Assim, para verificar se duas matrizes quadradas de mesma ordem são inversas, basta calcular um dos produtos: AB ou BA.

Exemplo:

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ são inversas entre si, pois:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Não é preciso calcular o produto BA, pois se $AB = I_2$, a propriedade mencionada anteriormente garante que $BA = I_2$.

Propriedade

Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Cálculo da inversa

Se o determinante de uma matriz quadrada A é diferente de zero, então existe A^{-1}. Para determinar A^{-1}, podemos aplicar a definição. Por exemplo, vamos obter a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Para isso, representamos sua inversa por: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, em que a, b, c e d são variáveis reais.

Aplicando a definição, devemos ter: $A \cdot A^{-1} = I_2$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a - 3c & b - 3d \\ 2a - 7c & 2b - 7d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa igualdade, deduzimos que:

$$\begin{cases} a - 3c = 1 \\ 2a - 7c = 0 \\ b - 3d = 0 \\ 2b - 7d = 1 \end{cases}$$

de onde obtemos: $a = 7$, $b = -3$, $c = 2$ e $d = -1$.

Concluímos, portanto, que a inversa da matriz A é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Esses são os pré-requisitos para entender o método de Hill, em uma forma simplificada. Agora, vamos aplicar esse método criptografando a frase:

BOA SORTE!

Inicialmente, devemos escolher duas matrizes inversas entre si, A e A^{-1}, de qualquer ordem n, que serão as chaves de codificação e decodificação.

Por comodidade, escolhemos as matrizes obtidas no exemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \text{ e } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, associamos, aleatoriamente, um número a cada letra do alfabeto, um número ao sinal de exclamação e outro para representar um espaço entre as palavras da frase a ser codificada. Mais símbolos podem ser acrescentados, de acordo com a necessidade.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!	espaço
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Assim, a correspondência entre as letras da frase e os números convencionados é:

B	O	A		S	O	R	T	E	!
1	14	0	27	18	14	17	19	4	26

Com esses números, formaremos uma matriz M tal que existam os produtos AM e $A^{-1}M$. Como A e A^{-1} têm ordem 2, deduzimos que a matriz M deve ter duas linhas. Se faltar algum elemento na matriz M, basta colocar um ou mais espaços no final.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como há dez números para formar a matriz M, podemos escolher o tipo 2×5 para ela. Obedecendo à ordem da correspondência apresentada na página anterior, os cinco primeiros números formarão a primeira linha de M, e os demais formarão a segunda.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 0 & 27 & 18 \\ 14 & 17 & 19 & 4 & 26 \end{bmatrix}$$

A matriz N que vai representar a mensagem codificada é igual ao produto de A por M; assim:

$$N = A \times M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 14 & 0 & 27 & 18 \\ 14 & 17 & 19 & 4 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\therefore N = \begin{bmatrix} -41 & -37 & -57 & 15 & -60 \\ -96 & -91 & -133 & 26 & -146 \end{bmatrix}$$

Em seguida, os elementos da matriz N são escritos, separados por vírgula, um após o outro, conforme a ordem em que aparecem nas linhas de N, e enviados ao destinatário que possui a chave de decodificação (matriz A^{-1}) e conhece todo o processo descrito.

$$-41, -37, -57, 15, -60, -96, -91, -133, 26, -146$$

O destinatário reconstrói a matriz N e efetua o produto $A^{-1}N$, obtendo a matriz M, que recupera a mensagem original.

$$A^{-1} \times N = M = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -41 & -37 & -57 & 15 & -60 \\ -96 & -91 & -133 & 26 & -146 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 0 & 27 & 18 \\ 14 & 17 & 19 & 4 & 26 \end{bmatrix}$$

1	14	0	27	18	14	17	19	4	26
B	O	A		S	O	R	T	E	!

As técnicas aqui apresentadas são processos simples de codificação e decodificação; porém, para a realização de movimentações financeiras em bancos, operações comerciais via internet e outros casos que envolvem a segurança nacional, os processos e técnicas são extremamente complexos.

ATIVIDADES

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas**.

Não escreva no livro.

3 Calcule o produto da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ pela matriz $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

4 Sabendo que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e B são inversas, determine a matriz $C = A + B$.

5 Aplicando o método simplificado de Hill, responda aos itens seguintes, adotando a matriz codificadora $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e a correspondência descrita pelas colunas da tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	espaço	.	!
9	11	26	27	4	14	2	17	7	15	19	21	1	29	5	18	23	6	25	12	24	8	16	28	22	13	10	3	20

a) Determine a matriz decodificadora de qualquer mensagem, de acordo com essas convenções.

b) Codifique a mensagem a seguir, por meio de uma matriz $B_{2 \times 10}$:

O BEM SEMPRE VENCE.

c) Uma mensagem codificada foi enviada por meio da matriz abaixo:

$$D = \begin{bmatrix} 31 & 12 & 22 & 21 & 36 & 24 \\ 20 & 7 & 13 & 11 & 28 & 17 \end{bmatrix}$$

Qual é essa mensagem?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Os números primos e a criptografia

Como sabemos, número primo é todo número inteiro que possui exatamente 4 divisores distintos; por exemplo, o número -5 é primo, pois seus únicos divisores são 1, -1, 5 e -5.

A criptografia utiliza apenas os números primos naturais na codificação e decodificação de mensagens. Por isso, vamos restringir a definição anterior ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais: um número natural é primo se, e somente se, tem exatamente dois divisores naturais distintos. Por exemplo, o número natural 5 é primo, pois seus únicos divisores naturais são 5 e 1.

Para facilitar, neste texto vamos convencionar que, ao nos referirmos a um número primo, ficará subentendido que o número é natural.

Embora os números primos sejam infinitos, como demonstrou **Euclides de Alexandria**, não é tarefa simples determinar um deles, maior do que qualquer número natural previamente fixado. Até 2019, o maior número primo conhecido foi determinado, em 2018, pelo estadunidense Patrick Laroche, um profissional da Tecnologia da Informação. Esse número, representado na forma decimal, tem cerca de 25 milhões de algarismos. Imagine, portanto, a dificuldade de fatorar completamente um número natural, cujos divisores primos tenham centenas, milhares ou milhões de dígitos!

Essa dificuldade é aproveitada pela criptografia, que utiliza grandes números primos como chaves para cifrar mensagens. Quanto maior o número primo usado na codificação, mais difícil é, para aqueles que não conhecem a chave, decifrar a mensagem.

Observação

Euclides de Alexandria foi um matemático, professor e escritor grego, que viveu no Egito entre 323 a.C. e 283 a.C., aproximadamente, e ficou conhecido como "pai da Geometria".

Como a criptografia utiliza os números primos?

Suponha que um computador tenha sido programado para multiplicar dois ou mais números primos distintos com milhares de dígitos, obtendo-se como produto o número *n*. Para quem não conhece o processo usado na obtenção de *n*, é pouco provável que consiga decompor esse número em fatores primos. Isso pode demorar décadas ou séculos, mesmo para os computadores mais velozes. Por isso, os números primos são utilizados na codificação de informações.

MOTION DMITRIY/SHUTTERSTOCK

Por exemplo, se a chave da codificação de certas informações é associar um caractere (letra, sinal de pontuação, símbolos especiais etc.) a cada dígito de determinadas posições do maior fator primo do número *n*, um eventual invasor será obrigado a fatorar completamente o número *n*, o que certamente vai demorar tempo suficiente para que a senha seja alterada.

Um método da criptoanálise

Como vimos, o estudo das técnicas de decodificação de mensagens cifradas, sem o conhecimento prévio da chave que as gerou, é chamado de criptoanálise. Uma dessas técnicas é o método da **frequência relativa de letras**, adotado para decifrar uma mensagem criptografada (criptograma) a partir de um texto escrito em determinado idioma. O conhecimento prévio da frequência relativa das letras do alfabeto na formação de palavras nesse idioma, comparado com a frequência relativa dos símbolos usados no criptograma, possibilita presumir, estatisticamente, a letra correspondente a cada símbolo. Nesse método não são considerados acentos nem sinais de pontuação.

Nas palavras da língua portuguesa, por exemplo, a letra *a* é a mais frequente. Assim, em um criptograma em que cada símbolo represente uma letra de um texto escrito em português, é provável que o símbolo mais frequente represente a letra *a*. O inconveniente na aplicação desse método é que o criptograma deve ser suficientemente longo para que as frequências relativas das letras sejam significativas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

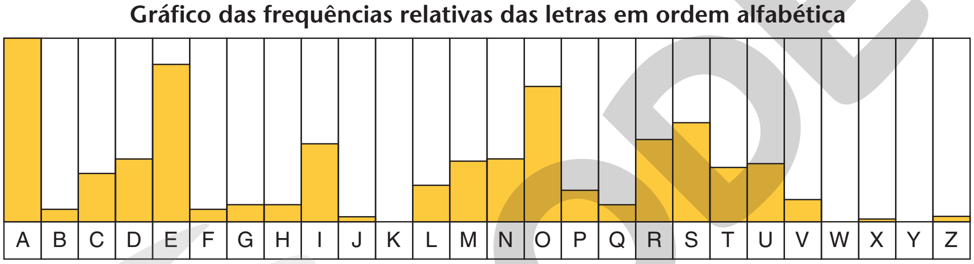
Abaixo apresentamos uma tabela e um gráfico com as frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa.

Tabela das frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa

Letra	Frequência relativa (%)	Letra	Frequência relativa (%)
A	14,63	N	5,05
B	1,04	O	10,73
C	3,88	P	2,52
D	4,99	Q	1,20
E	12,57	R	6,53
F	1,02	S	7,81
G	1,30	T	4,34
H	1,28	U	4,63
I	6,18	V	1,67
J	0,40	W	0,01
K	0,02	X	0,21
L	2,78	Y	0,01
M	4,74	Z	0,47

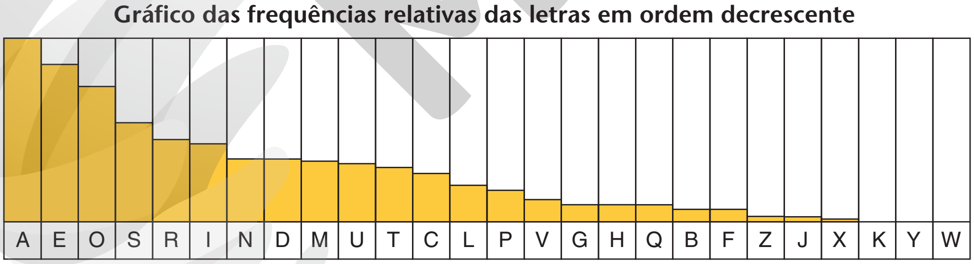
Fonte: FRANÇA, W. B. A. *Criptografia*. Brasília: Universidade Católica de Brasília (UCB-DF). Disponível em: <https://docplayer.com.br/5004042-Criptografia-waldizar-borges-de-araujo-franca-1-1-introducao.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.

Gráfico das frequências relativas das letras em ordem alfabética



Fonte: FRANÇA, W. B. A. *Criptografia*. Brasília: Universidade Católica de Brasília (UCB-DF). Disponível em: <https://docplayer.com.br/5004042-Criptografia-waldizar-borges-de-araujo-franca-1-1-introducao.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.

Gráfico das frequências relativas das letras em ordem decrescente



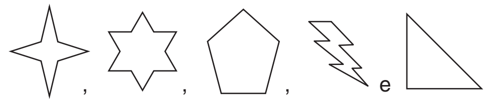
Fonte: FRANÇA, W. B. A. *Criptografia*. Brasília: Universidade Católica de Brasília (UCB-DF). Disponível em: <https://docplayer.com.br/5004042-Criptografia-waldizar-borges-de-araujo-franca-1-1-introducao.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.

Suponha que uma mensagem escrita em português, com 3.600 letras, tenha sido criptografada de modo que cada letra foi substituída por um símbolo e que a sequência de símbolos abaixo represente uma palavra do criptograma.

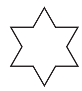
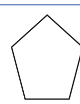
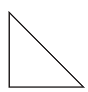
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

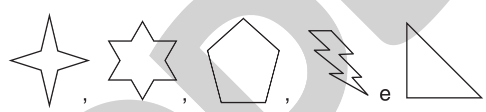
Se nesse criptograma as frequências absolutas dos símbolos



são 232, 529, 222, 178 e 46, respectivamente, é possível presumir a letra representada por cada símbolo. Para isso, calculamos as frequências relativas desses símbolos no criptograma:

Símbolo	Frequência absoluta	Frequência relativa
	232	$\frac{232}{3.600} \approx 6{,}4\%$
	529	$\frac{529}{3.600} \approx 14{,}7\%$
	222	$\frac{222}{3.600} \approx 6{,}2\%$
	178	$\frac{178}{3.600} \approx 4{,}9\%$
	46	$\frac{46}{3.600} \approx 1{,}3\%$

Comparando essas frequências relativas com as frequências relativas das letras nas palavras da língua portuguesa, deduzimos que, provavelmente, os símbolos

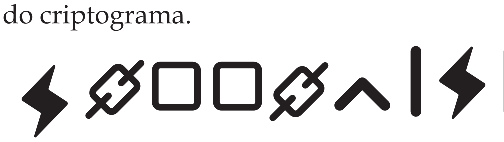


representem as letras R, A, I, N e H, respectivamente. Assim, concluímos que, provavelmente, a sequência de símbolos

represente a palavra RAINHA.

ATIVIDADE Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.** **Não escreva no livro.**

6 Um texto escrito em português, com 4.000 letras, foi criptografado de modo que cada letra foi substituída por um símbolo. A sequência de símbolos, abaixo, representa uma palavra do criptograma.



Se nesse criptograma as frequências absolutas dos símbolos

são 171, 495, 262, 193 e 430, respectivamente, qual é a provável palavra da língua portuguesa representada pela sequência acima, de acordo com a tabela das frequências relativas das letras apresentada anteriormente?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Explorando conexões

Remotabilidade e segurança da informação na era do trabalho a distância

Você já parou para pensar sobre o impacto que muitas profissões sofreram graças aos avanços tecnológicos das últimas décadas?

Especialmente nas profissões que lidam com transmissão de dados e informações, as novas tecnologias e o desenvolvimento de mecanismos de comunicação remotos revolucionaram os modelos e as ferramentas de trabalho. As inúmeras caixas de arquivos com papéis foram substituídas por uma conta de *e-mail*; as máquinas de escrever, por computadores; as agendas impressas, por aplicativos de *smartphones*, além da redução gradativa dos enormes escritórios em prédios corporativos, num movimento cada vez maior de incentivo ao *home office*.

A remotabilidade, ou possibilidade de trabalhar de qualquer lugar, traz uma série de vantagens para empresas e colaboradores, mas aumenta consideravelmente a necessidade de comunicação a distância. Com isso, a troca de informações confidenciais fica ameaçada ou, no mínimo, mais vulnerável.

Atualmente, existem diversos aplicativos de armazenamento de arquivos em ambientes virtuais, chamados de ***clouds*** (**nuvens**). Como forma de tentar garantir a segurança das informações guardadas pelos usuários, essas plataformas usam técnicas de criptografia dos arquivos. Teoricamente, apenas o usuário com senha pode acessar o documento criptografado e visualizá-lo sem nenhuma distorção.

Observação

Home office é uma expressão inglesa que significa "escritório em casa". Trabalhar em *home office* significa realizar atividades profissionais em casa ou simplesmente fora da empresa, remotamente.
Nuvem é uma tecnologia digital que possibilita armazenar dados e arquivos em um servidor *on-line*, tornando possível acessá-los de qualquer equipamento conectado à internet.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Um escândalo sobre segurança criptográfica abalou o mundo, quando em 2013, o analista de sistemas de computadores da CIA (*Central Intelligence Agency*, a agência de inteligência dos Estados Unidos) Edward Snowden revelou informações confidenciais, demonstrando como o governo dos EUA acessava e observava arquivos, na nuvem, da população do mundo.

Fontes: Órgão britânico revela lista com as senhas mais utilizadas no mundo. *Canaltech*. Disponível em: <https://canaltech.com.br/seguranca/orgao-britanico-revela-lista-com-as-senhas-mais-utilizadas-no-mundo-137683/>. Acesso em: 6 jun. 2020.

SILVA, H. L. L. *Segurança da informação*: Estudo de caso sobre o vazamento de senhas – Ano de 2017. Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/13526/1/CT_GESER_X_2018_03.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2020.

Sugestão

Saiba mais sobre o escândalo a respeito da segurança criptografada no artigo "Entenda o caso Edward Snowden, que revelou espionagem dos EUA". Disponível em: <http://g1.globo.com/mundo/noticia/2013/07/entenda-o-caso-de-edward-snowden-que-revelou-espionagem-dos-eua.html>. Acesso em: 6 jun. 2020.

MODERNA

Texto complementar

Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma

À primeira vista, Enigma parece uma desajeitada máquina de escrever. Mas, antes e durante a Segunda Guerra Mundial, ela foi uma das mais poderosas armas da Alemanha nazista.

Naquela época, as mensagens eram transmitidas por rádio, sendo facilmente interceptadas pelos inimigos. No entanto, graças às codificações da máquina Enigma, os textos coletados pelos aliados permaneceram por muito tempo completamente ilegíveis. A máquina era usada para criptografar todas as comunicações militares alemãs. Os aliados, e também os alemães, acreditavam que o código secreto da Enigma era indecifrável.

EVERETT HISTORICAL/SHUTTERSTOCK

Enigma, máquina usada pelos nazistas para criptografar e decriptografar mensagens secretas durante a Segunda Guerra Mundial.

O matemático inglês Alan Turing e sua equipe do Bletchley Park decifraram o código durante a Segunda Guerra Mundial. A história do matemático é destaque no filme “O jogo da imitação” [...]. Mas ele não foi o primeiro a desvendar os segredos da Enigma.

Mesmo que a Alemanha tenha sido derrotada durante a Primeira Guerra Mundial, a Polônia ainda continuou a temer o seu dominante vizinho, como também, posteriormente, a ascensão de Hitler. Assim, na década de 1930, a inteligência polonesa passou a interceptar e a decifrar, secretamente, as mensagens militares alemãs.

Espionagem e Matemática

A forma como os poloneses decifraram os códigos da Enigma antes da guerra se tornou uma lenda da espionagem – misturando intuição matemática com um pouco de sorte. Um funcionário do Ministério da Guerra em Berlim, chamado Hans-Thilo Schmidt, vendeu documentos ultrassecretos a um espião francês, que os encaminhou aos poloneses.

A informação era justamente o que o matemático polonês Marian Rejewski e seus colegas precisavam para decifrar Enigma. As cópias de Schmidt dos mecanismos de encriptação permitiram que os poloneses construíssem uma réplica da Enigma, semelhante ao modelo que se encontra exposto no museu da matemática Arithmeum, em Bonn.

ARCHIVE PL/ALAMY/FOTOARENA

O polonês Marian Adam Rejewski (1905-1980) foi o matemático que detectou as primeiras falhas da Enigma. Foto de 1944.

Mensagens eram fáceis de interceptar, mas difíceis de decifrar, exceto para aqueles que possuíam o código secreto...

A máquina tinha 26 teclas alfabéticas, e quando uma das teclas era pressionada, a letra criptografada aparecia em um painel luminoso acima do teclado. Abaixo do teclado, um quadro com 26 conexões para fios trocava as letras. Assim, A se torna B e vice-versa.

Até o final da década de 1930, as forças alemãs usavam seis fios com 12 contatos para trocar as letras, deixando 14 letras inalteradas. Muito mais desafiador do que o quadro de permutas, era o mecanismo de avanço acima do painel luminoso. Ele tinha aberturas para três rotores ou discos rotativos intercambiáveis com 26 posições de A a Z.

“Após haver codificado uma letra, o primeiro disco avançava uma posição, mudando a sua combinação, e depois de 26 rotações, o disco do centro também girava 26 vezes”, explicou o matemático Stephan Held, do Instituto de Pesquisa de Matemática Discreta, em Bonn. “A combinação mudava após cada letra, e isso dificultava decifrar a Enigma.”

O número de combinações para três rotores – cada um com 26 posições de A a Z – resultava em 17.576 chaves. Mas como os três rotores eram intercambiáveis, havia seis maneiras possíveis de inseri-los nas três aberturas. Isso resultava em 105.456 combinações – um número considerável, mas manejável para Rejewski e seus matemáticos poloneses.

“Essa foi a quantidade de configurações que os poloneses simularam a fim de decifrar o código da máquina. Ele catalogaram, simplesmente,

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

cada uma dessas combinações", afirmou Mario Wolfram, especialista em Enigma do Museu Arithmeum [...].

Rejewski descobriu que cada uma dessas 105.456 combinações gerava um único padrão matemático, como um DNA ou impressão digital usado por um detetive para rastrear um suspeito. Ele tentou então combinar uma chave de três letras para mensagens interceptadas com padrões de combinações conhecidas. Se Rejewski encontrasse uma correspondência, ele poderia decifrar a mensagem. Mas, se a mensagem era muito curta e o padrão era difícil de discernir, por meio de conjecturas, o número de possibilidades era reduzido.

"Seres humanos escolhem, muitas vezes, chaves simples como AAA, BBB ou três letras consecutivas no teclado. Ele tentava então essas hipóteses até encontrar uma correspondência", afirmou Held.

Alemães aperfeiçoaram Enigma antes da Segunda Guerra

No entanto, no final de 1938, a sorte se voltou contra os poloneses. Os alemães acrescentaram dois rotores adicionais à Enigma, de forma que qualquer combinação de cinco rotores pudesse ser introduzida nas três aberturas [...].

"Isso tornou a situação muito mais difícil para os criptógrafos poloneses. Tem-se 60 maneiras diferentes de inserir os rotores na máquina, enquanto antes havia somente seis combinações possíveis, assim o trabalho que teriam de fazer para decifrar as mensagens aumentou dez vezes", disse Wolfram.

Este aumento significava mais de um milhão de posições iniciais para os cinco rotores. O número de fios no quadro de conexões também aumentou de seis para dez. Os poloneses não tinham mais os recursos suficientes para lidar com as mudanças.

Além disso, naquela época, os matemáticos poloneses tiveram que fugir de seu país. Mas, antes disso, eles entregaram para os serviços de inteligência franceses e britânicos tudo que sabiam sobre a Enigma.

Os nazistas invadiram a Polônia em 1º de setembro de 1939. A França foi ocupada em 1940. Assim, coube a Alan Turing e à sua equipe no Bletchley Park, no norte de Londres, decifrar o código Enigma.

Fonte: Poloneses foram os primeiros a decifrar o código Enigma. *DW Brasil*. Disponível em: <https://www.dw.com/pt-br/poloneses-foram-os-primeiros-a-decifrar-c%C3%B3digo-enigma/a-18271543>. Acesso em: 6 jun. 2020.

ENTENDIMENTO DO TEXTO

Ver **Manual do Professor – Orientações específicas.**

Não escreva no livro.

O texto acima conta um pouco da história da contribuição da Matemática para o fim da Segunda Guerra Mundial. Com base nele, responda aos itens seguintes.

1. O que era a máquina Enigma?
2. Um funcionário do Ministério da Guerra, em Berlim, vendeu documentos ultrassecretos a um espião francês, que os encaminhou aos poloneses. Qual era o conteúdo desses documentos?
3. O matemático polonês Marian Rejewski e seus colegas trabalharam na decodificação de mensagens transmitidas pela Enigma, quando a máquina tinha apenas três rotores, antes de os alemães a aperfeiçoarem. Quantas combinações eram possíveis com esses três rotores?
4. Qual descoberta de Rejewski poderia ajudá-lo a decifrar as mensagens? Como ele explorou essa descoberta?
5. Por que os poloneses transmitiram aos serviços de inteligência franceses e britânicos todo o conhecimento adquirido sobre a decodificação das mensagens transmitidas pela Enigma?
6. Quem foram os responsáveis por decifrar o código da Enigma?

Sugestões

Assista ao vídeo *Demonstração da máquina Enigma* para saber mais sobre o funcionamento desse equipamento nazista. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=VMJeDLv2suw#:~:text=O%20pesquisador%20Ivan%20Boesing%2C%20respos%C3%A1vel,nazista%20para%20proteger%20suas%20informa%C3%A7%C3%B5es>. Acesso em: 9 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ALMEIDA, Lourdes W.; PESSOA, Karina; VERTUAN, Rodolfo E. *Modelagem matemática na educação básica.* São Paulo: Contexto, 2012.
A obra integra a Matemática a situações e problemas - como aspectos sociais, econômicos e ambientais -, além de complementar o estudo das Ciências em sala de aula, por meio do recurso da modelagem.

ANDRADE, Josiane N.; GALVÃO, Diogo C. O conceito de *smart cities* aliado à mobilidade urbana. *Hum@nae*. Questões controversas do mundo contemporâneo, 2016, v. 10, n. 1.
O artigo aborda as transformações na mobilidade urbana resultantes da tecnologização dos deslocamentos.

BAESSO, Murilo M.; SILVA, José R. M. *Sistema de navegação por satélite (GNSS)*: fundamentos e aplicações práticas. Curitiba: CRV, 2014.
Apresenta a interoperabilidade, ainda em curso, dos sistemas de navegação por satélite: GPS, Glonass e Galileo.

BARBETTA, Pedro A. *Estatística aplicada às Ciências Sociais*. Florianópolis: Editora UFSC, 2011.
O autor apresenta conceitos e técnicas no decorrer de um processo de pesquisa em Ciências Sociais e Humanas.

BASSANEZ, Carlos B. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
A obra apresenta uma proposta de estudo das Ciências por meio da modelagem matemática, permeando vários contextos.

BEZERRA, Thaíse A.; OLINDA, Ricardo A.; PEDRAZA, Dexis F. Insegurança alimentar no Brasil segundo diferentes cenários sociodemográficos. *Ciência & Saúde Coletiva*, 2017, v. 22, n. 2, p. 637-651. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-81232017000200637&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 29 jul. 2020.
Por meio de uma meta-análise, o artigo aponta a prevalência de insegurança alimentar em diferentes regiões do Brasil.

BORBA, Marcelo C.; PENTEADO, Miriam G. *Informática e educação matemática*. São Paulo: Autêntica, 2007.
São debatidos na obra temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa, questões epistemológicas e pedagógicas relacionadas à utilização de computadores e calculadoras gráficas em sala de aula.

CANALTECH. Órgão britânico revela lista com as senhas mais utilizadas no mundo. Disponível em: <https://canaltech.com.br/seguranca/orgao-britanico-revela-lista-com-as-senhas-mais-utilizadas-no-mundo-137683/>. Acesso em: 29 jul. 2020.
A publicação mapeia os principais padrões de construções de senhas eletrônicas.

CHIZZOTTI, Antonio. *Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais.* São Paulo: Cortez, 2018.
Obra clássica que orienta o trabalho com metodologias de pesquisa em Ciências Humanas e Sociais.

COLEÇÃO DE MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. *Recursos educacionais multimídia para a matemática do Ensino Médio.* Unicamp, São Paulo. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/>. Acesso em: 29 jul. 2020.
Site com mais de 300 recursos educacionais relacionando a Matemática com outras áreas do conhecimento, inclusive as Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

GAGEIRO, João N.; PESTANA, Maria H. *Análise de dados para Ciências Sociais:* a complementaridade do SPSS. Lisboa: Edições Sílabo, 2014.
A obra explora a análise de dados estatísticos em vários contextos sociais, com exemplos de aplicações práticas.

GIDDENS, Anthony. *As consequências da modernidade*. São Paulo: Unesp, 1991.
O autor aborda as transformações sociais que a modernidade desencadeou na vida humana.

HALL, Stuart. *A identidade cultural na pós-modernidade.* 10. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2005.
Livro clássico nos estudos do desenvolvimento das pessoas e sociedades na transição dos séculos XX e XXI.

HOGBEN, Lancelot. *O homem e a Ciência*: o desenvolvimento científico em função das exigências sociais. Porto Alegre: Globo, 1952.
A evolução do pensamento científico é abordada com destaque nas medições efetuadas através dos tempos.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). *Ideb* – Resultados e metas. INEP. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_Ideb_2005-2017.pdf>. Acesso em: 12 set. 2020.
Apresenta os dados da avaliação da Educação Básica no Brasil.

LUNA, Sergio V. *Planejamento de pesquisa*: uma introdução. São Paulo: Educ, 1997.
Propõe um estudo da metodologia científica, passando pelas etapas da pesquisa.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS (ONU). Desperdício de comida custa quase US$ 1 trilhão por ano em todo o mundo. *ONU News*. Disponível em: <https://news.un.org/pt/story/2019/10/1689492#:~:text=Desperd%C3%ADcio%20de%20comida%20custa%20quase%20US%24%201%20trilh%C3%A3o,ano%20em%20todo%20o%20mundo&text=O%20tema%20%C3%A9%20%E2%80%9CPare%20o,quase%20US%24%201%20trilh%C3%A3o%20anuais>. Acesso em: 29 jul. 2020.
O estudo apresenta o impacto financeiro do desperdício de alimentos no mundo.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS (ONU). Mundo está longe de cumprir metas dos Objetivos do Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionadas a alimentos e agricultura. *ONU News*. Disponível em: <https://news.un.org/pt/story/2019/07/1680491>. Acesso em: 29 jul. 2020.
A matéria trata da desigualdade social e do crescimento do número de pessoas que não têm acesso à alimentação.

PASACHOFF J. M.; PERCY J. R. *Teaching and learning astronomy*: effective strategies for educators worldwide. Cambridgeshire: Cambridge University Press, 2009.
A pesquisa educacional é trabalhada por meio das estratégias utilizadas no estudo de Geografia, História, Matemática, Física, entre outras áreas, por meio do uso do computador e outras tecnologias.

PINOCHET, Luis. *Tecnologia da informação e comunicação*. São Paulo: GEN Atlas, 2014.
Aborda a relação dos recursos computadorizados com a interação entre os eixos social, organizacional e pessoal, buscando compreender os benefícios e os desafios que o uso desses recursos traz para cada eixo associado.

ROSA, Carlos A. P. *História da Ciência*. Brasília: Funag, 2012. v. 1, 2 e 3.
Narra a trajetória da Ciência desde o Renascimento até o mundo contemporâneo.

SANT'ANA, Bernardino J. *Introdução à Matemática aplicada à criptologia*. Taubaté: Edição Kindle, 2013.
A obra apresenta técnicas da Matemática, principalmente Álgebra e teoria dos números, aplicadas à criptologia, Ciência que envolve a criptografia e a criptoanálise.

SECCHI, Leonardo. *Políticas públicas*: conceitos, esquemas de análises e casos práticos. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
Reúne conceitos e estratégias básicas e atuais para a implantação de políticas públicas.

SMITH, Ray. *Introdução à perspectiva*. São Paulo: Manole, 1996.
A perspectiva é apresentada por meio de explicações detalhadas e estudos de técnicas, estilos e instrumentos.

STANGOS, Niko. *Conceitos da Arte Moderna*. Rio de Janeiro: Zahar, 1991.
Apresenta os principais conceitos e transformações da arte a partir de 1900 até o presente, analisados em uma coletânea de ensaios, que tratam das principais escolas artísticas.

VIGITEL, Brasil. *Vigilância de fatores de risco e proteção para doenças crônicas por inquérito telefônico*. Disponível em: <http://portalarquivos2.saude.gov.br/images/pdf/2019/julho/25/vigitel-brasil-2018.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2020.
O artigo aborda os hábitos de atividade física da população brasileira.

WU, Tim. *Impérios da comunicação*: do telefone à internet, da AT&T ao Google. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Descreve as modificações ocorridas nos meios de comunicação ao longo da história.

ZOCHIO, Marcelo F. *Introdução à Criptografia*. São Paulo: Novatec, 2016.
De maneira objetiva e acessível, trata da criptografia desde os primórdios até os dias atuais e procura explicar como os algoritmos envolvidos no processo funcionam.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

MODERNA

ISBN 978-65-5779-287-2

9 786557 792872