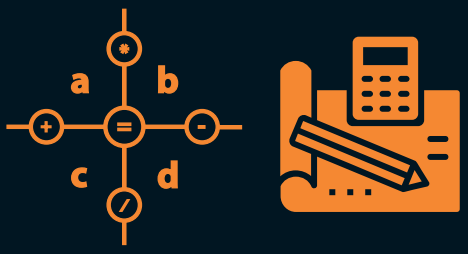
ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202133

CONEXÕES
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Grandezas, álgebra e algoritmos



Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Grandezas, álgebra e algoritmos

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Fabio Simon, Fernando Barriento, Ivail Muniz Junior, Jean Rocatelli, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Rodrigo Terra, Viviane Poli Tanaka

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Alessandra A. Felix, Inaya Oliveira, Know-how Editorial, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Guia para o professor

PARTE GERAL

Pressupostos teórico-metodológicos IV
- A Base Nacional Comum Curricular IV
- As mudanças no Ensino Médio VIII
- As metodologias ativas IX
- A importância da Matemática XI
- A língua materna e a Matemática XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade XIV
- A gestão da sala de aula XV
- Um olhar inclusivo XV
- Avaliação XV

Organização e estrutura da obra XVII
- Organização dos volumes XVII
- Sugestão de cronograma XVIII

Sugestões de consulta para o professor XIX
- Livros e artigos XIX

Referências bibliográficas XXI

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume XXIV

Sugestões de ampliação XXIX
Capítulo 1 Grandezas e medidas XXIX
Capítulo 2 Conjuntos XXIX
Capítulo 3 Funções XXX
Capítulo 4 Algoritmos e introdução à programação XXXI

Sugestões de avaliação XXXIII
Capítulo 1 Grandezas e medidas XXXIII
Capítulo 2 Conjuntos XXXVII
Capítulo 3 Funções XL
Capítulo 4 Algoritmos e introdução à programação XLV

Resoluções e comentários L
Capítulo 1 Grandezas e medidas L
Capítulo 2 Conjuntos LIV
Capítulo 3 Funções LX
Capítulo 4 Algoritmos e introdução à programação LXXII

Educação financeira Orçamento e planejamento financeiro LXXVII
Pesquisa e ação Telejornal LXXIX

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:

EM 13 MAT 103 → Esse código refere-se à habilidade 3 relacionada à competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

EM: Ensino Médio

13: a habilidade pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição do currículo

MAT: Matemática e suas Tecnologias

1: competência específica à qual se relaciona a habilidade

03: numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência

É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

MODERNA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, […] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

MODERNA

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

MODERNA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.

- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o *Scratch* trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que:

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu quinze temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

MODERNA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre pensamento computacional.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

MODERNA

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria analítica
		Transformações geométricas

MODERNA

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.

  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.

- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.

- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.

  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.

- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.

  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.

- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).

  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.

- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.

  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.

- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).

  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?

- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.

  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.

- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.

  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.

- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.

- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.

  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.

- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo*. São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM*. Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista*.

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática*.

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 O desenvolvimento da competência é favorecido no estudo do tópico *Sistema Internacional de Unidades*, nas páginas 20 a 28, do capítulo 1, e no tópico *Conjuntos numéricos*, nas páginas 46 a 53, do capítulo 2, ao valorizar os conhecimentos historicamente construídos. Essa competência também é desenvolvida no infográfico de abertura do capítulo 4, nas páginas 94 e 95, que apresenta a perspectiva histórica do desenvolvimento dos computadores.
Competência geral 2 A competência é desenvolvida no tópico *Translação do gráfico de uma função*, nas páginas 79 e 80, no exercício resolvido R10, na página 78, ambos do capítulo 3, que aborda o estudo do sinal de uma função por meio de gráficos construídos com *software* de construção de gráficos. Além disso, o trabalho realizado ao longo de todo o capítulo 4 favorece o desenvolvimento da competência, uma vez que traz conceitos para que os estudantes utilizem a tecnologia como ferramenta. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, propõe a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal, contribuindo com o desenvolvimento da competência citada.
Competência geral 3 A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, contribui para o desenvolvimento da competência ao propor aos estudantes a criação e a apresentação de um telejornal com o objetivo de conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente.
Competência geral 4 O trabalho realizado ao longo de todo o capítulo 4 favorece o desenvolvimento da competência, uma vez que propõe a utilização de diversas representações de algoritmo, seja em linguagem corrente, seja em um fluxograma ou até mesmo em uma linguagem de programação – como Phyton, estudada no capítulo 4 –, para modelar e resolver problemas. Também as seções *Educação financeira* – ao propor a análise de um orçamento familiar e de um planejamento, com base em uma cena ilustrada –, nas páginas 120 a 123, e *Pesquisa e ação* – ao propor a criação e a apresentação de um telejornal para conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente –, nas páginas 124 a 126, contribuem para o desenvolvimento da competência.
Competência geral 5 O emprego de um algoritmo em forma de fluxograma para ajudar a decidir sobre o compartilhamento de uma notícia, apresentado na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 118 e 119, do capítulo 4, tangenciando um assunto contemporâneo como as *fake news*, favorece o desenvolvimento da competência, bem como o trabalho realizado ao longo do capítulo 4, uma vez que, além de começar com uma abordagem histórica da criação do computador, traz conceitos para que os estudantes utilizem a tecnologia como ferramenta. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao propor a criação de um telejornal para conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente, contribuem para o desenvolvimento da competência.
Competência geral 6 Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, ao propiciar a discussão e a análise sobre um orçamento familiar, baseado em um planejamento financeiro, em que os estudantes são levados a pensar em atitudes que podem ser tomadas para não prejudicar o orçamento fictício do mês seguinte, bem como a refletir sobre como as suas intenções e decisões influenciam o orçamento e o planejamento financeiro de suas famílias.
Competência geral 7 Essa competência é favorecida no exemplo sobre o número de focos de incêndio, bem como na atividade proposta no boxe *Explore*, ambos na página 66, do capítulo 3, que tratam o tema contemporâneo educação ambiental. Além disso, o infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, permite um trabalho interdisciplinar com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, uma vez que propicia a discussão sobre as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros aspectos, favorecendo o desenvolvimento da competência citada. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao solicitar aos estudantes que pesquisem informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal, contribui com desenvolvimento da competência.
Competência geral 8 Essa competência é favorecida na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 36 e 37, na atividade 3, que trata o tema contemporâneo saúde, uma vez que apresenta ao aluno o procedimento de medição da pulsação.
Competência geral 9 Essa competência é favorecida em momentos em que os estudantes devem trabalhar em grupos, resolvendo conflitos, cooperando com os demais integrantes, exercitando o respeito e a empatia, como na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126.
Competência geral 10 Essa competência é desenvolvida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, ao propiciar a reflexão por parte dos estudantes sobre como suas intenções e decisões influenciam o orçamento e o planejamento financeiro de suas famílias. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, propõe a produção coletiva de um telejornal, contribuindo com o desenvolvimento da competência citada.

MODERNA

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência específica 1
O desenvolvimento dessa competência é favorecido em vários momentos desse volume, como nas páginas 23 e 24, do capítulo 1, ao empregar procedimentos matemáticos para interpretar situações relacionadas às Ciências da Natureza, bem como ao longo de todo o capítulo 2. O tópico *Funções definidas por mais de uma sentença*, nas páginas 82 a 84, do capítulo 3, leva os alunos a utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos. Além disso, o infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, uma vez que propicia a discussão sobre as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros. Essa competência também é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, ao propiciar a discussão e a análise sobre um orçamento familiar, baseado em um planejamento financeiro, em que os estudantes são levados a pensar em atitudes que podem ser tomadas para não prejudicar o orçamento fictício do mês seguinte, bem como a refletir sobre como as suas intenções e decisões influenciam o orçamento e o planejamento financeiro de suas famílias. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao solicitar aos estudantes que pesquisem informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal, contribui com desenvolvimento da competência citada.
Habilidade EM13MAT101 Alguns dos exercícios complementares das páginas 89 e 90, do capítulo 3, favorecem o desenvolvimento da habilidade, uma vez que os alunos analisarão funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica.
Habilidade EM13MAT102 A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, contribui para o desenvolvimento da habilidade ao propor a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal.
Habilidade EM13MAT103 A habilidade é favorecida nos seguintes tópicos do capítulo 1: *Sistema Internacional de Unidades*, nas páginas 20 a 28, e *Unidades da informática*, nas páginas 30 e 31, e na seção *Compreensão do texto*, nas páginas 36 e 37, que explora a parte da Metrologia que trata de unidades de medida, métodos de medição e instrumentos de medição em relação às exigências técnicas e legais obrigatórias. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, também contribui para o desenvolvimento da habilidade ao propor a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal.
Competência específica 2
A competência é desenvolvida no boxe *Explore* e no exemplo apresentado para o estudo da representação gráfica de uma função, ambos na página 66, do capítulo 3, pois abordam o assunto queimadas no Brasil e pedem aos estudantes que pesquisem a incidência em sua região de residência, causas, danos e meios para evitá-las. O infográfico sobre o compartilhamento de notícias falsas (*fake news*), nas páginas 118 e 119, do capítulo 4, corroboram com o desenvolvimento da competência ao propor o engajamento dos estudantes para investigar a veracidade das informações veiculadas antes de disseminá-las em redes sociais, por exemplo. Essa competência também é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, ao propiciar a discussão e a análise sobre um orçamento familiar, baseado em um planejamento financeiro, bem como a reflexão sobre como as intenções e decisões dos estudantes influenciam o orçamento e o planejamento financeiro de suas famílias. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao solicitar aos estudantes que pesquisem informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal, contribui com desenvolvimento da competência citada.
Habilidade EM13MAT201 A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, contribui para o desenvolvimento da habilidade ao propor a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal.
Habilidade EM13MAT203 A habilidade é promovida ao longo da seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, que leva o aluno a aplicar conceitos próprios da Matemática na execução e na análise de atitudes relacionadas a um orçamento familiar e a um planejamento financeiro, considerando situações de imprevistos.
Competência específica 3
A competência está relacionada à interpretação, à construção de modelos, à resolução e à formulação de problemas envolvendo diferentes conceitos e procedimentos matemáticos e é favorecida ao longo de todo o volume. A competência é desenvolvida no boxe *Explore* e no exemplo apresentado para o estudo da representação gráfica de uma função, ambos na página 66, do capítulo 3, pois abordam o assunto queimadas no Brasil, e pedem aos estudantes que pesquisem a incidência em sua região de residência, causas, danos e meios para evitá-las. Além disso, ao longo do capítulo 4, os tópicos *Algoritmos* e *Introdução à programação com Python* favorecem o desenvolvimento dessa competência ao apresentar diferentes registros do conceito de algoritmo, permitindo diferentes abordagens durante a modelagem e a resolução de problemas.
Habilidade EM13MAT302 O capítulo 2 apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade, que será objeto de estudo no capítulo seguinte. Assim, a habilidade é desenvolvida no tópico *Função polinomial*, na página 81, do capítulo 3.
Habilidade EM13MAT313 A habilidade é trabalhada em diversas situações ao longo do capítulo 1, como nos tópicos *Recordando o conceito de notação científica*, nas páginas 19 e 20, e *Além das unidades de SI*, nas páginas 29 a 31, e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 36 e 37, que aborda o tema da Metrologia Legal.
Habilidade EM13MAT314 A habilidade é mobilizada em diversos momentos ao longo do capítulo 1, como no tópico *Unidades derivadas do SI*, nas páginas 26 e 27, nos exercícios resolvidos e propostos da página 28, e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 36 e 37, que aborda a Metrologia Legal.

MODERNA

Habilidade EM13MAT315
A habilidade é favorecida no boxe *Pensamento computacional*, na página 17, do capítulo 1, ao propor a elaboração de um algoritmo em linguagem corrente que descreva os passos para medir um objeto qualquer com as mandíbulas do paquímetro tomando como base o exercício resolvido R1.
Essa habilidade também é promovida em diversos momentos do capítulo 4, como no infográfico que apresenta a perspectiva histórica do desenvolvimento dos computadores, nas páginas 94 e 95, e no tópico *Algoritmos*, nas páginas 96 a 105, em que o estudo sobre algoritmos e suas estruturas é aprofundado, a fim de que os alunos modelem e resolvam problemas. Além disso, o emprego de um algoritmo em forma de fluxograma para ajudar a decidir sobre o compartilhamento de uma notícia, nas páginas 118 e 119, favorece o desenvolvimento da habilidade, pois fornece instrumentos para que os alunos decidam a respeito da veracidade de uma notícia.

Competência específica 4

A competência é favorecida em vários momentos do capítulo 2, como na articulação entre os registros de representação dos conjuntos, e na representação dos números e dos intervalos.
No capítulo 3 há várias situações em que os estudantes utilizarão procedimentos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos, além de compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos como tabelas e leis de formação de funções, como no tópico *Construção do gráfico de uma função*, nas páginas 68 a 70; no exercício resolvido R10, na página 78, que aborda o estudo do sinal de uma função por meio de gráficos construídos com *software* de construção de gráficos; no tópico *Translação do gráfico de uma função*, nas páginas 79 e 80; e no tópico *Funções definidas por mais de uma sentença*, nas páginas 82 a 84.
Além disso, ao longo do capítulo 4, os tópicos *Algoritmos* e *Introdução à programação com Python* favorecem o desenvolvimento dessa competência ao apresentar diferentes registros do conceito de algoritmo, permitindo diferentes abordagens durante a modelagem e a resolução de problemas.
Essa competência também é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 120 a 123, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, tanto na interpretação de dados pesquisados quanto na partilha das informações.

Habilidade EM13MAT401
A habilidade é desenvolvida no tópico *Translação do gráfico de uma função*, nas páginas 68 a 70, e no tópico *Função polinomial*, na página 81, ambos do capítulo 3, que abordam representações algébricas e geométricas de funções polinomiais.

Habilidade EM13MAT402
A habilidade é promovida no exercício resolvido R10, na página 78, que aborda o estudo do sinal de uma função por meio de gráficos construídos com *software* de construção de gráficos; no tópico *Translação do gráfico de uma função*, nas páginas 79 e 80; e no tópico *Função polinomial*, na página 81, todos do capítulo 3, que estudam a representação gráfica de funções polinomiais.

Habilidade EM13MAT404
O capítulo 2 apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade, que será objeto de estudo no capítulo seguinte.
O tópico *Funções definidas por mais de uma sentença*, nas páginas 82 a 84, e os exercícios complementares das páginas 89 e 90, do capítulo 3, favorecem o desenvolvimento da habilidade, uma vez que os alunos analisarão funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica.

Habilidade EM13MAT405
A habilidade é desenvolvida no infográfico de abertura do capítulo 4, nas páginas 94 e 95, que apresenta a perspectiva histórica do desenvolvimento dos computadores, e no tópico *Introdução à programação com Python*, nas páginas 106 a 114, do capítulo 4, que leva os estudantes a explorar uma linguagem de programação, construindo algoritmos ao modelar e resolver problemas.

Habilidade EM13MAT407
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, contribui para o desenvolvimento da habilidade ao propor a pesquisa de informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal.

Competência específica 5

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas, como induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, como evidenciado na resolução do exercício resolvido R7, na página 51, do capítulo 2, ao demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.
Desse modo, a competência também é promovida no tópico *Construção do gráfico de uma função*, nas páginas 68 a 70, do capítulo 3.

Habilidade EM13MAT501
A habilidade é mobilizada no tópico *Construção do gráfico de uma função*, nas páginas 68 a 70, do capítulo 3, ao investigar as relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano.

MODERNA

Como as competências específicas e as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Habilidade EM13CNT103: *Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica*. O exercício proposto 18, na página 29, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, quando se utiliza o conhecimento sobre radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação na saúde e no ambiente.
Competência específica 2: *Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis*. A abertura do capítulo 2, na página 38, propicia uma discussão a respeito da história humana, considerando sua origem, diversificação e dispersão pelo planeta, favorecendo o desenvolvimento dessa competência específica.
Habilidade EM13CNT201: *Analisar e discutir modelos, teorias e leis propostos em diferentes épocas e culturas para comparar distintas explicações sobre o surgimento e a evolução da Vida, da Terra e do Universo com as teorias científicas aceitas atualmente*. A abertura do capítulo 2, na página 38, propicia uma discussão a respeito da história humana, a partir das reconstruções artísticas das principais espécies de homininéos, com base nas características morfológicas dos esqueletos encontrados, favorecendo o desenvolvimento dessa habilidade.
Habilidade EM13CNT202: *Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros)*. O tópico *Prefixos*, na página 23, do capítulo 1, ao analisar formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, e o exercício resolvido R4, nas páginas 43 e 44, do capítulo 2, ao analisar os resultados tabulados de um experimento sobre como alguns fatores de um ambiente interno (cor da sala, altura da planta em relação ao solo e ventilação) influenciavam as plantas, favorecem o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13CNT203: *Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros)*. O texto apresentado na página 24, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, uma vez que os alunos poderão analisar um esquema de liberação e transferência de prótons pela bacteriorrodopsina na fotossíntese.
Habilidade EM13CNT206: *Discutir a importância da preservação e conservação da biodiversidade, considerando parâmetros qualitativos e quantitativos, e avaliar os efeitos da ação humana e das políticas ambientais para a garantia da sustentabilidade do planeta*. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A pesquisa sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionados ao meio ambiente e a discussão sobre a importância da preservação e da conservação do meio ambiente, bem como a divulgação das pesquisas e de ações por meio de um telejornal, favorecem o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13CNT208: *Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana*. A abertura do capítulo 2, na página 38, propicia ação interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a partir das reconstruções artísticas das principais espécies de homininéos, com base nas características morfológicas dos esqueletos encontrados, de modo a valorizar e respeitar a diversidade étnica e cultural humana, favorecendo o desenvolvimento dessa habilidade.
Competência específica 3: *Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)*. As atividades da página 28, do capítulo 1, permitem a ação pedagógica interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo essa competência, pois o aluno deverá investigar situações-problema e aplicar o conhecimento científico e tecnológico, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para oferecer soluções a determinadas demandas. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao promover a discussão sobre a importância da preservação e da conservação do meio ambiente, bem como a divulgação de pesquisas e ações por meio de um telejornal, favorece o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13CNT301: *Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica*. A habilidade é favorecida no exercício resolvido R1, na página 60, do capítulo 3, em que os alunos terão oportunidade de elaborar hipóteses, previsões e estimativas, de verificar o emprego de instrumentos de medição, interpretando modelos explicativos sob uma perspectiva científica.
Habilidade EM13CNT302: *Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental*. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A discussão sobre a importância da preservação e da conservação do meio ambiente, bem como a divulgação de pesquisas e ações por meio de um telejornal, favorecem o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13CNT310: *Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica*. O infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, ao propiciar a discussão de questões como as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros, favorecem o desenvolvimento da habilidade.

MODERNA

Como as competências específicas e as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência específica 1: *Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica*. O exemplo sobre o número de focos de incêndio e a atividade proposta no boxe *Explore* sobre queimadas no Brasil, na página 66, do capítulo 3, além de tratar do tema contemporâneo educação ambiental, favorecem o desenvolvimento dessa competência ao propiciar um debate em conjunto com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas a respeito dos processos políticos, das motivações de natureza econômica e os impactos socioambientais que algumas práticas podem gerar.
Competência específica 3: *Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global*. O exemplo sobre o número de focos de incêndio e a atividade proposta no boxe *Explore* sobre queimadas no Brasil, na página 66, do capítulo 3, além de tratar do tema contemporâneo educação ambiental, favorecem o desenvolvimento dessa competência ao propiciar um debate em conjunto com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas a respeito dos processos políticos, das motivações de natureza econômica e os impactos socioambientais que algumas práticas podem gerar.
Habilidade EM13CHS301: *Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável*. O infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, ao propiciar a discussão de questões como as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros. Essas discussões favorecem o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13CHS304: *Analisar os impactos socioambientais decorrentes de práticas de instituições governamentais, de empresas e de indivíduos, discutindo as origens dessas práticas, selecionando, incorporando e promovendo aquelas que favoreçam a consciência e a ética socioambiental e o consumo responsável.* O infográfico das páginas 92 e 93, do capítulo 3, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, ao propiciar a discussão de questões como as causas das crises hídricas, os impactos que elas provocam na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes residem e os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais, a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros. Essas discussões favorecem o desenvolvimento da habilidade.

Como as competências específicas e a habilidade de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência específica 3: *Utilizar diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais) para exercer, com autonomia e colaboração, protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, de forma crítica, criativa, ética e solidária, defendendo pontos de vista que respeitem o outro e promovam os Direitos Humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, em âmbito local, regional e global*. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias. A discussão sobre a importância da preservação e da conservação do meio ambiente, culminando com a divulgação das pesquisas e de ações por meio de um telejornal, fruto de uma produção coletiva, contribuem com o desenvolvimento da competência.
Habilidade EM13LGG301: *Participar de processos de produção individual e colaborativa em diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais), levando em conta suas formas e seus funcionamentos, para produzir sentidos em diferentes contextos*. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 124 a 126, ao propor a criação de um telejornal para conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente, propicia o engajamento dos estudantes desde a pesquisa de dados e a elaboração do roteiro até a utilização de *softwares* para edição de textos, fotos, vídeos e áudios, contribuindo com o desenvolvimento da habilidade citada.
Competência específica 7: *Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva*. O infográfico apresentado na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 118 e 119, do capítulo 4, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias, ao utilizar procedimentos de checagem de fatos e fotos noticiados com o objetivo de combater a proliferação de *fake news* e ao propiciar a discussão sobre as causas e as consequências do compartilhamento de informações falsas, contribuindo com o desenvolvimento dessa competência.

MODERNA

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – Grandezas e medidas

Essa atividade pode contribuir com o desenvolvimento das competências gerais **2** e **10**, da competência específica **3** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT313** e **EM13MAT314**; da competência específica **3** e da habilidade **EM13CNT301** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

O tópico *Medindo com instrumentos* permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, podendo abordar diferentes instrumentos de medida.

O pleno entendimento e domínio do uso apropriado de equipamentos/instrumentos de medidas, assim como do significado das unidades de medidas, é fundamental para toda a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Unidade de medida faz parte da vida cotidiana de qualquer pessoa: 1 quilograma de açúcar, 1 litro de óleo, 1 apartamento de 100 m^2; tudo o que é medido necessita de uma unidade de medida, e a precisão de tal medida depende da escolha apropriada de um instrumento para realizá-la.

Essa atividade é fundamentada na aprendizagem com projetos, em que ao discente será dada uma situação-problema e a busca pela solução resultará na construção do conhecimento.

Sugere-se que a atividade seja dividida em duas etapas. A etapa 1 terá por objetivo incitar a curiosidade dos alunos em relação aos instrumentos de medição, mostrando como é importante saber usá-los para medir diferentes grandezas. Na etapa 2, os alunos serão capazes de relacionar o instrumento de medição adequado para a medição de determinada grandeza. Para as duas etapas, organize a turma em grupos de quatro ou cinco estudantes, pedindo-lhes que estejam com caderno e estojo em mãos.

Etapa 1

Sem fornecer nenhum instrumento de medição, solicite aos alunos que meçam as grandezas (largura, comprimento e espessura) de alguns objetos e espaços, como uma folha de papel, um lápis, uma bolinha de gude, a carteira, a sala de aula, um fio de cabelo etc. A ideia é que eles percebam a necessidade de utilizar, para isso, um instrumento. Incentive-os a usar a criatividade para realizar as medições, empregando medidas não convencionais, como palmo, pés ou algum objeto como referência.

Os grupos devem discutir e definir uma estratégia para que consigam fazer as medições: eles precisarão "criar" uma escala de medida. Estimule as discussões nos grupos, ressaltando a importância de ouvir o outro e respeitar diferentes opiniões. O importante nesse momento é permitir a discussão. Eles poderão utilizar o corpo (passos, palmos, polegar, por exemplo) ou objetos com dimensões definidas (caneta, lápis etc.) para criar a unidade de medida que desejarem.

Solicite aos alunos que registrem o que foi realizado por meio de um relatório científico simplificado, no qual estejam descritos como as medições foram realizadas, qual(is) unidade(s) de medida foi(foram) tomada(s) como padrão e as dificuldades encontradas.

Ao final dessa etapa, discuta com os alunos sobre como foi a realização da atividade, permitindo que contem a experiência vivenciada.

Etapa 2

Antes de iniciar a aula, peça aos alunos que se organizem nos mesmos grupos da aula anterior e disponibilize diferentes instrumentos de medição, como régua, metro, trena, paquímetro e micrômetro.

Explique-lhes que, nesse momento, eles terão acesso a alguns instrumentos de medição. Não apresente os instrumentos nem diga para quais situações cada um é mais adequado; espera-se que os alunos, por meio de tentativas, concluam isso. Forneça objetos de diferentes dimensões, como na etapa 1.

Proponha aos alunos que meçam os objetos e digam quais instrumentos são mais adequados para cada situação. Os grupos devem escolher o instrumento que possibilite cumprir o que foi solicitado. Esse é o momento propício para mediar as discussões com os grupos. Indague o motivo pelo qual determinado instrumento de medição foi selecionado e outro não.

Diante da dificuldade em medir determinadas grandezas, como a espessura de uma folha de papel ou o diâmetro de um lápis, pode-se apresentar instrumentos com os quais os alunos não estejam familiarizados, como o paquímetro e o micrômetro.

Sugira a eles que, novamente, façam um relatório da atividade.

Ao final da etapa, discutam como foi a realização das atividades. Converse sobre os instrumentos desconhecidos, como utilizá-los e em que situações eles são mais adequados. Os grupos, com ambos os relatórios em mãos, podem confeccionar um documento no qual apontam os pontos relevantes e suas conclusões sobre instrumentos e unidades de medidas.

Se houver disponibilidade, amplie a atividade, fazendo medições de massa, utilizando uma balança de precisão, ou conversando sobre medidas menores, como tamanho de células. Nesses casos, os professores de Química e de Biologia podem ajudar na atividade interdisciplinar.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Revista Superinteressante**
  <https://super.abril.com.br/blog/superlistas/conheca-a+-origem-de-11-unidades-de-medida/>
  <https://super.abril.com.br/ciencia/11-unidades-de-medida-incriveis-e-que-voce-nunca-ira-utilizar/>
- **Paquímetros e micrômetros. Aspectos elementares: Uso em um laboratório de Física básica**
  <http://macbeth.if.usp.br/~gusev/PaquimetroMicrometro.pdf>

(Acessos em: 13 ago. 2020.)

Capítulo 2 – Conjuntos

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1** e **2** e da competência específica **2** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A abertura do capítulo permite desenvolver uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, visando ao aprofundamento, por exemplo, da taxonomia de Lineu. Considerado o pai da Taxonomia, o naturalista sueco Carl von Linné desenvolveu as raízes da classificação dos seres vivos e a nomenclatura binomial no século XVIII. Mesmo tendo sofrido algumas alterações, ambas são utilizadas até os dias atuais.

Antes de propor a atividade, prepare conjuntos de botões de plástico de diferentes formatos e tamanhos. É interessante que cada conjunto tenha de 10 a 12 botões de quatro furos. Eles podem apresentar semelhanças, como a mesma cor, e tamanhos diferentes (por exemplo: dois botões brancos, um grande e um pequeno), ou podem ser totalmente diversos.

Organize os alunos em trios ou quartetos e entregue a cada grupo um conjunto com esses botões, com os quais precisarão criar toda uma taxonomia. Para isso, apresente as categorias da taxonomia de Lineu. Então, faça a seguinte apresentação:

MODERNA

"Alunos, nessa atividade vocês representarão pesquisadores que acabaram de descobrir uma nova diversidade de seres vivos. Como taxonomistas, vocês já determinaram que eles pertencem ao reino Animalia, *porém representam um novo filo, os Botonídeos. Ainda é preciso criar uma classificação de classe, ordem, família, gêneros e espécies. O desafio de vocês é analisar as características morfológicas dos 'botões' e agrupá-los de acordo com similaridades e diferenças. Sejam observadores e analisem a forma, a cor, a quantidade de furos, a textura, o tamanho e outros aspectos. Essas características serão determinantes para representar as novidades evolutivas dessas espécies novas. Não esqueçam, vocês deverão nomear todos os níveis taxonômicos com palavras no latim ou latinizadas seguindo as regras específicas para cada nível."*

Faça a mediação das primeiras impressões, das discussões e dos agrupamentos que os alunos realizarem e dê algumas orientações, se necessário. Todos os botões podem pertencer à mesma **classe** e a duas **ordens**, ou seja, na primeira etapa os alunos deverão separar os botões em dois grupos/ordens, nomeando esses dois níveis. Em seguida, darão nomes às famílias; oriente-os a utilizar a terminação obrigatória *idae* (por exemplo, *Hominidae*). Na criação dos **gêneros** e das **espécies**, aconselha-se a deixar os alunos à vontade. O *site* Glosbe, que faz conversão português-latim, pode ser sugerido a eles. Uma ideia é que os nomes dos gêneros façam referência à coloração dos botões (por exemplo: *Flavus*: amarelo; *Ruber*: vermelho; *Albus*: branco; *Niger*: preto; *Cinereus*: cinza; *Cyaneus*: azul). Já para as **espécies**, podem ser utilizados os sobrenomes dos alunos em suas formas latinizadas (exemplo: Silva: silvenses). É importante ressaltar as regras da nomenclatura binomial, escrevendo o nome das espécies grifado ou em itálico, o gênero em letra maiúscula e a espécie em letra minúscula (exemplo: *Homo sapiens*).

Após a criação da classificação e dos nomes, os alunos deverão produzir dois materiais:

A) O portfólio taxonômico das espécies de botões: pode-se tirar uma foto ou desenhar cada espécie e uma sequência em tópicos com todos os níveis criados desde o filo até a espécie. O portfólio poderá ter formatação semelhante à que existe na lateral direita do *site Wikipedia* quando se pesquisa uma espécie qualquer de ser vivo.

Foto do botão

Reino:
Filo:
Classe:
Ordem:
Família:
Gênero:
Espécie:

B) O cladograma filogenético das espécies de botões: os alunos podem montar o cladograma à mão ou utilizar algum programa como o *Microsoft PowerPoint*. Oriente a montagem de uma tabela com as espécies e as novidades evolutivas – matriz de dados – que foram determinantes para a separação de cada nível taxonômico até as espécies. Ela ajudará posteriormente na montagem do cladograma.

	Novidade evolutiva 1	Novidade evolutiva 2	Novidade evolutiva 3
Espécie 1	+	–	–
Espécie 2	+	–	+
Espécie 3	+	+	–

Na montagem final do cladograma, os grupos poderão determinar quais espécies são mais ancestrais e quais são mais recentes, criando os traços e as bifurcações dos clados e indicando a separação em ordens, famílias e gêneros. Na ponta de cada traço deverá aparecer o nome da espécie. Os alunos deverão registrar todas as novidades na montagem final do cladograma.

Realize uma discussão final, solicitando a eles a apresentação de cada portfólio e cladograma e ressaltando a importância e as dificuldades da organização sistemática do estudo da vida. Ainda, como provocação final, questione-os sobre a contribuição que as análises genéticas das últimas décadas podem trazer à taxonomia.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Dicionário de latim**
  <https://pt.glosbe.com/pt/la/>
- **Como criar um cladograma**
  <https://pt.khanacademy.org/science/biology/her/tree-of-life/a/building-an-evolutionary-tree>
  (Acessos em: 13 ago. 2020.)

Capítulo 3 – Funções

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3** e **5**, das competências específicas **3**, **4** e **5** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT302**, **EM13MAT401** e **EM13MAT404**.

Esse capítulo permite desenvolver uma atividade utilizando um *software* livre de Geometria dinâmica. A proposta é que os alunos criem desenhos a partir da composição de diferentes funções. Dessa forma, eles devem ter o conhecimento do comportamento das funções e ter noções de domínio e imagem.

Inicie a atividade retomando questões pertinentes sobre as funções, como os significados de domínio e imagem, e sua definição, suas implicações e representação gráfica. Ao utilizar o *software*, os alunos precisarão ter compreendido essas ideias para que todos os gráficos utilizados sejam de fato relacionados a uma função – o que implica a não utilização de retas verticais e circunferências, por exemplo.

Em seguida, explore os botões do *software*, permitindo que eles compreendam suas funcionalidades. Utilizando o *software*, em duplas ou trios, os alunos deverão criar um desenho, com temática livre – pode ser um objeto, um alimento, uma bandeira, uma personagem etc. –, por meio da composição de diferentes funções. Forneça papel quadriculado para que eles o utilizem como rascunho, se necessário. É possível que os alunos ainda não tenham o conhecimento de todas as funções, como as trigonométricas, mas permita que eles explorem as diferentes funções disponíveis no *software* ou mesmo que pesquisem em livros ou na internet. Dessa maneira, eles podem ampliar as possibilidades de composição nos desenhos.

Para inserir as funções no aplicativo, sugira aos alunos que as identifiquem no seguinte formato: $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ e assim por diante. Além de indicar as variáveis e as constantes de cada função, é necessário designar o domínio para que o gráfico seja exibido apenas no intervalo necessário para a construção do desenho. Para fazer isso, oriente os alunos a inserir a função na caixa de funções e, em seguida, digitar uma vírgula e o intervalo da variável, no caso do *software* GeoGebra. Por exemplo: $a(x) = 2x + 3, 0 < x < 2$.

Veja a seguir um exemplo, caso queira mostrar aos alunos como fazer as inserções das funções e a construção do desenho, que, nesse caso, será de um barco.

Funções e domínios a ser digitados:

$a(x) = 0, -2 < x < 2$
$b(x) = -2x - 4, -3 < x < -2$
$c(x) = 2x - 4, 2 < x < 3$
$d(x) = 2, -3 < x < 3$

MODERNA

$e(x) = 10x + 2, 0 < x < 0.4$
$f(x) = x/2 + 5.8, -2 < x < 0.4$
$g(x) = -x/2 + 3.8, -2 < x < 0.15$

Para que os desenhos sejam criados, sugira-lhes que tentem explorar diferentes possibilidades de constantes e variáveis, criando funções e tentando compreender o que cada mudança causa no gráfico. Para simplificar o processo, eles também podem mover as funções pelo plano – basta clicar com o botão direito sobre a função, clicar em configurações e desmarcar a opção "Fixar objeto". Depois disso, ao clicar e arrastar a função, será possível colocá-la em qualquer posição do plano. Ainda assim, eles precisarão descobrir como alterar curvaturas, aberturas e medidas, o que é possível com a liberdade de testes que o *software* permite.

Após o trabalho é interessante discutir quais foram as descobertas durante todo o desenvolvimento do desenho. Questione-os sobre os formatos dos gráficos de cada tipo de função, como as constantes alteram cada tipo de função, quais são as melhores formas de definir um domínio etc. Com essa discussão, eles podem reconhecer a periodicidade das funções trigonométricas, a relação entre o $f(x) = ax + b$ e a reta, como os parâmetros a e b interferem na posição que essa reta assume no gráfico, a impossibilidade de construir gráficos com retas verticais, entre outras descobertas que podem ser aberturas interessantes para iniciar conteúdos sobre funções específicas.

Ao final da atividade e das discussões, não deixe de incentivá-los a exibir suas composições ao restante da turma, bem como o registro das funções utilizadas. Isso pode permitir que alguns alunos reconheçam propriedades de funções que eles não tenham utilizado, bem como reconhecer similaridades entre as suas composições.

Sugestão de material de pesquisa:

- **Grafeq no processo de ensino e aprendizagem das funções afins**
  <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/66865/000871956.pdf?sequence51>
- **Concurso Global de Arte Desmos – Exemplos de desenhos criados com funções**
  <https://www.desmos.com/art>
- ***Software* GeoGebra**
  <https://www.geogebra.org/calculator>

(Acessos em: 26 ago. 2020.)

Capítulo 4 - Algoritmos e introdução à programação

Essa atividade pode contribuir com o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5**, das competências específicas **3**, **4** e **5** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT302** e **EM13LGG403**.

Esse capítulo permite desenvolver uma atividade cujo objetivo é trabalhar com as noções básicas de lógica de programação e os primeiros contatos com a linguagem de programação Python. Todo o material para essa atividade se encontra *on-line*, e não é necessária a instalação de *softwares*. Para o desenvolvimento dessa atividade é proposto o uso de um *site* chamado *Repl.it*. O *Repl.it* é uma plataforma aberta e gratuita por meio da qual qualquer pessoa pode fazer seus próprios códigos. Ela conta com mais de 50 linguagens de programação já em funcionamento e não é necessário se cadastrar. Para acessar essa plataforma, utilize o *link*: <https://repl.it/languages/python3> (acesso em: 26 ago. 2020). O objetivo da atividade é mostrar uma aplicação para o cálculo de raízes de uma equação de 2º grau.

O primeiro passo da atividade é preparar a ambientação com a aplicação que será utilizada nela (*Repl.it*). Com o *site* já aberto, apresente aos alunos as funcionalidades de cada parte. Comece pela área de desenvolvimento da escrita da programação bem ao centro, que representa a área em que toda a programação ficará escrita. Ela pode ser alterada e prontamente verificada a qualquer instante. Para isso, apresente o botão "*Run*" de cor esverdeada, que tem por função rodar a programação já escrita. Abaixo, segue um primeiro programa de cálculo de adição. Com esse programa, demonstre para os alunos o passo a passo do que está sendo executado:

```
1 print("Calculadora simples (adição)")
2 a = float(input("Digite o primeiro valor: "))
3 b = float(input("Digite o segundo valor: "))
4 Resultado = a + b
5 print("O resultado da adição é: ", Resultado)
```

Observe que a linha 1 exibe uma mensagem na tela, como o título do programa. A linha 2 recebe e armazena um valor na variável a, enquanto na linha 3 outro valor é armazenado em b. A linha 4 realiza o cálculo da adição entre a e b e armazena a soma, que é exibida na linha 5. O termo "float" se refere a como o programa trabalha com números; nesse caso, estamos trabalhando com números reais. É possível substituir o "float" por "int" para trabalhar somente com números inteiros. Ao clicar em "*Run*" para executar o programa, pode-se ler, na região à direita da tela, a seguinte sequência:

```
Calculadora simples (adição)
Digite o primeiro valor:
```

Nesse momento, o programa está parado aguardando a introdução de um primeiro valor. Esse valor será armazenado com o nome da variável "a" e utilizado posteriormente para ser somado ao segundo valor. Se, por exemplo, digitarmos "10" e pressionarmos a tecla "Enter", o programa vai executar o próximo passo, que será:

```
Calculadora simples (adição)
Digite o primeiro valor: 10
Digite o segundo valor:
```

Aqui, o programa pergunta pelo segundo valor, que será armazenado na variável de nome "b"; como exemplo, utilizaremos o número 5. Quando pressionamos a tecla "Enter" novamente, o programa calcula a soma dos dois valores digitados. O resultado será armazenado em uma variável de nome "Resultado". Porém, se não pedirmos dentro da programação para que esse resultado seja apresentado na tela, nada, visualmente falando, vai aparecer para o usuário. Portanto, necessitamos utilizar a função "print" para apresentar o resultado obtido. Esse passo justifica a última linha da nossa programação. Com isso, nossa tela final será:

```
Calculadora simples (adição)
Digite o primeiro valor: 10
Digite o segundo valor: 5
O resultado da adição é: 15.0
```

Pronto, com essa apresentação já é possível pedir aos alunos que criem sua própria calculadora simples. Fica a sugestão para instruí-los a criar uma calculadora para subtração, uma para multiplicação e uma para divisão. Reforce a importância de se utilizar "float" em vez de "int" para não resultar em erros nas programações. Caso você queira explorar melhor os conceitos de lógica com os alunos, peça que excluam o termo "float" da programação deles e rodem seus programas, mas no momento de digitar valores, solicite que digitem letras e analise com eles o resultado obtido.

Aproveite esse momento para pedir aos alunos que traduzam os termos utilizados na programação; essa ação trará uma compreensão maior sobre o significado e a aplicação de cada um dos termos utilizados, favorecendo uma ação interdisciplinar com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias.

MODERNA

Outra proposta é que os alunos façam a adição de letras, e não de números. Eles podem montar uma história, e cada aluno deverá incluir uma frase com uma ação. Por fim, a programação reúne todas as frases e monta uma história. Com isso, os professores responsáveis pelo projeto podem sugerir uma apresentação com os resultados, um sarau ou até mesmo um *slam* – que é uma competição de poesias originais e curtas. Os grupos podem ser formados por afinidades entre os alunos e, assim, cada equipe desenvolve sua própria poesia. Essa poesia pode ser projetada e lida durante a apresentação. Lembre-se de considerar um tempo para que os alunos se organizem, tomem contato com algumas poesias e comecem a desenvolver as suas. Peça a eles que salvem as programações.

O estudo de linguagens de programação é baseado no conceito visto anteriormente, ou seja, os conteúdos vão se acumulando, portanto é importante manter todo o trabalho em mãos. Nesse primeiro momento foram trabalhadas as seguintes funções: *print* – que faz o programa mostrar algo escrito no momento de sua execução; *float* – que faz o programa trabalhar com números reais; e *input* – que faz o programa receber e armazenar valores para as variáveis. Converse com os alunos sobre o que eles já conseguem desenvolver apenas com essas três funções.

Para continuar com a atividade principal, o próximo passo será aumentar a complexidade da programação a ser desenvolvida. Caso seja possível, desenvolva-a concomitantemente com os alunos. Explique cada linha de comando, enquanto a programação estiver sendo escrita.

Primeiro, deve-se abrir um novo projeto, no *Repl.it*. Basta acessar novamente a página principal ou, caso já se esteja nela, atualizá-la.

A programação a ser desenvolvida tem como objetivo calcular as raízes de uma equação de 2º grau. Para tanto, precisaremos lembrar que existem três situações de cálculo. A primeira programação envolve o cálculo do valor de delta.

Caso 1: Se delta for positivo, a equação do 2º grau possui duas raízes reais e distintas.

Caso 2: Se delta resultar em zero, a equação do 2º grau possui raízes reais e idênticas.

Caso 3: Se delta for negativo, a equação do 2º grau não possui raízes reais.

Para padronizar os nomes das variáveis, pelo menos nesse momento, vamos utilizar a seguinte configuração: $y = ax^2 + bx + c$, sendo que *a*, *b* e *c* serão os nomes das nossas variáveis dentro da programação a ser escrita, conforme indicado a seguir.

Outro ponto importante é lembrar que em algum momento precisaremos utilizar a função matemática raiz quadrada; portanto, faremos uso de uma biblioteca matemática, a ser solicitada no início da programação.

Com isso em mente, é hora de iniciar a programação.

```
1 import math
2 print("Calculadora de raízes - Equação do 2º grau")
3 a = float(input("Digite o valor da constante a: "))
4 b = float(input("Digite o valor da constante b: "))
5 c = float(input("Digite o valor da constante c: "))
6 delta = float((b * b)-(4 * a * c))
7 print("O valor de delta é: ", delta)
```

Peça aos alunos que rodem a programação e verifiquem se os resultados estão corretos. Atente-se ao uso dos parênteses e sinais para evitar erros – é aqui que normalmente eles acontecem.

Para seguir, vamos ampliar mais a nossa programação. Precisaremos incluir as condições de cálculo do delta.

```
1  import math
2  print("Calculadora de raízes - Equação do 2º grau")
3  a = float(input("Digite o valor da constante a: "))
4  b = float(input("Digite o valor da constante b: "))
5  c = float(input("Digite o valor da constante c: "))
6  delta=float((b * b)-(4 * a * c))
7  print("O valor de delta é: ", delta)
8  if (delta>0) and (a!=0):
9  | x1 = float((b * (-1)+(math.sqrt(delta)))/(2 * a))
10 | x2 = float((b * (-1)-(math.sqrt(delta)))/(2 * a))
11 | print("Uma raiz (x1) vale = ", x1)
12 | print("Outra raiz (x2) vale = ", x2)
13 elif delta==0 and a!=0:
14 | x = float((b * (-1))/(2 * a))
15 elif delta<0 and a!=0):
16 | print("DELTA < ZERO |Não existem raízes reais.")
```

Peça aos alunos que salvem seus trabalhos e iniciem os testes. Com essa ação, eles precisarão pensar nas três possibilidades, testando cada uma delas e confirmando os resultados no papel. Finalize esse momento apresentando os conceitos trabalhados na aula. As funções abordadas foram: If – "se -> então" – Condições ou comparações de resultados para realizar ou não uma certa ação, elif – "senão -> então" – Também está relacionado com condições de comparações de resultados, And – "e" – Auxilia no complemento das comparações e Import – Importar uma biblioteca para ser utilizada durante a execução da programação.

MODERNA

Note que, da maneira que a programação foi sugerida, o programa vai testar as condições, passando inicialmente pela verificação de:

- delta maior que zero e "a" sendo diferente de zero;
- delta igual a zero e "a" diferente de zero;
- delta menor que zero e "a" diferente de zero.

É importante destacar que essa sequência faz parte da lógica de programação que precisa ser trabalhada com os alunos a fim de que desenvolvam autonomia e sejam capazes de resolver futuros desafios. Invista um tempo para discutir com eles, aproveite para utilizar elementos de um organograma, o que facilita muito a montagem inicial da lógica de programação.

A proposta aqui foi a de trabalhar os primeiros passos com a linguagem de programação Python e dentro do conteúdo de Matemática. O que foi desenvolvido dentro dessa programação poderá ser completamente adaptado para o contexto que julgar mais relevante, por exemplo: após trabalhar com conceitos relacionados à equação do 2º grau, é possível explorar conceitos, como cinemática com movimento uniformemente variado; cabe apenas renomear as variáveis utilizadas e adaptar novas condições de cálculo. Também é possível propor outras equações para que seus alunos analisem e desenvolvam soluções dentro da programação. Sugira problemas contextualizados, como uma calculadora de despesas em um restaurante, incluindo a taxa de serviço.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Números inteiros e flutuantes**
  <https://www.snakify.org/pt/lessons/integer_float_numbers/>
- **Processamento analítico em Python como estratégia à integralização do Cálculo, Física e lógica**
  <http://conic-semesp.org.br/anais/files/2018/trabalho-1000000056.pdf>
- **Introdução ao Python**
  <https://def.fe.up.pt/python/python.html>

(Acessos em: 26 ago. 2020.)

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 – Grandezas e medidas

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos.	1, 2 e 3
Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.	4, 5 e 6
Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.	7
Empregar corretamente unidades da informática.	8, 9 e 10

Q1 – (Enem) A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.

NELSON MATSUDA

MODERNA

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreendido com o resultado obtido em metros. Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

a) 53
b) 94
c) 113
d) 135
e) 145

Q2– (UFRGS) Uma torneira com vazamento pinga, de maneira constante, 25 gotas de água por minuto. Se cada gota contém 0,2 mℓ de água, então, em 24 horas o vazamento será de:

a) 0,072 ℓ
b) 0,72 ℓ
c) 1,44 ℓ
d) 7,2 ℓ
e) 14,4 ℓ

Q3– (Unifor-CE) Um número expresso na notação científica é escrito como o produto de dois números reais: um deles, pertence ao intervalo [1, 10[, e o outro, uma potência de 10. Assim, por exemplo, a notação científica do número 0,000714 é $7{,}14 \cdot 10^{-4}$. De acordo com essa informação, a notação científica do número $N = \dfrac{0{,}000243 \cdot 0{,}0050}{0{,}036 \cdot 7{,}5}$ é

a) $40{,}5 \cdot 10^{-5}$
b) $4{,}5 \cdot 10^{-6}$
c) $4{,}05 \cdot 10^{-7}$
d) $45 \cdot 10^{-5}$
e) $4{,}05 \cdot 10^{-6}$

Q4– (UFMG) O Açude de Orós, no Ceará, um dos maiores reservatórios do Brasil, tem capacidade para armazenar $2 \cdot 10^9$ m³ de água. Sabe-se que o Rio Amazonas lança no Oceano Atlântico 50 milhões de litros de água por segundo. Com base nesses dados, é CORRETO afirmar que o tempo que o Rio Amazonas leva para lançar no Oceano Atlântico um volume de água igual à capacidade do Açude de Orós é

a) maior que 20 horas.
b) menor que 5 horas.
c) maior que 5 horas e menor que 10 horas.
d) maior que 10 horas e menor que 20 horas.

Q5– (Enem) A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus *influenza*. Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões. O vírus *influenza* é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm.

Disponível em: <http://www.gripenet.pt/pt/sobre-gripe/> e <http://www.gripenet.pt/pt/sobre-gripe/os-virus-da-gripe/estrutura-do-virus-influenza/>. Acessos em: 17 ago. 2020.

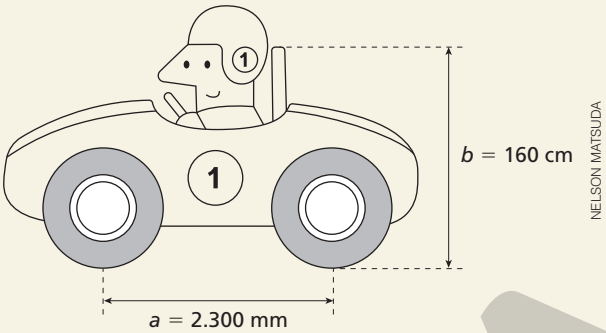
Em notação científica, o diâmetro interno do vírus *influenza*, em mm, é

a) $1{,}1 \cdot 10^{-1}$
b) $1{,}1 \cdot 10^{-2}$
c) $1{,}1 \cdot 10^{-3}$
d) $1{,}1 \cdot 10^{-4}$
e) $1{,}1 \cdot 10^{-5}$

Q6– (Enem) Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a prova dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova, com a marca de 43,18 segundos. Esse tempo, em segundo, escrito em notação científica é:

a) $0{,}4318 \cdot 10^2$
b) $4{,}318 \cdot 10^1$
c) $43{,}18 \cdot 10^0$
d) $431{,}8 \cdot 10^{-1}$
e) $4.318 \cdot 10^{-2}$

Q7– (Enem) Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros: a) distância *a* entre os eixos dianteiro e traseiro; b) altura *b* entre o solo e o encosto do piloto.



Ao optar pelas medidas *a* e *b* em metros, obtêm-se, respectivamente:

a) 0,23 e 0,16
b) 2,3 e 1,6
c) 23 e 16
d) 230 e 160
e) 2.300 e 1.600

Q8– (UFPR) Uma empresa de telefonia oferece três planos mensais de internet móvel, descritos abaixo.

– Plano Ilimitado: mensalidade fixa de R$ 100,00 que permite ao cliente utilizar quantos gigabytes (GB) de dados desejar, sem pagar nada a mais.

– Plano Intermediário: mensalidade fixa de R$ 28,00 mais R$ 4,50 por GB de dados consumidos.

– Plano Simples: não há mensalidade, porém o cliente paga R$ 12,00 por GB de dados consumidos.

Por exemplo, um consumo de 5 GB de dados em um mês custa R$ 100,00 para clientes do Plano limitado, custa R$ 28,00 + 5 × R$ 4,50 = R$ 50,50 para clientes do Plano Intermediário e custa 5 × R$ 12,00 = R$ 60,00 para clientes do Plano Simples.

a) A partir de quantos GB de dados consumidos por mês o Plano Ilimitado fica mais vantajoso, ou seja, mais barato, que o Plano Intermediário?

b) A empresa pretende criar um novo plano de dados, chamado Plano Básico. Esse plano terá formato semelhante ao do Plano Intermediário, consistindo também de uma mensalidade fixa mais um preço por GB de dados consumidos. Além disso, o Plano Básico deverá satisfazer a duas condições:

– Ter o mesmo valor que o Plano Simples para clientes que consumirem 3 GB de dados por mês.

– Ter o mesmo valor que o Plano Intermediário para clientes que consumirem 8 GB de dados por mês.

Quais devem ser o valor da mensalidade e o valor de cada GB de dados consumidos para que o Plano Básico cumpra as duas condições acima?

Q9– (UFRJ) Nei deseja salvar, em seu *pen drive* de 32 GB, os filmes que estão gravados em seu computador. Ele notou que os arquivos de seus filmes têm tamanhos que variam de 500 MB a 700 MB. *Gigabyte* (símbolo GB) é a unidade de medida de informação que equivale a 1.024 *megabytes* (MB). Determine o número máximo de filmes que Nei potencialmente pode salvar em seu *pen drive*.

MODERNA

Q10 – (UFRGS) A nave espacial Voyager, criada para estudar planetas do Sistema Solar, lançada da Terra em 1977 e ainda em movimento, possui computadores com capacidade de memória de 68 kB (*quilobytes*). Atualmente, existem pequenos aparelhos eletrônicos que possuem 8 GB (*gigabytes*) de memória.
Observe os dados do quadro a seguir.

10^n	Prefixo	Símbolo
10^{24}	iota	Y
10^{21}	zeta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	quilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da

Considerando as informações do enunciado e os dados do quadro, a melhor estimativa, entre as alternativas abaixo, para a razão da memória de um desses aparelhos eletrônicos e da memória dos computadores da Voyager, é

a) 100
b) 1.000
c) 10.000
d) 100.000
e) 1.000.000

Resoluções da avaliação 1

Q1 – Diâmetro = 443 pés
1 pé = 12 polegadas
$443 \cdot 12 = 5.316$
1 polegada = 2,54 cm
$5.316 \cdot 2{,}54$ cm = 13.502,64 cm
Diâmetro ≃ 13.502 cm
Diâmetro ≃ 135,02 m
alternativa d

Q2 – Em 24 horas há 1.440 min ($60 \cdot 24$). Como a torneira pinga 25 gotas por minuto, são 36.000 gotas no total ($25 \cdot 1.440$). Dado que cada gota tem 0,2 mℓ, serão $36.000 \cdot 0{,}2 = 7.200$, o que corresponde a 7,2 ℓ.
alternativa d

Q3 – Resolvendo a expressão, temos:

$$N = \frac{0{,}000243 \cdot 0{,}0050}{0{,}036 \cdot 7{,}5} = \frac{2{,}43 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot 7{,}5} =$$

$$= \frac{2{,}43 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{3{,}6 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-2}} = \frac{12{,}15}{27} \cdot 10^{-5} = 0{,}45 \cdot 10^{-5} = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$$

alternativa b

Q4 – $2 \cdot 10^9$ m³ $= 2 \cdot 10^{12}$ ℓ

$$\frac{2 \cdot 10^{12}}{50 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^4$$

$4 \cdot 10^4$ s ≃ 11,1 h
alternativa d

Q5 – Em notação científica, o diâmetro interno do vírus *influenza* (0,00011mm) é $1{,}1 \cdot 10^{-4}$ mm.
alternativa d

Q6 – $43{,}18 = \frac{43{,}18}{10} \cdot 10 = 4{,}318 \cdot 10^1$
alternativa b

Q7 – a = 2.300 mm = 230 cm = 23 dm = 2,3 m
b = 160 cm = 16 dm = 1,6 m
alternativa b

Q8 – a) Sendo x o número de GB consumidos, pode-se escrever:
$100 < 28 + 4{,}5x \Rightarrow 72 < 4{,}5x \Rightarrow x > 16$
Logo, se forem consumidos mais de 16 GB, o Plano Ilimitado seria mais vantajoso.

b) 3 GB: $V_{Simples} = 12 \cdot 3 = 36$
8 GB: $V_{Intermediário} = 28 + 4{,}5 \cdot 3 = 64$
Plano Simples: $y = ax + b$

$$\begin{cases} 36 = 3a + b \\ 64 = 8a + b \end{cases} \Rightarrow a = 5{,}6 \text{ e } b = 19{,}2$$

Logo, a mensalidade do Plano Simples deverá ser igual a R$ 19,20 e o custo por GB, igual a R$ 5,60.

Q9 – Seja x o número de filmes que Nei pode salvar em seu *pen drive*. A capacidade máxima, em MB, é $32 \cdot 1.024 = 32.768$.
O valor de x será máximo quando todos os filmes tiverem o tamanho mínimo (500 MB). Assim:

$$x \leqslant \frac{32.768}{500} = 65{,}536$$

Portanto, o número máximo de filmes é 65.

Q10 – A razão entre a memória de um pequeno aparelho e a memória de um dos computadores da Voyager é

$$\frac{8 \cdot 10^9}{68 \cdot 10^3} \simeq 117{,}647$$

alternativa d

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos.	1 e 2
Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.	3, 4, 5, 6 e 7
Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.	8 e 9
Empregar corretamente unidades da informática.	10

Q1 – (Enem) Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota-d'agua tem volume de 0,2 mℓ. Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

a) 0,2
b) 1,2
c) 1,4
d) 12,9
e) 64,8

Q2 – (Enem) Um *show* especial de Natal teve 45.000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o *show*, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao *show* e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados. Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

a) 1 hora.
b) 1 hora e 15 minutos.
c) 5 horas.
d) 6 horas.
e) 6 horas e 15 minutos.

MODERNA

Q3– (Enem) As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012 e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012.

Disponível em: <https://www.noticiasagricolas.com.br/noticias/soja/109011-soja-exportacoes-brasileiras-de-grao-e-farelo-registram-alta-no-ano.html#.X0_j-GdKiMJ> Acesso em: 13 ago. 2020.

A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de

a) $4{,}129 \times 10^3$
b) $4{,}129 \times 10^6$
c) $4{,}129 \times 10^9$
d) $4{,}129 \times 10^{12}$
e) $4{,}129 \times 10^{15}$

Q4– (IFSP) Leia as notícias:

"A NGC 4151 está localizada a cerca de 43 milhões de anos-luz da Terra e se enquadra entre as galáxias jovens que possui um buraco negro em intensa atividade. Mas ela não é só lembrada por esses quesitos. A NGC 4151 é conhecida por astrônomos como o 'olho de Sauron', uma referência ao vilão do filme 'O Senhor dos Anéis'."

Disponível em: <https://m.folha.uol.com.br/ciencia/2011/03/887260-galaxia-herda-nome-de-vilao-do-filme-o-senhor-dos-aneis.shtml?origin=folha>. Acesso em: 13 ago. 2020.

"Cientistas britânicos conseguiram fazer com que um microscópio ótico conseguisse enxergar objetos de cerca de 0,00000005 m, oferecendo um olhar inédito sobre o mundo 'nanoscópico'."

Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2011/03/110302_microscopio_potente_pu>. Acesso em: 13 ago. 2020.

Assinale a alternativa que representa os números em destaque no texto, escritos em notação científica.

a) $4{,}3 \cdot 10^7$ e $5{,}0 \cdot 10^8$
b) $4{,}3 \cdot 10^7$ e $5{,}0 \cdot 10^{-8}$
c) $4{,}3 \cdot 10^{-7}$ e $5{,}0 \cdot 10^8$
d) $4{,}3 \cdot 10^6$ e $5{,}0 \cdot 10^7$
e) $4{,}3 \cdot 10^{-6}$ e $5{,}0 \cdot 10^{-7}$

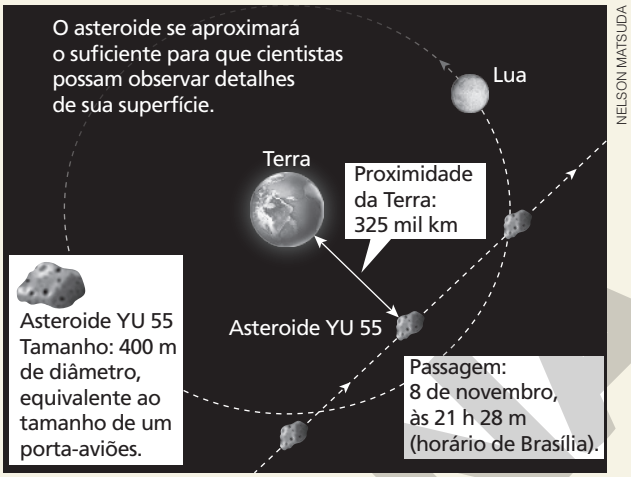
Q5– (Enem) Medir distâncias sempre foi uma necessidade da humanidade. Ao longo do tempo fez-se necessária a criação de unidades de medidas que pudessem representar tais distâncias, como, por exemplo, o metro. Uma unidade de comprimento pouco conhecida é a Unidade Astronômica (UA), utilizada para descrever, por exemplo, distâncias entre corpos celestes. Por definição, equivale à distância entre a Terra e o Sol, que em notação científica é dada por $1{,}496 \times 10^2$ milhões de quilômetros. Na mesma forma de representação, 1 UA, em metro, equivale a

a) $1{,}496 \cdot 10^5$ m
b) $1{,}496 \cdot 10^6$ m
c) $1{,}496 \cdot 10^8$ m
d) $1{,}496 \cdot 10^{10}$ m
e) $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

Q6– (Cefet-SP) "Já falei um bilhão de vezes para você não fazer isso..." Qual filho nunca ouviu esta frase de seu pai? Suponhamos que o pai corrija seu filho 80 vezes ao dia. Quantos dias ele levará para corrigi-lo um bilhão de vezes?

a) $1{,}25 \cdot 10^5$
b) $1{,}25 \cdot 10^6$
c) $1{,}25 \cdot 10^7$
d) $1{,}25 \cdot 10^8$
e) $1{,}25 \cdot 10^9$

Q7– (Enem) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



NELSON MATSUDA

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a

a) $3{,}25 \cdot 10^2$ km
b) $3{,}25 \cdot 10^3$ km
c) $3{,}25 \cdot 10^4$ km
d) $3{,}25 \cdot 10^5$ km
e) $3{,}25 \cdot 10^6$ km

Q8– (UFG) No conto "A viagem de dez léguas", escrito por José J. Veiga, o Senhor Olímpio faz uma viagem de dez léguas acompanhado do seu único filho. A légua foi uma das diversas unidades de medida de comprimento, utilizadas no Brasil e em Portugal, antes da adoção do Sistema Internacional de Medidas. Durante o decorrer da história, existiram várias definições para léguas; entre elas, destacam-se duas:

– Légua terrestre antiga: equivale a 240.000 polegadas.
– Légua caipira: equivale à distância percorrida por uma pessoa a pé, durante uma hora.

Considerando que 1 polegada equivale a 2,75 cm e que a velocidade média da caminhada de uma pessoa é de 6 km/h, calcule a distância percorrida pelo Senhor Olímpio, em quilômetros, nessa viagem, considerando as léguas terrestres antigas e as léguas caipiras e, em seguida, determine a diferença entre essas distâncias.

Q9– (Enem) O Sistema Métrico Decimal é o mais utilizado atualmente para medir comprimentos e distâncias. Em algumas atividades, porém, é possível observar a utilização de diferentes unidades de medida. Um exemplo disso pode ser observado no quadro.

Unidade	Equivalência
Polegada	2,4 centímetros
Jarda	3 pés
Jarda	0,9144 metro

Assim, um pé, em polegada, equivale a

a) 0,1200
b) 0,3048
c) 1,0800
d) 12,000
e) 36,000

MODERNA

Q10– (Enem) Os computadores operam com dados em formato binário (com dois valores possíveis apenas para cada dígito), utilizando potências de 2 para representar quantidades. Assim, tem-se, por exemplo: 1 kB = 2^{10} *Bytes*, 1 MB = 2^{10} kB e 1 GB = 2^{10} MB, sendo que 2^{10} = 1.024. Nesse caso, tem-se que kB significa *quilobyte*, MB significa *megabyte* e GB significa *gigabyte*. Entretanto, a maioria dos fabricantes de discos rígidos, pendrives ou similares adotam preferencialmente o significado usual desses prefixos, em base 10. Assim, nos produtos desses fabricantes, 1GB = 10^3 MB = 10^6 kB = 10^9 *bytes*. Como a maioria dos programas de computadores utilizam as unidades baseadas em potências de 2, um disco informado pelo fabricante como sendo de 80 GB aparecerá aos usuários como possuindo, aproximadamente, 75 GB.
Um disco rígido está sendo vendido como possuindo 500 *gigabytes*, considerando unidades em potências de 10. Qual dos valores está mais próximo do valor informado por um programa que utilize medidas baseadas em potências de 2?

a) 468 GB
b) 476 GB
c) 488 GB
d) 500 GB
e) 533 GB

Resoluções da avaliação 2

Q1– Calculamos o número de gotas, das 0 h às 6 h, sabendo que a frequência é de 1 gota a cada 3 s:
$\frac{6 \cdot 60 \cdot 60}{3} = \frac{21.600}{3} = 7.200$
Como cada gota tem 0,2 mℓ de volume, o volume total é dado por: 7.200 · 0,2 = 1.440, que em litros corresponde a 1,4.
alternativa c

Q2– O número de catracas é 5 · 4 = 20.
O número de pessoas que devem passar em cada catraca é 45.000 : 20 = 2.250.
O tempo mínimo para que todos passem pelos portões de entrada é dado por: 2.250 · 2 = 4.500 s = 75 min = 1 h 15 min
alternativa b

Q3– Em potências de 10, temos:
1 tonelada = 10^3 kg
1 milhão de tonelada = $10^6 \cdot 10^3$ kg = 10^9 kg
Assim, 4,129 milhões de toneladas equivalem a $4{,}129 \cdot 10^9$ kg.
alternativa c

Q4– 43 milhões: $43 \cdot 10^6 = 4{,}3 \cdot 10^7$
$0{,}00000005 = 5 \cdot 10^{-8}$
alternativa b

Q5– Como 1 km = 10^3 m, temos:
$1{,}496 \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 1{,}496 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^3 = 1{,}496 \cdot 10^{11}$
alternativa e

Q6– 1 bilhão = 10^9
$\frac{10^9}{80} = 1{,}25 \cdot 10^7$
alternativa c

Q7– A distância de 325 mil quilômetros é a menor distância que o asteroide passou da superfície da Terra.
325.000 km = $3{,}25 \cdot 10^5$ km
alternativa d

Q8– 10 · 240.000 · 2,75 = 6.600.000
Considerando as léguas terrestres antigas, o Senhor Olímpio percorreu 66 quilômetros.
10 · 6 = 60
Considerando as léguas caipiras, o Senhor Olímpio percorreu 60 quilômetros.
Portanto, a diferença entre essas distâncias é 6 km.

Q9– Sabendo que:
1 jarda = 3 pés
1 jarda = 0,9144 metro
Temos que:
3 pés = 0,9144 m = 91,44 cm
1 pé = $\frac{91{,}44 \text{ cm}}{3}$ = 30,48 cm
Como 1 polegada é igual a 2,54 cm, temos:
$\frac{30{,}48}{2{,}54} = 12$
alternativa d

Q10– A capacidade será $500 \cdot \frac{75}{80} = 468{,}75$
Portanto, o valor mais próximo é 468 GB.
alternativa a

Capítulo 2 – Conjuntos

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.	1
Descrever conjuntos.	2
Efetuar operações com conjuntos.	3 e 4
Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.	5 e 6
Identificar os conjuntos numéricos.	7 e 8
Representar e operar com intervalos reais.	9 e 10

Q1– Dados dois conjuntos, A e B, em que $A \cap B = \{b, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ e $B - A = \{a\}$. O conjunto B é igual a

a) {a}
b) {c, e}
c) {a, b, d}
d) {b, c, d, e}
e) {a, b, c, d, e}

Q2– Considere o conjunto A formado pelos nomes dos países da América do Sul.

a) Enumere todos os elementos de A.
b) Escreva o conjunto B, formado por todos os elementos de A que se iniciam pela letra B.

Q3– (IFCE) Sobre os conjuntos finitos e não vazios A e B, são feitas as seguintes afirmativas:

I) $A \cup B$ tem mais elementos que A.
II) $A \cap B$ tem menos elementos que A.
III) $A - B$ tem menos elementos que A.

Dentre as afirmativas acima, é(são) necessariamente verdadeira(s)

a) apenas I e III.
b) nenhuma delas.
c) apenas I e II.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

MODERNA

Q4– (Fuvest) Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe se que:

I) 14 não obtiveram nota mínima em matemática;
II) 16 não obtiveram nota mínima em português;
III) 12 não obtiveram nota mínima em inglês;
IV) 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;
V) 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;
VI) 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e
VII) 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

a) 44
b) 46
c) 47
d) 48
e) 49

Q5– Considere os conjuntos:

- $A = \{x \mid x$ é número natural par$\}$
- $B = \{x \mid x$ é primo$\}$
- $C = \{x \mid x$ é número natural múltiplo de 3$\}$

a) Quantos elementos tem a intersecção de A e B?
b) Quantos elementos tem a intersecção de B e C?

Q6– (IFPE) Em uma pesquisa de opinião acerca dos processos de geração de energia e seus impactos na natureza, foi constatado que:

- 40 entrevistados aprovam o uso da energia nuclear;
- 180 entrevistados aprovam o uso da energia eólica;
- 150 entrevistados aprovam o uso da energia solar;
- 15 entrevistados aprovam a utilização das energias eólica e nuclear;
- 10 entrevistados aprovam a utilização das energias nuclear e solar;
- 50 entrevistados aprovam a utilização das energias eólica e solar;
- 5 entrevistados aprovam a utilização das energias nuclear, eólica e solar;
- 30 entrevistados não aprovam o uso de nenhum desses três mecanismos de geração de energia.

Determine o total de pessoas entrevistadas.

a) 280
b) 370
c) 480
d) 220
e) 330

Q7– (ITA) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy: x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

Q8– Sejam a e b dois números reais quaisquer. Verifique em que condições os números abaixo são reais.

a) $a - b$
b) $\dfrac{a}{b}$
c) $\sqrt{b}$
d) $a^2 + b^2$
e) $\dfrac{\sqrt{5 - a}}{b}$
f) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{-3 - b}}$

Q9– (IFSUL) Três irmãos trabalham na mesma indústria, porém em turnos diferentes: um trabalha no intervalo das 8 h às 16 h; outro das 4 h às 12 h e o terceiro das 10 h às 18 h. Em qual intervalo de tempo esses irmãos trabalham juntos nessa indústria?

a) Das 4 h às 18 h.
b) Das 8 h às 16 h.
c) Das 10 h às 16 h.
d) Das 10 h às 12 h.

Q10– (UEG) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, a intersecção entre eles é dada pelo conjunto

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$

Resoluções da avaliação 1

Q1– $A \cap B = \{b, d\}$
$B - A = \{a\}$
Logo, $B = \{a, b, d\}$
alternativa c

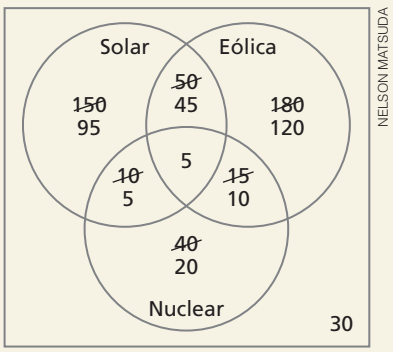
Q2– **a)** A = {Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Equador, Guiana, Paraguai, Peru, Suriname, Uruguai, Venezuela}
b) B = {Brasil, Bolívia}

Q3– **I)** Falsa, pois $A \cup B$ terá o mesmo número de elementos de A se B estiver contido em A.
II) Falsa, pois isso acontecerá se A estiver contido em B.
III) Falsa, pois $A - B$ terá o mesmo número de elementos de A, se A e B forem disjuntos.
Portanto, nenhuma delas é verdadeira.
alternativa b

Q4– Sendo M, P e I os conjuntos dos candidatos que não obtiveram nota mínima em matemática, português e inglês, respectivamente, temos:
$n(M \cup P \cup I) = 14 + 16 + 12 - 5 - 3 - 7 + 2 = 29$
Como 20 candidatos obtiveram nota mínima nas três disciplinas, temos $29 + 20 = 49$ participantes no concurso.
alternativa e

Q5– **a)** $A \cap B = \{2\}$; logo, tem um elemento.
b) $B \cap C = \{3\}$; logo, tem um elemento.

Q6–



NELSON MATSUDA

Total de entrevistados: $95 + 45 + 120 + 5 + 5 + 10 + 20 + 30 = 330$
alternativa e

MODERNA

Q7– Organizando os dados em uma tabela, identificamos os 14 elementos do conjunto C:

	−1	−2	−3	−4	−5
1	−1	−2	−3	−4	−5
2	~~−2~~	~~−4~~	−6	−8	−10
3	~~−3~~	~~−6~~	−9	−12	−15
4	~~−4~~	~~−8~~	~~−12~~	−16	−20
5	~~−5~~	~~−10~~	~~−15~~	~~−20~~	−25

alternativa e

Q8– **a)** $a - b$ é real para quaisquer a e b reais.

b) $\frac{a}{b}$ é real para quaisquer a e b, com $b \neq 0$.

c) O número $\sqrt{b}$ é real para qualquer $b \geqslant 0$.

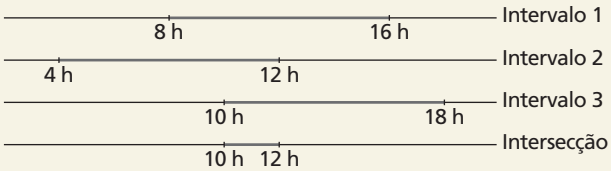
d) O número $a^2 + b^2$ é real para quaisquer a e b reais.

e) Nesse caso, $a \leqslant 5$ e $b \neq 0$.

f) Nesse caso, $a \geqslant 0$ e $b \neq -3$.

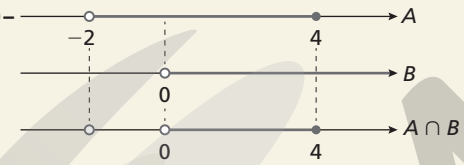
Q9– Para obter em qual intervalo de tempo os três irmãos trabalham juntos, deve-se fazer a intersecção dos três intervalos de tempo:

$[8, 16] \cap [4, 12] \cap [10, 18] = [10, 12]$



alternativa d

Q10–



alternativa a

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.	1
Descrever conjuntos.	2
Efetuar operações com conjuntos.	3
Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.	4, 5 e 6
Identificar os conjuntos numéricos.	7
Representar e operar com intervalos reais.	8, 9 e 10

Q1– (Uece) Em um grupo de 200 estudantes, 98 são mulheres das quais apenas 60 não estudam comunicação. Se do total de estudantes do grupo somente 60 estudam comunicação, o número de homens que não estudam esta disciplina é

a) 60 **c)** 85
b) 80 **d)** 75

Q2– Chama-se número palíndromo aquele que tem a mesma leitura da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda (por exemplo, o número 4.114). Sabendo disso, considere o conjunto A, formado por todos os números palíndromos que contêm três algarismos.

a) Escreva o subconjunto B, formado pelos elementos de A menores que 200.

b) Quantos são os elementos de B?

c) Quantos são os elementos de A?

Q3– (USJT) Dados três conjuntos A, B e C, não vazios, com $A \subset B$ e $A \subset C$, então, é sempre CORRETO afirmar que

a) $B = C$ **c)** $B \subset C$
b) $A \subset (B \cap C)$ **d)** $A = (B \cap C)$

Q4– (Unicamp) Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas. Podemos afirmar corretamente que, nesse grupo,

a) pelo menos uma pessoa leu os dois livros.

b) nenhuma pessoa leu os dois livros.

c) pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.

d) todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

Q5– Considere os seguintes conjuntos:

- $U = \{x \mid x$ é um número primo$\}$
- $A = \{x \mid x \in U$ e x é par$\}$
- $B = \{x \mid x \in U$ e x é múltiplo de 2 e de 3$\}$

Qual deles é vazio e qual é unitário?

Q6– Em uma pesquisa sobre a preferência para o consumo de dois produtos, foram entrevistadas 970 pessoas. Dessas, 525 afirmaram consumir o produto A, 250 o produto B e 319 não consomem nenhum desses produtos. O número de pessoas que consomem os dois produtos é

a) 124 **b)** 250 **c)** 525 **d)** 527 **e)** 775

Q7– (PUC) Considere os conjuntos:

$\mathbb{N}$, dos números naturais,
$\mathbb{Q}$, dos números racionais,
$\mathbb{Q}_+$, dos números racionais não negativos,
$\mathbb{R}$, dos números reais.

O número que expressa

a) a quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de $\mathbb{Q}_+$, mas não de $\mathbb{N}$.

b) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de $\mathbb{N}$.

c) a velocidade média de um veículo é um elemento de $\mathbb{Q}$, mas não de $\mathbb{Q}_+$.

d) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de $\mathbb{Q}_+$.

e) a medida do lado de um triângulo é um elemento de $\mathbb{Q}$.

Q8– (UFV) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 6\}$. Então $A \cap B$ é:

a) $\{2, 3, 4\}$ **d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ **e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

Q9– Dados os intervalos $A =]-\infty, 3]$, $B = [-2, 1[$ e $C = [0, +\infty[$, determine:

a) $A \cup B$ **b)** $B \cap C$

Q10– (IFCE) Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, considere

$$A = \left\{x \in \mathbb{R};\ x > \frac{5}{8}\right\},$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R};\ x < \frac{2}{3}\right\} \text{ e}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}.$$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

O conjunto $(A \cup C) \cap B$ é

a) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant \frac{2}{3}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \geqslant \frac{5}{8}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x < \frac{2}{3}\right\}$

Resoluções da avaliação 2

Q1– Mulheres que estudam comunicação: $98 - 60 = 38$
Homens que estudam comunicação: $60 - 38 = 22$
Assim, o total de homens que não estudam comunicação é $200 - 98 - 22 = 80$.
alternativa b

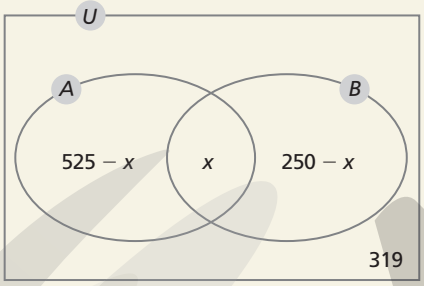
Q2– **a)** $B = \{101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191\}$
b) 10 elementos
c) Há 10 elementos menores que 200; entre 200 e 300, também há 10; e assim por diante. Total: 90 elementos.

Q3– Se $x \in A$ e $A \subset B$ e $A \subset C \Rightarrow x \in B$ e $x \in C \Rightarrow x \in (B \cap C) \Rightarrow$
$\Rightarrow A \subset (B \cap C)$.
alternativa b

Q4– Se 5 pessoas leram o livro A e 4 pessoas distintas leram o livro B, há um total de 9 pessoas, sendo possível que ao menos uma pessoa não tenha lido nenhum dos livros.
alternativa c

Q5– O conjunto A é unitário, pois $A = \{2\}$. O conjunto B é vazio, pois nenhum número primo é múltiplo de 2 e de 3 simultaneamente.

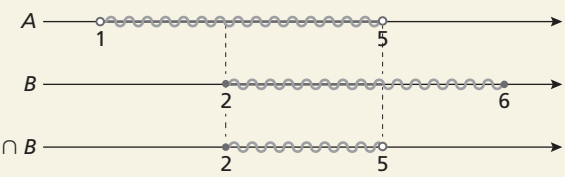
Q6– Organizando os dados, temos:



$525 - x + x + 250 - x + 319 = 970 \Rightarrow x = 124$
alternativa a

Q7– **a)** A quantidade de habitantes de uma cidade é um número natural.
b) A medida da altura de uma pessoa não é um número natural.
c) A velocidade média de um veículo é um número do conjunto dos racionais positivos.
d) O valor pago, em reais, por um sorvete é um número do conjunto dos racionais positivos.
e) A medida do lado de um triângulo pode ser um número real.
alternativa d

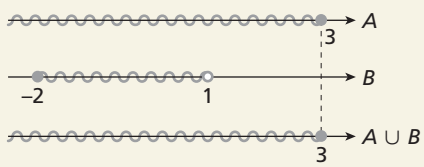
Q8–



alternativa e

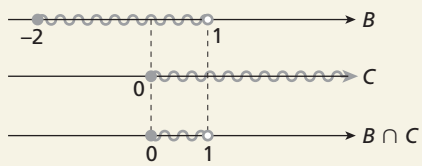
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Q9– **a)**



$A \cup B =]-\infty, 3]$

b)



$B \cap C = [0, 1[$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Q10– $A \cup C = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

$(A \cup C) \cap B = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{5}{8} \leqslant x < \frac{2}{3}\right\}$

alternativa e

Capítulo 3 - Funções

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar uma função.	1 e 2
Analisar e construir o gráfico de uma função.	3, 4, 5, 6 e 7
Resolver situações-problema que envolvam funções.	8
Obter a função inversa de funções dadas.	9 e 10

Q1– Cada unidade de determinado sorvete de palito custa R$ 3,50. Como o sorvete costuma ser muito procurado, o sorveteiro resolveu fazer um quadro com o valor a pagar dependendo da quantidade vendida.

Quantidade de sorvetes	Valor a pagar (R$)
1	3,50
2	7,00
3	10,50
4	14,00
5	17,50
6	21,00

a) Quanto alguém pagará se comprar 10 desses sorvetes?
b) Um senhor comprou sorvetes para ele e para seus netos. Se ele pagou R$ 45,50, quantos sorvetes comprou?
c) Qual é o valor a pagar por uma compra de n sorvetes?

Q2– Considere a função f, cuja lei de formação é dada por:
$f(x) = \frac{3x + 1}{2}$

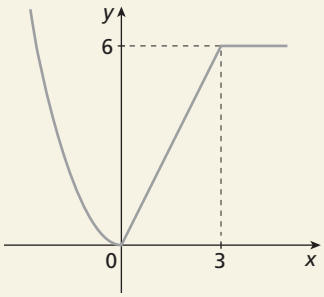
a) Escreva o domínio e o contradomínio dessa função.
b) Determine a imagem de x para:
- $x = -2$
- $x = 0$
- $x = 1$

MODERNA

Q3– Construa o gráfico da função f: $A \to B$ dada pela lei $f(x) = -x + 4$, em que $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Q4– Observe a lei de formação e o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para responder às questões.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leqslant 0 \\ 2x, \text{ se } 0 < x \leqslant 3 \\ 6, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

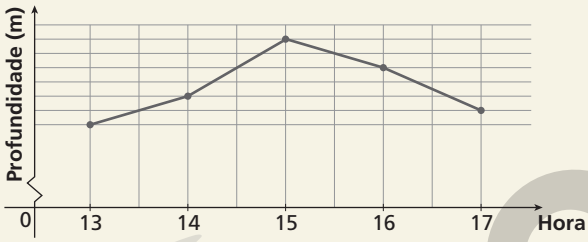


ADILSON SECCO

a) Qual é o conjunto imagem de f?
b) Para quais valores de x a função é constante?
c) Em quais intervalos do domínio a função f é decrescente?
d) Quantos zeros reais tem a função f?

Q5– (Enem) Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 h. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.

Registro de profundidade

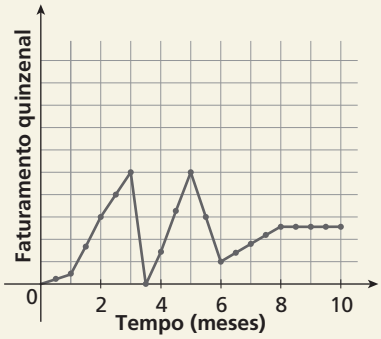


Foi informado que, entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%. Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

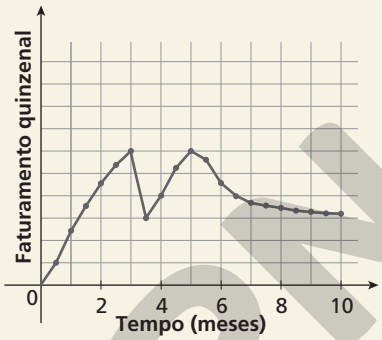
a) 18
b) 20
c) 24
d) 36
e) 40

Q6– (Fuvest) Um dono de restaurante assim descreveu a evolução do faturamento quinzenal de seu negócio, ao longo dos dez primeiros meses após a inauguração: "Até o final dos três primeiros meses, tivemos uma velocidade de crescimento mais ou menos constante, quando então sofremos uma queda abrupta, com o faturamento caindo à metade do que tinha sido atingido. Em seguida, voltamos a crescer, igualando, um mês e meio depois dessa queda, o faturamento obtido ao final do terceiro mês. Agora, ao final do décimo mês, estamos estabilizando o faturamento em um patamar 50% acima do faturamento obtido ao final do terceiro mês". Considerando que, na ordenada, o faturamento quinzenal está representado em unidades desconhecidas, porém uniformemente espaçadas, qual dos gráficos é compatível com a descrição do comerciante?

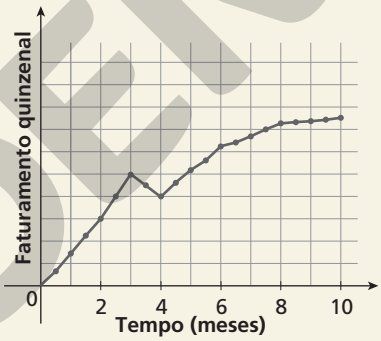
a)



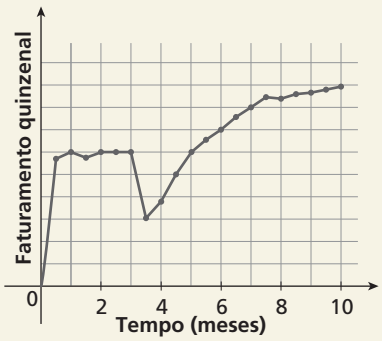
b)



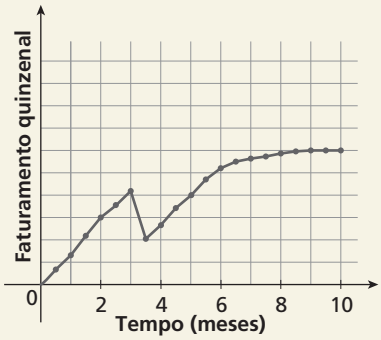
c)



d)



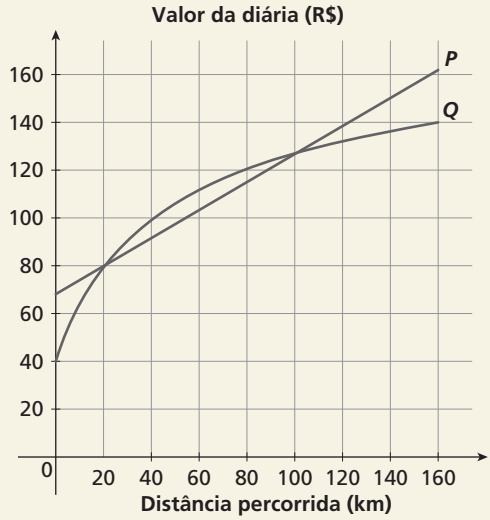
e)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q7– (Enem) Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis. Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.



NELSON MATSUDA

O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

a) De 20 a 100.
b) De 80 a 130.
c) De 100 a 160.
d) De 0 a 20 e de 100 a 160.
e) De 40 a 80 e de 130 a 160.

Q8– (UFRGS) Considere as seguintes afirmações sobre quaisquer funções f reais de variável real.

I) Se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então $f(x) > 0$.
II) Se $f(x) = 0$, então x é zero da função $f(x)$.
III) Se x_1 e x_2 são números reais, com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e II.
e) I, II e III.

Q9– (UFPR) Responda às seguintes perguntas a respeito da função $g(x) = \dfrac{3x - 4}{1 - 4x}$:

a) Qual é o domínio de g?
b) Qual é a inversa de g?

Q10– (EEAR) Sabe-se que a função $f(x) = \dfrac{x + 3}{5}$ é invertível. Assim, $f^{-1}(3)$ é

a) 3
b) 4
c) 6
d) 12

Resoluções da avaliação 1

Q1– a) $10 \cdot 3{,}50 = 35$
Logo, a pessoa pagará R$ 35,00 por 10 sorvetes.

b) $45{,}50 \div 3{,}50 = 13$
O senhor comprou 13 sorvetes.

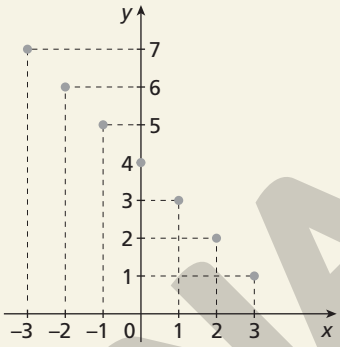
c) Representando o valor pago por v e a quantidade de sorvetes por n, temos $v = 3{,}5n$.

Q2– a) $D(f) = \mathbb{R}$; $CD(f) = \mathbb{R}$

b)
- $f(-2) = \dfrac{3 \cdot (-2) + 1}{2} = \dfrac{-5}{2}$
- $f(0) = \dfrac{3 \cdot 0 + 1}{2} = \dfrac{1}{2}$
- $f(1) = \dfrac{3 \cdot 1 + 1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Q3–

x	$f(x)$
−3	7
−2	6
−1	5
0	4
1	3
2	2
3	1



ADILSON SECCO

Q4– a) $Im(f) = [0, +\infty[$
b) A função é constante para $x > 3$.
c) A função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$.
d) A função f tem apenas um zero real.

Q5– Entre 15 h e 16 h, a profundidade diminuiu 2 m, que representa 10% da profundidade às 15 h. Assim, pode-se inferir que a profundidade às 15 h era de 20 m ($20 \cdot 10\% = 2$) e às 16 h era de 18 m.
alternativa a

Q6– Os únicos gráficos que apresentam faturamento 50% acima do verificado ao final do terceiro mês são os gráficos *c*, *d* e *e*. Destes, os que apresentam faturamento no mês igual à metade do verificado ao final do terceiro mês são os gráficos *d* e *e*. Por fim, o único que mais se aproxima de um segmento de reta no terceiro mês é o *e*.
alternativa e

Q7– Observando os intervalos em que o gráfico da função *Q* está abaixo do gráfico da função *P*, a resposta é de 0 a 20 e de 100 a 160.
alternativa d

Q8– I. Falsa, pois a função pode ser constante e igual a zero, por exemplo.
II. Verdadeira, pois o zero de uma função é o valor de x para o qual a função se anula.
III. Falsa, pois nem sempre acontece, depende das funções.
alternativa b

Q9– a) A função g será definida quando:
$1 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{1}{4}$
Portanto, o domínio da função é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{1}{4}\right\}$

b) Para definir a função inversa, substituímos $g(x)$ por x e x por $g^{-1}(x)$ e obtemos:

$$x = \frac{3 \cdot g^{-1}(x) - 4}{1 - 4 \cdot g^{-1}(x)} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x + 4}{3 + 4x}$$

Q10– Se f possui inversa, então, vamos calcular x tal que $f(x) = 3$, ou seja: $\dfrac{x + 3}{5} = 3 \rightarrow x = 12$.
alternativa d

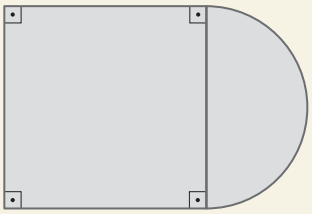
MODERNA

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar uma função.	1 e 2
Analisar e construir o gráfico de uma função.	3, 4, 5, 6 e 7
Resolver situações-problema que envolvam funções.	8
Obter a função inversa de funções dadas.	9 e 10

Q1 – Considere uma figura geométrica que pode ter sua área decomposta em um quadrado e um semicírculo, como a indicada a seguir.

ADILSON SECCO

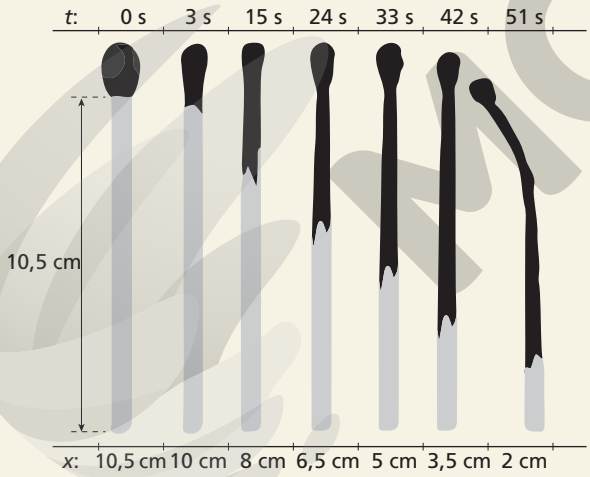


a) Qual é a área da figura, se o lado do quadrado mede 5 cm?
b) E se o lado do quadrado medir 3 cm?
c) Considerando o lado do quadrado com uma medida x qualquer, escreva uma fórmula que determine a área dessa figura em função de x.

$\left(\textit{Dica}: A_{\text{semicírculo}} = \dfrac{\pi r^2}{2}\text{, em que } r \text{ é o raio do semicírculo.}\right)$

Q2 – (Unesp) Em um experimento com sete palitos de fósforo idênticos, seis foram acesos nas mesmas condições e ao mesmo tempo. A chama de cada palito foi apagada depois de t segundos e, em seguida, anotou-se o comprimento x, em centímetros, de madeira não chamuscada em cada palito. A figura a seguir indica os resultados do experimento.

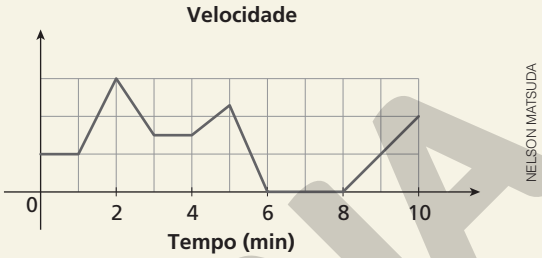
NELSON MATSUDA



Um modelo matemático consistente com todos os dados obtidos no experimento permite prever que o tempo, necessário e suficiente, para chamuscar totalmente um palito de fósforo idêntico aos que foram usados no experimento é de
a) 1 minuto e 2 segundos.
b) 1 minuto.
c) 1 minuto e 3 segundos.
d) 1 minuto e 1 segundo.
e) 1 minuto e 4 segundos.

Q3 – Determine, quando possível, os zeros reais de cada uma das funções abaixo.
a) $f(x) = 2x^2 + x - 6$
b) $g(x) = x^2 + 4$
c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$
d) $i(x) = 3x + 4$

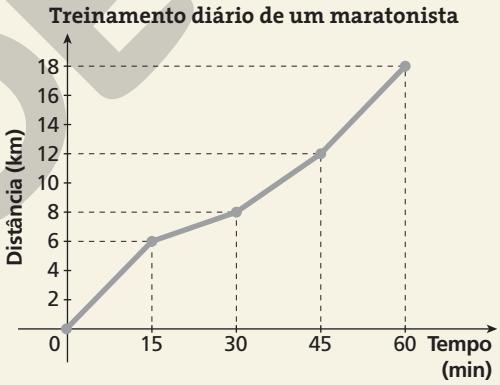
Q4 – (Enem) Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



NELSON MATSUDA

Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?
a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

Q5 – O gráfico a seguir apresenta a distância, em quilômetro, percorrida por um maratonista ao longo dos 60 minutos de seu treinamento diário.



ADILSON SECCO

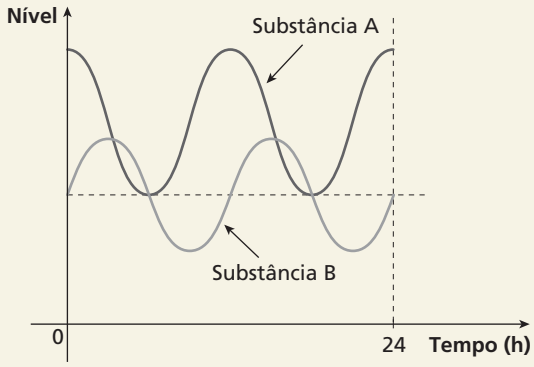
a) Quantos quilômetros o maratonista já havia percorrido após 45 minutos de treino?
b) Indique quantos quilômetros o maratonista percorreu em cada um dos seguintes intervalos de treinamento:
- primeiros 15 minutos;
- de 15 min a 30 min;
- de 30 min a 45 min;
- de 45 min a 60 min.

c) Considerando que a velocidade média desse atleta, durante esse treinamento, pode ser calculada dividindo-se a distância total percorrida pelo tempo de duração do treino, calcule-a.

Q6 – (Enem) Em um exame, foi feito o monitoramento dos níveis de duas substâncias presentes (A e B) na corrente sanguínea de uma pessoa, durante um período de 24 h, conforme o resultado apresentado na figura. Um nutricionista, no intuito de prescrever uma dieta para essa pessoa, analisou os níveis dessas substâncias, determinando que, para uma dieta semanal eficaz, deverá ser estabelecido um parâmetro cujo valor será dado pelo número de vezes em que os níveis de A e de B forem

MODERNA

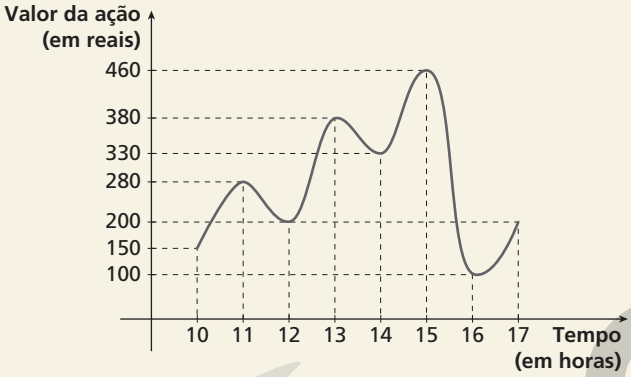
iguais, porém, maiores que o nível mínimo da substância A durante o período de duração da dieta.



Considere que o padrão apresentado no resultado do exame, no período analisado, se repita para os dias subsequentes. O valor do parâmetro estabelecido pelo nutricionista, para uma dieta semanal, será igual a

a) 28 **b)** 21 **d)** 2 **d)** 7 **e)** 14

Q7– (Enem) O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da compra	Hora da venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

a) 1 **c)** 3 **e)** 5
b) 2 **d)** 4

Q8– (Unicamp) Seja $f(x)$ uma função tal que para todo número real x temos que $x \cdot f(x-1) = (x-3) \cdot f(x) + 3$. Então, $f(1)$ é igual a

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

Q9– Considere a função g, dada pela lei $g(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$.

a) Obtenha a lei da função g^{-1}.
b) Escreva o conjunto domínio de g e de g^{-1}.
c) Escreva o conjunto imagem de g e de g^{-1}.

Q10– (ESPM) Se $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3 - x$, a função $h(x)$ representada no diagrama abaixo é:

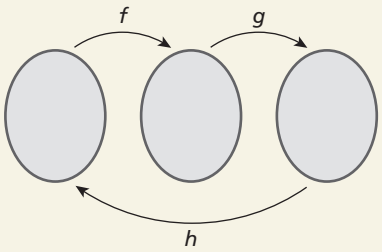
a) $h(x) = \dfrac{2-x}{2}$

b) $h(x) = \dfrac{2-x}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{x}{2-x}$

d) $h(x) = \dfrac{x}{x-2}$

e) $h(x) = \dfrac{x-2}{2x}$



Resoluções da avaliação 2

Q1– a) Como a figura é decomposta em um quadrado e em um semicírculo, temos:

$$A_{\text{figura}} = A_{\text{quadrado}} + A_{\text{semicírculo}} = 5^2 + \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}$$

$$A_{\text{figura}} = 25 + \frac{25\pi}{8} = \frac{200 + 25\pi}{8}$$

b) $A_{\text{figura}} = 3^2 + \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} = 9 + \dfrac{9\pi}{8} = \dfrac{72 + 9\pi}{8}$

c) $A_{\text{figura}} = x^2 + \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x^2 + \dfrac{\pi x^2}{8} = \dfrac{8x^2 + \pi x^2}{8}$

Q2– Considerando como x' a porção de madeira chamuscada e y o tempo em segundos, temos:

$y = ax'$, em que $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{15-3}{2{,}5-0{,}5} \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 6 \Rightarrow y = 6x'$
Para queimar totalmente o palito, $x' = 10{,}5$.
Então: $y = 6 \cdot 10{,}5 \Rightarrow y = 63$
O tempo para chamuscar totalmente um palito de fósforo é de 63 segundos, ou seja, 1 minuto e 3 segundos.
alternativa c

Q3– a) $2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = -2$

Logo, os zeros reais da função f são $\dfrac{3}{2}$ e -2.

b) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$
Não existe x real que satisfaça essa igualdade. Logo, a função g não tem zeros reais.

c) $\dfrac{1}{x^2} = 0$
Não existe x real que satisfaça essa igualdade. Logo, a função h não tem zeros reais.

d) $3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{4}{3}$
Logo, o zero real da função i é $-\dfrac{4}{3}$.

Q4– Analisando o gráfico, percebemos que a velocidade atinge valor igual a zero entre os minutos 6 e 8, portanto o carro permaneceu imóvel por 2 minutos.
alternativa c

Q5– a) 12 quilômetros
b) • 6 quilômetros • 4 quilômetros
• 2 quilômetros • 6 quilômetros

c) $V_{\text{média}} = \dfrac{18}{60} = 0{,}30$

Portanto, a velocidade média do atleta durante esse treino foi 0,30 km/min.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q6– A cada 24 horas tem-se 2 pontos de intersecção dos gráficos, conforme as condições estabelecidas. Portanto, em uma semana o valor do parâmetro será igual a $2 \cdot 7 = 14$.
alternativa e

Q7– Organizando os dados, temos:

Investidor	Compra	Venda	Ganhou	Perdeu
1	150	460	310	–
2	150	200	50	–
3	380	460	80	–
4	460	100	–	360
5	100	200	100	–

Portanto, o investidor 1 fez o melhor negócio.
alternativa a

Q8– Para $x = 1$, temos:
$1 \cdot f(1 - 1) = (1 - 3) \cdot f(1) + 3 \Rightarrow f(1) = \dfrac{f(0) - 3}{-2}$ (I)
Para $x = 0$, temos:
$0 \cdot f(0 - 1) = (0 - 3) \cdot f(0) + 3 \Rightarrow f(0) =$ (II)
Substituindo (II) em (I):
$f(1) = \dfrac{1 - 3}{-2} = 1$
alternativa b

Q9– Para resolver esse exercício, vamos considerar $g: A \to B$, tal que $x \in A$ e $y \in B$.

a) Substituindo $g(x)$ por y, temos: $y = \dfrac{x - 1}{x + 3}$
Substituindo y por x e x por y, temos: $x = \dfrac{y - 1}{y + 3}$
Expressando y em função de x, temos:
$x = \dfrac{y - 1}{y + 3} \Rightarrow x(y + 3) = y - 1 \Rightarrow xy + 3x = y - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow xy - y = -1 - 3x \Rightarrow y(x - 1) = -1 - 3x \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \dfrac{-1 - 3x}{x - 1} \Rightarrow y = \dfrac{3x + 1}{1 - x}$
Então: $g^{-1}(x) = \dfrac{3x + 1}{1 - x}$

b) Para que $g(x)$ exista, devemos ter: $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$
Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$ ou $D(g) = \mathbb{R} - \{-3\}$.
Para que $g^{-1}(x)$ exista, devemos ter: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
Logo, $D(g^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ ou $D(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$.

c) $Im(g) = D(g^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1\}$
$Im(g^{-1}) = D(g) = \mathbb{R} - \{-3\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -3\}$

Q10– $g(f(x)) = 3 - (2x + 1) = 2 - 2x$ e $g{-}1(f(x)) = h(x)$ é dada por: $h(x) = \dfrac{2 - x}{2}$
alternativa a

Capítulo 4 - Algoritmos e introdução à programação

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente.	1, 2, 3, 4 e 5
Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.	6, 7 e 8
Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.	9
Resolver problemas usando uma linguagem de programação.	10

Q1– Analise as atribuições a seguir e, observando o quadro dos valores iniciais das variáveis, determine o valor final de cada uma delas.

var1	*var2*	*var3*
10	11	12

var1 ← 2 · *var2* + 1
var2 ← *var3* + *var2*
var3 ← *var3* ** 2

Q2– Observe os valores iniciais e finais das variáveis nos quadros a seguir. Depois, determine um conjunto de operações de atribuição de valor que pode levar as variáveis do estado inicial ao estado final.

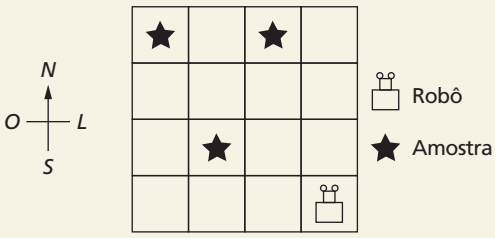
Valores iniciais		
var1	*var2*	*aux*
10	12	0

Valores finais		
var1	*var2*	*aux*
144	100	100

Q3– (OBI) Robô coletor: RC100 é um robô que pode mover-se nas quatro direções: norte, sul, leste e oeste. O RC100 é comandado utilizando uma linguagem de programação que tem apenas cinco comandos:

- N: ao receber esse comando, o robô move-se 10 metros na direção norte;
- S: ao receber esse comando, o robô move-se 10 metros na direção sul;
- L: ao receber esse comando, o robô move-se 10 metros na direção leste;
- O: ao receber esse comando, o robô move-se 10 metros na direção oeste;
- C: ao receber esse comando, o robô permanece no mesmo local, mas cava um buraco e recolhe amostras do solo;

Após receber e executar um comando, o robô permanece parado até receber o próximo comando.
Considerando o mapa abaixo, em que cada quadradinho tem 10 m de lado, qual é o menor número de comandos para o robô coletar as amostras nas posições indicadas por uma estrela e retornar à posição inicial?



NELSON MATSUDA

a) 8 **b)** 9 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 15

Q4– Observe a tabela a seguir.

Tabela para Empregado, Empregado Doméstico e Trabalhador Avulso a partir de 1º de março 2020	
Salário de Contribuição (R$)	Alíquota
Até R$ 1.045,00	7,5%
De R$ 1.045,01 a R$ 2.089,60	9%
De R$ 2.089,61 até R$ 3.134,40	12%
De R$ 3.134,41 até R$ 6.101,06	14%

Fonte: <https://www.inss.gov.br/servicos-do-inss/calculo-da-guia-da-previdencia-social-gps/tabela-de-contribuicao-mensal/>. Acesso em: 14 ago. 2020.

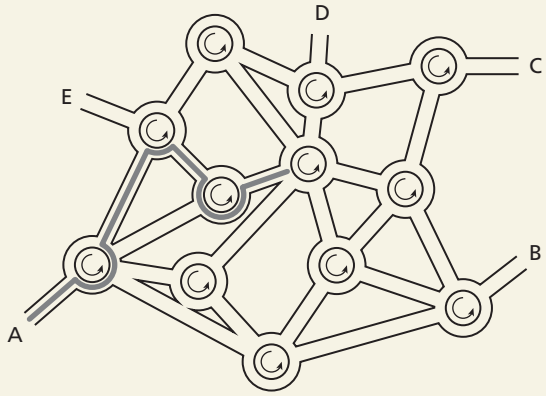
MODERNA

Escreva um algoritmo em linguagem corrente que recebe um número real x, em que x representa o salário contribuição, e entrega para a saída o percentual de alíquota.

Q5– (OBI) Aplicativos de navegação, para auxílio ao motorista, são muito comuns hoje em dia. Num país distante, a Rotatolândia, todos os entroncamentos de ruas são planejados como rotatórias. Como no Brasil, os carros em Rotatolândia trafegam nas rotatórias em sentido anti-horário. Nesse país, os aplicativos de navegação não dão instruções como:

- Na próxima rotatória, pegue a quarta saída;
- na próxima rotatória, pegue a primeira saída;
- na próxima rotatória, pegue a segunda saída.

Em vez disso, os aplicativos informam apenas a sequência de números que correspondem às saídas, como "4 1 2" no exemplo acima. No mapa abaixo, essa sequência é mostrada como um caminho parcial.



Considerando o mapa acima, se o motorista partir de B, qual das seguintes sequências de instruções o leva para o ponto E?

a) 3 2 1 1
b) 3 1 3 2 2
c) 3 2 1 3 2
d) 1 1 1 1
e) 3 2 2 2 3

Q6– Leia o algoritmo a seguir e, depois, marque a alternativa que pode representá-lo adequadamente em um fluxograma.

Dado um número natural n, que representa a idade de uma pessoa, determinar se a pessoa pode dirigir um carro no Brasil.

Passo 1. Leia um número natural n da entrada.

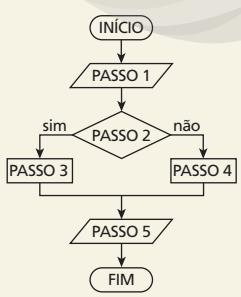
Passo 2. Se n maior ou igual a 18, vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Faça podeDirigir ← "Pode tirar a carteira de habilitação.". Vá para o **passo 5**.

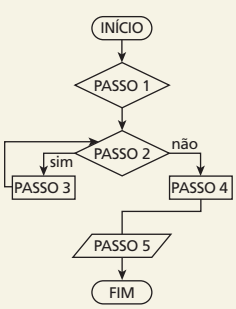
Passo 4. Faça podeDirigir ← "Ainda não pode tirar a carteira de habilitação.".

Passo 5. Envie podeDirigir para a saída. Encerra-se o algoritmo.

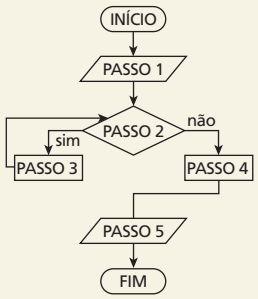
a)



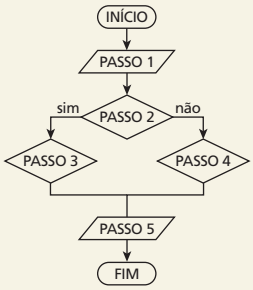
b)



c)

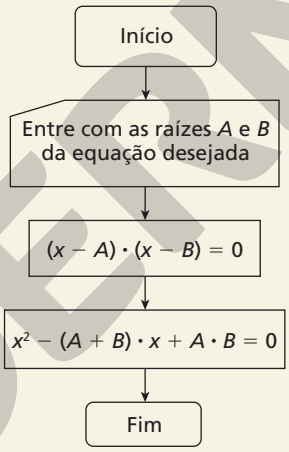


d)



Q7– (CP2-RJ) Um algoritmo é um procedimento computacional que serve de apoio para a programação de computadores, por meio da descrição de tarefas que devem ser efetuadas. Seguindo predeterminadas instruções, a partir de valores ou expressões de entrada, é produzido um valor ou expressão de saída.

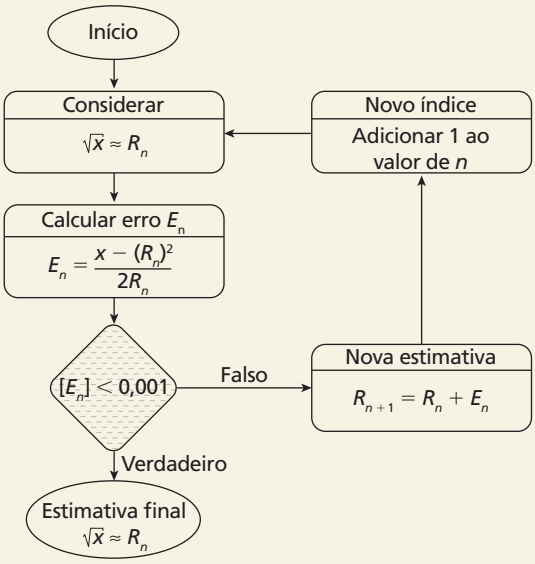
Considere o algoritmo abaixo que determina uma equação do 2º grau, cujas raízes reais são dois números A e B conhecidos:



a) Observando o algoritmo acima, determine uma equação do 2º grau com raízes 2 e 5.

b) Quais são os valores A e B que devem ser considerados na entrada para que a equação de saída seja $x^2 - 3x - 28 = 0$?

Q8– (Uerj-RJ) O algoritmo proposto a seguir pode ser empregado para calcular o valor aproximado da raiz quadrada de um número x.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Considere 1 como valor inicial de n e $R_1 = 3$ como estimativa inicial do valor da raiz quadrada de $x = 11$.
Nessas condições, o erro E_2 será igual a:

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{27}$ **c)** $\frac{1}{20}$ **d)** $\frac{1}{60}$

Q9– Avalie as expressões lógicas a seguir e decida se resultam em verdadeiro ou falso. Considere $x = 3$, $y = -1$ e que as expressões estão escritas na linguagem Python.
a) $x**3 - 3*x*y == 30$ **c)** $x**3 - 3*x*y != 30$
b) $x**3 - 3*x*y >= 30$ **d)** $x**3 - 3*x*y < 31$

Q10– No Brasil, de acordo com a Constituição Federal de 1988, em seu art. 143, no ano em que completam 18 anos os cidadãos do sexo masculino devem obrigatoriamente se alistar no serviço militar. Escreva um algoritmo em Python que recebe a idade de um cidadão, em ano, e entrega à saída as frases "Precisa fazer o alistamento militar." ou "Não precisa fazer o alistamento militar.". Considere que 18 será entrada se o cidadão completar 18 anos em qualquer mês do ano considerado.

Resoluções da avaliação 1

Q1– A partir do quadro com os valores das variáveis, devem-se realizar as operações de atribuição indicadas no enunciado.

var1	*var2*	*var3*
10	11	12

Linha 1: $var1 \leftarrow 2 \cdot var2 + 1$
$var1 \leftarrow 2 \cdot 11 + 1$ ($var1$ recebe 23)

var1	*var2*	*var3*
23	11	12

Linha 2: $var2 \leftarrow var3 + var2$
$var2 \leftarrow 12 + 11$ ($var2$ recebe 23)

var1	*var2*	*var3*
23	23	12

Linha 3: $var3 \leftarrow var3**2$
$var3 \leftarrow 12**2$ ($var3$ recebe 12^2, portanto, 144)

Assim, os valores finais das variáveis são:

var1	*var2*	*var3*
23	23	144

Q2– Existem infinitas soluções para levar as variáveis do estado inicial ao final. Uma resposta possível é:

$aux \leftarrow var1**2$

var1	*var2*	*aux*
10	12	100

$var1 \leftarrow var2**2$

var1	*var2*	*aux*
144	12	100

$var2 \leftarrow aux$

var1	*var2*	*aux*
144	100	100

Q3– Para o robô ir da posição inicial até a amostra no quadradinho superior esquerdo e voltar à posição inicial ele precisa de no mínimo 12 comandos de movimento. Para coletar 3 amostras, o robô precisará também de 3 comandos. Portanto, o número mínimo de comandos é 15, já que existe uma sequência de 15 comandos que satisfaz à questão: OONCONNCLLCLSSS.
alternativa e

Q4– Os algoritmos podem variar um pouco, mas espera-se que os alunos utilizem estruturas de decisão para avaliar o valor do salário contribuição inserido e determinem a alíquota como saída.
Passo 1. Receba da entrada um número real e armazene na variável *salario*.
Passo 2. Se *salario* menor ou igual a 1045,00. Vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Faça *aliquota* ← 0,075. Vá para o **passo 9**.
Passo 4. Se *salario* menor ou igual a 2089,60. Vá para o **passo 5**; senão, vá para o **passo 6**.
Passo 5. Faça *aliquota* ← 0,09. Vá para o **passo 9**.
Passo 6. Se *salario* menor ou igual a 3134,40. Vá para o **passo 7**; senão, vá para o **passo 8**.
Passo 7. Faça *aliquota* ← 0,12. Vá para o **passo 9**.
Passo 8. Faça *aliquota* ← 0,14.
Passo 9. Entregue *aliquota* como saída. O algoritmo termina.

Q5– Seguindo o padrão de navegação e obedecendo a orientação das rotatórias, a única alternativa que nos leva de B a E é 3 2 2 2 3.
alternativa e

Q6– O fluxograma que pode representar o algoritmo da questão é o da alternativa a. O fluxograma da alternativa b apresenta um símbolo de estrutura de decisão no passo 2 e um laço de repetição, que não estão no algoritmo descrito em linguagem corrente. A alternativa c também apresenta um laço de repetição. A alternativa d usa equivocadamente os símbolos de estrutura de decisão nos passos 3 e 4.

Q7– Para resolver a questão, substituem-se os valores indicados de acordo com o algoritmo apresentado no fluxograma.
a) $(x - 2)(x - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$
b) $x^2 - 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 4) = 0$
Portanto, $x = 7$ ou $x = -4$.

Q8– alternativa d

Q9– Considerando os valores $x = 3$ e $y = -1$, temos:
a) $x**3 - 3*x*y == 30$
$3**3 - 3*(3)*(-1) == 30$
$27 + 3 == 30$
$30 == 30$ (verdadeiro)
b) $x**3 - 3*x*y >= 30$
$3**3 - 3*(3)*(-1) >= 30$
$27 + 3 >= 30$
$30 >= 30$ (verdadeiro)
c) $x**3 - 3*x*y != 30$
$3**3 - 3*(3)*(-1) != 30$
$27 + 3 != 30$
$30 != 30$ (falso)
d) $x**3 - 3*x*y < 31$
$3**3 - 3*(3)*(-1) < 31$
$27 + 3 < 31$
$30 < 31$ (verdadeiro)

Q10– Os algoritmos podem variar um pouco, mas devem apresentar uma estrutura de decisão.

```
idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
if idade < 18:
 print("Ainda não precisa fazer o alistamento militar.")
else:
 print("Precisa fazer o alistamento militar.")
```

MODERNA

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente.	1, 2 e 3
Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.	4
Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.	5, 6 e 7
Resolver problemas usando uma linguagem de programação.	8, 9 e 10

Q1– Observe os valores iniciais e finais das variáveis nos quadros a seguir. Depois, determine um conjunto de operações de atribuição de valor que pode levar as variáveis do estado inicial ao estado final.

Estado inicial		
var1	*var2*	*aux*
5	6	0

Estado final		
var1	*var2*	*aux*
36	25	36

Q2– Analise o quadro de variáveis e, em seguida, simule as operações de atribuição de valor, determinando os valores finais de cada variável.

var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	10	0

soma ← *var1***2 + *var2***2
var3 ← *var3***var3*
soma ← *soma* – *var3*

Q3– Um aplicativo para encomenda de refeição concede um desconto de R$ 5,00 para compras acima de R$ 25,00. Escreva um algoritmo, em linguagem corrente, que recebe um número real na variável *valorTotal*, aplica o desconto se o valor atender à regra e entrega a mesma variável para a saída com o valor corrigido.

Q4– Represente o algoritmo da questão 3 desta avaliação com um fluxograma, indicando os passos dentro de cada elemento gráfico.

Q5– A alternativa na qual está corretamente representada a expressão $\sqrt{\dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{2}}$ na linguagem Python é:

a) `((a*a - (a*b)**2 + b*b)/2)**0.5`
b) `((a*2 - 2*a*b + b*2)/2)*(1/2)`
c) `((a**2 - 2*a*b + b**2)%2)**0.5`
d) `((a*a - 2*a*b + b*b)/2)**0.5`
e) `a*a - 2*a*b + b*b/2*0.5`

Q6– Avalie os resultados das expressões a seguir, escritas na linguagem Python, classificando o resultado de cada item como verdadeiro ou falso.

a) `2**3 == 4*2`
b) `121**0.5 >= 11`
c) `(3**2 + 4**2) != 25`
d) `(3 - 11)**2 < 3**2 -2*3*(-11) + 11*11`

Q7– Escreva o algoritmo representado na questão 3 desta avaliação usando a linguagem Python.

Q8– Observe o trecho de código em Python que permite a utilização da constante math.pi, que é um valor aproximado para o π.

```
import math
print("Um valor aproximado para o pi é:", math.pi)
```

Sabendo que o trecho acima imprime o valor da constante math.pi, escreva um algoritmo em Python que recebe um número real positivo e não nulo na variável *raio* e entrega para a saída o valor da área do círculo para raio dado.

Q9– Escreva um algoritmo em Python que lê uma sequência de números inteiros não nulos da entrada, adicionando-os até que o usuário digite 0 e entrega a soma como saída.

Q10– Escreva um algoritmo em Python que, dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida a seguir e um número real na variável x obtido da entrada, entrega à saída o valor $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, \text{ se } x \leq -4 \\ -\dfrac{2}{7}x + 5, \text{ se } x > -4 \end{cases}$$

Resolução da avaliação 2

Q1– Existem infinitas soluções. Uma resposta possível é:

var1	*var2*	*aux*
5	6	0

var1 ← *var1* * *var1*

var1	*var2*	*aux*
25	6	0

var2 ← *var2* * *var2*

var1	*var2*	*aux*
25	36	0

aux ← *var2*

var1	*var2*	*aux*
25	36	36

var2 ← *var1*

var1	*var2*	*aux*
25	25	36

var1 ← *aux*

var1	*var2*	*aux*
36	25	36

Q2– O resultado da simulação é o seguinte:

var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	10	0

soma ← *var1***2 + *var2***2
soma ← 36 + 64

var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	10	100

MODERNA

var3 ← *var3***var3*
var3 ← 100 * 100

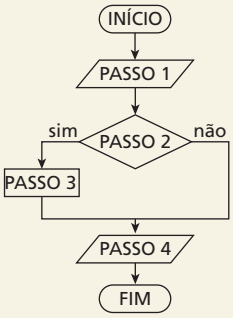
var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	100	100

soma ← *soma* – *var3*
soma ← 100 – 100

var1	*var2*	*var3*	*soma*
6	8	100	0

Q3– Resposta possível:
Passo 1. Faça *valorTotal* receber um número real da entrada.
Passo 2. Se *valorTotal* for maior que 25,00 vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Faça *valorTotal* ← *valorTotal* – 5,00.
Passo 4. Entregue *valorTotal*, já com o valor adequado, à saída. Encerra-se o algoritmo.

Q4– Um fluxograma que representa o algoritmo da questão 3 é:



Q5– alternativa d

Q6– **a)** verdadeiro
b) verdadeiro
c) falso
d) falso

Q7– Resposta possível:

```
valorTotal = float(input("Entre com o valor: "))
if valorTotal > 25.0:
    valorTotal = valorTotal - 5.0
print(valorTotal)
```

Q8– Resposta possível:

```
import math
raio = float(input("Entre com o raio: "))
area = math.pi * raio**2
print("A área vale: ", area)
```

Q9– Resposta possível:

```
n = int(input("Entre com um número: "))
soma = n
while(n != 0):
    n = int(input("Entre com um número: "))
    soma = soma + n
print(soma)
```

Q10– O algoritmo a seguir calcula o valor da função para o *x* real dado.

```
x = float(input("Entre com um número real: "))
fx = 0
if x <= -4:
    fx = x*x/4
else:
    fx = -(2/7)*x + 5
print(fx)
```

MODERNA

Resoluções e comentários

Capítulo 1 – Grandezas e medidas

Segundo o dicionário Houaiss, comparar é "relacionar (coisas animadas ou inanimadas, concretas ou abstratas, da mesma natureza ou que apresentem similitudes) para procurar as relações de semelhança ou de disparidade que entre elas existam".

Medir, em um primeiro momento, é um procedimento cuja essência é a comparação. Porém vai além, nas grandezas derivadas fundamenta-se no conceito da proporcionalidade e da multiplicidade. Dizer que a velocidade constante de um móvel é 10 m/s significa dizer que a cada segundo o móvel se desloca por 10 metros e que, por consequência, por exemplo, em cada 2 segundos o móvel se desloca por 20 metros ou em 0,5 segundo se desloca 5 metros.

O tema Grandezas e medidas é muito, muito vasto, impossível de ser esgotado em um capítulo ou mesmo em um livro. Optamos por conceituar e relacionar grandezas e medidas e por ampliar, em relação ao Ensino Fundamental, o leque de exemplos de medidas e de situações em que elas são aplicadas, não só nos textos teóricos, mas também em enunciados de várias atividades. Convém incentivar a pesquisa desse tema nos muitos campos da atividade humana. A diversidade de grandezas e respectivas unidades de medida certamente será surpreendente e rica para os estudantes.

Exercícios propostos

1. **a)** A soma de medidas é uma medida; logo, o perímetro é uma medida.

b) A área é a medida de uma superfície; logo, a área é uma medida e a superfície é uma grandeza.

c) O volume é a medida do espaço; logo, volume é medida e espaço é uma grandeza.

2. **a)** As medidas lineares da piscina são dadas pela unidade 1 u, medida do lado da peça cerâmica quadrada que reveste as paredes e o seu chão. As medidas de superfície têm por unidade 1 u^2, medida da superfície de cada peça cerâmica. Interpretando o texto inicial do exercício **1**, as medidas horizontais são largura igual a 20 u e comprimento 30 u. Logo, as medidas são 20 u, 30 u, 20 u, 30 u.

b) Do texto citado entende-se que a altura da piscina mede 5 u. Logo, duas das paredes retangulares têm medidas 20 u por 5 u, com perímetro (20 + 5 + 20 + + 5) u = 50 u. As outras paredes têm medidas 30 u por 5 u, com perímetro (30 + 5 + 30 + 5) u = 70 u. O chão tem medidas 20 u por 30 u, com perímetro (20 + + 30 + 20 + 30) u = 100 u.

c) Como a área de cada peça é 1 u^2, o número de peças da parede ou do chão indica a área dessas superfícies. As paredes menores têm 100 peças (20 · 5) e área 100 u^2; as paredes maiores têm 150 peças (30 · 5) e área 150 u^2; o chão tem 600 peças (20 · 30) e área 600 u^2.

d) Basta adicionar os números de peças das paredes e das áreas: 100 + 100 + 150 + 150 + 600 = 1.100; 100 u^2 + + 100 u^2 + 150 u^2 + 150 u^2 + 600 u^2 = 1.100 u^2

e) Podemos imaginar a piscina sendo preenchida por cubos com faces iguais à peças dos revestimentos. Seriam 5 camadas (altura) retangulares de 20 cubos (largura) por 30 cubos (comprimento), isto é, 5 · 20 · 30 = = 3.000 cubos, que correspondem a 3.000 u^3.

3. **a)** Respostas possíveis: fita métrica, milímetro; balança, grama; termômetro, grau Celsius; esfigmomanômetro, milímetro de mercúrio (mmHg).

b) Respostas possíveis: trena, milímetro; recipiente graduado em litro ou dm^3, litro ou dm^3.

c) Respostas possíveis: calendário, semana; relógio, minuto; cronômetro, segundo.

4. Para arredondar para centena de milhar, observamos o algarismo da dezena de milhar. Se for igual ou maior do que 5, acrescentamos 1 ao algarismo da centena de milhar; caso contrário, mantemos o algarismo da centena de milhar, substituímos por zero os algarismos à direita. Respectivamente de 2014 a 2018, total de matrículas: 8.300.000, 8.100.000, 8.100.000, 7.900.000, 7.700.000; matrículas referentes ao ensino integrado: 500.000, 500.000, 500.000, 600.000, 600.000.

5. Respostas possíveis: Arredondar para centena simples: 12.345.678; 81.234.567; 78.123.456; 67.812.345; 56.781.234; 45.678,123; 3.456,7812; 23.456,781; 4.444,4444; 5.555,5555.

Arredondando: 12.345.700; 81.234.600; 78.123.500; 67.812.300; 56.781.200; 45.700,000; 3.500,0000; 23.500,000; 4.400,0000; 5.600,000.

6. Loja Já: 12 + 12 + 6 + 3 + 3 + 11 = 47; Papelaria Esquina: 13 + 11 + 6 + 3 + 3 + 11 = 47; Lojinha Escolar: 12 + 12 + 7 + 3 + 3 + 14 = 51.

Andréa pode comprar nas duas primeiras lojas (47 reais), mas na última (51 reais), não.

7. Resposta possível: Sejam os números 12.345.000; 81.234.000; 78.000.000; 67,812345; 5,6781234; 45.678,000; 3.456,7812; 0,0012345; 4.444,4444; 0,0000055.

Em notação científica: $1{,}2345 \cdot 10^7$; $8{,}1234 \cdot 10^7$; $7{,}8 \cdot 10^7$; $6{,}7812345 \cdot 10^1$; $5{,}6781234 \cdot 10^0$; $4{,}5678 \cdot 10^4$; $3{,}4567812 \cdot 10^3$; $1{,}2345 \cdot 10^{-3}$; $4{,}4444444 \cdot 10^3$; $5{,}5 \cdot 10^{-6}$.

8. 43.252.003.274.856.000 ≃ 43.300.000.000.000.000; $4{,}33 \cdot 10^{16}$

9. $150.000 \cdot 0{,}009\,\mu^3 = 1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 10^{-3}\,\mu^3 = 13{,}5 \cdot 10^2\,\mu^3 = = 1{,}35 \cdot 10^3\,\mu^3$

10. **a)** Respostas pessoais.

b) Ano-luz é uma medida de comprimento.

c) massa do buraco negro: $(6{,}5 \cdot 10^9) \cdot (2 \cdot 10^{30}) = = 13 \cdot 10^{9+30} = 1{,}3 \cdot 10^{40}$

massa do buraco negro $= 1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg

d) Distância da Terra ao buraco negro: $53.500.000 \cdot \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 53{,}5 \cdot 9{,}46 \cdot 10^6 \cdot 10^{12} = 506{,}11 \cdot 10^6 \cdot \cdot 10^{12} = 5{,}0611 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^{12} = 5{,}0611 \cdot 10^{20}$

A distância é de $5{,}0611 \cdot 10^{20}$ km.

MODERNA

e) O prefixo yotta corresponde a 10^{24}.

$1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg $= 1{,}3 \cdot 10^{16} \cdot 10^{24}$ kg $= 1{,}3 \cdot 10^{16}$ Yg

11. **a)** $T_K = T_C + 273{,}15$

$T_C = 0 \Rightarrow T_K = 0 + 273{,}15$

$T_K = 273{,}15$ K

b) $T_K = T_C + 273{,}15$

$T_C = 100 \Rightarrow T_K = 100 + 273{,}15$

$T_K = 373{,}15$ K

12. Tomando a medida de uma roda aro 20, temos que o seu raio é aproximadamente 25 centímetros, ou seja, 0,25 metro.

$C = 2 \cdot \pi \cdot r$

$C \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25$

$C \simeq 1{,}57$

Portanto, o comprimento aproximado da roda será 1,57 m. Sabendo que 200 km equivalem a 200.000 m, temos:

$200.000 \div 1{,}57 \simeq 127.389$

Expressando a ordem de grandeza em uma potência de base 10, teríamos o valor mais próximo sendo de 100.000, ou seja, 10^5.

alternativa c

13. Para que seja feita a transformação para notação científica, é necessário que:

$0{,}00000045 = 4{,}5 \cdot 0{,}0000001 = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$

alternativa b

14. **a)** É comum a confusão de "peso" com massa de um objeto e com a massa específica da matéria. A massa específica do chumbo é muito maior do que a massa específica do algodão. Por isso, ao responder rapidamente, sem refletir, muitas pessoas dizem que a massa de 1 kg de chumbo pesa mais do que 1 kg de algodão, mas as massas são iguais; logo, os pesos são iguais.

b) Chumbo tem maior massa específica, 11,3 g/cm³. O peso é o mesmo em ambas as mãos.

Comentário: A pergunta, feita de chofre, tem o objetivo de provocar no grupo de alunos eventuais respostas sem reflexão para gerar discussão e oportunidades de esclarecimentos e de apresentação de argumentos.

15. A massa específica é dada pela razão entre a massa em kg e o volume em m³.

Volume: $V = (20 \cdot 30 \cdot 50)$ cm³ $= 30.000$ cm³ $= 0{,}030$ m³

$\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ kg/m³

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow 2{,}5 \cdot 10^3 = \frac{m}{0{,}030} \Rightarrow m = 0{,}03 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 \Rightarrow m = 75$$

A massa do bloco é 75 kg.

16. Distância $= d = 8{,}4$ km $= 8.400$ m

Tempo $= t = 19$ min 11 s $= (19 \cdot 60 + 11)$s $= 1.151$ s

$$v = \frac{d}{t} = \frac{8.400}{1.151} \simeq 7{,}3 \therefore$$

$v \simeq 7{,}3$ m/s

$v = 7{,}3 \cdot 3{,}6 = 26{,}3 \therefore$

$v \simeq 26{,}3$ km/h

17. Resposta pessoal.

18. **a)** Considerando que $1\,\text{A} = 10^{-1}$ nm, convertemos angstrom para nanômetro:

"Na região visível aos seres humanos, os valores de λ ficam entre 400 nm (violeta) e 700 nm (vermelho). E há radiações que não conseguimos enxergar, por exemplo, os raios ultravioleta (10 nm $< \lambda <$ 400 nm) e os raios infravermelho (700 nm $< \lambda <$ 1.000.000 nm)."

b) micro-ondas: 10^6 nm $< \lambda < 3 \cdot 10^7$ nm;
raio X: 10^{-2} nm $< \lambda <$ 10 nm

c) Resposta possível: Devemos nos cobrir, evitar a luz solar mais intensa, hidratar a pele, usar protetor solar e óculos com proteção solar.

Comentário: Nesse momento, trabalhamos um dos temas contemporâneos, a saúde.

Outras informações podem ser obtidas em:

<https://www.sbd.org.br/dermatologia/pele/cuidados/cuidados-diarios-com-a-pele/>, acesso em: 3 ago. 2020.

d) A liberação na atmosfera do gás CFC (clorofluorcarboneto) encontrados em gás de refrigeração e em aerossóis e de halogênios (flúor, cloro, bromo, iodo, astato e tenessínio) faz com que eles atinjam a camada de ozônio. Primeiro, a radiação solar decompõe as moléculas de CFC e, depois, os átomos de cloro reagem com o ozônio.

e) A superfície do Brasil é de aproximadamente 8,5 milhões de km². Como 23 milhões dividido por 8,5 milhões é aproximadamente 2,7, logo, no buraco da camada de ozônio cabem quase 3 Brasis.

19. 1 *terabyte* $= 2^{40}$ *bytes* $\Rightarrow$ 2 *terabytes* $= 2 \cdot 2^{40}$ *bytes* $= 2^{41}$ *bytes*

alternativa b

20. Basta dividir 10 GB, ou seja, $10 \cdot 2^{10}$ MB por 8 MB.

$$\frac{10 \cdot 2^{10}}{2^3} = 10 \cdot 2^7 = 1.280$$

Exercícios complementares

1. Espaço percorrido = 8.400 m

$$\text{Velocidade} = \frac{\text{Espaço percorrido}}{\text{Tempo}} \text{ ou } v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A velocidade em km/h é obtida multiplicando-se a respectiva velocidade em m/s por 3,6.

Exemplos de cálculo:

Para $t = 19$ min 11 s $= (19 \cdot 60 + 11)$ s $= 1.151$ s

$$v = \frac{8.400}{1.151}$$

$v \simeq 7{,}30$ m/s ou $v = 26{,}28$ km/h

Para $t = 45$ min 11 s $= (60 + 11)$ s $= 2.711$ s

$$v = \frac{8.400}{2.711} \simeq 3{,}10$$

$v \simeq 3{,}10$ m/s ou $v = 11{,}16$ km/h

Para $t = 01$ h 02 min 14 s $= (1 \cdot 60 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 14)$ s $= 3.734$ s

$$v = \frac{8.400}{3.737} \simeq 2{,}25$$

$v \simeq 2{,}25$ m/s ou $v = 8{,}10$ km/h

Para $t = 01$ h 13 min 48 s $= (1 \cdot 60 \cdot 60 + 13 \cdot 60 + 48)$ s $= 4.428$ s

$$v = \frac{8.400}{4.428} \simeq 1{,}90$$

$v \simeq 1{,}90$ m/s ou $v = 6{,}84$ km/h

Os resultados desses e dos demais tempos estão sintetizados no quadro a seguir.

MODERNA

Ranking	Tempo (s)	Velocidade (m/s)	Velocidade (km/h)
1	1.151	7,30	26,28
2	1.517	5,54	19,94
3	1.685	4,99	17,96
4	2.069	4,06	14,62
5	2.281	3,68	13,25
6	2.434	3,45	12,42
7	2.479	3,39	12,20
8	2.711	3,10	11,16
9	2.711	3,10	11,16
10	2.982	2,82	10,15
11	3.003	2,80	10,08
12	3.288	2,55	9,18
13	3.422	2,45	8,82
14	3.430	2,45	8,82
15	3.734	2,25	8,10
16	4.428	1,90	6,84

Comentário: Os desafios intermodais têm sido realizados há vários anos consecutivos em grandes cidades brasileiras e têm por objetivo o melhor conhecimento da mobilidade urbana.

2. **a)** População costeira: 2.044.049 + 4.145.034 + + 7.443.040 + 8.089.040 + 13.590.324 + 15.387.960

Calculando o total com as parcelas arredondadas para unidade de milhão:

2.000.000 + 4.000.000 + 7.000.000 + 8.000.000 + + 14.000.000 + 15.000.000 = 50.000.000

b) População total: 32.683.865 + 31.379.266 + + 22.263.598 + 33.092.663 + 31.177.958 + + 40.135.344

Calculando o total com as parcelas arredondadas para unidade de milhão:

33.000.000 + 31.000.000 + 22.000.000 + 33.000.000 + + 31.000.000 + 40.000.000 = 190.000.000

Comentário: Convém lembrar aos alunos que governos realizam e analisam estudos como esse registrado no gráfico sobre populações costeira, interiorana e total com o objetivo de conhecer a distribuição geográfica para melhor gerir recursos, investimentos, atender necessidades específicas/regionais.

3. De acordo com o o quadro apresentado no tópico "*Unidades fora do SI*"; vemos que 1 milha náutica equivale a 1.852 metros; então, fazemos:

$3.978 \cdot 1.852 = 7.367.256$

$4.967 \cdot 1.852 = 9.198.884$

Logo, 3.978 e 4.967 milhas náuticas equivalem aproximadamente a 7.367 km e 9.199 km, respectivamente.

4. Escrevendo 400 bilhões em notação científica, temos $4 \cdot 10^{11}$; assim como 0,05% equivale a $\frac{0,05}{100} = 5 \cdot 10^{-4}$

Dessa forma, para obter 0,05% de 400 bilhões, basta fazer a multiplicação dos valores; assim:

$4 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 20 \cdot 10^{11-4} = 20 \cdot 10^{7} = 2 \cdot 10^{8}$

Dessa forma, temos que existem $2 \cdot 10^{8}$ planetas semelhantes à Terra em toda a galáxia.

alternativa c

5. Fazendo a transformação de metros por segundo para quilômetros por hora, temos:

$$\frac{7.500 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{7,5 \text{ km}}{1 \text{ s}} = \frac{7,5 \text{ km}}{1 \text{ s}} \cdot \frac{60}{60} =$$

$$= \frac{450 \text{ km}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{60}{60} = \frac{27.000 \text{ km}}{1 \text{h}}$$

Portanto, 27.000 km/h.

6. Como o volume do cubo está em centímetros cúbicos, vamos multiplicar 400 por 25; assim:

$400^3 \cdot 25 = 1,6 \cdot 10^9$

Transformando a unidade de medida de cm^3 para m^3, temos $1,6 \cdot 10^3$ m^3, ou seja, 1.600 m^3.

alternativa c

7. O volume de água na piscina é dado por:

$3 \cdot 5 \cdot (1,7 - 0,5) = 15 \cdot 1,2 = 18$

Sabemos que 18 m^3 = 18.000 ℓ. Como usamos 1,5 mℓ a cada 1.000 ℓ de água, então usaremos 27 mℓ do produto.

alternativa b

8. Primeiro, calculamos o volume de vinhaça presente em 27.000 ℓ de etanol.

1 ℓ etanol ———— 18 ℓ vinhaça

27.000 ℓ ———— Etanol – x ℓ

x = 486.000 ℓ

Com esse valor, calculamos a concentração de fósforo.

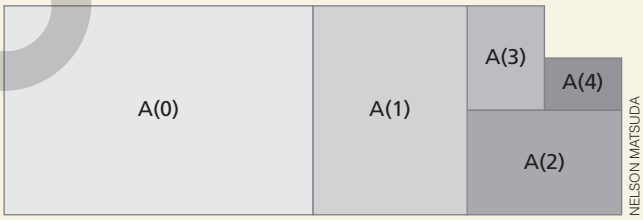
60 mg ———— 1 ℓ

y ———— 486.000 ℓ

y = 29 kg

alternativa b

9. Do enunciado, destacamos: A(0) tem área igual a 1 m^2 e A(n) é metade de A(n – 1), ou seja, $A(1) = \frac{1}{2} A(0)$, $A(2) = \frac{1}{2} A(1)$, $A(3) = \frac{1}{2} A(2)$, $A(4) = \frac{1}{2} A(3)$...



Gramatura 75 g/m^2 significa que, em cada 1 m^2, a massa do papel é igual a 75 g.

a) Como A(0) tem área igual a 1 m^2, então A(0) tem 75 g.

b) A(1) tem metade de A(0), isto é, tem 37,5 g.

c) A(4) tem metade de A(3) que tem metade de A(2), que tem metade de A(1), isto é, tem 4,6875 g.

d) A resma tem 500 folhas.

$500 \cdot 4,6875 = 2.343,75$

Portanto, uma resma de papel A(4) tem 2.343,75 g.

10. Do enunciado concluímos: a medida maior (L_n) de um papel A(n) é igual à medida menor (l_{n-1}) do papel A(n – 1) e à medida menor (l_n) de um papel A(n) é igual à metade da medida maior (L_{n-1}) do papel A(n – 1).

Observação: os cálculos são aproximados.

a) Papel A(1): $L_1 = l_0 = 841$ mm; $l_1 = \frac{L_0}{2} = \frac{1.189}{2} = 594$

$l_1 = 594$ mm

MODERNA

Área (1) = 0,841 · 0,594 = 0,5

Área (1) = 0,5 m²

b) Papel A(2): $L_2 = l_1 = 594$ mm; $l_2 = \frac{L_1}{2} = \frac{841}{2} = 420$

$l_2 = 420$ mm

Área (2) = 0,420 · 0,594 = 0,5 = 0,25

Área (2) = 0,25 m²

c) Papel A(3): $L_3 = l_2 = 420$ mm; $l_3 = \frac{L_2}{2} = \frac{594}{2} = 297$

$l_3 = 297$ mm

Área (3) = 0,420 · 0,297 = 0,125

Área (3) = 0,125 m²

d) Papel A(4): $L_4 = l_3 = 297$ mm; $l_4 = \frac{L_3}{2} = \frac{420}{2} = 210$

$l_4 = 210$ mm

Área (4) = 0,297 · 0,210 = 0,0625

Área (4) = 0,0625 m²

e) Papel 2A(0): $2L_0 = 2 \cdot l_0 = 2 \cdot 841 = 1.682$

$2L_0 = = 1.682$ mm

Área $(2A_0) = 1,682 \cdot 1,189 = 2$

Área $(2A_0) = 2$ m²

11. **a)** Com uma chapa retangular de 1 m por 6 m, ele pode obter as seis faces quadradas lado 1 m que compõem a superfície de um cubo de aresta 1 m; logo, o volume desse cubo é igual a 1 m³.

b) Com uma chapa retangular de 2 m por 12 m ele pode obter as seis faces quadradas lado 2 m que compõem a superfície de um cubo de aresta 2 m; logo, o volume desse cubo é igual a 2^3 m³, ou seja, 8 m³. Portanto, o volume dessa caixa não terá o dobro do volume da outra caixa, mas sim oito vezes mais.

Autoavaliação

1. Para encher a cisterna ainda faltam (240 – 104 = 136) litros.

136 ÷ 8 = 17

Usando 17 vezes o balde de 8 ℓ, enchemos a cisterna.

alternativa c

2. Na questão anterior, a grandeza é a capacidade e unidade considerada é o balde.

alternativa b

3. Arredondando as medidas anotadas para décimo de quilograma, temos: 3,1; 3,1; 4,0 e 3,9.

alternativa a

4. 1 UA ≃ 150.000.000,000 km = 150.000.000.000 m = $= 1,5 \cdot 10^{11}$ m

1,5 UA ≃ $1,5 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}$ m = $2,25 \cdot 10^{11}$ m

alternativa a

5. 2 TB = $2 \cdot 2^{10}$ GB = 2^{11} GB

2^{11} GB ÷ 64 = $(2^{11} \div 2^6)$ GB = 2^5

alternativa d

6. 0,32 d = 0,32 · 24 h = 7,68 h = 7 h + 0,68 h

0,68 h = 0,68 · 60 min = 40,8 min = 40 min + 0,8 min

0,8 min = 0,8 · 60 s = 48 s

0,32 d = 7 h 40 min 48 s

27,32 d = 27 d 7 h 40 min 48 s

alternativa d

Compreensão de texto

1. Resposta pessoal. Discuta com os alunos situações em que é importante saber as medidas exatas, como ao comprar uma mercadoria e saber o peso líquido com exatidão ou saber as medidas exatas de um móvel.

2. A unidade hertz equivale à frequência de um fenômeno periódico que tem a duração de um segundo; no caso da frequência da transição do césio, é de pouco mais, em termos relativos, de 9 bilhões de vezes em 1 segundo.

Arredondando 9.192.631.770 para centena de milhão, temos 9.200.000.000, que é igual a $9,2 \cdot 10^9$.

3. Resposta pessoal. Essa atividade proporciona ao aluno uma aplicação de medida essencial à observação da saúde. Convém que seja acompanhada com a tranquilidade necessária ao ritmo e à sensibilidade própria de cada aluno para que seja bem-sucedida.

4. Por ser uma medida intuitiva e que depende de treinamento para obter uma habilidade confiável, não podemos considerá-la exata; há que se ter o cuidado de desprezar as medidas mais extremas e considerar o conjunto das demais, calculando a média aritmética. Aumentando o número de medições, tendemos a minimizar erros, o que colabora para maior exatidão da medida.

5. Ao efetuar a medida da pulsação, temos como referência o período de 1 minuto. Como, na questão 3, a orientação foi para a contagem em 15 segundos, supondo que a pulsação seja proporcional nos 45 segundos restantes, ao multiplicar 15 s por 4 temos o número de pulsos em 1 minuto, pois 4 · 15 s = 1 minuto.

6. Devemos obter o número de vezes que o tempo de 10 segundos cabe em 1 minuto (60 segundos), fazendo 60 ÷ 10 = 6, e então, devemos multiplicar por 6.

Quando fazemos a contagem por 30 segundos, temos 60 ÷ 30 = 2, e então, devemos multiplicar por 2.

A resposta pode ser polêmica, porém supõe-se que, ao se fazer a contagem por tempo maior, o erro embutido nessa contagem será multiplicado por um número menor, o que pode resultar em maior precisão.

MODERNA

Capítulo 2 – Conjuntos

Exercícios propostos

1. **a)** $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

b) $B = \{A, E, I, O\}$

c) $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

2. Respostas possíveis:

a) D: x é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40.

b) E: fases da Lua.

c) F: x é um número ímpar maior que 3 e menor que 21.

3. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$
$C = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$

a) falsa

b) verdadeira

c) verdadeira

d) falsa

e) verdadeira

f) verdadeira

4. **a)** Não. Essa relação não é válida, pois nem todo número ímpar é múltiplo de 3. O elemento 5, por exemplo, pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto C.

b) Não. Essa relação não é verdadeira, pois há números ímpares que não são primos. Por exemplo, o número 49 pertence ao conjunto A, mas não pertence ao conjunto B.

c) Não. Há um número primo que é par: o número 2.

5. $A = \{1\}$; $B = \varnothing$; $C = \{1\}$
Logo, $A = C$.

6. **a)** $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7. **a)** Falsa, pois há elementos de D (os elementos 2 e 3) que não pertencem a C.

b) verdadeira

c) Falsa, pois 1 não é primo.

d) verdadeira

e) Falsa, pois existem números ímpares que não são primos, como o número 9.

f) verdadeira

g) Falsa, pois os conjuntos E e F não possuem os mesmos elementos.

h) verdadeira

i) verdadeira

8. **a)** $J = \{2, 9\}$

b) $K = \{3, 9\}$

c) $L = \{8, 4\}$

d) $M = \{5, 7, 9\}$

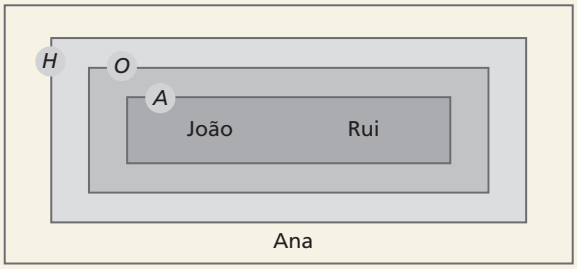
9. Sabendo que $M \subset A$, há oito possibilidades:

1) $M = \{a\}$
2) $M = \{b\}$
3) $M = \{c\}$
4) $M = \{a, b\}$
5) $M = \{a, c\}$
6) $M = \{b, c\}$
7) $M = \{a, b, c\}$
8) $M = \varnothing$

Porém, sabemos que $M \supset B$. Logo, há somente quatro possibilidades:
$M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Respostas possíveis: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

11. $H = \{\text{Jonas, Carlos, João, Rui}\}$
$A \subset O$ e $O \subset H \Rightarrow A \subset H$
João $\in A$ e Rui $\in A$
Temos, então, o seguinte diagrama:



Logo, há quatro possibilidades para o conjunto O:
$O = \{\text{João, Rui}\}$ ou $O = \{\text{João, Rui, Jonas}\}$ ou
$O = \{\text{João, Rui, Carlos}\}$ ou $O = \{\text{João, Rui, Carlos, Jonas}\}$

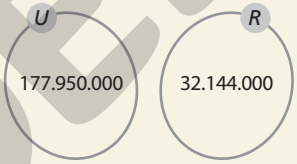
12. **a)** $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $Y \cup Z = \{1, 3, 5\}$

c) $Z \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $X \cup Y \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

13. Como uma pessoa não pode morar simultaneamente na área urbana e na área rural, os conjuntos U e R não têm elementos comuns; logo, são disjuntos.
Portanto, o conjunto $P = U \cup R$ tem 210.094.000 elementos, que é a soma das quantidades de elementos de U e de R.



14. $P = \{x \mid x \text{ é um peixe}\}$
$B = \{x \mid x \text{ é um peixe-boi}\}$
$M = \{x \mid x \text{ é um mamífero}\}$

a) $B \cap M = B$

b) $P \cap B = \varnothing$

c) $P \cap M = \varnothing$

d) $(P \cup B) \cap M = B$

15. Temos $Y = \{2, 3, 5\}$. Então:

a) $X - Z = \{n \mid n \in X \text{ e } n \notin Z\} = \{\ \} = \varnothing$

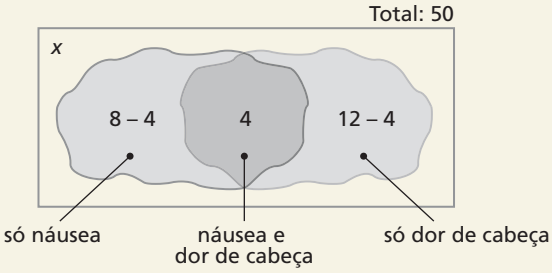
b) $Y - X = \{n \mid n \in Y \text{ e } n \notin X\} = \{5\}$

c) $Z - X = \{n \mid n \in Z \text{ e } n \notin X\} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

16. **a)** Resposta possível: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) Respostas possíveis: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. Vamos considerar o seguinte diagrama:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$12 - 4 = 8$

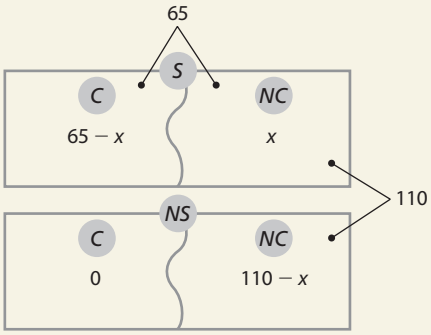
Logo, 8 voluntários sentiram dor de cabeça, mas não náusea.

$x = 50 - [(8 - 4) + 4 + (12 - 4)] = 50 - 16 = 34$

Logo, 34 voluntários não sentiram dor de cabeça nem náusea.

18. Para solucionar esse problema, vamos construir um diagrama considerando o conjunto das pessoas que acharam a margarina muito salgada (*S*) e o das que acharam não muito salgada (*NS*) e subdividir cada um desses conjuntos nos conjuntos das que acharam a margarina cremosa (*C*) e das que acharam não muito cremosa (*NC*).

Sendo *x* o número de pessoas que achou a margarina não cremosa e muito salgada, temos:

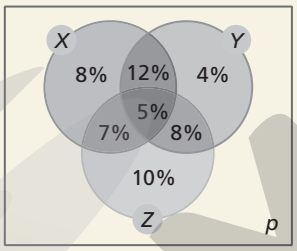


Como foram entrevistadas 150 pessoas, 40 acharam a margarina cremosa. Então: $40 = 65 - x + 0 \Rightarrow x = 25$

Logo, 25 pessoas acharam que a margarina não é cremosa e é muito salgada.

Comentário: Nesse ponto, é importante retomar o exercício resolvido **R4** e mostrar que a representação por conjuntos facilita a resolução dos exercícios **18 a 20**.

19. Podemos construir o seguinte diagrama:



a) A porcentagem do público que gostou de algum filme é dada por:

$8\% + 12\% + 5\% + 7\% + 4\% + 8\% + 10\% = 54\%$

Então: $p = 100\% - 54\% = 46\%$

Logo, 46% do público não gostou de nenhum dos três filmes.

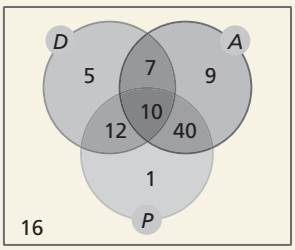
b) $n(X \cup Y) = 44\%$

$n(X \cup Z) = 50\%$

$n(Y \cup Z) = 46\%$

Os filmes escolhidos seriam *X* e *Z*, pois $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$.

20. Podemos construir o seguinte diagrama:



(I) O número total de pessoas pesquisadas é igual a:

$5 + 7 + 10 + 12 + 9 + 40 + 1 + 16 = 100$

O número de pessoas que achou o preço mais elevado é igual a: $n(P) = 63$

Logo, essa afirmação está de acordo com os dados apresentados.

(II) De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior que a das que apontaram os três problemas (10). Porém, essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.

(III) Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento que criar vantagens na forma de pagamento.

Comentário: Essa questão retrata e propõe uma situação-problema frequente e importante de ser resolvida no mundo empresarial e do trabalho. A análise do sucesso comercial de um produto passa por um procedimento com várias etapas: coleta e organização de dados, conjecturas com base nesses dados, verificação dessas conjecturas e tomada de decisões. Os conceitos de conjunto e de suas operações constituem ferramentas a serem usadas para a validação ou não, nem sempre evidentes, das suposições elaboradas.

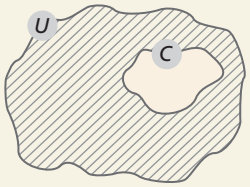
21. **a)** $A^C = \{6, 8, 10\}$

b) $B^C = \{0, 2, 10\}$

c) $C^C = \{0, 2, 6, 8, 10\}$

d) $\complement_B^C = B - C = \{6, 8\}$

22. Vamos considerar o diagrama ao lado, que representa a situação descrita.



Seja *A* o conjunto que representa a região hachurada no diagrama anterior, então: $U = A \cup C$

$A = C^C = U - C \Rightarrow A^C = U - A = C$

Logo, o complementar do complementar de *C* é o próprio conjunto *C*.

23. **a)** $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 10 + 5 - 0$

$n(A \cup B) = 15$

b) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 15 + 15 - 3$

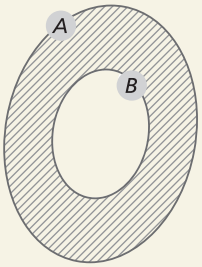
$n(A \cup B) = 27$

c) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

Se $n(A) = 0$, então $n(A \cap B) = 0$.

Logo, $n(A - B) = 0$.

d) $A \cap \complement_A^B = A \cap (A - B) = A - B$



Logo: $n(A - B) = n\left(A \cap \complement_A^B\right) = 5$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

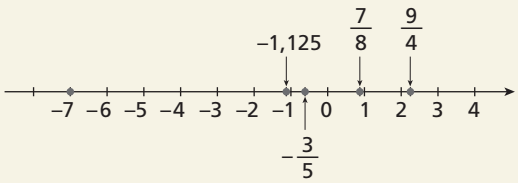
MODERNA

24. **a)** Falsa, pois -2 é um número negativo e, portanto, não é natural.
b) verdadeira
c) verdadeira
d) Falsa, pois o zero é natural e não pertence ao conjunto $\mathbb{Z}^*$.
e) verdadeira
f) Falsa, pois $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \{0\}$.

25. Não, essa seria uma generalização indevida, pois o resultado de 3 dividido por 2, por exemplo, não está definido no conjunto dos números inteiros.

26. **a)** O conjunto $\mathbb{N}$.
b) O conjunto $\mathbb{Q}$, pois existem valores não inteiros.
c) O conjunto $\mathbb{Z}$, pois em alguns casos indicam-se os andares abaixo do térreo com valores negativos.
d) O conjunto $\mathbb{Q}$.

27. $\frac{9}{4} > \frac{7}{8} > -\frac{3}{5} > -1{,}125 > -7$



ADILSON SECCO

28. **a)** • Seja x a fração geratriz:
$x = -10{,}111...$ (I)
$10x = -101{,}111...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$9x = -91$
$x = -\frac{91}{9}$

• Seja y a fração geratriz:
$y = -10{,}010101...$ (I)
$100y = -1001{,}0101...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$99y = -991$
$y = -\frac{991}{99}$

b) • Seja x a fração geratriz:
$x = 1{,}333...$ (I)
$10x = 13{,}333...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$9x = 12$
$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

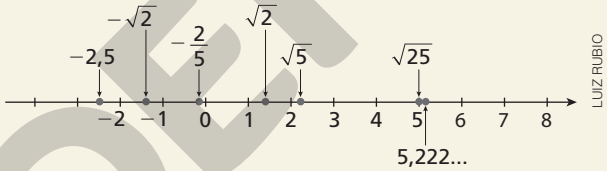
• Seja y a fração geratriz:
$y = 1{,}5333...$ (I)
$10y = 15{,}333...$ (II)
$100y = 153{,}333....$ (III)
Subtraindo (II) de (III), obtemos:
$90y = 138$
$y = \frac{138}{90} = \frac{23}{15}$

29. Vamos considerar os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d números inteiros e b e d não nulos.
a) A diferença de x e y é dada por:
$$x - y = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{bd}$$
Temos: $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot d - b \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo. Portanto, a diferença de dois números racionais é um número racional.
b) O quociente de x e y, com $y \neq 0$, é dado por:
$$x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$
Temos: $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo. Portanto, o quociente de dois números racionais é um número racional.

Comentário: Uma extensão dessa atividade e do exercício resolvido **R6**, pode ser proposta aos alunos: demonstrar que a potência enésima de um número racional é um número racional, sendo n um número natural.

30. **a)** verdadeira
b) verdadeira
c) Falsa, pois, por exemplo, $1 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
d) verdadeira
e) verdadeira
f) Falsa, pois toda dízima periódica pode ser escrita na forma $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$; portanto, é um número racional.

31.



LUIZ RUBIO

ordem crescente: $-2{,}5$; $-\sqrt{2}$; $-\frac{2}{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{25}$; $5{,}222...$
a) Existem dois naturais: 0 e 1.
b) Existem três inteiros: -1, 0 e 1.
c) Existem infinitos racionais, pois, por exemplo, podemos obter a média aritmética entre 0 e 1, que é um número racional; depois, obter a média aritmética entre 0 e a média obtida anteriormente; e assim sucessivamente.
d) Existem infinitos reais, pois, por exemplo, existem infinitos números racionais.

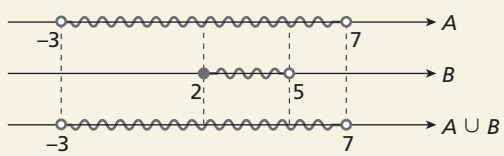
32. **a)** $-13 \notin \mathbb{N}$
b) $0 \notin \mathbb{Z}^*$
c) $-2{,}25 \notin \mathbb{Q}_+$
d) $\frac{6}{16} \in \mathbb{Q}$
e) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}^*$
f) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{R}_-$
g) $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$
h) $\mathbb{R}^* \not\subset \mathbb{R}_+$
i) $\mathbb{Q}_+ \not\subset \mathbb{R}_-$

33. **a)** Verdadeira. Seja $x \in \mathbb{Q}$, então $x \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$; logo, $x \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q}$, isto é, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$.
b) Falsa, pois, por exemplo: $-1 \in \mathbb{Z}$ e $-1 \notin \mathbb{N}$
c) Falsa, pois: $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
d) Falsa, pois: $0 \in \mathbb{N}$ e $0 \notin \mathbb{Z}^*$

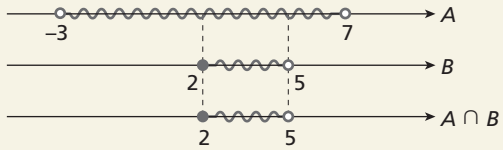
34. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

MODERNA

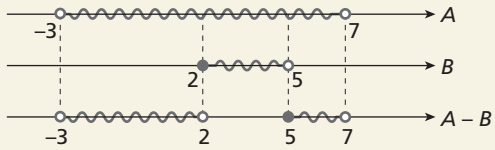
35. a)



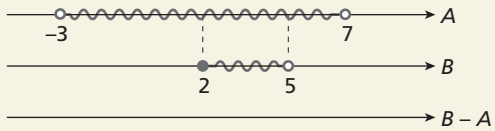
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 7\} = A$



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\} = B$

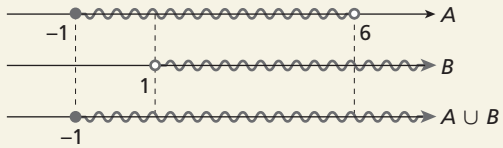


$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 5 \leqslant x < 7\}$



$B - A = \varnothing$

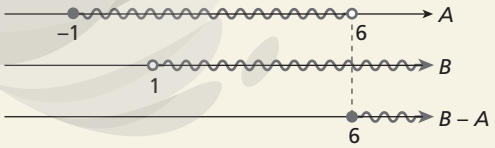
b)



$A \cup B = [-1, +\infty[$

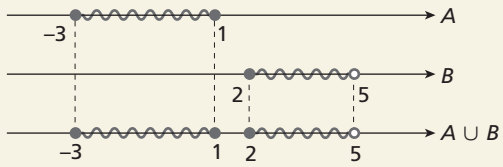
$A \cap B =]1, 6[$

$A - B = [-1, 1]$

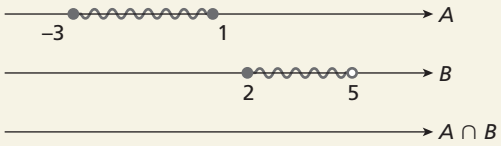


$B - A = [6, +\infty[$

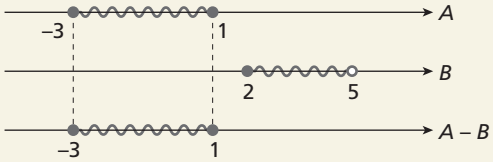
c)



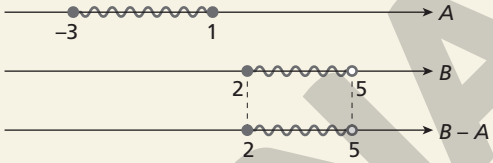
$A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$



$A \cap B = \varnothing$



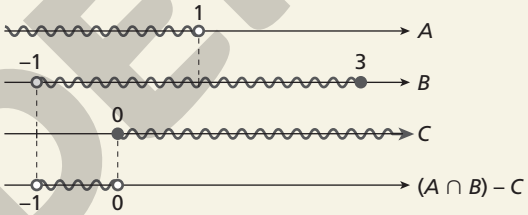
$A - B = [-3, 1] = A$



$B - A = [2, 5[= B$

36. Comprimento da circunferência: $C = 2\pi r$
Para $r = 0{,}5$, temos: $C = 2\pi(0{,}5) \simeq 3{,}14$
Área do círculo: $A = \pi r^2$
Para $r = 0{,}5$, temos: $A = \pi(0{,}5)^2 = 0{,}25\pi \simeq 0{,}79$
alternativa d

37.



alternativa a

Exercícios complementares

1. a) $A = \{-20, -10, -4, -2, 2, 4, 10, 20\}$
b) $B = \varnothing$
c) $C = \{0, 1, 2\}$

2. Respostas possíveis:
a) $A = \{x \mid x$ é letra da palavra banana$\}$
b) $B = \{x \mid x$ é natural e potência de 2$\}$

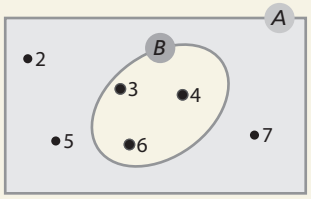
3. a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $A - C = \{0, 1, 2\}$
c) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$
d) $A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
e) $A - B = \{0\}$
f) $A \cap C = \{3, 4\}$
g) $B \cap C = \{3, 4, 5, 6\} = C$
h) $(A - B) \cap C = \{\ \} = \varnothing$

4. a) O resultado de $(A \cap B)$ está representado nas regiões IV e VII.
O resultado de $(A \cap B) - C$ está representado na região IV.
b) $B - A = \varnothing$
Logo: $(B - A) \cap C = \varnothing$
c) O resultado de $(A - B)$ está representado na região I.
Logo: $(A - B) \cap C = \varnothing$

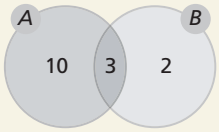
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

5. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$B = \{3, 4, 6\}$
$\complement_A^B = A - B = \{2, 5, 7\}$

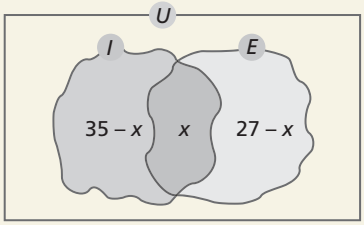


6.



Pelo diagrama, três pessoas usam os produtos A e B.

7. Vamos considerar os conjuntos:
U: conjunto de todos os alunos da sala de aula
E: conjunto dos alunos que falam espanhol
I: conjunto dos alunos que falam inglês
Podemos construir o seguinte diagrama:

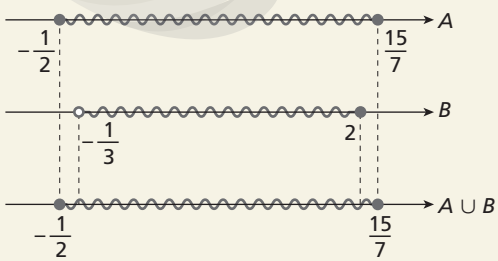


a) $35 - x + x + 27 - x = 50 \Rightarrow x = 12$
Assim, 12 alunos falam inglês e espanhol.
b) $35 - x = 35 - 12 = 23$
Assim, 23 alunos falam somente inglês.
c) $27 - x = 27 - 12 = 15$
Assim, 15 alunos falam somente espanhol.

8. Se $A \cap M = \{3\}$, então $3 \in M$ e $7 \notin M$.
Se $B \cap M = \{8\}$, então $8 \in M$, $7 \notin M$ e $9 \notin M$.
Como $A = \{3, 7\}$, $B = \{7, 8, 9\}$ e
$A \cup B \cup M = \{3, 7, 8, 9, 10\}$, então $10 \in M$.
Logo, $M = \{3, 8, 10\}$ e $n(M) = 3$.

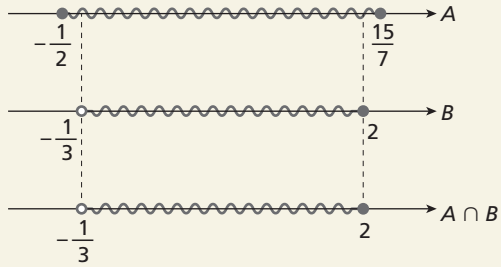
9. Podemos definir os seguintes conjuntos:
U: conjunto de todas as pessoas analisadas
A: conjunto das pessoas que têm miopia
B: conjunto das pessoas que têm astigmatismo
Então:
$n(U) = n(A \cup B) = 45$
$n(A) = x + 9$
$n(B) = x$
$n(A \cap B) = 40\% \cdot (45) = 18$
Logo:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$45 = x + 9 + x - 18$
$54 = 2x$
$x = 27$
Portanto, 27 pessoas têm astigmatismo e 36 pessoas têm miopia.

10. a)



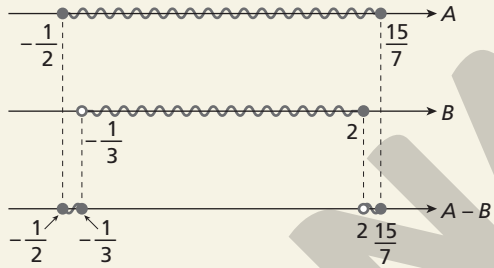
$A \cup B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{15}{7}\right] = A$

b)



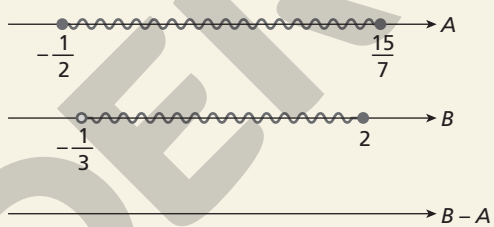
$A \cap B = \left]-\frac{1}{3}, 2\right] = B$

c)



$A - B = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

d)



$B - A = \varnothing$

e) $\complement_A^B = A - B = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

11. Sabemos que os conjuntos A e B são iguais, ou seja, possuem os mesmos elementos. Então, podemos formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Logo, $x = 1$ e $y = 2$.

12. a) O número máximo de elementos de $A - B$ é obtido quando A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$. Nesse caso:
$n(A - B) = n(A) = x$

b) Da mesma forma que no item **a**, o número máximo de elementos de $B - A$ é obtido quando A e B são disjuntos. Nesse caso:
$n(B - A) = n(B) = y$

c) O número máximo de elementos de $A \cup B$ é obtido quando A e B são disjuntos, ou seja, quando $n(A \cap B) = 0$. Nesse caso:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = x + y$

d) O número máximo de elementos de $A \cap B$ é obtido quando $B \subset A$ (já que o número de elementos de A é maior que o de B). Nesse caso:
$n(A \cap B) = n(B) = y$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

13. a) Em uma planilha eletrônica, pode-se fazer:

	Fórmula		
	A	B	C
1	***n***	**Fração enésima**	**Valor aproximado da expressão**
2	1	=(–1)^(A2–1)*4/(2*A2–1)	=B2
3	=A2+1	=(–1)^(A3–1)*4/(2*A3–1)	=C2+B3

Da linha 4 em diante, basta copiar as fórmulas da linha anterior.
As primeiras linhas, para n variando de 1 a 10, ficam assim:

	Fórmula		
	A	B	C
1	***n***	**Fração enésima**	**Valor aproximado da expressão**
2	1	4,000000000	4,000000000
3	2	–1,333333333	2,666666667
4	3	0,800000000	3,466666667
5	4	–0,571428571	2,895238095
6	5	0,444444444	3,339682540
7	6	–0,363636364	2,976046176
8	7	0,307692308	3,283738484
9	8	–0,266666667	3,017071817
10	9	0,235294118	3,252365935
11	10	–0,210526316	3,041839619

Continuando a iteração, arrastando a seleção das células A3, B3 e C3 até as células A10.001, B10.001 e C10.001, respectivamente, obtém-se:

	Fórmula		
	A	B	C
1	***n***	**Fração enésima**	**Valor aproximado da expressão**
		⋮	
10.001	10.000	–0,000200010	3,141492654

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

b) Espera-se que os alunos percebam que a sequência converge para π.

Comentário: Do ponto de vista pedagógico, essa atividade pretende que os alunos experimentem, com o uso de uma planilha eletrônica, o cálculo de elementos de uma série convergente a um número, no caso, o número π.

A série apresentada no exercício,

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{2n-1},$$

$n \in \mathbb{N}^*$, é obtida a partir da série de Gregory, publicada em 1670,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

multiplicando-se ambos os seus termos por 4.

Autoavaliação

1. A única situação que não é resolvida com conceitos referentes a conjuntos é a do item **c**. Para resolvê-la, usamos conceitos de medidas (cálculo do perímetro de uma figura geométrica plana). O perímetro do quadrado descrito é 8 cm.
alternativa c

2. Para representar o conjunto dos números primos usando a notação de conjunto, fazemos:
$P = \{x \mid x$ é um número natural que tem exatamente dois divisores distintos$\}$
alternativa c

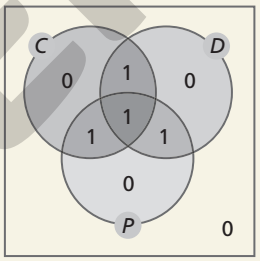
3. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\} = U$
alternativa d

4. $A - B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = A$
alternativa b

5. $A \cap B = \varnothing$
alternativa a

6. $\complement_U^A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = B$
alternativa c

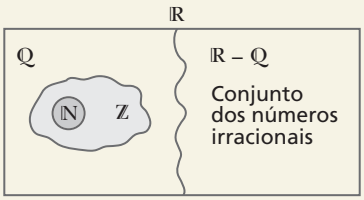
7. Podemos construir o seguinte diagrama:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

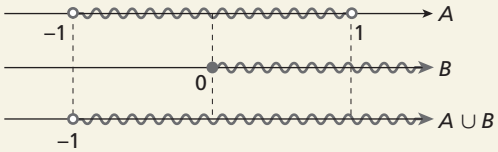
Portanto, há quatro membros na família.
alternativa a

8.

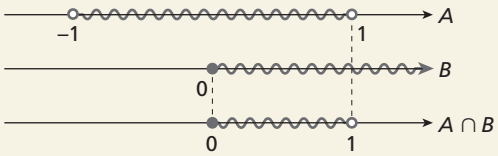


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
alternativa b

9.



$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\} =]-1, +\infty[$



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1[$

alternativa b

MODERNA

Capítulo 3 – Funções

Exercícios propostos

1. a) Para consumo de até 10 m³, o valor a pagar é o mesmo. Assim, $f(9) = f(7)$. Logo, quem consome 9 m³ de água não paga mais do que quem consome 7 m³.

b) $f(19) = 2 \cdot (15{,}10 + 2{,}35 \cdot 9) \Rightarrow f(19) = 2 \cdot 36{,}25 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(19) = 72{,}50$

Portanto, o valor da conta para um consumo mensal de 19 m³ é de R$ 72,50.

$f(27) = 2 \cdot (15{,}10 + 2{,}35 \cdot 10 + 5{,}50 \cdot 7) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(27) = 154{,}20$

Portanto, o valor da conta para um consumo mensal de 27 m³ é de R$ 154,20.

c) O valor a pagar inclui o consumo de água e as despesas referentes a esgoto. Dividindo por 2, encontra-se o valor do consumo de água: $748{,}80 : 2 = 374{,}40$
Por um consumo de água de 50 m³, o valor a pagar referente à água seria de R$ 203,60, conforme mostrado a seguir.

Faixa de consumo (m³)	Consumo total (m³)	Valor total a pagar (R$)
Até 10	10	15,10
De 11 a 20	20	$15{,}10 + 2{,}35 \cdot 10 = 38{,}60$
De 21 a 50	50	$15{,}10 + 23{,}5 + 5{,}50 \cdot 30 = 203{,}60$

Percebe-se, assim, que o consumo da casa de Flávia foi acima de 50 m³. Dessa maneira, o cálculo pode ser:
$203{,}60 + 6{,}1(x - 50) = 374{,}40 \Rightarrow 6{,}1x = 475{,}8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 78$
Portanto, o consumo de água na casa de Flávia foi de 78 m³.

Comentário: Pode-se pedir aos alunos que observem a conta de água de suas residências para comparar com os valores dispostos no exercício. Essa é também uma boa oportunidade para discussão sobre o uso responsável desse recurso natural.

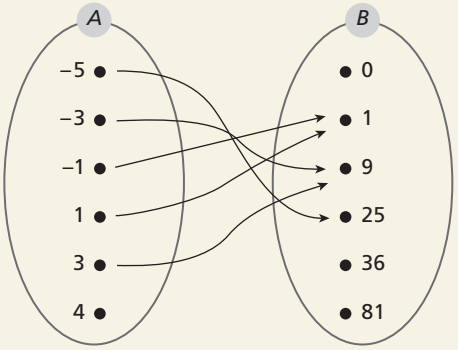
2. a) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

b) Não é função, pois existe um elemento de A (o elemento 3) que tem dois correspondentes em B (os elementos 2 e 3).

c) Não é função, pois existe um elemento de A (o elemento 5) que não tem correspondente em B.

d) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

3. a)



b) Não, pois existe um elemento de A (o elemento 4) que não tem correspondente em B.

4. a) variável independente: medida do diâmetro da base; variável dependente: preço de custo.

b) Devemos determinar $p(x)$ para $x = 3$:
$p(3) = 0{,}01 \cdot 3 + 0{,}06 = 0{,}09$
Portanto, o preço de custo de um parafuso com base de 3 milímetros de diâmetro é R$ 0,09.

c) Devemos determinar x para $p(x) = 0{,}11$:
$0{,}11 = 0{,}01x + 0{,}06 \Rightarrow 0{,}01x = 0{,}05 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{0{,}05}{0{,}01} = 5$
Logo, a medida do diâmetro da base de um parafuso cujo preço de custo é R$ 0,11 é 5 mm.

d) De acordo com o cálculo do item **b**, o preço de custo de 1 parafuso com base de 3 mm é R$ 0,09.
Então, o preço para 500 desses parafusos é:
$p = 500 \cdot 0{,}09 = 45$
Logo, o preço é R$ 45,00.

e) O preço de custo de 1 parafuso com base de 4 mm é dado por:
$p(4) = 0{,}01 \cdot 4 + 0{,}06 \Rightarrow p(4) = 0{,}1$
Portanto, o preço de custo de 100 parafusos é igual a:
$p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$
Assim, o preço de custo é R$ 10,00.
Como o preço de venda foi R$ 20,00, houve um percentual de 100% de lucro nessa venda.

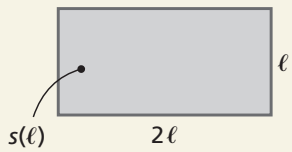
f) Não há dados suficientes para que seja dada uma resposta a este item.

5. a) $D(f) = \{5, 6, 7, 8\} = A$
$CD(f) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} = B$
$Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$

b) Não existe x tal que $f(x) = 4$.

c) Para $x = 5$, temos $f(5) = 6$.

6.



$s(\ell) = 2\ell \cdot \ell \Rightarrow s(\ell) = 2\ell^2$
$D(s) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

7. **a)** $f(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17 \Rightarrow f(4) = 17$

b) $f(-2) = 4 \cdot (-2) + 1 = -7 \Rightarrow f(-2) = -7$

c) $f(-1) = 4 \cdot (-1) + 1 = -3$
$f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$
$f(11) = 4 \cdot 11 + 1 = 45$
Logo: $f(-1) + f(0) - f(11) = -3 + 1 - 45 = -47$

d) $f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$
$f(-3) = 4 \cdot (-3) + 1 = -11$
Logo: $2f(3) - f(-3) = 2 \cdot 13 - (-11) = 37$

8. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$

b) Condição de existência para $g(x)$:
$x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$
Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$.

c) Condição de existência para $i(x)$:
$x - 8 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 8$
Assim, $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$.

d) Condição de existência para $j(x)$:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Logo, $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3\}$.

9. **a)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

- $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$
- $f(4) = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$
- $f(9) = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$
- $f(16) = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$
- $f(25) = \dfrac{1}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}$

Logo, $\text{Im}(f) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}\right\}$.

b) $w(x) = \dfrac{1}{x-1}$

- $w(2) = \dfrac{1}{2-1} = 1$
- $w(3) = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$
- $w(4) = \dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{3}$
- $w(5) = \dfrac{1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$
- $w(6) = \dfrac{1}{6-1} = \dfrac{1}{5}$

Continuando o cálculo das imagens de w para sucessivos valores de seu domínio, pode-se concluir que:
$\text{Im}(w) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots\right\}$

10. **a)** $h(x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$

b) $s(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = 1$

c) $m(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ (Não há zero real.)

d) $p(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} = 0$ (Não há zero real.)

11. Procura-se x tal que $f(x) = -6$.
Assim:
$x^2 - 2x - 6 = -6 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

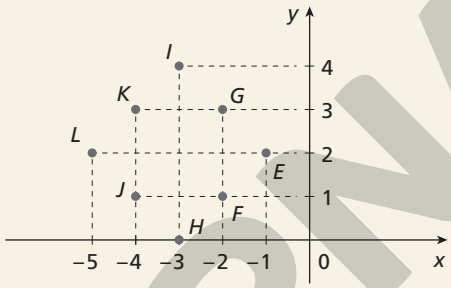
12. $f(3) = 11 \Rightarrow 11 = a \cdot 3 - 4 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$
Logo, f é dada por $f(x) = 5x - 4$.
Queremos determinar $f(x)$ para $x = -5$:
$f(-5) = 5 \cdot (-5) - 4 \Rightarrow f(-5) = -29$

13. **a)** $g(2) = 8 \Rightarrow 8 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 8$ (I)
$g(-2) = -4 \Rightarrow -4 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow$
$\Rightarrow -2a + b = -4$ (II)
Somando as equações (I) e (II), membro a membro, obtemos:
$2b = 4 \Rightarrow b = 2$
Substituindo b por 2 em (I), obtemos:
$2a + 2 = 8 \Rightarrow a = 3$
Assim, $a = 3$ e $b = 2$.

b) g é dada pela lei $g(x) = 3x + 2$. Assim:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

14.



ADILSON SECCO

15. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$

16. No eixo das abscissas, a ordenada é igual a zero:
$5y + 10 = 0 \Rightarrow y = -2$

17. No 2º quadrante, a ordenada do ponto é positiva e a abscissa é negativa. Então:
$2x \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$ e $y + 3 \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant -3$
Logo, $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$.

18. Observando o gráfico, podemos verificar o que se pede.

a) Os anos em que a variação da quantidade de voos aumentou foram de 2008 a 2012.

b) A quantidade de voos cresceu mais rapidamente no período de 2010 a 2011.

Comentário: No *site* do Departamento de Controle do Espaço Aéreo, uma organização governamental subordinada ao Ministério da Defesa e ao Comando da Aeronáutica, encontram-se informações sobre o controle do tráfego aéreo. O *site* é <https://www.decea.gov.br/>, acesso em: 4 ago. 2020.

19. **a)**
- $f(3) = 1$
- $f(-2) = -1$
- $f(4) = 3$
- $f(2) = 5$

b)
- $f(x) = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$
- $f(x) = 0 \Rightarrow x = -0{,}5$
- $f(x) = 3 \Rightarrow x = 0{,}9$, $x = 2{,}5$ ou $x = 4$
- $f(x) = 4 \Rightarrow x = 1{,}3$ ou $x = 2{,}4$

c) $\text{Im}(f) = [-1, 5]$

d)
- $(0, 6)$: nenhum, pois 6 não pertence à imagem de f.
- $(0, 2)$: três pontos
- $(0, 4)$: dois pontos
- $(0, 0)$: um ponto

e)
- não
- não

Comentário: O objetivo principal desse exercício é que os alunos adquiram estratégias para avaliar quando um gráfico representa ou não uma função. Ao responder aos

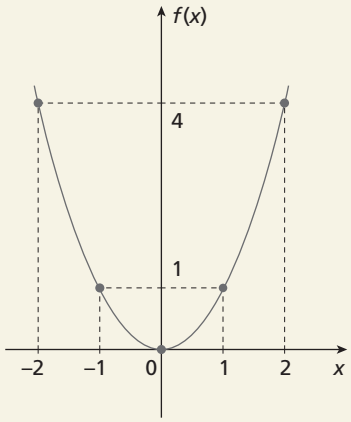
MODERNA

itens **a** e **b**, eles terão também a oportunidade de trabalhar com estimativa, o que pode gerar respostas ligeiramente diferentes na classe.

20. **a)** Para obter as coordenadas dos pontos do gráfico a ser construído, vamos primeiro construir uma tabela.

x	$f(x) = x^2$	$(x, f(x))$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$

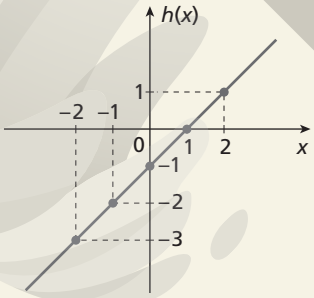
A representação gráfica de f é:



b) Podemos construir uma tabela tomando alguns valores pertencentes ao domínio da função h.

x	$h(x) = x - 1$	$(x, h(x))$
-2	$h(-2) = -2 - 1 = -3$	$(-2, -3)$
-1	$h(-1) = -1 - 1 = -2$	$(-1, -2)$
0	$h(0) = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$h(1) = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$h(2) = 2 - 1 = 1$	$(2, 1)$

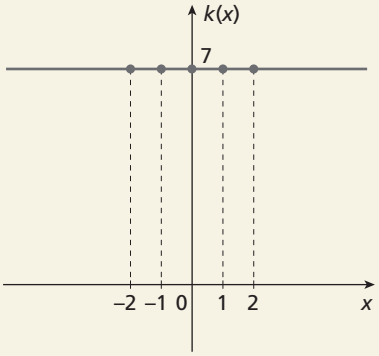
A representação gráfica de h é:



c) Primeiro construímos uma tabela.

x	$k(x) = 7$	$(x, h(x))$
-2	$k(-2) = 7$	$(-2, 7)$
-1	$k(-1) = 7$	$(-1, 7)$
0	$k(0) = 7$	$(0, 7)$
1	$k(1) = 7$	$(1, 7)$
2	$k(2) = 7$	$(2, 7)$

A representação gráfica de k é:



Comentário: Pode-se comentar com os alunos a diferença entre os gráficos dos itens **a**, **b** e **c** e ressaltar a importância do domínio e da imagem na construção de um gráfico. Pode-se também, no item **b**, colocar um intervalo no domínio para que os alunos determinem a imagem.

21. **a)** Para $x = 8$, temos: $f(8) = 5 \cdot 8 - 9 = 31$

Portanto, o par ordenado $(8, -1)$ não pertence ao gráfico de f, já que $f(8) = 31 \neq -1$.

b) Para $x = -2$, temos: $f(-2) = 1$

Logo: $1 = a \cdot (-2) + 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

c) Não, pois $3 \notin D(f)$.

22. **a)** variável independente: tempo;

variável dependente: número de litros.

b) Para cada ponto pertencente ao gráfico, observamos que o número de litros é sempre igual a 8 vezes o correspondente tempo. Logo, a lei que relaciona as duas variáveis é $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.

c) O par ordenado (1,5; 12) indica que, em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.

d) Para $x = 6$, temos: $y = 8 \cdot 6 \Rightarrow y = 48$

Para $x = 10$, temos: $y = 8 \cdot 10 \Rightarrow y = 80$

Logo, em 6 horas a máquina produziria 48 litros da substância e, em 10 horas, 80 litros, em regime ininterrupto.

e) Para $y = 4$, temos: $4 = 8x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, é necessária 0,5 hora para a máquina produzir 4 litros da substância.

23. Vamos determinar os zeros das funções f e g:

$f(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$g(x) = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Observe que essas funções têm o mesmo zero.

Podemos construir duas tabelas, uma para cada função, com alguns valores pertencentes ao domínio, incluindo o zero das funções ($x = 2$).

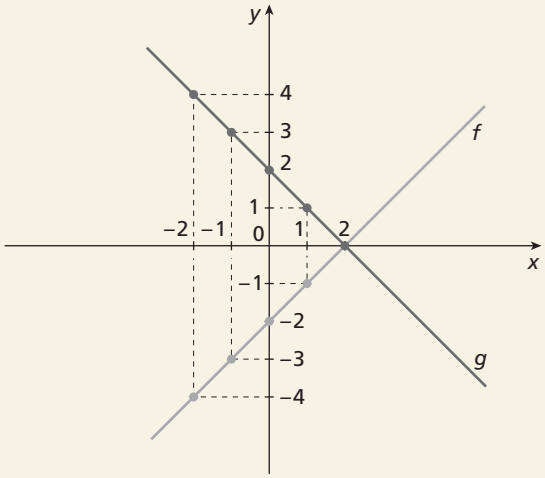
x	$f(x) = x - 2$	(x, y)
-2	$f(-2) = -2 - 2 = -4$	$(-2, -4)$
-1	$f(-1) = -1 - 2 = -3$	$(-1, -3)$
0	$f(0) = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$f(1) = 1 - 2 = -1$	$(1, -1)$
2	$f(2) = 2 - 2 = 0$	$(2, 0)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

x	$g(x) = -x + 2$	(x, y)
-2	$g(-2) = -(-2) + 2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$g(-1) = -(-1) + 2 = 3$	$(-1, 3)$
0	$g(0) = 0 + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$g(1) = -1 + 2 = 1$	$(1, 1)$
2	$g(2) = -2 + 2 = 0$	$(2, 0)$

As representações gráficas são:



Analisando os gráficos, observamos que:

- $y = f(x)$ é positivo para $x > 2$;
- $y = g(x)$ é positivo para $x < 2$.

24. **a)** A lei que relaciona o preço (y) com o número de litros (x) é dada por: $y = 3{,}10x$

b) Para $x = 1{,}5$, temos: $y = 3{,}10 \cdot 1{,}5 \Rightarrow y = 4{,}65$
Portanto, 1,5 litro de gasolina custa, nesse posto, R$ 4,65.

c) Para $y = 9{,}30$, temos:

$$9{,}30 = 3{,}10x \Rightarrow x = \frac{9{,}30}{3{,}10} \Rightarrow x = 3$$

Portanto, se pagar R$ 9,30, o consumidor comprará 3 litros de gasolina.
Para $y = 31{,}00$, temos:

$$31{,}00 = 3{,}10x \Rightarrow x = \frac{31{,}00}{3{,}10} \Rightarrow x = 10$$

Portanto, se pagar R$ 31,00, o consumidor comprará 10 litros de gasolina.

d) Para $y = 155{,}00$ temos:

$$155{,}00 = 3{,}10x \Rightarrow x = \frac{155{,}00}{3{,}10} \Rightarrow x = 50$$

Portanto, com R$ 155,00 poderão ser comprados, nesse posto, 50 litros de gasolina, no máximo.

25. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
zero da função: 2

b) $D(h) = [-2, 2]$
$Im(h) = [-3, 3]$
zeros da função: -2, 0 e 2

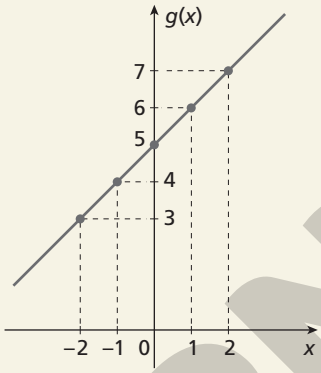
26. **a)** A função f é crescente para $x \in \mathbb{R}$; a função g é crescente para $x \in [0, +\infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$; a função h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.

b) A função f não possui valor máximo ou valor mínimo.
A função g apresenta um valor mínimo igual a 1.
A função h não possui valor máximo ou valor mínimo.

27. **a)** Podemos construir uma tabela para alguns valores pertencentes ao domínio de g. Veja:

x	$g(x) = x + 5$	$(x, g(x))$
-2	$g(-2) = -2 + 5 = 3$	$(-2, 3)$
-1	$g(-1) = -1 + 5 = 4$	$(-1, 4)$
0	$g(0) = 0 + 5 = 5$	$(0, 5)$
1	$g(1) = 1 + 5 = 6$	$(1, 6)$
2	$g(2) = 2 + 5 = 7$	$(2, 7)$

A representação gráfica de g é:

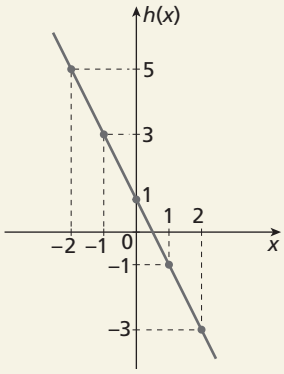


Observe que a função g, tal que $g(x) = x + 5$, é crescente para $x \in \mathbb{R}$.

b) Podemos construir uma tabela para alguns valores pertencentes ao domínio de h. Veja:

x	$h(x) = -2x + 1$	$(x, h(x))$
-2	$h(-2) = -2 \cdot (-2) + 1 = 5$	$(-2, 5)$
-1	$h(-1) = -2 \cdot (-1) + 1 = 3$	$(-1, 3)$
0	$h(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$h(1) = -2 \cdot 1 + 1 = -1$	$(1, -1)$
2	$h(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$	$(2, -3)$

A representação gráfica de h é:



Observe que a função h, dada por $h(x) = -2x + 1$, é decrescente para $x \in \mathbb{R}$.

Comentário: Nesse exercício, pode-se explorar com os alunos se, tratando-se de funções do 1º grau, há necessidade de uma tabela com muitos valores do domínio.

28. **a)** De acordo com o gráfico, temos que a imagem de 2 pela função f é $y = 2$.

b) A imagem é -2 para $x = 4$.

c) No intervalo $[-1, 2]$, a função é positiva, pois encontra-se acima do eixo x.

d) não

e) $D(f) = [-3, 4]$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

f) $\text{Im}(f) = [-2, 4]$

g) O valor máximo da função é 4.

h) O valor mínimo da função é -2.

29. **a)** $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$

O valor máximo é 4.

b) $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$

Não possui valor máximo nem valor mínimo.

c) $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$

Não possui valor máximo nem valor mínimo.

d) $\text{Im}(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

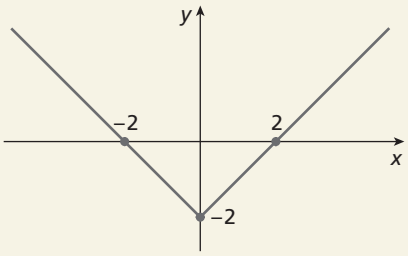
O valor mínimo é zero.

e) $\text{Im}(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

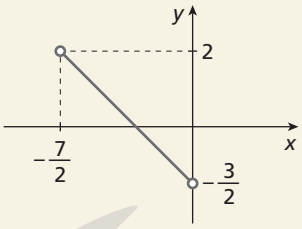
O valor mínimo é -3.

O valor máximo é 3.

30. Resposta possível:



31. Resposta possível:



32. **a)** verdadeira

b) Falsa, pois no intervalo [0, 1] a função é decrescente.

c) Falsa, pois no intervalo [0, 2] a função é negativa ou nula.

d) verdadeira

e) verdadeira

33. **a)** Os zeros da função são -2 e 2, pois são os valores nos quais a função intercepta o eixo x.

b) A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$.

A função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$.

c) A função é positiva para $x < -2$ ou $x > 2$.

A função é negativa para $-2 < x < 2$.

d) $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [-4, +\infty[$

e) O valor mínimo que essa função pode assumir é -4, que é a imagem de zero.

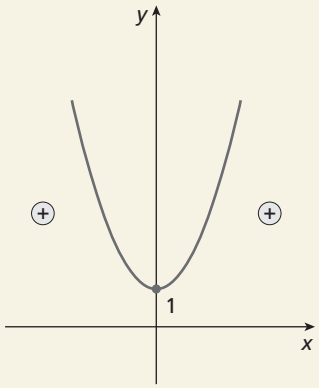
34. **a)** A quantidade de nascimentos de pessoas com o nome Carlos foi crescente nas décadas de 1930 a 1960, décadas de 1970 a 1980 e décadas de 1990 a 2000.

b) A quantidade de nascimentos de pessoas com o nome Carlos foi decrescente nas décadas de 1960 a 1970 e décadas de 1980 a 1990.

c) Na década de 1980, com 269.761 pessoas nascidas com nome Carlos.

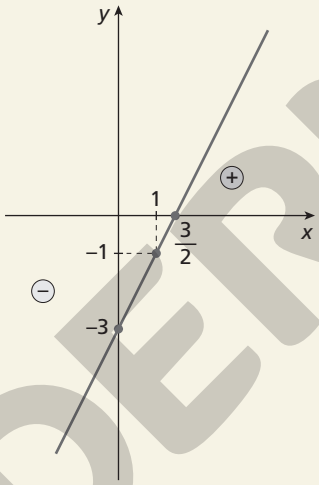
35. Fazendo um esboço dos gráficos das funções, temos:

a)



Para todo x, temos: $y > 0$

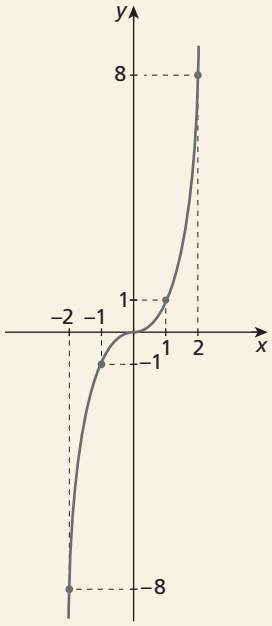
b)



Para $x < \frac{3}{2}$, temos: $y < 0$

Para $x > \frac{3}{2}$, temos: $y > 0$

c)

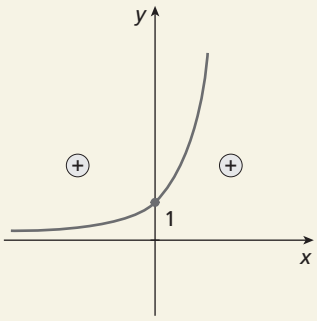


Para todo $x < 0$, temos: $y < 0$
Para todo $x > 0$, temos: $y > 0$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

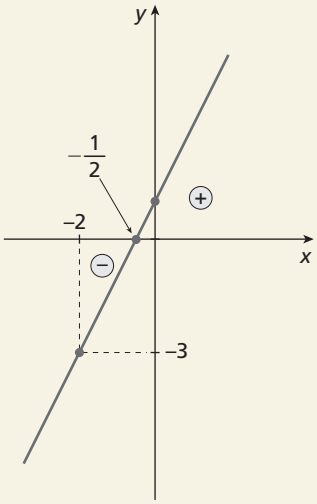
MODERNA

d)



Para todo x, temos: $y > 0$

e)



Para $x < -\frac{1}{2}$, temos: $y < 0$

Para $x > -\frac{1}{2}$, temos: $y > 0$

Assim, pelos gráficos e pelas análises feitas a partir deles, as funções dos itens **a** e **d** são positivas em todo o seu domínio: $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$

Comentário: Com a experiência adquirida até aqui, os estudantes podem aprofundar seu conhecimento explorando o uso de um *software* de construção de gráficos.

36. Se o gráfico da função é uma reta paralela ao eixo x, todos os valores do domínio da função têm a mesma imagem. Como o par ordenado $(0, -5)$ pertence ao gráfico da função, a lei que a define é dada por: $f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. **a)** $D(m) = \mathbb{R}$ e $Im(m) =]-\infty, 3]$

b) A função é constante para $x > 2$; nesse caso, a função é dada por $m(x) = 3$.

c) Como o gráfico intercepta o eixo x uma só vez, essa função tem apenas um zero, que é menor que -2.

d) Para definir o intervalo em que a função é positiva ou negativa, devemos inicialmente encontrar o zero dessa função, que está localizado no intervalo $]-\infty, -2]$. Assim, temos:

$m(x) = 0$

$-\frac{x^2}{2} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 3 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\sqrt{6}$ ou $x = \sqrt{6}$ (não serve)

Logo, a função é positiva no intervalo $\left]-\sqrt{6}, +\infty\right[$ e é negativa no intervalo $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right[$.

38. **a)** Se $0 \leqslant x < 30$, então: $y = 3\% \cdot 350x = 10{,}5x$

Se $30 \leqslant x \leqslant 100$, então: $y = 5\% \cdot 350x = 17{,}5x$

Se $x > 100$, então: $y = 8\% \cdot 350x = 28x$

Logo, temos a seguinte função:

$$y = f(x) = \begin{cases} 10{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$$

b) Se vender 80 bicicletas:

$x = 80 \Rightarrow f(80) = 17{,}5 \cdot 80 = 1.400$

Portanto, a comissão será de R$ 1.400,00.

Se vender 101 unidades:

$x = 101 \Rightarrow f(101) = 28 \cdot 101 = 2.828$

Então, a comissão será de R$ 2.828,00.

39. **a)** $x = -6$

$p(-6) = \frac{(-6)^2}{4} = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow p(-6) = 9$

b) $x = \frac{1}{2}$

$p\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{20}{7} = \frac{19}{7} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{7}$

c) Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores do que 3.

d) $x = -4$

$p(-4) = \frac{(-4)^2}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow p(-4) = 4$

e) $x = 3$

$p(3) = -\frac{2}{7} \cdot (3) + \frac{20}{7} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow p(3) = 2$

f) $x = 0$

$p(0) = -\frac{2}{7} \cdot 0 + \frac{20}{7} = \frac{20}{7} \Rightarrow p(0) = \frac{20}{7}$

40. **a)** Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{2x + 1}{x + 9}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{2y + 1}{y + 9}$

Expressando y em função de x, temos:

$\frac{2y + 1}{y + 9} = x \Rightarrow 2y + 1 = x(y + 9) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y + 1 = xy + 9x \Rightarrow 2y - xy = 9x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(2 - x) = 9x - 1 \Rightarrow y = \frac{9x - 1}{2 - x}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{9x - 1}{2 - x}$

b) Para que $f(x)$ exista:

$x + 9 \neq 0 \Rightarrow x \neq -9$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$ ou $D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$.

c) Condição de existência de $f^{-1}(x)$:

$2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Assim, $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$ ou $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$.

d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$ ou $Im(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

e) $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$ ou $Im(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-9\}$

Comentário: Um dos objetivos desse exercício é fazer os estudantes usarem as igualdades $D(f) = Im(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = Im(f)$ para obter os conjuntos $Im(f)$ e $Im(f^{-1})$ a partir dos conjuntos $D(f)$ e $D(f^{-1})$. Nesse caso, é interessante eles perceberem que $D(f)$ e $D(f^{-1})$ podem ser escritos da seguinte maneira:

$D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$ e $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$

Assim: $Im(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$ e
$Im(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$

Os alunos também podem escrever os domínios do seguinte modo:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$ ou $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

Nesse caso, para obter os conjuntos imagem, é necessário que se atente à troca das letras x por y. Assim:

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$ e $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

41. **a)** Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = 4x + 9$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 4y + 9$
Expressando y em função de x, temos:

$4y + 9 = x \Rightarrow 4y = x - 9 \Rightarrow y = \dfrac{x-9}{4}$

Portanto, f^{-1} é dada por: $f^{-1}(x) = \dfrac{x-9}{4}$

b) Substituindo $g(x)$ por y, obtemos: $y = -2x + 3$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -2y + 3$
Expressando y em função de x, temos:

$-2y + 3 = x \Rightarrow -2y = x - 3 \Rightarrow y = \dfrac{3-x}{2}$

Portanto, g^{-1} é dada por: $g^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{2}$

c) Substituindo $h(x)$ por y, obtemos: $y = -7x - \dfrac{1}{2}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -7y - \dfrac{1}{2}$

Expressando y em função de x, temos:

$-7y - \dfrac{1}{2} = x \Rightarrow -7y = x + \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-2x-1}{14}$

Portanto, h^{-1} é dada por: $h^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{14}$

d) Substituindo $m(x)$ por y, obtemos: $y = \dfrac{x+5}{3}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \dfrac{y+5}{3}$

Expressando y em função de x, temos:

$\dfrac{y+5}{3} = x \Rightarrow y + 5 = 3x \Rightarrow y = 3x - 5$

Portanto: $m^{-1}(x) = 3x - 5$

e) Substituindo $n(x)$ por y, obtemos: $y = x^3 + 1$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = y^3 + 1$
Expressando y em função de x, temos:

$y^3 + 1 = x \Rightarrow y^3 = x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1}$

Portanto, n^{-1} é dada por: $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

f) A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

42. **a)** O item **f** não admite função inversa, pois a função p não é bijetora.

b) • $f(x) = 4x + 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-9}{4}$ ou $y = \dfrac{x-9}{4}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = \dfrac{y-9}{4} \Rightarrow 4x = y - 9 \Rightarrow y = 4x + 9$

Portanto: $[f^{-1}]^{-1}(x) = 4x + 9 = f(x)$

• $g(x) = -2x + 3 \Rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{2}$ ou $y = \dfrac{3-x}{2}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = \dfrac{3-y}{2} \Rightarrow 2x = 3 - y \Rightarrow y = -2x + 3$

Portanto: $[g^{-1}]^{-1}(x) = -2x + 3 = g(x)$

• $h(x) = -7x - \dfrac{1}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{14}$ ou $y = \dfrac{-2x-1}{14}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = \dfrac{-2y-1}{14} \Rightarrow 14x = -2y - 1 \Rightarrow y = -7x - \dfrac{1}{2}$

Portanto: $[h^{-1}]^{-1}(x) = -7x - \dfrac{1}{2} = h(x)$

• $m(x) = \dfrac{x+5}{3} \Rightarrow m^{-1}(x) = 3x - 5$ ou $y = 3x - 5$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = 3y - 5 \Rightarrow y = \dfrac{x+5}{3}$

Portanto: $[m^{-1}]^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{3} = m(x)$

• $n(x) = x^3 + 1 \Rightarrow n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ou $y = \sqrt[3]{x-1}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos:

$x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow y = x^3 + 1$

Portanto: $[n^{-1}]^{-1}(x) = x^3 + 1 = n(x)$

• A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

Logo, com exceção do item **f**, que não tem inversa, as leis obtidas devem ser iguais às dadas.

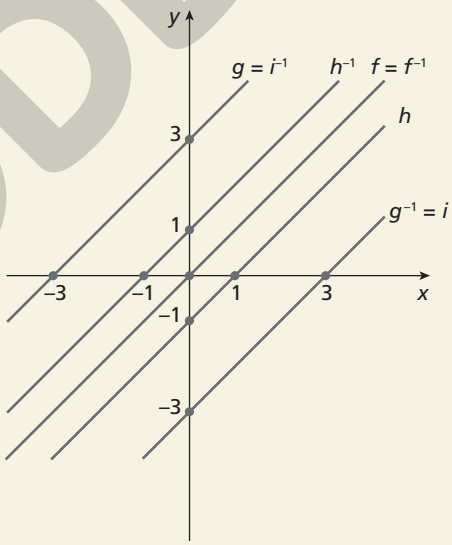
c) Os alunos devem perceber que a função inversa de sua inversa coincide com a própria função.

Comentário: Essa questão, assim como o exercício **44**, propicia aos estudantes descobrir, com base em casos particulares, uma propriedade de uma função invertível de domínio real, isto é, $[f^{-1}]^{-1}(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

43. **a)** Obtendo as leis das funções inversas, temos:

$f^{-1}(x) = x$, $g^{-1}(x) = x - 3$, $h^{-1}(x) = x + 1$ e $i^{-1}(x) = x + 3$

Assim, temos os gráficos:



ADILSON SECCO

b) Respostas possíveis:

- Os gráficos de cada uma dessas funções e de suas respectivas inversas são retas paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares.
- Os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

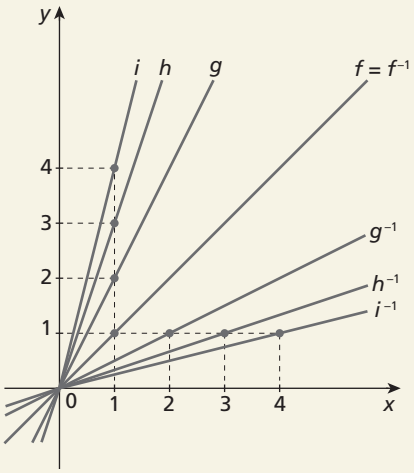
Comentário: Com o conhecimento adquirido até aqui, os estudantes são induzidos a antecipar, com base em casos particulares, o conteúdo a ser visto no próximo item.

44. **a)** Obtendo as leis das funções inversas, temos:

$f^{-1}(x) = x$, $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$, $h^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$ e $i^{-1}(x) = \dfrac{x}{4}$

MODERNA

Assim, temos os gráficos:



b) Respostas possíveis:

- Os gráficos de cada uma dessas funções e de suas respectivas inversas são retas que concorrem com a bissetriz dos quadrantes ímpares na origem do plano cartesiano.
- Os gráficos são retas simétricas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

45. a) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = -x + 3$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = -y + 3$

Expressando y em função de x, temos:

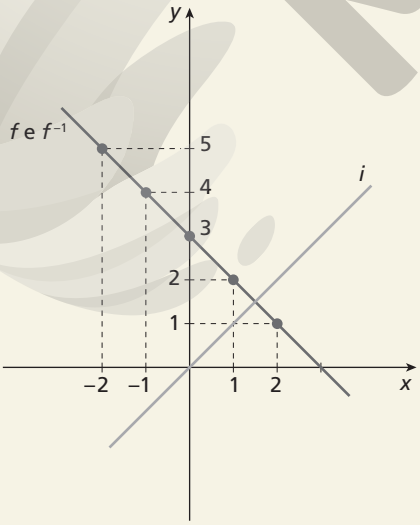
$-y + 3 = x \Rightarrow -y = x - 3 \Rightarrow y = 3 - x$

Portanto, f^{-1} é dada por: $f^{-1}(x) = 3 - x$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$. Veja:

x	$f(x) = -x + 3$	$f^{-1}(x) = 3 - x$
-2	$f(-2) = -(-2) + 3 = 5$	$f^{-1}(-2) = 3 - (-2) = 5$
-1	$f(-1) = -(-1) + 3 = 4$	$f^{-1}(-1) = 3 - (-1) = 4$
0	$f(0) = -(0) + 3 = 3$	$f^{-1}(0) = 3 - 0 = 3$
1	$f(1) = -(1) + 3 = 2$	$f^{-1}(1) = 3 - 1 = 2$
2	$f(2) = -(2) + 3 = 1$	$f^{-1}(2) = 3 - 2 = 1$

A representação gráfica de f e f^{-1} é:



Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i(x) = x$.

b) Substituindo $g(x)$ por y, obtemos: $y = 2x$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 2y$

Expressando y em função de x, temos:

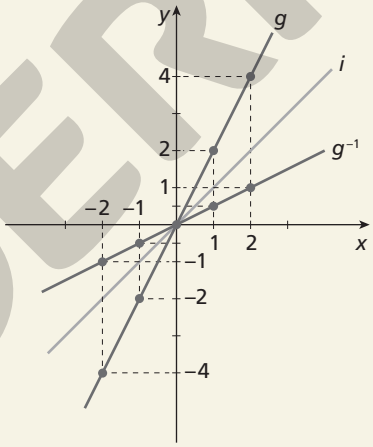
$2y = x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

Portanto, g^{-1} é dada por: $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de g e g^{-1}. Veja:

x	$g(x) = 2x$	$g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$
-2	$g(-2) = 2(-2) = -4$	$g^{-1}(-2) = \frac{-2}{2} = -1$
-1	$g(-1) = 2(-1) = -2$	$g^{-1}(-1) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$
0	$g(0) = 2(0) = 0$	$g^{-1}(0) = 0$
1	$g(1) = 2(1) = 2$	$g^{-1}(1) = \frac{1}{2}$
2	$g(2) = 2(2) = 4$	$g^{-1}(2) = \frac{2}{2} = 1$

A representação gráfica de g e g^{-1} é:



Os gráficos de g e g^{-1} são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i(x) = x$.

c) Substituindo $h(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{x}{3} - 2$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{y}{3} - 2$

Expressando y em função de x, temos: $\frac{y}{3} - 2 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y}{3} = x + 2 \Rightarrow y = 3(x + 2) \Rightarrow y = 3x + 6$

Portanto, h^{-1} é dada por: $h^{-1}(x) = 3x + 6$

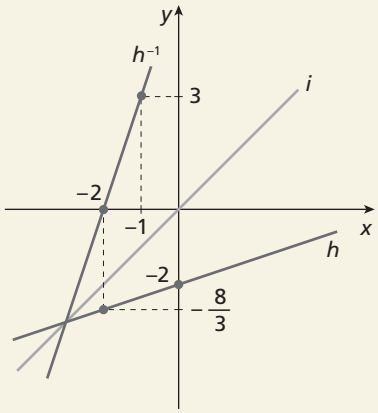
Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de h e h^{-1}. Veja:

x	$h(x) = \frac{x}{3} - 2$	$h^{-1}(x) = 3x + 6$
-2	$h(-2) = \frac{-2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$	$h^{-1}(-2) = 3(-2) + 6 = 0$
-1	$h(-1) = \frac{-1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$	$h^{-1}(-1) = 3(-1) + 6 = 3$
0	$h(0) = 0 - 2 = -2$	$h^{-1}(0) = 3(0) + 6 = 6$
1	$h(1) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$	$h^{-1}(1) = 3(1) + 6 = 9$
2	$h(2) = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$	$h^{-1}(2) = 3(2) + 6 = 12$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

A representação gráfica de h e h^{-1} é:



Os gráficos de h e h^{-1} são simétricos em relação ao gráfico de $i(x) = x$.

d) Substituindo $k(x)$ por y, obtemos: $y = 2x + 1$
Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = 2y + 1$
Expressando y em função de x, temos:

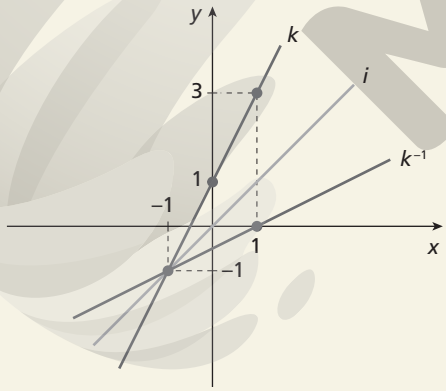
$2y + 1 = x \Rightarrow 2y = x - 1 \Rightarrow y = \frac{x-1}{2}$

Portanto, k^{-1} é dada por: $k^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Vamos construir uma tabela que contenha alguns valores dos domínios de k e k^{-1}. Veja:

x	$k(x) = 2x + 1$	$k^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$
-2	$k(-2) = 2(-2) + 1 = -3$	$k^{-1}(-2) = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2}$
-1	$k(-1) = 2(-1) + 1 = -1$	$k^{-1}(-1) = \frac{-1-1}{2} = -1$
0	$k(0) = 2(0) + 1 = 1$	$k^{-1}(0) = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$
1	$k(1) = 2(1) + 1 = 3$	$k^{-1}(1) = \frac{1-1}{2} = 0$
2	$k(2) = 2(2) + 1 = 5$	$k^{-1}(2) = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

A representação gráfica de k e k^{-1} é:

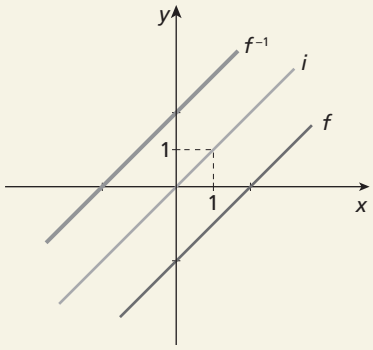


Os gráficos de k e k^{-1} são simétricos em relação ao gráfico de $i(x) = x$.

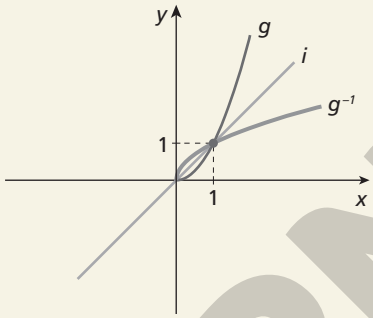
46. A função f é inversa da função g nos itens **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

47. O gráfico da função inversa é simétrico (em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares) ao gráfico da função dada.

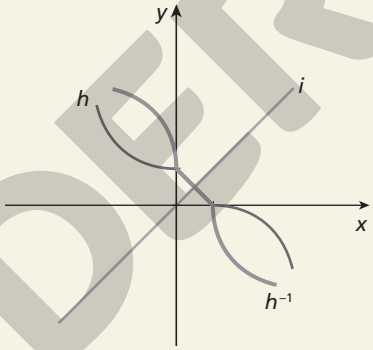
a)



b)

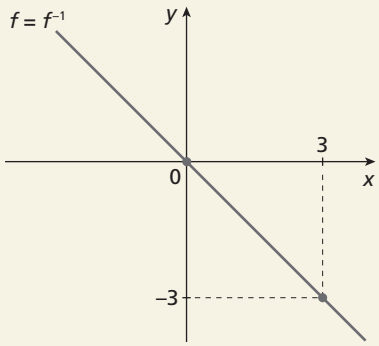


c)

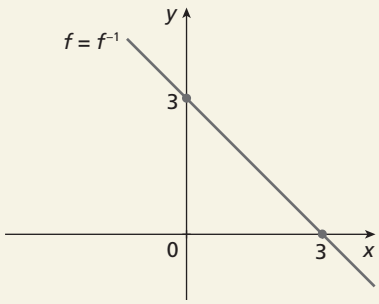


48. Considerando que uma função e a sua inversa têm gráficos que são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos:

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Comentário: É interessante aprofundar a discussão com os alunos e concluir que toda função cujo gráfico é uma reta perpendicular à bissetriz dos quadrantes ímpares tem uma função inversa com gráfico coincidente a ele.

Exercícios complementares

1. **a)** Resposta possível:
$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y = \pi x^2$

b) No par ordenado (x, y), x representa o raio do círculo e y representa a área do círculo de raio x.

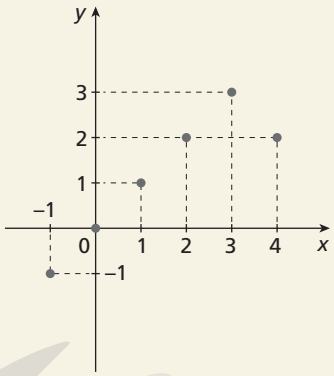
c) Variável dependente: y (a área do círculo)

d) Variável independente: x (o raio do círculo)

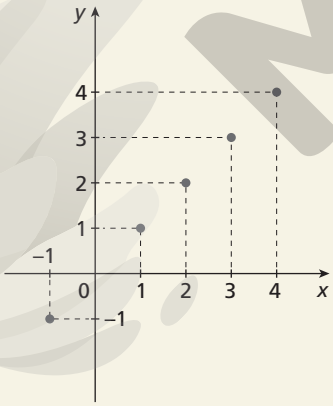
e) Para $x = r$, temos: $f(r) = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi r^2$
Para $x = 2r$, temos: $f(2r) = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2 \Rightarrow A' = 4\pi r^2$
Portanto, a área A' de um círculo de raio $2r$ é igual a 4 vezes a área A de um círculo de raio r.

2. Ao dividir o preço do etanol pelo número de litros correspondente, percebemos que o preço é igual nos dois postos:
$\frac{7{,}50}{3} = \frac{5{,}00}{2} = 2{,}50$ (preço do litro do etanol)

3. **a)** Nesse caso, o gráfico pode representar uma função, pois cada reta paralela ao eixo y, traçada pelos pontos do domínio, intercepta o gráfico em um único ponto.



b) Nesse caso, o gráfico não pode representar uma função de A em B, pois o zero não possui imagem no conjunto B.



4. **a)** $f(-2) = 0$

b) Resposta possível: $f(0{,}5) = 3{,}5$ (estimativa)

c) Respostas possíveis: para $f(x) = 2$, temos $x = 1{,}5$; $x = -1{,}5$; $x = 2{,}5$ ou $x = -2{,}5$ (estimativa)

d) $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$

e) Os zeros da função são -2 e 2 (abscissas dos pontos em que o gráfico intercepta o eixo x).

5. **a)** Resposta possível: 75 km (estimativa)

b) Das 10 h às 11 h (trecho constante do gráfico).

c) O par ordenado (2, 150) indica que, após 2 horas do início do movimento, ou seja, às 10 h, Lucas havia percorrido 150 km.

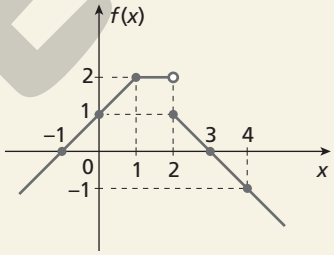
d) Às 11 h, ou seja, 3 horas depois das 8 h, Lucas havia percorrido 150 km. Às 12 h (4 horas depois das 8 h), Lucas havia percorrido 200 km. Portanto, das 11 h às 12 h, Lucas percorreu 50 km.

e) Sim. No item **d**. A quantidade de quilômetros percorrida pelo carro das 11 h às 12 h está representada no gráfico. Assim, a informação de que chovia torrencialmente, não é relevante para a resolução da questão.

6. Vamos primeiro construir uma tabela que contenha alguns valores do domínio de f. Veja:

x	$f(x)$	$(x, f(x))$
-1	$f(-1) = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$f(0) = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = -2 + 3 = 1$	$(2, 1)$
3	$f(3) = -3 + 3 = 0$	$(3, 0)$
4	$f(4) = -4 + 3 = -1$	$(4, -1)$

A representação gráfica de f é:



a) $f(x) > 0$, para $-1 < x < 3$
$f(x) = 0$, para $x = -1$ ou $x = 3$
$f(x) < 0$, para $x < -1$ ou $x > 3$

b) f é crescente em: $]-\infty, 1]$
f é constante em: $]1, 2[$
f é decrescente em: $[2, +\infty[$

c) Os zeros da função são -1 e 3

7. **a)** $f(x) = \begin{cases} 50, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 100, \text{ se } 1 < x \leq 3 \text{ ou } 5 \leq x < 6 \\ 0, \text{ se } 3 < x < 5 \text{ ou } 6 \leq x \leq 7 \\ 75, \text{ se } 7 < x \leq 8 \end{cases}$

b) Na primeira hora, a velocidade foi igual a 50 km/h (constante). Assim, a distância percorrida foi 50 km. Nas duas horas seguintes, a velocidade foi 100 km/h (constante).
Assim, a distância percorrida foi 200 km. Logo, a distância total percorrida nas três primeiras horas foi 250 km.

c) O ônibus ficou parado nos trechos do gráfico em que a velocidade é nula, ou seja, de 3 a 5 horas e de 6 a 7 horas. Logo, o ônibus ficou parado por 3 horas.

d) Respostas possíveis: Não parar entre a 6ª e a 7ª hora de viagem, locomovendo-se nesse período à velocidade de 75 km/h: percorrer a primeira hora a 75 km/h e se deslocar entre a 6ª e a 7ª hora a 50 km/h.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

8. **a)** A função g é crescente em $]-\infty, 0]$.

b) Os valores de x são -2 e 1, pois são as abscissas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e de g.

c) As funções f e g são simultaneamente positivas em $]-2, 2[$.

9. **a)** Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{x+1}{2}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{y+1}{2}$

Expressando y em função de x, temos:

$\frac{y+1}{2} = x \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow y = 2x - 1$

Como $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$, então:

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = 2x - 1$

b) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = \frac{2-x}{x}$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = \frac{2-y}{y}$

Expressando y em função de x, temos:

$\frac{2-y}{y} = x \Rightarrow \frac{2}{y} - 1 = x \Rightarrow \frac{2}{y} = x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = y(x+1) \Rightarrow y = \frac{2}{x+1}$

Como $D(f) = \mathbb{R}^*$ e $CD(f) = B$, então:

$f^{-1}: B \to \mathbb{R}^*$ tal que $f^{-1}(x) = \frac{2}{x+1}$

c) Substituindo $f(x)$ por y, obtemos: $y = x^2$

Substituindo y por x e x por y, obtemos: $x = y^2$

Expressando y em função de x, temos:

$y^2 = x \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{x} \Rightarrow |y| = \sqrt{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$

Como $D(f) = \mathbb{R}_+$ e $CD(f) = \mathbb{R}_+$, então $y = -\sqrt{x}$ (não serve).

Logo: $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

10. **a)** Não, pois para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais é preciso haver uma razão constante de proporcionalidade entre elas. Por exemplo, dobrando a idade, dobraria a massa, o que não ocorre no caso de Sandra.

b) Não, porque não sabemos o que ocorreu no intervalo entre 30 e 40 anos.

c) Sim, pois nos 10 primeiros anos de vida a massa de Sandra aumentou aproximadamente 40 kg, um aumento superior a qualquer outro apresentado no gráfico em um intervalo de 10 anos.

Comentário: Espera-se que os estudantes observem que, nessa função, não se podem traçar segmentos de reta ligando os pontos obtidos, uma vez que não se sabe o comportamento da massa da Sandra nos intervalos de 10 anos.

11. Vamos encontrar os zeros da função:

$R(x) = 0 \Rightarrow kx(P - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} kx = 0 \\ P - x = 0 \end{cases}$

$kx = 0 \Rightarrow x = 0$

$P - x = 0 \Rightarrow x = P$

Logo, a representação gráfica de R deve ser tal que intercepte o eixo x em dois pontos: $x = 0$ e $x = P$

alternativa c

12. Vamos, inicialmente, expressar h em função de b:

$V = b \cdot 2b \cdot h \Rightarrow \cancel{2} = \cancel{2}b^2h \Rightarrow h = \frac{1}{b^2}$ (I)

Podemos, então, calcular a área das bases superior e inferior (A_b):

$A_b = 2 \cdot 2b \cdot b \Rightarrow A_b = 4b^2$ (II)

O custo das bases superior e inferior (C_b) é dado por:

$C_b = 4 \cdot A_b \Rightarrow C_b = 4 \cdot 4b^2 \Rightarrow C_b = 16b^2$ (III)

Vamos calcular agora a área lateral (A_L):

$A_L = 2 \cdot 2b \cdot h + 2 \cdot b \cdot h \Rightarrow A_L = 6bh$ (IV)

Substituindo (I) em (IV), obtemos:

$A_L = 6b \cdot \left(\frac{1}{b^2}\right) \Rightarrow A_L = \frac{6}{b}$ (V)

O custo das bases laterais (C_L) é dado por:

$C_L = 3 \cdot A_L \Rightarrow C_L = \frac{18}{b}$ (VI)

Portanto, o custo C do material para a fabricação da caixa em função da largura é obtido somando as equações (III) e (VI):

$C(b) = C_b + C_L \Rightarrow C(b) = 16b^2 + \frac{18}{b}$

O preço de custo de uma caixa de 0,5 m de largura é dado por:

$C = 16 \cdot (0{,}5)^2 + \frac{18}{0{,}5} \Rightarrow C = 40$

Então, o custo é R$ 40,00.

Autoavaliação

1. De acordo com o consumo:

- $9\ m^2 \to V = 10$
  valor da conta: R$ 20,00
- $18\ m^2 \to V = 10 + (18 - 10) \cdot 1{,}20 = 19{,}60$
  valor da conta: R$ 39,20
- $36\ m^2 \to V_1 = 10 + (20 - 10) \cdot 1{,}20 = 22{,}00$
  $V_2 = V_1 + (30 - 20) \cdot 1{,}50 = 22 + 15 = 37{,}00$
  $V = 37 + (36 - 30) \cdot 2 = 37 + 12 = 49{,}00$
  valor da conta: R$ 98,00

alternativa a

2. $D(f)$ é o domínio da função f, que é A.

$CD(f)$ é o contradomínio da função f, que é B.

O conjunto imagem de f é formado pelas ordenadas dos pontos determinados pelos pares ordenados (x, y) que obedecem à lei $y = f(x)$.

alternativa b

3. Os zeros de uma função são as abscissas dos pontos em que essa função intercepta o eixo x.

alternativa c

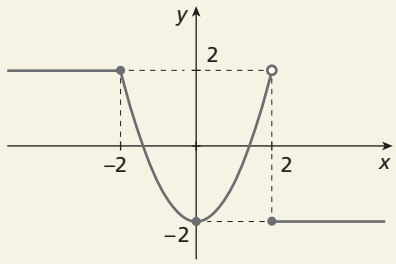
4. Na construção de um gráfico, x é a referência horizontal e y é a referência vertical.

alternativa b

5. $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -2 \\ x^2 - 2, \text{ se } -2 \leqslant x < 2 \\ -2, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$

MODERNA

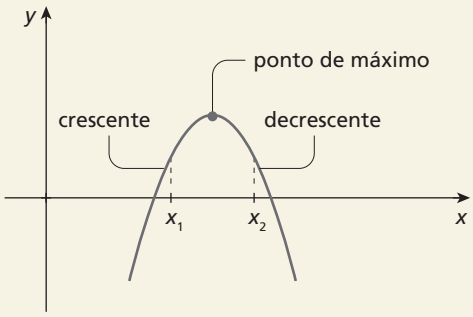
Construindo o gráfico da função f, temos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

alternativa d

6.



Se, em um intervalo $I = [x_1, x_2]$, a função passa de crescente para decrescente, ela apresenta um ponto de máximo.
alternativa c

7. Para admitir inversa, uma função deve ser injetora e sobrejetora, ou seja, deve ser bijetora.
alternativa c

Compreensão de texto

1. O asfaltamento e as construções causam a impermeabilização do solo. Assim, o solo não absorve a água das chuvas que não chegam aos reservatórios naturais.

2. O gráfico mostra o índice armazenado no Sistema Cantareira em 31 de dezembro dos anos 2013 a 2019.

3. O índice armazenado no Sistema Cantareira foi menor no dia 31 de dezembro de 2014 (–22,0%). Espera-se que os alunos percebam que esse índice negativo significa que o volume útil de água armazenado era negativo, ou seja, já estava sendo usada a água do volume de reserva técnica.

4. Resposta pessoal.

A resposta dependerá da região em que este livro está sendo usado, e é um bom exercício para que os alunos conheçam a história do local em que vivem e percebam a importância de usar os recursos com responsabilidade.

MODERNA

Capítulo 4 – Algoritmos e introdução à programação

Exercícios propostos

1. Para resolver o exercício, devemos realizar as operações previstas, guardando o estado de cada variável a fim de considerá-lo linha a linha durante os cálculos. É importante notar que, se o valor de uma variável for alterado, ele só vai mudar novamente por meio de uma nova atribuição de valor.

a)

x	*y*	*z*	*w*
3	2	1	0

$w \leftarrow z$ (w recebe 1)
$z \leftarrow x$ (z recebe 3)
$x \leftarrow w$ (x recebe w, que vale 1)

x	*y*	*z*	*w*
1	2	3	1

b)

a	*b*	*c*	*d*
3	2	1	0

$d \leftarrow b$ (d recebe 2)
$a \leftarrow d \cdot a$ (a recebe $2 \cdot 3$, portanto 6)
$b \leftarrow d \cdot b$ (b recebe $2 \cdot 2$, portanto 4)
$c \leftarrow d \cdot c$ (c recebe $2 \cdot 1$, portanto 2)

a	*b*	*c*	*d*
6	4	2	2

c)

alfa	*beta*	*gama*	*phi*
0,5	2,5	1,5	0

alfa ← *alfa* + *beta* (*alfa* recebe 0,5 + 2,5, portanto 3,0)
beta ← *beta* + *gama* (*beta* recebe 2,5 + 1,5, isto é, 4,0)
phi ← *alfa* · *beta* (*phi* armazenará 3,0 · 4,0, ou seja, 12,0)

alfa	*beta*	*gama*	*phi*
3,0	4,0	1,5	12,0

d)

r	*s*	*t*	*u*
1	1	0	0

$t \leftarrow r + s$ (t recebe 1 + 1, portanto 2)
$u \leftarrow s + t$ (u recebe 1 + 2, portanto 3)

r	*s*	*t*	*u*
1	1	2	3

2. Resposta possível:
Dada uma temperatura c em grau Celsius, converter para grau Fahrenheit.
Passo 1. Seja f uma temperatura em Fahrenheit, faça $f \leftarrow \frac{9}{5}c + 32$. O algoritmo termina.

3. Resposta possível:
Dado um salário s (número real positivo) e uma taxa de reajuste r (número real positivo), determinar o novo salário na variável *novoSalario*.
Passo 1. Faça *novoSalario* ← $(1 + r) \cdot s$. O algoritmo termina.

4. Resposta possível:
Dados *capital*, *taxa* e *tempo*, números reais positivos, determinar o juro a ser pago por um empréstimo na variável *juro*.
Passo 1. Faça *juro* ← *capital* · *taxa* · *tempo*. O algoritmo termina.

5. Com esse exercício, começam a ser empregados os comandos de entrada e de saída de dados e, também, as estruturas de controle de fluxo, em que a partir de um passo reorienta-se o fluxo do algoritmo para outro posterior ou anterior, dependendo do caso. Essa reorientação do fluxo é importante para que alguns passos não sejam executados, como o salto do passo 3 para o passo 5.
Resposta possível:
Dados dois inteiros obtidos da entrada e armazenados nas variáveis *num*1 e *num*2, determinar o maior entre eles e guardar esse valor na variável *maior*, que é entregue como saída.
Passo 1. Faça *num*1 e *num*2 receberem, cada uma, um dos números inteiros da entrada.
Passo 2. Se *num*1 < *num*2, vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Como *num*1 é menor que *num*2, faça *maior* ← *num*2. Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Como *num*1 não é menor que *num*2, então ele é maior ou igual a ele. Assim, faça *maior* ← *num*1.
Passo 5. A variável *maior* contém o maior número. Encerra-se o algoritmo.

6. Resposta possível:
Dado n natural, obtido como entrada, determinar na variável *preco* o valor a ser pago por n frutas.
Passo 1. Faça n receber o valor de entrada.
Passo 2. Se $n < 12$, siga para o **passo 3**; caso contrário, siga para o **passo 4**.
Passo 3. Faça *preco* ← $0{,}8 \cdot n$. Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *preco* ← $0{,}5 \cdot n$.
Passo 5. A variável *preco* contém o valor final da compra. Encerra-se o algoritmo.

7. Resposta possível:
Dadas as notas de entrada, armazenadas nas variáveis $n1$ e $n2$, calcular a média aritmética (variável *media*) e, na variável *aprovacao*, armazenar "verdadeiro" se a média for maior ou igual a 5 ou "falso" se a média for menor que 5.
Passo 1. Faça $n1$ e $n2$ armazenarem, cada uma, um dos valores de entrada.
Passo 2. Faça *media* ← $\frac{n1 + n2}{2}$.
Passo 3. Se *media* ⩾ 5, vá para o **passo 4**; senão, vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *aprovacao* ← verdadeiro. Vá para o **passo 6**.
Passo 5. Faça *aprovacao* ← falso.
Passo 6. A variável *aprovacao* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

8. Resposta possível:
Dados três inteiros positivos obtidos da entrada e armazenados nas variáveis *num*1, *num*2 e *num*3, determinar o menor entre eles e guardar o valor na variável *menor*, entregando a variável *menor* como saída.
Passo 1. Faça *num*1, *num*2 e *num*3 armazenarem, cada uma, um dos três números inteiros como entrada.
Passo 2. Se *num*1 < *num*2, vá para o **passo 3**; senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Se *num*1 < *num*3, vá para o **passo 5**; senão, vá para o **passo 7**.

MODERNA

Passo 4. Se *num*2 < *num*3, vá para o **passo 6**; senão, vá para o **passo 7**.

Passo 5. Faça *menor* ← *num*1. Vá para o **passo 8**.

Passo 6. Faça *menor* ← *num*2. Vá para o **passo 8**.

Passo 7. Faça *menor* ← *num*3. Vá para o **passo 8**.

Passo 8. A variável *menor* contém o menor dos três números. Encerra-se o algoritmo.

9. Nesse exercício, aparece pela primeira vez o conceito de um laço de repetição. Vale salientar que os laços exigem o cuidado de verificar se a variável de controle vai, em algum momento, atingir o valor que determina a parada (ou saída) do laço. Caso contrário, o algoritmo repetirá indefinidamente os passos de dentro do laço.

Resposta possível:

Dado n um número natural, determinar a *semisSoma* dos n primeiros números naturais.

Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.

Passo 2. Faça *semisSoma* ← 0.

Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**; senão, vá para o **passo 4**.

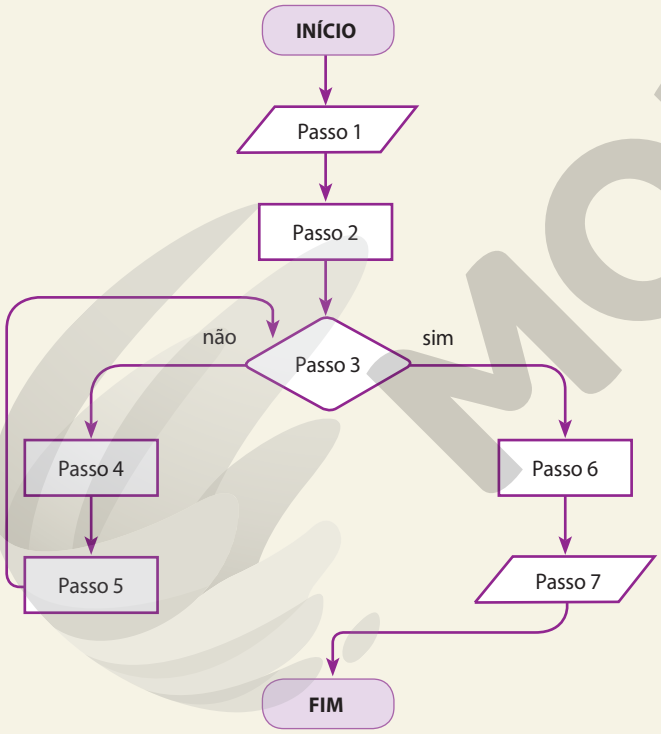
Passo 4. Faça *semisSoma* ← *semisSoma* + n.

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.

Passo 6. Faça *semisSoma* ← $\frac{semisSoma}{2}$.

Passo 7. A variável *semisSoma* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

O fluxograma que representa o algoritmo é o seguinte:



10. Resposta possível:

Dado um número natural n, determinar a soma dos n primeiros termos da sequência gerada por $a_n = 2n + 1$.

Passo 1. Faça n receber um inteiro positivo como entrada.

Passo 2. Faça *soma* ← 0.

Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**; senão, vá para o **passo 4**.

Passo 4. Faça *soma* ← *soma* + $2n + 1$.

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.

Passo 6. A variável *soma* contém o resultado para a saída. Encerra-se o algoritmo.

11. Resposta possível:

Dado k natural, determinar o k-ésimo termo da sequência de Fibonacci na variável *fibonacci*.

Passo 1. Faça k receber um número natural de entrada.

Passo 2. Faça *fibonacci* ← 1.

Passo 3. Faça *termo*1 ← 1.

Passo 4. Faça *termo*2 ← 1.

Passo 5. Se $k \leqslant 2$, vá para o **passo 10**; senão, vá para o **passo 6**.

Passo 6. Faça *fibonacci* ← *termo*1 + *termo*2. Vá para o **passo 7**.

Passo 7. Faça *termo*2 ← *termo*1. Vá para o **passo 8**.

Passo 8. Faça *termo*1 ← *fibonacci*. Vá para o **passo 9**.

Passo 9. Faça $k \leftarrow k - 1$. Vá para o **passo 5**.

Passo 10. A variável *fibonacci* contém o valor de saída. Encerra-se o algoritmo.

12. Nesse exercício, é preciso avaliar as expressões, levando em consideração os valores das variáveis quando estiverem presentes.

a) Expressão: 3 + 2 >= 5

Temos que 5 >= 5. A expressão é, portanto, **verdadeira**.

b) Expressão: $x + y > 8$

$x = 10$

$y = -3$

Se a variável x carrega o valor 10 e a variável y carrega o valor −3, a soma $x + y$ é 7, que é menor que 8. Portanto a expressão $x + y > 8$ é **falsa**.

c) Expressão: resultado != 27

numero1 = 3

numero2 = 3

resultado = numero1 ** numero2

A variável resultado armazena a potência $3^3 = 27$, então a expressão resultado != 27 é **falsa**.

d) Expressão: a % b == 2

a = 16

b = 7

O símbolo % representa a operação módulo ou resto da divisão inteira. Ao dividirmos 16 por 7, o quociente é 2 e o resto é 2. Portanto, a expressão é **verdadeira**.

13. Nessa atividade, o fluxo do algoritmo será decidido a partir dos valores de cada variável. Observe o algoritmo a seguir.

```
1 | a = 0
2 | b = 1
3 | c = 2
4 | if c ** a != b:
5 |   print("Tudo certo! Podemos seguir.")
6 | else:
7 |   print("Nada feito! Abortar missão.")
```

Note que na estrutura de decisão avalia-se a expressão c ** a != b, em que c vale 2 e a vale 0, portanto, de c ** a decorre $c^a = 2^0 = 1$. Como b vale 1, a expressão em questão tem valor igual a 1, direcionando o algoritmo para o else. Por fim, conclui-se que a linha da saída será a de número 7.

MODERNA

14. Quando se escreve um algoritmo empregando uma linguagem de programação, os detalhes da sintaxe da linguagem podem ser um dos maiores problemas enfrentados por programadores iniciantes. Em geral, os alunos esquecem de algum símbolo ou palavra reservada e gastam muito tempo na depuração do código. Dessa maneira, acompanhe a resolução e ajude os alunos, caso estejam no laboratório de informática, a compreender as mensagens de erro e a resolver os erros. Por exemplo: ao ler um valor da entrada, no motor da linguagem Python 3.x, é necessário converter o valor recebido para um tipo de variável com o qual se deseja trabalhar. No algoritmo a seguir, converte-se o valor da entrada para o tipo "int" (inteiro). Por padrão, a entrada fornece sempre um valor do tipo "string".

Resposta possível:

```
1 | numero1 = int(input("Entre com um inteiro
    positivo não nulo:"))
2 | numero2 = int(input("Entre com outro inteiro
    positivo não nulo:"))
3 | if numero1 % numero2 == 0:
4 |   print("É múltiplo.")
5 | else:
6 |   print("Não é múltiplo.")
```

15. Nesse exercício, o valor da entrada deve ser convertido para o tipo "float", que pode ser compreendido como um número real.

Resposta possível:

```
1 | a = float(input("Entre com um número real:"))
2 | b = float(input("Entre com um número real:"))
3 | c = float(input("Entre com um número real:"))
4 | if c ** 2 == a ** 2 + b ** 2:
5 |   print("A igualdade é verdadeira.")
6 | else:
7 |   print("A igualdade é falsa.")
```

16. Nesse exercício, espera-se que os alunos utilizem um laço de repetição do tipo "while". Caso encontrem dificuldades, verifique se a indentação está correta para definir os passos que devem ficar dentro do laço de repetição, pois, em Python, são os espaçamentos que determinam os blocos de código. Saliente que os dois-pontos ao final da linha do "while" deve sempre estar presente, fazendo parte da sintaxe da linguagem.

Resposta possível:

```
1 | x = float(input("Digite um número real: "))
2 | n = int(input("Digite um número natural: "))
3 | produto = 1
4 | contador = 0
5 | while contador < n:
6 |   produto = produto * x
7 |   contador = contador + 1
8 | print("O resultado é: ", produto)
```

17. Nesse exercício, há um aninhamento de um laço de repetição dentro de uma estrutura de decisão. Dessa maneira, novamente, os alunos devem ter cuidado com o espaçamento destinado à indentação de cada linha para que os passos sejam executados nos momentos corretos, como os passos das linhas 8 e 9, que estão num segundo nível de indentação.

Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número natural: "))
2 | fat = 1
3 | contador = 1
4 | if n <= 1:
5 |   print("O valor do fatorial é: 1")
6 | else:
7 |   while contador <= n:
8 |     fat = fat * contador
9 |     contador = contador + 1
10|   print("O valor do fatorial é:", fat)
```

18. Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número inteiro: "))
2 | contaNegativos = 0
3 | while n != 0:
4 |   if n < 0:
5 |     contaNegativos = contaNegativos + 1
6 |   n = int(input("Digite um número inteiro: "))
7 | print("Você digitou", contaNegativos,"números
    negativos.")
```

19. Resposta possível:

```
1 | contaPares = 0
2 | contaImpares = 0
3 | numero = int(input("Digite um número natural
    diferente de 0: "))
4 | while numero != 0:
5 |   if numero % 2 == 0:
6 |     contaPares = contaPares + 1
7 |   else:
8 |     contaImpares = contaImpares + 1
9 |   numero = int(input("Digite um número
    natural diferente de 0: "))
10| print("Você digitou",contaPares, "pares
    e",contaImpares,"ímpares.")
```

Exercícios complementares

1. Para estabelecer as relações, os estudantes devem conhecer as correspondências das estruturas de atribuição de valor utilizadas em algoritmos na linguagem corrente para aquelas da linguagem Python. Também é necessário conhecer o mapa dos símbolos utilizados para representar as operações matemáticas na linguagem de programação como as seguintes:

Operações básicas

Operações em Matemática	Operações em Python
Adição: $a + b$	Adição: $a + b$
Subtração: $a - b$	Subtração: $a - b$
Multiplicação: $a \cdot b$	Multiplicação: $a * b$
Divisão: $a : b$	Divisão: a / b

Outras operações

Operação	Símbolo
Potenciação	** (a ** b)
Parte inteira	// (a // b)
Módulo (resto)	% (a % b)

Dessa maneira, as equivalências podem ser identificadas:

a) res ← $\sqrt{b^2 - 4ac}$ — **iii.** res = (b ** 2 − 4 * a * c) ** (1/2)

b) res ← $\sqrt{2b - 4ac}$ — **i.** res = (2 * b − 4 * a * c) ** (0.5)

c) $h \leftarrow a^2 - b^2$ — **iv.** h = a ** 2 + b ** 2

d) $h \leftarrow 2a - 2b$ — **ii.** h = a * 2 + b * 2

MODERNA

2. O algoritmo a seguir armazena um número natural recebido da entrada na variável *n*, determinando se é um múltiplo de 7. Para verificar se um número é ou não múltiplo de outro, é comum utilizar a operação módulo, que é equivalente a determinar o resto da divisão. Quando observamos o resto da divisão de um número inteiro por outro e o resto é 0, significa que o dividendo é múltiplo do divisor.

Resposta possível:

Passo 1. Faça *n* ← entrada("Digite um número natural diferente de 0:")

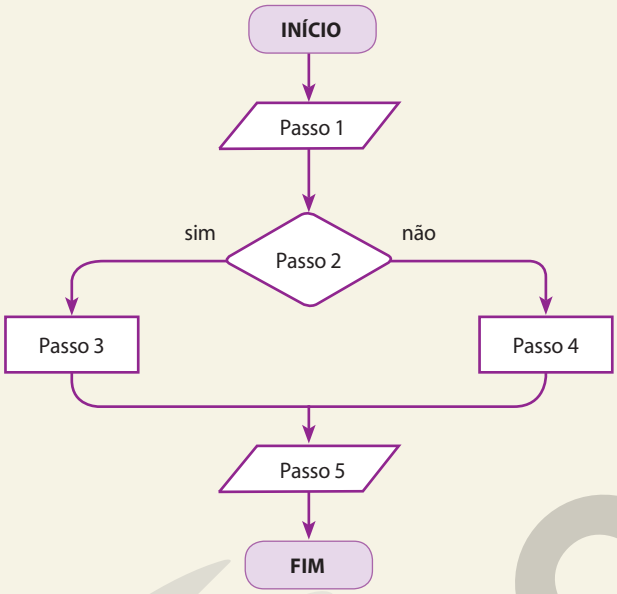
Passo 2. Se o resto da divisão de *n* por 7 for igual a 0, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Faça *multiplo* ← "Verdadeiro". Vá para o **passo 5**.

Passo 4. Faça *multiplo* ← "Falso".

Passo 5. Envie *multiplo* para a saída. Encerra-se o algoritmo.

3. O fluxograma a seguir pode representar o algoritmo expresso no exercício **2**.



4. O algoritmo a seguir, escrito em Python, determina o perímetro e a área de um quadrado a partir da medida de seu lado.

Resposta possível:

```
1 | lado = float(input("Digite a medida do lado: "))
2 | perimetro = 4 * lado
3 | area = lado ** 2
4 | print("perímetro:",perimetro,"cm; area:",area,"cm²")
```

5. O algoritmo a seguir lê o valor da medida da base e da altura de um triângulo qualquer, determinando sua área e enviando-a para a saída.

Resposta possível:

```
1 | base = float(input("Digite a medida da base: "))
2 | altura = float(input("Digite a medida da altura: "))
3 | area = (base * altura) / 2
4 | print("A área do triângulo é: ",area,"cm²")
```

6. Para determinar a média ponderada, o algoritmo recebe 3 notas da entrada. Os pesos já estão determinados no próprio algoritmo.

Resposta possível:

```
1 | nota1 = float(input("Digite a nota 1: "))
2 | nota2 = float(input("Digite a nota 2: "))
3 | nota3 = float(input("Digite a nota 3: "))
4 | media = (nota1 * 1 + nota2 * 2 + nota3 * 4) / 7
5 | print("A média ponderada é: ",media)
```

Comentário: Se julgar conveniente, enriqueça a atividade propondo aos alunos que elaborem um algoritmo que calcule a média final deles de acordo com os critérios da escola em que estudam.

7. Reforce, se necessário, que o maior lado do triângulo deve ser o primeiro valor a ser inserido na entrada.

Resposta possível:

```
1 | numero1 = float(input("Digite a medida maior: "))
2 | numero2 = float(input("Digite outra medida: "))
3 | numero3 = float(input("Digite outra medida: "))
4 | if numero1 ** 2 == numero2 ** 2 + numero3 ** 2:
5 |   print("O triângulo é retângulo.")
6 | else:
7 |   print("O triângulo NÃO é retângulo.")
```

8. **a)** O algoritmo atualiza o valor do contador e o imprime, no final. Quando o contador chega a 1, o algoritmo entra no laço uma última vez, atualizando o contador para 0. Quando a condição é verificada novamente, o valor está em 0 e não entra no laço, indo para a linha 4. Portanto, o valor impresso é 0.

b) Assim como o algoritmo do item **a**, temos um contador na variável *x*. Dentro do laço de repetição, na linha 4, verifica-se o valor de *x* e, se o resto da divisão por 2 for diferente de 0, isto é, um número ímpar, o valor é impresso. Dessa maneira, conclui-se que os valores que vão para a saída são os números naturais ímpares menores que 10.

9. Resposta possível:

```
1 | idadeMinima = 16
2 | idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
3 | cidadaosHabilitados = 0
4 | while idade != 0:
5 |   if idade >= 16:
6 |       cidadaosHabilitados = cidadaosHabilitados + 1
7 | idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
8 | print("Cidadãos habilitados: ",cidadaosHabilitados)
```

10. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos elaborem um algoritmo que respeite os passos de entrada, saída e o laço de repetição com dois passos internos.

11. O algoritmo que determina a sequência de Fibonacci é um clássico dentre os exercícios dos cursos de introdução à programação. Talvez a maior dificuldade que os alunos vão enfrentar é a identificação de quantas e quais variáveis auxiliares eles vão precisar para obter um termo da sequência. No algoritmo a seguir, essas variáveis são a *anterior*1 e *anterior*2, que são atualizadas a cada vez que se passa pelo laço de repetição.

Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite o número de termos: "))
2 | anterior1 = 0
```

MODERNA

```
3 | anterior2 = 1
4 | fibonacci = 1
5 | while n != 0:
6 |   print(fibonacci)
7 |   fibonacci = anterior1 + anterior2
8 |   anterior1 = anterior2
9 |   anterior2 = fibonacci
10|   n = n - 1
```

12. Uma maneira de resolver o desafio é usar a velocidade do computador para conferir se um número possui mais que 2 divisores. Para isso, dado um número natural n, basta observar o resto da divisão por todos os números de 2 até $n - 1$. Se encontrarmos um divisor, isto é, se o resto da divisão de n por algum número for igual a 0, podemos concluir que n não é primo; caso contrário, **n** só pode ser primo. Um algoritmo que funciona dessa maneira é apresentado a seguir.

Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número natural"))
2 | contador = 2
3 | while contador < n:
4 |   if n % contador == 0:
5 |      break
6 |   contador = contador + 1
7 | if contador != n:
8 |      print("Não é primo.")
9 | else:
10|      print("É primo.")
```

Autoavaliação

1. No contexto de uma linguagem de programação, podemos pensar nas variáveis, informalmente, como recipientes para guardar valores. Neste capítulo, por exemplo, vimos alguns tipos de variáveis da linguagem Python, como as numéricas, para números inteiros ou números reais, ou as cadeias de caracteres. Dessa maneira, uma variável pode armazenar um valor qualquer dentre um conjunto de valores.

alternativa a

2. Um algoritmo pode ser definido, informalmente, como uma sequência finita e bem definida de passos para resolver um problema ou realizar uma tarefa. Os alunos viram algumas maneiras de representá-lo, como em linguagem corrente, por meio de fluxogramas e, também, em uma linguagem de programação.

alternativa c

3. A estrutura de decisão estudada foram blocos do tipo "se... então... senão..." ou, como são comumente representados numa linguagem de programação, blocos do tipo "**if/else**" e alguns aninhamentos desses blocos. Em geral, essas estruturas de decisão servem para, a partir da análise de uma condição, decidir qual será o próximo bloco de instruções a ser executado. Em um fluxograma, essa estrutura se apresenta como um losango.

alternativa b

4. Na linguagem Python, e em muitas outras linguagens, a indentação do código-fonte serve para melhorar a leitura e organizar os blocos de código. Na linguagem Python, em particular, além de organizar, a indentação serve para definir um bloco de código, sendo, portanto, obrigatória na definição de blocos e deve, também, ser uniforme em todo o arquivo do algoritmo.

alternativa e

5. Um laço de repetição é definido a partir de uma expressão cujo valor pode ser determinado como verdadeiro ou falso. Enquanto a condição for verdadeira, os passos internos a ela serão executados; portanto, é necessário e importante definir uma condição de parada que será, necessariamente, atingida em algum momento para que o algoritmo não seja executado indefinidamente (se essa não for a intenção).

alternativa c

6. O símbolo que verifica a igualdade entre dois valores, estejam eles armazenados em variáveis ou não, é o "==".

alternativa d

7. O algoritmo descrito possui um problema em sua condição de parada. Note que o valor da variável c nunca é atualizado, sendo apenas avaliado nas linhas 4 e 5. Dessa maneira, o algoritmo não funciona adequadamente e será executado indefinidamente.

alternativa c

8. A condição de parada do algoritmo é o valor do contador, que deve ser menor ou igual a 8 para executar o código dentro do laço de repetição. Observe que o incremento é de 2 em 2 e o contador começa de 2. Portanto, o código no laço de repetição será executado para os valores 2, 4, 6 e 8 do contador. Conclui-se, assim, que a frase "Olá mundo!" será exibida 4 vezes.

alternativa a

Compreensão de texto

Nessa seção, pretende-se ajudar os alunos a compreender o potencial de espalhamento de uma notícia falsa e, a partir de uma abordagem histórica, fazer com que reflitam a respeito do impacto que uma notícia desse tipo pode ter na sociedade. Além disso, um dos objetivos é fazer os alunos aprenderem a identificar e a decidir se podem acreditar em uma notícia recebida por meio de redes sociais ou aplicativos de mensagens instantâneas e compartilhá-la.

1. Não. As notícias falsas costumam se espalhar 70% mais rápido que as notícias verdadeiras. Além disso, estudos indicam que as pessoas são propensas a acreditar em notícias que reforcem seus pensamentos e suas crenças.

2. Respostas pessoais.

3. Não, pois na Idade Média, houve a propagação da notícia que relacionava os judeus à peste, o que impactou na morte de milhares de pessoas.

4. Não. Ainda é necessário verificar a data da notícia e checar se as informações sobre a fonte são/eram verdadeiras.

MODERNA

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Orçamento e planejamento financeiro

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **6**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **4** e da habilidade **EM13MAT203** da BNCC. Além disso, as situações, atividades e discussões propostas tratam dos temas contemporâneos: **vida familiar e social, educação financeira e educação para o consumo**.

As atividades dessa seção devem ser um convite à reflexão e à ação, levando os alunos a pensar em como as atitudes, as escolhas, o uso das informações e a cultura financeira (pessoal e familiar) podem impactar na construção de objetivos e em sua realização (a curto, a médio e a longo prazo). Em cada etapa, são sugeridas discussões, a fim de oferecer subsídios para o trabalho em sala de aula e um conjunto de possibilidades de caminhos a serem percorridos.

Para começar e pensar:

As questões abordadas nessa etapa são uma oportunidade para iniciar a discussão dos conceitos que serão trabalhados na seção: orçamento e planejamento financeiro. Elas permitem reflexões sobre a necessidade de se ter um detalhamento dos ganhos e das despesas, bem como sobre a importância das tomadas de decisões de acordo com necessidades e objetivos estipulados, mas sem a intenção de ditar regras ou normas.

1 e **2**. Essas questões são uma provocação aos alunos, solicitando-lhes levantamento das despesas e organização do orçamento pessoal, com o intuito de proporcionar uma reflexão sobre o comportamento financeiro. É possível que eles já façam o controle e o planejamento financeiro, mas provavelmente de maneira intuitiva. Provoque os alunos com esta questão: "Vocês anotam até os valores dos gastos que são bem baixos?". Comente que, no controle das despesas, é comum nos esquecermos de anotar pequenos gastos, mas é importante que eles notem que esses gastos se acumulam e podem se tornar gastos grandes. Promova o compartilhamento das respostas para a questão 2 e comente que a análise das despesas, a ciência de saber em que o dinheiro está sendo gasto, nos ajuda a tomar decisões.

3 e **4**. Incentive os alunos a discutir essas questões, compartilhando as respostas. Com isso, pode-se ter uma visão de como eles se comportam financeiramente, além de mobilizar os conhecimentos prévios sobre alguns aspectos da educação financeira e levantar possíveis preconceitos que costumam dificultar o aprendizado. Para a análise da questão 3, apesar de não indicarmos uma resposta correta, a tendência é gastarmos com mais facilidade, em compras com valores pequenos, usando cédulas menores do que quando usamos cédulas maiores. Para a questão 4, se julgar oportuno, converse com os alunos sobre dois perfis de comportamento financeiro: pessoas propensas ao consumo (o "gastador") e pessoas com o perfil financeiro mais contido ("o poupador"). Reforce que não existe um perfil correto, desde que haja conhecimento das consequências que cada um traz; independentemente disso, o orçamento é uma ferramenta útil para a organização da vida financeira.

Para discutir:

As questões dessa etapa propõem a análise de um orçamento familiar. Espera-se que os alunos sejam estimulados a desenvolver bons hábitos financeiros, considerando o perfil de cada um. A proposta é que tomem decisões de maneira consciente.

5. Deixe claro que a forma de organização financeira pode e deve atender à realidade de cada pessoa ou de cada família; por esse motivo, essa organização pode apresentar algumas diferenças.

a) Explique aos alunos que o orçamento (pessoal ou familiar) é uma ferramenta financeira que geralmente é apresentada como uma tabela, podendo até mesmo ser controlada com o auxílio de planilhas eletrônicas. No caso do orçamento da família Silva, podemos organizá-lo da seguinte maneira:

ORÇAMENTO REFERENTE AO MÊS DE ABRIL			
RECEITAS		DESPESAS	
Descrição	Valor (em R$)	Descrição	Valor (em R$)
Salário Márcio	2.200	Aluguel	1.500
Salário Tânia	2.600	Alimentação	900
		Energia elétrica	180
		Água	80
		Celular/internet	235
		Cartão de crédito	1.125
		Lazer	130
		Transporte	440
		Animal de estimação	105
TOTAL: 4.800		**TOTAL**: 4.695	

ORÇAMENTO REFERENTE AO MÊS DE MAIO			
RECEITAS		DESPESAS	
Descrição	Valor (em R$)	Descrição	Valor (em R$)
Salário Márcio	2.200	Aluguel	1.500
Salário Tânia	2.600	Alimentação	1.115
		Energia elétrica	165
		Água	85
		Celular/internet	231
		Cartão de crédito	1.100
		Lazer	200
		Transporte	440
		Animal de estimação	121
		Conserto banheiro (1/3)*	200
TOTAL: 4.800		**TOTAL**: 5.157	

* Verifique se os alunos entendem que o conserto do banheiro custará R$ 600,00 e que esse valor será dividido em 3 parcelas mensais iguais, sendo a primeira parcela (1/3) paga em maio.

b) A classificação do orçamento da família Silva é:

- receitas fixas: salários (Márcio e Tânia);
- despesas fixas: aluguel;
- despesas variáveis: alimentação, energia elétrica, água, celular/internet, cartão de crédito, lazer, transporte, animal de estimação e conserto do banheiro.

Se achar conveniente, apresente outros exemplos aos alunos e peça que os classifiquem. Veja alguns exemplos e suas classificações:

MODERNA

- receitas fixas: salário, 13º salário, bolsa de auxílio, recebimento de aluguel, pensão, aposentadoria;
- receitas variáveis: herança, comissões de vendas, gorjetas, gratificações, serviços extras;
- despesas fixas: prestação do financiamento imobiliário, mensalidade escolar, condomínio, IPVA, IPTU;
- despesas variáveis: combustível, supermercado, compra de presentes, consertos.

Explique aos alunos que o valor do salário a ser considerado no orçamento deve ser o valor líquido, ou seja, já considerando os descontos de impostos, INSS, entre outros.

Caso surjam dúvidas com relação à classificação de despesas como IPVA e IPTU, comente com os alunos que essas despesas são consideradas fixas, pois esse tipo de despesa não depende do consumo: eles são cobrados anualmente. O valor de gasto com esses impostos podem não constar mensalmente no orçamento familiar, no caso de optar pelo pagamento em parcela única.

c) Os valores +R$ 105,00 e −R$ 357,00 representam os saldos de cada mês, ou seja, o valor total das receitas menos o valor total das despesas. No mês de abril, o saldo ficou positivo em R$ 105,00, o que significa que o valor total das receitas foi maior que o valor total das despesas; no mês de maio, o saldo ficou negativo em R$ 357,00, mostrando que o valor total das receitas foi menor que o valor total das despesas.

d) Espera-se que os alunos percebam que no mês de maio a família gastou mais do que ganhou. É possível que eles mencionem:

- os valores gastos com lazer e cartão de crédito (essa percepção é subjetiva, mas existe a chance de eles destacarem esses gastos como os mais altos ou os mais supérfluos);
- o valor do aluguel estar além do que a família pode pagar (considerando as receitas);
- o gasto com celular/internet, o que convida os alunos a refletir sobre as despesas com telefonia móvel, internet e, em alguns casos, TV por assinatura.

Esses itens, somados, podem representar uma grande parcela das despesas no orçamento da família, que talvez não seja tão perceptível quando considerado em partes. Nesse caso, é possível avaliar como os gastos dos filhos de Tânia e Márcio impactam no orçamento familiar; os alunos podem se colocar no lugar desses adolescentes.

De acordo com a classificação das despesas (fixas ou variáveis) e a importância de cada uma, os alunos indicarão quais são as passíveis de sofrer ajustes.

6. a) A família optou por definir um orçamento mensal ideal. Assim, com relação aos gastos do mês de janeiro, tiveram a seguinte economia:

- aluguel: R$ 1.500,00 – manteve-se;
- alimentação: R$ 800,00 – manteve-se;
- energia elétrica: R$ 160,00 – economia de R$ 15,00, com controle das luzes acesas, diminuição do tempo do banho e a troca de lâmpadas feita em janeiro;
- água: R$ 70,00 – economia de R$ 10,00, com controle do tempo de banho, reutilização da água da máquina de lavar roupas;
- celular: R$ 200,00 – economia de R$ 200,00, com revisão do plano com a operadora de telefonia;
- cartão de crédito: R$ 1.100,00, sendo R$ 250,00 referentes aos gastos com a festa surpresa de aniversário para o avô mais limite de gastos de R$ 850,00;
- lazer: R$ 150,00 – manteve-se;
- mesada: R$ 0,00 – economia de R$ 200,00 (a mesada foi cancelada até julho);
- transporte: R$ 440,00 – manteve-se;
- animal de estimação: R$ 100,00 – economia de R$ 30,00 (optando por compras promocionais).

b) O valor de R$ 280,00 é o que "sobra" no orçamento. A família poderá usar como saldo para gastos extras, imprevistos ou mesmo poupar o dinheiro para outros objetivos, que podem ser realizados a curto, a médio ou a longo prazo.

c) Não, pois os valores gastos foram, na maioria, superiores.

d) No mês de abril, apesar de o saldo ter ficado positivo, o planejamento não foi seguido, fazendo o saldo ser menor que o planejado (R$ 105,00 < R$ 180,00). No mês de maio, como, além de não seguir o planejamento, a família ainda teve gastos com o conserto do banheiro (imprevisto), que vão ocorrer por três meses, o orçamento entrou em desequilíbrio, fazendo a despesa ser maior que a receita.

e) Oriente os alunos a avaliar o impacto que cada despesa tem no orçamento e a analisar as consequências que teríamos na economia dessa despesa – por exemplo, economizar com alimentação poderá trazer prejuízos à saúde da família, gerando outros gastos. Os alunos podem optar por diferentes caminhos:

(I) Tentar apresentar por que a família gastou mais do que ganhou no mês de maio, evidenciando a falta de planejamento e cuidado financeiro ou até mesmo gastos não previstos. Como a imprevisibilidade de alguns gastos não costuma ser muito considerada pelos adolescentes, aborde esse aspecto para a discussão. Algumas atitudes que poderão ser sugeridas: avaliar uma nova moradia para alugar; rever os gastos com telefonia, incluindo os dos próprios adolescentes; discutir como internet móvel, internet residencial e uma possível TV por assinatura poderiam fazer parte do pacote, uma vez que, apesar de serem cada vez mais comuns nos orçamentos das famílias, não estão discriminadas (propositalmente) no orçamento apresentado pela mãe; discutir como os gastos com lazer poderiam ser ajustados (exigindo, muitas vezes, esforços extremos); revisar e controlar o uso do cartão de crédito, algo muito desafiador; ficar atento às armadilhas postas no caminho do consumo nos espaços de venda etc. A discussão sobre essas despesas deve ser estimulada, ainda que não seja olhada com o devido cuidado pelos alunos – talvez pelo fato de não fazer parte da vida financeira de muitos deles, mas possivelmente na de seus responsáveis.

(II) Tentar evidenciar quais mecanismos fazem gastar mais do que se ganha, como empréstimos, rolagem de dívidas, cheque especial, parcelamento do cartão de crédito, entre outros.

(III) Supor que, nos meses de fevereiro e de março, o planejamento tenha sido seguido à risca sem gastos extras. Nesse caso, a família teria poupado no final do mês de abril R$ 740,00, fazendo que, no mês de maio, o saldo fosse −R$ 383,00 (ou seja, embora o saldo do mês tenha sido negativo, o saldo acumulado seria positivo, evitando assim a utilização de cheque especial ou empréstimo).

Todos os caminhos apresentados são perfeitamente legítimos e não devem ser cerceados – ao contrário, pois trazem riqueza à discussão e possibilidade de aprendizagem. Assim, é possível discutir sobre possíveis empréstimos tomados (com familiares ou amigos) ou parcelamentos no próprio cartão de crédito. Se for viável, pode-se avaliar uma possível discussão sobre o uso do cheque especial e dos juros cobrados nessa modalidade de crédito.

PROPRIA

Para finalizar:

Se julgar conveniente, peça aos alunos que entreguem as respostas das questões dessa etapa por escrito, para avaliação do aprendizado do conteúdo abordado na seção.

7. Espera-se que os alunos respondam que o orçamento é um retrato (diagnóstico) das receitas e das despesas, enquanto o planejamento financeiro (plano de ações) é o que será feito, em termos de atitudes e decisões para se atingir um ou mais objetivos considerados importantes. Ambos são ferramentas úteis para organizar a vida financeira. Obviamente, o planejamento financeiro pode começar com uma decisão de reorganizar as finanças ou atingir um objetivo específico – como poupar dinheiro para a compra de um carro –, a partir do qual se segue um orçamento que vai ajudar a mapear a situação financeira, a fim de que o planejamento possa ser executado.

8. Para responder a essa questão, os alunos precisarão conversar com os responsáveis para entender como funciona o orçamento mensal familiar, a fim de poder classificar receitas e despesas, reorganizar o orçamento de acordo com o que foi proposto e propor ações de acordo com sua realidade. Fique atento, pois alguns alunos podem não se sentir confortáveis em apresentar os detalhes de sua vida financeira familiar. Nesse caso, sugira que criem uma família imaginária e que listem suas despesas fixas, variáveis e eventuais, de modo coerente com o tipo de família, a faixa etária e as características de cada membro.

9. Verifique se os alunos percebem que todos os membros estão diretamente ligados e influenciam o orçamento – por exemplo, na família Silva, mesmo que os pais tenham deixado de pagar as mesadas por um período, os adolescentes ainda participavam de todas as despesas. Se as famílias precisam reorganizar as finanças, por conta de dificuldades ou mesmo para realizar um projeto, todos os membros podem ajudar, seja diminuindo as despesas e, no caso dos alunos, seja atuando como multiplicador de conhecimento (levando para os familiares os conhecimentos aprendidos). Se julgar oportuno, questione-os: "Você já conseguiu ajudar financeiramente sua família em casa de alguma maneira? Se sim, como? Se não, como acha que poderia ajudar?".

PESQUISA E AÇÃO

Telejornal

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3**, **4**, **5**, **7**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **4** e das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT103**, **EM13MAT201** e **EM13MAT407** da BNCC. Também permite um trabalho interdisciplinar com os professores das áreas de Linguagens e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A discussão sobre a importância da preservação e conservação do meio ambiente, bem como a divulgação das pesquisas e de ações por meio da produção coletiva de um telejornal favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG301**, **EM13CNT206** e **EM13CNT302**, e da competência específica **3**, tanto de Linguagens e suas Tecnologias quanto de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

As atividades propostas nessa seção são organizadas em etapas, com a finalidade de organizar o trabalho e podem ser realizadas no decorrer do período escolar. Mesmo que algumas etapas, como a de pesquisa, possam ser realizadas extraclasse, verifique o perfil dos alunos e oriente-os com relação ao planejamento, o prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações e o acompanhamento do progresso das tarefas.

ETAPA 1:

Nessa etapa, espera-se que os alunos iniciem a reflexão sobre a preservação do meio ambiente a partir da pesquisa sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), que representam ações a serem efetivadas até 2030. Após as pesquisas, solicite que façam uma roda de conversa para que exponham as informações obtidas, além de analisarem as ações propostas pelos ODS que eles indicaram como os relacionados diretamente à preservação do meio ambiente.

1. a) A ONU é uma organização internacional composta de países que trabalham juntos pelo alcance da paz e desenvolvimento mundiais. Todos os países são convidados a participar da ONU e hoje há 193 países-membros, entre eles o Brasil. A organização foi fundada em 24 de outubro de 1945, após o fim da Segunda Guerra Mundial, com o propósito de evitar novos sofrimentos causados pelas guerras. Assim, a ONU trabalha para garantir condições de vida justas e dignas a todos os seres humanos. Para que, hoje e no futuro, as pessoas tenham uma vida saudável e digna, é preciso que o meio ambiente seja preservado. Por essa razão, a ONU também busca formas de identificar ameaças ao meio ambiente, alertar os países sobre essas ameaças e manter o planeta saudável.

b) Os ODS são ações a serem realizadas por todos os países a fim de acabar com a pobreza, proteger o planeta e garantir prosperidade e paz a todos. Até 2030, essas ações devem guiar o trabalho do Brasil e dos demais países que fazem parte desse acordo. São 17 objetivos, integrados, e que equilibram as três dimensões do desenvolvimento sustentável: a econômica, a social e a ambiental. Além disso, buscam concretizar os direitos humanos de todos e alcançar a igualdade de gênero e o empoderamento feminino. Os ODS estão listados no *site* da ONU. Disponível em: <https://nacoesunidas.org/pos2015/>. Acesso em: 3 ago. 2020.

c) Os ODS relacionados diretamente com a preservação do meio ambiente são:

- Objetivo 6 – Assegurar a disponibilidade e gestão sustentável da água e saneamento para todas e todos
- Objetivo 7 – Assegurar o acesso confiável, sustentável, moderno e a preço acessível à energia para todas e todos
- Objetivo 12 – Assegurar padrões de produção e de consumo sustentáveis
- Objetivo 13 – Tomar medidas urgentes para combater a mudança climática e seus impactos
- Objetivo 14 – Conservação e uso sustentável dos oceanos, dos mares e dos recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável
- Objetivo 15 – Proteger, recuperar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerir de forma sustentável as florestas, combater a desertificação, deter e reverter a degradação da terra e deter a perda de biodiversidade

ETAPA 2:

Os conteúdos pesquisados nessa etapa, em conjunto com os da etapa anterior, serão organizados e interpretados pelos alunos com sua ajuda e, posteriormente, utilizados na criação do telejornal a ser apresentado para a comunidade escolar, com o objetivo de conscientizá-la sobre a situação ambiental atual e futura.

Como a etapa de pesquisa para a criação do telejornal envolve dados referentes a região em que o aluno reside, esta atividade fornece subsídios para discussões e favorecimento do desen-

MODERNA

volvimento da competência específica **2**, que visa fazer com que o aluno proponha ou participe de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade.

2. Oriente os alunos na formação dos grupos e na escolha dos temas. Caso considere necessário, oriente os grupos que escolherem o mesmo tema, fazendo a divisão da busca de informações.

Converse com cada grupo para orientá-los na busca dos dados e das informações, priorizando o foco do tema escolhido. Os temas são densos e os alunos precisam se organizar a fim de que consigam realizar toda a atividade, sem se perder com a quantidade de informações que poderão colher.

3. Caso julgue oportuno, leve os alunos para realizar as pesquisas no laboratório de informática da escola (se houver) ou na biblioteca, a fim de que tenham auxílio e acesso a fontes confiáveis durante as pesquisas.

4. **a)** Para auxiliar os alunos na verificação das fontes, proponha as seguintes questões:

- O *site* está compartilhando a informação? De quem é autoria do texto? Peça que pesquisem um trecho do texto para verificar se o texto é original ou está sendo copiado de outro *site*.
- Existem erros gramaticais ou ortográficos? O conteúdo está simplificado?
- O autor ou a instituição que estão fornecendo a informação têm acesso a informações confiáveis ou estudam o tema?

Discuta com os alunos sobre em qual *site* confiar e o motivo para a escolha. Se achar oportuno, apresente a terminologia dos *sites*: ".org" para *sites* de organizações não governamentais; ".com" para endereços comerciais e ".gov" referente a *sites* do governo.

4.b) e 5. Oriente os alunos durante o processo de organização e interpretação dos dados e informações coletados. Instigue-os a encontrar a melhor maneira de apresentar esses dados, seja usando um gráfico para informar a quantidade de resíduos produzidos (por exemplo), seja comparando a informação obtida com uma unidade de medida que faça o telespectador compreender melhor alguma informação – por exemplo, a área devastada com a área de campos de futebol etc.

ETAPA 3:

Antes da criação do telejornal, é importante promover momentos para que os alunos partilhem as informações pesquisadas e conversem sobre elas, de modo que fique claro o objetivo do telejornal que será apresentado. Estimule-os a perceber que é preciso que todos tomem consciência da importância de preservar o meio ambiente, não apenas para seu bem-estar, mas também para o bem das futuras gerações. Ao tratar de sustentabilidade, os alunos precisam ter consciência de que, assim como atitudes tomadas no passado se refletem no cenário ambiental atual, ações tomadas agora se refletirão no futuro. Por isso, o telejornal deve estimular ações visando à preservação e à conservação do meio ambiente.

6. Se achar conveniente, para auxiliar no trabalho dos alunos, apresente um trecho de um telejornal e peça que observem as etapas descritas a seguir, a postura corporal dos âncoras e dos repórteres, o tom de voz e a linguagem utilizada por eles, a vinheta de abertura e o fechamento do telejornal, a entrada das notícias e das reportagens, o enquadramento dos âncoras na câmera e observe se eles levantam outros pontos importantes.

Para a criação do telejornal, é importante que os alunos conheçam as etapas do processo de elaboração desse produto e as funções que podem desempenhar nesse processo. É imprescindível que a turma trabalhe de forma colaborativa, e você, professor, deve atuar como mediador no decorrer de todas as etapas.

Conteúdos sobre como organizar um telejornal na escola podem ser acessados nos *links* a seguir.

- Plataforma do letramento. Produzir um telejornal com a cara da galera. Disponível em: <http://www.plataformadoletramento.org.br/acervo-experimente/720/produzir-um-telejornal-com-a-cara-da-galera.html>. Acesso em: 3 ago. 2020.
- Telejornal da escola. Disponível em: <http://premioprofessoresdobrasil.mec.gov.br/images/pdf/relatos_2009/2009_ppb_tatiana_basso.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2020.

Esclareça que o cenário precisa ser um lugar silencioso e com boa iluminação. Os responsáveis pela criação do cenário devem pensar em um fundo e em uma bancada. Os responsáveis pela vinheta podem buscar imagens e sons que identifiquem o telejornal na abertura e no encerramento.

7. Os alunos poderão ampliar a abordagem do telejornal para mais de um tema, mas o interessante é que aprofundem um único tema proposto, podendo enriquecê-lo com as informações obtidas pelos alunos nos demais temas. Caso haja a impossibilidade de realizar a gravação e a transmissão do telejornal, a apresentação à comunidade poderá ser realizada ao vivo. Oriente-os quanto ao ambiente e cenário, além dos efeitos visuais que poderão ser realizados na apresentação ao vivo. É interessante que essa apresentação seja gravada, se possível, para que os alunos possam avaliá-la. Sugira uma votação para a escolha do nome do telejornal.

8. Promova momentos em que todos possam compartilhar suas ideias, sugestões e propostas, trabalhando de maneira coordenada e colaborativa. Por exemplo, em algum momento os responsáveis pelos roteiros precisam saber quais reportagens farão parte do telejornal; os criadores da vinheta precisam saber qual o título definido para o telejornal, e assim por diante.

9. O ensaio é importante para que a turma observe pontos a serem melhorados ou alterados. Promova quantos ensaios julgar necessários, considerando a disponibilidade de tempo, de modo que os alunos possam aprimorar o telejornal e se sentir confiantes para apresentá-lo. Oriente os âncoras e os repórteres informando que podem utilizar um roteiro escrito para apoiar suas falas nos ensaios e na apresentação. A edição do material poderá ser orientada com o auxílio do professor de informática.

ETAPAS 4 e 5:

Durante a apresentação e a análise do telejornal, oriente os alunos quanto ao exercício de empatia, diálogo e resolução de conflitos, fazendo com que acolham e valorizem a diversidade de opiniões. Verifique a opinião dos alunos quanto à clareza do tema abordado no telejornal e, caso algum ponto tenha sido prejudicado, o que levou isso a acontecer e quais são as ações que poderão ser feitas para que isso não se repita em outras atividades.

No momento de autoavaliação, oriente os alunos a utilizar as perguntas propostas e a experiência que tiveram durante a atividade como base para a elaboração do relatório. Espera-se que eles avaliem se alcançaram os objetivos propostos, se sentiram dificuldades no decorrer do processo e de que modo a atividade contribuiu para sua formação.

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Grandezas, álgebra e algoritmos

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Ivail Muniz Junior, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Ana Paula Felippe, Cecilia O. Setsuko, Frederico Hartje, Know-how Editorial, Inaya Oliveira, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto, Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, essas dez competências, todas trabalhadas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:

EM 13 MAT 103 → Esse código refere-se à habilidade 3 relacionada à competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

EM: Ensino Médio

13: a habilidade pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição do currículo

MAT: Matemática e suas Tecnologias

1: competência específica à qual se relaciona a habilidade

03: numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência

É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(**EM13MAT203**) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13MAT302**) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT313**) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(**EM13MAT314**) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(**EM13MAT401**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(**EM13MAT402**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(**EM13MAT404**) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT405**) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(**EM13MAT407**) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(**EM13MAT501**) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CNT103**) Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13CNT201**) Analisar e discutir modelos, teorias e leis propostos em diferentes épocas e culturas para comparar distintas explicações sobre o surgimento e a evolução da Vida, da Terra e do Universo com as teorias científicas aceitas atualmente.
(**EM13CNT202**) Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).
(EM13CNT203) Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).
(**EM13CNT206**) Discutir a importância da preservação e conservação da biodiversidade, considerando parâmetros qualitativos e quantitativos, e avaliar os efeitos da ação humana e das políticas ambientais para a garantia da sustentabilidade do planeta.
(**EM13CNT208**) Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT301**) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.
(**EM13CNT302**) Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

(**EM13CNT310**) Investigar e analisar os efeitos de programas de infraestrutura e demais serviços básicos (saneamento, energia elétrica, transporte, telecomunicações, cobertura vacinal, atendimento primário à saúde e produção de alimentos, entre outros) e identificar necessidades locais e/ou regionais em relação a esses serviços, a fim de avaliar e/ou promover ações que contribuam para a melhoria na qualidade de vida e nas condições de saúde da população.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CHS301**) Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.
(**EM13CHS304**) Analisar os impactos socioambientais decorrentes de práticas de instituições governamentais, de empresas e de indivíduos, discutindo as origens dessas práticas, selecionando, incorporando e promovendo aquelas que favoreçam a consciência e a ética socioambiental e o consumo responsável.

Linguagens e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais) para exercer, com autonomia e colaboração, protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, de forma crítica, criativa, ética e solidária, defendendo pontos de vista que respeitem o outro e promovam os Direitos Humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, em âmbito local, regional e global.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13LGG301**) Participar de processos de produção individual e colaborativa em diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais), levando em conta suas formas e seus funcionamentos, para produzir sentidos em diferentes contextos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 7: Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

CAPÍTULO 1 – Grandezas e medidas	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é que você seja capaz de conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos, aplicar notação científica e arredondamento em medidas, bem como reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele, além de empregar corretamente unidades de medida de computação.	Desde a Antiguidade aos dias atuais, quantificar é uma preocupação da humanidade. Saber se algum objeto cabe em determinado lugar ou o tempo gasto para determinada tarefa são simples exemplos de quantificação. Além disso, a teoria desse capítulo é necessária na interpretação de textos, tabelas e gráficos que utilizam unidades de medida de diferentes grandezas que circulam nos meios científico, na mídia e no mundo do trabalho.
CAPÍTULO 2 – Conjuntos	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é que você consiga perceber situações em que se aplica a noção de conjunto, que seja capaz de descrever conjuntos e efetuar operações com conjuntos, além de resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos, bem como resolver problemas que envolvam os conjuntos numéricos e, por fim, representar e operar com intervalos de números reais.	A ideia de agrupar algo é uma característica intrínseca do ser humano. A Matemática organiza esse pensamento com a identificação de conjuntos, suas notações e operações. Essa teoria auxilia na resolução e na modelagem de problemas matemáticos e cotidianos, além de ser uma ferramenta para o trabalho com funções.
CAPÍTULO 3 – Funções	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é que você seja capaz de identificar uma função, bem como analisar e construir o gráfico de uma função, além de resolver problemas que envolvam funções e obter a função inversa de funções dadas.	O trabalho com funções estabelece relações com diferentes conceitos e propriedades da Matemática. Os gráficos a elas relacionados auxiliam na interpretação de dados e são importantes ferramentas de análise e resolução de problemas.
CAPÍTULO 4 – Algoritmos e introdução à programação	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente, interpretar e elaborar fluxogramas que representem algoritmos, compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas, modelar e resolver problemas empregando uma linguagem de programação.	Com o avanço do mundo digital na sociedade contemporânea, conceitos de algoritmos e de programação são ferramentas valiosas na resolução de problemas do cotidiano. Os pilares do *pensamento computacional* e a fluência no uso da tecnologia digital permitem o engajamento dos estudantes como protagonistas na utilização e na implementação de soluções.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras, e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pilares do *pensamento computacional*.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par, ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ \hline -2 & 15 \\ 11 & \\ -10 & \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \hline -2 & 13 \\ 06 & \\ -\ 6 & \\ 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

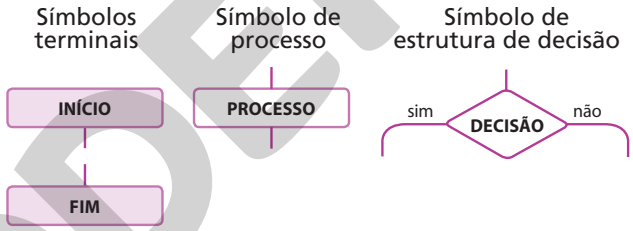
Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

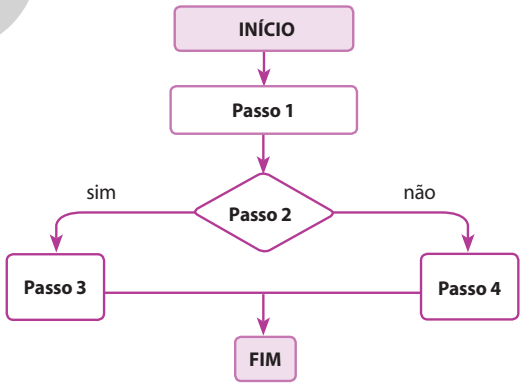
Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.



O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

Nesta obra você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

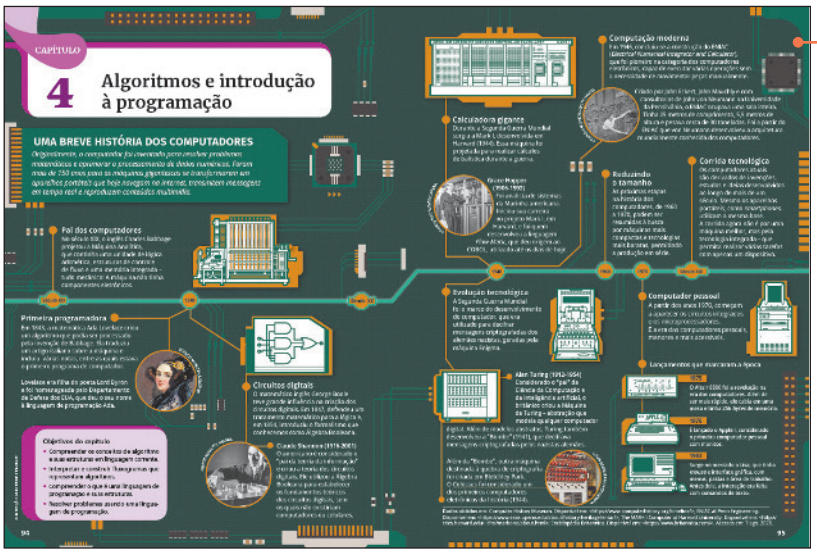
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

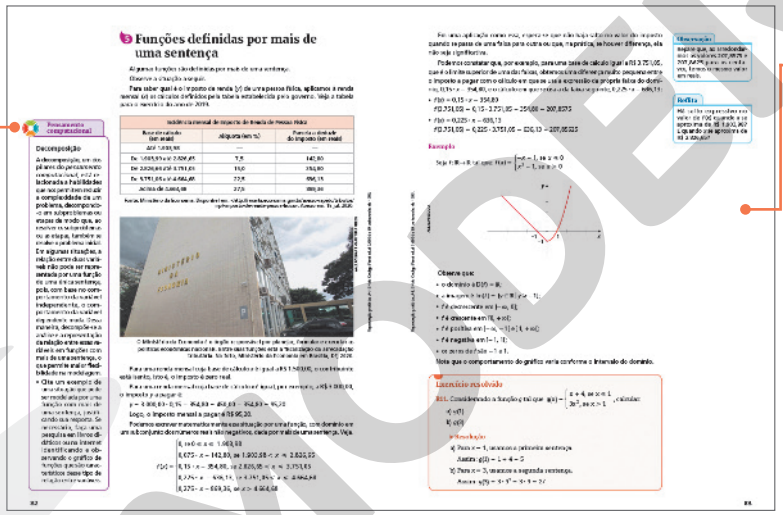
Organização da obra

Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.



Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.



Pensamento computacional

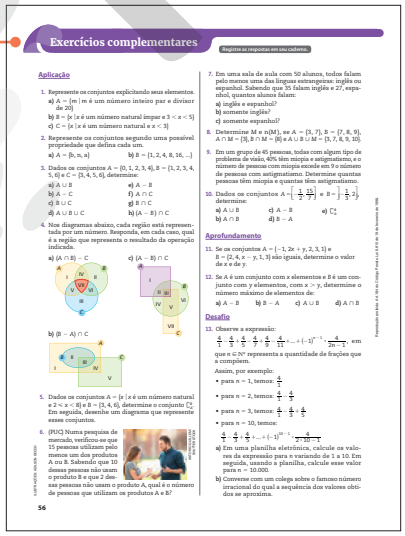
O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:

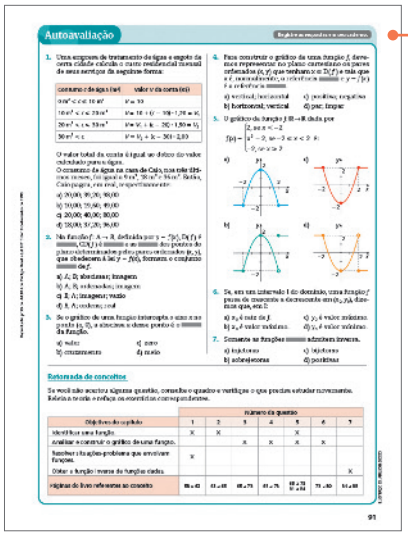
Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.

Exercícios complementares

- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.



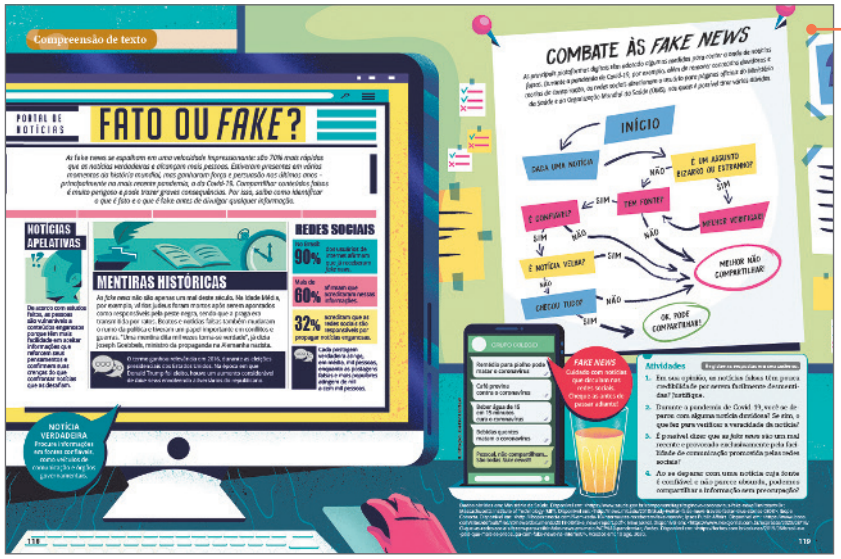


Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



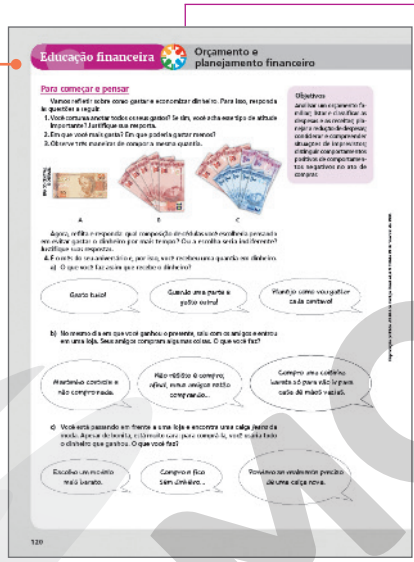
Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.

Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.

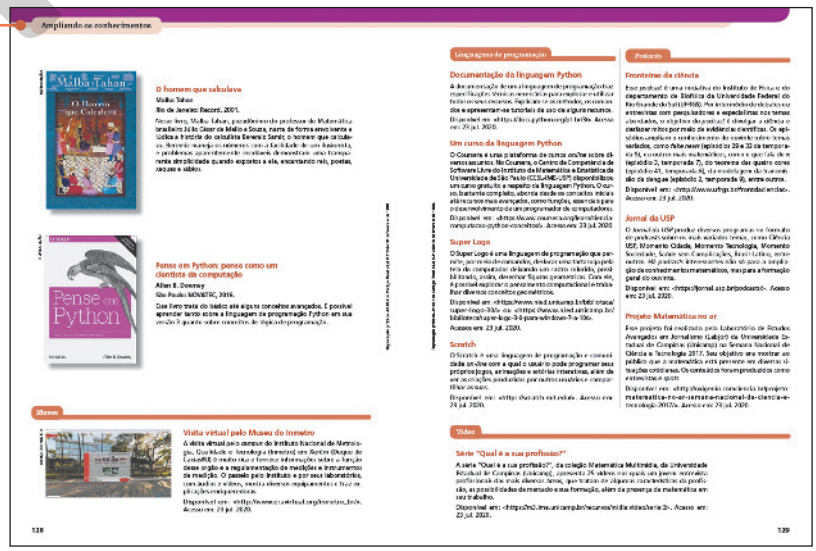


Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sumário

CAPÍTULO 1 Grandezas e medidas 14

1. Grandeza × medida 15
1.1. Medindo com instrumentos 16
1.2. Recordando o conceito de arredondamento 18
1.3. Recordando o conceito de notação científica 19
2. Sistema Internacional de Unidades 20
2.1. Unidades de base do SI 21
2.2. Unidades derivadas do SI 26
3. Além das unidades do SI 29
3.1. Unidades fora do SI 29
3.2. Unidades da informática 30
Exercícios complementares 32
Autoavaliação 35
Compreensão de texto 36

CAPÍTULO 2 Conjuntos 38

1. Conjuntos 39
1.1. Noções básicas 39
1.2. Igualdade de conjuntos 40
1.3. Conjuntos vazio, unitário e universo 40
1.4. Subconjuntos de um conjunto 41
2. Operações com conjuntos 42
3. Conjuntos numéricos 46
3.1. Conjuntos dos números naturais e dos números inteiros 46
3.2. Conjunto dos números racionais 47
3.3. Conjunto dos números irracionais 50
3.4. Conjunto dos números reais 52
3.5. Relação de inclusão dos conjuntos numéricos 52
4. Intervalos 53
4.1. Representação de subconjuntos por intervalos 53
4.2. Operações com intervalos 54
Exercícios complementares 56
Autoavaliação 57

CAPÍTULO 3 Funções 58

1. Conceito de função 58
1.1. A ideia de função no cotidiano 58
1.2. Definição de função 59
1.3. Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função 63
1.4. Zero de uma função 63
2. Gráfico de uma função 65
2.1. Plano cartesiano 66
2.2. Construção do gráfico de uma função 68
3. Análise de gráficos de funções 73
3.1. Intervalos de crescimento e de decrescimento 73
3.2. Valor máximo e valor mínimo de uma função 75
3.3. Estudo do sinal de uma função 77
3.4. Translação do gráfico de uma função 79
4. Função polinomial 81
5. Funções definidas por mais de uma sentença 82
6. Função inversa 84
Exercícios complementares 89
Autoavaliação 91
Compreensão de texto 92

CAPÍTULO 4 Algoritmos e introdução à programação 94

1. Algoritmos 96
1.1. Variáveis e atribuição de valor 97
1.2. Entrada e saída de dados 99
1.3. Controles de fluxo 99
2. Introdução à programação com Python 106
2.1. Declaração de variáveis e atribuição de valores 107
2.2. Entrada e saída de dados 107
2.3. Salvar os algoritmos em Python no computador 109
2.4. Controles de fluxo em Python 111
2.5. Laços de repetição 113
Exercícios complementares 115
Autoavaliação 117
Compreensão de texto 118

Educação financeira 120
Pesquisa e ação 124
Ampliando os conhecimentos 127
Respostas 130
Referências bibliográficas 136

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1** e **3**; habilidades **EM13MAT103**, **EM13MAT313** e **EM13MAT314**.

1 Grandezas e medidas

© ENERGY ENDEAVOUR FOUNDATION - SDE 2010 - CC BY-NC-SA 2.0

Objetivos do capítulo

- Conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos.
- Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.
- Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.
- Empregar corretamente unidades da informática.

Em 2012, a Ekó House, desenvolvida por universidades brasileiras com apoio da Fundação para a Pesquisa em Arquitetura e Ambiente (Fupam), participou de uma competição internacional em Madri como casa autossuficiente em energia.

Segundo estudos da Organização das Nações Unidas (ONU), a população mundial deve chegar a 8,6 bilhões de pessoas em 2030. Mas, ao mesmo tempo que a população cresce, os recursos naturais diminuem, apontando-se para o esgotamento desses recursos a médio prazo. Nesse contexto, ganha destaque e importância ambiental o conceito de sustentabilidade.

Em meados do século passado, preocupações ecológicas, como o melhor aproveitamento da ventilação natural e da luz solar na iluminação de ambientes internos, começaram a ser pautadas nos projetos de construções residenciais, além do uso de matérias-primas locais. Atualmente, acrescentam-se outros elementos, como o uso de energia limpa e renovável (solar ou eólica) e o reúso da água (cisterna).

Para estarem adequadas às necessidades de seus ocupantes com redução de custos e de recursos materiais e com o menor impacto ambiental possível, todas as grandezas envolvidas nesses projetos que visam construções sustentáveis precisam ser previamente dimensionadas, isto é, precisam ser medidas.

Grandezas e medidas são os objetos de estudo deste primeiro capítulo.

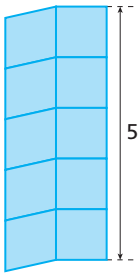
Nesse capítulo, optamos por conceituar e relacionar grandezas e medidas e por ampliar, em relação ao Ensino Fundamental, o leque de exemplos de medidas e de situações em que elas são aplicadas, não somente nos textos teóricos, como também nos enunciados de diversas atividades. Convém incentivar a pesquisa desse tema nos muitos campos de atividade humana e em outras áreas do conhecimento. A diversidade de grandezas e de suas unidades de medida certamente serão surpreendentes e significativas para o aluno.

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos ao longo desse capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos.

1 Grandeza × medida

BENTINHO

No clube que Felipe frequenta, a piscina tem formato de paralelepípedo reto-retângulo, e suas paredes e o chão são revestidos por peças cerâmicas quadradas. No chão da piscina, Felipe contou 20 peças no lado menor do formato retangular e 30 peças no lado maior, perpendicular ao anterior. Ainda reparou que a piscina tinha 5 dessas peças como altura. Representando por u a medida dos lados das peças cerâmicas, Felipe concluiu que a altura da piscina tem medida igual a 5 u.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Grandeza e medida são conceitos relacionados, porém distintos. Nessa situação, estão presentes as grandezas **comprimento da altura** e **comprimento do lado** da peça cerâmica – esta tomada como unidade de medida u. A **medida** da altura 5 u é obtida por comparação, pois o lado da peça "cabe" 5 vezes na altura da piscina. Logo, podemos considerar a medida o produto de um número pela unidade de medida.

Dizemos que:

Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado.

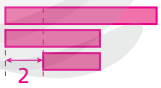
Medida de uma grandeza é o resultado da comparação dessa grandeza com outra da mesma natureza tomada como unidade de medida.

Reflita

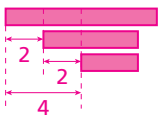
Considere que você tenha três tábuas com os seguintes comprimentos: uma de 8 m, outra de 5 m e mais uma de 3 m. Supondo que você não tenha um instrumento de medida, como poderia marcar a metade da tábua de 8 m?

Resposta possível:

Passo 1.
Alinhamos a tábua menor à direita da tábua de 5 metros e marcamos 2 metros na tábua de 8 metros.



Passo 2.
Alinhamos a tábua de 5 metros à marca de 2 metros e mantemos a tábua de 3 metros alinhada à direita da tábua da 5 metros. Assim, obtemos a metade da tábua de 8 metros.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Considerando a situação inicial, responda ao que se pede. Perímetro é a medida de uma grandeza (comprimento).

a) Sabendo que o perímetro do retângulo do chão é a soma das medidas dos respectivos lados, podemos dizer que perímetro é uma grandeza ou é a medida de uma grandeza?

b) A área de cada peça, isto é, a unidade de medida da superfície de cada peça é 1 u^2. A área da superfície do chão da piscina é 600 u^2. Então, podemos afirmar que a superfície é uma grandeza e a área é a sua medida? sim

c) O volume do espaço determinado por um cubo de faces iguais às peças de revestimento é 1 u^3, que é a unidade de medida de volume. O volume do espaço ocupado pela piscina é 3.000 u^3. Então, o espaço é uma grandeza e o volume é a sua medida? sim

2. Considere ainda a situação anteriormente descrita.

a) Quais são as medidas das bordas horizontais da piscina do clube? 20 u, 30 u, 20 u, 30 u

b) Qual é o perímetro de cada parede e do chão da piscina na unidade u? 50 u, 70 u, 100 u

c) Quantas peças há em cada parede e no chão da piscina? Qual é a área de cada parede e do chão da piscina? 100, 100, 150, 150, 600; 100 u^2, 100 u^2, 150 u^2, 150 u^2, 600 u^2

d) Se Felipe quisesse contar o total de peças que revestem a piscina, a que número ele chegaria? Qual é a área total das quatro paredes mais o chão? 1.100 peças; 1.100 u^2

e) Um cubo cujas faces são iguais às peças de revestimento ocupa um volume igual a 1 u^3. Quantos desses cubos preenchem a piscina? Qual é o volume da piscina? 3.000 cubos; 3.000 u^3

1.1 Medindo com instrumentos

A medição de uma grandeza (comprimento, tempo, massa, temperatura, entre outras) consiste na comparação entre o que se quer medir e uma unidade de medida da mesma grandeza escolhida como padrão.

Para cada grandeza, em geral, são desenvolvidos métodos e instrumentos de medida e definidas as unidades de base. Contudo, é comum incorrer em erro nas medições; para minimizar esses erros, devemos escolher os instrumentos adequados, aprender a utilizá-los com sua escala de medidas e considerar as margens de precisão de cada um. Veja alguns exemplos a seguir.

Nesta situação, uma trena graduada em centímetro é o instrumento mais adequado.

Nesta situação, uma régua graduada em milímetro é o instrumento mais adequado.

Nesta situação, usa-se um paquímetro graduado em décimo de milímetro como o instrumento mais adequado.

ILUSTRAÇÕES: BENTINHO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

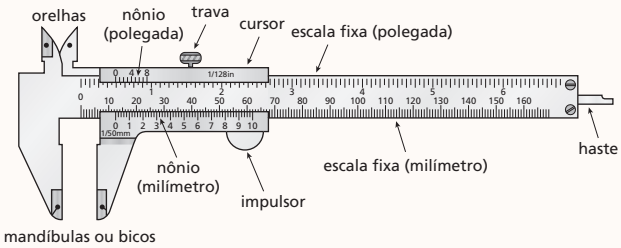
Se julgar oportuno, pedir aos alunos que pesquisem em livros, revistas ou na internet a história do paquímetro e outros instrumentos de medida de precisão, como o *palmer*.

Exercício resolvido

R1. Medir a largura de uma porca sextavada usando um paquímetro.

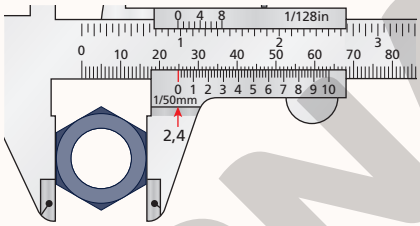
▸ **Resolução**

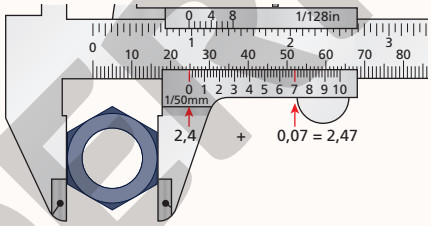
Inicialmente, observamos a porca e os elementos que compõem um paquímetro.



Para medir a porca, realizamos os seguintes passos:

- Movendo o cursor do paquímetro, encaixamos a porca entre as mandíbulas, encostando-as sem apertar.
- Na escala fixa (milímetro), lemos a medida dada pelo tracinho mais próximo e à esquerda do zero do nônio (milímetro). (No caso, temos 2,4 cm ou 24 mm, o que indica que a medida está entre 24 mm e 25 mm.)
- Observamos qual tracinho do nônio coincide com um dos outros tracinhos da escala fixa (milímetro). (No caso, vemos que isso acontece com o 7 do nônio, o que significa que após o 24 há mais 0,07 cm ou 0,7 mm a ser considerado.)
- Adicionamos 24 mm a 0,7 mm e chegamos à medida da porca: 24,7 mm





ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Para medir usando as mandíbulas do paquímetro:
Passo 1. Mover o cursos do paquímetro, encaixando o objeto a ser medido entre as mandíbulas, encostando-as no objeto sem apertar.
Passo 2. Na escala fixa (milímetro), ler a medida dada pelo traço mais próximo e à esquerda do zero nônio (milímetro).
Passo 3. Observar qual traço do nônio coincide com um dos outros traços da escala fixa (milímetro).
Passo 4. Adicionar a medida obtida no passo 2 à medida obtida no passo 3. Ao obter a resposta, encerra-se o algoritmo.

Pensamento computacional

Algoritmo

O **algoritmo**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita de passos para resolver um problema. Para escrever um algoritmo, com início e fim, é preciso ter clareza para ordenar a execução detalhada dos passos.

Um algoritmo pode ser representado, por exemplo, em linguagem corrente, como no exercício resolvido **R1**, em que os passos auxiliam na mensuração com um paquímetro. Entretanto, um algoritmo deve ser suficientemente genérico para que se tome qualquer medida de qualquer objeto para o qual sua utilização é indicada.

- Escreva os passos para medir um objeto qualquer com as mandíbulas do paquímetro tomando como base o exercício resolvido **R1**.

Esse boxe favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, ao propor a elaboração de um algoritmo em linguagem corrente.

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

3. Pesquise o nome e a graduação de cada instrumento usado para medir, de maneira apropriada, cada uma das grandezas a seguir. Depois, construa um cartaz ilustrado com as informações encontradas.

a) Cintura, massa, temperatura e pressão arterial de uma pessoa.

b) Dimensões lineares e capacidade de uma caixa-d'água.

c) Duração da gestação de um bebê, de um filme e de uma prova de natação em piscina.

Respostas possíveis:

a) fita métrica, milímetro; balança, grama; termômetro, grau Celsius; esfigmomanômetro, milímetro de mercúrio

b) trena, milímetro; recipiente graduado em litro ou decímetro cúbico, litro ou decímetro cúbico

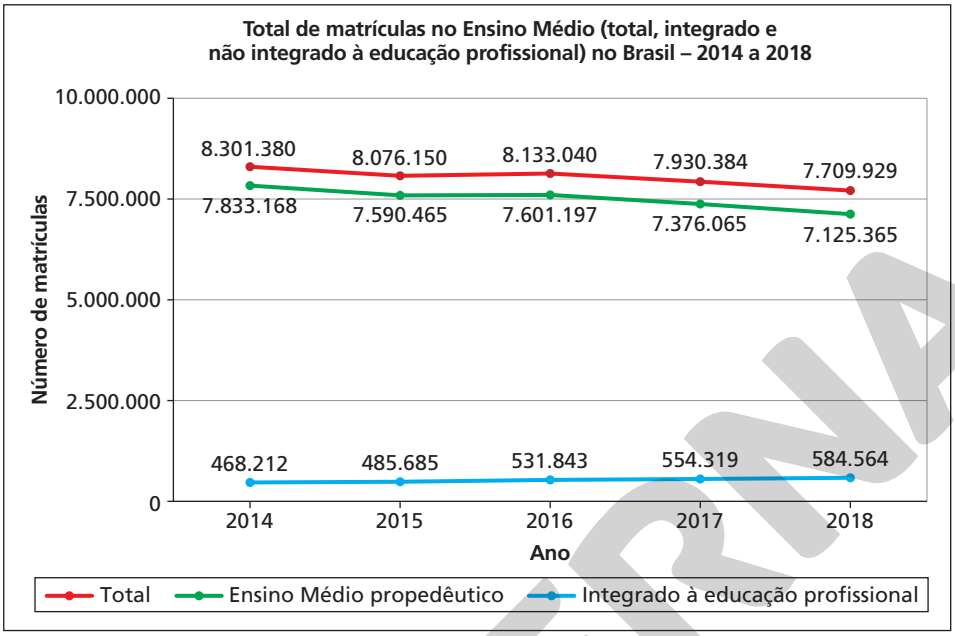
c) calendário, semana; relógio, minuto; cronômetro, segundo

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1.2 Recordando o conceito de arredondamento

Observe o gráfico a seguir. As informações apresentadas nesse gráfico orientam setores governamentais a elaborar os projetos para os anos subsequentes na área da Educação.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Resumo técnico*: Censo da Educação Básica 2018. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. 2019.

Para realizar estimativas preliminares, não há necessidade de tamanha precisão. Por exemplo, para se fazer um orçamento de custos, o total de matrículas no Ensino Médio, ou seja, 7.709.929, em 2018, pode ser considerado próximo de 7 milhões e 700 mil, isto é, 7.700.000. Nesse caso, dizemos que fizemos um **arredondamento numérico**.

Arredondar um número significa trocá-lo por outro mais próximo de uma ordem escolhida.

No caso anterior, a ordem escolhida foi a centena de milhar, pois a parte substituída (709.929 por 700.000) é um número da ordem centena de milhar.

O arredondamento também pode ser necessário por limitação da técnica e do instrumento de medida usado. Por exemplo, a ordem centésimo de milímetro e décimo de milímetro que o paquímetro fornece não são confiáveis, porque, por mais cuidado que se tenha ao efetuar a medição, pode-se incorrer em erro.

Para obter um número próximo de outro por arredondamento para determinada ordem, deve-se observar o primeiro algarismo que está à direita do algarismo da ordem escolhida: se for 0, 1, 2, 3 ou 4, mantém-se a ordem; se for 5, 6, 7, 8 ou 9, adiciona-se 1 ao algarismo da ordem escolhida.

Exemplos

a) No gráfico anterior, em 2017, lemos o número 7.376.065 de matrículas no Ensino Médio propedêutico. Arredondando esse número para a centena de milhar, observamos o primeiro algarismo (7) à direita do algarismo da centena de milhar (3). Então, adicionamos 1 a 3 e obtemos o número arredondado: 7.400.000

Se quisermos arredondar o número 7.376.065 para a unidade de milhão, observamos o primeiro algarismo (3) à direita do algarismo da unidade de milhão (7). Nesse caso, mantemos a ordem, isto é, o algarismo 7, e obtemos o número arredondado: 7.000.000

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

b) Ainda no gráfico anterior, um caso que requer mais atenção: arredondar o total de matrículas no Ensino Médio em 2018, 7.709.929, para a unidade de milhar. Observe que, nesse caso, o primeiro algarismo (9) à direita do algarismo da unidade de milhar (9) é maior que 5; logo, adicionamos 1 ao 9 da centena simples, que resulta em 10. Isso significa que devemos adicionar 1 ao 9 da ordem unidade de milhar; assim, temos: 7.710.000

c) O critério de arredondamento não se restringe aos números naturais. Dado o número racional 106,9838, podemos arredondá-lo para o milésimo, para o centésimo, para o décimo, para a unidade simples ou para a dezena simples. Assim, respectivamente, obtemos: 106,984; 106,98; 107,0; 107; 110.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

4. No gráfico "Total de matrículas no Ensino Médio", obtenha, por arredondamento, os números aproximados para centena de milhar do total das matrículas e das matrículas referentes ao ensino integrado à educação profissional. Total: 8.300.000, 8.100.000, 8.100.000, 7.900.000, 7.700.000. Integrado: 500.000, 500.000, 500.000, 600.000, 600.000.

5. Elabore uma lista com dez números, todos com oito algarismos, sendo pelo menos cinco números racionais não inteiros. Para cada um, defina uma ordem de arredondamento. Troque a sua lista com um colega. Após cada um resolver a lista do outro, destroquem e confiram as respostas. respostas pessoais

6. Veja a lista de pesquisa de preço de material escolar que Andréa fez em algumas lojas.

Loja Já	
Caderno	12,10
Lápis de cor	12,10
Estojo	5,77
Caneta	2,90
Cola	3,20
Etiquetas	11,19

Papelaria Esquina	
Caderno	13,40
Lápis de cor	10,85
Estojo	6,30
Caneta	2,90
Cola	2,80
Etiquetas	10,99

Lojinha Escolar	
Caderno	11,89
Lápis de cor	11,70
Estojo	7,19
Caneta	2,99
Cola	2,90
Etiquetas	14,10

Empregando o arredondamento, faça um cálculo mental do custo total dos materiais em cada loja e diga se, com R$ 50,00, Andréa pode fazer a compra em qualquer uma dessas lojas.
Andréa pode comprar nas duas primeiras lojas (R$ 47,00), mas na última (R$ 51,00), não.

1.3 Recordando o conceito de notação científica

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT313** da BNCC, pois os alunos deverão aplicar a notação científica, compreendendo as noções de algarismos significativos e de algarismos duvidosos.

Ainda considerando o gráfico do total de matrículas no Ensino Médio, os números que indicam a quantidade, real ou arredondada, de matrículas em 2018 no Ensino Médio no Brasil podem ser escritos com o uso de potências de dez com expoente inteiro. Acompanhe as igualdades a seguir.

- $7.709.929 = 770.992,9 \cdot 10^1 = 77.099,29 \cdot 10^2 = 7.709,929 \cdot 10^3 = 770,9929 \cdot 10^4 = 77,09929 \cdot 10^5 = 7,709929 \cdot 10^6$
- $7.700.000 = 770.000,0 \cdot 10^1 = 77.000,00 \cdot 10^2 = 7.700,000 \cdot 10^3 = 770,0000 \cdot 10^4 = 77,00000 \cdot 10^5 = 7,700000 \cdot 10^6$

Nos dois casos, real e arredondado, o último registro apresenta, na parte inteira do primeiro fator, um número maior ou igual a 1 e menor ou igual a 9; e, no segundo fator, uma potência de dez com expoente inteiro. Chamamos essa representação de **notação científica** do número.

Note que $7.709.929 = 7,709929 \cdot 10^6$ e $7.700.000 = 7,700000 \cdot 10^6 = 7,7 \cdot 10^6$. Assim, $7,709929 \cdot 10^6$ é a notação científica de 7.709.929, e $7,7 \cdot 10^6$ é a notação científica de 7.700.000.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

Vamos escrever o número dado em notação científica.

a) 781

Para que se tenha um só algarismo não nulo na parte inteira, multiplicamos por 10^{-2} e, para manter o valor do número dado, multiplicamos também por 10^2, pois: $10^{-2} \cdot 10^2 = 1$

Assim:

$781 = 781 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 7{,}81 \cdot 10^2$

b) 3.014,41

$3.014{,}41 = 3.014{,}41 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 3{,}01441 \cdot 10^3$

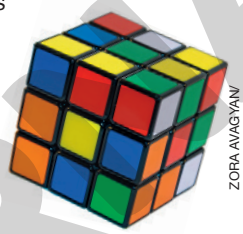
c) $0{,}000092 = 0{,}000092 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}$

Se julgar pertinente, explicar aos alunos que a resolução de um cubo mágico pode ser feita com o auxílio de um computador. A quantidade de combinações é tão grande que estudam-se algoritmos eficientes para buscar soluções, que podem demorar horas até serem encontradas. Para saber mais, ler a monografia a seguir, disponível em: <https://www.ime.usp.br/~cef/mac499-11/monografias/walter/monografia.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. Elabore uma lista com dez números, todos com oito algarismos, sendo pelo menos cinco números racionais não inteiros. Troque sua lista com um colega, para que cada um escreva, em notação científica, os números da lista do outro. Depois disso, destroquem para conferir as respostas. respostas pessoais



ZORA AVAGYAN/ SHUTTERSTOCK

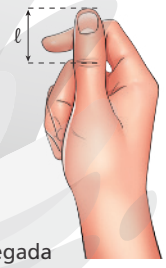
8. A quantidade de combinações possíveis de um cubo mágico é 43.252.003.274.856.000. Arredonde esse número para a centena de trilhão e escreva o resultado em notação científica.
43.300.000.000.000.000; $4{,}33 \cdot 10^{16}$

Esse tópico visa contemplar a competência geral **1**, pois valoriza e emprega conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, a fim de entender e explicar a realidade. Também favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103** da BNCC, pois os alunos deverão interpretar e compreender textos que empregam unidades de medidas de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas pelo SI.

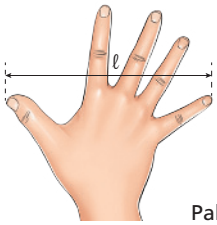
2 Sistema Internacional de Unidades

A origem das civilizações confunde-se com a necessidade humana de medir, e a evolução das civilizações caminhou paralelamente com o aperfeiçoamento da Metrologia (ciência da medição, abrangendo todas as medições realizadas em um nível conhecido de incerteza, em qualquer domínio da atividade humana).

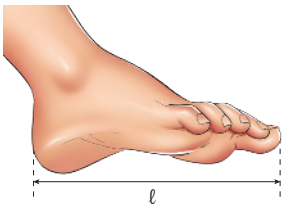
Antes da existência do Sistema Internacional de Unidades, cada povo tinha um sistema próprio de medidas; em geral, as unidades tinham o corpo humano (palmo, pé, polegada, jarda, passo etc.) como referência, o que resultava em muitos problemas, principalmente para o comércio, já que essas medidas variavam de uma pessoa para outra.



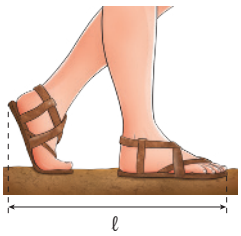
Polegada



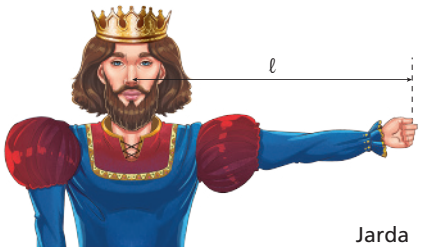
Palmo



Pé



Passo



Jarda

Representações sem proporção entre si.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Sistema Métrico Decimal (SMD) surgiu na França, em 1799, e originou o Sistema Internacional de Unidades (SI), sancionado em 1960 pela Conferência Geral de Pesos e Medidas. De lá para cá, o SI não parou de evoluir, objetivando atender às crescentes exigências, sobretudo decorrentes dos avanços científicos e tecnológicos.

Das discussões das últimas Conferências Gerais de Pesos e Medidas vingou a proposta de estabelecer relações entre as grandezas de base e constantes físicas fundamentais. O objetivo era tornar válidas, ao longo do tempo, as definições das unidades de base para todas as culturas.

Observação

Anos notáveis da Metrologia

1799 – A França se torna o primeiro país a criar um sistema universal de medidas.
1875 – 17 países, Brasil incluído, assinam a Convenção do Metro. Barra de metal define unidade que mensura distâncias.
1889 – 1ª Conferência Geral de Pesos e Medidas define o IPK (Protótipo Internacional do Quilograma, na sigla em inglês) como quilograma oficial.
1960 – Metro, segundo, quilograma, mol, kelvin e ampere: são definidas as unidades fundamentais do SI.
2018 – Quilograma, mol, kelvin e ampere são redefinidos. É a maior mudança do SI desde sua criação.

Fonte: ELER, Guilherme. Quanto pesa um quilo. *Revista Superinteressante*, n. 395, nov. 2018. Disponível em: <https://super.abril.com.br/ciencia/quanto-pesa-um-quilo/>. Acesso em: 21 jun. 2019.

Explore

Pesquise em enciclopédias, revistas, *sites* confiáveis, entre outras fontes, informações sobre a Revolução Francesa e o Sistema Métrico Decimal, precursor do SI. Depois, elabore um texto explicando as informações pesquisadas.

Sugestão de *site* de pesquisa: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4494073/mod_resource/content/6/Ap%C3%AAndice%201%20-%20Instrumentos%20de%20medidas>. Acesso em: 8 jul. 2020. Espera-se que os alunos percebam que o desenvolvimento da Metrologia ocorreu em um contexto histórico intimamente vinculado ao progresso das ciências naturais e da tecnologia.

2.1 Unidades de base do SI

Observe o quadro abaixo, em que constam, de maneira sintética, os nomes e os símbolos das grandezas e das unidades.

Grandezas de base e unidades de base do SI			
Grandezas de base	**Símbolo**	**Unidades de base**	**Símbolo**
Comprimento	*l*, *x*, *r*, entre outros	Metro	m
Massa	*m*	Quilograma	kg
Tempo (duração)	*t*	Segundo	s
Corrente elétrica	*I*, *i*	Ampere	A
Temperatura termodinâmica	*T*	Kelvin	K
Quantidade de substância	*n*	Mol	mol
Intensidade luminosa	I_v	Candela	cd

Fonte: Tradução da publicação do **BIPM** – Resumo do Sistema Internacional de Unidades – SI. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Em novembro de 2018, a 26ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, em votação unânime, determinou redefinições das unidades de medida quilograma (massa), ampere (corrente elétrica), kelvin (temperatura termodinâmica) e mol (quantidade de substância). Essas medidas foram redefinidas com base em **constantes da natureza**, que são estáveis e imutáveis (de acordo com as teorias científicas atuais), a exemplo da velocidade da luz.

Observe a seguir como as definições das sete unidades de base se modificaram no decorrer do tempo.

Outras informações podem ser obtidas em: <http://www.inmetro.gov.br/metcientifica/Redefinicao_do_SI.asp> Acesso em: 8 jul. 2020.

- **Unidade de comprimento – metro (m)**

  1889 – Definição do metro baseada no protótipo internacional de liga metálica de platina-irídio, na temperatura da fusão do gelo.

  1983 – O metro é o comprimento do trajeto da luz percorrido no vácuo durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{299.792.458}$ de segundo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

KYODO NEWS STILLS/GETTY IMAGES

Foto do Protótipo Internacional do Quilograma (IPK Ibaraki, Japão, nov. 2018).

- **Unidade de massa – quilograma (kg)**

  1889 – O quilograma é a massa do protótipo internacional de liga metálica de platina-irídio.

  2019 – Redefinida em função da constante de Planck igual a $6{,}62606957 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Observação

Por gerar campos magnéticos, eletroímãs costumam ser usados em guindastes para levantar e mover grandes objetos de metal. A força que ele exerce está diretamente relacionada à quantidade de corrente elétrica que passa por suas bobinas. Dessa forma, é feita uma correlação entre eletricidade e peso. Com isso, os cientistas podem definir um quilograma, ou qualquer outra unidade de massa, em relação à eletricidade necessária para neutralizar sua força correspondente. A Física quântica fica por conta da utilização de uma propriedade que relaciona peso à corrente elétrica. Representada pelo símbolo *h*, ela é chamada de constante de Planck.

Por *h* ser um número bastante pequeno, o cientista Bryan Kibble (1938-2016) criou uma balança de alta precisão, que ficou conhecida como Balança de Kibble. De um lado, ela tem um eletroímã que pende para baixo e, do outro, um objeto cuja massa será medida (algo com um quilograma, por exemplo). A corrente elétrica que passa pelo eletroímã é aumentada ou diminuída até que os dois lados **estejam equilibrados**.

Dados obtidos em: <https://www.uol.com.br/tilt/ultimas-noticias/redacao/2019/05/20/como-o-quilograma-e-a-corrente-eletrica-mudam-a-partir-de-agora.htm>. Acesso em: 8 jul. 2020.

- **Unidade de tempo – segundo (s)**

  1ª definição: O segundo é o intervalo igual à fração $\frac{1}{86.400}$ do dia solar médio, que, em 1960, foi definido com base no ano tropical 1900.

  1968 – "O segundo é a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133."

- **Unidade de corrente elétrica – ampere (A)**

  1948 – O ampere é a intensidade de uma corrente elétrica constante que, se mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito e de seção circular desprezível, situados à distância de 1 metro entre si, no vácuo, produz entre esses condutores uma força igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de comprimento.

  2019 – Redefinida como a corrente elétrica correspondente à passagem de $1{,}602176565 \cdot 10^{-19}$ cargas elementares por segundo.

- **Unidade de temperatura termodinâmica – kelvin (K)**

  1889 – Para a definição dos protótipos do metro e do quilograma, foi estabelecido o uso da escala centígrada do termômetro de hidrogênio e a temperatura de fusão do gelo como referência.

  2019 – Redefinida em função da constante de Boltzmann, que relaciona temperatura a energia molecular, para $1{,}3806488 \cdot 10^{23}$ J · K^{-1}.

- **Unidade de quantidade de substância – mol (mol)**

  1971 – O mol é a quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos átomos existem em 0,012 quilograma de carbono-12.

  Quando se utiliza o mol, as entidades elementares devem ser especificadas, podendo ser átomos, moléculas, íons, elétrons, assim como outras partículas ou agrupamentos especificados de tais partículas.

  2019 – Redefinida em função da constante de Avogadro para $6{,}02214129 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

Observação

A massa molar de carbono-12 é exatamente igual a 12 gramas por mol, ou seja, M(C-12) = 12 g/mol.

- **Unidade de intensidade luminosa – candela (cd)**

  1979 – A candela é a intensidade luminosa, em uma dada direção, de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência $540 \cdot 10^{12}$ hertz e que tem uma intensidade radiante nessa direção de $\frac{1}{683}$ watts por esferorradiano.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esse tópico permite ação interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A habilidade **EM13CNT202** pode ser favorecida ao analisar uma forma de manifestação da vida no texto e uma fotografia sobre a menor forma de vida do planeta. Além disso, o tópico também favorece o desenvolvimento da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade **EM13MAT103** da BNCC, pois os alunos deverão interpretar e compreender um texto divulgado pela mídia que emprega unidade de medida.

Prefixos

Para cada grandeza do SI, a unidade de medida escolhida para servir como base não é conveniente para todas as medições em que ela é usada. Por exemplo, o metro é uma boa unidade para medir o comprimento de uma sala de aula, mas não é para medir a espessura de uma lente de contato ou a distância entre as capitais de dois estados brasileiros.

Leia o texto a seguir.

Pesquisadores americanos conseguiram registrar a primeira imagem detalhada de uma bactéria ultrapequena, conhecida por ser a "menor forma de vida do planeta".

[...]

Os organismos (que ainda não ganharam nome científico) possuem o tamanho médio de 0,009 mícron cúbico (um micron é o equivalente a um milionésimo de um metro).

Seriam necessárias 150 mil delas para preencher uma única célula da *Escherichia coli*, bactéria causadora da diarreia.

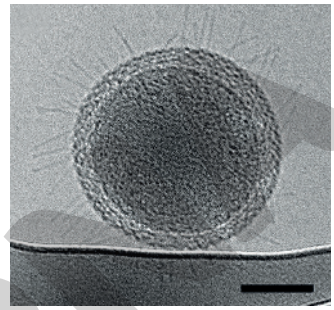
Os cientistas da Universidade da Califórnia conseguiram preservar as amostras do ser vivo ao congelá-las a uma temperatura de −272 °C [1,15 K], antes de transportá-las ao laboratório.

[...]

Fonte: GARCIA, Gabriel. Menor forma de vida do mundo tem imagem capturada. Revista *Exame*, 3 mar. 2015. Disponível em: <https://exame.com/ciencia/menor-forma-de-vida-do-mundo-tem-imagem-capturada/>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Observação

Os símbolos das unidades são invariáveis, ou seja, não podem ser seguidos por pontos, como os das abreviaturas (exceto no final de uma sentença), nem por *s* para a formação de plural.


BERKELEY LAB

Representação da estrutura interna de uma bactéria ultrapequena. A imagem foi obtida a partir de uma reconstrução 3-D. (Reprodução/Berkeley Lab).

Para medidas muito grandes ou muito próximas de zero, como a da bactéria citada no texto, aplicamos **prefixos** a essas unidades. Observe o quadro abaixo.

Prefixos SI					
Fator	**Nome**	**Símbolo**	**Fator**	**Nome**	**Símbolo**
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	quilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	µ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

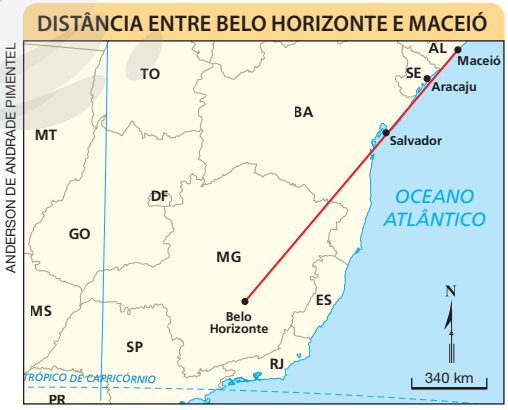
Fonte: Tradução da publicação do **BIPM** – Resumo do Sistema Internacional de Unidades – SI. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Observação

Pesquisas para avaliar a eficácia das máscaras de prevenção contra o coronavírus levam em conta o tamanho médio do vírus, que é 120 nanômetros.

Exemplos

a) A distância de Belo Horizonte a Maceió é 1.442.000 m ou 1.442 km.



Elaborado com base em: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 7. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2016. p. 90.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SCIENCE PHOTO LIBRARY/GETTY IMAGES

O micrômetro é um instrumento para dimensões lineares de objetos com precisão da ordem de 10^{-6} metros.

O texto ao lado permite ação interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois é favorecido o desenvolvimento parcial da habilidade **EM13CNT203**. Os alunos poderão analisar um esquema da liberação e da transferência de prótons pela bacteriorrodopsina na fotossíntese. Além disso, o tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade **EM13MAT103** da BNCC, pois os alunos deverão interpretar e compreender um texto divulgado pela mídia que emprega unidade de medida.

b) A espessura (diâmetro) de fios de cabelo de europeus e seus descendentes varia de 0,000040 m a 0,000100 m ou de 40 μm a 100 μm.

Com o avanço das ciências e da tecnologia, tanto os prefixos que indicam grandes medidas (astronomia, informática etc.) quanto aqueles cujos módulos se aproximam muito do zero (nanotecnologia, microbiologia etc.) passaram a ser usados com maior frequência. Leia o texto a seguir.

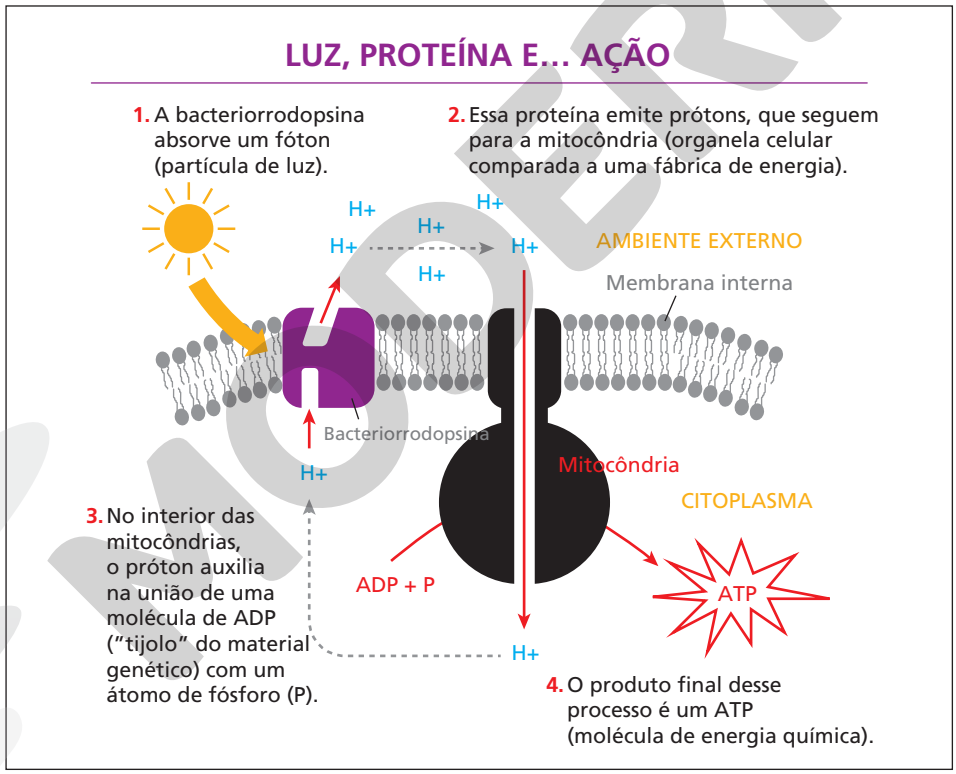
A hiperveloz fotobiologia estrutural

Fotobiologia estrutural é a ciência que estuda mudanças nas estruturas das células por meio da absorção de luz.

[...] na fotobiologia estrutural, há necessidade de registrar movimentos na faixa do picossegundo (trilionésimos de segundo), ou seja, 100 milhões de vezes mais rápidos do que os detectados pela RMN (ressonância magnética nuclear).

Que eventos são esses? E como detectá-los?

Eles ocorrem nos processos de fotossíntese e visão dos animais (inclusive humanos) e se iniciam quando certas proteínas (fotorreceptoras) absorvem um fóton (partícula de luz) e emitem prótons. Isso faz com que essas partículas positivas desencadeiem reações envolvidas nesses processos biológicos, que duram poucos picossegundos. [...]



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Esquema da liberação e da transferência de prótons pela bacteriorrodopsina na fotossíntese em um microrganismo (*H. salinarum*), processo que ocorre em trilionésimos de segundo.

A observação desses processos em escala atômica só foi possível depois da invenção do *laser* de elétrons livres [...]. Com esse equipamento, é possível gerar pulsos na faixa dos fentossegundos – cerca de mil vezes mais rápido que o processo desencadeado pelo próton. [...]

Dados obtidos em: <http://cienciahoje.org.br/artigo/a-hiperveloz-fotobiologia-estrutural/>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Na matéria sobre fotobiologia, vemos que reações envolvidas em processos biológicos de fotossíntese e visão dos animais (inclusive humanos) ocorrem em um intervalo de tempo da ordem de picossegundos, ou seja, 1 ps = 0,000000000001 s = 10^{-12} s. E o *laser* de elétrons livres gera pulsos na ordem de fentossegundos, isto é, 1 fs = 0,000000000000001 s = 10^{-15} s.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

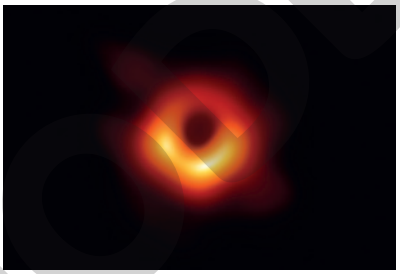
9. No texto sobre a menor forma de vida do planeta, vimos que o tamanho médio dos organismos estudados é 0,009 mícron cúbico e que seriam necessárias 150 mil delas para preencher uma única célula da *Escherichia coli*, bactéria causadora da diarreia. Qual é o tamanho dessa célula em mícron cúbico? $1{,}35 \cdot 10^3\ \mu^3$

10. Leia o trecho da reportagem a seguir.

Event Horizon Telescope, rede de oito observatórios ao redor do mundo, divulgou hoje a primeira imagem real de um buraco negro supermassivo, fenômeno previsto por Einstein.

Se você está lendo este texto, está entre as pessoas de sorte que viveram para ver uma imagem histórica para a ciência. Acaba de ser revelada a primeira foto de um buraco negro supermassivo no centro de Messier 87, uma enorme galáxia no aglomerado de Virgem. Este buraco negro está a 53,5 milhões de anos-luz da Terra e tem uma massa de 6,5 bilhões de vezes a massa do Sol. Esses monstros cósmicos conhecidos como buracos negros são pequenos, considerando a escala universal, mas com uma massa imensa a ponto de gerar um efeito gravitacional gigantesco. E que torna impossível a luz escapar deles – daí o nome que recebem. [...]

A imagem capturou a sombra do buraco negro no interior do disco de material brilhante que a acompanha. Por causa da gravidade intensa perto de um buraco negro, a trajetória da luz mostrada na imagem, correspondendo à radiação do disco, é deformada em torno do horizonte de eventos e aparece na forma de um anel. A imagem é mais brilhante de um lado do que do outro porque o disco de acreção está girando ao redor do buraco negro: um efeito relativístico semelhante ao efeito Doppler (distorção observada em ondas que são emitidas por uma fonte em movimento) faz com que o lado do disco que gira na direção da Terra pareça mais brilhante, enquanto [...] o mesmo efeito faz com que o lado do disco que está se afastando da Terra pareça mais escurecido.



SUN ZIFA/IMAGINECHINA/AFP

Imagem da região ao redor de um buraco negro.

[...]

Fonte: CAIRES, Luiza. Dia histórico para a ciência: revelada a primeira imagem de buraco negro. *Jornal da USP*, 10 abr. 2019. Disponível em: <https://jornal.usp.br/ciencias/ciencias-exatas-e-da-terra/dia-historico-para-a-ciencia-revelada-a-primeira-imagem-de-buraco-negro/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

---

a) O que você sabe sobre buraco negro? E sobre as unidades astronômicas? respostas pessoais

b) Ano-luz é uma unidade de medida da grandeza tempo ou da grandeza comprimento? É uma unidade de medida da grandeza comprimento.

c) Considerando a massa aproximada do Sol igual a $2 \cdot 10^{30}$ kg, qual seria a massa desse buraco negro? $1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg

d) Sabendo que 1 ano-luz é aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km, calcule, em notação científica e em quilômetro, a distância desse buraco negro à Terra. $5{,}0611 \cdot 10^{20}$ km

e) Por razões históricas, o nome da unidade de base SI de massa tem o prefixo quilograma. Porém, os múltiplos e os submúltiplos da unidade de massa são feitos a partir do grama. Como fica o registro da massa do buraco negro usando o prefixo *yotta*? $1{,}3 \cdot 10^{19}$ Yg

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

11. A relação entre as unidades de temperatura termodinâmica Kelvin (T_K) e grau Celsius (T_C) é linear e dada pela equação $T_K = T_C + 273{,}15$. Assim, o zero Kelvin (zero absoluto), temperatura em que a energia cinética da matéria é igual a zero, corresponde a –273,15 °C, pois, se $T_K = 0$, então $0 = T_C + 273{,}15$ nos leva a $T_C = -273{,}15$. Lembrando que o ponto de fusão da água ocorre quando $T_C = 0$ e que o ponto de ebulição da água ocorre quando $T_C = 100$, responda às questões.

a) Qual é o valor de T_K correspondente ao ponto de fusão da água? $T_K = 273{,}15$ K

b) Qual é o valor de T_K correspondente ao ponto de ebulição da água? $T_K = 373{,}15$ K

12. (Fuvest-SP) Qual é a ordem de grandeza do número de voltas dadas pela roda de um automóvel ao percorrer uma estrada de 200 km? alternativa c

a) 10^2
b) 10^3
c) 10^5
d) 10^7
e) 10^9

13. (Cefet-MG) Nos trabalhos científicos, números muito grandes ou próximos de zero, são escritos em notação científica, que consiste em um número x, tal que $1 < x < 10$ multiplicado por uma potência de base 10. Assim sendo, 0,00000045 deve ser escrito da seguinte forma: alternativa b

a) $0{,}45 \cdot 10^{-7}$
b) $4{,}5 \cdot 10^{-7}$
c) $45 \cdot 10^{-6}$
d) $4{,}5 \cdot 10^{-8}$
e) $4{,}5 \cdot 10^{-5}$

2.2 Unidades derivadas do SI

A primeira circum-navegação já registrada foi feita pelo navegador português Fernão de Magalhães, que morreu durante a viagem, e ocorreu entre 1519 e 1522, quando Juan Sebastián Elcano, substituto de Magalhães, retornou à Espanha.

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT314** da BNCC, pois os alunos deverão resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras.

ALEC TRUSLER2015/SHUTTERSTOCK

Balões de ar quente no festival anual de Camberra, Austrália, em 2019.

MODERNA

Em 1999, de balão, o suíço Bertrand Piccard e o inglês Brian Jones voaram 19 dias, 21 horas e 47 minutos para dar a volta ao mundo sem escalas. A dupla percorreu 45.755 quilômetros.

Uma pergunta interessante sobre o feito é: com qual velocidade média, em metro por segundo, a viagem de Piccard e Jones foi realizada?

A velocidade média v_m é dada pela razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

Vamos, então, escrever a distância em metro e o tempo em segundo:

$d = 45.755 \text{ km} = 45.755.000 \text{ m}$

$t = 19 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 + 21 \cdot 60 \cdot 60 + 47 \cdot 60 = 1.720.020$

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{45.755.000}{1.720.020} \simeq 26{,}6$$

Portanto, Piccard e Jones viajaram a uma velocidade média aproximada de 26,6 m/s.

As unidades de base são assim chamadas porque, quando combinadas, originam qualquer outra unidade do SI, que são as unidades derivadas. A velocidade obtida pela relação entre distância e tempo é uma grandeza derivada. Vejamos algumas delas no quadro a seguir.

Observação

O símbolo $\simeq$ é usado para indicar uma aproximação. $v_m \simeq 26{,}6$ m/s significa que a "velocidade média é aproximadamente igual a vinte e seis vírgula seis metros por segundo".

Exemplos de grandezas derivadas e de suas unidades

Grandeza derivada	Símbolo	Unidade derivada	Símbolo
área	A	metro quadrado	m^2
volume	V	metro cúbico	m^3
velocidade	v	metro por segundo	m/s
aceleração	A	metro por segundo ao quadrado	m/s^2
número de ondas	σ, $\tilde{v}$	inverso do metro	m^{-1}
massa específica	ρ	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
densidade superficial	ρ_A	quilograma por metro quadrado	kg/m^2
volume específico	v	metro cúbico por quilograma	m^3/kg
densidade de corrente	j	ampere por metro quadrado	A/m^2
campo magnético	H	ampere por metro	A/m
concentração	c	mol por metro cúbico	mol/m^3
concentração de massa	ρ, γ	quilograma por metro cúbico	kg/m^3
luminância	L_v	candela por metro quadrado	cd/m^2
índice de refração	n	adimensional	–
permeabilidade relativa	μ_r	adimensional	–

Fonte: Tradução da publicação do **BIPM** – Resumo do Sistema Internacional de Unidades – SI. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Reflita

Com uma barra de alumínio, um serralheiro faz o contorno retangular de uma grade.

- Qual é a maior área de grade que ele consegue construir com uma barra de 6 m de comprimento? Quais são as medidas dos lados desse retângulo?
- Se ele tiver uma barra com o dobro do comprimento daquela, a maior área de grade que ele conseguirá fazer será também o dobro da área anterior?
- Se ele tiver uma barra com o triplo do comprimento daquela, a maior área de grade que ele conseguirá fazer será também o triplo da área anterior?

- 2,25 m^2; quadrado de lados 1,5 m
- Não, ele fará uma grade com área igual ao quádruplo da área anterior: $(12 \div 4)^2 = 9 = 4 \cdot 2{,}25$
- Não, ele fará uma grade com área igual ao nônuplo da área anterior: $(18 \div 4)^2 = 20{,}25 = 9 \cdot 2{,}25$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

As atividades proposta nessa página favorecem o desenvolvimento da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois os alunos devem investigar situações-problema e aplicar o conhecimento científico e tecnológico, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, a fim de oferecer soluções para tais demandas. Além disso, visam o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT314** da BNCC.

Reflita

- Na resolução do exercício resolvido **R2**, para fazer a conversão de m/s para km/h, a velocidade 26,6 foi multiplicada por 3,6. Isso vale para converter qualquer outra velocidade medida em m/s para km/h?
- Para converter uma velocidade medida em km/h para m/s, há algum fator de conversão? Se sim, qual?

• Sim, pois: 1 m/s = 3,6 · km/h

• Sim, o fator de conversão é o inverso de 3,6, ou seja, basta dividir a velocidade medida em km/h por 3,6 para obter a respectiva velocidade em m/s.

Exercício resolvido

R2. Voltando ao feito de Piccard e Jones, calcular a velocidade média da viagem em quilômetro por hora.

▸ **Resolução**

Já tínhamos calculado essa velocidade usando a unidade metro por segundo, derivada do SI. Porém, no cotidiano, empregamos a unidade quilômetro por hora. Para ter o valor nessa unidade, basta fazermos a conversão de unidades.

$$v_m \simeq 26{,}6\,\frac{m}{s} = 26{,}6 \cdot \frac{\frac{1}{1.000}\,km}{\frac{1}{3.600}\,h} = 26{,}6 \cdot \frac{3.600}{1.000}\,\frac{km}{h} = 26{,}6 \cdot 3{,}6\,\frac{km}{h} =$$

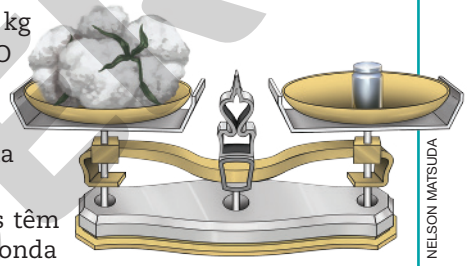
$$= 95{,}76\,\frac{km}{h}$$

A velocidade média do balão de Piccard e Jones foi aproximadamente 95,76 km/h.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

14. Imagine que, em uma mão, você tenha 1 kg de algodão e, na outra, 1 kg de chumbo. O que pesa mais: o algodão ou o chumbo?



NELSON MATSUDA

a) Se lhe fosse pedido para responder a essa pergunta rapidamente, qual seria sua resposta? resposta pessoal

b) Pesquise qual dessas duas matérias têm maior massa específica. Depois, responda à questão formulada. Chumbo tem maior massa específica, 11,3 g/cm³; o peso é o mesmo em ambas as mãos.

15. (Unesp-SP) Um bloco de granito com formato de um paralelepípedo retângulo, com a altura de 30 cm e base de 20 cm de largura por 50 cm de comprimento, encontra-se em repouso sobre uma superfície plana e horizontal. Considerando a massa específica do granito igual a $2{,}5 \cdot 10^3$ kg/m³, determine a massa m do bloco. 75 kg

16. Veja o resultado do Desafio Intermodal de Belo Horizonte em 2018.

> Com o tempo de 19 minutos e 11 segundos, um ciclista urbano foi o primeiro a completar o Desafio Intermodal de Belo Horizonte, que aconteceu na quarta-feira (12). A atividade começou às 18 h 25 min, na Praça da Liberdade, e terminou na entrada da estação de metrô do Minas Shopping, num trajeto com total de 8,4 km.

Fonte: ASSOCIAÇÃO DOS CICLISTAS URBANOS DE BELO HORIZONTE. Resultado do Desafio Intermodal 2018 comprova a eficiência da bicicleta nos deslocamentos em BH. Disponível em: <https://bhemciclo.org/desafio-intermodal-2018-comprova-a-eficiencia-da-bicicleta-nos-deslocamentos-em-bh/>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Calcule, em metro por segundo e em quilômetro por hora, a velocidade média do ciclista nesse desafio. aproximadamente 7,3 m/s e 26,3 km/h

17. Elabore um exercício envolvendo uma grandeza derivada e sua unidade. Podem ser utilizadas grandezas como aceleração, velocidade ou energia elétrica. Depois, peça a um colega que resolva o seu exercício e você deve resolver o dele. resposta pessoal

Pensamento computacional

Abstração

A abstração é um dos pilares do *pensamento computacional*. As habilidades desse pilar são as relacionadas a percepção de dados ou informações relevantes à resolução de um problema, identificando o que falta ou ignorando o que pode ser irrelevante ao processo de resolução.

- No exercício proposto **16**, identifique e liste quais informações são relevantes e quais são irrelevantes para se obter a resposta.

• Informações relevantes: tempo de prova (19 minutos e 11 segundos) e distância percorrida (8,4 km); informações irrelevantes: localidades (Belo Horizonte, Praça da Liberdade, Minas Shopping), data (quarta-feira 12), horário de início (18 h 25).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 Além das unidades do SI

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT313** da BNCC, pois os alunos deverão empregar a notação científica na resolução de problemas que envolvem unidades de medida específicas fora do Sistema Internacional de Unidades.

Como vimos, os esforços precursores da Metrologia nasceram da necessidade histórica de viabilizar a expansão comercial. Em tempos mais próximos, a necessidade de compartilhar os avanços da tecnologia e das ciências, como o trabalho conjunto para obter a primeira foto de um buraco negro (vista no exercício proposto **10**), também constitui um fator fundamental para a busca do estabelecimento de uma linguagem universal. O uso do Sistema Internacional de Unidades também simplifica e, por isso, é recomendado em todos os campos da ciência e da tecnologia.

No entanto, a mesma História que impulsiona mudanças para padronização e consequente intercâmbio de ideias e projetos também colabora para a preservação da cultura dos povos. Assim, ainda permanece o emprego de unidades de medida específicas fora do SI, por exemplo, do minuto, da hora e do dia como unidades de tempo, porque elas estão na raiz de nossa cultura. Em trabalhos científicos, ao fazer uso dessas unidades, é importante mostrar a relação delas com as unidades do SI.

3.1 Unidades fora do SI

Veja, no quadro a seguir, algumas unidades fora do SI, largamente em uso nos dias de hoje.

Algumas unidades fora do SI

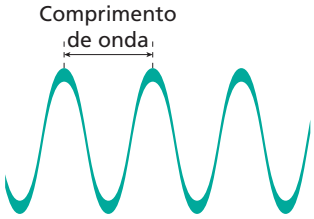
Grandeza	Unidade	Símbolo	Relação com o SI
tempo	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 3.600 s
	dia	d	1 d = 86.400 s
volume	litro	L ou ℓ	1 L = 1 dm^3
massa	tonelada	t	1 T = 1.000 kg
energia	elétronvolt	eV	1 eV $\simeq 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J
pressão	bar	bar	10 bar = 100 kPa
	milímetro de mercúrio	mmHg	1 mm de Hg $\simeq$ 133,322 Pa
comprimento	angstrom	Å	1 Å = 10^{-10} m
	milha náutica	M	1 M = 1.852 m
força	dina	dyn	1 dyn = 10^{-5} N
energia	erg	erg	1 erg = 10^{-7} J

Fonte: Tradução da publicação do **BIPM** – Resumo do Sistema Internacional de Unidades – SI. Disponível em: <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

18. Quando a luz do Sol incide sobre gotículas de água de chuva, forma-se o arco-íris. A luz é decomposta em faixas coloridas – violeta, anil, azul, verde, amarelo, alaranjado e vermelho –, que são ondas eletromagnéticas (radiações eletromagnéticas) com comprimentos de onda (λ) distintos.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

JAROSLAV BARTOS/SHUTTERSTOCK

O exercício **18** possibilita ação interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT103**, quando se utiliza o conhecimento sobre radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação na saúde e no ambiente.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

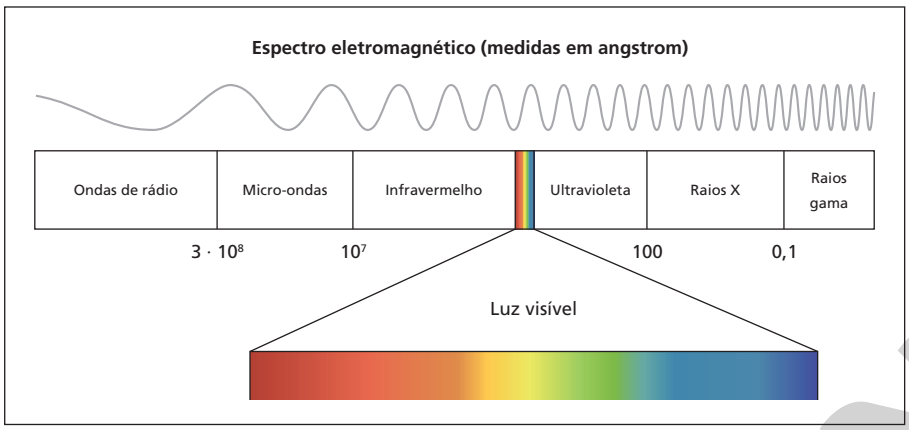
MODERNA

a) Na região visível aos seres humanos, os valores de λ ficam entre 400 nm (violeta) e 700 nm (vermelho). E há radiações que não conseguimos enxergar, por exemplo, os raios ultravioleta (10 nm $< \lambda <$ 400 nm) e os raios infravermelho (700 nm $< \lambda <$ 1.000.000 nm).
c) Devemos nos cobrir, evitar a luz solar mais intensa, hidratar a pele e usar protetor solar e óculos com proteção solar.

Na região visível aos seres humanos, os valores de λ ficam entre 4.000 Å (violeta) e 7.000 Å (vermelho). E há radiações que não conseguimos enxergar, por exemplo, os raios ultravioleta (100 Å $< \lambda <$ 4.000 Å) e os raios infravermelho (7.000 Å $< \lambda <$ 10.000.000 Å).

Adaptado de: FOGAÇA, Jennifer R. V. *Mundo Educação*. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/quimica/luz-solar-radiacao-ultravioleta.htm>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Avaliar a conveniência de explorar mais o tema contemporâneo **saúde**, como proposto no item **c**, pedindo aos alunos que pesquisem as consequências da não observância das orientações de proteção à ação solar. E no item **d**, pode ser explorado o desenvolvimento, no campo da **ciência e tecnologia** e da **educação ambiental**, de novas opções ao uso do gás CFC e de halogênios.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: Luz e pigmentos fotossintéticos. *Khan Academy*. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/science/biology/photosynthesis-in-plants/the-light-dependent-reactions-of-photosynthesis/a/light-and-photosynthetic-pigments>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Reescreva o último parágrafo usando a correspondente unidade de medida do SI.

b) Micro-ondas têm λ maior que os infravermelho (IV), enquanto os raios X têm λ menor que os ultravioleta (UV). Escreva inequações que indiquem os valores de λ para as micro-ondas e para os raios X, empregando a unidade nanômetro. micro-ondas: 10^6 nm $< \lambda < 3 \cdot 10^7$ nm; raio X: 10^{-2} nm $< \lambda <$ 10 nm

c) Desde que não haja exposição em excesso, a radiação infravermelha não causa danos à pele. Já a radiação ultravioleta (a mais energética da luz solar), penetrando na pele, pode promover queimaduras. Que cuidados devemos ter para evitar tais danos à nossa saúde?

d) Existem três faixas de radiação UV: UVA (320 nm a 400 nm), UVB (290 nm a 320 nm – o câncer de pele tem sido associado à exposição ao UVB) e a mais perigosa UVC (200 nm a 290 nm). A UVC é capaz de prejudicar a córnea dos olhos, mas é filtrada pela camada de ozônio da atmosfera terrestre. Pesquise e discuta com um colega o que pode provocar a destruição da camada de ozônio e qual é a situação atual dessa camada.

e) Segundo avaliação da Nasa, agência espacial americana, em 2018 o tamanho do buraco na camada de ozônio era de 23 milhões de km². Quantos "Brasis" cabem nesse buraco? Cabem quase 3 "Brasis".

3.2 Unidades da informática

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103** da BNCC, pois os alunos deverão compreender textos que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas adotadas ou não pelo SI, como as de armazenamento e de velocidade, ligadas aos avanços tecnológicos.

Você já deve ter ouvido falar em *bytes* e *megabytes* quando precisa verificar o armazenamento do celular ou enviar um arquivo por *email*. Mas sabe o que realmente essas palavras representam?

O *byte* (menor unidade de informação constituído por 8 *bits*) é a unidade de medida utilizada nos computadores. Essa unidade se relaciona ao sistema binário (base 2), pois, para escrever os números, emprega apenas dois símbolos, 0 e 1 (que, no computador, correspondem a "circuito aberto" e a "circuito fechado"), e cada conjunto de 8 *bits* corresponde a um caractere – letra, algarismo ou qualquer outro sinal gráfico.

A informática tem suas próprias unidades e "empresta" do SI a nomenclatura dos prefixos:

- *byte* (B) é a menor unidade de armazenamento;
- *kilobyte* (KB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *bytes*; ou seja, 1 KB $= 2^{10}$ B;
- *megabyte* (MB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *kilobytes*; ou seja, 1 MB $= 2^{10}$ KB $= 2^{20}$ B;
- *gigabyte* (GB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *megabytes*; ou seja, 1 GB $= 2^{10}$ MB $= 2^{30}$ B;
- *terabyte* (TB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *gigabytes*; ou seja, 1 TB $= 2^{10}$ GB $= 2^{40}$ B;
- *petabyte* (PB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *terabytes*; ou seja, 1 PB $= 2^{10}$ TB $= 2^{50}$ B;
- *exabyte* (EB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *petabytes*; ou seja, 1 EB $= 2^{10}$ PB $= 2^{60}$ B;
- *zettabyte* (ZB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *exabytes*; ou seja, 1 ZB $= 2^{10}$ EB $= 2^{70}$ B;
- *yottabyte* (YB) equivale a 2^{10} ou 1.024 *zettabytes*; ou seja, 1 YB $= 2^{10}$ ZB $= 2^{80}$ B.

ALEXANDRA ROTANOVA/ SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Os **fatores de conversão** que definem os prefixos no SI são potências de 10:

- 10 para os três primeiros múltiplos e 10^{-1} para os três primeiros submúltiplos.

Exemplos

a) Para transformar 19 m em dam, fazemos 19 m $= 19 \cdot 10^{-1}$ dam $= 1{,}9$ dam.

b) Para transformar 19 cm em mm, fazemos 19 m $= 19 \cdot 10^{1}$ mm $= 190$ mm.

- 10 (1.000) ou 10^{-3} (0,001) para os demais prefixos.

Exemplos

a) Para transformar 7.804 m em Tm (terâmetro), fazemos:

$7.804 \text{ m} = 7.804 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ Tm} = 7{,}804 \cdot 10^{-9} \text{ Tm}$

b) Para transformar 0,026 m em nm (nanômetro), fazemos:

$0{,}026 \text{ m} = 0{,}026 \cdot 10^{3} \cdot 10^{3} \cdot 10^{3} \text{ nm} = 0{,}026 \cdot 10^{9} \text{ nm} = 2{,}6 \cdot 10^{7} \text{ nm}$

Os fatores de conversão que definem os prefixos na informática são potências de base 2:

- 2^{10} (1.024) para transformar uma unidade para a unidade imediatamente inferior;
- 2^{-10} (1.024^{-1}) para transformar uma unidade para a unidade imediatamente superior.

Observe que $10^3 \simeq 2^{10}$, pois $10^3 = 1.000$ e $2^{10} = 1.024 \simeq 1.000$.
Por estarem mais acostumadas a trabalhar e a fazer estimativas com potências de base 10, na prática, é comum as pessoas arredondarem 1.024 para 1.000 e considerarem que 1 GB = 1.000 MB. Esse procedimento nos leva a cometer um erro de 2,4%, pois $\frac{1.024 - 1.000}{1.000} = 0{,}024 = 2{,}4\%$. No entanto, observe que arredondamentos acumulados geram grandes erros.

Reflita

Vimos que, ao usar fator de conversão 10^3 em vez de 2^{10} nas unidades de informática, cometemos um erro de 2,4%. Ao converter 1 *yottabyte* em *bytes*, usando o fator de conversão 10^3 em vez de 2^{10}, o erro percentual permanece em 2,4%? Explique.

Não, o erro aumenta para cerca de 21%. Ao arredondar 1 YB por fatores 10^3, obtemos:
1 YB $= 10^{24}$ B $=$
$= 1.000.000.000.000.000.000.000.000$ B;
e, por fatores 2^{10}, obtemos:
1 YB $= 2^{80}$ B $=$
$= 208.925.819.614.629.174.706.176$ B,
ou seja:

$$\frac{1.208.925.819.614.629.174.706.176 - 1.000.000.000.000.000.000.000.000}{1.000.000.000.000.000.000.000.000} \simeq 0{,}21 = 21$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

19. Algumas especificações nos equipamentos e nos acessórios de informática são apresentadas pelos múltiplos do *byte*. Com base nessas informações, em um *notebook* com HD de 2 *terabytes*, conclui-se que este tenha uma capacidade de armazenamento de: alternativa b

a) 2^{40} *bytes*

b) 2^{41} *bytes*

c) 2^{42} *bytes*

d) 2^{80} *bytes*

e) 2^{2} *bytes*

20. Quantos arquivos de 8 MB cabem em um serviço gratuito de transmissão de dados cuja capacidade de transporte por operação limita-se a 10 GB?
1.280 arquivos

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. O Desafio Intermodal de Belo Horizonte de 2018, com percurso de 8,4 km, apresentou o resultado geral no quadro a seguir. Para cada modalidade, calcule a velocidade em quilômetro por hora e em metro por segundo, arredondando o resultado para centésimos.

1. 1) 26,28 e 7,30;
2) 19,94 e 5,54;
3) 17,96 e 4,99;
4) 14,62 e 4,06;
5) 13,25 e 3,68;
6) 12,42 e 3,45;
7) 12,20 e 3,39;
8) 11,16 e 3,10;
9) 11,16 e 3,10;
10) 10,15 e 2,82;
11) 10,08 e 2,80;
12) 9,18 e 2,55;
13) 8,82 e 2,45;
14) 8,82 e 2,45;
15) 8,10 e 2,25;
16) 6,84 e 1,90

DESAFIO INTERMODAL 2018

BH EM CICLO
ASSOCIAÇÃO DOS CICLISTAS URBANOS DE BELO HORIZONTE

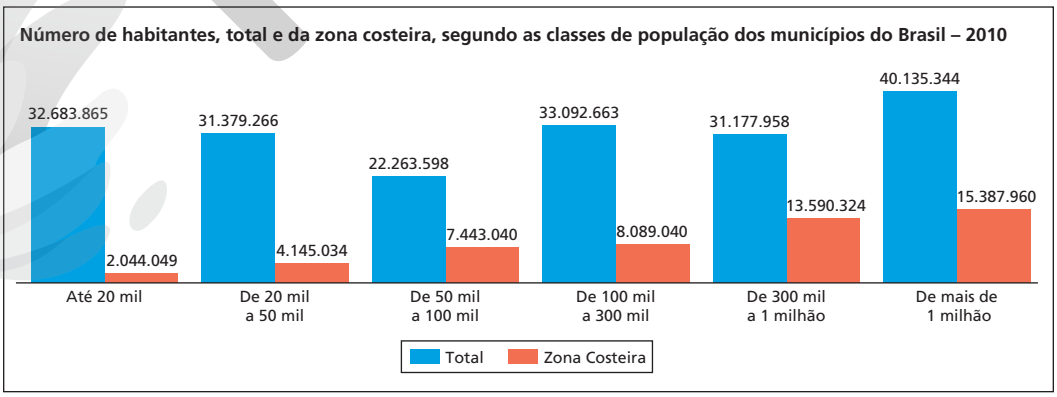
Ranking		Tempo
1	Bicicleta fixa	00:19:11
2	Bicicleta urbana	00:25:17
3	Bicicleta elétrica	00:28:05
4	Motocicleta	00:34:29
5	Taxi	00:38:01
6	A pé · metrô	00:40:34
7	Ônibus convencional · metrô	00:41:19
8	Corrida	00:45:11
9	Carro	00:45:11
10	Uber/Cabify	00:49:42
11	A pé · metrô	00:50:03
12	Bicicleta compartilhada · metrô	00:54:48
13	Ônibus convencional	00:57:02
14	A pé · Move	00:57:10
15	Cadeira de rodas · ônibus convencional	01:02:14
16	A pé	01:13:48

MÊS DA MOBILIDADE SETEMBRO

NELSON MATSUDA

Fonte: ASSOCIAÇÃO DOS CICLISTAS URBANOS DE BELO HORIZONTE. Resultado do Desafio Intermodal 2018 comprova a eficiência da bicicleta nos deslocamentos em BH. Disponível em: <https://bhemciclo.org/desafio-intermodal-2018-comprova-a-eficiencia-da-bicicleta-nos-deslocamentos-em-bh/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

2. Observe o gráfico abaixo.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: IBGE. *Censo demográfico* 2010; Diretoria de Geociências, Coordenação de Geografia.

Efetue o arredondamento dos números de habitantes para unidade de milhão e calcule:

a) o total da população da zona costeira em 2010; 50.000.000

b) o total da população brasileira em 2010. 190.000.000

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3. Um atlas geográfico informa que a costa brasileira tem cerca de 3.978 milhas náuticas e que, se consideradas as saliências e as reentrâncias, passa para 4.967 milhas náuticas. Quantos quilômetros tais medidas representam aproximadamente? 7.367 km e 9.199 km, respectivamente

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL

Fonte: COSTA, Wanderley Messias da Costa. Projeção do Brasil no Atlântico Sul: geopolítica e estratégia. *Confins*: Revista Franco-brasileira de Geografia, n. 22, 2014.

4. (UFPI) A nossa galáxia, a Via Láctea, contém cerca de 400 bilhões de estrelas. Suponha que 0,05% dessas estrelas possuam um sistema planetário onde exista um planeta semelhante à Terra. O número de planetas semelhantes à Terra, na Via Láctea, é: alternativa c

a) $2 \cdot 10^4$
b) $2 \cdot 10^6$
c) $2 \cdot 10^8$
d) $2 \cdot 10^{11}$
e) $2 \cdot 10^{12}$

5. Para se acoplar à Estação Espacial Internacional (ISS), a espaçonave Crew Dragon, lançada ao espaço em maio de 2020, teve de alcançar uma velocidade aproximada de 7.500 metros por segundo, ligeiramente superior à velocidade orbital da ISS. Determine essa velocidade em quilômetros por hora. 27.000 km/h

PAOPANO/SHUTTERSTOCK

Espaçonave Crew Dragon em órbita. Imagem fornecida pela NASA, em 2020.

6. (Enem) Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3.
O volume do monumento original, em metro cúbico, é de alternativa c

a) 1.00
b) 400
c) 1.600
d) 6.250
e) 10.000

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Registre as respostas em seu caderno

7. (Enem) Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1.000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é: alternativa b

a) 11,25
b) 27,00
c) 28,80
d) 32,25
e) 49,50

8. (Enem) Para cada litro de etanol produzido em uma indústria de cana-de-açúcar são gerados cerca de 18 L de vinhaça que é utilizada na irrigação das plantações de cana-de-açúcar, já que contém teores médios de nutrientes N, P e K iguais a 357 mg/L, 60 mg/L e 2.034 mg/L, respectivamente.

SILVA, M. A. S.; GRIEBELER, N. P.; BORGES, L. C. Uso de vinhaça e impactos nas propriedades do solo e lençol freático. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, n. 1, 2007 (adaptado).

Na produção de 27.000 L de etanol, a quantidade total de fósforo, em kg, disponível na vinhaça será mais próxima de: alternativa b

a) 1.
b) 29.
c) 60.
d) 170.
e) 1.000.

Aprofundamento

9. A gramatura é uma grandeza específica que determina a densidade de um papel. Sua unidade de medida é dada por g/m^2. Papéis cortados segundo a "série A", definidos pela ISSO216, são tais que:

- o comprimento dividido pela largura é $\sqrt{2}$;
- o tamanho A(0) tem área 1 m^2;
- cada tamanho A(n), com $n \geqslant 1$, é metade do A($n - 1$), obtido pelo corte paralelo aos lados menores do A($n - 1$);
- para as dimensões de cada tamanho, suprime-se o algarismo do décimo de milímetro.

O papel mais usado é o sulfite A(4), com gramatura 75 g/m^2, vendido em resmas (pacotes de 500 folhas).

Com gramatura 75 g/m^2, calcule quantos gramas tem uma:

a) folha de papel sulfite A(0); 75 g
b) folha de papel sulfite A(1); 37,5 g
c) folha de papel sulfite A(4); 4,6875 g
d) resma de papel sulfite A(4). 2.343,75 g

10. As dimensões do papel A(0) são 841 mm × 1.189 mm. Calcule o valor aproximado da área, em metro quadrado, e das dimensões, em mm:

a) do papel A(1); 594 mm × 841 mm; 0,5 m^2
b) do papel A(2); 420 mm × 594 mm; 0,25 m^2
c) do papel A(3); 297 mm × 420 mm; 0,125 m^2
d) do papel A(4); 210 mm × 297 mm; 0,0625 m^2
e) do papel 2A, que é o dobro do A(0). 1.189 mm × 1.682 mm; 2 m^2

Desafio

11. Com chapas de madeira, um marceneiro constrói caixas cúbicas.

a) Quais são as dimensões do cubo e o volume da caixa que ele pode fazer com uma chapa retangular de 1 m de largura por 6 m de comprimento? arestas com 1 m; volume = 1 m^3

b) Se ele tiver uma chapa retangular de 2 m de largura por 12 m de comprimento, construirá uma caixa com o dobro do volume da caixa do item **a**? Justifique sua resposta. Não, pois o volume terá o cubo do dobro da caixa do item **a**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma cisterna tem capacidade de 240 ℓ e já está com 104 ℓ. Para enchê-la, posso usar um balde com capacidade de 8 ℓ por pelo menos: alternativa c

a) 30 vezes.
b) 13 vezes.
c) 17 vezes.
d) 43 vezes.

2. Na questão anterior, podemos considerar grandeza e unidade de medida, nessa ordem: alternativa b

a) litro e capacidade.
b) capacidade e balde.
c) cisterna e balde.
d) litro e balde.

3. O assistente de uma veterinária "pesou" e anotou, em quilograma, as seguintes massas de quatro gatos: 3,149; 3,061; 3,950; 3,892. Para facilitar o cálculo da dose de um remédio, ele deve preencher uma ficha para cada gato, arredondando essas medidas para décimo de quilograma. As anotações corretas, não necessariamente na mesma ordem das anotações, são: alternativa a

a) 3,9; 3,1; 4,0; 3,1
b) 3,1; 3,6; 3,9; 4,0
c) 3,1; 3,0; 3,9; 3,8
d) 3,9; 4,0; 3,1; 3,2

4. A distância entre um planeta e suas estrelas é medida em Unidade Astronômica (UA), que é 149.597.870,700 km. A distância de Júpiter ao Sol é 1,5 UA, que vale aproximadamente: alternativa a

a) $2{,}25 \cdot 10^{11}$ m
b) $2{,}25 \cdot 10^{11}$ km
c) $2{,}25 \cdot 10^{8}$ m
d) $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

5. Ana quer fazer *backup* dos arquivos de seu computador, que já totalizam 2 TB, usando *pen drives* com capacidade igual a 64 GB. Ela vai precisar, no mínimo, de: alternativa d

a) 64 *pen drives*
b) 2^{10} *pen drives*
c) 16 *pen drives*
d) 2^{5} *pen drives*

6. O período orbital da Lua é igual a 27,32 dias. Esse período corresponde a: alternativa d

a) 27 d 32 h
b) 27 d 3 h 2 min
c) 7 h 40 min 48 s
d) 27 d 7 h 40 min 48 s

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão					
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Conceituar grandeza e medida, distinguindo esses conceitos.	X	X				
Aplicar notação científica e arredondamento em medidas.			X	X		
Reconhecer, relacionar e aplicar grandezas, unidades e prefixos do Sistema Internacional de Unidades (SI) e fora dele.						X
Empregar corretamente unidades da informática.					X	
Páginas do livro referentes ao conceito	15 a 17	15 a 17	18 a 20	18 a 20	29 a 31	20 a 29

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

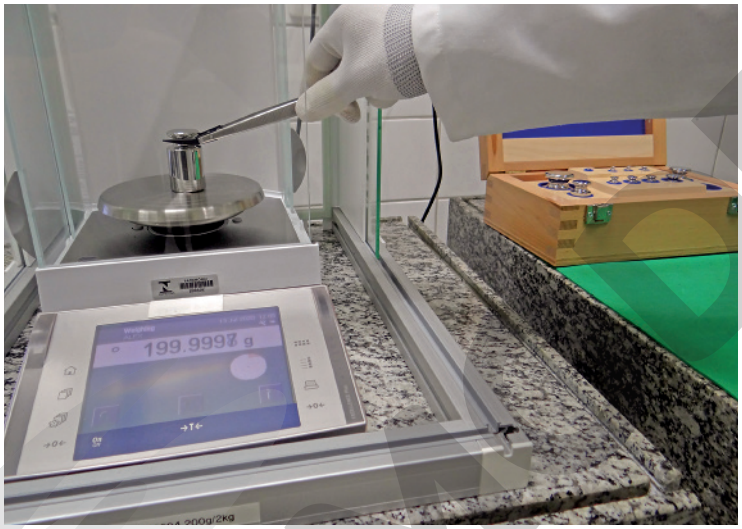
Metrologia Legal

A Organização Internacional de Metrologia Legal – OIML descreve o termo "Metrologia Legal" como: parte da Metrologia que trata das unidades de medida, métodos de medição e instrumentos de medição em relação às exigências técnicas e legais obrigatórias, as quais têm o objetivo de assegurar uma garantia pública do ponto de vista da segurança e da exatidão das medições.

A Metrologia Legal permeia todos os níveis e setores de uma nação desenvolvida. Durante a sua vida as pessoas terão contato com um grande número de instrumentos de medição sujeitos a regulamentação metrológica. As ações governamentais no campo da Metrologia Legal objetivam, por um lado, a disseminação e manutenção de medidas e unidades harmonizadas, e de outro, a supervisão e exame de instrumentos e métodos de medição.

O principal objetivo estabelecido legalmente no campo econômico é proteger o consumidor enquanto comprador de produtos e serviços medidos, e o vendedor, enquanto fornecedor destes. A exatidão dos instrumentos de medição, especialmente em atividades comerciais, dificilmente pode ser conferida pela segunda parte envolvida, e que não possui meios técnicos para fazê-lo.

Essa seção possibilita o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT103**, **EM13MAT313** e **EM13MAT314** da BNCC, pois os alunos deverão interpretar e compreender um texto divulgado pelas mídias que empregam unidades de medidas adotadas ou não pelo SI; além de aplicar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida e de resolver problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras.



LABORATÓRIO DE CALIBRAÇÃO DE MASSAS – LACMASS

Realização de calibração de massas no Laboratório de Calibração de Massas (LACMASS), na Agência Estadual de Metrologia de Mato Grosso do Sul, 2020.

DANIEL VARELA MAGALHÃES

Relógio atômico que utiliza átomos frios de césio-133 no laboratório da USP, em São Carlos (SP), 2019.

Em geral os instrumentos de medição estão na posse de um dos parceiros comerciais o qual tem acesso a eles, mesmo na ausência da outra parte. É tarefa do controle metrológico estabelecer adequada transparência e confiança entre as partes, com base em ensaios imparciais.

Atualmente, não só atividades no campo comercial são submetidas à supervisão governamental em países desenvolvidos, mas também, instrumentos de medição usados em atividades oficiais, no campo médico, na fabricação de medicamentos, bem como nos campos de proteção ocupacional, ambiental e da radiação são submetidos, obrigatoriamente, ao controle metrológico.

A exatidão das medições assume especial importância no campo médico face aos vários efeitos negativos que resultados de menor confiabilidade podem provocar à saúde humana.

A credibilidade da medição é, portanto, especialmente necessária onde quer que exista conflito de interesse, ou onde quer que medições incorretas levem a riscos indesejáveis aos indivíduos ou à sociedade.

INTERNATIONAL ORGANIZATION OF LEGAL METROLOGY

Selo do Dia Mundial da Metrologia, comemorado todo dia 20 de maio.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A Metrologia Legal originou-se da necessidade de assegurar um comércio justo e uma de suas mais importantes contribuições para a sociedade é o seu papel de aumentar a eficiência no comércio mantendo a confiança nas medições e reduzindo os custos das transações.

A Metrologia Legal atende a tais necessidades principalmente através de regulamentos, os quais são implementados para assegurar um nível adequado de credibilidade nos resultados de medição. Em todas as suas aplicações, a Metrologia Legal cobre unidades de medida, instrumentos de medição e outras matérias tais como os produtos pré-medidos.

Com respeito aos instrumentos de medição, a Metrologia Legal especifica exigências de desempenho, procedimentos de verificação, meios para assegurar a correta utilização das unidades de medida legalmente definidas e prescrições obrigatórias para uso.

Fonte: INMETRO. Disponível em: <http://inmetro.gov.br/metlegal/definicao.asp>. Acesso em: 13 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. No cotidiano, onde você percebe a importância da Metrologia, ou seja, em que situações a exatidão das medidas é importante? resposta pessoal

2. Desde de 20 de maio de 2019, Dia Mundial da Metrologia, o segundo passou a ser definido como o valor numérico da frequência de transição do estado fundamental do átomo de césio-133, para ser 9.192.631.770, quando expresso em Hz, que equivale a s^{-1}. Significa dizer que esse fenômeno ocorre mais de 9 bilhões de vezes em apenas 1 segundo. Arredonde esse número para centena de milhão e escreva-o em notação científica. $9{,}2 \cdot 10^9$

3. Você sabe medir sua pulsação?

Em repouso, a frequência de batimentos cardíacos de um adulto deve ficar entre 60 bpm (batimentos por minuto) e 100 bpm. Para medir, sua pulsação, use um relógio ou um cronômetro e proceda da seguinte maneira:

- com as pontas dos dedos indicador e médio na região lateral do pescoço (artéria carótida) ou no punho (artéria radial), próximo à base do polegar, pressione até sentir as pulsações;
- conte os batimentos por 15 segundos e multiplique o número obtido por 4.

Faça isso sete vezes. Anote os resultados, despreze o maior e o menor, calcule a média aritmética dos demais e verifique se ela está entre 60 bpm e 100 bpm. resposta pessoal

4. Em relação ao item anterior, discuta com um colega se o procedimento realizado é ou não preciso (exato). Por que desprezar o maior e o menor números obtidos? Aumentando de sete para doze vezes o procedimento, também aumenta a exatidão?

5. Por que, na questão **3**, o número obtido deve ser multiplicado por 4? Porque 1 minuto tem 60 segundos e $4 \cdot 15 = 60$.

6. Se você fizer a contagem por 10 segundos, por quanto deverá multiplicar o número obtido? Por quê? Você acha que, dessa maneira, o procedimento fica mais preciso do que a forma proposta na questão **3**? E se fizer a contagem por 30 segundos?

1. Discutir com os alunos situações em que é importante saber as medidas exatas, como ao comprar uma mercadoria e saber o peso líquido com exatidão ou saber as medidas exatas de um móvel.

3. Nessa atividade, é favorecido o tema contemporâneo **saúde**, uma vez que traz o procedimento de medição da pulsação. A atividade também favorece o desenvolvimento da competência geral **8** da BNCC, pois leva o aluno a se conhecer, a apreciar e a cuidar de sua saúde.

4. Espera-se que os alunos concluam que não é exato, pois os desprezos diminuem os erros embutidos na medição e, que, aumentando para doze, aumenta a exatidão.

6. Na contagem por 10, deve-se multiplicar por 6, pois $6 \cdot 10 = 60$; menos preciso, pois o erro embutido na medição será multiplicado por um número maior.
Na contagem por 30, deve-se multiplicar por 2, pois $2 \cdot 30 = 60$; mais preciso, pois o erro embutido na medição será multiplicado por um número menor.

MODERNA

CAPÍTULO

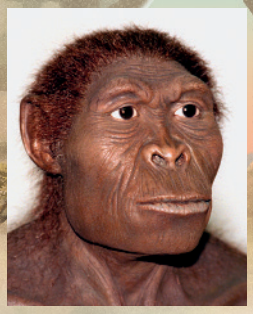
2 Conjuntos

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT404**.

A abertura do capítulo permite o trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Se julgar pertinente, propor ao professor da área um estudo a respeito do surgimento e da evolução da vida, da Terra e do Universo, levando em consideração as teorias científicas aceitas atualmente. Além disso, é possível propor uma discussão a respeito da história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana. Esse trabalho favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT201** e **EM13CNT208**, da BNCC, além da competência específica **2** dessa área.

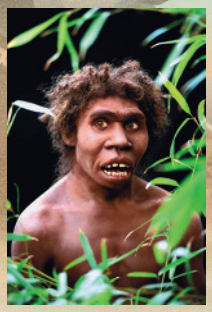
CRAIG HARTLEY/BLOOMBERG/GETTY IMAGES

Australopithecus



KATJA LENZ/PICTURE ALLIANCE/ GETTY IMAGES

Homo habilis



P.PLAILLY/E.DAYNES/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Homo erectus

HORST OSSINGER/DPA/DPA PICTURE-ALLIANCE/AFP

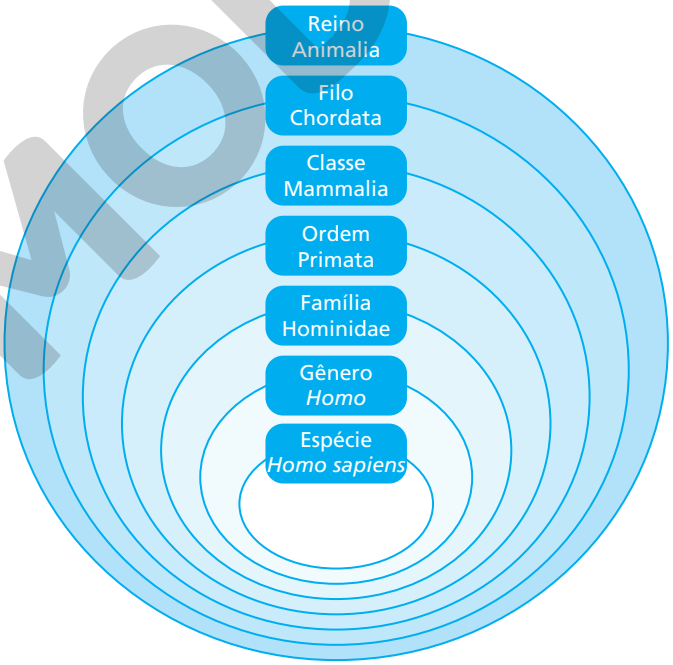
Homo neanderthalensis

S.PLAILLY/E.DAYNES/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Homo sapiens

Reconstruções artísticas das principais espécies de hominínios com base nas características morfológicas dos esqueletos encontrados.

A taxonomia é a ciência que lida com a classificação e a descrição dos organismos vivos, animais e vegetais, organizando-os em grupos, ou seja, em conjuntos. Todos os seres vivos que habitam a Terra podem ser identificados e classificados com base nas diferentes características que partilham entre si. Veja a classificação taxonômica do ser humano.



Objetivos do capítulo

- Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.
- Descrever conjuntos.
- Efetuar operações com conjuntos.
- Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.
- Identificar os conjuntos numéricos.
- Representar e operar com intervalos reais.

Observação

Na taxonomia, uma espécie é formada por um conjunto de indivíduos morfologicamente semelhantes e que conseguem se reproduzir entre si, gerando uma prole fértil.
Você e cada um de seus colegas pertencem ao "conjunto" *Homo sapiens*. Um cão ou um gato, não pertencem a esse conjunto.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Esse capítulo apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento das habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT404** da BNCC, que serão objeto de estudo no próximo capítulo.

1 Conjuntos

As competências específicas **1**, **3** e **4** da BNCC são favorecidas em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas empregando diferentes registros de representação.

1.1 Noções básicas

No diagrama da página anterior, observamos diversos conjuntos: o conjunto de todos os seres humanos (espécie *Homo sapiens*), que também pertencem ao conjunto Gênero *Homo*, ao conjunto Família Hominidae, ao conjunto Ordem Primata, ao conjunto Classe Mammalia, ao conjunto Filo Chordata e, ainda, ao conjunto Reino Animalia.

Assim como nessa situação, em muitas outras recorremos à noção de conjunto como ideia de agrupamento ou coleção.

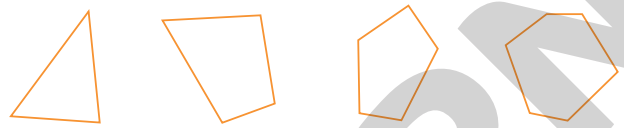
Na Matemática, para formar diferentes conjuntos, podemos usar determinadas características, como as das figuras geométricas ou as dos números.

Exemplos

a) Conjunto dos números naturais pares: 0, 2, 4, 6, 8, ...

b) Conjunto dos divisores naturais de 6: 1, 2, 3 e 6.

c) Conjunto de todos os polígonos com menos de sete lados:

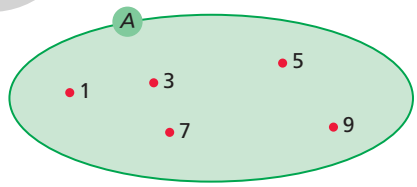


todos os triângulos | todos os quadriláteros | todos os pentágonos | todos os hexágonos

Representação de um conjunto

Há mais de uma maneira de representar um conjunto. Como exemplo, vamos representar de diferentes maneiras o conjunto *A*, formado pelos elementos 1, 3, 5, 7 e 9.

- Enumerando os elementos (a ordem dos elementos é qualquer), podemos ter:
  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ou $A = \{5, 1, 9, 3, 7\}$ etc.
- Considerando uma propriedade própria dos elementos:
  $A = \{x \mid x$ é um número natural ímpar menor que $10\}$
  (lemos: "o conjunto *A* dos elementos *x* tal que *x* é um número natural ímpar menor que dez")
- Desenhando uma figura (diagrama de Venn):



Independentemente da representação, com relação aos elementos do conjunto *A* podemos dizer que:

- 1 **pertence** a *A*; indicamos por: $\mathbf{1 \in A}$
- 2 **não pertence** a *A*; indicamos por: $\mathbf{2 \notin A}$

Exercício resolvido

R1. Escrever uma propriedade que defina cada conjunto.

a) $L = \{A, R\}$

b) $M = \{0, 10, 20, 30, 40, ...\}$

▸ **Resolução**

Resposta possível:

a) *L*: letras da palavra ARARA.

b) *M*: *x* tal que *x* é um número natural múltiplo de 10.

Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

O **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*, está presente na resolução de problemas durante a identificação do padrão que gera o problema ou das características de sua resolução, permitindo-nos reaproveitar técnicas ou estratégias conhecidas. O padrão pode ocorrer dentro de um mesmo problema ou entre problemas diferentes.

Quando classificamos objetos de estudo, por exemplo, nós os separamos pelas propriedades comuns, identificando um padrão. Os processos de identificação e classificação contribuem para o desenvolvimento das habilidades necessárias e pertinentes a esse pilar.

Agora, pesquise a resposta à pergunta a seguir em livros didáticos ou na internet:

- Quais características permitem a classificação de um ser vivo no Filo Chordata?

Resposta possível: São características importantes para a classificação no filo a presença de notocorda e fendas faríngeas em algum estágio do desenvolvimento e do tubo nervoso dorsal.

Reflita

Que outras soluções teria o exercício resolvido **R1**?

Respostas possíveis:
a) *L*: letras da palavra AR.
b) *M*: *x* tal que $x = 2y$, em que *y* é um número natural múltiplo de 5.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4. a) Não. Essa relação não é válida, pois nem todo número ímpar é múltiplo de 3. O elemento 5, por exemplo, pertence ao conjunto *A*, mas não pertence ao conjunto *C*.

b) Não. Essa relação não é verdadeira, pois há números ímpares que não são primos. Por exemplo, o número 49 pertence ao conjunto *A*, mas não pertence ao conjunto *B*.

c) Não. Há um número primo que é par: o número 2.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Liste os elementos dos conjuntos expressos pelas propriedades. $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

a) *A*: conjunto dos divisores inteiros de 8.

b) *B*: conjunto das vogais da palavra PARALELEPÍPEDO. $B = \{A, E, I, O\}$

c) *C*: conjunto dos lados do triângulo *ABC*. $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

2. Escreva uma propriedade que defina cada conjunto a seguir. Respostas possíveis:

a) $D = \{0, 12, 24, 36\}$ **a)** *D*: *x* é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40

b) $E = \{\text{nova, crescente, cheia, minguante}\}$

c) $F = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ **b)** *E*: fases da Lua **c)** *F*: *x* é um número ímpar maior que 3 e menor que 21

3. Considere os conjuntos:

A: conjunto dos números ímpares;

B: conjunto dos números primos;

C: conjunto dos números naturais múltiplos de 3.

Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $0 \in A$ falsa

b) $0 \notin B$ verdadeira

c) $1 \notin B$ verdadeira

d) $1 \in C$ falsa

e) $3 \in A$ verdadeira

f) $3 \in C$ verdadeira

4. Considere os conjuntos do exercício anterior para responder às questões.

a) Se um elemento pertencer a *A*, então ele também pertencerá a *C*?

b) Todo elemento de *A* também é elemento de *B*?

c) Todo elemento de *B* também é elemento de *A*?

Entre os exercícios propostos acima, o exercício **1** permite aos alunos identificar as informações relevantes para determinar os elementos de um conjunto, trabalhando com o pilar **abstração** do *pensamento computacional*. Para resolver o exercício **2**, eles devem identificar um padrão a fim de determinar a propriedade que define os conjuntos, o que está alinhado com o pilar **reconhecimento de padrões**.

Observação

Como os conjuntos podem ser representados por uma propriedade ou pela enumeração de seus elementos, a verificação de que dois conjuntos dados têm os mesmos elementos pode não ser evidente.

1.2 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos, *A* e *B*, são **iguais** ($A = B$) quando têm os mesmos elementos.

Exemplo

$A = \{x \mid x$ é um número natural menor que 5$\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ são iguais, pois têm os mesmos elementos.

Se um conjunto *A* tiver ao menos um elemento que não pertença a um conjunto *B* (ou vice-versa), dizemos que esses conjuntos são **diferentes** ($A \neq B$).

1.3 Conjuntos vazio, unitário e universo

Conjunto vazio	Conjunto unitário	Conjunto universo
É o conjunto que não tem elementos. Indicamos o conjunto vazio por: $\varnothing$ ou $\{\ \}$	É o conjunto que tem apenas um elemento.	É o conjunto considerado para estudar determinada situação. Indicamos o conjunto universo por: *U*
Exemplo $B = \{x \mid x$ é um número primo par maior que 5$\}$ Então, $B = \varnothing$ ou $B = \{\ \}$.	**Exemplo** $C = \{x \mid x$ é um número natural primo par$\}$ Logo, $C = \{2\}$. Como *C* tem apenas um elemento, *C* é um conjunto unitário.	**Exemplo** Se vamos estudar a faixa salarial de uma empresa A, o conjunto universo é o conjunto de todos os valores dos salários dessa empresa. $U = \{$valores de todos os salários da empresa A$\}$

Explicar aos alunos que, para representar o conjunto vazio, usamos o símbolo $\varnothing$ ou $\{\ \}$ e nunca o símbolo $\{\varnothing\}$, que é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio.

Exercício resolvido

R2. Considerando o conjunto universo *U*, resolver a equação $x + 3 = 0$.

a) *U* é o conjunto dos números naturais.

b) *U* é o conjunto dos números inteiros.

▸ **Resolução**

a) Considerando o conjunto dos números naturais como o conjunto universo, a equação não tem solução, ou seja, $S = \varnothing$.

b) Considerando o conjunto dos números inteiros como o conjunto universo, a equação tem solução -3, ou seja, $S = \{-3\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

5. Sejam os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é um número natural não nulo e $x \leqslant 1\}$;

$B = \{x \mid x$ é um número natural ímpar e $-1 < x < 1\}$;

$C = \{x \mid x$ é um número natural e $x^2 = 1\}$.

- Quais são os conjuntos iguais? *A e C*

6. Enumere os elementos dos conjuntos.

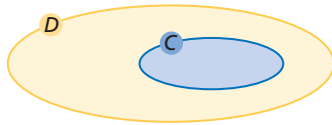
a) $X = \{x \in U \mid -10 < x < 10\}$, sendo U o conjunto dos números naturais. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $Y = \{y \in U \mid -10 < y < 10\}$, sendo U o conjunto dos números inteiros.
$Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1.4 Subconjuntos de um conjunto

Dizemos que o conjunto A é **subconjunto** do conjunto B quando todos os elementos de A pertencem a B.

Os conjuntos C e D ilustram essa propriedade.



Considerando universo o conjunto dos números naturais, temos:

$C = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 4$\}$

$D = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 2$\}$

Para indicar a relação entre os conjuntos A e B, usamos a notação $\boldsymbol{A \subset B}$ (lemos: "A é **subconjunto** de B" ou "A **está contido** em B").

Também podemos dizer que B **contém** A. Nesse caso, a notação é $\boldsymbol{B \supset A}$.

Consideraremos verdadeiras, sem demonstrar, as seguintes afirmações:

- O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
- Todo conjunto está contido nele mesmo.
- Dados dois conjuntos quaisquer, X e Y, se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$.
- Dados três conjuntos quaisquer, R, S e T, se $R \subset S$ e $S \subset T$, então $R \subset T$.

Reflita

Se um número é múltiplo de 4, então ele é também múltiplo de 2? Justifique.

Sim, m(4) ⊂ m(2). Se $D \subset C$, então os elementos de D têm as propriedades de C.
Se julgar conveniente, explorar a relação *se/então* nos casos em que há relação de inclusão entre conjuntos.

Observação

Se um conjunto F não for subconjunto de G, dizemos que F **não está contido** em G. Indicamos por: $F \not\subset G$.

Exercício resolvido

R3. Considerar os conjuntos U: conjunto dos números naturais, $A = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 2$\}$ e $B = \{x \in U \mid x$ é um número múltiplo de 10$\}$.

a) Há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10?

b) Há múltiplo de 10 que não é múltiplo de 2?

c) Construir um diagrama que ilustre a relação entre os conjuntos A e B.

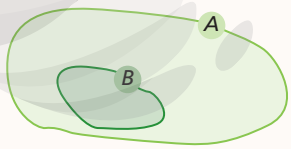
d) Todos os múltiplos de 2 também são múltiplos de 10?

▸ **Resolução**

a) Sim, há múltiplos de 2 que também são múltiplos de 10. Por exemplo: 10, 20 e 30.

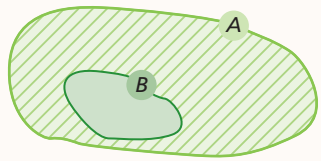
b) Não, todo múltiplo de 10 é um número par; logo, é múltiplo de 2 também, ou seja, $B \subset A$.

c)



d) Nem todo múltiplo de 2 é múltiplo de 10. Há múltiplos de 2, como o 6, que não são múltiplos de 10.

No diagrama ao lado, eles estão localizados na região hachurada, pois pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao B.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

10. Respostas possíveis: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

11. O = {João, Rui} ou O = {João, Rui, Jonas} ou O = {João, Rui, Carlos} ou O = {João, Rui, Carlos, Jonas}

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. Considere os conjuntos $C = \{1\}$, $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$ e F: conjunto dos números naturais primos. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $C \supset D$ falsa
b) $C \subset E$ verdadeira
c) $D \subset F$ falsa
d) $D \not\subset E$ verdadeira
e) $F \supset E$ falsa
f) $\varnothing \subset C$ verdadeira
g) $E = F$ falsa
h) $C \not\subset F$ verdadeira
i) $E \supset C$ verdadeira

8. Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 9\}$, $B = \{1, 3, 8, 4\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, determine os conjuntos que satisfazem cada condição dada.

a) J: conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. {2, 9}
b) K: conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também a C. {3, 9}
c) L: conjunto formado pelos elementos que pertencem a B e não pertencem a C. {8, 4}
d) M: conjunto formado pelos elementos que pertencem a C e não pertencem a B. {5, 7, 9}

9. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b\}$, determine todas as possibilidades de um conjunto M, sabendo que $M \subset A$ e $M \supset B$. $M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Considere os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é um número natural$\}$;

$B = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de 5$\}$;

$C = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de 10$\}$;

$D = \{x \mid x$ é um número natural múltiplo de 20$\}$.

- Escreva relações entre dois dos conjuntos A, B, C e D usando os símbolos $\supset$, $\subset$ e $\not\subset$.

11. Em um escritório, trabalham cinco pessoas: Jonas, Carlos, João, Rui e Ana.

Considere os conjuntos:

O: pessoas que usam óculos;

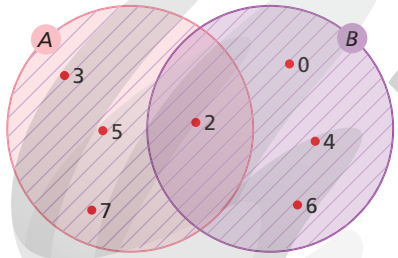
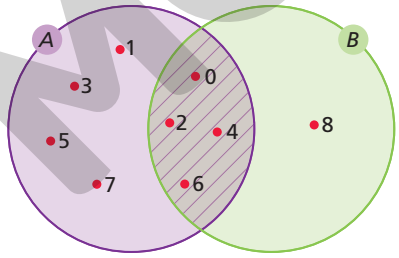
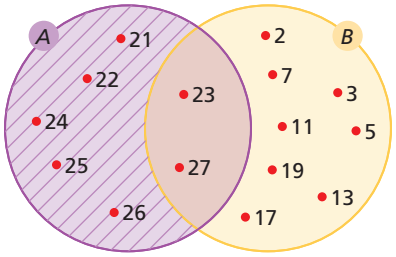
A: pessoas que usam aparelho nos dentes;

H: pessoas do sexo masculino.

- Sabendo que $A \subset O$, $O \subset H$ e que João e Rui usam aparelho nos dentes, descubra quem usa óculos. (*Dica*: há mais de uma resposta possível.)

As ideias envolvidas na resolução do exercício **8** serão exploradas nas páginas seguintes.

2 Operações com conjuntos

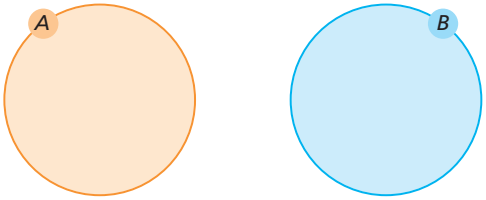
União de conjuntos	Intersecção de conjuntos	Diferença de conjuntos
Dados dois conjuntos, A e B, a união de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **ou** a B. $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ou $x \in B\}$	Dados dois conjuntos, A e B, a intersecção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A **e** a B. $A \cap B = \{x \mid x \in A$ e $x \in B\}$	Dados dois conjuntos, A e B, a diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, **mas não pertencem** a B. $A - B = \{x \mid x \in A$ e $x \notin B\}$
		
As regiões hachuradas representam $A \cup B$.	A região hachurada representa $A \cap B$.	A região hachurada representa $A - B$.

Observação

Na união dos conjuntos matemáticos, o conectivo **ou** significa que o elemento pertence a pelo menos um dos conjuntos envolvidos, podendo também pertencer a ambos.

Observação

Quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são **conjuntos disjuntos**.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Se achar conveniente, comentar com os alunos que:
- se $A \cap B = \varnothing$, isto é, se A e B são disjuntos, então: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, $n(A - B) = n(A)$ e $n(A \cap B) = 0$
- se $B \subset A$, então: $n(A \cap B) = n(B)$, $n(A \cup B) = n(A)$ e $n(A - B) = n(A) - n(B)$

Em problemas que envolvem a noção de conjunto, em especial naqueles que se referem a pesquisas, geralmente o interesse não é saber que elementos pertencem a qual conjunto, mas estabelecer o número de elementos de cada conjunto.

Vamos analisar o que ocorre com o número de elementos de um conjunto resultante de algumas operações.

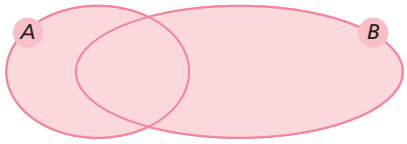
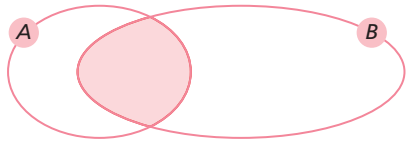
No quadro abaixo, vamos considerar as seguintes representações:

- A e B são dois conjuntos finitos quaisquer;
- $n(A)$ é o número de elementos do conjunto A;
- $n(B)$ é o número de elementos do conjunto B.

Reflita

As relações de igualdade entre os números de elementos dos conjuntos obtidas nos quadros de $A \cup B$ e $A \cap B$ são equivalentes? Justifique.

Sim. Podemos demonstrar substituindo, na primeira igualdade, $n(A \cap B)$ pelo segundo membro da segunda igualdade; assim, obtemos uma identidade: $n(A \cup B) = n(A \cup B)$

$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$
O número de elementos de A união B é: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 	O número de elementos de A intersecção B é: $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ 	O número de elementos de A menos B é: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

Exercício resolvido

R4. Em uma escola técnica de Agronomia, os estudantes pesquisavam como alguns fatores de um ambiente interno influenciavam as plantas. Eles submeteram alguns espécimes aos seguintes fatores: cor da sala (C), altura da planta em relação ao solo (A) e ventilação do ambiente (V). Depois do experimento, tabularam o número de plantas que apresentaram alteração em relação à planta-controle. Os resultados estão no quadro ao lado.

Fator(es)	Número de plantas
C	11
A	8
V	12
C e A	5
A e V	5
V e C	4
C, A e V	3

EVRIM ERTIK/GETTY IMAGES

É chamada de planta-controle aquela que, exposta a uma condição controlada, serve de parâmetro de crescimento e de outras transformações para as demais plantas de um experimento.

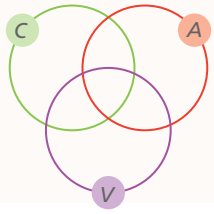
a) Calcular o número de plantas que apresentaram alteração em relação à planta-controle.

b) Indicar quantas plantas não sofreram alterações quando expostas ao fator "cor da sala".

Esse exercício resolvido propicia um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Analisar formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT202** da BNCC, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Resolução

a) Uma das formas práticas de resolver problemas como esse é a representação dos conjuntos por meio de diagrama.



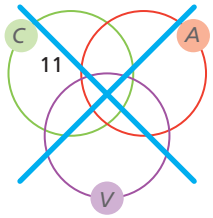
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

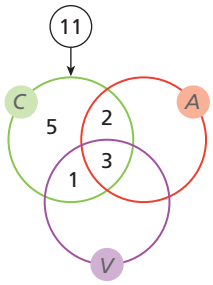
MODERNA

Observação

Não confunda!
Dizer que 11 plantas apresentaram alterações quando submetidas ao fator "cor da sala" não significa que elas não sofreram influência de outros fatores.
Incorreto:



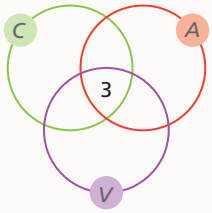
Correto:



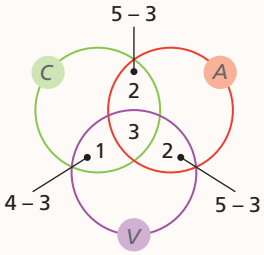
Chamar a atenção dos alunos para a resolução do exercício resolvido **R4**: eles devem inserir os valores no diagrama em etapas, começando da intersecção entre os três conjuntos, seguindo para as interseções dois a dois e, por fim, computar os valores individualmente para cada conjunto. Ao terminar as etapas, o problema estará resolvido. Dessa maneira, a atividade dialoga com o pilar **decomposição** do *pensamento computacional*.

Para calcular o número de elementos de cada conjunto, podemos seguir estes passos.

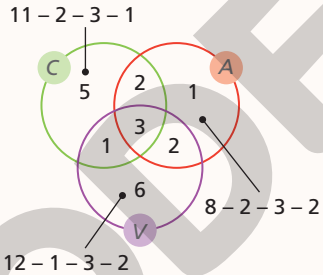
1º) Indicar o número de plantas afetadas pelos três fatores (cor, ventilação do ambiente e altura em relação ao solo) na região do diagrama que representa a intersecção dos três conjuntos.



2º) Completar as regiões que representam a intersecção de apenas dois conjuntos.



3º) Completar as regiões que representam apenas um dos conjuntos.



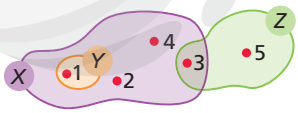
Com base nesses dados, o número de plantas do experimento foi:
$5 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 6 = 20$
Portanto, o experimento foi realizado com 20 plantas.

b) Observando o diagrama completo, estamos interessados no conjunto $(A \cup V) - C$, cujo total de elementos é: $1 + 2 + 6 = 9$
Logo, 9 plantas não sofreram alterações quando expostas ao fator "cor da sala".

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. Considere os conjuntos X, Y e Z.



Determine:

a) $X \cup Y$ {1, 2, 3, 4}

b) $Y \cup Z$ {1, 3, 5}

c) $Z \cup X$ {1, 2, 3, 4, 5}

d) $X \cup Y \cup Z$ {1, 2, 3, 4, 5}

13. Segundo estimativas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2019 a população brasileira que morava na área urbana era de 177.950.000 habitantes, e na área rural, 32.144.000 habitantes.

Considerando U o conjunto formado por pessoas que moravam na área urbana e R o conjunto formado por pessoas que moravam na área rural, determine quantos elementos tem o conjunto $P = U \cup R$. 210.094.000 elementos

14. Considere os conjuntos:

$P = \{x \mid x \text{ é um peixe}\}$;

$B = \{x \mid x \text{ é um peixe-boi}\}$;

$M = \{x \mid x \text{ é um mamífero}\}$.

14. Comentar que, apesar do nome, o peixe-boi não é um peixe, mas um mamífero. Avaliar a conveniência e a possibilidade de um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, explorando a classificação taxonômica do peixe-boi, o hábitat, a vulnerabilidade e a possível extinção desse animal.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Determine:

a) $B \cap M$ B

b) $P \cap B$ $\varnothing$

c) $P \cap M$ $\varnothing$

d) $(P \cup B) \cap M$ B

15. Considere os conjuntos:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$;

$Y = \{n \mid n$ é um natural primo menor que 6$\}$;

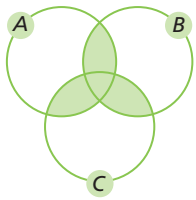
$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Determine:

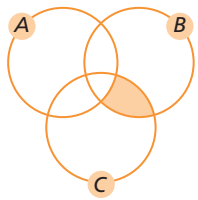
a) $X - Z$ $\varnothing$ b) $Y - X$ $\{5\}$ c) $Z - X$ $\{5, 6, 7, 8, 9\}$

16. Descreva a parte pintada em cada diagrama por meio de operações de conjuntos.

a)



b)



a) Resposta possível: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) Respostas possíveis: $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. Um hospital está avaliando os resultados de um tratamento com 50 voluntários, dos quais: 12 sentiram dor de cabeça, 8 sentiram náusea e 4 sentiram dor de cabeça e náusea. Quantos voluntários sentiram dor de cabeça e não sentiram náusea? E quantos não sentiram dor de cabeça nem náusea? 8 voluntários; 34 voluntários

18. Em uma pesquisa sobre uma marca de margarina,110 entrevistados acharam que ela não era cremosa e 65 acharam que era muito salgada. Sabendo que foram entrevistadas 150 pessoas e que nenhuma delas achou simultaneamente a margarina cremosa e não muito salgada, calcule o número de pessoas que acharam a margarina não cremosa e muito salgada. 25 pessoas

19. De três filmes que lançou, uma distribuidora pesquisou quais estavam agradando mais ao público. Sabe-se que 32% do público gostou do filme X; 29%, do filme Y; 30%, do filme Z; 17%, dos filmes X e Y; 13%, dos filmes Y e Z; 12%, dos filmes X e Z; 5%, dos três filmes.

a) Que porcentagem do público não gostou de nenhum dos três filmes? 46%

b) Escolha dois desses filmes para manter em cartaz por mais tempo e justifique sua escolha. os filmes X e Z, porque $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$

20. Uma indústria lançou um novo modelo de carro, que não teve a repercussão esperada. Os técnicos identificaram três possíveis problemas: *design* pouco inovador (D), acabamento pouco luxuoso (A) e preço mais elevado em relação aos modelos similares do mercado (P). Feita uma pesquisa, obtiveram os dados do quadro abaixo:

Problema(s)	Número de votos
D	34
A	66
P	63
D e A	17
D e P	22
A e P	50
D, A e P	10
Não encontraram problemas	16

Analisando o resultado, os técnicos concluíram:

I. Mais da metade dos pesquisados achou o preço elevado.

II. Como a quantidade de pessoas que não apontaram problemas é maior que a daquelas que apontaram os três problemas, a maioria das pessoas entrevistadas gostou do modelo.

III. Para aumentar as vendas desse modelo, é melhor criar vantagens na forma de pagamento.

- Analise as conclusões e verifique quais estão de acordo com os dados apresentados.

20. I. Está de acordo com os dados, pois foram pesquisadas 100 pessoas, das quais 63 acharam o preço elevado.
II. De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior que a das que apontaram os três problemas (10). Porém, essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.
III. Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento do que criar vantagens na forma de pagamento.

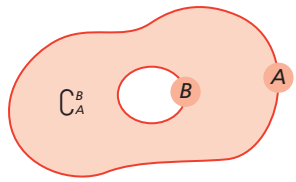
Complementar de um conjunto

Considere os conjuntos $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ e $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$.

Chamamos de complementar do conjunto P em relação a N (observe que $P \subset N$) o conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$, formado pelos elementos que pertencem a N e não pertencem a P. Indicamos esse conjunto por: $\complement_N^P$

O **complementar** de um conjunto B em relação a um conjunto A, com $B \subset A$, é definido por:

$$\complement_A^B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Ou seja: $\complement_A^B = A - B$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

O complementar de um conjunto A em relação ao conjunto universo U também pode ser expresso pela notação: A^C ou $\overline{A}$.

Exercício resolvido

R5. Dados os conjuntos $U = \{V, I, A, G, E, M\}$, $A^C = \{V, I, A\}$ e $B^C = \{E, M\}$, determinar:

a) A **b)** B

▸ **Resolução**

a) Como $A^C = \{V, I, A\}$, os elementos de U que não pertencem a A^C pertencem ao conjunto A.

Portanto, $A = \{G, E, M\}$.

b) Como $B^C = \{E, M\}$, os elementos de U que não pertencem a B^C pertencem ao conjunto B.

Portanto, $B = \{V, I, A, G\}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

21. Dados o conjunto universo $U = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e os conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{4, 6, 8\}$ e $C = \{4\}$, determine:

a) A^C $\{6, 8, 10\}$ **b)** B^C $\{0, 2, 10\}$ **c)** C^C $\{0, 2, 6, 8, 10\}$ **d)** $\complement_B^C$ $\{6, 8\}$

22. Dado um conjunto universo U, considere um subconjunto qualquer C. Qual é o complementar do complementar desse conjunto C?
o próprio conjunto C

23. Determine o número de elementos dos conjuntos indicados a seguir.

a) $n(A \cup B)$, sabendo que $n(A) = 10$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 0$ 15

b) $n(A \cup B)$, sabendo que $n(A) = 15$, $n(B) = 15$ e $n(A \cap B) = 3$ 27

c) $n(A - B)$, sabendo que $n(A) = 0$ 0

d) $n(A - B)$, sabendo que $n\left(A \cap \complement_A^B\right) = 5$ 5

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC, ao valorizar os conhecimentos historicamente construídos relacionados aos conjuntos numéricos.

3 Conjuntos numéricos

3.1 Conjuntos dos números naturais e dos números inteiros

A origem dos números naturais está associada à necessidade de contagem. Hoje, no entanto, além do emprego na contagem, usamos os números naturais para compor códigos (como os de telefone), para indicar ordem (1º, 2º, 3º, ...), entre outras aplicações.

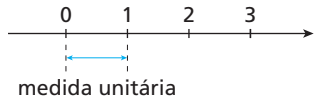
O **conjunto dos números naturais** tem infinitos elementos e é indicado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Observação

Para representar o subconjunto dos números naturais sem o zero, utilizamos a notação:
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$
Em geral, o asterisco junto ao símbolo significa que o elemento zero foi retirado desse conjunto.

Para representar os números naturais em uma reta ordenada, primeiro marcamos um ponto e associamos a ele o número zero. Escolhemos uma medida unitária e marcamos, a partir do ponto associado ao zero, à sua direita, pontos distantes uma, duas, três unidades e assim sucessivamente:



ADILSON SECCO

Todo número natural pode ser associado a um ponto da reta.

No conjunto dos números naturais, são definidas duas operações, a adição e a multiplicação, para as quais verificamos que quaisquer dois números naturais adicionados ou multiplicados resultam em um número natural. Mas, se efetuarmos a subtração de dois números naturais, nem sempre o resultado será um número natural. Se subtrairmos, por exemplo, 78 de 73, o resultado será -5, e -5 não pertence ao conjunto dos números naturais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

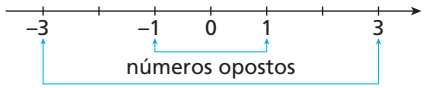
MODERNA

Acrescentando os números negativos $-1, -2, -3, -4, \ldots$ aos naturais, formamos o **conjunto dos números inteiros**, que é representado por:

Em $\mathbb{Z}$, além da adição e da multiplicação, também podemos operar livremente a subtração.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Os números inteiros podem ser representados assim em uma reta ordenada:



O conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Observação

Algumas notações especiais:
- Conjunto dos números inteiros não nulos:
  $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Conjunto dos números inteiros não negativos:
  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Conjunto dos números inteiros não positivos:
  $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

24. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $-2 \in \mathbb{N}$ falsa
b) $0 \in \mathbb{N}$ verdadeira
c) $100 \in \mathbb{Z}$ verdadeira
d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^*$ falsa
e) $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ verdadeira
f) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = \varnothing$ falsa

25. Reflita a respeito da seguinte conclusão: se $\frac{1}{1} = 1, \frac{4}{2} = 2, \frac{9}{3} = 3, \ldots$, então a divisão é uma operação que está definida no conjunto dos números inteiros.

Ao resolver o exercício **25**, perguntar aos alunos se conhecem um conjunto numérico em que o quociente de dois elementos quaisquer pertença ao conjunto referido. Com isso, pode-se introduzir o conjunto $\mathbb{Q}$, lembrando que, em $\mathbb{Q}$, não está definida a divisão por zero.

25. Resposta possível: Não, essa seria uma generalização indevida, pois o resultado de 3 dividido por 2, por exemplo, não está definido no conjunto dos números inteiros.

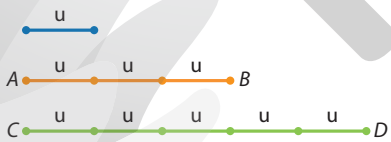
3.2 Conjunto dos números racionais

O surgimento dos números racionais está associado à necessidade de realizar e expressar medições.

Ao realizar uma medição de comprimento, massa, temperatura, superfície ou de qualquer outra grandeza, estamos comparando o que queremos medir com uma unidade de medida da mesma grandeza escolhida como padrão.

Para medir um segmento, é necessário comparar seu comprimento com o comprimento de outro segmento, tomado como unidade de medida. Assim, para medir o comprimento do segmento $\overline{CD}$ representado abaixo, tomando a medida de $\overline{AB}$ como unidade de medida, devemos verificar quantas vezes a medida AB "cabe" em $\overline{CD}$.

Note que, nesse caso, a comparação não pode ser feita por meio de um número inteiro. No entanto, como mostra a representação acima, podemos tomar uma unidade de medida u, de maneira que essa unidade "cabe" um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$:



$AB = 3$ u e $CD = 5$ u

Observação

Quando existe uma unidade de medida que "cabe" um número inteiro de vezes em dois segmentos, dizemos que esses segmentos são **comensuráveis**.

Comparando agora $\overline{CD}$ com $\overline{AB}$, podemos escrever:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{5 \text{ u}}{3 \text{ u}} \Rightarrow CD = \frac{5}{3} AB$$

Portanto, a medida de $\overline{CD}$, considerando AB como unidade de medida, é $\frac{5}{3}$.

Para expressar medidas como essa, utilizamos os números racionais.

O **conjunto dos números racionais** é formado por todos os números que podem ser escritos na forma da razão $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, e indicamos por:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exemplos

a) $\frac{8}{25}$ b) $-2 = -\frac{2}{1}$ c) $0{,}25 = \frac{1}{4}$ d) $0 = \frac{0}{10}$

O conjunto dos números inteiros é um subconjunto de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Como o conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, então $\mathbb{N}$ também é subconjunto de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

Observação

Veja outros subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que têm notação especial:
- Conjunto dos números racionais não nulos: $\mathbb{Q}^*$
- Conjunto dos números racionais não negativos: $\mathbb{Q}_+$
- Conjunto dos números racionais não positivos: $\mathbb{Q}_-$

Verificar a conveniência de observar ou questionar os alunos sobre a veracidade e a recorrência da afirmação: entre dois números racionais, sempre existe um número racional.

Reflita

Reúna-se com um colega, explorem as conclusões do exercício resolvido **R6** e verifiquem se a média aritmética de dois números racionais quaisquer é sempre um número racional.

A média aritmética de dois números racionais x e y é dada por $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x + y)$. Usando as conclusões do exercício resolvido **R6**, temos:
- x e y são números racionais; logo, $(x + y)$ é um número racional;
- $(x + y)$ e $\frac{1}{2}$ são números racionais; logo, $\frac{1}{2} \cdot (x + y)$ é um número racional.

Portanto, a média aritmética de dois números racionais é sempre um número racional.

Exercício resolvido

R6. Considerando que no conjunto dos números inteiros, para a adição e a multiplicação, a propriedade do fechamento é válida, isto é, que a soma $(a + b)$ e que o produto $(a \cdot b)$ de dois números inteiros, a e b, são também números inteiros, demonstrar as afirmações abaixo.

a) A soma de dois números racionais é um número racional.

b) O produto de dois números racionais é um número racional.

▸ **Resolução**

Vamos considerar os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, $c \in \mathbb{Z}$ e $d \in \mathbb{Z}^*$.

a) A soma de x e y é dada por:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Temos $(a \cdot d) \in \mathbb{Z}$, $(b \cdot c) \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot d + b \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo.

Portanto, a soma de dois números racionais é um número racional. Assim, podemos dizer que no conjunto dos números racionais, para a adição, a propriedade do fechamento é válida.

b) O produto de x e y é dado por:

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Temos $(a \cdot c) \in \mathbb{Z}$ e $(b \cdot d) \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, o numerador é um número inteiro e o denominador é um número inteiro não nulo.

Portanto, o produto de dois números racionais é um número racional. Assim, podemos dizer que no conjunto dos números racionais, para a multiplicação, a propriedade do fechamento é válida.

Representação decimal e representação fracionária de números racionais

Para representar um número racional $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, na forma decimal, dividimos a por b. O resultado dessa divisão será sempre:

- um número com representação decimal finita (podendo ser inteiro)

ou

- uma dízima periódica.

Exemplos

a) $\frac{2}{50} = 0{,}04$ (número com representação decimal finita)

b) $\frac{0}{1.000} = 0$ (número com representação decimal finita)

c) $\frac{24}{4} = 6$ (número com representação decimal finita)

d) $\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$ (dízima periódica de período 3)

e) $\frac{311}{396} = 0{,}7853535353\ldots$ (dízima periódica de período 53)

Observação

Dízima periódica é todo número decimal que só pode ser representado com um número infinito de casas decimais e em que, a partir de determinada casa decimal, há apenas a repetição de um mesmo algarismo ou de uma mesma sequência finita de algarismos.

Na dízima periódica, o algarismo ou a sequência de algarismos que se repete é chamado de **período**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Conforme vimos anteriormente, todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número com representação decimal finita ou por uma dizima periódica. Reciprocamente, todo número com representação decimal finita ou representado por uma dízima periódica é racional, ou seja, pode ser representado por meio de uma fração $\frac{a}{b}$.

Observação

A fração que gera uma dízima periódica é denominada **fração geratriz**.

Exemplos

a) $70 = \frac{70}{1}$

b) $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

c) $-0{,}0125 = -\frac{125}{10.000} = -\frac{1}{80}$

d) Para obter a fração geratriz da dízima periódica 0,6666..., podemos seguir alguns passos:

1º) Escrevemos a equação: $x = 0{,}666...$ (I)

2º) Multiplicamos por 10 ambos os membros da equação (I), obtendo: $10x = 6{,}666...$ (II)

3º) Subtraímos membro a membro as equações:

$$\begin{cases} 10x = 6{,}666... \text{ (II)} \\ x = 0{,}666... \text{ (I)} \end{cases}$$

$$9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

e) Para obter a fração geratriz da dízima periódica 1,04545...:

1º) Escrevemos a equação: $x = 1{,}04545...$ (I)

2º) Multiplicamos por 10 ambos os membros da equação (I): $10x = 10{,}4545...$ (II)

3º) Multiplicamos por 1.000 ambos os membros da equação (I): $1.000x = 1.045{,}4545...$ (III)

4º) Da equação (III), subtraímos membro a membro a equação (II):

$$\begin{cases} 1.000x = 1.045{,}45... \text{ (III)} \\ 10x = \quad 10{,}45... \text{ (II)} \end{cases}$$

$$990x = 1.035 \Rightarrow x = \frac{1.035}{990} = \frac{23}{22}$$

Portanto: $1{,}04545... = \frac{23}{22}$

Reflita

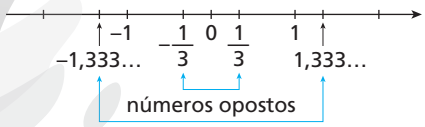
Para que valor de a cada fração abaixo representa o mesmo número racional?

- $\frac{a}{21}$ e $\frac{4}{7}$
- $-\frac{18}{66}$ e $\frac{12}{a}$

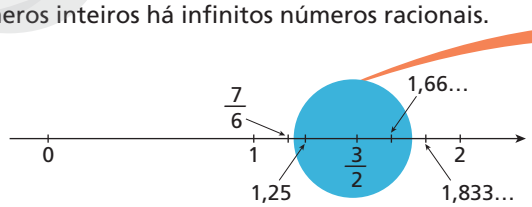
- $\frac{a}{21} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7a = 84 \Rightarrow a = 12$
- $-\frac{18}{66} = \frac{12}{a} \Rightarrow -18a = 792 \Rightarrow a = -44$

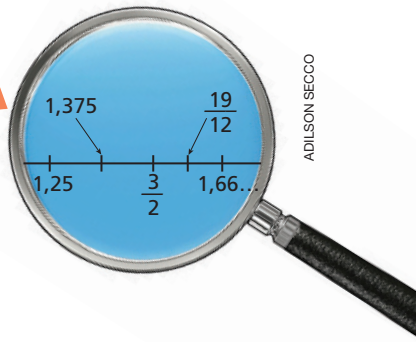
Representação dos números racionais na reta

Todos os números racionais podem ser representados na reta ordenada.



Entre dois números inteiros há infinitos números racionais.





ADILSON SECCO

E, entre dois números racionais, também há infinitos números racionais.

Uma maneira de encontrar um número racional entre dois racionais é calcular a média aritmética entre eles.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo

Dados os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, a média aritmética é um número racional:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$$

Na reta ordenada, $\frac{5}{12}$ situa-se entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

26. Identifique o conjunto numérico mais adequado para representar cada situação a seguir.

a) O número de uma casa. $\mathbb{N}$

b) A temperatura de uma substância. $\mathbb{Q}$

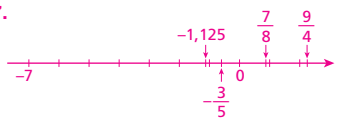
c) O andar de um prédio. $\mathbb{Z}$

d) A altura de uma pessoa, em metro. $\mathbb{Q}$

27. Represente uma reta ordenada com os números racionais a seguir:

$\frac{7}{8}; \frac{9}{4}; -\frac{3}{5}; -7; -1{,}125$

27.



ADILSON SECCO

28. Encontre a fração geratriz dos seguintes números racionais:

a) $-10{,}111...$ e $-10{,}010101...$ $-\frac{91}{9}; -\frac{991}{99}$

b) $1{,}333...$ e $1{,}5333...$ $\frac{4}{3}; \frac{23}{15}$

29. Discuta com um colega e demonstrem que:

a) a diferença de dois racionais é um racional.

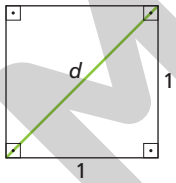
b) o quociente de dois racionais não nulos é um racional.

Ver resolução no Guia do professor.

3.3 Conjunto dos números irracionais

Por muito tempo, acreditou-se que os números racionais eram suficientes para expressar a medida de qualquer segmento. Entretanto, os pitagóricos descobriram que a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis.

Consideremos um quadrado de lado unitário.



ADILSON SECCO

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 2$

$d = \sqrt{2}$, pois $d > 0$.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623...$ é um número cuja representação decimal tem infinitas casas não periódicas depois da vírgula. Jamais encontraremos uma unidade de medida que "caiba" um número inteiro de vezes em 1 (medida do lado do quadrado) e em $\sqrt{2}$, independentemente de quão pequena seja a unidade de medida.

Portanto, $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ não é um número racional.

Assim, surgiu a necessidade de considerar um novo conjunto de números, o conjunto dos números irracionais.

O **conjunto dos números irracionais** é formado por todos os números que **não** podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

O **conjunto dos números irracionais** é formado por todos os números que **não** podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Dessa forma, os números irracionais são aqueles cuja representação decimal não é finita e não é uma dízima periódica.

Além de $\sqrt{2}$, há infinitos números irracionais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

a) 0,606006000600006000006..., em que a quantidade de zeros que sucede imediatamente cada dígito 6 aumenta indefinidamente.

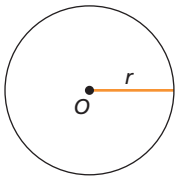
b) A raiz quadrada de um número natural que não é quadrado perfeito: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{27}$

c) A raiz cúbica de um número natural que não é cubo perfeito: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[3]{82}$

d) O resultado de algumas operações entre números racionais e irracionais: $-\sqrt{3}$, $10\sqrt[3]{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{7}$, $\frac{9}{\sqrt[4]{11}}$, $2+\sqrt[5]{4}$

e) O número π (lemos: "pi"), que expressa a razão constante entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro.

ADILSON SECCO



$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \frac{\cancel{2}\pi\cancel{r}}{\cancel{2}\cancel{r}} = \pi$$

$\pi = 3{,}1415926535...$ é um número que tem infinitas casas decimais não periódicas.

A competência específica **5** da BNCC é favorecida no exercício resolvido **R7**, uma vez que um conjunto de habilidades para a formulação de explicações e argumentos é mobilizado na resolução.

Exercício resolvido

R7. Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

▸ Resolução

Vamos aplicar a **demonstração por absurdo**, um procedimento indireto que consiste em utilizar manipulações lógicas para chegar a uma contradição. Dadas as afirmações A e B, para provar que $A \Rightarrow B$ (A implica B), começamos por supor A verdadeira e B falsa (B falsa é chamada de **hipótese de raciocínio por absurdo**). A suposição de que B é falsa é apenas temporária, até que seja obtida uma contradição e, dessa maneira, concluir que B é verdadeira.

Nesse caso, fazemos a afirmação escrita na forma de implicação: se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional (note que a afirmação A é "$x = \sqrt{2}$" e a afirmação B é "x é irracional"). Para a demonstração por absurdo, vamos supor que a afirmação "x é irracional" é falsa, ou seja, que x é racional. A partir daí, chegamos a uma contradição.

Assim, para a suposição de que x é racional, devem existir p e q, com $q \neq 0$, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Simplificando a fração $\frac{p}{q}$, se necessário, podemos supor que p e q sejam primos entre si (fração irredutível, ou seja, não possuem divisores comuns diferentes de 1).

Elevando os dois membros ao quadrado e lembrando que todo múltiplo de 2 é um número par, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad \text{(I)}$$

Note que p^2 é par; logo, p é par, ou seja, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2n$.

$$p = 2n \Rightarrow p^2 = (2n)^2 \Rightarrow p^2 = 4n^2 \overset{\text{(I)}}{\Rightarrow} 2q^2 = 4n^2 \Rightarrow q^2 = 2n^2$$

Note que q^2 é par; logo, q é par.

Contudo, as conclusões "p é par" e "q é par" contradizem a hipótese de que $\frac{p}{q}$ seja uma fração irredutível, ou seja, chegamos a um absurdo.

Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como uma razão de números inteiros; logo, não é um número racional.

Observações

- Teorema: proposição que, para ser admitida ou se tornar evidente, necessita de demonstração.
- Hipótese: proposição que se admite como princípio do qual se pode deduzir um conjunto dado de proposições (tese de um teorema).
- Tese: proposição assumida que fundamenta uma demonstração, uma argumentação ou um processo discursivo.

Observações

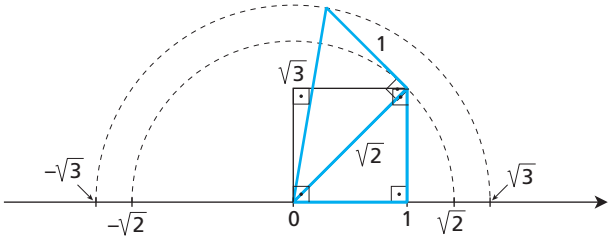
- Quando a veracidade de uma afirmação ***p*** conduz à conclusão necessária da veracidade de outra afirmação ***q***, temos uma **implicação lógica**.
  Denotamos essa relação por:
  p ⇒ ***q*** (lê-se: "*p* implica *q*")
  Assim, por exemplo:
  p: todo número natural que termina em 0 é múltiplo de 10.
  implica
  q: 2.070 é múltiplo de 10.
- Quando ***p*** ⇒ ***q*** e ***q*** ⇒ ***p***, temos uma equivalência que representamos por: ***p*** ⇔ ***q*** (lemos: "*p* equivale a *q*").

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Representação dos números irracionais na reta

Há um procedimento geométrico que permite representar alguns números irracionais na reta ordenada com o uso de compasso.

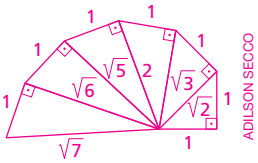


Pela medida da diagonal do quadrado de lado 1, encontramos $\sqrt{2}$.

Construindo o triângulo retângulo de catetos 1 e $\sqrt{2}$, obtemos $\sqrt{3}$ como medida da hipotenusa.

Reflita

Prosseguindo a construção, como encontramos $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$?

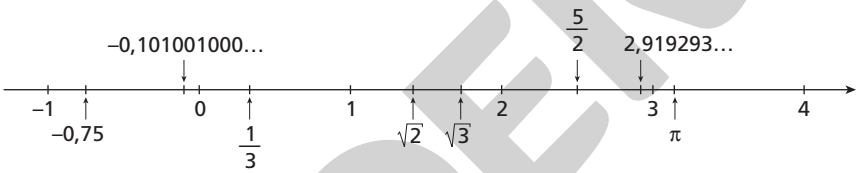


ADILSON SECCO

3.4 Conjunto dos números reais

A reunião do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais resulta no **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.

Se marcarmos na reta ordenada os números racionais e os números irracionais, preencheremos totalmente a reta, que passará a se chamar **reta real** ou **reta numérica**. Veja alguns exemplos:

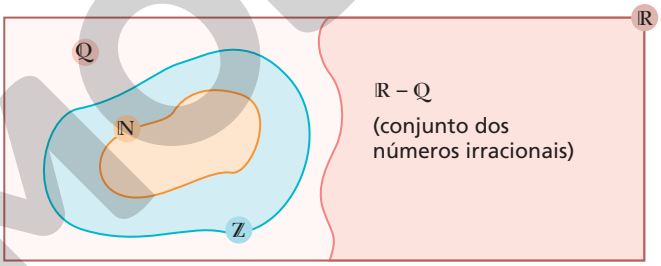


Observação

Algumas notações especiais:
- Conjunto dos números reais não nulos: $\mathbb{R}^*$
- Conjunto dos números reais não negativos: $\mathbb{R}_+$
- Conjunto dos números reais não positivos: $\mathbb{R}_-$

3.5 Relação de inclusão dos conjuntos númericos

Os conjuntos estudados até aqui podem ser representados em um diagrama:



O conjunto dos números racionais é um subconjunto de $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Como o conjunto dos números naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$, então: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Reflita

- A multiplicação de dois irracionais é sempre irracional?
- A adição de dois irracionais é sempre irracional?

Ambas as perguntas sugerem generalizações equivocadas. Respostas possíveis:

- Não, por exemplo: $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$ e $1 \in \mathbb{Q}$
- Não, por exemplo: $\left(\frac{1}{2} + \pi\right) + (1 - \pi) = \frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

30. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) Um número irracional não é um número racional. verdadeira

b) A soma de um número irracional com um número racional é um número irracional. verdadeira

c) O produto de um número irracional por um número racional (diferente de zero) é um número racional. falsa

d) O produto de dois números reais é um número real. verdadeira

e) O produto de dois números racionais é um número racional. verdadeira

f) Uma dízima periódica é um número irracional. falsa

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

31. Represente os números abaixo em uma reta numérica e, em seguida, escreva-os em ordem crescente.

$\sqrt{5}$; $-\frac{2}{5}$; $\sqrt{25}$; 5,222...; $-2{,}5$; $+\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$ $-2{,}5$, $-\sqrt{2}$; $-\frac{2}{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{25}$; 5,222...

Considerando os números maiores que $-\sqrt{2}$ e menores que $\sqrt{2}$, responda.

a) Quantos números naturais existem? dois

b) Quantos números inteiros existem? três

c) Quantos números racionais existem? infinitos

d) Quantos números reais existem? infinitos

32. Relacione usando os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

a) -13 e $\mathbb{N}$ $\notin$

b) 0 e $\mathbb{Z}^*$ $\notin$

c) $-2{,}25$ e $\mathbb{Q}_+$ $\notin$

d) $\frac{6}{16}$ e $\mathbb{Q}$ $\in$

e) $\mathbb{N}^*$ e $\mathbb{R}^*$ $\subset$

f) $\mathbb{Z}_-$ e $\mathbb{R}_-$ $\subset$

g) $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}$ $\subset$

h) $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{R}_+$ $\not\subset$

i) $\mathbb{Q}_+$ e $\mathbb{R}_-$ $\not\subset$

33. Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.

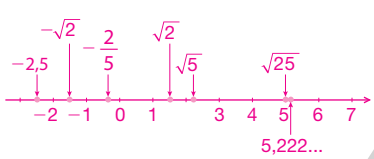
a) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \varnothing$ verdadeira

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ falsa

c) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}_+^*$ falsa

d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}^*$ falsa

31.



ADILSON SECCO

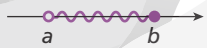
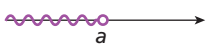
4 Intervalos

Nesse tópico, a articulação entre os registros de representação dos conjuntos favorece o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

4.1 Representação de subconjuntos por intervalos

Podemos representar certos subconjuntos de $\mathbb{R}$ pela notação de intervalos.

Sendo a e b números reais tais que $a < b$, veja algumas representações, geométricas e algébricas, de intervalos numéricos envolvendo a e b.

Representação geométrica	Representação algébrica	Descrição
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a, b[$	Intervalo aberto
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ ou $[a, b]$	Intervalo fechado
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ ou $[a, b[$	Intervalo fechado à esquerda
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ ou $]a, b]$	Intervalo fechado à direita
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $]a, +\infty[$	Semirreta aberta de origem a
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ ou $[a, +\infty[$	Semirreta de origem a
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $]-\infty, a[$	Semirreta aberta de origem a
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ ou $]-\infty, a]$	Semirreta de origem a
	$\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$	Reta real

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observações

- O símbolo ∞ representa infinito.
- O intervalo em que aparece $+\infty$ é aberto à direita.
- O intervalo em que aparece $-\infty$ é aberto à esquerda.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Na representação geométrica:

○ (bolinha vazia) indica que aquele extremo não pertence ao intervalo;

● (bolinha cheia) indica que aquele extremo pertence ao intervalo.

Na representação algébrica:

]*a*, *b*[indica que os extremos *a* e *b* não pertencem ao intervalo;

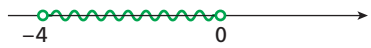
[*a*, *b*] indica que os extremos *a* e *b* pertencem ao intervalo;

[*a*, *b*[indica que o extremo *a* pertence ao intervalo, mas o extremo *b* não pertence;

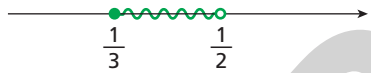
]*a*, *b*] indica que o extremo *a* não pertence ao intervalo, mas o extremo *b* pertence.

Exemplos

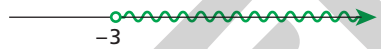
a) O intervalo $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0\}$ ou $]-4, 0[$ representado na reta real:



b) O intervalo $\left\{y \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant y < \frac{1}{2}\right\}$ ou $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$ representado na reta real:



c) O intervalo $\{z \in \mathbb{R} \mid z > -3\}$ ou $]-3, +\infty[$ representado na reta real:

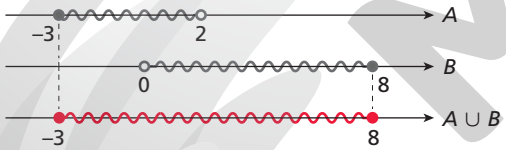


4.2 Operações com intervalos

Veja agora como proceder nas operações (união, intersecção e diferença) com intervalos numéricos utilizando o recurso da representação geométrica.

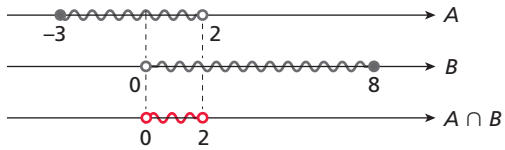
Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 8\}$, para efetuar as operações, representamos cada conjunto em retas reais paralelas.

$A \cup B$



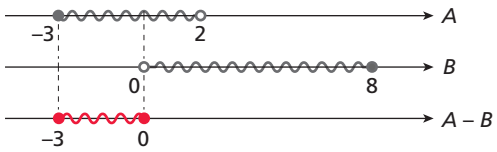
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 8\}$ ou $[-3, 8]$

$A \cap B$



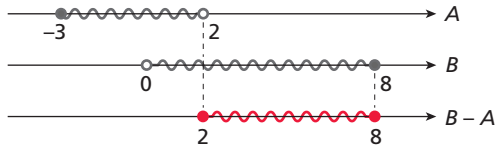
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$ ou $]0, 2[$

$A - B$



$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 0\}$ ou $[-3, 0]$

$B - A$



$B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 8\}$ ou $[2, 8]$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

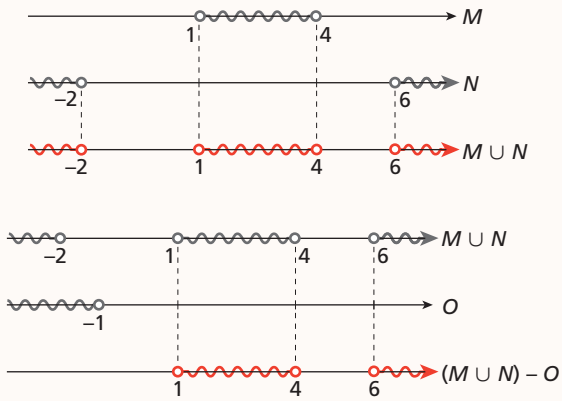
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R8. Dados os conjuntos $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x < 4\}$, $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 6\}$ e $O = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$, determinar $(M \cup N) - O$.

▸ **Resolução**



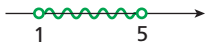
Portanto:

$(M \cup N) - O = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4 \text{ ou } x > 6\}$ ou $]1, 4[\cup]6, +\infty[$

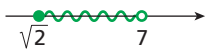
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

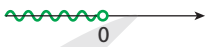
34. Use a notação de conjuntos para escrever os intervalos representados na reta real.

a) 

$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$

b) 

$\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$

c) 

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$

d)

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

35. Determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ e $B - A$, dados:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\}$

b) $A = [-1, 6[$ e $B =]1, +\infty[$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$ e $B = [2, 5[$

36. O comprimento da circunferência de raio r é $2\pi r$, e a área do círculo de raio r é πr^2. Dessa maneira, determine a qual dos intervalos abaixo pertencem, simultaneamente, os números que representam o comprimento da circunferência de raio 0,5 e a área do círculo determinado por essa circunferência. alternativa d

a) $]0, 1[$

b) $\left[1, \frac{32}{10}\right]$

c) $\left]\frac{99}{100}, 3\right]$

d) $]-1, 4]$

37. (Cesgranrio-RJ) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, o conjunto que representa $(A \cap B) - C$ é: alternativa a

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

35.
a) $A \cup B = A$
$A \cap B = B$
$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 5 \leqslant x < 7\}$
$B - A = \varnothing$
b) $A \cup B = [-1, +\infty[$
$A \cap B =]1, 6[$
$A - B = [-1, 1]$
$B - A = [6, +\infty[$
c) $A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$
$A \cap B = \varnothing$
$A - B = A$
$B - A = B$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

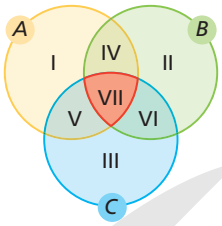
Aplicação

1. Represente os conjuntos explicitando seus elementos.
   a) $A = \{m \mid m$ é um número inteiro par e divisor de 20$\}$ $\{-20, -10, -4, -2, 2, 4, 10, 20\}$
   b) $B = \{x \mid x$ é um número natural ímpar e $3 < x < 5\}$ $\varnothing$
   c) $C = \{x \mid x$ é um número natural e $x < 3\}$ $\{0, 1, 2\}$

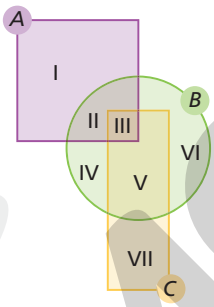
2. Represente os conjuntos segundo uma possível propriedade que defina cada um. Respostas possíveis:
   a) $A = \{b, n, a\}$ $A = \{x \mid x$ é letra da palavra banana$\}$
   b) $B = \{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$ $B = \{x \mid x$ é natural e potência de 2$\}$

3. Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$, determine:
   a) $A \cup B$ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   b) $A - C$ $\{0, 1, 2\}$
   c) $B \cup C$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$
   d) $A \cup B \cup C$ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   e) $A - B$ $\{0\}$
   f) $A \cap C$ $\{3, 4\}$
   g) $B \cap C$ $\{3, 4, 5, 6\} = C$
   h) $(A - B) \cap C$ $\varnothing$

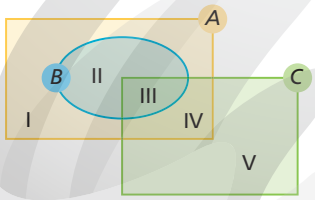
4. Nos diagramas abaixo, cada região está representada por um número. Responda, em cada caso, qual é a região que representa o resultado da operação indicada.
   a) $(A \cap B) - C$ região IV



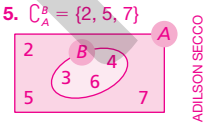
   c) $(A - B) \cap C$ $\varnothing$



   b) $(B - A) \cap C$ $\varnothing$



5. $\complement_A^B = \{2, 5, 7\}$



ADILSON SECCO

5. Dados os conjuntos $A = \{x \mid x$ é um número natural e $2 \leqslant x < 8\}$ e $B = \{3, 4, 6\}$, determine o conjunto $\complement_A^B$. Em seguida, desenhe um diagrama que represente esses conjuntos.

6. (PUC) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam o produto B e que 2 dessas pessoas não usam o produto A, qual é o número de pessoas que utilizam os produtos A e B? três pessoas

ANTONIO GUILLEM/ SHUTTERSTOCK

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

9. 36 pessoas têm miopia e 27 pessoas têm astigmatismo.

7. Em uma sala de aula com 50 alunos, todos falam pelo menos uma das línguas estrangeiras: inglês ou espanhol. Sabendo que 35 falam inglês e 27, espanhol, quantos alunos falam:
   a) inglês e espanhol? 12 alunos
   b) somente inglês? 23 alunos
   c) somente espanhol? 15 alunos

8. Determine M e n(M), se $A = \{3, 7\}$, $B = \{7, 8, 9\}$, $A \cap M = \{3\}$, $B \cap M = \{8\}$ e $A \cup B \cup M = \{3, 7, 8, 9, 10\}$. $M = \{3, 8, 10\}$; $n(M) = 3$

9. Em um grupo de 45 pessoas, todas com algum tipo de problema de visão, 40% têm miopia e astigmatismo, e o número de pessoas com miopia excede em 9 o número de pessoas com astigmatismo. Determine quantas pessoas têm miopia e quantas têm astigmatismo.

10. Dados os conjuntos $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{15}{7}\right]$ e $B = \left]-\frac{1}{3}, 2\right]$, determine:
   a) $A \cup B$ A
   b) $A \cap B$ B
   c) $A - B$ $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$
   d) $B - A$ $\varnothing$
   e) $\complement_A^B$ $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

Aprofundamento

11. Se os conjuntos $A = \{-1, 2x + y, 2, 3, 1\}$ e $B = \{2, 4, x - y, 1, 3\}$ são iguais, determine o valor de x e de y. $x = 1$ e $y = 2$

12. Se A é um conjunto com x elementos e B é um conjunto com y elementos, com $x > y$, determine o número máximo de elementos de:
   a) $A - B$ x
   b) $B - A$ y
   c) $A \cup B$ $x + y$
   d) $A \cap B$ y

Desafio

13. Observe a expressão:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{2n-1},$$

em que $n \in \mathbb{N}^*$ representa a quantidade de frações que a compõem. Ver resolução no Guia do professor.

Assim, por exemplo:
- para $n = 1$, temos: $\frac{4}{1}$
- para $n = 2$, temos: $\frac{4}{1} - \frac{4}{3}$
- para $n = 3$, temos: $\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5}$
- para $n = 10$, temos:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + ... + (-1)^{10-1} \cdot \frac{4}{2 \cdot 10 - 1}$$

   a) Em uma planilha eletrônica, calcule os valores da expressão para n variando de 1 a 10. Em seguida, usando a planilha, calcule esse valor para $n = 10.000$.
   b) Converse com um colega sobre o famoso número irracional do qual a sequência dos valores obtidos se aproxima.

Espera-se que os alunos percebam que a sequência de resultados converge para π. Mais informações sobre a série deste exercício podem ser obtidas na *Revista do Professor de Matemática* (RPM), São Paulo, n. 19, p. 1-8, 1991.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Entre as situações-problema descritas abaixo, a única que **não** é resolvida com conceitos referentes a conjuntos é: alternativa c

a) Segundo uma pesquisa, 10 pessoas preferiram o produto A, 15 pessoas preferiram o produto B e 25 pessoas preferiram o produto C. Quantas pessoas participaram da pesquisa?

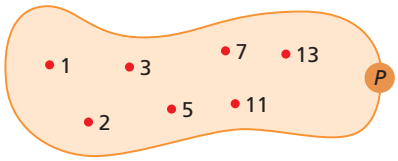
b) Que números inteiros são múltiplos de -5 e também de -7?

c) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado mede 2 cm?

d) Que polígono pode ser classificado como losango e também como retângulo?

2. Uma representação do conjunto dos números primos naturais pode ser: alternativa c

a)



ADILSON SECCO

b) 1, 2, 3, 5, 7, 11 etc.

c) $\{x \mid x$ é um número natural que tem exatamente dois divisores distintos$\}$

d) $\{x \mid x$ é um número natural cujo algarismo da unidade é 1, 3, 5, 7 ou 9$\}$

Para responder às questões **3** a **6**, considere os conjuntos: universo $U = \mathbb{N}$, $A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, ...\}$.

3. $A \cup B$ é igual a: alternativa d

a) $\varnothing$

b) $\{0\}$

c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

d) U

4. $A - B$ é igual a: alternativa b

a) $\varnothing$

b) $\{0, 2, 4, 6, ...\}$

c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

d) U

5. $A \cap B$ é igual a: alternativa a

a) $\varnothing$ b) $\{0\}$ c) $\mathbb{N}^*$ d) U

6. $\complement_U^A$ é igual a: alternativa c

a) $\varnothing$ b) A c) B d) U

7. Uma empresa pesquisou o gênero de filmes preferido de uma família e chegou ao seguinte resultado: 3 pessoas gostam de comédia, 3 gostam de drama, 3 gostam de policial, 2 gostam de comédia e drama, 2 gostam de comédia e policial, 2 gostam de drama e policial e 1 pessoa gosta dos três gêneros. Sabendo que todos os membros da família gostam de pelo menos um desses três gêneros, quantos membros tem essa família? alternativa a

a) 4 b) 7 c) 9 d) 10

8. Para a relação $\clubsuit \subset \blacklozenge \subset \heartsuit \subset \spadesuit$ ser verdadeira, os símbolos $\clubsuit$, $\blacklozenge$, $\heartsuit$ e $\spadesuit$ podem ser substituídos, respectivamente, pelos conjuntos numéricos: alternativa b

a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

c) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$

d) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

9. Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, os intervalos que representam $A \cup B$ e $A \cap B$ são, respectivamente: alternativa b

a) $A \cup B = [-1, +\infty[$ e $A \cap B =]0, +\infty[$

b) $A \cup B =]-1, +\infty[$ e $A \cap B = [0, 1[$

c) $A \cup B = [1, +\infty[$ e $A \cap B =]-\infty, 0[$

d) $A \cup B = [-1, +1]$ e $A \cap B = \varnothing$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Perceber situações nas quais se aplica a noção de conjunto.	X						X		
Descrever conjuntos.		X							
Efetuar operações com conjuntos.			X	X	X	X	X		
Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos.							X		
Identificar os conjuntos numéricos.								X	
Representar e operar com intervalos reais.									X
Páginas do livro referentes ao conceito	39 e 40	39 a 42	42 a 45	42 a 45	42 a 45	45 e 46	39 a 45	46 a 53	53 a 55

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

3 Funções

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302**, **EM13MAT401**, **EM13MAT402**, **EM13MAT404** e **EM13MAT501**.

ANDREY ARMYAGOV/SHUTTERSTOCK

Após a decolagem, aeronaves comerciais, em voos domésticos e internacionais, voam em altitude de cruzeiro, atingindo uma altura entre 30 mil e 41 mil pés. Fotografia de 2017.

Objetivos do capítulo

- Identificar uma função.
- Analisar e construir o gráfico de uma função.
- Resolver situações-problema que envolvam funções.
- Obter a função inversa de funções dadas.

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

1 Conceito de função

1.1 A ideia de função no cotidiano

A Organização da Aviação Civil Internacional (OACI), sediada em Montreal (Canadá), é uma agência das Nações Unidas responsável pelas regras e pelo desenvolvimento da Aviação Civil no mundo. A padronização das unidades de medida, essencial para a segurança dos voos, é uma das muitas determinações dos regulamentos de tráfego aéreo. A unidade estabelecida internacionalmente para a medida de altitude na aviação, por exemplo, é o **pé**. Um pé equivale a uma altitude de 30,48 centímetros ou de 0,3048 metro. Observe a tabela a seguir.

Quantidade de pés	Altitude em metro
1	$1 \cdot 0{,}3048 = 0{,}3048$
2	$2 \cdot 0{,}3048 = 0{,}6096$
3	$3 \cdot 0{,}3048 = 0{,}9144$
n	$n \cdot 0{,}3048$

Considere um avião a uma altitude de 33.000 pés. Qual é sua altitude em metro?

Nesse caso, podemos dizer que a altitude em metro é **função** da quantidade de pés, ou seja, cada número que define a quantidade de pés corresponde a um único número que define a altitude em metro.

MODERNA

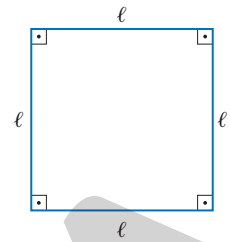
Assim, para saber a altitude do avião em metro, usamos a generalização observada na tabela e fazemos:

$33.000 \cdot 0{,}3048 = 10.058{,}4$

Portanto, o avião está a 10.058,4 metros de altitude.

Função na Geometria

Na Geometria, também podemos relacionar grandezas: por exemplo, a medida do lado de um quadrado ao seu perímetro (p).



Medida do lado (cm)	1	$\sqrt{2}$	8	10,2	18,8	39	ℓ
Perímetro (cm)	4	$4\sqrt{2}$	32	40,8	75,2	156	4ℓ

Assim, se ℓ for a medida do lado do quadrado, o perímetro será igual a 4ℓ. Essa relação pode ser representada pela seguinte sentença: $p = 4\ell$. Dizemos que p é **função** de ℓ, pois p e ℓ são duas **variáveis** que se relacionam e, para cada valor determinado para ℓ, existe um único p correspondente.

Dadas duas variáveis, x e y, se a cada valor atribuído a x se associa um único y, dizemos que y é **função** de x.

1.2 Definição de função

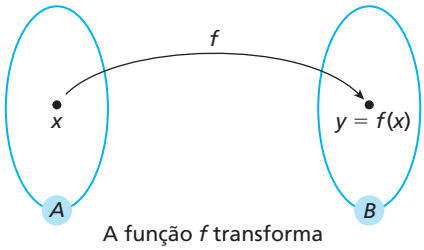
A seguir, vamos estudar a definição matemática de função e aprender a identificar diagramas que representam uma função.

Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que f é uma **função** de A em B se, e somente se, para cada elemento x de A existe, em correspondência, um único elemento y de B.

Indicamos essa função assim: $f: A \rightarrow B$ (lemos: "função f de A em B").

É importante observar que:

- Quando f é uma função de A em B, podemos também dizer que f **leva** A para B ou que f é uma aplicação de A em B ou, ainda, que f é uma **transformação** de A em B.
- Para indicar o valor que a função f assume para x, escrevemos $f(x)$ (lemos: "f de x").
- Dada uma função f de A em B, é comum usar a letra x para designar um elemento genérico de A e a letra y para designar o valor correspondente a $f(x)$. Dizemos, então, que x é a **variável independente** e que y é a **variável dependente**.



A função f transforma $x \in A$ em $y \in B$.

- As funções podem ser definidas por uma **lei matemática**. Por exemplo, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x$. Por essa lei, entendemos que um número real x é transformado, pela função f, no triplo de x.

Observação

Embora seja frequente o uso da letra f para representar função e das letras x e y, respectivamente, para as variáveis independente e dependente, podemos usar outras letras.

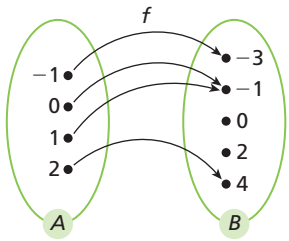
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Exemplos

Vamos verificar se os diagramas a seguir representam funções.

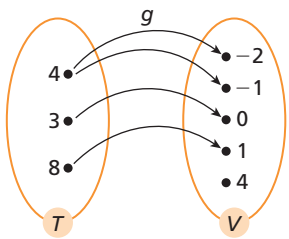
a)



- Cada elemento de *A* está associado a um único elemento de *B*? Sim.

Então, *f* é função de *A* em *B*.

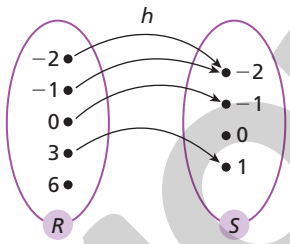
b)



- Cada elemento de *T* está associado a um único elemento de *V*? Não. O elemento 4 pertencente a *T* está associado a mais de um elemento de *V* (aos elementos −2 e −1).

Concluímos, então, que *g* não é função de *T* em *V*.

c)



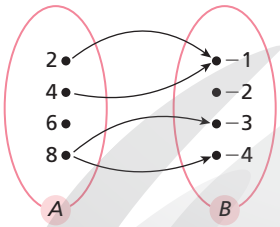
- Cada elemento de *R* está associado a um único elemento de *S*? Não. O elemento 6, pertencente a *R*, não está associado a nenhum elemento de *S*.

Concluímos, então, que *h* não é função de *R* em *S*.

O diagrama não representa uma função de *A* em *B* porque nem todo elemento de *A* tem um correspondente em *B*. Além disso, existe um elemento de *A* com mais de um correspondente em *B*.

Reflita

Após ler os exemplos apresentados, explique por que o diagrama abaixo não representa uma função de *A* em *B*.



Exercícios resolvidos

R1. Em uma pista circular de testes, um automóvel desloca-se com velocidade constante. Com o auxílio de um cronômetro, marcaram-se diferentes intervalos de tempo e, para cada intervalo, verificou-se a distância percorrida. Os dados obtidos – tempo (em hora) e distância percorrida (em quilômetro) – foram registrados na tabela abaixo.

Tempo (h)	0,2	0,4	0,8	1,6	2	x
Distância (km)	10	20	40	80	100	$50x$

a) Calcular a distância percorrida pelo automóvel quando o tempo é igual a 2,8 horas.

b) Calcular o tempo gasto pelo automóvel para percorrer a distância de 330 km.

WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK

O exercício resolvido **R1** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT301** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Com base no exercício, os alunos poderão elaborar hipóteses, previsões e estimativas e verificar o emprego de instrumentos de medição, interpretando modelos explicativos sob uma perspectiva científica. Se julgar pertinente, propor outras atividades desse tipo em conjunto com o professor da área, discutindo a relevância dos modelos e dos instrumentos de medição para observar os fenômenos da realidade.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

c) Observando os valores da tabela, é possível concluir que a distância percorrida por esse automóvel é diretamente proporcional ao tempo gasto para percorrê-la?

▸ **Resolução**

a) Assumindo que a distância percorrida varia em função do tempo e observando os dados da tabela, percebemos que, para determinar a distância y (variável dependente) em função de certo tempo x (variável independente), devemos multiplicar por 50 o número real positivo que representa x. Temos, então, a seguinte lei: $y = 50x$ ou $f(x) = 50x$

Queremos calcular $f(x)$ para $x = 2{,}8$, o que indicamos por $f(2{,}8)$.

Substituindo o valor de x na lei da função, obtemos:

$f(2{,}8) = 50 \cdot 2{,}8 \Rightarrow f(2{,}8) = 140$

Portanto, em 2,8 horas, o automóvel percorreu 140 quilômetros.

b) Agora, queremos calcular x para $f(x) = 330$.

Substituindo o valor de $f(x)$ na lei da função, obtemos:

$$330 = 50x \Rightarrow x = \frac{330}{50} \Rightarrow x = 6{,}6$$

Logo, para percorrer 330 quilômetros, o automóvel gastou 6,6 horas ou 6 horas e 36 minutos.

c) Comparando a variação dos valores do tempo e das distâncias, percebemos que, quando o tempo duplica, a distância também duplica; quando o tempo quadruplica, ocorre o mesmo com a distância; quando o tempo quintuplica, a distância também é multiplicada por cinco, e assim por diante. Isso mostra que a razão entre a distância e o tempo é constante; portanto, essas grandezas são diretamente proporcionais.

R2. Em certa cidade, a tarifa de táxi é calculada da seguinte forma: R$ 5,00 a bandeirada mais R$ 2,50 por quilômetro rodado, como mostra a tabela ao lado.

Quilômetro rodado	Valor a ser pago (R$)
$0 \leqslant x < 1$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 0 = 5{,}00$
$1 \leqslant x < 2$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 1 = 7{,}50$
$2 \leqslant x < 3$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 2 = 10{,}00$
$3 \leqslant x < 4$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot 3 = 12{,}50$
$n \leqslant x < n + 1$	$5{,}00 + 2{,}50 \cdot n = y$

Sendo $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

a) Pode-se estabelecer uma função entre essas grandezas? Em caso positivo, indique quais seriam as variáveis (dependente e independente) dessa função.

b) Calcule a tarifa de táxi para uma viagem de 6,5 km.

c) Rita gastou R$ 42,50 em uma viagem de táxi nessa cidade. Calcule o número inteiro de quilômetros dessa viagem.

▸ **Resolução**

a) Sim, pode-se estabelecer uma função: a cada número real positivo que representa o total de quilômetros de uma viagem (variável independente, a qual chamaremos de x) associa-se um único valor de tarifa (variável dependente, a qual chamaremos de y).

b) Como 6,5 está entre 6 e 7, para calcular a tarifa quando $x = 6{,}5$, devemos substituir n por 6 em $y = 5{,}00 + 2{,}50n$.

Portanto, a tarifa é R$ 20,00.

c) Agora, queremos calcular n, com $n \in \mathbb{N}$, para $y = 42{,}50$.

Substituindo o valor de y em $y = 5{,}00 + 2{,}50n$, obtemos:

$$42{,}50 = 5 + 2{,}5 \cdot n \Rightarrow n = \frac{42{,}50 - 5}{2{,}50} \Rightarrow n = 15$$

Logo, Rita fez uma viagem de 15 quilômetros.

Observação

Consideramos que o taxímetro muda a cada quilômetro completo. Portanto, y varia "aos saltos": R$ 5,00 antes de completar o 1º quilômetro; R$ 7,50 antes de completar o 2º quilômetro; R$ 10,00 antes do 3º, e assim por diante. Dessa maneira, quando x percorre cada intervalo real $[n, n + 1[$, em que n é um número natural, o valor de y é constante e "salta" para R$ 2,50 a mais quando $x = n + 1$.

$f(8{,}1) = 5 + 2{,}50 \cdot 8 = 25{,}00$
$f(8{,}9) = 5 + 2{,}50 \cdot 8 = 25{,}00$
Logo, as viagens têm tarifas iguais, pois $f(8{,}1) = f(8{,}9)$.
Os alunos podem observar que a função possui valores constantes no intervalo $[n, n + 1[$.

Reflita

Qual das viagens de táxi, na cidade referida no exercício resolvido **R2**, tem tarifa maior: uma viagem de 8,1 quilômetros ou uma de 8,9 quilômetros?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2. a) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.
b) Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 3) que tem dois correspondentes em B.
c) Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 5) que não tem correspondente em B.
d) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Para calcular quanto seus usuários devem pagar pelo consumo de água, uma companhia de saneamento básico considera o número inteiro de metros cúbicos de água consumidos e aplica as seguintes regras indicadas no quadro abaixo:

Faixa de consumo (m^3)	Valor (R$)
Até 10	15,10 (valor fixo)
De 11 a 20	Acrescentar 2,35 por m^3
De 21 a 50	Acrescentar 5,50 por m^3
Acima de 50	Acrescentar 6,10 por m^3

Para cobrar também as despesas referentes ao esgoto, o preço total da conta é o dobro do valor referente ao consumo de água.

Por exemplo, o cálculo do consumo de 22 m^3 é feito da seguinte maneira:

$$22\ m^3 = \underbrace{10\ m^3}_{\text{faixa de até } 10\ m^3} + \underbrace{10\ m^3}_{\text{faixa de } 11\ m^3 \text{ a } 20\ m^3} + \underbrace{2\ m^3}_{\text{faixa de } 21\ m^3 \text{ a } 50\ m^3}$$

Então, o consumo é dado por:

$$2 \cdot (\underbrace{R\$\ 15{,}10}_{\text{faixa de até } 10\ m^3} + 10 \cdot \underbrace{R\$\ 2{,}35}_{\text{faixa de } 11\ m^3 \text{ a } 20\ m^3} + 2 \cdot \underbrace{R\$\ 5{,}50}_{\text{faixa de } 21\ m^3 \text{ a } 50\ m^3}) = R\$\ 99{,}20$$

Considerando essas informações, responda às questões.

a) Quem consome 9 m^3 de água em um mês paga mais do que quem consome 7 m^3 mensalmente? não

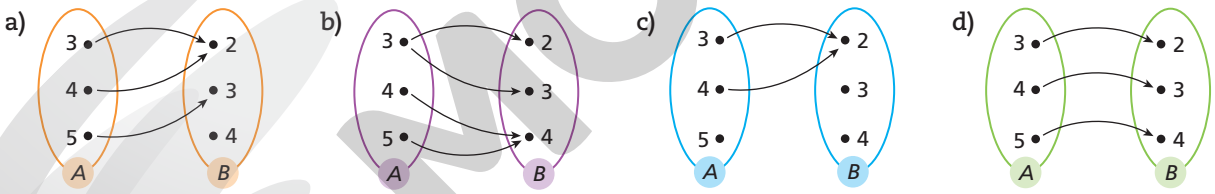
b) Qual é o valor da conta para um consumo mensal de 19 m^3? E de 27 m^3? R$ 72,50; R$ 154,20

c) No mês em que houve um vazamento de água na casa de Flávia, ela recebeu uma conta de R$ 748,80. Qual foi o consumo de água na casa dela? 78 m^3

Explore respostas pessoais

a) Pesquise e descreva como é cobrado o consumo de água e esgoto em sua residência.
b) Qual foi a média do consumo em metro cúbico da sua residência nos últimos 3 meses?
c) Em relação ao consumo apresentado pelos seus colegas e considerando o número de pessoas que moram em sua residência, você acredita que o consumo da sua casa está adequado ou pode diminuir?
d) Quais ações podem ser tomadas a fim de diminuir o consumo de água em sua residência?

2. Verifique quais dos diagramas representam função de $A = \{3, 4, 5\}$ em $B = \{2, 3, 4\}$. Justifique suas respostas.



3. Considere $A = \{-5, -3, -1, 1, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 9, 25, 36, 81\}$ e a lei $y = x^2$ que associa x de A com y de B.

a) Represente essa situação por meio de um diagrama. Ver resolução no Guia do professor.

b) Esse diagrama representa uma função? Justifique. Não, pois existe um elemento em A (o elemento 4) que não tem correspondente em B.

4. Um fabricante de parafusos verificou que o preço de custo p (em real) de cada parafuso dependia da medida x (em milímetro) do diâmetro da base de cada um e podia ser calculado pela lei matemática $p(x) = 0{,}01x + 0{,}06$.

a) Qual é a variável independente nessa situação? E a dependente? medida do diâmetro da base; preço de custo

b) Qual é o preço de custo de 1 parafuso com base medindo 3 milímetros de diâmetro? R$ 0,09

c) Quantos milímetros tem a medida do diâmetro da base de um parafuso cujo preço de custo é R$ 0,11? 5 mm

d) Qual é o custo de 500 parafusos com base medindo 3 milímetros de diâmetro? R$ 45,00

e) O fabricante vendeu 100 parafusos com base medindo 4 milímetros de diâmetro por R$ 20,00. Em relação ao preço de custo, qual foi o percentual de lucro nessa venda? 100%

f) De acordo com a lei matemática determinada, quantos parafusos, com base medindo 3 mm de diâmetros, foram vendidos no ano de 2019? Não há dados suficientes para que seja dada uma resposta a este item.

O exercício **1** e a atividade proposta no boxe **Explore** abordam os temas contemporâneos da área relacionada ao meio ambiente: **educação ambiental** e **educação para o consumo**. Caso as contas de consumo de água e esgoto não apresentem um quadro, como no exercício, auxiliar os alunos nesse sentido, para que possam apresentar e debater ideais a respeito das regras de consumo para a turma.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

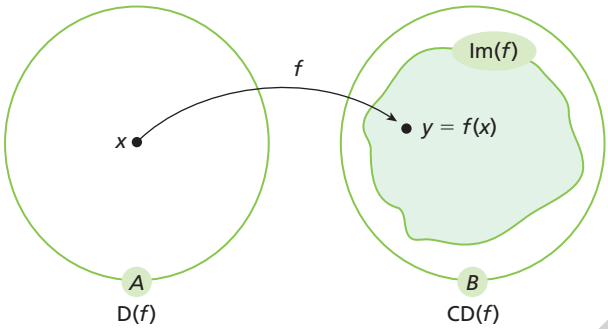
MODERNA

1.3 Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Dada uma função $f: A \to B$, temos:

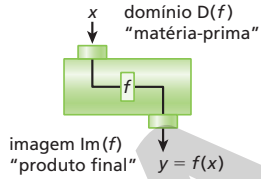
- o conjunto A é chamado de **domínio** da função f, que indicamos por D ou D(f) (lemos: "domínio de f"), e o conjunto B é chamado de **contradomínio** da função f, que indicamos por CD ou CD(f) (lemos: "contradomínio de f");
- para cada $x \in$ D(f), o elemento $f(x) \in B$ é chamado de **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens de x é chamado de **conjunto imagem** da função, que indicamos por Im ou Im(f) (lemos: "conjunto imagem de f").

Para definir uma função f, é preciso conhecer o domínio D(f), o contradomínio CD(f) e a maneira pela qual cada x do domínio se corresponde com um único $y = f(x)$ do contradomínio. Cada função é dada por uma lei.



Observação

Verifique a seguir a ilustração de uma máquina representando a ideia de função. A máquina tem uma entrada para a matéria-prima (conjunto domínio) e tem uma saída para o produto final (conjunto imagem).



Reflita

Para toda função $f: A \to B$, tem-se Im(f) $= B$?

Não, pois em uma função podem existir elementos de B sem correspondentes em A.

Domínio de uma função

Quando não explícitos o domínio e o contradomínio de uma função, admitimos que o contradomínio é o conjunto dos números reais e que o domínio é também o conjunto dos números reais, excluídos os valores de x para os quais não vale a lei que associa x a y. Funções cujo domínio está contido nos números reais e cujo contradomínio é o dos números reais são chamadas de **funções reais de variável real**.

Exemplos

a) Se a lei de uma função g é $g(x) = \frac{1}{x}$, e o domínio e o contradomínio não foram explicitados, subentende-se que CD(g) $= \mathbb{R}$ e que D(g) $= \mathbb{R} - \{0\}$, já que, para $x = 0$, $g(x)$ seria uma fração com denominador nulo, o que não faz sentido.

b) Na função f dada por $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$, temos CD($f$) $= \mathbb{R}$ e D(f) $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1$ e $x \neq 2\}$, pois, se $x < -1$, $\sqrt{x+1}$ não é um número real, e se $x = 2$, o denominador da fração é nulo, o que não faz sentido.

1.4 Zero de uma função

Todo número real x que pertence ao domínio da função f e valida a equação $f(x) = 0$ é denominado **zero da função f**.

Exemplos

a) O zero da função f, tal que $f(x) = 2x - 4$, é 2, pois: $f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$

b) A função m, dada por $m(x) = \frac{1}{x}$, não tem zero, pois não há valor de x que anule $m(x)$.

c) O zero da função g, tal que $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+5}}$, é 0, pois: $g(0) = \frac{0}{\sqrt{0+5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$

- $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$
- $4^x - 2 = 0 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2^1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
- $f(x) = 0 \Rightarrow (2^x - 4) \cdot (4^x - 2) = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2^x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
  ou
  $4^x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, os zeros da função f são 2 e $\frac{1}{2}$.

É interessante notar a inversão na abordagem do conceito de zero de uma função que a atividade proposta no boxe **Reflita** propicia. Parte-se de duas equações em que se pede a obtenção das respectivas raízes e, em seguida, solicita-se o zero de uma função cuja lei de formação é dada pelo produto das expressões usadas nessas equações.

Reflita

- Para que valor de x se tem $2^x = 4$?
- Para que valor de x se tem $4^x - 2 = 0$?
- Quais são os zeros da função $f(x) = (2^x - 4) \cdot (4^x - 2)$?

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observações

- Uma função pode ter um ou mais zeros ou nenhum zero.
- Todo número natural par é múltiplo de 2, pois todo número par é divisível por 2.

Exercícios resolvidos

R3. Dar o conjunto imagem de $f: D(f) \to \mathbb{R}$ sabendo que $f(x) = 2x$ e considerando:

a) $D(f) = \{-2, 0, 7\}$

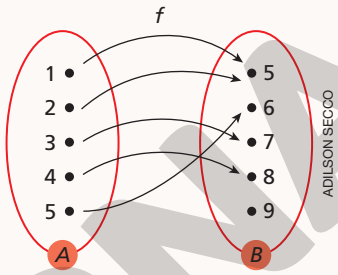
b) $D(f) = \mathbb{N}$

▸ Resolução

a) Como $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$, $f(0) = 2 \cdot 0 = 0$ e $f(7) = 2 \cdot 7 = 14$, $Im(f) = \{-4, 0, 14\}$.

b) $Im(f)$ é o conjunto dos números naturais pares.

R4. Considerar a função f dada pelo diagrama ao lado, em que $x \in A$ e $y \in B$.



Obter:

a) $D(f)$;

b) $CD(f)$;

c) $Im(f)$;

d) o zero da função f;

e) y, quando $x = 2$;

f) $f(x)$, quando $x = 3$;

g) x, quando $y = 8$;

h) x, quando $f(x) = 5$.

▸ Resolução

a) $D(f) = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $CD(f) = B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

c) $Im(f) = \{5, 6, 7, 8\}$

d) A função f não tem zero.

e) $x = 2 \Rightarrow y = 5$

f) $x = 3 \Rightarrow f(x) = 7$

g) $y = 8 \Rightarrow x = 4$

h) $f(x) = 5 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 2$

R5. Determinar os zeros das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

a) $g(x) = x + 9$

b) $h(x) = x^2 - 1$

▸ Resolução

a) Devemos determinar os valores de x para os quais $g(x) = 0$.

$g(x) = 0 \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

b) Devemos determinar os valores de x para os quais $h(x) = 0$.

$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

R6. Dada a função $v(x) = x^2 - x$, determinar $v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right)$.

▸ Resolução

$v(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$v(5) + v\left(\frac{1}{2}\right) = 20 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{80}{4} - \frac{1}{4} = \frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$$

Resolvendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{r|l} 108 & 5 \\ \hline 08 & 21 \\ 3 & \end{array}$$

Portanto, o número misto correspondente a $\frac{108}{5}$ é $21\frac{3}{5}$.

Reflita

Números mistos são aqueles formados por uma parte inteira e por uma parte fracionária. Por exemplo, $\frac{79}{4} = 19\frac{3}{4}$, pois:

$$\begin{array}{r|l} 79 & 4 \\ \hline 39 & 19 \\ 3 & \end{array}$$

Encontre o número misto correspondente a $\frac{108}{5}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5. a) $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$
b) Não existe x tal que $f(x) = 4$.
c) $f(5) = 6$

9. a) $Im(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$ **b)** $Im(w) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\right\}$

Exercícios propostos

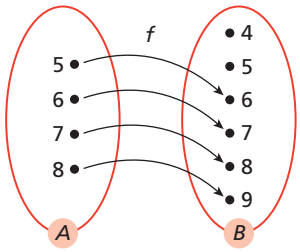
Registre as respostas em seu caderno.

5. Analise o diagrama abaixo e obtenha o que se pede.

a) O domínio, o contradomínio e a imagem da função representada.

b) O valor de x para $f(x) = 4$.

c) O valor de $f(x)$ para $x = 5$.



ADILSON SECCO

6. Expresse a área s de um retângulo cujo comprimento é o dobro da largura ℓ. Escreva o domínio e o conjunto imagem da função definida por essa lei. $s(\ell) = 2\ell^2$; $D(s) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$

7. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 4x + 1$. Determine:

a) $f(4)$ 17

b) $f(-2)$ -7

c) $f(-1) + f(0) - f(11)$ -47

d) $2f(3) - f(-3)$ 37

8. Obtenha o domínio de cada função.

a) $f(x) = 9x + 3$ $D(f) = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3 + 8x}{x + 3}$ $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$

c) $i(x) = \sqrt{x - 8}$ $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\}$

d) $j(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 3}$ $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ e } x \neq 3\}$

9. Escreva o conjunto imagem de cada função.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, sendo $D(f) = \{1, 4, 9, 16, 25\}$.

b) $w(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, sendo $D(w) = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$.

10. Determine, se existirem, os zeros reais das funções.

a) $h(x) = 4 - x$ 4

b) $s(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$ 1

c) $m(x) = x^2 + 1$ Não há zero real.

d) $p(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ Não há zero real.

11. Que valores do domínio da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 6$, têm imagem igual a -6? 0 ou 2

12. Sabe-se que f é uma função definida por $f(x) = ax - 4$, com a real e $f(3) = 11$. Calcule $f(-5)$. -29

13. Considere a função g, definida por $g(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $g(2) = 8$ e $g(-2) = -4$. Determine:

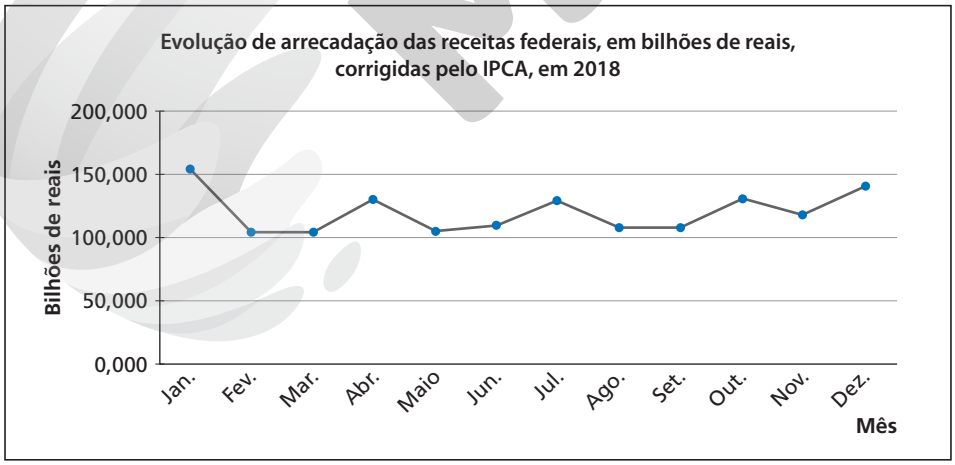
a) a e b; $a = 3$; $b = 2$

b) o zero da função. $-\frac{2}{3}$

2 Gráfico de uma função

É comum encontrarmos gráficos em revistas, jornais (impressos ou *on-line*), boletins governamentais e em outras fontes de informação. A representação gráfica auxilia na observação, na organização e na análise da variação de duas grandezas.

No exemplo a seguir, tem-se um tipo de gráfico que é constituído apenas pelos pontos destacados em azul. Traçamos a linha de segmentos que unem esses pontos para facilitar a leitura da variação dos valores da função.



NELSON MATSUDA

Dados obtidos em: <http://receita.economia.gov.br/dados/receitadata/arrecadacao/relatorios-do-resultado-da-arrecadacao/arrecadacao-2018/dezembro2018/apresentacao-arrecadacao-dez-2018.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.

Observação

O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é o índice oficial do governo federal para a medição das metas inflacionárias.

Observando o gráfico, podemos concluir que a arrecadação cresceu de fevereiro a abril, de maio a julho, de agosto a outubro e de novembro a dezembro.

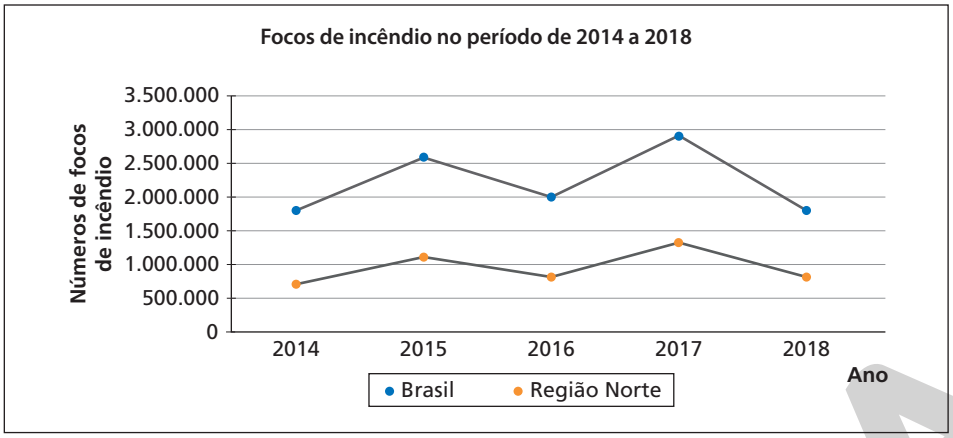
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

UESLEI MARCELINO/REUTERS/FOTOARENA

Incêndio florestal no Parque Nacional de Brasília, setembro de 2017.

Agora, vamos analisar outro exemplo. Observe este gráfico.



NELSON MATSUDA

Dados obtidos em: <http://queimadas.dgi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas/>. Acesso em: 15 jul. 2020.

Entre outras informações, esse gráfico indica que:

- o número de focos de incêndio no Brasil e na região Norte foi maior em 2017, com cerca de 2.900.000 e 1.300.000, respectivamente;
- 2018 foi o ano em que o número de focos de incêndio na região Norte mais se aproximou do número de focos ocorridos em todo o Brasil. Nesse ano, as ocorrências na região Norte chegaram a cerca de 45% do total.

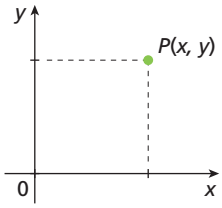
Explore

Reúna-se em grupos de quatro alunos e façam uma pesquisa sobre a ocorrência de queimadas no Brasil. Verifiquem em que regiões sua incidência é maior, pesquisem as causas, os danos decorrentes e os possíveis meios de evitá-las. Apresentem os resultados com gráficos, imagens, mapas etc. e exponham as informações para a turma.

O exemplo analisado no tópico "Gráfico de uma função" sobre o número de focos de incêndio e a atividade proposta no boxe **Explore** tratam do tema contemporâneo **educação ambiental**. Além disso, favorecem um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, pois permite articulação com as competências específicas **1** e **3** dessa área. Se julgar oportuno, propor um debate em conjunto com o professor da área a respeito dos processos políticos, das motivações de natureza econômica e dos impactos socioambientais que algumas práticas podem gerar. O desenvolvimento da competência geral **7** e das competências específicas **2** e **3** de Matemática e suas Tecnologias também é favorecido, pois os alunos poderão propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis com base na análise de problemas voltados à sustentabilidade, além de utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados, de modo a construir uma argumentação consistente.

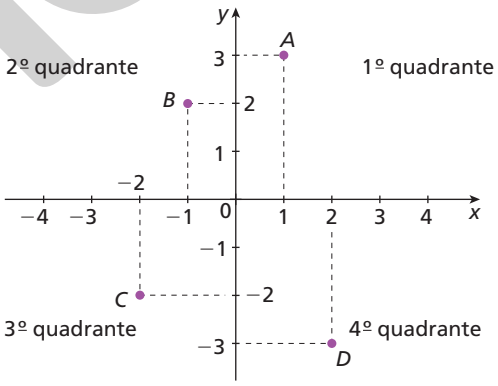
2.1 Plano cartesiano

Plano cartesiano é o plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais x (**eixo das abscissas**) e y (**eixo das ordenadas**), que o dividem em quatro regiões chamadas de **quadrantes**.



Um ponto P, representado no plano cartesiano, tem uma referência horizontal (x) e uma referência vertical (y), que correspondem às projeções ortogonais de P em cada eixo e que, juntas, definem o **par ordenado** (x, y). Dizemos que x e y são **coordenadas** do ponto $P(x, y)$.

Veja o plano cartesiano abaixo.



Nele, observamos que:

- $A(1, 3)$ tem abscissa 1, ordenada 3 e está no 1º quadrante;
- $B(-1, 2)$ tem abscissa -1, ordenada 2 e está no 2º quadrante;
- $C(-2, -2)$ tem abscissa -2, ordenada -2 e está no 3º quadrante;
- $D(2, -3)$ tem abscissa 2, ordenada -3 e está no 4º quadrante;

Note que:

- cada par ordenado corresponde a um único ponto no plano cartesiano;
- cada ponto do plano cartesiano corresponde a um único par ordenado;

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

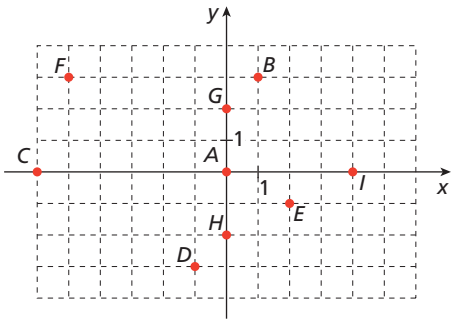
- todo ponto $P(x, y)$ do 1º quadrante tem $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$;
- todo ponto $P(x, y)$ do 2º quadrante tem $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$;
- todo ponto $P(x, y)$ do 3º quadrante tem $x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0$;
- todo ponto $P(x, y)$ do 4º quadrante tem $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

14. Construa um plano cartesiano em uma folha quadriculada e marque os pontos indicados: $E(-1, 2)$; $F(-2, 1)$; $G(-2, 3)$; $H(-3, 0)$; $I(-3, 4)$; $J(-4, 1)$; $K(-4, 3)$; $L(-5, 2)$. Ver resolução no Guia do professor.

15. Indique as coordenadas dos pontos que estão representados no plano cartesiano abaixo. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$

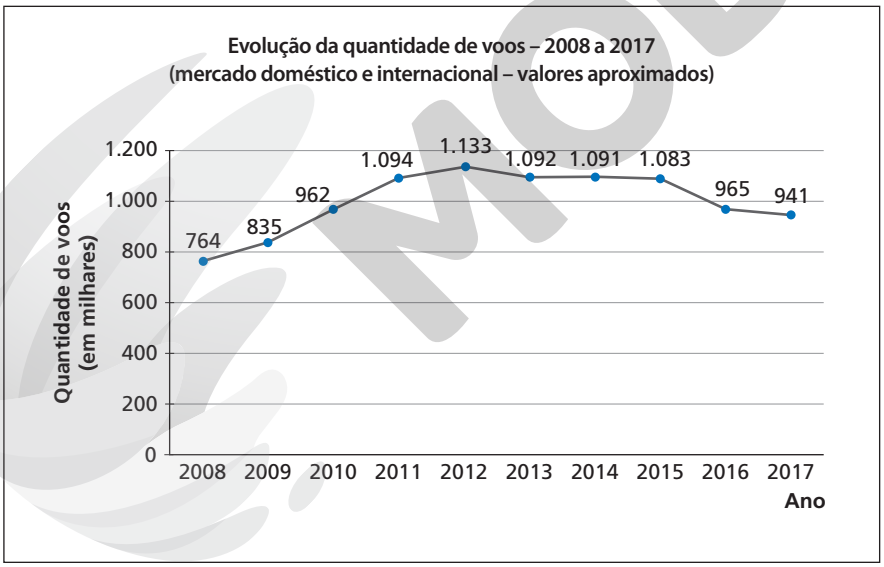


ADILSON SECCO

16. O ponto $(3, 5y + 10)$ pertence ao eixo das abscissas. Determine y. -2

17. O ponto $(2x, y + 3)$ está no 2º quadrante. Indique os valores que x e y podem assumir. $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$

18. Analise o gráfico a seguir, que mostra a evolução da quantidade de voos no período de 2008 a 2017.



NELSON MATSUDA

Dados obtidos em: <https://www.anac.gov.br/assuntos/dados-e-estatisticas/anuario/anuario2017.zip>. Acesso em: 16 jul. 2020.

a) Nos anos considerados, identifique os períodos em que a quantidade de voos aumentou. de 2008 a 2012

b) Em que período a quantidade de voos cresceu mais rapidamente? de 2010 a 2011

Reflita

O ponto $R(1, -2)$ tem localização diferente do ponto $S(-2, 1)$? Por quê?

Sim, porque o ponto $R(1, -2)$ tem abscissa 1, ordenada -2 e está localizado no 4º quadrante; o ponto $S(-2, 1)$ tem abscissa -2, ordenada 1 e está localizado no 2º quadrante.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esse tópico favorece o desenvolvimento das competências específicas **4** e **5**, bem como das habilidades **EM13MAT401** e **EM13MAT501** da BNCC, pois trabalha a conversão de representação algébrica de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano.

2.2 Construção do gráfico de uma função

Ao construir o gráfico de uma função, usamos o sistema de coordenadas cartesianas. O gráfico da função fica determinado por todos os pontos do plano cartesiano representados pelos pares ordenados $(x, f(x))$ que tenham x pertencente ao domínio de f.

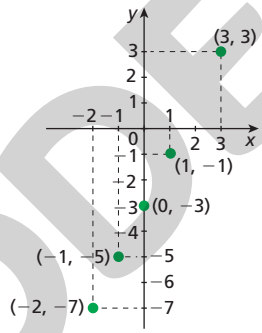
Como exemplo, vamos construir o gráfico da função $f: A \to B$, dada pela lei $f(x) = 2x - 3$, em três situações.

1ª situação: $A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ e $B = \{-11, -7, -5, -3, -1, 3, 7, 9, 11\}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico, calculamos $y = f(x)$ para cada x do domínio A, substituindo o valor de x na lei da função. Observe na tabela a seguir.

x	$y = f(x) = 2x - 3$	(x, y)
-2	$y = f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$	$(-2, -7)$
-1	$y = f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$y = f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$y = f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$	$(1, -1)$
3	$y = f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$	$(3, 3)$

Em seguida, marcamos os pontos no plano cartesiano.



Os **pontos** assinalados constituem o gráfico da função f.

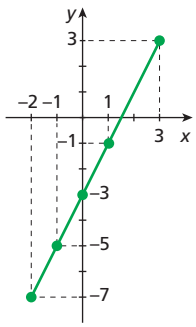
Reflita

O conjunto imagem da função f na 1ª situação é igual a seu contradomínio?

$CD(f) = B = \{-11, -7, -5, -3, -1, 3, 7, 9, 11\}$
$Im(f) = \{-7, -5, -3, -1, 3\}$
Logo, $Im(f) \neq CD(f)$.

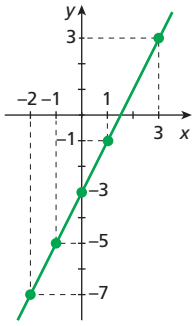
2ª situação: $A = [-2, 3]$ e $B = \mathbb{R}$

Para determinar os pontos (x, y) do gráfico da função f, podemos usar os mesmos valores dados a x na 1ª situação, obtendo os mesmos valores de y. Além desses pontos, atribuindo a x valores do conjunto $[-2, 3]$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos do **segmento** que é o gráfico da função f.



3ª situação: $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$

Nesse caso também, com os valores dados a x na 1ª situação, obtemos os mesmos pontos (x, y). Além desses pontos, atribuindo a x valores de $\mathbb{R}$, podemos obter quaisquer dos infinitos outros pontos da **reta** que é o gráfico da função f descrita nessa situação.



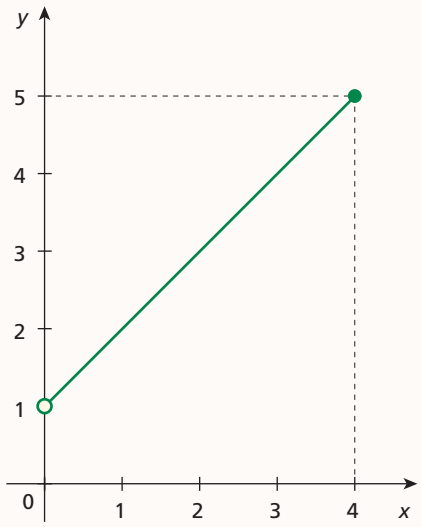
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R7. O gráfico abaixo representa a função f, dada por $f(x) = x + 1$, com $0 < x \leqslant 4$. Determinar o domínio e a imagem de f.



Observação

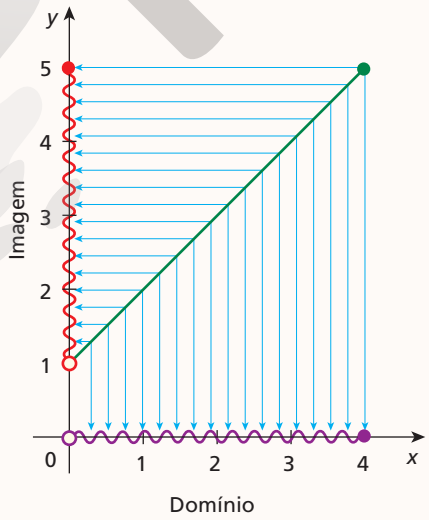
Note que:
- sendo $0 < x$, o ponto de abscissa zero não pertence ao gráfico (ponto "vazio");
- sendo $x \leqslant 4$, o ponto de abscissa 4 pertence ao gráfico (ponto "cheio").

▸ Resolução

O domínio de f é o conjunto dos números reais x que são abscissas dos pontos do gráfico da função, e o conjunto imagem de f é o conjunto dos números $f(x)$ para os quais $x \in D(f)$.

No plano cartesiano, obtemos $D(f)$ e $Im(f)$ por meio das projeções ortogonais do gráfico de f sobre os eixos x e y, respectivamente.

O domínio de f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 4\}$, e o conjunto imagem de f é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 < y \leqslant 5\}$.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

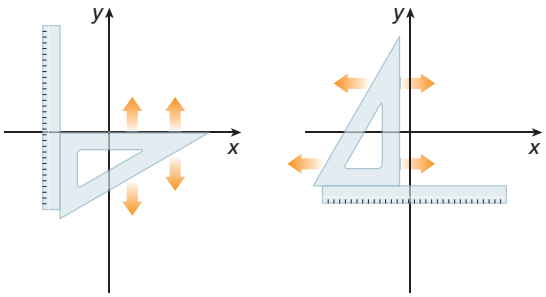
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

19. Nesta atividade, que deve ser realizada com um colega, não faça nenhum traçado: apenas posicione um esquadro em um dos eixos do gráfico, localizado no final do exercício, e deslize-o ao lado de uma régua fixada, conforme as ilustrações abaixo.



Considere o gráfico apresentado no final do exercício, que representa uma função de A em B, sendo $A = [-2, 4]$ e $B = \mathbb{R}$, para resolver as questões.

a) Estime os valores de:

- $f(3)$ 1
- $f(-2)$ −1
- $f(4)$ 3
- $f(2)$ 5

b) Estime os valores de x tal que:

- $f(x) = 1$ 0; 3
- $f(x) = 0$ −0,5
- $f(x) = 3$ 0,9; 2,5; 4
- $f(x) = 4$ 1,3; 2,4

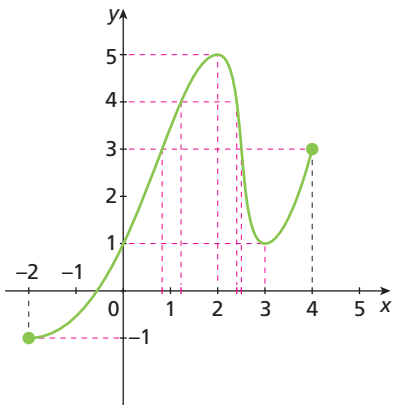
c) Estime $\text{Im}(f)$. $\text{Im}(f) = [-1, 5]$

d) Imagine todas as retas perpendiculares ao eixo y. Dê o número de pontos em que o gráfico de f fica interceptado por uma reta desse grupo e que passa pelo ponto:

- $(0, 6)$ nenhum
- $(0, 2)$ 3
- $(0, 4)$ 2
- $(0, 0)$ 1

e) Imagine todas as retas perpendiculares ao eixo x e que passem por pontos de abscissas pertencentes ao domínio A. Agora, responda:

- Alguma dessas retas intersecta o gráfico de f em mais de um ponto? não
- Alguma dessas retas não intersecta o gráfico de f? não



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reconhecimento dos gráficos de uma função

Ao observar um gráfico, é possível verificar se a curva descrita corresponde ou não a uma função. Para isso, é necessário lembrar que um gráfico corresponde a uma função se, para cada elemento do domínio (valores do eixo x), há uma única imagem correspondente no contradomínio (valores do eixo y).

Exemplos

Considerando D = $\mathbb{R}$ e CD = $\mathbb{R}$, vejamos quais dos gráficos abaixo representam uma função.

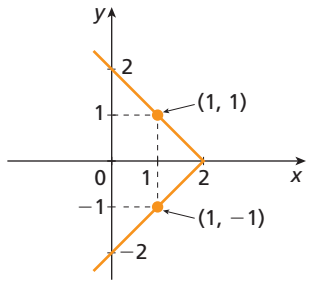


Gráfico 1. Existem elementos do domínio (no eixo x) que têm mais de um correspondente no contradomínio (no eixo y).

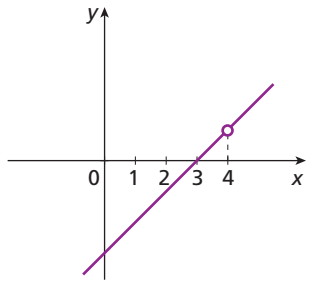


Gráfico 2. Há um elemento do domínio ($x = 4$) que não tem correspondente no contradomínio (no eixo y).

Os gráficos 1 e 2 **não representam** uma função.

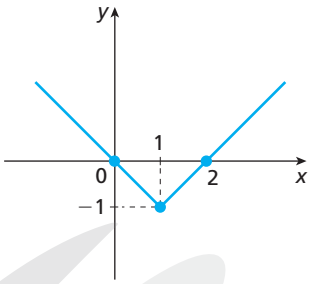


Gráfico 3. Cada elemento do domínio (no eixo x) tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y).

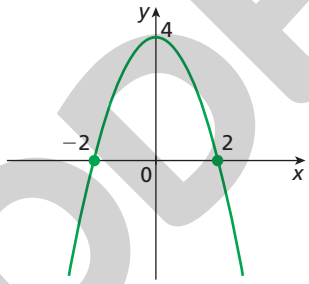


Gráfico 4. Cada elemento do domínio (no eixo x) tem uma única imagem correspondente no contradomínio (no eixo y).

Os gráficos 3 e 4 **representam** uma função.

A representação gráfica de uma função pode facilitar a determinação de seu conjunto imagem e de seus zeros, isto é, das abscissas dos pontos $(x, 0)$ em que o gráfico intersecta o eixo x. Por exemplo:

- no gráfico 3, Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$; os zeros da função são 0 e 2;
- no gráfico 4, Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$; os zeros da função são -2 e 2.

Observação

Quando o gráfico de uma função real for uma linha sem pontos destacados (ponto "cheio" ou ponto "vazio") em alguma de suas extremidades, considerar que essa linha continua indefinidamente. Presumir que a parte visível do gráfico possa indicar ou induzir como o gráfico continua, salvo observação contrária.

Reflita

Para o gráfico 2 representar uma função, que restrição poderia ser feita ao domínio?

Restrição: $x \neq 4$
Portanto: D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

20. Em cada caso, construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico de cada função a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f: A \to B$, em que $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dada por $f(x) = x^2$.

b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x - 1$.

c) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = 7$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

21. Faça o que se pede em cada item.

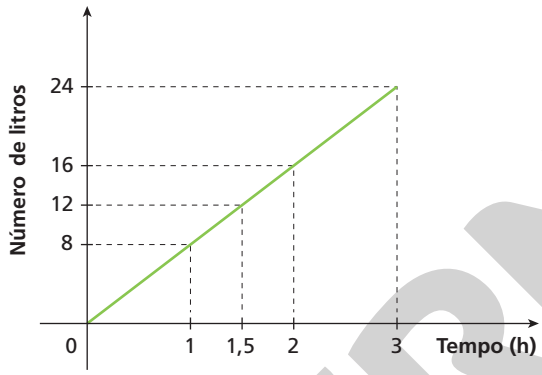
Não, pois $f(8) = 31 \neq -1$.

a) Verifique se o ponto representado pelo par ordenado $(8, -1)$ pertence ao gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x - 9$. Justifique.

b) Determine o valor de a para que o ponto $(-2, 1)$ pertença ao gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + 5$. 2

c) O domínio de uma função f é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$. O ponto representado pelo par ordenado $(3, -1)$ pode pertencer ao gráfico de f? Não, pois $3 \notin D(f)$.

22. Uma máquina produz, por hora, 8 litros de certa substância. O gráfico a seguir apresenta o número de litros que essa máquina produz, em função do tempo, em regime ininterrupto de 3 horas.



a) Quais são as variáveis envolvidas nessa situação?

b) Qual lei relaciona essas variáveis?

c) Qual é o significado do par ordenado (1,5; 12)?

d) Quantos litros da substância a máquina produziria em 6 horas em regime ininterrupto? E em 10 horas?

e) Quantas horas são necessárias para a máquina produzir 4 litros da substância?

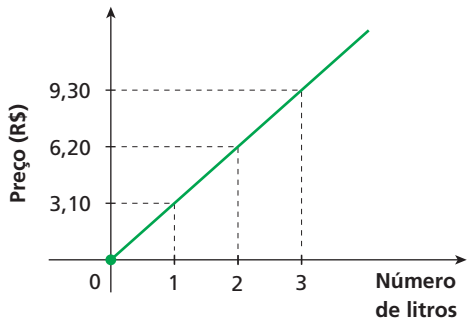
22. a) variável independente: tempo; variável dependente: número de litros
b) $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.
c) Em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.
d) 6 horas → 48 litros; 10 horas → 80 litros
e) 0,5 hora

23. Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - 2$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -x + 2$.

Construa, em uma folha de papel quadriculado, os gráficos de f e de g, tendo como um dos pontos o de abscissa igual ao zero da função. Em seguida, para cada função, determine os valores de x para os quais y é positivo.

Ver resolução no Guia do professor.

24. Em um posto de gasolina, o litro de gasolina comum custa R$ 3,10. Observe o gráfico abaixo e responda às perguntas.



a) Qual lei relaciona o preço (y) com o número de litros (x)? $y = 3{,}10x$

b) Quanto custa 1,5 litro de gasolina? R$ 4,65

c) Pagando um total de R$ 9,30, quantos litros de gasolina comprará um consumidor? E se pagar R$ 31,00? 3 ℓ; 10 ℓ

d) Quantos litros de gasolina, no máximo, poderão ser comprados com R$ 155,00? 50 ℓ

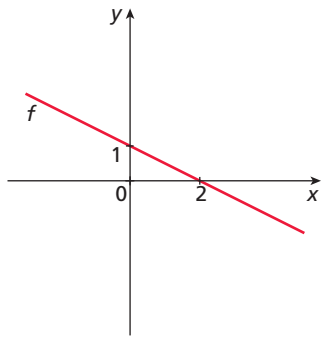
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

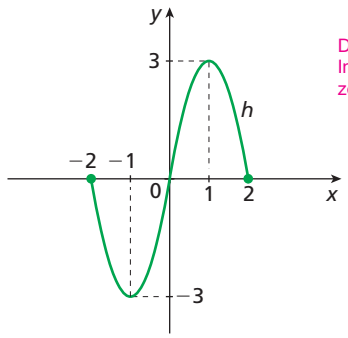
25. Determine o domínio, o conjunto imagem e os zeros das funções correspondentes a cada gráfico.

a)



D(f) = $\mathbb{R}$
Im(f) = $\mathbb{R}$
zero: 2

b)



D(h) = [−2, 2]
Im(h) = [−3, 3]
zeros: −2, 0 e 2

3 Análise de gráficos de funções

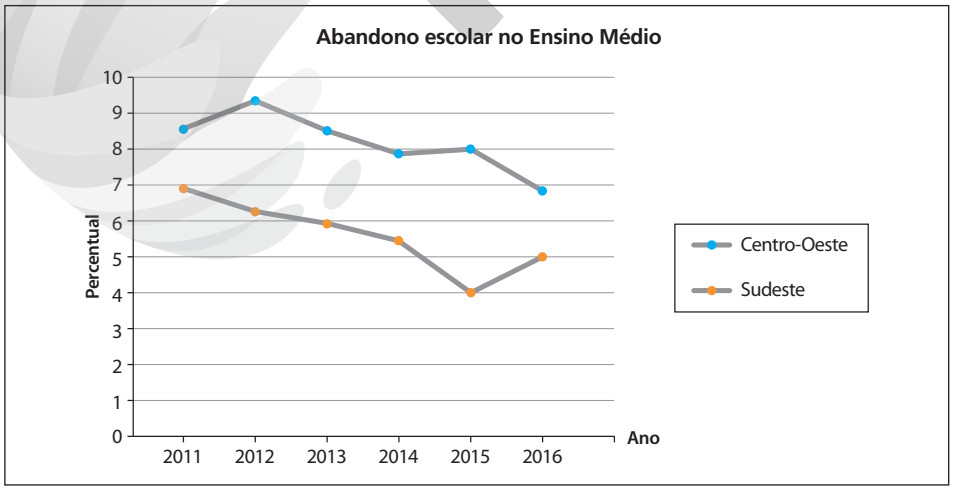
3.1 Intervalos de crescimento e de decrescimento

O gráfico mostra a variação anual do abandono escolar no Ensino Médio, em porcentagem, comparando as regiões Centro-Oeste e Sudeste, no período de 2011 a 2016.

Nesse gráfico, notamos que a variação anual do abandono escolar no Ensino Médio das duas regiões se assemelha apenas no período de 2013 a 2014.

A região Centro-Oeste apresenta dois momentos de crescimento da taxa de abandono escolar, de 2011 a 2012 e de 2014 a 2015, mostrando decrescimento dessa taxa em 2016.

Já a região Sudeste, que apresentou descrescimento por um período maior, de 2011 a 2015, teve um crescimento do percentual de abandono escolar em 2016.



Dados obtidos em: <https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/exportador.aspx?arquivo=M15_GR_PERC.csv&categorias=%22Total%20Abandono%22&localidade=Todas>. Acesso em: 16 jul. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

O objetivo do boxe **Reflita** é antecipar e trabalhar (intuitivamente) os conceitos de valor máximo e valor mínimo de uma função, que serão estudados a seguir. Espera-se que os alunos percebam que as funções dos exemplos **a** e **b** não apresentam valor máximo nem valor mínimo. No entanto, a função do exemplo **c** tem valor máximo igual a 3, que corresponde à ordenada do ponto (0, 3), o mais "alto" do gráfico, mas não apresenta valor mínimo. Já a função do exemplo **d** tem valor mínimo igual a −2, correspondente à ordenada do ponto (0, −2), o mais "baixo" do gráfico, mas não apresenta valor máximo.

Reflita

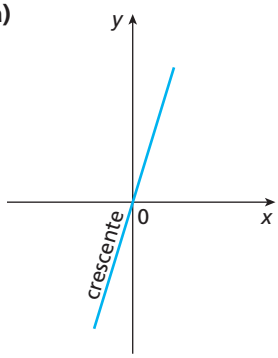
Descubra, se existir, o valor máximo e o valor mínimo que cada função representada nos exemplos a seguir pode assumir.

Assim como verificamos a variação da taxa de abandono escolar no Ensino Médio por meio desse gráfico, podemos verificar o comportamento das variáveis de uma função qualquer mediante a análise da representação gráfica da função, ou seja, analisar o **crescimento** ou o **decrescimento** da função para os valores do domínio.

Exemplos

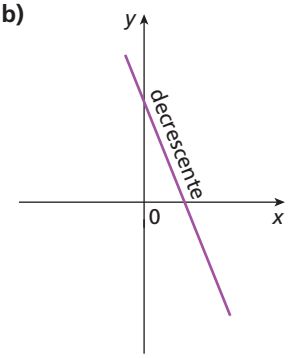
As funções representadas pelos gráficos abaixo têm domínio e contradomínio reais (são funções reais).

a)



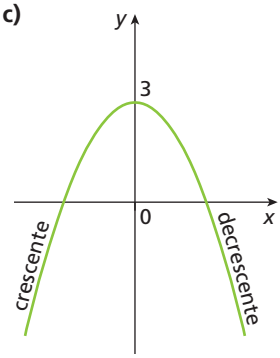
Essa reta representa uma **função crescente**: quanto maior o valor de x, maior o valor de y.

b)



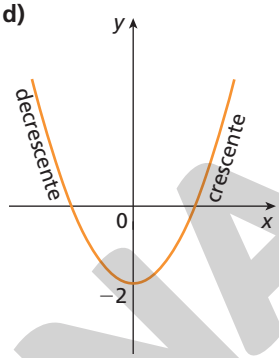
Essa reta representa uma **função decrescente**: quanto maior o valor de x, menor o valor de y.

c)



Nesse caso, a função é **crescente** para $x \leqslant 0$ e **decrescente** para $x \geqslant 0$.

d)



Nesse caso, a função é **decrescente** para $x \leqslant 0$ e **crescente** para $x \geqslant 0$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Podemos concluir que:

- uma função f é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$;
- uma função f é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

- Em $]-3, 1[$ existe e é possível identificar o menor e o maior número inteiro. São eles −2 e 0.
- Em $]-3, 1[$ não existem nem o maior nem o menor número real. Podemos demonstrar a primeira afirmação por absurdo. Vamos supor que exista um número real x tal que $-3 < x < 1$, que seja o maior número de $]-3, 1[$.

  Considere o número real $y = \frac{x+1}{2}$.

  $-3 < x < 1 \Rightarrow -3 + 1 < x + 1 < 1 + 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \frac{-2}{2} < \frac{x+1}{2} < \frac{2}{2} \Rightarrow -1 < y < 1$

  Logo, $y \in]-3, 1[$.

  $x < 1 \Rightarrow x + x < x + 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \frac{2x}{2} < \frac{x+1}{2} \Rightarrow x < y$

  Chegamos a um absurdo em relação à hipótese "x é o maior número de $]-3, 1[$".

  Analogamente, demonstra-se a segunda afirmação.
- Da mesma forma, não podemos identificar o menor número real no intervalo $]-\infty, 1]$.

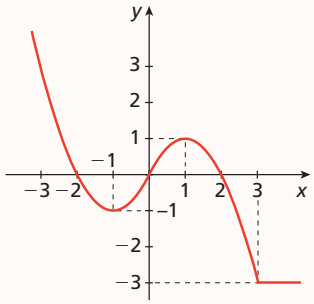
Reflita

Caso existam, é possível identificar:

- o menor e o maior número inteiro do intervalo $]-3, 1[$?
- o menor e o maior número real do intervalo $]-3, 1[$?
- o menor número real de $]-\infty, 1]$?

Exercício resolvido

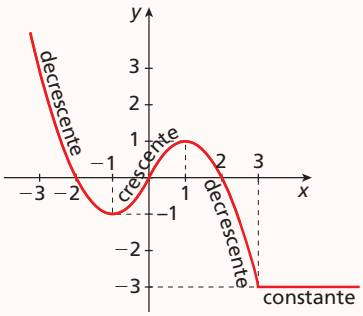
R8. Indicar o(s) intervalo(s) do domínio no(s) qual(is) a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, representada no gráfico, é crescente, decrescente e constante (não é crescente nem decrescente).



Resolução

A função é:

- decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, 3]$, pois, nesses intervalos, quanto maior o valor de x (domínio), menor o valor de y (imagem);
- crescente em $[-1, 1]$, pois, nesse intervalo, quanto maior o valor de x, maior o valor de y;
- constante em $[3, +\infty[$, pois, nesse intervalo, o valor de y não varia.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3.2 Valor máximo e valor mínimo de uma função

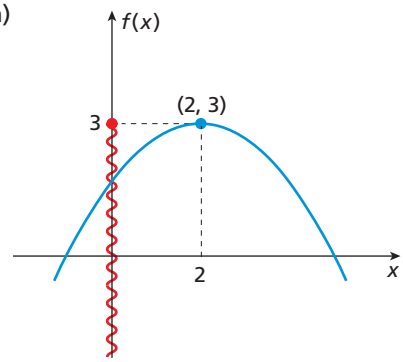
Algumas funções f têm $y_m \in \text{Im}(f)$ tal que não existe $y \in \text{Im}(f)$ maior que y_m. Dizemos, então, que y_m é o **valor máximo** da função.

Da mesma forma, se não existe y menor que y_m, ambos pertencentes ao conjunto imagem da função f, então y_m é o **valor mínimo** da função.

Exemplos

Observe, nos gráficos das funções abaixo, o conjunto imagem.

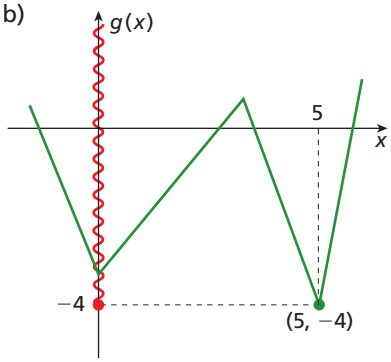
a)



- $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 3\}$;
- f tem um máximo em (2, 3).

Logo, $y_m = 3$ é o valor máximo de f.

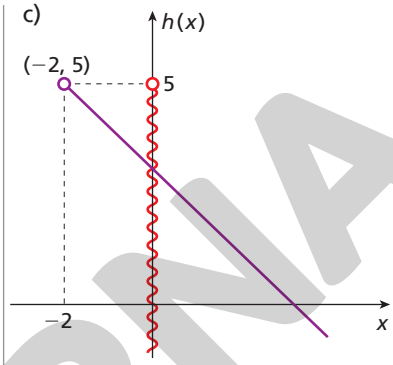
b)



- $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$;
- g tem um mínimo em (5, −4).

Logo, $y_m = -4$ é o valor mínimo de g.

c)

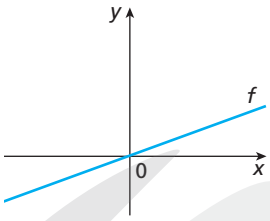


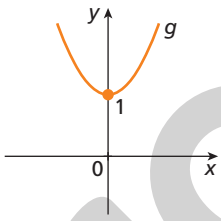
- $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 5\}$;
- h não tem valor máximo nem valor mínimo.

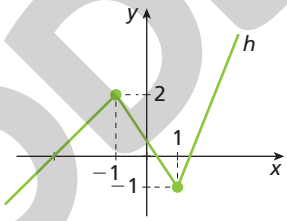
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

26. Observe os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e, em seguida, faça o que se pede.







a) Identifique os intervalos de crescimento e os intervalos de decrescimento de cada função.

b) As funções apresentam um valor máximo ou um valor mínimo? Em caso afirmativo, que valores são esses?

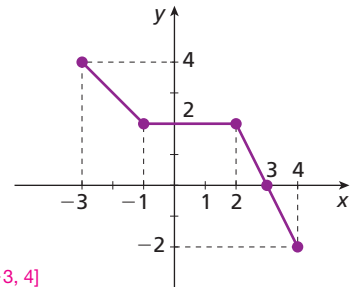
26.
a) f é crescente para $x \in \mathbb{R}$; g é crescente para $x \in [0, +\infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$; h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.
b) Só g tem um valor mínimo, e esse valor é $y = 1$.

27. Construa, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico das funções g e h, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e verifique se são crescentes ou decrescentes em todo o domínio.

a) $g(x) = x + 5$ Ver resolução no Guia do professor.

b) $h(x) = -2x + 1$

28. Observe o gráfico da função f ao lado e, depois, responda às questões.



a) Qual é a imagem de 2 pela função f? 2

b) Para que valor de x a imagem é -2? 4

c) No intervalo $[-1, 2]$, a função assume valores positivos ou negativos?

d) No intervalo $[-1, 2]$, a função é crescente? não

e) Qual é o domínio dessa função? $D(f) = [-3, 4]$

f) Qual é o conjunto imagem dessa função? $\text{Im}(f) = [-2, 4]$

g) Qual é o valor máximo dessa função? 4

h) Qual é o valor mínimo dessa função? -2

28. c) Nesse intervalo, a função assume valores positivos.

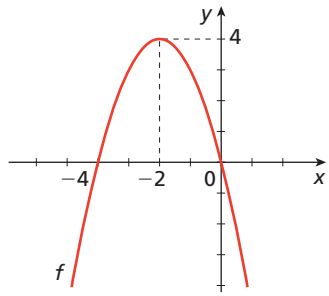
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

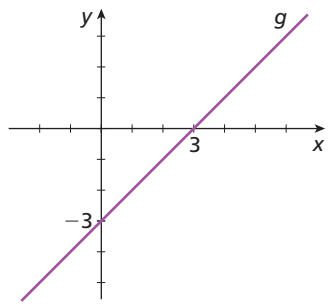
29. Determine o conjunto imagem e o valor máximo ou valor mínimo das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ representadas pelos gráficos abaixo.

a)



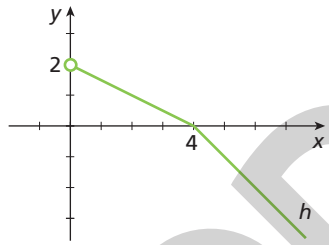
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
4 é o valor máximo de *f*.

b)



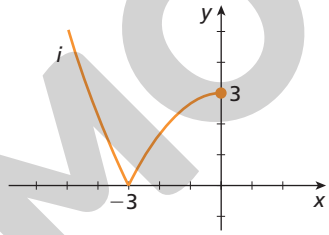
$Im(g) = \mathbb{R}$
g não tem valor máximo nem valor mínimo.

c)



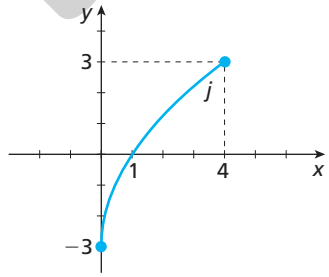
$Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$
h não tem valor máximo nem valor mínimo.

d)



$Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$
0 é o valor mínimo de *i*.

e)



$Im(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$
−3 é o valor mínimo de *j*.
3 é o valor máximo de *j*.

30. Construa o gráfico de uma função que tenha valor mínimo −2.
Ver resolução no Guia do professor.

31. Construa o gráfico de uma função cujo conjunto imagem seja $\left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < y < 2\right\}$. Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3.3 Estudo do sinal de uma função

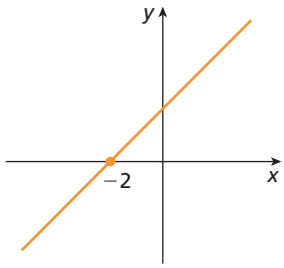
O estudo do sinal de uma função pode ser feito por meio de sua representação gráfica.

No gráfico de uma função, todos os pontos acima do eixo x têm ordenada positiva ($y > 0$) e todos os pontos abaixo do eixo x têm ordenada negativa ($y < 0$). Nos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x, a ordenada é nula ($y = 0$). Portanto, se, em determinado intervalo do domínio de uma função, os pontos do gráfico estão:

- acima do eixo x, dizemos que a função é **positiva** nesse intervalo;
- abaixo do eixo x, dizemos que a função é **negativa** nesse intervalo.

Exemplo

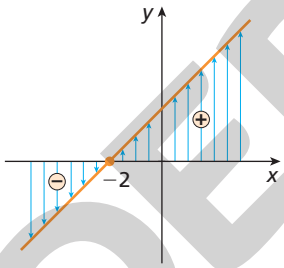
Vamos estudar o sinal da função f cujo gráfico está representado abaixo.



Note que os pontos de abscissa maior que -2 têm ordenada positiva, os pontos de abscissa menor que -2 têm ordenada negativa e o ponto de abscissa -2 tem ordenada zero.

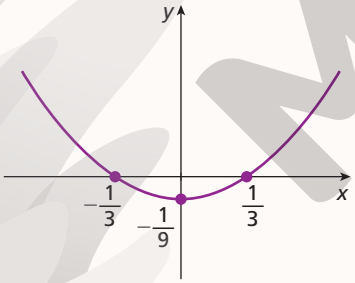
Assim:

- f é positiva para $x > -2$;
- f é negativa para $x < -2$;
- f é nula para $x = -2$.



Exercícios resolvidos

R9. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está representada no gráfico abaixo.



a) Em que intervalos do domínio a função f é positiva?

b) Em que intervalos do domínio a função f é negativa?

c) Para que valores de x a função f é nula?

d) Qual é o valor mínimo de f?

Reflita

É possível uma função ser positiva em todo o seu domínio? Em caso afirmativo, explique como seria o gráfico dessa função.

Sim, é possível. O gráfico não cruzaria o eixo x; todos os seus pontos estariam acima desse eixo.

▸ Resolução

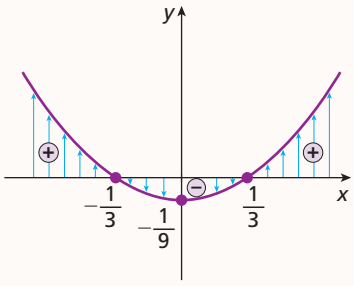
a) A função f é positiva nos intervalos

$$\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\text{ e } \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

b) A função f é negativa no intervalo $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

c) A função f é nula em $x = \frac{1}{3}$ e em $x = -\frac{1}{3}$.

d) O valor mínimo de f é $-\frac{1}{9}$.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

O exercício resolvido **R10** pode favorecer o desenvolvimento da competência geral **2**, articulada com a competência específica 4 e a habilidade **EM13MAT402** da BNCC, pois os alunos são convidados a refletir e a analisar o trabalho com um *software* de construção de gráficos, exercitando a curiosidade intelectual, elaborando e testando hipóteses a respeito dos diferentes registros matemáticos para uma função polinomial do 2º grau.

Observação

Em muitos *softwares*, há algumas maneiras diferentes para escrever as expressões matemáticas, por exemplo:
- sen $x \rightarrow$ sinx
- $\dfrac{x^3 + 3}{x} \rightarrow$ (x^3+3)/x

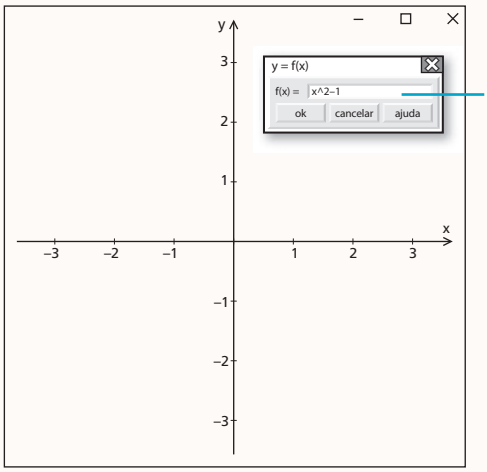
R10. Estudar o sinal das funções:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2^x - 1$

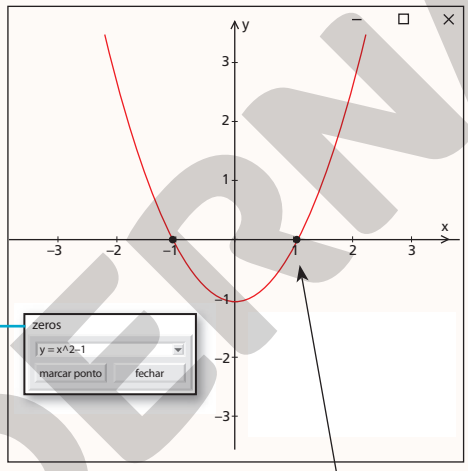
▸ Resolução

Podemos estudar o sinal de uma função a partir de seu gráfico. Vamos construir os gráficos das funções f e g utilizando um *software* de construção de gráficos.

Começaremos pela função dada pela lei $f(x) = x^2 - 1$.

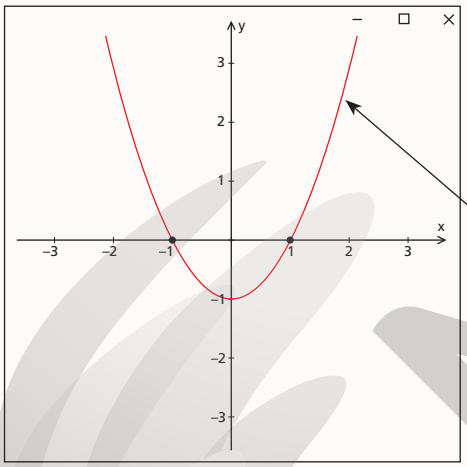


Campo para digitar a lei da função do gráfico a ser construído. Há diferentes maneiras de escrever $x^2 - 1$, por exemplo: x^2−1 ou x*x−1



Selecionando a ferramenta "zeros da função", marcamos os pontos cujas abscissas são os zeros da função.

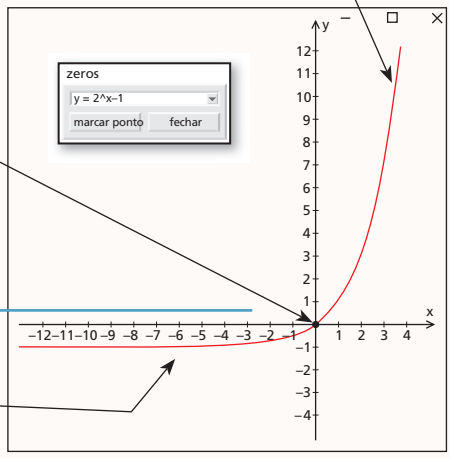
Construído o gráfico da função f, encontramos os zeros da função. A função é nula para $x = -1$ e para $x = 1$.



Então, podemos observar que:
- a função f é positiva nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$;
- a função f é negativa no intervalo $]-1, 1[$.

Agora, vamos contruir o gráfico e estudar o sinal da função dada por $g(x) = 2^x - 1$.

Construímos o gráfico da função g. A função é crescente em todo o seu domínio.



Encontramos o zero da função g. A função é nula para $x = 0$.

Muitas vezes precisamos mudar a escala usada nos eixos ordenados para conseguir observar melhor o gráfico construído.

Então, podemos afirmar que:
- a função g é positiva no intervalo $]0, +\infty[$;
- a função g é negativa no intervalo $]-\infty, 0[$.

Na internet, há diversos *softwares* gratuitos ou livres, como o *Desmos* e o *Mathway*. Se achar conveniente, escolher um deles e realizar essa atividade com os alunos. Vale ressaltar que, dependendo do *software* escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula.

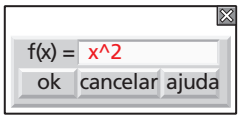
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

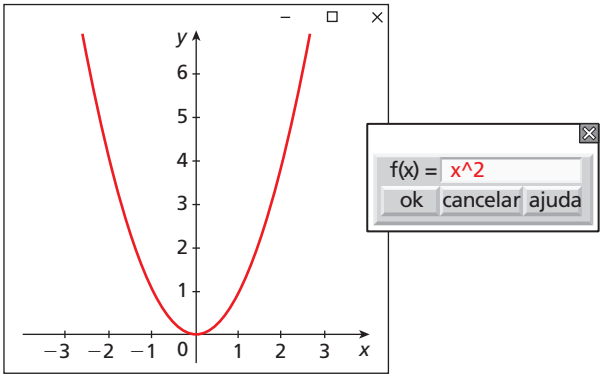
3.4 Translação do gráfico de uma função

Vamos utilizar um *software* de construção de gráficos para construir o gráfico das funções f e g de leis x^2 e $x^2 + 2$, respectivamente.

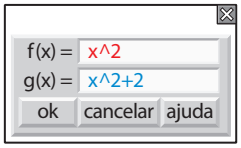
Primeiramente, digitamos "$x*x$" ou "x^2" no campo para inserir a lei da função.



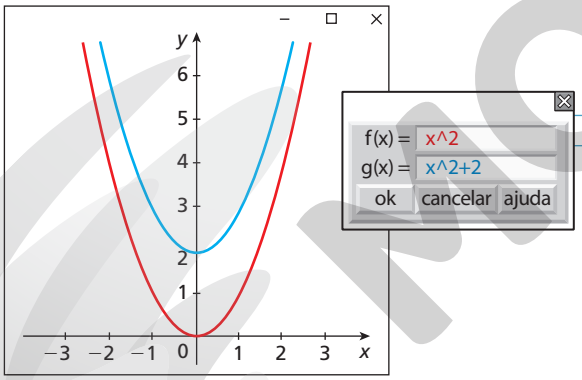
Obtemos o gráfico de f.



No mesmo plano do gráfico da função f, vamos construir o gráfico de g. Assim, digitamos: "x^2 + 2" no campo destinado à expressão de g.



Ao clicar em ok, obtemos o gráfico de g.



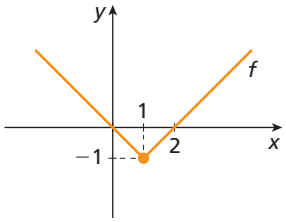
Note que o *software* utiliza cores diferentes para as funções.

Podemos observar que o gráfico de g é uma translação do gráfico de f em duas unidades para cima, na direção vertical.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

32. O gráfico ao lado representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa e justifique as falsas.



ADILSON SECCO

a) $f(0) = 0$ verdadeira

b) A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$.

c) A função é positiva em todo o domínio.

d) O valor mínimo da função é -1. verdadeira

e) $\text{Im}(f) = [-1, +\infty[$ verdadeira

b) Falsa, pois no intervalo [0, 1] a função é decrescente.

c) Falsa, pois no intervalo [0, 2] a função é negativa ou nula.

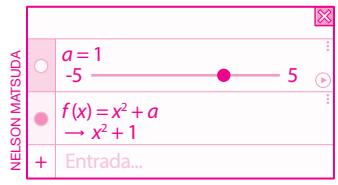
Este tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **2** e da competência específica **4** da BNCC, articuladas com a habilidade **EM13MAT402**, uma vez que os alunos são convidados a refletir a respeito da influência de coeficientes e parâmetros, presentes em um registro matemático algébrico, no registro geométrico de uma função polinomial de 2º grau.

Explore

Use um *software* de construção de gráficos para construir, em um mesmo plano cartesiano, gráficos da função $y = x^2 + a$. Em outro plano, construa gráficos da função $y = (x + a)^2$. Varie os valores de a. Use valores positivos, negativos e nulo. Depois de verificar as construções feitas, escreva um texto concluindo o que foi observado com a atividade.

Espera-se que o aluno perceba que a variação do parâmetro a em $x^2 + a$ vai transladar a curva na direção vertical e, na expressão $(x + a)^2$, vai transladar o gráfico na direção horizontal.

Em alguns *softwares* como o *GeoGebra* e o *Desmos*, basta inserir a expressão algébrica com o parâmetro para que o *software* disponibilize um controle deslizante do parâmetro e, ao deslizar o controle, o gráfico é automaticamente transladado no plano. Observe o exemplo da função f na figura a seguir.



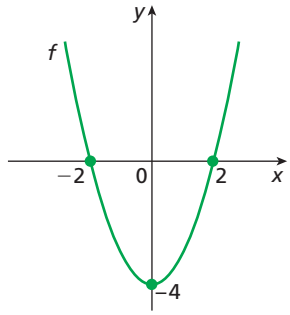
NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

33. Observe o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



a) Quais são os zeros da função?

b) Em qual intervalo do domínio a função é crescente? E decrescente?

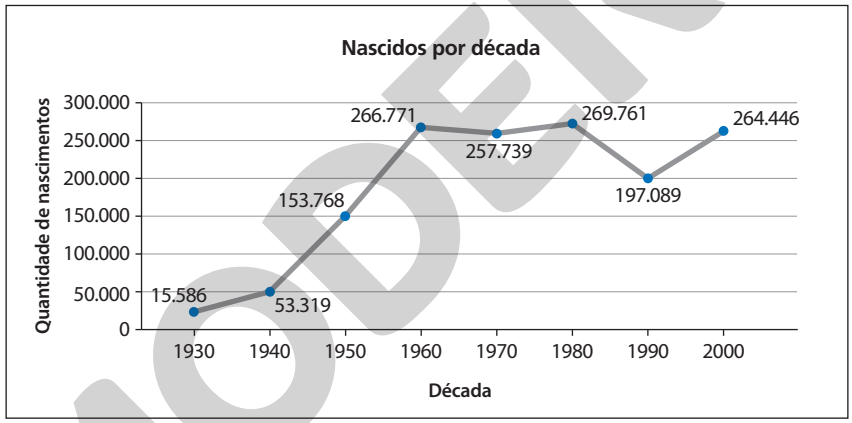
c) Para que valores de x a função é positiva? E negativa?

d) Qual é o domínio da função? E o conjunto imagem?

e) Qual é o menor valor que essa função pode assumir? Esse valor é imagem de qual valor do domínio?

33. a) -2 e 2
b) crescente: $[0, +\infty[$; decrescente: $]-\infty, 0]$
c) positiva: $x < -2$ ou $x > 2$; negativa: $-2 < x < 2$
d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, +\infty[$
e) -4; imagem de zero

34. O gráfico abaixo apresenta a quantidade de pessoas nascidas, do sexo masculino, por década, com o nome Carlos no Brasil, no período de 1930 a 2000.



Dados obtidos em: <https://censo2010.ibge.gov.br/nomes/#/search>. Acesso em: 6 ago. 2020.

Observando o gráfico, identifique:

a) os intervalos nos quais a quantidade de nascimentos de pessoas com o nome Carlos foi crescente;

b) os intervalos nos quais a quantidade de nascimentos de pessoas com o nome Carlos foi decrescente;

c) a década em que se deu a quantidade máxima de pessoas nascidas com o nome Carlos.

34. a) década de 1930 a 1960, década de 1970 a 1980 e década de 1990 a 2000.
b) década de 1960 a 1970 e década de 1980 a 1990.
c) na década de 1980, com 269.761 pessoas nascidas com nome Carlos.

35. Para quais itens abaixo a função dada é positiva em todo o seu domínio? Justifique sua resposta. Se achar conveniente, use um *software* específico para construção de gráficos.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2^x$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$

Itens **a** e **d**, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** da BNCC, uma vez que introduz os conceitos sobre funções polinomiais.

4 Função polinomial

Função polinomial na variável real x é toda função definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (com $n \in \mathbb{N}$), para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação

A função dada por $g(x) = x^{-1} + 2$, por exemplo, não é polinomial. Veja que o expoente de x, nesse caso, não é um número natural.

Na função polinomial:

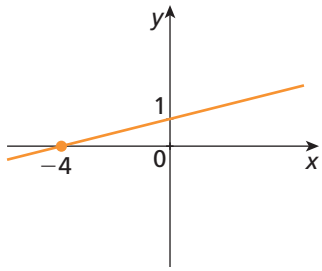
- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são números reais chamados de **coeficientes** da função;
- n é o grau do polinômio que expressa a função (com $a_n \neq 0$);
- o grau da função é determinado pelo grau do polinômio, e o grau do polinômio de uma só variável é dado pelo maior expoente da variável.

Exemplos

A função dada por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + \frac{2}{3}$, expressa por um polinômio de grau 3, é uma função polinomial de 3º grau. Os coeficientes dessa função são $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -3$, $a_1 = -7$ e $a_0 = \frac{2}{3}$.

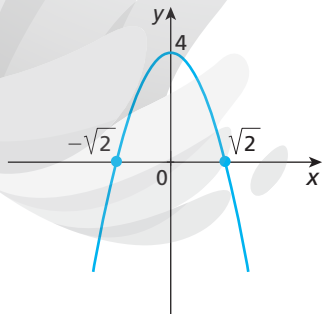
Veja outros exemplos de funções polinomiais acompanhadas de sua representação gráfica.

a) $f(x) = \frac{x}{4} + 1$



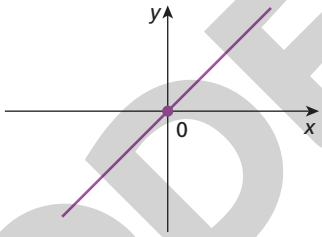
f é uma função polinomial de 1º grau com coeficientes $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_0 = 1$; $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$; zero da função f: -4
Essa função é crescente para todo o domínio.

b) $g(x) = -2x^2 + 4$



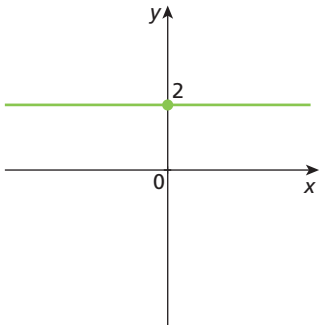
g é uma função polinomial de 2º grau com coeficientes $a_2 = -2$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 4$; $D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) =]-\infty, 4]$;
zeros da função g: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$
O valor máximo dessa função é 4, que é a ordenada do ponto (0, 4), também conhecido como **ponto de máximo**.

c) $h(x) = x$



h é uma função polinomial de 1º grau com coeficientes $a_1 = 1$ e $a_0 = 0$; $D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \mathbb{R}$; zero da função h: 0
Qualquer x do domínio tem imagem y igual a x. Por isso, essa função é chamada de **função identidade**. Note que o gráfico da função identidade contém a bissetriz dos quadrantes ímpares.

d) $i(x) = 2$



i é uma função polinomial de grau zero com coeficiente $a_0 = 2$; $D(i) = \mathbb{R}$; $Im(i) = \{2\}$
Qualquer x do domínio tem imagem 2.
Por isso, essa função é chamada de **função constante**. Note que o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x.

Os exemplos **a** e **c** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401**; já o exemplo **b** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT402** da BNCC. Nesses exemplos, há a conversão de representações algébricas de funções em representações geométricas no plano cartesiano.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Esse tópico favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **4** de Matemática e suas Tecnologias, pois os alunos utilizarão estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, para interpretar situações em diversos contextos, além de compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos, como tabelas e leis de formação de funções definidas por mais de uma sentença. O tópico favorece também o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404** da BNCC, na medida em que os alunos analisarão funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica.

5 Funções definidas por mais de uma sentença

Algumas funções são definidas por mais de uma sentença.

Observe a situação a seguir.

Para saber qual é o imposto de renda (y) de uma pessoa física, aplicamos à renda mensal (x) os cálculos definidos pela tabela estabelecida pelo governo. Veja a tabela para o exercício do ano de 2019.

Incidência mensal de Imposto de Renda de Pessoa Física		
Base de cálculo (em reais)	**Alíquota (em %)**	**Parcela a deduzir do imposto (em reais)**
Até 1.903,98	—	—
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15,0	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: Ministério da Economia. Disponível em: <http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica>. Acesso em: 15 jul. 2020.

WALLACEMARTINS/FUTURA PRESS

O Ministério da Economia é o órgão responsável por planejar, formular e executar as políticas econômicas nacionais. Entre suas funções está a fiscalização da arrecadação tributária. Na foto, Ministério da Economia em Brasília, DF, 2020.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual a R$ 1.500,00, o contribuinte está isento, isto é, o imposto é zero real.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual, por exemplo, a R$ 3.000,00, o imposto y a pagar é:

$y = 3.000{,}00 \cdot 0{,}15 - 354{,}80 = 450{,}00 - 354{,}80 = 95{,}20$

Logo, o imposto mensal a pagar é R$ 95,20.

Podemos escrever matematicamente essa situação por uma função, com domínio em um subconjunto dos números reais não negativos, dada por mais de uma sentença. Veja.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1.903{,}98 \\ 0{,}075 \cdot x - 142{,}80, \text{ se } 1.903{,}98 < x \leqslant 2.826{,}65 \\ 0{,}15 \cdot x - 354{,}80, \text{ se } 2.826{,}65 < x \leqslant 3.751{,}05 \\ 0{,}225 \cdot x - 636{,}13, \text{ se } 3.751{,}05 < x \leqslant 4.664{,}68 \\ 0{,}275 \cdot x - 869{,}36, \text{ se } x > 4.664{,}68 \end{cases}$$

Pensamento computacional

Decomposição

A **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*, está relacionada a habilidades que nos permitem reduzir a complexidade de um problema, decompondo-o em subproblemas ou etapas de modo que, ao resolver os subproblemas ou as etapas, também se resolve o problema inicial.

Em algumas situações, a relação entre duas variáveis não pode ser representada por uma função de uma única sentença, pois, com base no comportamento da variável independente, o comportamento da variável dependente muda. Dessa maneira, decompõe-se a análise e a representação da relação entre essas variáveis em funções com mais de uma sentença, o que permite maior flexibilidade na modelagem.

- Cite um exemplo de uma situação que pode ser modelada por uma função com mais de uma sentença, justificando sua resposta. Se necessário, faça uma pesquisa em livros didáticos ou na internet identificando e observando o gráfico de funções que são característicos desse tipo de relação entre variáveis.

Resposta possível: Alguns veículos possuem a velocidade limitada eletronicamente. Numa situação de aceleração até atingir a velocidade máxima, enquanto se acelera, a velocidade, em função do tempo, varia conforme uma função quadrática e, quando atinge a velocidade máxima, a velocidade se torna constante, sendo modelada por uma função constante.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Em uma aplicação como essa, espera-se que não haja salto no valor do imposto quando se passa de uma faixa para outra ou que, na prática, se houver diferença, ela não seja significativa.

Podemos constatar que, por exemplo, para uma base de cálculo igual a R$ 3.751,05, que é o limite superior de uma das faixas, obtemos uma diferença muito pequena entre o imposto a pagar com o cálculo em que se usa a expressão da própria faixa do domínio, $0{,}15 \cdot x - 354{,}80$, e o cálculo em que se usa a da faixa seguinte, $0{,}225 \cdot x - 636{,}13$:

- $f(x) = 0{,}15 \cdot x - 354{,}80$
  $f(3.751{,}05) = 0{,}15 \cdot 3.751{,}05 - 354{,}80 = 207{,}8575$
- $f(x) = 0{,}225 \cdot x - 636{,}13$
  $f(3.751{,}05) = 0{,}225 \cdot 3.751{,}05 - 636{,}13 = 207{,}85625$

Observação

Repare que, ao arredondarmos os valores 207,8575 e 207,8625 para os centavos, temos o mesmo valor em reais.

Reflita

Há salto expressivo no valor de $f(x)$ quando x se aproxima de R$ 1.903,98? E quando x se aproxima de R$ 2.826,65?

Para $x = 1.903{,}98$, temos:
- Usando a expressão da própria faixa do domínio: $f(x) = 0$
- Calculando pela faixa seguinte:
  $f(x) = 0{,}075 \cdot x - 142{,}80$
  $f(x) = 0{,}075 \cdot 1.903{,}98 - 142{,}80$
  $f(x) = -0{,}0015$

A diferença é R$ 0,0015. Logo, não é significativa.

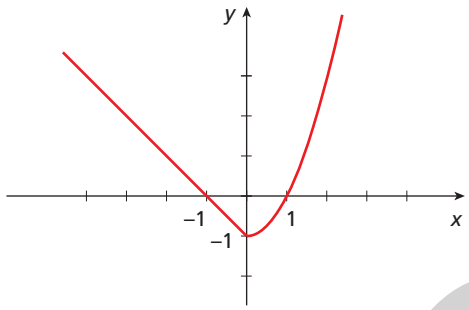
Para $x = 2.826{,}65$, temos:
- Usando a expressão da própria faixa do domínio:
  $f(x) = 0{,}075 \cdot x - 142{,}80$
  $f(x) = 0{,}075 \cdot 2.826{,}65 - 142{,}80$
  $f(x) = 69{,}19875$
- Calculando pela faixa seguinte:
  $f(x) = 0{,}15 \cdot x - 354{,}80$
  $f(x) = 0{,}15 \cdot 2.826{,}65 - 354{,}80$
  $f(x) = 69{,}1975$

A diferença é R$ 0,00125. Logo, não é significativa.

Se julgar conveniente, discutir com os alunos o significado de "um salto expressivo do valor de $f(x)$ nas quebras de domínio". Haveria justiça se duas pessoas tivessem uma diferença de rendimentos, digamos de R$ 1,00, e uma diferença de recolhimento de impostos de R$ 100,00?

Exemplo

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{ se } x \leqslant 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$



ADILSON SECCO

Observe que:

- o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$;
- a imagem é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$;
- f é decrescente em $]-\infty, 0]$;
- f é crescente em $[0, +\infty[$;
- f é positiva em $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$;
- f é negativa em $]-1, 1[$;
- os zeros de f são -1 e 1.

Note que o comportamento do gráfico varia conforme o intervalo do domínio.

Exercício resolvido

R11. Considerando a função g tal que $g(x) = \begin{cases} x + 4, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 3x^2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$, calcular:

a) $g(1)$

b) $g(3)$

▸ **Resolução**

a) Para $x = 1$, usamos a primeira sentença.

Assim: $g(1) = 1 + 4 = 5$

b) Para $x = 3$, usamos a segunda sentença.

Assim: $g(3) = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nos exercícios **37**, **38** e **39**, propostos a seguir, os alunos trabalham com o pilar **decomposição** do *pensamento computacional*, na medida em que lidam com as funções compostas por mais de uma sentença. Além disso, a atividade **38**, enriquecida de contexto do qual os alunos devem extrair os dados necessários para a modelagem da situação, permite o trabalho com o pilar **abstração**.

Exercícios propostos

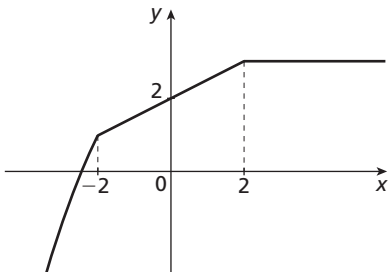
38. a) $f(x) = \begin{cases} 10{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$

Registre as respostas em seu caderno.

36. Escreva a lei da função cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, -5)$.
$f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. Observe a lei e o gráfico da função m de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$$m(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 3, \text{ se } x \leqslant -2 \\ \dfrac{x}{2} + 2, \text{ se } -2 < x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$



Agora, responda às questões.

a) Qual é o domínio e o conjunto imagem de $m(x)$? $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$

b) Em que intervalo do domínio a função é constante? para $x > 2$

c) Quantos zeros tem essa função? Justifique sua resposta. Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.

d) Em que intervalo do domínio a função é positiva? E negativa? positiva em $]-\sqrt{6}, +\infty[$; negativa em $]-\infty, -\sqrt{6}[$

38. Para estimular sua equipe, o departamento de vendas de uma fábrica de bicicletas elaborou a seguinte regra: se a venda semanal for de uma quantidade x, menor que 30 unidades, a comissão y que o vendedor receberá será de 3% do valor total v, em reais, das vendas; se a venda for de 30 a 100 unidades, a comissão passa para 5% de v; se a quantidade for superior a 100 unidades, a comissão passa para 8% de v. Cada bicicleta é vendida por R$ 350,00.

a) Escreva a lei de uma função que retrate a relação entre o número de bicicletas vendidas e a comissão do vendedor.

b) Quanto um vendedor receberá de comissão se vender 80 bicicletas em uma semana? E se vender 101? R$ 1.400,00; R$ 2.828,00

39. A função a seguir é definida por duas sentenças. Calcule o valor de $p(x)$ em cada caso.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, \text{ se } x \leqslant -4 \\ -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{20}{7}, \text{ se } -4 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

a) $x = -6$ 9

b) $x = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{19}{7}$

c) $x = 3{,}78$

d) $x = -4$ 4

e) $x = 3$ 2

f) $x = 0$ $\dfrac{20}{7}$

39. c) Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores que 3.

6 Função inversa

Agora, acompanhe alguns conceitos que serão necessários para o entendimento do conceito de função inversa.

Função sobrejetora

Reflita

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, é sempre sobrejetora?
Justifique sua resposta.

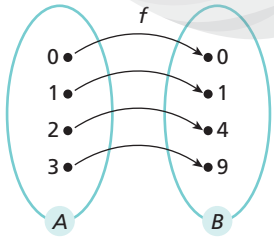
Não, pois: $Im(f) = \mathbb{R}_+ \neq CD(f) = \mathbb{R}$

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** quando, para qualquer $y \in B$, sempre temos $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $Im(f) = B$.

Para saber se uma função é sobrejetora, é preciso verificar se o conjunto imagem é igual ao contradomínio.

Exemplos

a) O diagrama ao lado representa a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x^2$.
Observe que todo elemento de B tem um correspondente em A, ou seja, o conjunto imagem da função é igual a seu contradomínio.
Então, a função $f: A \to B$ é sobrejetora.



b) A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2^x$ é sobrejetora?
Para qualquer número real x, temos que 2^x é um número real estritamente positivo. Portanto, em $\mathbb{R}$, que é o contradomínio dessa função, existem números que não têm correspondente algum do domínio, ou seja, o conjunto imagem da função não coincide com seu contradomínio.
Logo, a função g não é sobrejetora.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

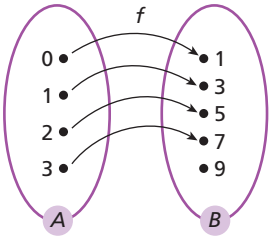
MODERNA

Função injetora

Uma função $f: A \to B$ é **injetora** se, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplo

O diagrama ao lado representa a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 2x + 1$.
Observe que quaisquer dois elementos de A têm como imagem elementos distintos de B.
Portanto, a função $f: A \to B$ é injetora.

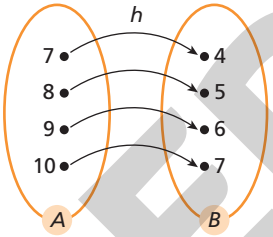


Função bijetora

Uma função $f: A \to B$ é **bijetora** se for sobrejetora e injetora.

Exemplo

O diagrama ao lado representa a função $h: A \to B$, definida por $h(x) = x - 3$.
Observe que o contradomínio é igual ao conjunto imagem (é sobrejetora) e que quaisquer dois elementos de A têm como imagem elementos distintos de B (é injetora).
Portanto, a função h é bijetora.
Mesmo se admitíssemos $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x - 3$, ainda assim h seria bijetora.

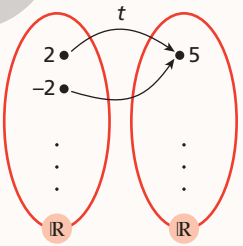


Exercício resolvido

R12. Mostrar que a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $t(x) = x^2 + 1$, não é bijetora.

▸ **Resolução**

Para mostrar que a função não é bijetora, precisamos mostrar que ela não é injetora (basta encontrar no domínio dois elementos com a mesma imagem) ou que ela não é sobrejetora (basta encontrar no contradomínio um elemento que não seja imagem de algum elemento do domínio). Substituindo x por 2 e por -2, por exemplo, temos:

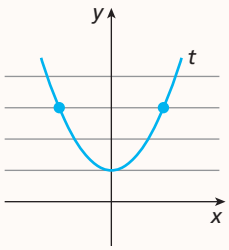


- $t(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
- $t(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Quando uma reta paralela ao eixo x intersecta o gráfico em mais de um ponto, isso indica que, no domínio da função, existem elementos distintos com a mesma imagem. Então, a função não é injetora.

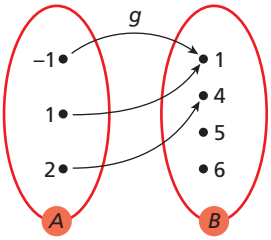
Como, no domínio, há dois elementos distintos com a mesma imagem, concluímos que a função t não é injetora e, portanto, não é bijetora.

Podemos, com base no gráfico da função t, traçar retas paralelas ao eixo x e verificar que existe pelo menos uma que intersecta o gráfico em mais de um ponto, concluindo, de outro modo, que a função t não é injetora.



Reflita

A função $g: A \to B$ é sobrejetora? E injetora? Justifique sua resposta.



Não é sobrejetora, porque $CD(g) \neq Im(g)$. Não é injetora, porque dois elementos de A têm a mesma imagem: $g(-1) = g(1) = 1$

Reflita

Em uma função bijetora $f: A \to B$, a cada elemento de A corresponde um só elemento de B e vice-versa?

Sim, pois uma função bijetora é sobrejetora e injetora.

Observação

Em uma função f de A em B, a condição de função injetora, para quaisquer x_1 e x_2 de A, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, equivale à condição para quaisquer x_1 e x_2 de A, se $f(x_1) = f(x_2)$. Então, $x_1 = x_2$.

Por exemplo, 0 é elemento do contradomínio $\mathbb{R}$ e não há elemento x do domínio $\mathbb{R}$ tal que $0 = x^2 + 1$.

Reflita

Mostre que a função t, do exercício resolvido **R12**, não é sobrejetora.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

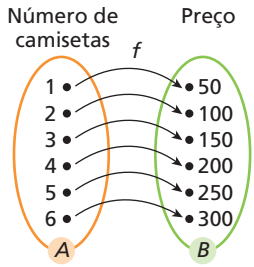
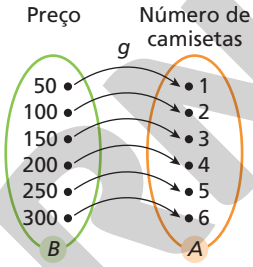
Definição de função inversa

Acompanhe a situação a seguir.

Para facilitar seu trabalho, uma vendedora de camisetas fez uma tabela relacionando o número de camisetas e o preço.

Número de camisetas	1	2	3	4	5	6
Preço (R$)	50,00	100,00	150,00	200,00	250,00	300,00

Com esses valores e considerando $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{50{,}00; 100{,}00; 150{,}00; 200{,}00; 250{,}00; 300{,}00\}$, podemos pensar em duas funções. Veja.

$f: A \to B$	$g: B \to A$
Função que associa o número de camisetas ao preço.  $D(f) = A$ $Im(f) = B$	Função que associa o preço ao número de camisetas.  $D(g) = B$ $Im(g) = A$

Observe que f e g são funções bijetoras e $D(f) = Im(g)$ e $D(g) = Im(f)$. Nesse caso, dizemos que uma função é a **inversa** da outra. Costuma-se indicar a inversa de uma função f por $\boldsymbol{f^{-1}}$.

Reflita

A função de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^2$ admite inversa? Justifique sua resposta.

Sim, pois essa função é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora.

Dada uma função bijetora $f: A \to B$, chamamos de **função inversa** de f a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, com $y = f(x)$, temos $f^{-1}(y) = x$.

Nem todas as funções admitem inversa; somente as que são bijetoras.

Se conhecemos a lei que define uma função bijetora $f: A \to B$, podemos obter a lei que define sua inversa, $f^{-1}: B \to A$.

Vamos retomar a situação anterior, em que tínhamos a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 50x$.

Partindo da lei que define f, encontramos a lei que define f^{-1}:

1º) Lembrando que $f(x)$ é a imagem de x através da função f e que y também representa essa imagem, escrevemos a lei que define f, substituindo $f(x)$ por y.

Na situação estudada, $f(x) = 50x$ fica na forma $y = 50x$.

2º) Invertemos as variáveis na lei que define f, ou seja, trocamos x por y e y por x.

No nosso exemplo, $y = 50x$ assume a forma $x = 50y$.

3º) Agora, expressando y em função de x, obtemos $f^{-1}(x)$: $x = 50y \Rightarrow y = \frac{x}{50}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{x}{50}$

Observe alguns valores atribuídos às funções f e f^{-1}, bem como a correspondência entre eles.

Reflita

Dê exemplo de uma função que não admite função inversa. Apresente sua função para os colegas e explique a eles por que a função escolhida não admite inversa.

Resposta possível:
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, pois f não é bijetora.
Ao expor e explicar verbalmente seu exemplo para a classe, os alunos estarão exercitando sua habilidade argumentativa e oral.

$f(x) = 50x$	$f(1) = 50$	$f(2) = 100$	$f(3) = 150$	$f(4) = 200$
$f^{-1}(x) = \frac{x}{50}$	$f^{-1}(50) = 1$	$f^{-1}(100) = 2$	$f^{-1}(150) = 3$	$f^{-1}(200) = 4$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R13. Considerar a função f de domínio real dada pela lei $f(x) = x^3$.

a) Qual é a lei da função inversa de f?

b) Sem construir os gráficos, determinar os pontos de intersecção dos gráficos de f e f^{-1}.

▸ **Resolução**

a) Partindo da lei que define f, temos:

- $f(x) = x^3$ é o mesmo que $y = x^3$.
- Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = y^3$
- Expressando y em função de x, obtemos:

$x = y^3 \Rightarrow y^3 = x \Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

b) Para todo x real, os pontos P do gráfico de f têm coordenadas (x, x^3), e os pontos Q do gráfico de f^{-1} têm coordenadas (x^3, x).

Os pontos de intersecção dos gráficos de f e f^{-1} são tais que $x_P = x_Q$ e $y_P = y_Q$, ou seja:

$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0$

- Fatorando $x^3 - x$ e observando que x é fator comum:

$x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1)$

- Aplicando a identidade $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ em $x^2 - 1$, temos:

$x^3 - x = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Então:

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

Portanto, os gráficos de f e f^{-1} interceptam-se nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Na resolução do exercício **R13,** há o pressuposto de que a função $f(x) = x^3$ é bijetora. Pode-se perguntar aos alunos por que se trata de uma função bijetora, o que pode ser observado por meio do esboço de seu gráfico.

Observação

De maneira informal, podemos pensar que o inverso de elevar um número ao cubo é extrair a raiz cúbica desse número.

40. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{9x - 1}{2 - x}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$

c) $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$

e) $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

41. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 9}{4}$

b) $g^{-1}(x) = \dfrac{3 - x}{2}$

c) $h^{-1}(x) = \dfrac{-2x - 1}{14}$

d) $m^{-1}(x) = 3x - 5$

e) $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

f) A função p não é bijetora. Assim, não tem inversa.

42. a) O item **f** não admite função inversa, pois a função p não é bijetora.

b) Com exceção do item **f**, que não tem inversa, as leis obtidas devem ser iguais às dadas.

c) A inversa da função inversa de uma função bijetora é a própria função.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

40. Considerando que a função f definida por $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 9}$ admita inversa e tem o maior domínio possível, determine:

a) $f^{-1}(x)$

b) $D(f)$

c) $D(f^{-1})$

d) $Im(f)$

e) $Im(f^{-1})$

41. Determine a lei que define a função inversa de cada função.

a) $f(x) = 4x + 9$

b) $g(x) = -2x + 3$

c) $h(x) = -7x - \dfrac{1}{2}$

d) $m(x) = \dfrac{x + 5}{3}$

e) $n(x) = x^3 + 1$

f) $p(x) = x^2 + 1$

42. Considere as funções do exercício **41**.

a) Todas as funções admitem função inversa?

b) Determine as leis que definem as funções inversas das funções obtidas, por exemplo, $[f^{-1}]^{-1}(x)$. Comparem-nas com as leis dadas.

c) Discuta com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre a inversa da função inversa de uma função bijetora dada.

43. Considere as funções reais dadas pelas leis:

- $f(x) = x$
- $g(x) = x + 3$
- $h(x) = x - 1$
- $i(x) = x - 3$

a) No mesmo plano cartesiano, construa o gráfico de cada função dada e de sua respectiva função inversa. Ver resolução no Guia do professor.

b) Discuta com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

44. Considere as funções reais dadas pelas leis:

- $f(x) = x$
- $g(x) = 2x$
- $h(x) = 3x$
- $i(x) = 4x$

a) No mesmo plano cartesiano, construa o gráfico de cada função dada e de sua respectiva função inversa. Ver resolução no Guia do professor.

b) Discuta com um colega e escrevam o que se pode concluir sobre os gráficos de cada uma dessas funções e o de sua inversa em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Gráfico da função inversa

Os gráficos de uma função e de sua inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade i, definida por $i(x) = x$, que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Reflita

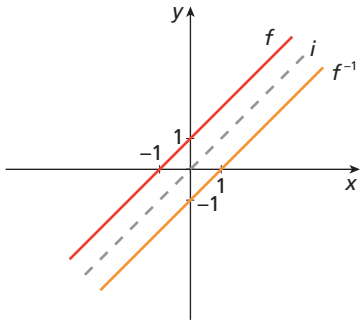
Se o par ordenado (a, b) pertence ao gráfico de uma função bijetora f, o par ordenado (b, a) pertence ao gráfico de sua inversa, f^{-1}? Justifique sua resposta.

Desde que exista f^{-1}, sim, pela própria definição de função inversa.

Exemplos

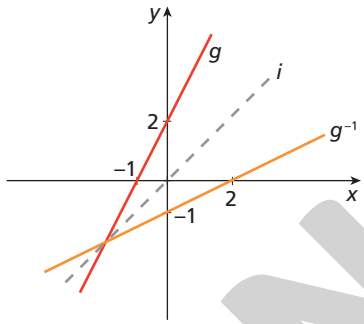
a) $f(x) = x + 1$

$f^{-1}(x) = x - 1$



b) $g(x) = 2x + 2$

$g^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 1$



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

45. Escreva a lei da função inversa de cada função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = -x + 3$ $f^{-1}(x) = -x + 3$

b) $g(x) = 2x$ $g^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

c) $h(x) = \frac{x}{3} - 2$ $h^{-1}(x) = 3x + 6$

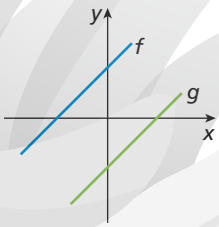
d) $k(x) = 2x + 1$ $k^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

- No mesmo plano cartesiano, trace os gráficos de cada função e da respectiva inversa. Depois desenhe, em cada um, o gráfico da função identidade. O que você observa?

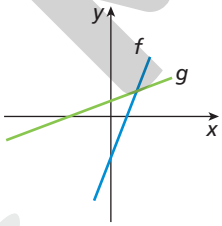
Ver resolução no Guia do professor.

46. Em cada caso, a linha azul é o gráfico de uma função f, e a linha verde é o gráfico de uma função g.

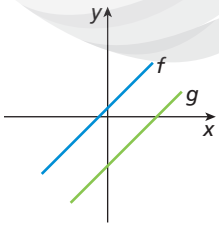
a)



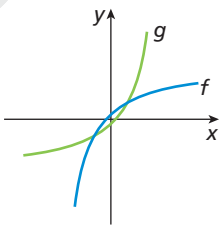
c)



b)



d)

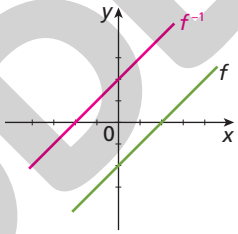


- Em quais itens a função f é a inversa da função g? Justifique sua resposta.

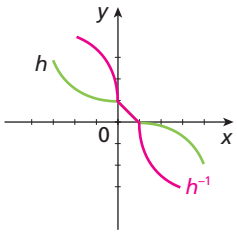
Em **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de f e de g são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

47. Copie os gráficos abaixo no caderno e, em cada gráfico copiado, esboce o gráfico da função inversa à função dada.

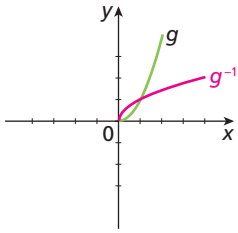
a)



c)

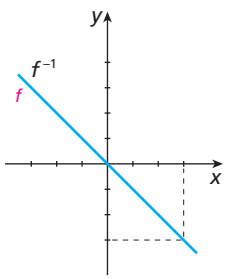


b)

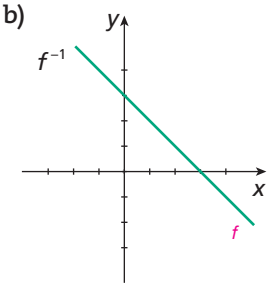


48. Para cada item, copie o gráfico da função inversa da função f. Sobre o gráfico copiado, esboce o gráfico de f.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esses exercícios favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404** da BNCC, na medida em que os alunos analisarão funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica. Alguns exercícios envolvem situações da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101** da BNCC.

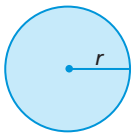
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

6. Ver resolução no Guia do professor.
a) $f(x) > 0$ para $-1 < x < 3$
$f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 3$
$f(x) < 0$ para $x < -1$ ou $x > 3$
b) crescente: $]-\infty, 1]$
decrescente: $[2, +\infty[$
constante: $]1, 2[$

Aplicação

1. A fórmula para obter a área A de um círculo de raio r é $A = \pi r^2$.
(*Adote*: $\pi = 3{,}14$.)

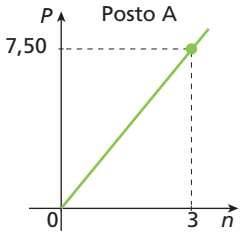


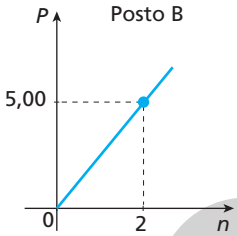
a) Resposta possível:
$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$f(x) = y = \pi x^2$

b) (x, y)
raio do círculo
área do círculo de raio x

a) Escreva essa informação com notação de função matemática (y em função de x). Não se esqueça de definir o domínio e o contradomínio da função.
b) O que representa cada par ordenado (x, y) dessa função?
c) Qual é a variável dependente? y (área)
d) Qual é a variável independente? x (raio)
e) Sabemos que a área de um círculo de raio r é A. Qual seria a área de um círculo de raio $2r$? $4A$

2. Os gráficos abaixo representam o preço P, em reais, do litro do etanol em função do número n de litros em dois postos, A e B.

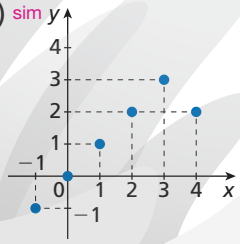




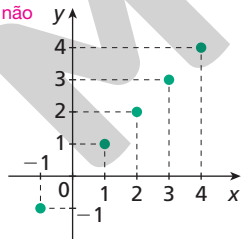
- Em qual posto é mais vantajoso abastecer? O preço é igual nos dois postos.

3. Dados $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \mathbb{R}$, verifique se os gráficos podem representar funções de A em B.

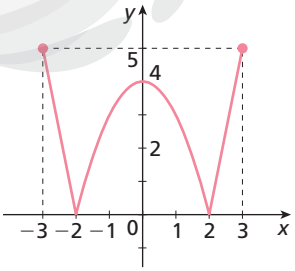
a) sim



b) não



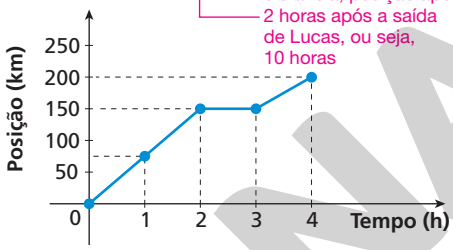
4. Observe o gráfico da função f e faça o que se pede.



a) Determine $f(-2)$. 0
b) Estime o valor de $f(0{,}5)$. Resposta possível: 3,5
Respostas possíveis: −1,5; 1,5; −2,5; 2,5
c) Estime o valor de x para $f(x) = 2$.
d) Determine $D(f)$ e $Im(f)$. $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$
e) Identifique os zeros da função. −2 e 2

5. O gráfico a seguir mostra a posição de Lucas, em uma estrada, das 8 h às 12 h de certo dia. O tempo indica o número de horas decorridas depois das 8 h

c) (2, 150)
distância, posição após 2 horas
2 horas após a saída de Lucas, ou seja, 10 horas



a) Estime a distância percorrida por Lucas das 8 h às 9 h desse dia. Resposta possível: 75 km
b) Em que período Lucas ficou parado? das 10 h às 11 h
c) O que representa o par ordenado (2,150) nesse gráfico?
d) Sabendo que chovia torrencialmente, quantos quilômetros Lucas percorreu das 11 h às 12 h? 50 km
e) Há algum dado desnecessário para se resolver algum dos itens do exercício? Se sim, qual?

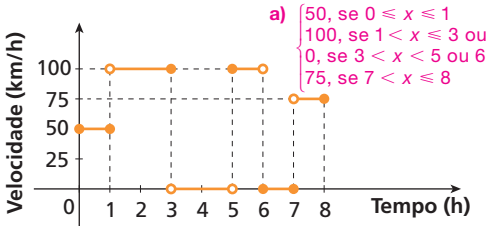
6. Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x < 2 \\ -x + 3, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

a) Estude o sinal da função.
b) Determine os intervalos em que a função é crescente, decrescente e constante.
c) Indique os zeros da função. −1 e 3

7. Priscila fez uma viagem de ônibus que durou oito horas. A velocidade média do ônibus variou, em função do tempo, conforme mostra o gráfico abaixo.

a) $\begin{cases} 50, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 100, \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \text{ ou } 5 \leqslant x < 6 \\ 0, \text{ se } 3 < x < 5 \text{ ou } 6 \leqslant x \leqslant 7 \\ 75, \text{ se } 7 < x \leqslant 8 \end{cases}$



a) Escreva a lei da função representada pelo gráfico.
b) Quantos quilômetros o ônibus percorreu nas primeiras três horas de viagem? 250 km
c) Quantas horas o ônibus permaneceu parado nessa viagem? três horas
d) Para Priscila chegar ao mesmo destino em sete horas, o que deveria mudar nessa situação?

5. e) Sim. No item **d**. A quantidade de quilômetros percorrida pelo carro das 11 h às 12 h está representada no gráfico. Assim, a informação de que chovia torrencialmente não é relevante para a resolução da questão.
7. d) Respostas possíveis: não parar entre a sexta e a sétima hora de viagem, locomovendo-se nesse período à velocidade de 75 km/h; percorrer a primeira hora a 75 km/h e se deslocar entre a sexta e a sétima hora a 50 km/h.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

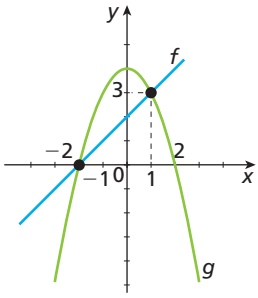
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Registre as respostas em seu caderno.

9. b) $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^*$ tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x+1}$ **c)** $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Aprofundamento

8. No plano cartesiano a seguir, estão esboçados os gráficos da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



a) Em que intervalo a função g é crescente? $]-\infty, 0]$

b) Para quais valores de x temos $f(x) = g(x)$? -2 e 1

c) Em que intervalo do domínio as funções f e g são simultaneamente positivas? $]-2, 2[$

9. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

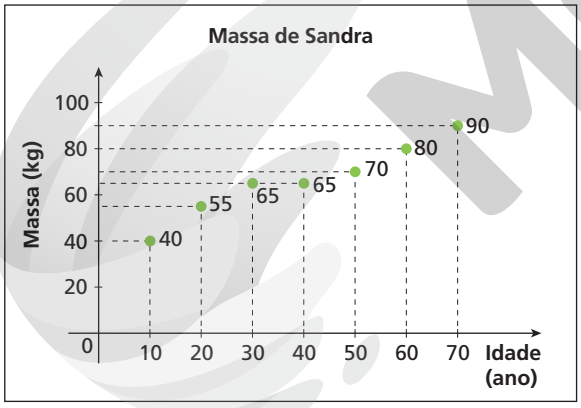
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = 2x - 1$

b) $f: \mathbb{R}^* \to B$ tal que $B = \mathbb{R} - \{-1\}$ e $f(x) = \dfrac{2-x}{x}$

c) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$

10. Sandra sempre se pesou e registrou os dados.

Veja, no gráfico abaixo, como variou a massa de Sandra a cada 10 anos de sua vida.



Fonte: Anotações de Sandra.

a) Podemos concluir que a massa de Sandra é diretamente proporcional à idade? Justifique.

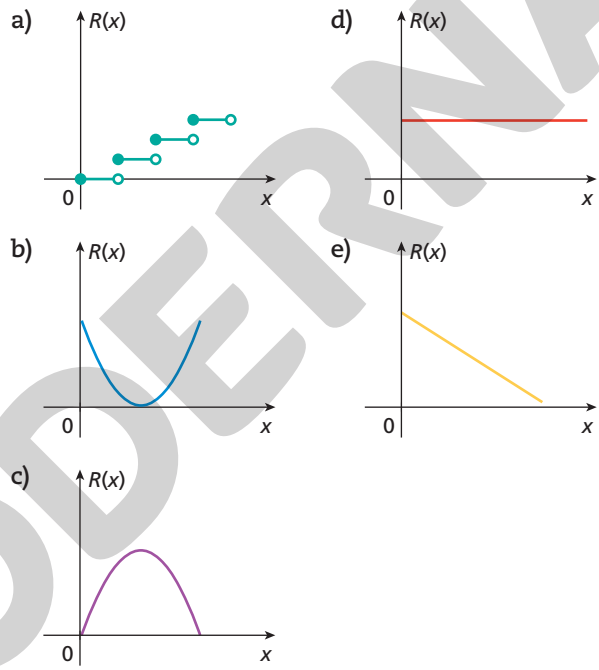
b) Podemos afirmar que, entre os 30 e os 40 anos, a massa de Sandra não se alterou? Justifique.

c) É verdade que a massa de Sandra aumentou mais rapidamente do nascimento até os 10 anos? Justifique.

10. a) Não, pois para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais é preciso haver uma razão constante de proporcionalidade entre elas. Por exemplo, dobrando a idade, dobraria a massa, o que não ocorre no caso de Sandra.
b) Não, porque não sabemos o que ocorreu no intervalo entre 30 e 40 anos.
c) Sim, pois nos 10 primeiros anos a massa de Sandra aumentou aproximadamente 40 kg – um aumento superior a qualquer outro apresentado no gráfico em um intervalo de 10 anos.

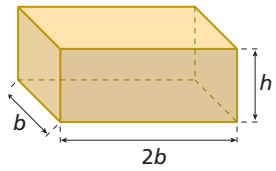
11. (Enem) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se $R(x) = kx(P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.

O gráfico cartesiano que melhor representa a função $R(x)$, para x real, é: alternativa c



Desafio

12. Uma empresa fabrica caixas de diferentes dimensões, mas de volume sempre igual a 2 m³. O comprimento dessas caixas é o dobro da largura. Observe abaixo o esquema da caixa.



$V = b \cdot 2b \cdot h$

$C(b) = 16b^2 + \dfrac{18}{b}$; R$ 40,00

O material com o qual é feita a base superior e a base inferior da caixa custa R$ 4,00 o metro quadrado, e o material das laterais custa R$ 3,00 o metro quadrado.

Expresse o custo C do material para a fabricação da caixa em função da largura b da base. Calcule o preço de custo de uma caixa de 0,5 m de largura.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma empresa de tratamento de água e esgoto de certa cidade calcula o custo residencial mensal de seus serviços da seguinte forma:

Consumo c de água (m³)	Valor V da conta (R$)
$0\ m^3 < c \leqslant 10\ m^3$	$V = 10$
$10\ m^3 < c \leqslant 20\ m^3$	$V = 10 + (c - 10) \cdot 1{,}20 = V_1$
$20\ m^3 < c \leqslant 30\ m^3$	$V = V_1 + (c - 20) \cdot 1{,}50 = V_2$
$30\ m^3 < c$	$V = V_2 + (c - 30) \cdot 2{,}00$

O valor total da conta é igual ao dobro do valor calculado para a água.
O consumo de água na casa de Caio, nos três últimos meses, foi igual a 9 m³, 18 m³ e 36 m³. Então, Caio pagou, em real, respectivamente: alternativa a

a) 20,00; 39,20; 98,00
b) 10,00; 19,60; 49,00
c) 20,00; 40,00; 80,00
d) 18,00; 37,20; 96,00

2. Na função $f: A \to B$, definida por $y = f(x)$, D(f) é ▬, CD(f) é ▬ e as ▬ dos pontos do plano determinados pelos pares ordenados (x, y), que obedecem à lei $y = f(x)$, formam o conjunto ▬ de f. alternativa b

a) A; B; abscissas; imagem
b) A; B; ordenadas; imagem
c) B; A; imagens; vazio
d) B; A; ordens; real

3. Se o gráfico de uma função intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$, a abscissa a desse ponto é o ▬ da função. alternativa c

a) valor
b) cruzamento
c) zero
d) meio

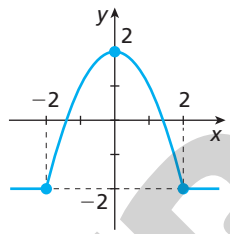
4. Para construir o gráfico de uma função f, devemos representar no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) que tenham $x \in D(f)$ e tais que x é, normalmente, a referência ▬ e $y = f(x)$ é a referência ▬. alternativa b

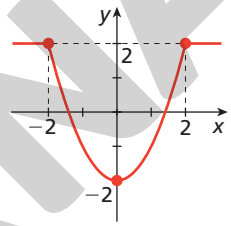
a) vertical; horizontal
b) horizontal; vertical
c) positiva; negativa
d) par; ímpar

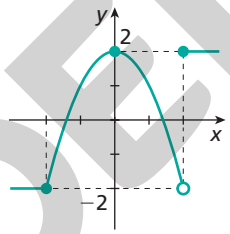
5. O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

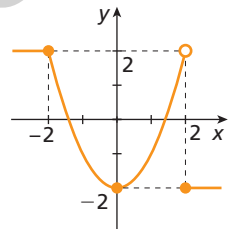
$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x < -2 \\ x^2 - 2, \text{ se } -2 \leqslant x < 2 \\ -2, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

é: alternativa d

a)


c)


b)


d)


6. Se, em um intervalo I do domínio, uma função f passa de crescente a decrescente em (x_0, y_0), dizemos que, em I: alternativa c

a) x_0 é raiz de f.
b) x_0 é valor máximo.
c) y_0 é valor máximo.
d) y_0 é valor mínimo.

7. Somente as funções ▬ admitem inversa. alternativa c

a) injetoras
b) sobrejetoras
c) bijetoras
d) positivas

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

Objetivos do capítulo	Número da questão						
	1	2	3	4	5	6	7
Identificar uma função.	X	X			X		
Analisar e construir o gráfico de uma função.			X	X	X	X	
Resolver situações-problema que envolvam funções.	X						
Obter a função inversa de funções dadas.							X
Páginas do livro referentes ao conceito	58 a 62	63 a 65	65 a 73	65 a 73	65 a 73 81 a 84	73 a 80	84 a 88

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

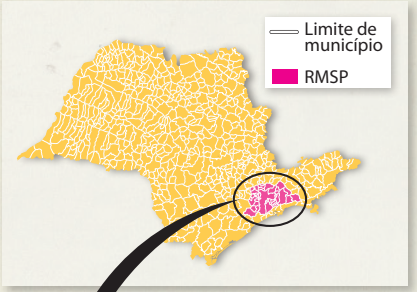
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

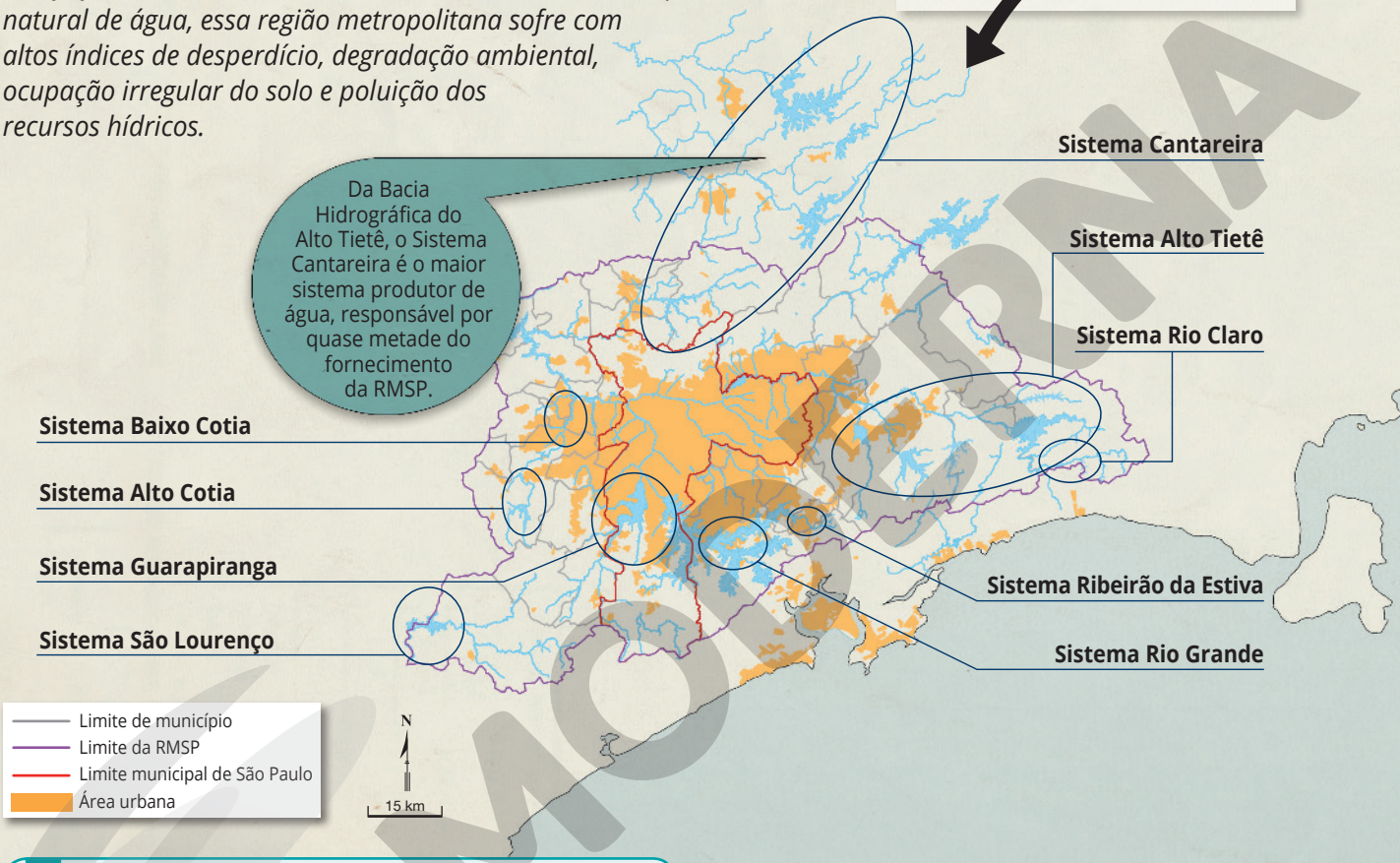
Compreensão de texto

Esse infográfico permite um trabalho interdisciplinar com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se possível, trabalhe o tema em conjunto com os professores dessas áreas. Podem ser discutidos as causas que levam a uma crise hídrica, os impactos que ela causa na população, as crises enfrentadas no local em que os estudantes

Abastecimento hídrico

A Região Metropolitana de São Paulo (RMSP) está localizada na Bacia Hidrográfica do Alto Tietê. Com 39 municípios e mais de 20 milhões de habitantes, a RMSP tem disponibilidade anual média de 150 mil litros de água por pessoa – dez vezes menor que a recomendada pela Organização das Nações Unidas (ONU) para satisfação das necessidades básicas. Além da limitada disponibilidade natural de água, essa região metropolitana sofre com altos índices de desperdício, degradação ambiental, ocupação irregular do solo e poluição dos recursos hídricos.





MAPA: CATHERINE SCOTTON

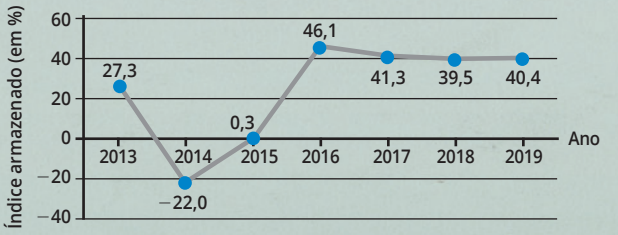
Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

Ver resolução de todas as atividades no Guia do professor.

1. Como o asfaltamento e as construções dos centros urbanos interferem na absorção de água pelos reservatórios naturais subterrâneos?
2. O que o gráfico ao lado mostra?
3. Em que data apresentada no gráfico o índice armazenado no Sistema Cantareira foi menor? Qual foi esse índice? Converse com um colega e tentem encontrar uma explicação para o sinal desse índice.
4. Em 2014 e 2015, a RMSP passou por uma grave crise hídrica. Caso não more na RMSP, você sabe se a região em que mora já passou por algo parecido? Pesquise a respeito dessa crise e os impactos que ela teve na população local. Se possível, converse com adultos que a vivenciaram.

Índice armazenado* no Sistema Cantareira em 31 dez. de cada ano



* O índice armazenado corresponde à razão entre o volume útil armazenado no dia e o volume útil total do reservatório (no caso do Sistema Cantareira, 982 milhões de metros cúbicos). O volume total do Sistema Cantareira é de 1.269,5 milhões de metros cúbicos, constituído pelo volume útil total (volume total do reservatório que pode ser utilizado sem bombeamento) mais o volume de reserva técnica (volume estocado no reservatório que só pode ser usado com bombeamento; essa reserva só pode ser utilizada em situações excepcionais).

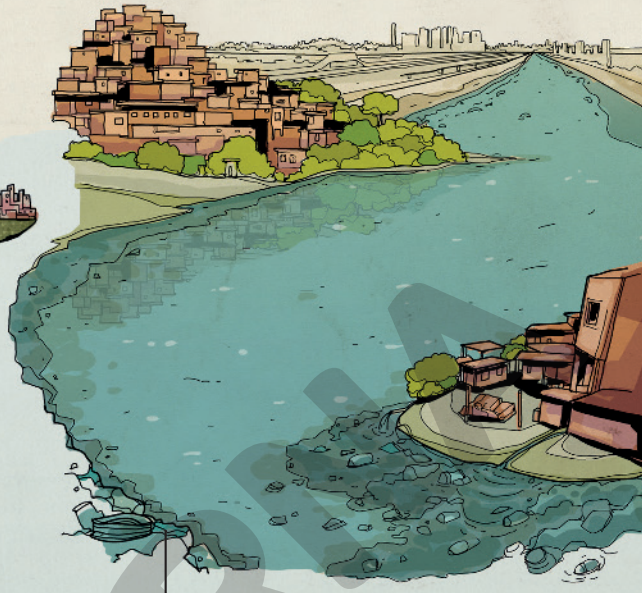
ILUSTRAÇÕES E GRÁFICO: BETO UECHI

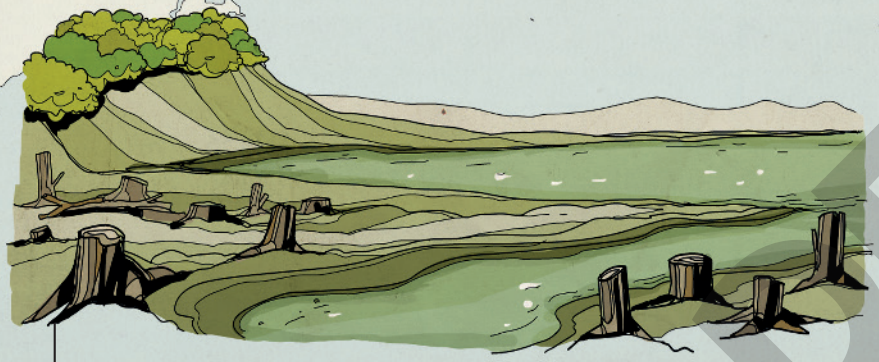
MODERNA

residem, os aspectos sociais relacionados ao tema, como as ocupações urbanas desenfreadas e parte delas irregulares, o problema da falta de acesso à água potável e ao abastecimento hídrico em alguns locais e a necessidade de consciência no uso e na exploração de recursos naturais, entre outros aspectos. Essas discussões podem favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT310**, **EM13CHS301,** e **EM13CHS304** da BNCC, além da competência geral **7**, da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e dos temas contemporâneos **educação ambiental** e **educação para o consumo** (ambos da macroárea meio ambiente).

Transporte difícil e custoso

Desde as nascentes até chegar às casas, a água percorre um longo caminho e tem de vencer desníveis de altitude com o auxílio de sistemas de bombeamento.





Menos vegetação, menos água

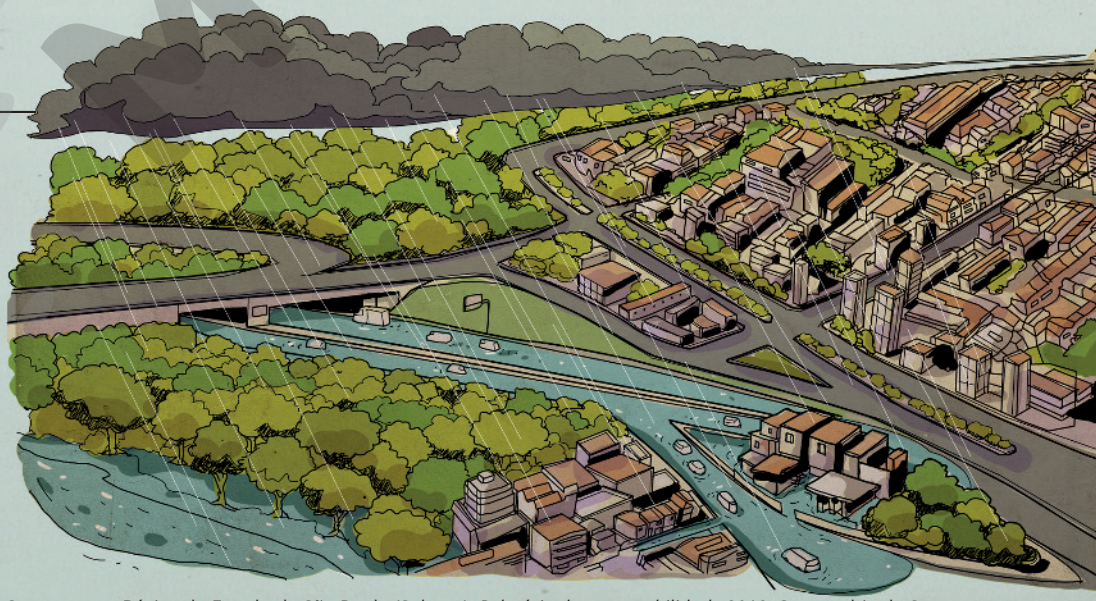
Com o desmatamento das margens das represas para a construção de moradias, os sedimentos são arrastados para dentro delas, diminuindo sua capacidade de armazenar água. A retirada da vegetação também diminui a capacidade do solo de reter umidade e de garantir a recarga do reservatório.

Mananciais ocupados

Ao redor da Represa de Guarapiranga vive mais de 1 milhão de pessoas – parte delas em condições irregulares. A ocupação urbana desenfreada prejudica os mananciais – fontes de água doce superficial ou subterrânea utilizadas para abastecimento público. Um outro exemplo, a Represa Billings é poluída por esgoto bruto, lixo submerso e desvio das águas sujas e excedentes do Rio Pinheiros.

Mudanças climáticas

Segundo estimativas, a Região Sudeste terá estiagens mais frequentes e chuvas torrenciais concentradas no verão. O asfaltamento e as construções, típicos dos centros urbanos, causam a impermeabilização do solo. Desse modo, a água da chuva não é absorvida pelos reservatórios naturais subterrâneos, causando enchentes e desperdício.



Dados obtidos em: Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp). *Relatório de sustentabilidade 2018*; Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp). CHESS: Crise Hídrica, Estratégia e Soluções da Sabesp, abr. 2015; Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp). *Situação dos mananciais*. Disponível em: <http://mananciais.sabesp.com.br/>. Acesso em: 8 maio 2020.

MODERNA

CAPÍTULO

4 Algoritmos e introdução à programação

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405**.

Esse infográfico tem por intenção contextualizar os trabalhos destinados ao desenvolvimento das habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405**. Além disso, a perspectiva histórica da evolução dos computadores favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

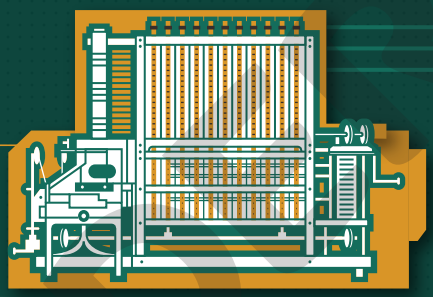
UMA BREVE HISTÓRIA DOS COMPUTADORES

Originalmente, o computador foi inventado para resolver problemas matemáticos e aprimorar o processamento de dados numéricos. Foram mais de 150 anos para as máquinas gigantescas se transformarem em aparelhos portáteis que hoje navegam na internet, transmitem mensagens em tempo real e reproduzem conteúdos multimídia.

Século XIX — **1840** — **Século XX**

Pai dos computadores

No século XIX, o inglês Charles Babbage projetou a Máquina Analítica, que continha uma unidade de lógica aritmética, estruturas de controle de fluxo e uma memória integrada – tudo mecânico! A máquina não tinha componentes eletrônicos.

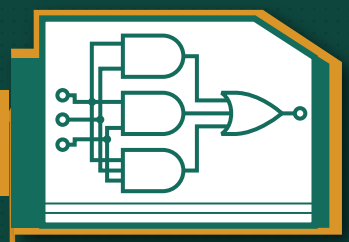


Primeira programadora

Em 1843, a matemática Ada Lovelace criou um algoritmo que podia ser processado pela invenção de Babbage. Ela traduziu um artigo italiano sobre a máquina e incluiu várias notas, entre as quais estava o primeiro programa de computador.

Lovelace era filha do poeta Lord Byron e foi homenageada pelo Departamento de Defesa dos EUA, que deu o seu nome à linguagem de programação Ada.

SCIENCE MUSEUM, LONDRES



Circuitos digitais

O matemático inglês George Boole teve grande influência na criação dos circuitos digitais. Em 1847, defendeu um tratamento matemático para a lógica e, em 1854, introduziu o formalismo que conhecemos como Álgebra Booleana.

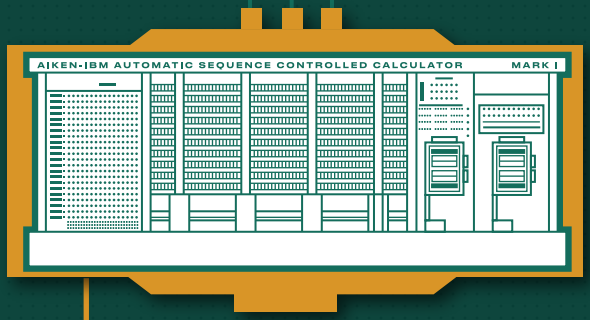
KEYSTONE/GETTY IMAGES

Claude Shannon (1916-2001)
O americano é considerado o "pai da teoria da informação" e criou a teoria dos circuitos digitais. Ele utilizou a Álgebra Booleana para estabelecer os fundamentos teóricos dos circuitos digitais, sem os quais não existiriam computadores ou celulares.

Objetivos do capítulo

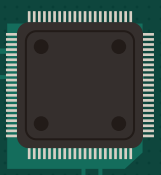
- Compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente.
- Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.
- Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.
- Resolver problemas usando uma linguagem de programação.

ILUSTRAÇÃO: GUILHERME HENRIQUE



Computação moderna

Em 1946, concluiu-se a construção do ENIAC (*Electrical Numerical Integrator and Calculator*), que foi pioneiro na categoria dos computadores eletrônicos, capaz de executar várias operações sem a necessidade de movimentar peças manualmente.



COBIS HISTORICAL/GETTY IMAGES

Criado por John Eckert, John Mauchly e com consultorias de John von Neumann na Universidade da Pensilvânia, o ENIAC ocupava uma sala inteira. Tinha 25 metros de comprimento, 5,5 metros de altura e pesava cerca de 30 toneladas. Foi a partir do ENIAC que von Neumann desenvolveu a arquitetura mundialmente conhecida dos computadores.

Calculadora gigante

Durante a Segunda Guerra Mundial surgiu a Mark I, desenvolvida em Harvard (1944). Essa máquina foi projetada para realizar cálculos de balística durante a guerra.

SCIENCE SOURCE/FOTOARENA

Grace Hopper (1906-1992)
Foi analista de sistemas da Marinha americana. Iniciou sua carreira no projeto Mark I, em Harvard, e foi quem desenvolveu a linguagem *Flow-Matic*, que deu origem ao COBOL, utilizado até os dias de hoje.

Reduzindo o tamanho

As próximas etapas na história dos computadores, de 1960 a 1970, podem ser resumidas à busca por máquinas mais compactas e tecnologias mais baratas, permitindo a produção em série.

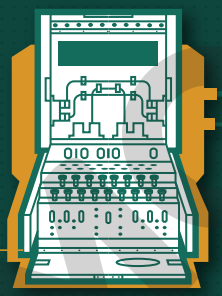
Corrida tecnológica

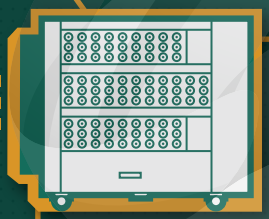
Os computadores atuais são derivados de invenções, estudos e ideias desenvolvidos ao longo de mais de um século. Mesmo os aparelhos portáteis, como *smartphones*, utilizam a mesma base.
A corrida agora não é por uma máquina melhor, mas pela tecnologia integrada – que permita realizar várias tarefas com apenas um dispositivo.

1940 | 1960 | 1970 | Século XXI

Evolução tecnológica

A Segunda Guerra Mundial foi o marco do desenvolvimento do computador, que era utilizado para decifrar mensagens criptografadas dos alemães nazistas, geradas pela máquina Enigma.





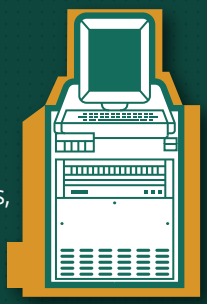
Alan Turing (1912-1954)
Considerado o "pai" da Ciência da Computação e da inteligência artificial, o britânico criou a Máquina de Turing – abstração que modela qualquer computador digital. Além de modelos abstratos, Turing também desenvolveu a "Bombe" (1941), que decifrava mensagens criptografadas pelos alemães nazistas.

Além da "Bombe", outra máquina destinada à quebra de criptografia foi criada em Bletchley Park.
O Colossus foi considerado um dos primeiros computadores eletrônicos da história (1944).

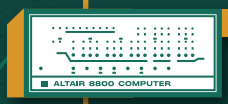
LOUIS BERK/ALAMY/FOTOARENA

Computador pessoal

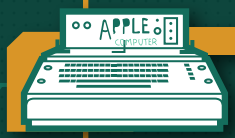
A partir dos anos 1970, começam a aparecer os circuitos integrados e os microprocessadores.
É a era dos computadores pessoais, menores e mais acessíveis.



Lançamentos que marcaram a época



1975
O Altair 8800 foi a revolução na era dos computadores. Além de ser mais rápido, ele cabia em uma mesa e tinha 256 *bytes* de memória.



1976
É lançado o Apple I, considerado o primeiro computador pessoal com monitor.

1983
Surge no mercado o Lisa, que tinha *mouse* e interface gráfica, com menus, pastas e área de trabalho. Antes dele, a interação era feita com comandos de texto.

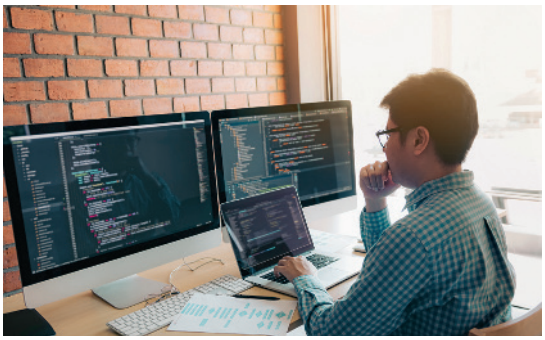
Dados obtidos em: Computer History Museum. Disponível em: <https://www.computerhistory.org/timeline/>; ENIAC at Penn Engineering. Disponível em: <https://www.seas.upenn.edu/about/history-heritage/eniac/>; The MARK I Computer at Harvard University. Disponível em: <http://sites.harvard.edu/~chsi/markone/about.html>; Enciclopédia Britannica. Disponível em: <https://www.britannica.com/>. Acessos em: 7 ago. 2020.

Ao longo desse capítulo as competências gerais **1**, **2**, **4** e **5** da BNCC são favorecidas, na medida em que, além de uma abordagem histórica da criação do computador, traz conceitos para os alunos utilizarem a tecnologia como ferramenta.

1 Algoritmos

Os conceitos acerca dos algoritmos são apresentados sob o aspecto de três linguagens distintas: a corrente, a visual (fluxograma) e a de programação. Nesse sentido, os alunos poderão transitar pelos diferentes registros, bem como modelar e construir soluções para os problemas apresentados em cada um deles.

Como vimos na abertura deste capítulo, os computadores já foram artefatos puramente mecânicos. A evolução dessas máquinas permitiram a realização de cálculos cada vez mais rápidos e mais precisos. Entretanto, por serem máquinas, mesmo com a existência da inteligência artificial, os computadores fazem somente aquilo para o que foram criados e programados.



WUTZKOHPHOTO/SHUTTERSTOCK

Os computadores, como o próprio nome diz, permitem computar, ou seja, calcular. Nesse aspecto, é importante ter em mente que há inúmeras camadas de abstrações da parte física (*hardware*) até a interface de interação com a máquina (*software*) cujos dispositivos de entrada (*input*) são, por exemplo, o teclado e o *mouse*. Dependendo dessas abstrações, esses cálculos não são apenas numéricos ou procedimentos das operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, mas, sim, algo que vai muito além disso, permitindo a realização de ações e tarefas, como buscas de palavras em textos, criptografia de mensagens, reconhecimento facial, processamento de dados, entre outras.

Nesse tópico, trabalha-se extensivamente a habilidade da BNCC **EM13MAT315**, pois os alunos adquirem conhecimentos, em profundidade, sobre algoritmos e suas estruturas para modelar e resolver problemas. O desenvolvimento dessa habilidade consona com as competências específicas **3** e **4** de Matemática, pois transita entre diferentes registros do conceito de algoritmo e permite uma abordagem diferente durante a resolução de problemas.

Quando se fala em computação, uma palavra-chave é **algoritmo**. No entanto, esse não é um termo exclusivo da computação e se faz presente, por exemplo, na Matemática. Você já deve ter lido ou escutado a palavra algoritmo em algum momento tendo, inclusive, executado algum. Talvez se lembre de "o algoritmo da divisão" ou "o algoritmo do mínimo múltiplo comum". Esse termo geralmente está associado à execução de uma sequência de instruções ou passos.

Uma analogia interessante para compreender o significado de algoritmo é pensá-lo como uma receita culinária. Quando vamos preparar uma iguaria, é necessário reunir os ingredientes e as quantidades certas e seguir corretamente o passo a passo da receita. No contexto da Matemática, veja um exemplo de algoritmo de uma construção geométrica.

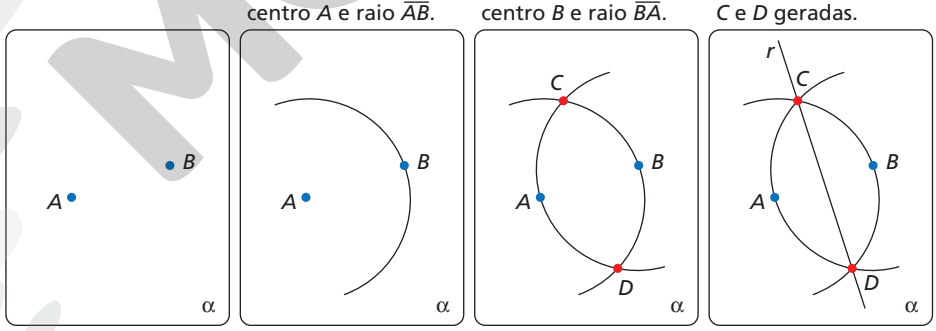
Observação

A **mediatriz** é o lugar geométrico do plano que contém todos os pontos que equidistam de dois pontos dados.

Exemplo

Dados dois pontos A e B, contidos num plano α, construir a mediatriz relativa a esses dois pontos.

1. Trace uma semicircunferência de centro A e raio $\overline{AB}$.
2. Trace uma semicircunferência de centro B e raio $\overline{BA}$.
3. Trace uma reta r que passe pelas intersecções C e D geradas.



A reta r é mediatriz relativa aos pontos A e B.

Reflita

Prove que a reta r é mediatriz relativa aos pontos A e B.

Como $AB = AD = AC$, pois são raios da circunferência de centro A e $BA = BC = BD$, pois são raios da circunferência de centro B, os pontos A, C, B e D são vértices de um losango, sendo assim, a reta r intersecta o segmento $\overline{AB}$ em seu ponto médio (propriedade dos losangos) e ainda a reta r é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ (propriedade dos losangos). Portanto r é mediatriz relativa aos pontos A e B.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Um **algoritmo** é uma sequência finita e bem definida de passos para realizar uma tarefa.

No geral, os algoritmos recebem algum valor de **entrada**, executam operações e verificações com base nessa entrada, produzindo uma **saída**. No exemplo anterior, a entrada é composta por dois pontos, A e B, com base nos quais o algoritmo produz uma saída, isto é, a mediatriz.

Este capítulo trabalha extensivamente o pilar **algoritmo**, do *pensamento computacional*. Os estudantes começarão desenvolvendo algoritmos e representando-os em linguagem corrente e em fluxogramas. Em seguida, apresenta-se uma linguagem de programação para que a teoria tenha possibilidade de ser empregada na prática, fortalecendo os conhecimentos adquiridos e aumentando as possibilidades de aplicação do que foi estudado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

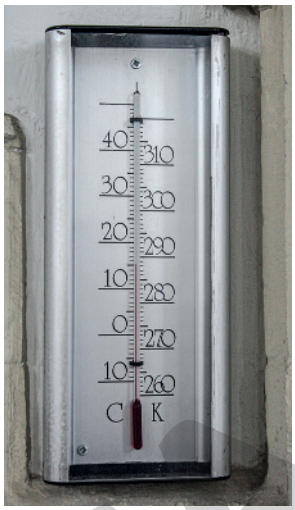
MODERNA

A seguir, veremos alguns conceitos para a construção de algoritmos que estão ligados à resolução de problemas utilizando um computador como ferramenta. Assim, pode-se representar o algoritmo de algumas maneiras distintas. O algoritmo para a construção da mediatriz está representado em linguagem corrente, e veremos como representar um algoritmo graficamente por meio de um esquema, chamado fluxograma.

1.1 Variáveis e atribuição de valor

Um conceito importante ao lidarmos com algoritmos é o de **variáveis**. Nesse contexto, a ideia de variável é um pouco diferente daquela que está habituado a trabalhar em Álgebra. Podemos pensar nessas variáveis como recipientes para guardar valores. Os valores são armazenados nas variáveis por meio de uma operação denominada **atribuição de valor**, que será denotada pelo símbolo "←". Para ilustrar esses conceitos, apresentamos outro exemplo de algoritmo: a conversão de uma temperatura em grau Celsius para Kelvin.

Podemos descrever o processo de conversão a partir da relação $T_C + 273 = T_K$, em que T_C é a temperatura em grau Celsius e T_K é a temperatura em Kelvin. No exercício resolvido a seguir, as variáveis consideradas são c e k para as temperaturas em grau Celsius e em Kelvin, respectivamente.



MARTINVL/CC BY-SA 3.0/WIKIMEDIA

Termômetro registrando a temperatura na escala Celsius e na escala Kelvin.

Exercício resolvido

R1. Simular o algoritmo de conversão de grau Celsius para Kelvin exibindo o valor das variáveis antes e depois do processo.

Dada a temperatura em grau Celsius na variável c, converter para Kelvin na variável k.

Passo 1. Faça $k \leftarrow c + 273$. Encerra-se o algoritmo.

a) Converter 30 °C para Kelvin. **b)** Converter −200 °C para Kelvin.

▸ **Resolução**

a)

Antes da simulação		
Variável	c	k
Valor	30	desconhecido

Passo 1. Faça $k \leftarrow c + 273$. Encerra-se o algoritmo.

A variável k recebe o valor da expressão da adição da temperatura em grau Celsius com 273. Assim, k passa a conter o valor da expressão calculada, ou seja, 303 K.

Depois do passo 1		
Variável	c	k
Valor	30	303

b)

Antes da simulação		
Variável	c	k
Valor	−200	desconhecido

Passo 1. Faça $k \leftarrow c + 273$. Encerra-se o algoritmo.

Novamente, k recebe o valor de $c + 273$, isto é, $-200 + 273 = 73$.

Depois do passo 1		
Variável	c	k
Valor	−200	73

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

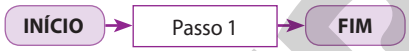
No exercício resolvido **R1**, há duas variáveis, *c* e *k*, que representam as temperaturas em grau Celsius e em Kelvin. Podemos dizer que *c* e *k* são os nomes, ou os rótulos, dessas variáveis. No contexto de algoritmos e programação, os rótulos são importantes para deixar claro o que as variáveis armazenam. Para rotulá-las adequadamente, há uma série de boas práticas adotadas. Por exemplo, os rótulos podem:

- ser formados por apenas uma letra minúscula;
- conter letras e números, desde que não comece com números e não tenha acentuação;
- ser uma palavra completa ou mais de uma palavra, sem separá-las por espaço.

Veja exemplos de rótulos adequados e inadequados.

Nomes de acordo com as boas práticas	Nomes em desacordo com as boas práticas
x *celsius* *avaliacao3* *mediaAritmetica* *soma*	*1valor* *B* *Avaliacao* *avaliação1* *média aritmética*

O algoritmo da conversão de temperaturas é bastante direto e formado por um único passo. Há outras maneiras de representar esse algoritmo a fim de compreender o que deve ser feito e como está sendo feito. Uma delas é utilizando um recurso gráfico chamado fluxograma.



NELSON MATSUDA

As figuras representadas no fluxograma têm seu significado. No caso do algoritmo acima, os retângulos com cantos arredondados nas extremidades indicam um símbolo terminal, utilizados para representar o início e o fim de um algoritmo. Os retângulos intermediários indicam um passo, que pode ser compreendido como um processo ou uma operação.

Nas seções seguintes, apresentamos algumas estruturas de organização do pensamento que viabilizam a construção de algoritmos mais sofisticados, que podem resolver problemas mais complexos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. A partir de cada quadro, determine o valor de cada variável após as operações de atribuição de valor indicadas.

a)

x	*y*	*z*	*w*
3 1	2	1 3	0 1

$w \leftarrow z$
$z \leftarrow x$
$x \leftarrow w$

b)

a	*b*	*c*	*d*
3 6	2 4	1 2	0 2

$d \leftarrow b$
$a \leftarrow d \cdot a$
$b \leftarrow d \cdot b$
$c \leftarrow d \cdot c$

c)

alfa	*beta*	*gama*	*phi*
0,5 3	2,5 4	1,5	0 12

$alfa \leftarrow alfa + beta$
$beta \leftarrow beta + gama$
$phi \leftarrow alfa \cdot beta$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

d)

r	*s*	*t*	*u*
1	1	0 2	0 3

$t \leftarrow r + s$

$u \leftarrow s + t$

TOMAS RAGINA/SHUTTERSTOCK

2. Escreva um algoritmo em linguagem corrente que converta uma temperatura dada em grau Celsius para grau Fahrenheit. Considere a relação: $9T_C = 5(T_F - 32)$, em que T_C e T_F são números reais positivos que representam as temperaturas em graus Celsius e Fahrenheit, respectivamente.

3. Todos os funcionários de uma empresa receberão um percentual de reajuste que depende do cargo que ocupam. Escreva um algoritmo em linguagem corrente que, dados dois números reais positivos, o salário e o percentual de reajuste, armazena numa variável de rótulo *novoSalario*, o valor do salário já com o reajuste.

4. Elabore um algoritmo em linguagem corrente que, dados os valores de capital, taxa e tempo, todos números reais positivos, determina o juro simples a ser pago por um empréstimo.

2. Resposta possível:
Dada uma temperatura *c*, em grau Celsius, converter para grau Fahrenheit.
Passo 1. Seja *f* uma temperatura em Fahrenheit, faça $f \leftarrow \frac{9}{5}c + 32$.
O algoritmo termina.

3. Resposta possível:
Dado um salário *s* (número real positivo) e uma taxa de reajuste *r* (número real positivo), determinar o novo salário na variável *novoSalario*.
Passo 1. Faça
$novoSalario \leftarrow (1 + r) \cdot s$.
O algoritmo termina.

4. Resposta possível:
Dados *capital*, *taxa* e *tempo*, números reais positivos, determinar o juro a ser pago por um empréstimo na variável *juro*.
Passo 1. Faça
$juro \leftarrow capital \cdot taxa \cdot tempo$.
O algoritmo termina.

1.2 Entrada e saída de dados

No algoritmo da conversão de temperatura em grau Celsius para grau Fahrenheit, a temperatura em grau Celsius foi dada. Isso significa que esse era o valor de **entrada** do algoritmo e, a partir dele, produziu-se a **saída**, que é o valor da temperatura em grau Fahrenheit. Podemos detalhar mais os algoritmos para que a entrada fique bem definida e a saída seja identificada. Veja a descrição do mesmo algoritmo, mas agora com esses detalhes explícitos.

Passo 1. Faça *c* receber um valor de entrada.

Passo 2. Faça $k \leftarrow c + 273$.

Passo 3. Devolva *k* como saída e encerra-se o algoritmo.

Esse algoritmo pode ser representado por meio de um fluxograma, com o símbolo que identifica a entrada e a saída: um paralelogramo.

NELSON MATSUDA

1.3 Controles de fluxo

Durante a execução de um algoritmo, é útil fazer verificações dos valores de variáveis. Imagine uma situação em que um aplicativo de previsão do tempo, além de fornecer as informações sobre o clima e o tempo, emite alertas com sugestões amigáveis para seus usuários. O aplicativo pode ter, por exemplo, uma variável que armazena a temperatura atual. Ao analisar o valor dessa variável, pode-se tomar uma decisão a respeito de qual alerta enviar aos usuários de determinada região. Por exemplo: se a temperatura for menor ou igual a 21 °C, pode-se sugerir aos usuários que coloquem um agasalho; senão, pode-se sugerir uma roupa mais fresca.

MCLITTLE STOCK/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se julgar pertinente, comentar com os alunos que os valores *verdadeiro* ou *falso* advêm da Álgebra Booleana, que serviu de base teórica para a construção dos circuitos integrados que, por sua vez, deram origem à computação moderna.

Essa análise faz ainda mais sentido se o aplicativo monitorar constantemente a temperatura, isto é, pode-se pensar que enquanto a temperatura não atingir determinado valor, não é necessário emitir um alerta.

Ao projetarmos um algoritmo, há palavras que ajudam a perceber o fluxo de execução dos passos. Os tópicos a seguir apresentam algumas estruturas que auxiliam nesse controle de fluxo.

Observação

As variáveis, no contexto dos algoritmos, podem armazenar valores diferentes de números. É possível armazenar uma letra, uma palavra ou até mesmo uma frase. Além disso, uma variável pode receber um valor do tipo "verdadeiro" ou "falso".

Estrutura de decisão

Quando estruturamos uma sentença em que há ocorrência de "se", geralmente caímos num contexto em que é necessário tomar uma decisão, baseada na avaliação de uma condição, que pode ser verdadeira ou falsa. No exemplo anterior, a decisão era a recomendação do uso de um agasalho ou de uma roupa mais fresca. No contexto de um algoritmo, essa decisão significa executar ou um conjunto de passos ou outro. Essa estrutura que seleciona o conjunto de passos que serão executados recebe o nome de **estrutura de decisão**.

Reflita

No exercício resolvido **R2**, considera-se que, se o resto da divisão de um número natural por 2 é 0, então o número é par. Por quê?

Espera-se que os alunos percebam que, se o resto da divisão de um número natural por 2 é 0, então esse número é múltiplo de 2; portanto, o número é par.

Exercício resolvido

R2. Simular um algoritmo que verifica se um número natural é par. A entrada do algoritmo é um número natural e a saída deve ser "verdadeiro" se o número for par, ou "falso" se o número for ímpar.

Verificar se um número natural n é par. Se n for par, a variável *paridade* deve receber o valor "verdadeiro", no caso contrário, deve receber o valor "falso".

Passo 1. Faça n receber um número natural de entrada.

Passo 2. Faça a divisão de n por 2, no conjunto dos naturais, e seja r o resto dessa divisão.

Passo 3. O valor de r é igual a 0? Se sim, então o número é par, siga para o **passo 4**. Senão, o número é ímpar e siga para o **passo 5**.

Passo 4. Faça *paridade* ← *verdadeiro*. Vá para o **passo 6**.

Passo 5. Como r é diferente de 0, faça *paridade* ← *falso*.

Passo 6. A variável *paridade* contém o valor de saída. O algoritmo termina.

a) Verificar para $n = 73$. **b)** Verificar para $n = 112$.

▸ **Resolução**

a)

Antes da simulação			
Variável	n	r	*paridade*
Valor	desconhecido	desconhecido	desconhecido

Passo 1. Faça n receber um número natural de entrada.

Passo 1			
Variável	n	r	*paridade*
Valor	73	desconhecido	desconhecido

Passo 2. Faça a divisão de n por 2, no conjunto dos naturais, e seja r o resto dessa divisão.
Ao dividirmos 73 por 2, o quociente é 36 e o resto é 1. Então $r \leftarrow 1$.

Passo 2			
Variável	n	r	*paridade*
Valor	73	1	desconhecido

Passo 3. O valor de r é igual a 0? Se sim, então o número é par, siga para o **passo 4**. Senão, o número é ímpar e siga para o **passo 5**.
Como $r \neq 0$, pula-se o **passo 4**, indo direto ao **passo 5**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Passo 5. Como r é diferente de 0, faça *paridade* ← *falso*.

Passo 5			
Variável	n	r	*paridade*
Valor	112	0	falso

Passo 6. A variável *paridade* contém o valor de saída. O algoritmo termina.

b)

Antes da simulação			
Variável	n	r	*paridade*
Valor	desconhecido	desconhecido	desconhecido

Passo 1. Faça n receber um número natural de entrada.

Passo 1			
Variável	n	r	*paridade*
Valor	112	desconhecido	desconhecido

Passo 2. Faça a divisão de n por 2, no conjunto dos naturais, e seja r o resto dessa divisão.

Ao dividirmos 112 por 2, o quociente é 56 e o resto é 0. Então $r \leftarrow 0$.

Passo 2			
Variável	n	r	*paridade*
Valor	112	0	desconhecido

Passo 3. O valor de r é igual a 0? Se sim, então o número é par, siga para o **passo 4**. Senão, o número é ímpar e siga para o **passo 5**.

Como $r = 0$, segue-se ao **passo 4**.

Passo 4. Faça *paridade* ← *verdadeiro*. Vá para o **passo 6**.

Atualiza-se o valor da variável paridade e pula-se para o **passo 6**.

Passo 4			
Variável	n	r	*paridade*
Valor	112	0	verdadeiro

Passo 6. A variável *paridade* contém o valor de saída. O algoritmo termina.

Uma estrutura de decisão também pode ser representada em um fluxograma. O símbolo utilizado para representar esse passo é um losango. Veja ao lado a representação do algoritmo sobre a paridade de um número natural.

Note que, assim como no algoritmo em linguagem corrente, o **passo 3** é o que define o fluxo de execução do algoritmo. Se no **passo 3** o valor do resto for igual a 0, segue-se para o **passo 4**. No caso de o valor do resto ser diferente de 0, segue-se para o **passo 5**.

Exercícios propostos

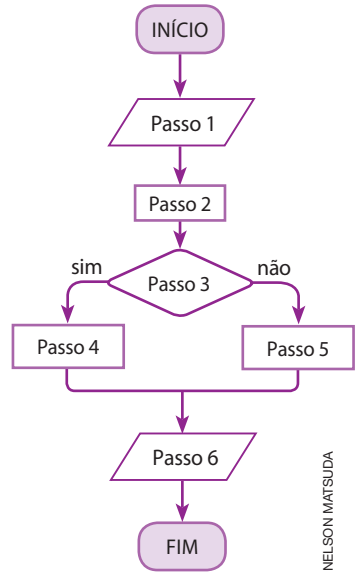
Registre as respostas em seu caderno.

5. Crie um algoritmo em linguagem corrente que receba dois números inteiros como entrada e determina o maior deles, enviando-o como saída.

6. Uma mercearia faz promoções dependendo da quantidade de frutas compradas. Por exemplo, se o consumidor levar menos que 1 dúzia de bananas, cada uma custa R$ 0,80. Ao comprar pelo menos uma dúzia, as bananas custam R$ 0,50 cada. Elabore um algoritmo que calcule o valor a ser pago por n bananas.

5. Resposta possível:
Dados dois inteiros nas variáveis *num1* e *num2*, determinar o maior entre eles e guardar esse valor na variável *maior*, que é entregue como saída.
Passo 1. Faça *num1* e *num2* receberem, cada uma, um dos números inteiros da entrada.
Passo 2. Se *num1* < *num2*, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 3. Como *num1* é menor que *num2*, faça *maior* ← *num2*. Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Como *num1* não é menor que *num2*, então ele é maior ou igual a ele. Assim, faça *maior* ← *num1*.
Passo 5. A variável *maior* contém o maior número. Encerra-se o algoritmo.

6. Resposta possível:
Dado n natural, determinar na variável *preco* o valor a ser pago por n frutas.
Passo 1. Faça n receber o valor de entrada.
Passo 2. Se $n < 12$, siga para o **passo 3**. Caso contrário, siga para o **passo 4**.
Passo 3. Faça *preco* ← 0,8 · n. Vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *preco* ← 0,5 · n.
Passo 5. A variável *preco* contém o valor final da compra. Encerra-se o algoritmo.



Verificar se os alunos têm alguma dúvida sobre os símbolos do fluxograma. Solicitar a eles que relacionem o fluxo de execução do algoritmo apresentado no exercício resolvido **R2** com o fluxograma acima, verbalizando o caminho percorrido nos itens **a** e **b** do exercício.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7. Resposta possível:
Dadas as notas de entrada, armazenadas nas variáveis *n*1 e *n*2, calcular a média aritmética (variável *media*) e, na variável *aprovacao*, armazenar "verdadeiro" se a média for maior ou igual a 5 ou "falso" se a média for menor que 5.
Passo 1. Faça *n*1 e *n*2 armazenarem, cada uma, um dos valores de entrada.
Passo 2. Faça *media* ← $\frac{n1 + n2}{2}$.
Passo 3. Se *media* ⩾ 5, vá para o **passo 4**. Senão, vá para o **passo 5**.
Passo 4. Faça *aprovacao* ← ← *verdadeiro*. Vá para o **passo 6**.
Passo 5. Faça *aprovacao* ← *falso*.
Passo 6. A variável *aprovacao* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

7. Escreva um algoritmo em linguagem corrente no qual, dadas duas notas de provas de um aluno, calcule-se a média aritmética entre elas. Use uma variável denominada *aprovacao* que deve receber "verdadeiro" se a média for maior ou igual a 5, ou "falso" se for menor que 5.

8. Dados três números inteiros positivos como entrada, crie um algoritmo em linguagem corrente que determine o menor entre eles.

Ver resolução no Guia do professor.

Repetições

Outra estratégia de controle do fluxo da execução de um algoritmo diz respeito às repetições. Em alguns algoritmos, pode ser interessante realizar a execução de um conjunto de passos enquanto uma condição não for verificada como verdadeira (ou falsa). Outra situação é a necessidade de se executar um conjunto de passos um número específico de vezes.

Um exemplo cotidiano é a correção da lista de exercícios que foram entregues ao professor de Matemática: enquanto houver lista na pilha de listas, o professor toma uma lista em mãos e faz a correção, atribuindo uma nota a ela. Nesse caso, a condição a ser verificada é a existência de lista na pilha de listas e a correção continua enquanto elas não acabarem.

Observação

Cada vez que um conjunto de passos é executado por completo na repetição, dá-se o nome de **iteração**.

Observação

HULTON ARCHIVE/GETTY IMAGES-REAL SOCIEDADE ASTRONÔMICA, LONDRES

Euclides foi um matemático grego, que viveu por volta de 300 a.C. O algoritmo do exercício resolvido ao lado foi definido a partir das ideias presentes no sétimo livro de *Os Elementos*, sua grande obra que reunia muito do conhecimento matemático da época. Euclides viveu e ensinou Matemática em Alexandria, no Egito, e por isso é conhecido também como Euclides de Alexandria.

Exercício resolvido

R3. Simular para $a = 224$ e $b = 128$ o algoritmo que determina o máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros positivos não nulos.

Dados dois inteiros positivos e não nulos, a e b em que $a > b$, encontrar o máximo divisor comum entre eles, isto é, o maior inteiro positivo que divide tanto a quanto b.

Passo 1. Faça a e b receberem seus valores inteiros positivos e não nulos da entrada.

Passo 2. Divida a por b e tome r como o resto dessa divisão ($0 \leqslant r < b$).

Passo 3. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 4**.

Passo 4. Faça $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$. Volte para o **passo 2**.

Passo 5. A variável b é a saída, contendo o MDC. Encerra-se o algoritmo.

▸ **Resolução**

Antes da simulação			
Variável	a	b	r
Valor	desconhecido	desconhecido	desconhecido

Passo 1. Faça a e b receberem seus valores inteiros positivos e não nulos da entrada.

Passo 1			
Variável	a	b	r
Valor	224	128	desconhecido

Passo 2. Divida a por b e tome r como o resto dessa divisão ($0 \leqslant r < b$).

Ao dividirmos 224 por 128, o quociente é 1 e o resto é 96, isto é:
$224 = 128 \cdot 1 + 96$. Assim, $r \leftarrow 96$.

Passo 2			
Variável	a	b	r
Valor	224	128	96

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Passo 3. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 4**.

Como o valor de r é diferente de 0, seguimos para o **passo 4**.

Passo 4. Faça $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$. Volte para o **passo 2**.

Passo 4			
Variável	a	b	r
Valor	128	96	96

Passo 2. Divida a por b e tome r como o resto dessa divisão ($0 \leqslant r < b$).

Nesse passo, encontramos $128 = 96 \cdot 1 + 32$. Então $r \leftarrow 32$.

Passo 2			
Variável	a	b	r
Valor	128	96	32

Passo 3. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 4**.

O valor de r ainda é diferente de 0, portanto, deve-se novamente executar o **passo 4**.

Passo 4. Faça $a \leftarrow b$, $b \leftarrow r$. Volte para o **passo 2**.

Realizamos as atribuições de valores, em que $a \leftarrow 96$ e $b \leftarrow 32$.

Passo 4			
Variável	a	b	r
Valor	96	32	32

Passo 2. Divida a por b e tome r como o resto dessa divisão ($0 \leqslant r < b$).

Na terceira iteração, temos $96 = 32 \cdot 3 + 0$, ou seja, a divisão é exata e gera resto 0. Fazemos $r \leftarrow 0$.

Passo 2			
Variável	a	b	r
Valor	96	32	0

Passo 3. Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 4**.

Finalmente obtivemos $r = 0$, dessa maneira o algoritmo vai para o **passo 5**.

Passo 5. A variável b é a saída, contendo o MDC. Encerra-se o algoritmo.

Uma vez que a variável b termina com o valor 32, concluimos que o MDC(224, 128) = 32.

Reflita

Note que, ao final do **passo 4**, a variável r manteve seu valor, pois não houve operações que a alterasse. Perceba, também, que o valor da variável a se perdeu devido às operações. O que aconteceria se a ordem tivesse sido outra? Simule em seu caderno as operações "$b \leftarrow r$" seguida de "$a \leftarrow b$" com os valores que chegaram do **passo 3**.

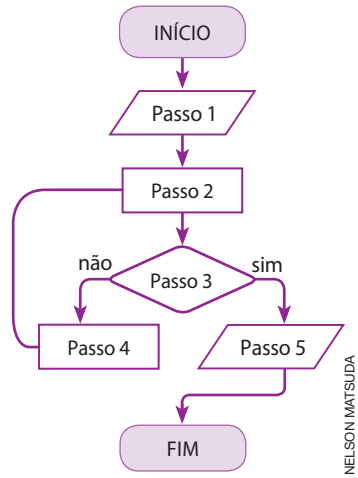
Se as operações tivessem sido realizadas nessa ordem, então os valores das variáveis seriam $a = 96$, $b = 96$ e $c = 96$.

Reflita

- Utilizando a decomposição em números primos, verifique que 32 é o MDC entre 224 e 128. • $224 = 2^5 \cdot 7$ e $128 = 2^7$, portanto, o MDC é $2^5 = 32$.
- Simule em seu caderno o algoritmo para os valores 5 e 3 para as variáveis a e b, respectivamente. • A variável b termina com o valor 1 e MDC(5, 3) = 1.

O esquema ao lado ilustra o algoritmo do MDC, analisado no exercício resolvido **R3**. Repare que a repetição pode ser observada como um "laço" que liga o **passo 4** ao **passo 2**. Devido a maneira como os passos se relacionam, pode-se chamar uma estrutura como essa de laço de repetição.

Por se tratar de um laço de repetição é importante que exista uma variável de controle para que as repetições terminem em algum momento. No algoritmo do cálculo do MDC, essa variável é r. Note que, ao encontrar o MDC, sendo ele 1 ou não, r será 0.



NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

O **fatorial** de um número natural n é representado por $n!$ (lemos: "n fatorial") e é definido por:
$n! =$
$= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot$
$\cdot 2 \cdot 1$, para $n \geqslant 2$
Considera-se que: $1! = 1$ e $0! = 1$.

Reflita

Na construção de um algoritmo, dependendo da estratégia adotada, o valor de inicialização de uma variável é de grande importância. O que aconteceria se a variável *fat* iniciasse com o valor 0?

Se o valor inicial fosse 0, o produto no **passo 4** seria sempre 0 e o algoritmo estaria incorreto.

Exercício resolvido

R4. Simular, para $n = 3$, o algoritmo que determina o fatorial de um número natural.
Dado um número natural n, determinar na variável *fat* o fatorial de n.
Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.
Passo 2. Faça $fat \leftarrow 1$.
Passo 3. O valor de n é menor ou igual a 1? Se sim, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 4. Faça $fat \leftarrow fat \cdot n$.
Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Vá para o **passo 3**.
Passo 6. A variável *fat* é a saída e tem o valor do fatorial de n. Encerra-se o algoritmo.

▸ **Resolução**

Antes da simulação		
Variável	n	*fat*
Valor	desconhecido	desconhecido

Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.

Passo 1		
Variável	n	*fat*
Valor	3	desconhecido

Passo 2. Faça $fat \leftarrow 1$.
Inicializa-se a variável *fat* com o valor 1.

Passo 2		
Variável	n	*fat*
Valor	3	1

Passo 3. O valor de n é menor ou igual a 1? Se sim, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.
Como $n = 3$, seguimos para o **passo 4**.
Passo 4. Faça $fat \leftarrow fat \cdot n$.
A variável *fat* recebe o valor de $1 \cdot 3$.

Passo 4		
Variável	n	*fat*
Valor	3	3

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Vá para o **passo 3**.
Atualiza-se a variável de controle n para que o algoritmo termine quando ela atingir 1. O fluxo retorna ao **passo 3**.

Depois do quarto passo (1ª iteração)		
Variável	n	*fat*
Valor	2	3

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Passo 3. O valor de n é menor ou igual a 1? Se sim, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.

Como $n = 2$, seguimos para o **passo 4**.

Passo 4. Faça $fat \leftarrow fat \cdot n$.

A variável *fat* recebe o valor de $3 \cdot 2$.

Passo 4		
Variável	*n*	*fat*
Valor	2	6

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Vá para o **passo 3**.

Atualiza-se a variável de controle n para que o algoritmo termine quando ela atingir 1. O fluxo retorna ao **passo 3**.

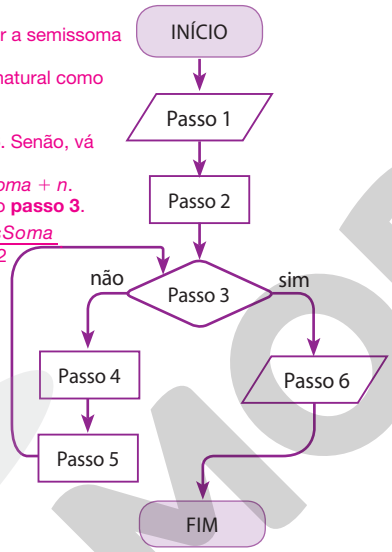
Passo 3. O valor de n é menor ou igual a 1? Se sim, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.

Como $n = 1$, dessa vez altera-se o fluxo para o **passo 6**.

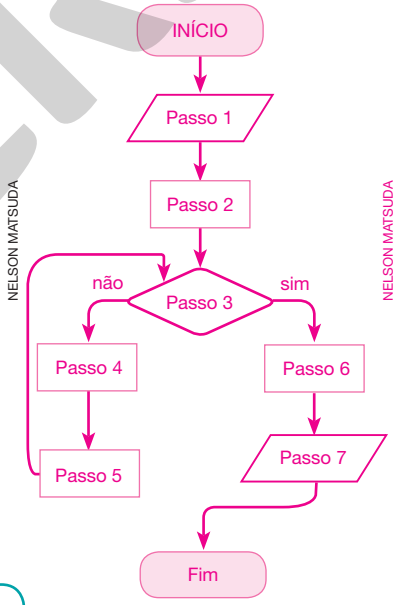
Passo 6. A variável *fat* é a saída e tem o valor do fatorial de n. Encerra-se o algoritmo.

O fluxograma a seguir representa o algoritmo do cálculo de fatorial de n estudado no exercício resolvido **R4**.

9. Resposta possível:
Dado n um número natural, determinar a semissoma dos n primeiros números naturais.
Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.
Passo 2. Faça *semisSoma* ← 0.
Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.
Passo 4. Faça *semisSoma* ← *semisSoma* + n.
Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.
Passo 6. Faça *semisSoma* ← $\frac{semisSoma}{2}$
Passo 7. A variável *semisSoma* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.



NELSON MATSUDA



NELSON MATSUDA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

9. Dado um número natural n, construa um algoritmo em linguagem corrente que armazene, na variável *semisSoma*, a semissoma dos n-ésimos primeiros números naturais. Em seguida, construa o fluxograma que represente esse algoritmo.

10. Dado um número natural n, construa um algoritmo em linguagem corrente que armazene na variável *soma* a soma dos n primeiros termos da sequência dada por $a_n = 2n + 1$. Ver resolução no Guia do professor.

11. Para k natural não nulo, crie um algoritmo em linguagem corrente que determine o k-ésimo termo da sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci S_F é dada por: Ver resolução no Guia do professor.

$$S_F(k) = \begin{cases} 1, & k \leq 2 \\ S_F(k-1) + S_F(k-2), & k > 2 \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se na escola houver um laboratório de informática disponível, solicitar que preparem os computadores com o motor da linguagem Python, deixando o editor IDLE com fácil acesso.

Observação

Recomendamos que, se você puder, faça o *download* do motor da linguagem Python que permitirá ler e interpretar suas atividades, bem como testar as resoluções. Os recursos estão disponíveis em: <https://www.python.org/downloads/> (acesso em: 7 ago. 2020).
Para alguns sistemas operacionais, no geral, o instalador do motor da linguagem é acompanhado do ambiente de desenvolvimento integrado IDLE, que permite edição e execução do algoritmo. Caso queira mais informações sobre a instalação, assista a este vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=6RdMCmnosRY> (acesso em: 7 ago. 2020).
Ressaltamos que a versão do motor da linguagem utilizado nesta obra é a 3.8.3. Procure utilizar a mesma versão para evitar comportamentos inesperados durante os testes.

2 Introdução à programação com Python

Nesse tópico, os alunos vão trabalhar com uma linguagem de programação, construindo algoritmos ao modelar e resolver problemas. Dessa maneira, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT405** e das competências específicas **3** e **4** da BNCC.

Os algoritmos que desenvolvemos até agora podem ser simulados com lápis e papel. Com as próximas atividades, não será diferente. Entretanto, para que os algoritmos funcionem num computador, a máquina precisa entender o que cada passo (ou instrução) significa e, para isso, utilizamos uma **linguagem de programação**. Veremos como criar algoritmos utilizando a linguagem Python, bastante difundida no mundo científico para construir programas destinados ao tratamento de dados, a simulações e a experimentos.

Existem diferentes tipos de linguagem de programação e cada uma tem suas particularidades, permitindo realizar a modelagem de situações-problema de maneiras diferentes. A linguagem Python nos permitirá modelar de maneira bastante parecida com a que fizemos até agora usando a linguagem corrente.

METAMORWORKS/SHUTTERSTOCK

Explicar aos alunos que, assim como na Matemática, a linguagem Python – e outras muitas linguagens de programação – é utilizada no mundo todo e, por isso, muitos comandos e palavras-chave estão em inglês.

As linguagens de programação possuem regras, assim como o nosso idioma as possui e que são estudadas em gramática. Em português a sintaxe estuda a posição das palavras na frase e a posição das frases num discurso. Tal qual, uma linguagem de programação tem uma sintaxe, que é um conjunto de regras que determina a ordem e as estruturas para a escrita de um algoritmo. Além disso, as linguagens de programação possuem palavras reservadas para representar estruturas de controle de fluxo e símbolos que representam operações. Veja o quadro a seguir no qual as operações básicas da Matemática são comparadas ao símbolo correspondente da linguagem Python.

Operações em Matemática	Operações em Python
Adição: $a + b$	Adição: $a + b$
Subtração: $a - b$	Subtração: $a - b$
Multiplicação: $a \cdot b$	Multiplicação: $a * b$
Divisão: $a : b$	Divisão: a / b

Na linguagem Python, diferente do que deve estar habituado em Matemática, as expressões numéricas utilizam apenas os parênteses, não empregando chaves e colchetes para esse fim. Por exemplo:

Matemática	Python
$3 + 2\{4 - [2 + 5(4 + 1)]\}$	3 + 2 * (4 – (2 + 5 * (4 + 1)))

Em momentos oportunos, faremos mais comparações entre símbolos matemáticos e seus respectivos representantes na linguagem de programação. No tópico seguinte, você verá como funciona a declaração de uma variável e como se faz para que ela receba um valor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2.1 Declaração de variáveis e atribuição de valores

Nos algoritmos em linguagem corrente as variáveis são declaradas no enunciado ou na descrição dos passos. Veja a comparação do registro de um algoritmo em linguagem corrente com seu registro em Python.

Algoritmo em linguagem corrente	Algoritmo em Python
Passo 1. Faça $a \leftarrow 27$. **Passo 2.** Faça $b \leftarrow 13$. **Passo 3.** Faça soma $\leftarrow a + b$.	1 | `a = 27` 2 | `b = 13` 3 | `soma = a + b`

Nesse algoritmo são inicializadas duas variáveis, *a* e *b*, com números naturais; em seguida, esses números são adicionados e armazenados na variável *soma*. Repare que a operação de atribuição de valor às variáveis, em Python, dá-se pelo sinal de igual "=".

O interpretador da linguagem de programação executa uma linha por vez, na ordem em que aparece no algoritmo. Veja o exemplo a seguir.

Observação

Atente-se ao fato de que o sinal de igual, em Python, representa a operação de atribuição de valor. Dessa maneira, ao escrevermos $x = 10 + y$, não significa equivalência entre as expressões algébricas x e $10 + y$, mas significa que na variável x será armazenado o valor da expressão $10 + y$.

Exemplo

Dada uma temperatura em grau Celsius na variável *c*, o algoritmo converte essa temperatura para Fahrenheit na variável *f*.

```
1 | c = 27
2 | f = 9/5 * c + 32
3 | c = 100
```

Se executarmos esses comandos nessa ordem, o valor da variável *c* mudará de 27 para 100 na linha 3. No entanto, o valor da variável *f* permanece inalterado, sendo calculado uma única vez para o primeiro valor de *c*, que é 27, produzindo o resultado 80,6.

Se a ideia for atualizar o valor da variável *f* sempre que mudarmos o valor da variável *c*, temos de executar a expressão $f = 9 / 5 * c + 32$ sempre que o valor de *c* for alterado.

Os algoritmos em Python, nesta obra, serão organizados em linhas, em que cada uma representará um comando ou cálculo (eventualmente as duas coisas) e serão numeradas com esse padrão: 1 |. Essas linhas estão numeradas para facilitar a citação e a identificação de cada uma durante as explicações. Além disso, perceberão que algumas linhas possuem espaçamento em relação à anterior, como se fosse um parágrafo. Esse recurso de espaçamento se chama **indentação** e é muito importante para o interpretador da linguagem reconhecer a formação de um conjunto de comandos — como comandos dentro de um laço de repetição.

2.2 Entrada e saída de dados

Dependendo da intenção de um algoritmo, é desejável que alguns valores possam ser inseridos diretamente pelo usuário. Por exemplo, quando você acessa uma página da internet que exige usuário e senha, esses valores serão armazenados em variáveis, ainda que por pouco tempo. Algumas operações provavelmente serão realizadas com esses valores, dizendo ao sistema e ao usuário se o cadastro foi encontrado ou se as credenciais inseridas são, de fato, válidas. Esse retorno do sistema se dá em função de uma saída do algoritmo. Outro exemplo é quando o usuário entra com o número de parcelas de uma compra e o algoritmo utiliza essa entrada para efetuar os cálculos a fim de exibir o valor das parcelas para o comprador, em que esse valor é uma saída. Veja como funcionam a entrada e a saída de dados em Python.

Entrada

Conforme foi dito, as linguagens de programação possuem sintaxe e palavras reservadas. Para que, durante a execução de um algoritmo, o computador peça um valor de entrada a um usuário da máquina, é necessário incluir o comando **input(...)** (do inglês, entrada) e ele é usado da seguinte maneira:

O comando input(...) deve ser acompanhado dos parênteses com uma mensagem clara ao usuário, indicando qual é a entrada.

```
valorRecebido = input("Uma mensagem para o usuário...")
```

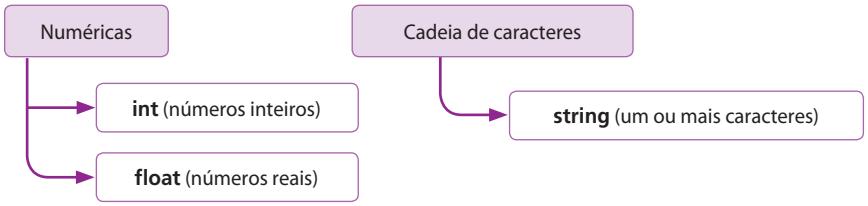
Uma variável armazenará o valor da entrada por meio de uma atribuição de valor.

A mensagem para o usuário deve ficar entre aspas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A variável *valorRecebido* armazenará o valor inserido pelo usuário. Entretanto, dependendo do que será feito no algoritmo e da versão do motor da linguagem Python instalada, a entrada precisa ser tratada antes de sua utilização. Um conceito necessário para que a entrada seja tratada é o de **tipo** de uma variável. Para nossos algoritmos é importante conhecer duas categorias de variáveis: variáveis numéricas e variáveis de cadeia de caracteres.



As variáveis do tipo **int** são números inteiros que podem ou não estar acompanhadas de um sinal, assim como um número inteiro qualquer (exemplos: +5, 7, 0, −75). As variáveis do tipo **float** são números reais e, além de poder ser acompanhadas de sinais como os inteiros, sua representação utiliza um ponto no lugar da vírgula para separar a parte inteira da parte decimal (exemplos: −12.325, 0.75895, +3.1415). Uma variável do tipo **string** (ou cadeia de caracteres) armazena uma letra, um número, uma frase ou um texto maior.

Na versão do Python utilizada nesse capítulo, o comando **input(...)** sempre entrega um valor do tipo **string**. Dessa maneira, caso queiramos utilizar a entrada como um número inteiro, precisamos utilizar um comando junto com a entrada, convertendo o valor do tipo **string** para o tipo **int**. O algoritmo a seguir ilustra essa situação.

Observação

Nessa obra, vamos denotar por **entrada ("mensagem")** o comando em linguagem corrente que indica o recebimento de um valor inserido pelo usuário do computador e que será armazenado numa variável qualquer.

Algoritmo em linguagem corrente	Algoritmo em Python
Ler dois números inteiros, *a* e *b*, e armazenar, na variável *soma*, o resultado da adição de *a* e *b*. **Passo 1.** Faça *a* ← entrada ("Digite um número inteiro:") **Passo 2.** Faça *b* ← entrada ("Digite um número inteiro:") **Passo 3.** Faça *soma* ← *a* + *b*	1 a = int(input("Digite um número inteiro: ")) 2 b = int(input("Digite um número inteiro: ")) 3 soma = a + b

Nas linhas 1 e 2 do algoritmo em Python, as variáveis *a* e *b* recebem valores inseridos pelo usuário. Como o algoritmo demanda números inteiros, realiza-se uma chamada para o comando **int(...)** e, dentro dos parênteses, insere-se o que se deseja transformar numa variável desse tipo, isto é, a entrada do usuário, gerando um encadeamento de comandos e atribuindo o resultado às respectivas variáveis.

```
int(input("Digite um número inteiro"))
```

Comando **input**

Comando **int**

Nessa construção, o comando **input(...)** é chamado primeiro pelo motor da linguagem e entrega ao comando **int(...)** o que foi digitado pelo usuário. Por fim, o comando **int(...)** converte a cadeia de caracteres para um número inteiro.

Outro comando para a conversão da cadeia de caracteres lida na entrada é o **float(...)**, cujo funcionamento segue a mesma lógica do comando **int(...)**, mas converte o valor de entrada para o tipo **float** (número real).

Saída

Usaremos como saída de dados o comando **print(...)**, que significa impressão. A partir dele, podemos imprimir na tela do computador frases ou valores de variáveis. Utilizando os comandos de entrada e saída podemos, portanto, interagir com o usuário do sistema durante a execução de um algoritmo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Veja o exemplo de um algoritmo em Python que recebe um número real da entrada e devolve o seu dobro como saída.

```
1 |numero = float(input("Digite um número real: "))
2 |dobro = numero * 2
3 |print("O dobro do número é: ", dobro)
```

Se o usuário digitar, por exemplo, −7.8, a saída produzida será:

```
Digite um número real: −7.8
O dobro do número é: −15.6
```

Note a utilização do comando **print(...)** no exemplo acima. Quando queremos que o valor de uma variável apareça no texto que estamos escrevendo para o usuário como saída, o texto vai entre aspas e, separado dele por uma vírgula, inserimos o nome da variável. Caso queiramos que haja texto antes e depois, a linha três deverá ficar assim:

```
3 |print("O dobro do número",numero,"é: ",dobro)
```

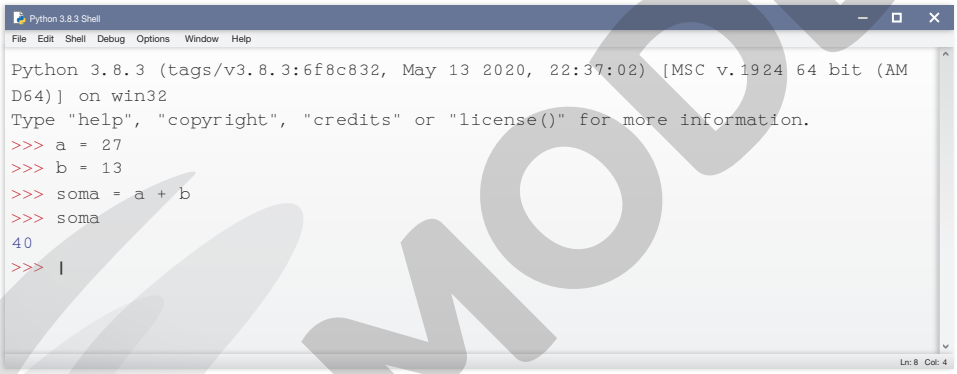
A interação com o usuário ficaria assim:

```
Digite um número real: −7.8
O dobro do número −7.8 é: −15.6
```

No tópico seguinte, veremos um recurso interessante da programação de computadores. Trata-se de como armazenar um algoritmo escrito em Python para executá-lo quando convier. Dessa maneira, sempre que implementarmos um algoritmo será possível guardá-lo em um arquivo no computador com a extensão ".py".

2.3 Salvar os algoritmos em Python no computador

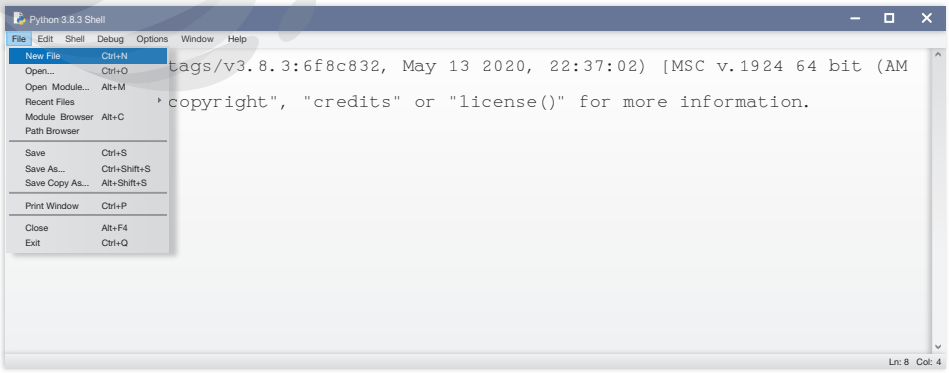
Quando escrevemos um algoritmo diretamente no terminal da linguagem, ao fecharmos a janela, perdemos esse algoritmo.



Janela do terminal da linguagem Python no ambiente Windows.

Alguns algoritmos podem ter centenas de linhas de código; por isso, reescrevê-las com frequência é uma tarefa inviável. Dessa maneira, armazenar essas linhas é, além de desejável, necessário. Veja as instruções de como fazer isso usando o IDLE.

Na janela do terminal da linguagem Python, clique em *File* (Arquivo) e, em seguida, em *New File* (Novo Arquivo).



Observação

Um exercício clássico para quem está começando a programar é utilizar a saída como primeiro comando a ser digitado. Culturalmente a frase que se costuma imprimir como teste é "Olá, mundo!" ou sua variação em inglês "Hello, world!". Se tiver oportunidade, digite o seguinte comando em um terminal da linguagem Python:

```
>>> print("Olá, mundo!")
```

Observação

A extensão de um arquivo é um sufixo que ajuda o computador a identificar o tipo de arquivo e como lidar com ele. São exemplos de extensões:

- documentos de texto: ".docx", ".txt", ".odt" etc.;
- imagens: ".jpeg", ".png" etc.;
- arquivos compactados: ".zip", ".rar", ".tgz" etc.

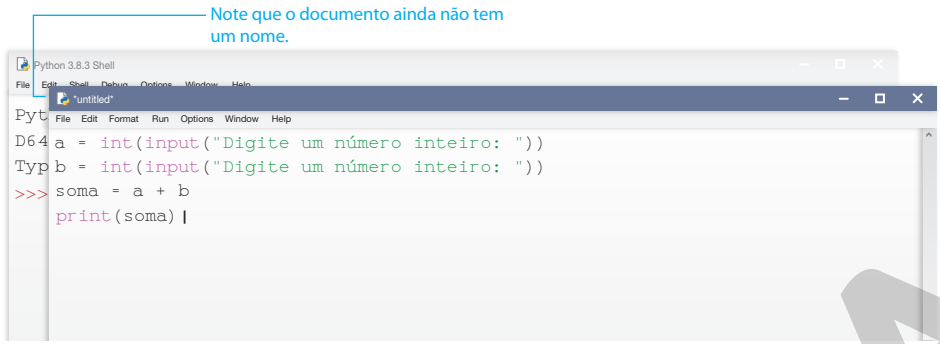
Explicar aos alunos que os comandos serão executados assim que pressionarem a tecla ENTER ao utilizar o terminal do Python, então as linhas são digitadas uma por vez e a interação já acontece. Pedir aos alunos que se atenham a esse fato.
Se tiver oportunidade, solicitar que façam mais testes e inventem interações com os usuários utilizando os comandos *input* e *print*, fazendo conversões de tipo para números inteiros ou números reais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

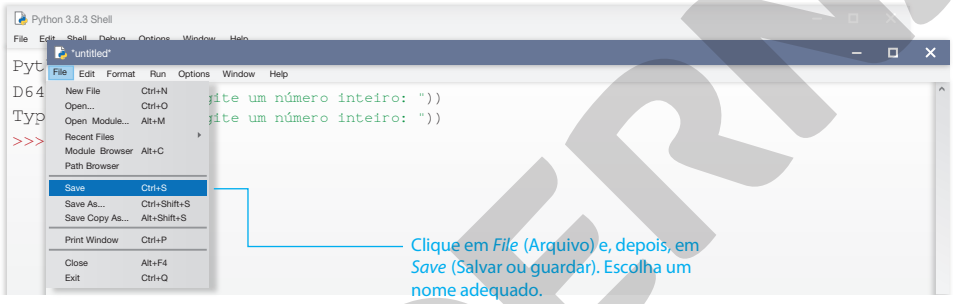
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

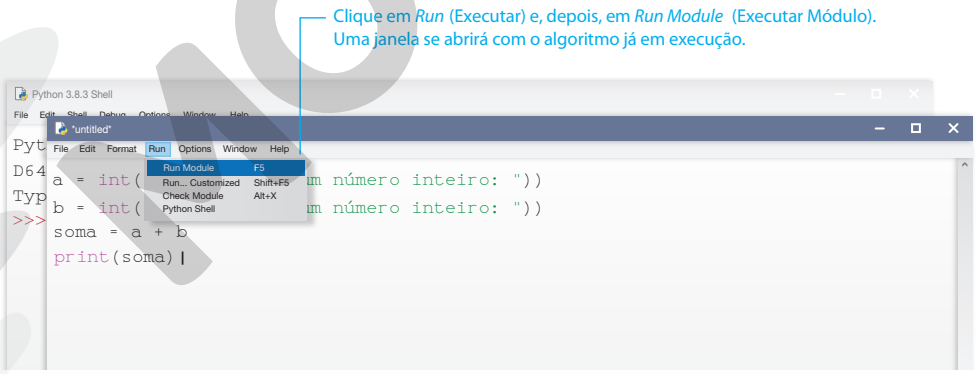
Uma nova janela se abrirá. Nela, você pode escrever o algoritmo na linguagem Python e salvar como um arquivo em alguma pasta do computador. Para ilustrar, usaremos o exemplo do algoritmo que determina a soma de dois números inteiros que são armazenados da entrada nas variáveis *a* e *b*, cujos valores são digitados pelos usuários.



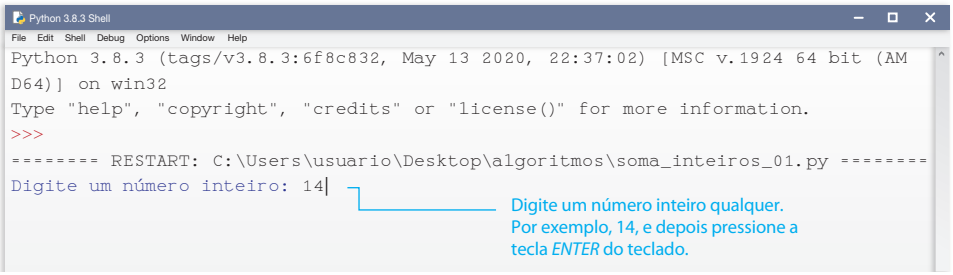
Agora é só salvar o documento.



O IDLE permite a edição do algoritmo e salvá-lo com a extensão ".py". Assim, a extensão ".py" indica à máquina que o interpretador da linguagem Python deve ser utilizado para lidar com o arquivo salvo. Para executar o algoritmo salvo, siga as instruções.



Como o algoritmo pede que o usuário digite dois números inteiros, o motor da linguagem ficará aguardando essa entrada.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Depois que o usuário inserir o primeiro número e pressionar ENTER, o motor irá para a próxima linha, pedindo para que entre com o segundo número inteiro.

```
Python 3.8.3 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.8.3 (tags/v3.8.3:6f8c832, May 13 2020, 22:37:02) [MSC v.1924 64 bit (AM
D64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
======== RESTART: C:\Users\usuario\Desktop\algoritmos\soma_inteiros_01.py ========
Digite um número inteiro: 14
Digite um número inteiro: 17|
```

Digite um segundo número inteiro qualquer. Em seguida, pressione a tecla *ENTER* do teclado.

Por fim, o resultado é enviado para a saída no próprio terminal Python.

```
Python 3.8.3 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.8.3 (tags/v3.8.3:6f8c832, May 13 2020, 22:37:02) [MSC v.1924 64 bit (AM
D64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
======== RESTART: C:\Users\usuario\Desktop\algoritmos\soma_inteiros_01.py ========
Digite um número inteiro: 14
Digite um número inteiro: 17|
31
>>>|
```

2.4 Controles de fluxo em Python

Assim como vimos as estruturas para controle de fluxo nos algoritmos representados por linguagem corrente ou por fluxogramas, estudaremos algumas estruturas em Python.

Estrutura de decisão: if...else e if...elif...else

O algoritmo de estrutura de decisão estudado no exercício resolvido **R2** dizia respeito a paridade de um número natural. Podemos sintetizar a lógica por trás do algoritmo da seguinte maneira: **se** o resto da divisão de um número natural por 2 for 0, então o número é par. **Senão**, o número é ímpar.

As palavras em destaque na frase representam a decisão tomada em função de uma ação realizada, informando se o número é par ou não. Veja a representação desse algoritmo em Python.

Se houver oportunidade, pedir aos alunos que escrevam esse algoritmo no computador e realizem testes para diferentes números naturais.

```
1 |numero = int(input("Digite um número natural: "))
2 |if numero % 2 == 0:
3 |    print("O número",numero,"é par.")
4 |else:
5 |    print("O número",numero,"é ímpar.")
```

É provável que você já esteja familiarizado com a entrada e a conversão dessa entrada para um número natural. No entanto, repare nas palavras com destaque em laranja. Esses termos são equivalentes às palavras destacadas na frase que explica o algoritmo em linguagem corrente. O termo **if** significa "se" e o termo **else** significa "senão".

Veja os detalhes de como escrevemos essas linhas e os blocos de comando:

```
if   SENTENÇA_A_SER_VERIFICADA:
     passo 1
     ...
     passo n
else:
     passo 1
     ...
     passo n
```

A sentença a ser verificada (1) retorna um valor que é analisado como verdadeiro ou falso. Se o valor da sentença for verdadeiro, o bloco de passos (2) será executado. Senão, o bloco (2) é ignorado e o algoritmo executa o bloco de passos (3). Observe que ao final da linha com "if" e da linha com "else" há ":". Essa é uma regra da linguagem Python que determina que, para começar um bloco de passos, a linha anterior deve terminar com ":". Os espaços indicados por (5) são indentações. Geralmente, utilizam-se quatro espaços brancos ou pressionar uma vez a tecla TAB do teclado.

Observação

Na linha 2 | podemos encontrar os símbolos == e %. Na linguagem Python, "==" representa o que matematicamente conhecemos por "=", ou seja, o algoritmo verifica se o que está à esquerda deste símbolo é igual ao que está à direita.
O símbolo "%", diferentemente da Matemática, denota uma operação chamada de módulo que, dados dois números naturais, *a* e *b*, *a* % *b* resulta no resto da divisão de *a* por *b* no conjunto dos números naturais. Além das operações básicas, há, também, as seguintes operações em Python:

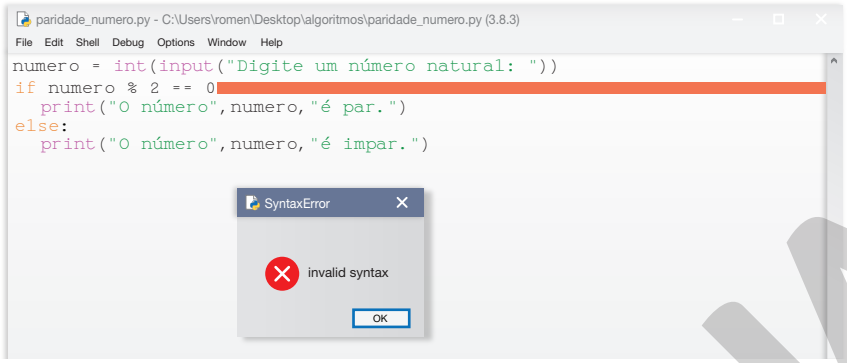
Operação	Símbolo
Potenciação	** (*a* ** *b*)
Parte inteira	// (*a* // *b*)
Módulo (resto)	% (*a* % *b*)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

É muito importante ter atenção ao escrever um algoritmo em qualquer linguagem de programação, pois, se esquecermos de um símbolo como ":" ou não indentarmos corretamente, o algoritmo não será executado ou terá um comportamento inesperado, gerando um código de erro. Veja, por exemplo, o que ocorre se não inserirmos o ":" na linha 2.



NELSON MATSUDA

O motor indica que um erro de sintaxe foi cometido, iluminando em vermelho a linha onde o erro está.

```
                    1
if   SENTENÇA_A_SER_VERIFICADA:
```

Retomemos a sentença a ser verificada em (1). É uma sentença cujo valor pode ser verdadeiro ou falso (**True** ou **False**, em Python). Alguns símbolos nos ajudam a construir as verificações com valores das variáveis. Esses símbolos são os operadores relacionais da linguagem Python.

Descrição	Operadores relacionais
O valor da variável *a* é igual ao da variável *b*?	$a == b$
O valor da variável *a* é maior que o da variável *b*?	$a > b$
O valor da variável *a* é menor que o da variável *b*?	$a < b$
O valor da variável *a* é maior ou igual ao da variável *b*?	$a >= b$
O valor da variável *a* é menor ou igual ao da variável *b*?	$a <= b$
O valor da variável *a* é diferente da variável *b*?	$a != b$

Exemplos

Essas são algumas expressões lógicas que podem ser utilizadas junto com a estrutura **if...else**:

- 1 + 2 == 3
  - Essa sentença sempre retornará verdadeiro (True).
- 1 != 1
  - Essa sentença sempre retornará falso (False).
- *numeroDigitado* >= 10
  - Retorna verdadeiro (True) se o valor da variável for maior ou igual a 10, senão retorna falso (False).
- (*numeroDigitado* % 5) == 0
  - Retorna verdadeiro (True) se o resto da divisão do valor da variável por 5 for igual a 0, senão retorna falso (False).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R5. Escrever um algoritmo em Python que, dada a média final de um aluno em uma disciplina, envia para a saída "Aprovado." se a nota for maior ou igual a 5, "Em recuperação." se a nota for maior ou igual a 3 e menor que 5 ou "Reprovado." se a nota for menor que 3.

▸ **Resolução**

```
nota = float(input("Digite a nota do aluno: "))
if nota >= 5:
    print("Aprovado.")
elif nota >= 3:
    print("Em recuperação.")
else:
    print("Reprovado.")
```

14. Resposta possível:

```
numero1 = int(input("Entre com um inteiro positivo não nulo:"))
numero2 = int(input("Entre com outro inteiro positivo não nulo:"))
if numero1 % numero2 == 0:
    print("É múltiplo.")
else:
    print("Não é múltiplo.")
```

No exercício resolvido **R5**, repare que a estrutura utilizada é um pouco diferente daquela encontrada anteriormente.

Nessa estrutura, encontramos a palavra reservada **elif** (1), que é uma junção de **else** com **if**. Podemos, assim, ter dois ou mais blocos condicionados a sentenças diferentes, o que permite uma análise mais flexível. Nesse caso, o bloco (2) será executado se a primeira sentença tiver um resultado verdadeiro. Senão, se a segunda sentença for verdadeira, o bloco (3) será executado. Por fim, se nem a primeira nem a segunda forem verdadeiras, o bloco em (4) será, obrigatoriamente, executado. Se em seu algoritmo o bloco (4) não precisar ser utilizado, podemos, além do bloco, omitir a palavra reservada **else** e seguir com o algoritmo.

```
if   PRIMEIRA SENTENÇA:
     passo 1
     ...                  2
     passo n
1 elif SEGUNDA SENTENÇA:
     passo 1
     ...                  3
     passo n
else:
     passo 1
                          4
     passo n
```

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. Decida se as expressões lógicas a seguir resultam em verdadeiro ou falso. Considere que as linhas anteriores foram atribuições realizadas antes de avaliar a expressão.

a) Expressão: 3 + 2 >= 5 verdadeiro

b) `x = 10`
`y = -3`
Expressão: x + y > 8 falso

c) `numero1 = 3`
`numero2 = 3`
`resultado = numero1 ** numero2`
Expressão: resultado != 27 falso

d) `a = 16`
`b = 7`
Expressão: a % b == 2 verdadeiro

13. Leia o algoritmo a seguir e determine qual será a linha com a saída apresentada ao usuário.

```
1 | a = 0
2 | b = 1
3 | c = 2
4 | if c ** a != b:
5 |     print("Tudo certo! Podemos seguir.")
6 | else:
7 |     print("Nada feito! Abortar missão.")
```

A linha com a saída será a 7.

14. Escreva um algoritmo em Python que, dados dois números inteiros positivos e não nulos inseridos pelo usuário, decida se o primeiro número é múltiplo do segundo, imprimindo "É múltiplo." ou "Não é múltiplo." como saída.

15. Escreva um algoritmo em Python que, dados três números reais nas variáveis a, b e c, obtidos a partir da entrada, verifique se $c^2 = a^2 + b^2$, enviando "A igualdade é verdadeira." ou "A igualdade é falsa." para a saída. Ver resolução no Guia do professor.

2.5 Laços de repetição

Vimos que os laços de repetição nos ajudam a executar um conjunto de passos mais de uma vez. É provável que queiramos executar esses passos **enquanto** uma condição for verdadeira. Dessa maneira, um tipo de laço de repetição em Python diz respeito à palavra reservada **while** que, em inglês, significa "enquanto". Sua utilização se dá conforme descrevemos a seguir.

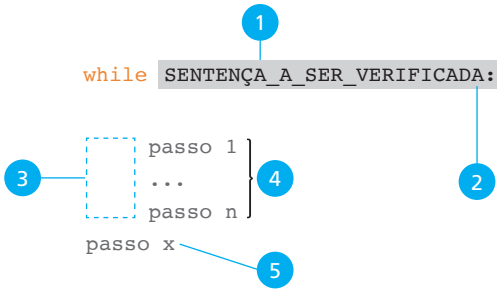
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observação

É importante que a indentação seja consistente em todo o algoritmo escrito em Python. Se decidir por usar uma quantidade de espaços em branco, todo nível de indentação deve seguir exatamente essa escolha, senão o motor da linguagem Python apontará um erro de sintaxe e o algoritmo não será executado.

Enquanto a sentença em (1) for verdadeira, o laço executará o bloco (4) de passos, que, também, começa na linha posterior à do sinal de ":" (2), indentada por uma mesma quantidade de espaços em branco ou por uma vez pressionada a tecla TAB do teclado (3). Quando a condição (1) for falsa, o próximo passo a ser executado será o **passo x**, identificado em (5).



Exercícios resolvidos

R6. Escrever um algoritmo em Python que calcula a média das notas de uma turma. A entrada do algoritmo é um número natural *n*, com o número de alunos da turma, e *n* notas (números reais) que representam as notas dos alunos dessa turma.

▸ **Resolução**

```
1 |n = int(input("Quantos alunos há na turma? "))
2 |soma = 0.0
3 |contador = 0
4 |while contador < n:
5 |    soma = soma + float(input("Digite a nota: "))
6 |    contador = contador + 1
7 |media = soma / n
8 |print("A média da turma é:",media)
```

R7. Escrever um algoritmo em Python que, dada uma sequência de números naturais digitados pelo usuário e que termina em 0, conta a quantidade de números pares dessa sequência.

▸ **Resolução**

```
1 |contaPares = 0
2 |numero = int(input("Digite um número natural: "))
3 |while numero != 0:
4 |    if numero % 2 == 0:
5 |        contaPares = contaPares + 1
6 |    numero = int(input("Digite um número natural: "))
7 |print("Você digitou", contaPares, "números pares não nulos.")
```

A sentença analisada no cabeçalho do laço de repetição precisa, em algum momento, ser avaliada como falsa. Caso contrário, o laço de repetição continuará executando os passos internos a ele indefinidamente. O exercício resolvido **R6** utiliza a variável *contador* como uma variável de controle para que o laço de repetição se encerre. A cada iteração adiciona-se 1 unidade ao contador. Dessa maneira, quando o contador for igual a *n*, a sentença será avaliada como falsa e a linha 7 será executada, dando prosseguimento ao algoritmo.

No exercício resolvido **R7**, a estratégia utilizada como condição de parada do laço de repetição é diferente da utilizada no **R6**. Note que o algoritmo continuará executando o laço à medida que o usuário inserir um número diferente de 0. Quando o usuário inserir 0 como entrada, o algoritmo segue para a linha 7, enviando a saída para o usuário e encerrando o algoritmo.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

16. Dado *x*, um número real qualquer, e *n*, um número natural, ambos obtidos como entrada, escreva um algoritmo em Python que determine a *n*-ésima potência de *x*. (*Dica*: o algoritmo deve utilizar um laço **while** e a saída é x^n.)

Ver resolução no Guia do professor.

17. Utilizando um laço de repetição **while**, escreva um algoritmo em Python que, dado um número natural *n*, a saída é o fatorial de *n*.

Ver resolução no Guia do professor.

18. Escreva um algoritmo em Python que leia números inteiros diferentes de 0 da entrada e conta quantos deles são negativos. O algoritmo deve parar ao ler 0 da entrada.

Ver resolução no Guia do professor.

19. Com base no exercício resolvido **R7**, escreva um algoritmo em Python que, a partir de uma lista de números naturais não nulos e obtidos da entrada, conte quantos são pares e quantos são ímpares. O algoritmo deve parar quando o usuário digitar 0.

Ver resolução no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Relacione as linhas de atribuição em linguagem corrente com suas correspondentes em Python. a) iii; b) i; c) iv; d) ii

   a) $res \leftarrow \sqrt{b^2 - 4ac}$

   b) $res \leftarrow \sqrt{2b - 4ac}$

   c) $h \leftarrow a^2 + b^2$

   d) $h \leftarrow 2a + 2b$

   i. res = (2 * b − 4 * a * c) ** (0.5)

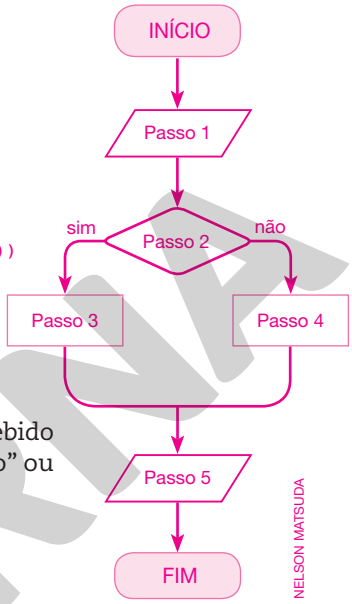
   ii. h = a * 2 + b * 2

   iii. res = (b ** 2 − 4 * a * c) ** (1/2)

   iv. h = a ** 2 + b ** 2

2. Resposta possível:
   Passo 1. Faça *n* ← entrada("Digite um número natural diferente de 0:")
   Passo 2. Se o resto da divisão de *n* por 7 for igual a 0, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.
   Passo 3. Faça *multiplo* ← "Verdadeiro". Vá para o **passo 5**.
   Passo 4. Faça *multiplo* ← "Falso".
   Passo 5. Envie *multiplo* para a saída. Encerra-se o algoritmo.

3. Resposta possível:



NELSON MATSUDA

4. Resposta possível:

```
1 |lado = float(input("Digite a medida do lado: "))
2 |perimetro = 4 * lado
3 |area = lado ** 2
4 |print("perímetro:",perimetro,"cm;
  área:",area,"cm²")
```

2. Escreva um algoritmo em linguagem corrente que, dado um número natural *n* recebido da entrada, verifique se esse número é múltiplo de 7, armazenando "Verdadeiro" ou "Falso" na variável *multiplo*, enviando-a para a saída.

3. Elabore um fluxograma que represente o algoritmo construído no exercício **2**.

4. Crie um algoritmo em Python que receba um número real da entrada. Esse número é a medida do lado de um quadrado em centímetro. O algoritmo deve devolver ao usuário o perímetro e a área desse quadrado no formato: "perímetro: x cm; área: y cm²".

5. Projete um algoritmo em Python que receba as medidas da base e de sua altura relativa de um triângulo qualquer, a partir da entrada. Ambos os números são reais e dados em centímetro. A saída do algoritmo deve ser a área desse triângulo em cm².

6. Elabore um algoritmo em Python que receba 3 notas de um aluno a partir da entrada. A saída do algoritmo é a média ponderada dessas notas de maneira que a nota 1 tem peso 1, a nota 2 tem peso 2 e a nota 3 tem peso 4.

7. Escreva um algoritmo em Python que leia 3 números reais da entrada, em que o primeiro sempre será o maior deles. Os três números são as medidas dos lados de um triângulo. A saída do algoritmo deve informar ao usuário se o triângulo é retângulo ou não.

8. Analise os algoritmos escritos na linguagem Python e, em seguida, determine o que cada um deles envia para a saída.

   a)
```
1 |contador = 10
2 |while contador != 0:
3 |    contador = contador - 1
4 |print(contador)
```
   envia 0

   b)
```
1 |x = 10
2 |while x != 0:
3 |    x = x - 1
4 |    if x % 2 != 0:
5 |        print(x)
```
   envia os valores 9, 7, 5, 3 e 1

5. Resposta possível:
```
1 |base = float(input("Digite a medida da base: "))
2 |altura = float(input("Digite a medida da altura: "))
3 |area = (base * altura) / 2
4 |print("A área do triângulo é: ",area,"cm²")
```

6. Resposta possível:
```
1 |nota1 = float(input("Digite a nota 1: "))
2 |nota2 = float(input("Digite a nota 2: "))
3 |nota3 = float(input("Digite a nota 3: "))
4 |media = (nota1 * 1 + nota2 * 2 + nota3 * 4) / 7
5 |print("A média ponderada é: ",media)
```

7. Resposta possível:
```
1 |numero1 = float(input("Digite a medida maior: "))
2 |numero2 = float(input("Digite outra medida: "))
3 |numero3 = float(input("Digite outra medida: "))
4 |if numero1**2 == numero2**2 + numero3**2:
5 |    print("O triângulo é retângulo.")
6 |else:
7 |    print("O triângulo NÃO é retângulo.")
```

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

9. No Brasil, é permitido a um cidadão participar das eleições a partir dos 16 anos. Escreva um algoritmo em Python que receba uma lista de idades, em ano, como entrada. Essa lista deve terminar em 0. O algoritmo devolve como saída a quantidade de cidadãos que podem participar das eleições.

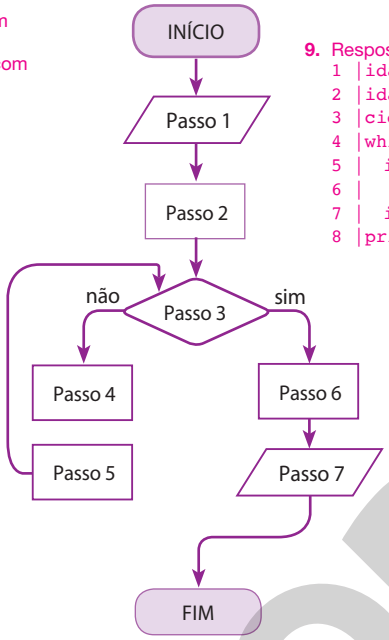
RICARDO LIMA/FUTURA PRESS

Eleitores na cidade de Belém, PA, em outubro de 2018.

Aprofundamento

10. A partir do fluxograma a seguir, elabore uma situação-problema e um algoritmo que a resolvam.

resposta pessoal
Espera-se que os alunos elaborem um algoritmo que respeite os passos de entrada, saída e o laço de repetição com 2 passos internos.



NELSON MATSUDA

9. Resposta possível:

```
idadeMinima = 16
idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
cidadaosHabilitados = 0
while idade != 0:
  if idade >= 16:
    cidadaosHabilitados = cidadaosHabilitados + 1
  idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
print("Cidadãos habilitados: ",cidadaosHabilitados)
```

11. Resposta possível:

```
n = int(input("Digite o número de termos: "))
anterior1 = 0
anterior2 = 1
fibonacci = 1
while n != 0:
    print(fibonacci)
    fibonacci = anterior1 + anterior2
    anterior1 = anterior2
    anterior2 = fibonacci
    n = n - 1
```

11. Elabore um algoritmo em Python que, dado um número natural n, envie para a saída os n primeiros números da sequência de Fibonacci, dada por:

$$S_F(n) = \begin{cases} 1, & n \leq 2 \\ S_F(n-1) + S_F(n-2), & n > 2 \end{cases}$$

(*Dica*: você precisará de variáveis auxiliares para armazenar valores anteriores da sequência.)

Desafio

12. Um comando útil em laços de repetição é o **break**, que interrompe a execução do laço. Veja seu uso no exemplo a seguir.

```
contador = 0
while contador < 10:
    contador = contador + 1
    if contador == 3:
        break
print(contador)
```

Resposta possível:

```
n = int(input("Digite um número natural:"))
contador = 2
while contador < n:
    if n % contador == 0:
        break
    contador = contador + 1
if contador != n:
    print("Não é primo.")
else:
    print("É primo.")
```

A saída produzida é 3, pois o contador não atinge 10.

Agora, usando o comando **break**, escreva um algoritmo em Python que recebe um número natural n da entrada e envia para a saída "É primo.", "Não é primo.". Lembre-se: n é primo se possui apenas 2 divisores: 1 e n.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma variável, no contexto dos algoritmos: alternativa a

a) pode armazenar um valor qualquer dentro de um conjunto de valores.
b) deve guardar um valor que não pode ser alterado.
c) armazena apenas valores numéricos.
d) armazena apenas valores do tipo cadeia de caracteres.
e) não pode ser utilizada em uma operação matemática.

2. Um algoritmo: alternativa c

a) é um conjunto de instruções que realizam apenas contas.
b) pode ser usado apenas em computadores.
c) pode ser escrito em linguagem corrente, ser representado por fluxograma ou ser escrito numa linguagem de programação.
d) é um programa de computador.
e) não pode ser representado graficamente.

3. Uma estrutura de decisão: alternativa b

a) pode ser representada por uma seta em um fluxograma.
b) é representada por um losango nos fluxogramas.
c) é um conjunto de passos.
d) repete um conjunto de passos.
e) admite apenas um passo dentro de sua estrutura.

4. Na linguagem Python a indentação é: alternativa e

a) opcional.
b) pode ser realizada com alternâncias entre espaços e TAB.
c) o número de vezes que o algoritmo executa os passos dentro de um laço de repetição.
d) o número de vezes que o algoritmo executa os passos dentro de uma estrutura de decisão.
e) obrigatória para criar os blocos de passos dentro de estruturas de decisão e laços de repetição.

5. Um laço de repetição: alternativa c

a) repete um único comando um número fixado de vezes.
b) não permite a utilização de comandos como o *input* em seu interior.
c) precisa de uma condição de parada bem definida e que deve ser atingida.
d) deve ser evitado para que o algoritmo tenha fim.
e) serve apenas para adicionar números.

6. Em Python, dadas as variáveis a e b, a expressão lógica que verifica a igualdade entre elas é: alternativa d

a) $a = b$
b) $a \mathrel{!}= b$
c) $a \% b$
d) $a == b$
e) $a ** b$

7. Observe o algoritmo na linguagem Python a seguir.

```
1 a = 0
2 b = 0
3 c = 0
4 while c != 100:
5     if c % 2 == 0:
6         a = a + 1
7     else:
8         b = b + 1
9 print(a, b)
```

Esse algoritmo: alternativa c

a) funciona corretamente e conta números pares.
b) funciona corretamente e imprime a soma dos números pares e ímpares.
c) não funciona, pois não atinge a condição de parada.
d) não funciona, mas deveria imprimir a soma dos números pares e ímpares.
e) funciona corretamente e imprime a quantidade de números pares e ímpares até 100.

8. Observe o algoritmo em Python a seguir.

```
contador = 2
while contador <= 8:
    print (contador, "Olá, mundo!")
    contador = contador + 2
```

Quantas vezes a frase "Olá, mundo!" será enviada para a saída? alternativa a

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Compreender os conceitos de algoritmo e suas estruturas em linguagem corrente.	X	X	X					
Interpretar e construir fluxogramas que representam algoritmos.			X					
Compreender o que é uma linguagem de programação e suas estruturas.				X	X	X	X	X
Resolver problemas usando uma linguagem de programação.					X	X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	96 a 99	96 a 99	100 a 102	106 e 107	102 a 105	106 a 113	111 a 113	113 e 114

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

PORTAL DE NOTÍCIAS

FATO OU *FAKE*?

As fake news *se espalham em uma velocidade impressionante: são 70% mais rápidas que as notícias verdadeiras e alcançam mais pessoas. Estiveram presentes em vários momentos da história mundial, mas ganharam força e persuasão nos últimos anos – principalmente na mais recente pandemia, a da Covid-19. Compartilhar conteúdos falsos é muito perigoso e pode trazer graves consequências. Por isso, saiba como identificar o que é fato e o que é* fake *antes de divulgar qualquer informação.*

NOTÍCIAS APELATIVAS

De acordo com estudos feitos, as pessoas são vulneráveis a conteúdos enganosos porque têm mais facilidade em aceitar informações que reforcem seus pensamentos e confirmem suas crenças do que confrontar notícias que as desafiam.

MENTIRAS HISTÓRICAS

As *fake news* não são apenas um mal deste século. Na Idade Média, por exemplo, vários judeus foram mortos após serem apontados como responsáveis pela peste negra, sendo que a praga era transmitida por ratos. Boatos e notícias falsas também mudaram o rumo da política e tiveram um papel importante em conflitos e guerras. "Uma mentira dita mil vezes torna-se verdade", já dizia Joseph Goebbels, ministro da propaganda na Alemanha nazista.

O termo ganhou relevância em 2016, durante as eleições presidenciais dos Estados Unidos. Na época em que Donald Trump foi eleito, houve um aumento considerável de *fake news* envolvendo adversários do republicano.

REDES SOCIAIS

No Brasil: **90%** dos usuários de internet afirmam que já receberam *fake news*.

Mais de **60%** afirmam que acreditaram nessas informações.

32% acreditam que as redes sociais são responsáveis por propagar notícias enganosas.

Cada postagem verdadeira atinge, em média, mil pessoas, enquanto as postagens falsas e mais populares atingem de mil a cem mil pessoas.

O emprego de um algoritmo em forma de fluxograma para ajudar a decidir sobre o compartilhamento de uma notícia favorece o desenvolvimento da competência específica **2** da BNCC e da habilidade **EM13MAT315**, pois fornece instrumentos para que os alunos decidam a respeito da veracidade de uma notícia, tangenciando um tema contemporâneo como as *fake news* – bem como o compartilhamento de informações em redes sociais, tema de interesse da cultura juvenil. Além disso, a avaliação e a reflexão sobre esse tipo de notícia favorecem o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC. Esse infográfico permite um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias, ao utilizar procedimentos de checagem de fatos e fotos noticiados com o objetivo de combater a proliferação de *fake news* e ao propiciar a discussão sobre as causas e as consequências do compartilhamento de informações falsas que contribuem para o desenvolvimento da competência específica **7** da BNCC.

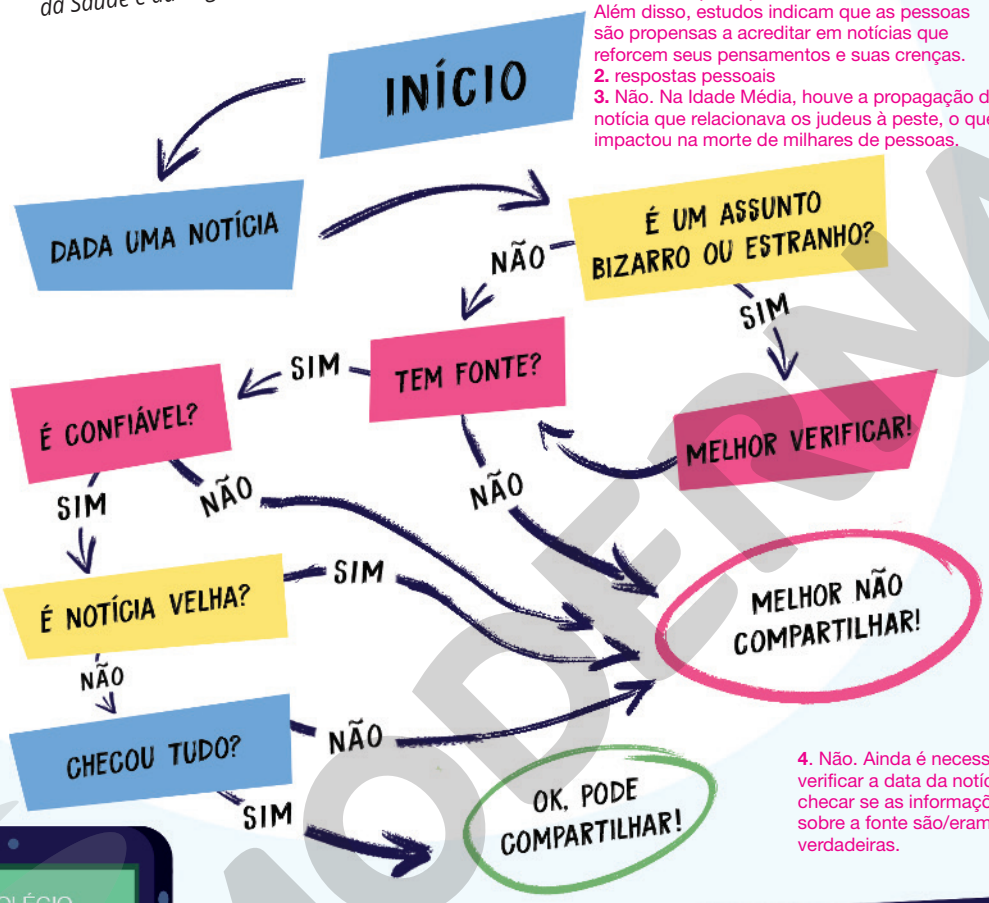
NOTÍCIA VERDADEIRA
Procure informações em fontes confiáveis, como veículos de comunicação e órgãos governamentais.

MODERNA

COMBATE ÀS *FAKE NEWS*

As principais plataformas digitais têm adotado algumas medidas para conter a onda de notícias falsas. Durante a pandemia de Covid-19, por exemplo, além de remover conteúdos duvidosos e teorias da conspiração, as redes sociais direcionam o usuário para páginas oficiais do Ministério da Saúde e da Organização Mundial da Saúde (OMS), nas quais é possível tirar várias dúvidas.

1. Não. As notícias falsas costumam se espalhar 70% mais rápido que as notícias verdadeiras. Além disso, estudos indicam que as pessoas são propensas a acreditar em notícias que reforcem seus pensamentos e suas crenças.
2. respostas pessoais
3. Não. Na Idade Média, houve a propagação da notícia que relacionava os judeus à peste, o que impactou na morte de milhares de pessoas.



4. Não. Ainda é necessário verificar a data da notícia e checar se as informações sobre a fonte são/eram verdadeiras.

ILUSTRAÇÃO: LEANDRO LASSMAR

FAKE NEWS
Cuidado com notícias que circulam nas redes sociais. Cheque-as antes de passar adiante!

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Em sua opinião, as notícias falsas têm pouca credibilidade por serem facilmente desmentidas? Justifique.
2. Durante a pandemia de Covid-19, você se deparou com alguma notícia duvidosa? Se sim, o que fez para verificar a veracidade da notícia?
3. É possível dizer que as *fake news* são um mal recente e provocado exclusivamente pela facilidade de comunicação promovida pelas redes sociais?
4. Ao se deparar com uma notícia cuja fonte é confiável e não parece absurda, podemos compartilhar a informação sem preocupação?

Dados obtidos em: Ministério da Saúde. Disponível em: <https://www.saude.gov.br/component/tags/tag/novo-coronavirus-fake-news?limitstart=0>; Massachusetts Institute of Technology (MIT). Disponível em: <http://news.mit.edu/2018/study-twitter-false-news-travels-faster-true-stories-0308>; Ibope Conecta. Disponível em: <http://ibopeconecta.com/9-em-cada-10-internautas-receberam-fake-news/>; Ipsos Public Affairs. Disponível em: <https://www.ipsos.com/sites/default/files/ct/news/documents/2018-08/fake_news-report.pdf>; *Nexo Jornal*. Disponível em: <https://www.nexojornal.com.br/expresso/2020/03/16/O-que-as-redes-sociais-fazem-para-coibir-fake-news-em-meio-%C3%A0-pandemia>; *Forbes*. Disponível em: <https://forbes.com.br/colunas/2019/06/brasil-e-o-pais-que-mais-se-preocupa-com-fake-news-na-internet/>. Acessos em: 10 ago. 2020.

MODERNA

Educação financeira

Orçamento e planejamento financeiro

Para começar e pensar

Vamos refletir sobre como gastar e economizar dinheiro. Para isso, responda às questões a seguir.

1. Você costuma anotar todos os seus gastos? Se sim, você acha esse tipo de atitude importante? Justifique sua resposta.

2. Em que você mais gasta? Em que poderia gastar menos?

3. Observe três maneiras de compor a mesma quantia.

BANCO CENTRAL DO BRASIL

A

B

C

Agora, reflita e responda: qual composição de cédulas você escolheria pensando em evitar gastar o dinheiro por mais tempo? Ou a escolha seria indiferente? Justifique suas respostas.

4. É o mês do seu aniversário e, por isso, você recebeu uma quantia em dinheiro.

a) O que você faz assim que recebe o dinheiro?

Gasto tudo!

Guardo uma parte e gasto outra!

Planejo como vou gastar cada centavo!

b) No mesmo dia em que você ganhou o presente, saiu com os amigos e entrou em uma loja. Seus amigos compram algumas coisas. O que você faz?

Mantenho controle e não compro nada.

Não resisto e compro; afinal, meus amigos estão comprando...

Compro uma coisinha barata só para não ir para casa de mãos vazias.

c) Você está passando em frente a uma loja e encontra uma calça *jeans* da moda. Apesar de bonita, está muito cara: para comprá-la, você usaria todo o dinheiro que ganhou. O que você faz?

Escolho um modelo mais barato.

Compro e fico sem dinheiro...

Pondero se realmente preciso de uma calça nova.

Objetivos

Analisar um orçamento familiar; listar e classificar as despesas e as receitas; planejar a redução de despesas; considerar e compreender situações de imprevistos; distinguir comportamentos positivos de comportamentos negativos no ato de comprar.

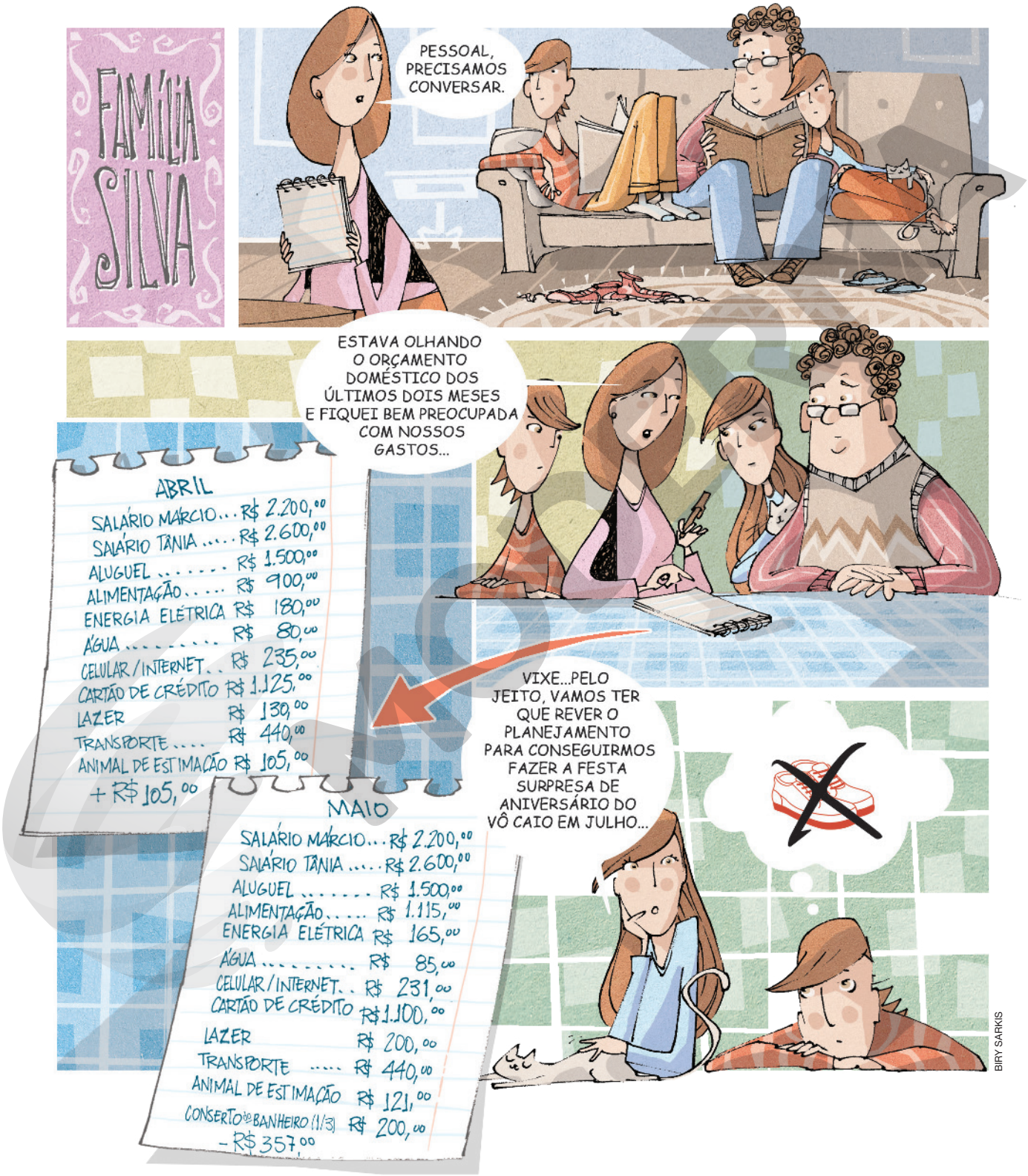
Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **6**, **9** e **10**, as competências específicas **1**, **2** e **4** e a habilidade **EM13MAT203** da BNCC. Além disso as situações, atividades e discussões propostas tratam dos temas contemporâneos: **vida familiar e social**, **educação financeira** e **educação para o consumo**. Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Para discutir

5. Observe o diálogo entre os integrantes da família Silva.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Você já deve ter ouvido a expressão "orçamento de uma obra" ou "orçamento familiar". Mas o que significa orçamento? **Orçamento** é o detalhamento da receita e das despesas em um intervalo de tempo. Também podem ser considerados orçamento a avaliação, o cálculo aproximado do custo de um serviço (obra, empreendimento etc.), uma estimativa.

A situação ilustrada traz o orçamento da família Silva, que apresenta as **receitas** (valores que representam as "entradas" de dinheiro) e as **despesas** (valores que representam as "saídas" de dinheiro) nos meses de abril e maio.

Reunidos em grupos, reflitam e respondam às seguintes questões:

a) Organizem esse orçamento de uma maneira diferente da que foi apresentada. Em seguida, justifiquem essa nova apresentação.

b) Vejam, ao lado, como podemos classificar as receitas e as despesas de um orçamento.

No orçamento da família Silva, quais valores representam as receitas e as despesas em cada mês? Classifique-as.

c) O que representam os valores +R$ 105,00 e −R$ 357,00 nos orçamentos de abril e maio, respectivamente? Como Tânia obteve esses valores?

d) Quais são os possíveis problemas financeiros da família Silva? Por quê?

6. Pelo diálogo da família Silva é possível perceber que, apesar de eles terem se planejado, no fim de janeiro, para realizar a festa surpresa de aniversário para o vô Caio, no mês de julho, eles depararam com gastos em seu orçamento familiar que podem prejudicar a realização do evento. Acompanhe como a família se programou para realizar essa comemoração.

Receitas

- FIXAS: rendas com valores iguais ou que variam muito pouco, como o salário ou aposentadoria;
- VARIÁVEIS: renda com valores que variam de um mês para outro, como comissão de venda e bônus.

Despesas

- FIXAS: gastos com valor fixo ou pouca variação que ocorrem praticamente todo mês, independentemente do seu consumo;
- VARIÁVEIS: gastos com valor que varia de acordo com a frequência e a intensidade do seu consumo e podem não ocorrer todo mês.

Mês: Janeiro

salário Márcio: R$ 2.200,00
salário Tânia: R$ 2.600,00
aluguel: R$ 1.500,00
alimentação: R$ 800,00
energia elétrica: R$ 175,00
água: R$ 80,00
celular/internet: R$ 400,00
cartão de crédito: R$ 850,00
lazer: R$ 150,00
mesada: R$ 200,00
transporte: R$ 440,00
animal de estimação: R$ 130,00 +R$ 75,00

Previsão de gastos com a festa surpresa de aniversário para o vô Caio: R$ 1.500,00

Pagar R$ 250,00 por mês (parcelamento no cartão de crédito), durante 6 meses (de fevereiro até julho).
energia elétrica: até R$ 160,00 (apagar as luzes ao sair do ambiente, reduzir o tempo no banho, trocar as lâmpadas em janeiro).
água: até R$ 70,00 (reduzir o consumo, reutilizar a água da máquina de lavar roupas).
lazer: até R$ 150,00 (diminuir a frequência).
celular/internet: rever o plano de telefonia e de pacote de dados.
mesada: R$ 100,00 para cada filho (cancelada até julho).
cartão de crédito: não ultrapassar R$ 850,00 com outros gastos além do parcelamento da festa de aniversário (valor total: R$ 1.100,00).
animal de estimação: R$ 100,00 (procurar promoções para comprar ração e areia para o gato).

NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Orçamento do mês ideal

salário Márcio: R$ 2.200,00
salário Tânia: R$ 2.600,00
aluguel: R$ 1.500,00
alimentação: R$ 800,00
energia elétrica: R$ 160,00
água: R$ 70,00
celular/internet: R$ 200,00
cartão de crédito: R$ 1.100,00
lazer: R$ 150,00
transporte: R$ 440,00
animal de estimação: R$ 100,00 +R$ 280,00

NELSON MATSUDA

A partir de um orçamento, pode-se avaliar como se gasta o dinheiro e buscar ajustar as despesas, além de propor uma reflexão e até mesmo uma ação para aumentar a receita, como algum trabalho extra, por exemplo, com o propósito de atingir alguns objetivos. A meta em um mês pode ser simplesmente não gastar mais do que se ganha; em outros meses, pode ser economizar para realizar um sonho, como viajar, fazer um curso, comprar uma casa, algo que seja importante para um ou mais integrantes da família. **Planejamento financeiro** é o conjunto de ações que visam organizar a vida financeira com base em objetivos bem definidos.

a) Quais foram as ações que a família Silva implementou para planejar a festa surpresa de aniversário do vô Caio?

b) No planejamento da família, o que representa o valor +R$ 280,00 registrado na lista "orçamento do mês ideal"? Para que finalidade a família poderá usar esse valor?

c) Nos meses de abril e maio, esse planejamento foi seguido? Justifique a resposta.

d) Quais foram as consequências do orçamento da família no mês de abril? E no mês de maio?

e) No mês de maio, como a família poderá sanar o saldo negativo no orçamento? Quais são as possíveis atitudes a serem tomadas para não prejudicar o orçamento do mês seguinte?

Para finalizar

Para pessoas da sua faixa etária, é comum depender financeiramente da família, ainda que parcialmente. Mas isso não significa que você não tenha que pensar em dinheiro, certo? Diante do que vimos até aqui, responda às questões a seguir.

7. Você entendeu a diferença entre orçamento e planejamento financeiro? Explique o que é cada um deles e por que usamos esses conceitos.

8. Imagine que sua família planejasse uma festa de aniversário como a da família Silva e que, em certos meses, esse planejamento também não fosse seguido, havendo um imprevisto, como a compra de medicamentos, por exemplo. Que ações você poderia sugerir que fossem implementadas?

9. Como suas intenções e decisões influenciam o orçamento e o planejamento financeiro da sua família? Exemplifique sua resposta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pesquisa e ação Telejornal

Objetivos

Pesquisar sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) relacionados ao meio ambiente; pesquisar informações e dados estatísticos sobre a influência do ser humano na degradação do meio ambiente para a criação de um telejornal; divulgar a pesquisa realizada à comunidade escolar.

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3**, **4**, **5**, **7**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **4** e das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT103**, **EM13MAT201** e **EM13MAT407** da BNCC. Além disso, permite um trabalho interdisciplinar com os professores das áreas de Linguagens e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A discussão sobre a importância da preservação e conservação do meio ambiente, bem como a divulgação das pesquisas e de ações por meio da produção coletiva de um telejornal, favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG301**, **EM13CNT206** e **EM13CNT302** da BNCC, e da competência específica **3**, tanto de Linguagens e suas Tecnologias quanto de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

A preservação do meio ambiente é indispensável para manter a saúde do planeta Terra e de todos os seres vivos que nele habitam. Por se tratar de um tema tão importante, essa é uma das pautas da Organização das Nações Unidas (ONU), que anualmente reúne diversos países em congressos, conferências e encontros sobre os mais variados assuntos, entre eles a reflexão sobre o meio ambiente e a promoção de ações para preservá-lo.

Pensando no desenvolvimento sustentável do planeta, a fim de que as atuais e as futuras gerações tenham qualidade de vida, os países-membros da ONU definiram os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Alguns desses objetivos estão relacionados ao meio ambiente.

Conscientizar as pessoas sobre a importância de preservar os recursos é um dos passos para a preservação ambiental. Por isso, nesta atividade, você e seus colegas vão pesquisar informações e dados estatísticos sobre o meio ambiente e apresentá-los, no formato de um telejornal, à comunidade escolar (pais, alunos e professores). Dessa maneira, poderemos realizar um trabalho de conscientização sobre a importância da preservação do meio ambiente e do desenvolvimento sustentável.

Etapa 1: A ONU e os ODS

Ver comentários e respostas no Guia do professor.

1. Pesquise e responda às questões a seguir.

a) O que é a ONU? Qual é o objetivo principal dessa organização?

b) O que são e quais são os ODS?

c) Quais são os ODS que estão relacionados diretamente com a preservação do meio ambiente? Indique as principais ações propostas desses objetivos.

Etapa 2: Informações e dados estatísticos sobre a degradação do meio ambiente

2. Reúna-se com os colegas em grupos. Escolham um dos temas listados a seguir para pesquisar sobre ele, obtendo referências da cidade em que residem e do Brasil.

Tema 1 – Água potável e saneamento: dados estatísticos sobre o acesso à agua potável e ao saneamento adequado no Brasil; dados sobre a reciclagem de material; dados sobre a reutilização da água; informações sobre como o despejo de dejetos e de produtos químicos no ar, em rios etc. poluem e degradam o ambiente; informações sobre a gestão dos recursos hídricos no Brasil e a escassez de água; dados sobre programas de coleta de água, eficiência do uso e tecnologias para o reúso.

Tema 2 – Energia limpa e sustentável: o que são e quais os tipos de energia renováveis; informações sobre a pesquisa, o acesso e as tecnologias usadas para a produção de energia limpa (energia renovável, eficiência energética e tecnologias de combustíveis fósseis); dados estatísticos sobre o fornecimento de energia; dados sobre o tipo de energia e a porcentagem de energia sustentável usada pelos brasileiros.

Tema 3 – Consumo e produção sustentáveis: o que é gestão sustentável e uso eficiente dos recursos naturais; dados sobre como está a situação no Brasil nesses quesitos; informações sobre a redução da geração de resíduos por meio da prevenção, da redução, da reciclagem e do reúso.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3. Com base no tema escolhido, realizem as pesquisas em livros, revistas especializadas, jornais ou *sites*. Peçam orientação ao professor, quando necessário, e busquem *sites* seguros, nos quais possam encontrar informações confiáveis. Lembrem-se de que sempre devemos indicar a fonte de pesquisa.
4. Com base nos dados e nas informações coletados, respondam às questões a seguir.
   a) As informações coletadas foram obtidas em fontes confiáveis? Existem informações conflitantes ou de fontes diferentes? Se sim, o que fazer nesse caso?
   b) De que maneira os dados coletados estavam apresentados na fonte pesquisada? Existe um modo diferente de indicar esses dados, para torná-los mais atrativos aos espectadores do telejornal, a fim de que um maior número de pessoas compreenda as informações transmitidas?
5. Selecionem as informações que consideram mais importantes sobre o tema pesquisado e o modo como elas poderão ser apresentadas.

A criação de um telejornal é uma tarefa complexa. Entretanto, ao reconhecer alguns padrões nos componentes de um telejornal, dividindo-o e organizado-o em etapas e em processos, como escalada, abertura, introdução, reportagens etc., é possível reaproveitar estratégias conhecidas e reduzir a complexidade da tarefa, viabilizando sua realização com sucesso. Para fazer isso, durante a organização, os alunos deverão identificar as informações relevantes para cada etapa.
O reconhecimento de componentes e etapas, bem como a organização do telejornal, coloca os alunos em contato com os pilares do *pensamento computacional*: o reconhecimento de padrões, a decomposição e a abstração.

Etapa 3: Criação do telejornal

6. Veja a seguir como um telejornal pode ser organizado.

Etapas em que o recurso de trilha sonora é usual.

ESCALADA
Serve para chamar a atenção do telespectador com a introdução das manchetes das principais notícias, que são selecionadas pelos PRODUTORES.

ABERTURA
Mostra a identidade do telejornal. Pode apresentar uma vinheta e o cenário principal.

INTRODUÇÃO
Introduções feitas pelos ÂNCORAS para a primeira e outras reportagens. Esta etapa é definida pelos ROTEIRISTAS.

REPORTAGENS
Produzidas e muitas vezes apresentadas pelos REPÓRTERES, as reportagens trazem imagens e vídeos, relacionados ao assunto, com as fontes e o nome do repórter e do cinegrafista.
- ao vivo (interação entre âncoras e repórteres)
- gravada (com ou sem a presença do repórter)
- entrevista com especialista

AMARRAÇÕES e INTERVALO
Momentos de pausa entre as reportagens. É importante manter a atenção do telespectador, gerando expectativa.

ENCERRAMENTO e CRÉDITO
Finaliza o telejornal, podendo trazer notícias rápidas. O crédito apresenta a equipe envolvida na produção do telejornal.

QUEM É QUEM

- **ÂNCORAS**: apresentam o telejornal e podem expor seu ponto de vista, assumindo a responsabilidade.
- **EDITORES DE VÍDEO**: responsáveis por editar todo o material (reportagens, vinhetas, trilha sonora) seguindo o roteiro preestabelecido.
- **PRODUTORES**: responsáveis pela organização geral, verificam os textos, cuidam da programação dos horários e da organização das etapas do telejornal.
- **REPÓRTERES**: produzem as reportagens por meio de pesquisas, entrevistas etc.
- **ROTEIRISTAS**: definem e registram como o telejornal será organizado – a sequência de apresentação das reportagens, a sequência de fala dos âncoras, o momento de entrada das reportagens e das vinhetas.
- **OPERADORES DE CÂMERA**: responsáveis pela gravação do telejornal.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7. Agora, você e sua turma vão criar um telejornal, buscando conscientizar as pessoas sobre a situação ambiental atual e o futuro do meio ambiente.

   Atribuam um nome ao telejornal. O telejornal será gravado e depois transmitido à comunidade escolar em um evento agendado.

8. Para a produção do telejornal, a organização da turma poderá ser feita de acordo com as funções com que cada um mais se identifica. Todas as etapas do trabalho são importantes e todos devem trabalhar juntos para que o telejornal aconteça. Troquem ideias, organizem as tarefas a serem realizadas e definam as reportagens de destaque. O trabalho em equipe permite que o telejornal fique mais organizado e aborde melhor o tema.

9. Após produzirem as reportagens e definirem a organização do telejornal, façam um ensaio. Esse momento é importante para verificar o que está bom e o que precisa ser melhorado. Vocês podem ensaiar mais de uma vez, para que se sintam confiantes no momento da gravação, antes da edição do vídeo.

Etapa 4: Apresentação do telejornal

10. Após a gravação ser editada, em um dia previamente agendado, transmita o telejornal aos telespectadores. Nesse caso, na data combinada, organizem um espaço para que as pessoas possam se sentar e assistir ao telejornal.

Etapa 5: Análise e síntese do trabalho realizado

11. Após a apresentação do telejornal, reúna-se com a turma para avaliar o trabalho realizado. É interessante que todos opinem sobre alguns pontos, como:
    - O que acharam do telejornal?
    - Ficou claro qual era o tema?
    - A turma conseguiu trabalhar de forma colaborativa?
    - O que poderia ter sido mais bem preparado?

12. Nesse momento, você fará uma autoavaliação. Para isso, escreva um relatório respondendo às questões a seguir e acrescente outras informações que julgar importantes sobre sua autoavaliação. Em seguida, entregue o relatório ao professor.
    - Ajudei meu grupo durante a pesquisa do tema?
    - Tive dificuldade em encontrar dados e informações em fontes confiáveis?
    - Houve dificuldades durante a seleção das informações?
    - Compreendi o teor das informações e dos dados estatísticos coletados para conscientizar as pessoas sobre a importância de preservar o meio ambiente?
    - Ajudei a turma propondo ideias, sugestões e mudanças durante a criação do telejornal?
    - Participei dos momentos de conversa, de pesquisa, de organização e de produção do telejornal?
    - Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
    - Tive dificuldades durante o trabalho? Se sim, quais? Como busquei resolvê-las?
    - O que aprendi durante a criação do telejornal?

MODERNA

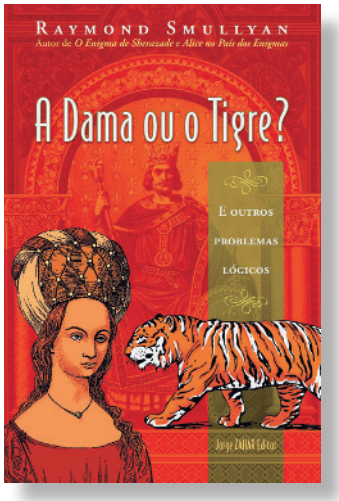
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral, ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

Livros

REPRODUÇÃO



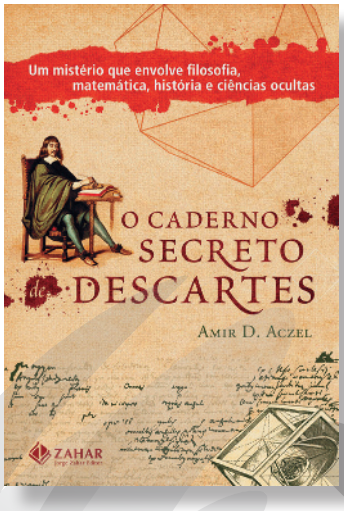
A dama ou o tigre? E outros problemas lógicos

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

Nesse livro, o autor nos convida a desvendar incríveis problemas e enigmas que envolvem raciocínio lógico-matemático. A leitura é conduzida por personagens diferentes e divertidos que participam de histórias que surpreendem pelos desafios propostos ao leitor e por suas resoluções.

REPRODUÇÃO



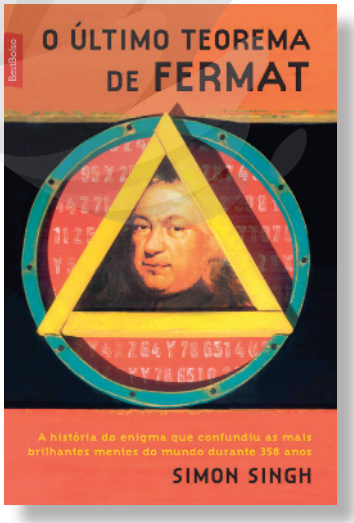
O caderno secreto de Descartes

Amir D. Aczel

Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo **cartesiano** vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da Filosofia moderna. Com um misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos não publicados do filósofo e as circunstâncias suspeitas de sua morte.

REPRODUÇÃO



O último teorema de Fermat

Simon Singh

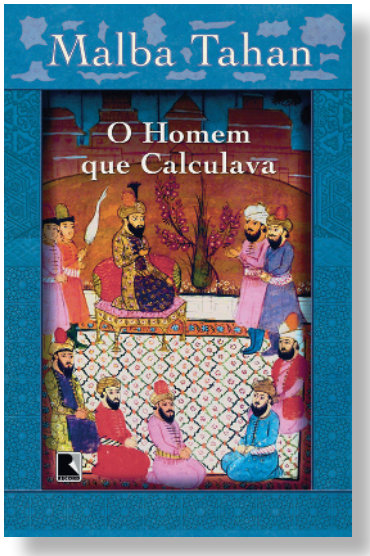
Rio de Janeiro: BestBolso, 2014.

Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês amador, tinha o hábito de fazer anotações nos livros que lia. Uma das anotações foi a seguinte: "Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito estreita para contê-la". Assim nascia o problema que iria confundir e frustrar os matemáticos mais brilhantes do mundo por mais de 350 anos: a busca da demonstração de que não existe solução, em números inteiros, para $x^n + y^n = z^n$, para n maior que 2. Ao narrar a dificuldade de chegar a uma solução, a obra relata a vida e a contribuição dos envolvidos nessa história.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

REPRODUÇÃO



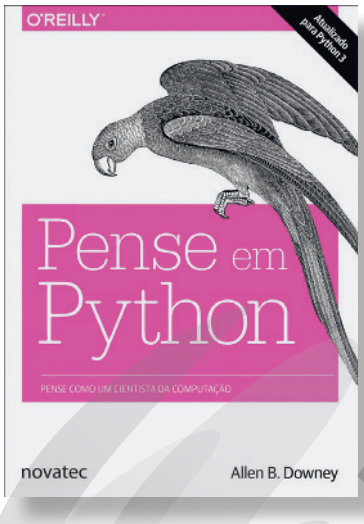
O homem que calculava

Malba Tahan

Rio de Janeiro: Record, 2001.

Nesse livro, Malba Tahan, pseudônimo do professor de Matemática brasileiro Júlio César de Mello e Souza, narra de forma envolvente e lúdica a história do calculista Beremiz Samir, o homem que calculava. Beremiz maneja os números com a facilidade de um ilusionista, e problemas aparentemente insolúveis demonstram uma transparente simplicidade quando expostos a ele, encantando reis, poetas, xeques e sábios.

REPRODUÇÃO



Pense em Python: pense como um cientista da computação

Allen B. Downey

São Paulo: Novatec, 2016.

Com esse livro é possível aprender tanto sobre a linguagem de programação Python em sua versão 3 quanto sobre conceitos de lógica de programação.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Museu

MUSEU DO INMETRO

Visita virtual pelo Museu do Inmetro

A visita virtual pelo *campus* do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) em Xerém (Duque de Caxias/RJ) é muito rica e fornece informações sobre a função desse órgão e a regulamentação de medições e instrumentos de medição. O passeio pelo instituto e por seus laboratórios, com áudios e vídeos, mostra diversos equipamentos e traz explicações enriquecedoras.

Disponível em: <http://www.eravirtual.org/inmetro_br/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Linguagens de programação

Documentação da linguagem Python

A documentação de uma linguagem de programação traz especificações técnicas necessárias para explorar e utilizar todos os seus recursos. Explicam-se os métodos, os comandos e apresentam-se tutoriais de uso de alguns recursos.

Disponível em: <https://docs.python.org/pt-br/3/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Um curso da linguagem Python

O Coursera é uma plataforma de cursos *on-line* sobre diversos assuntos. No Coursera, o Centro de Competência de Software Livre do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (CCSL-IME-USP) disponibilizou um curso gratuito a respeito da linguagem Python. O curso, bastante completo, aborda desde os conceitos iniciais até recursos mais avançados, como funções, essenciais para o desenvolvimento de um programador de computadores.

Disponível em: <https://www.coursera.org/learn/ciencia-computacao-python-conceitos/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Super Logo

Na internet, é possível acessar vários tutoriais e sugestões de atividades usando o Super Logo.

O Super Logo é uma linguagem de programação que permite, por meio de comandos, deslocar uma tartaruga pela tela do computador deixando um rastro colorido, possibilitando, assim, desenhar figuras geométricas. Com ele, é possível explorar o pensamento computacional e trabalhar diversos conceitos geométricos.

Disponível em: <https://www.nied.unicamp.br/biblioteca/super-logo-30/> ou <https://www.nied.unicamp.br/biblioteca/super-logo-3-0-para-windows-7-a-10/>. Acessos em: 23 jul. 2020.

Scratch

O Scratch é uma linguagem de programação e comunidade *on-line* com a qual o usuário pode programar seus próprios jogos, animações e estórias interativas, além de ver as criações produzidas por outros usuários e compartilhar as suas.

Disponível em: <https://scratch.mit.edu/>. Acesso em: 23 jul. 2020. No *site* mencionado, há um menu no rodapé com a possibilidade de mudar o idioma para "Português Brasileiro".

O *site* nacional <http://www.scratchbrasil.net.br/> (acesso em: 23 jul. 2020) traz diversas informações, tutoriais e eventos relacionados ao *Scratch* no Brasil.

Podcasts

Fronteiras da ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que fala do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas no formato de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Projeto Matemática no ar

Esse projeto foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. Seu objetivo era mostrar ao público que a matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Vídeo

Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista profissionais das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da matemática em seu trabalho.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Respostas

CAPÍTULO 1

1. a) Perímetro é a medida de uma grandeza (comprimento).
b) sim
c) sim

2. a) 20 u, 30 u, 20 u e 30 u
b) 50 u, 70 u e 100 u
c) 100, 100, 150, 150, 600; 100 u^2, 100 u^2, 150 u^2, 150 u^2, 600 u^2
d) 1.100 peças; 1.100 u^2
e) 3.000 cubos; 3.000 u^3

3. Respostas possíveis:
a) fita métrica, milímetro; balança, grama; termômetro, grau Celsius; esfigmomanômetro, milímetro de mercúrio
b) trena, milímetro; recipiente graduado em litro ou decímetro cúbico, litro ou decímetro cúbico
c) calendário, semana; relógio, minuto; cronômetro, segundo

4. Total: 8.300.000, 8.100.000, 8.100.000, 7.900.000, 7.700.000.
Integrado: 500.000, 500.000, 500.000, 600.000, 600.000.

5. respostas pessoais

6. Andréa pode comprar nas duas primeiras lojas (R$ 47,00), mas na última (R$ 51,00) não.

7. respostas pessoais

8. 43.300.000.000.000.000; $4{,}33 \cdot 10^{16}$

9. $1{,}35 \cdot 10^3$ μ^3

10. a) respostas pessoais
b) É uma unidade de medida da grandeza de comprimento.
c) $1{,}3 \cdot 10^{40}$ kg
d) $5{,}0611 \cdot 10^{20}$ km
e) $1{,}3 \cdot 10^{19}$ Yg

11. a) $T_k = 273{,}15$ K
b) $T_k = 373{,}15$ K

12. alternativa c

13. alternativa b

14. a) resposta pessoal
b) Chumbo tem maior massa específica, 11,3 g/cm^3; o peso é o mesmo em ambas as mãos.

15. 75 kg

16. aproximadamente 7,3 m/s e 26,3 km/h

17. resposta pessoal

18. a) Na região visível aos seres humanos, os valores de λ ficam entre 400 nm (violeta) e 700 nm (vermelho). E há radiações que não conseguimos enxergar, por exemplo, os raios ultravioleta (10 nm $< \lambda <$ 400 nm) e os raios infravermelhos (700 nm $< \lambda <$ 1.000.000 nm).
b) micro-ondas: 10^6 nm $< \lambda < 3 \cdot 10^7$ nm; raio X: 10^{-2} nm $< \lambda <$ 10 nm
c) Devemos nos cobrir, evitar a luz solar mais intensa, hidratar a pele e usar protetor solar e óculos com proteção solar.
d) O gás CFC (clorofluorcarboneto), encontrado em gás de refrigeração e em aerossóis e também em halogênios (flúor, cloro, bromo, iodo, astato e tenessínio), é liberado na atmosfera e atinge a camada de ozônio, reagindo com ele.
e) Cabem quase 3 "Brasis".

19. alternativa b

20. 1.280 arquivos

Exercícios complementares

1. 1) 26,28 e 7,30;
2) 19,94 e 5,54;
3) 17,96 e 4,99;
4) 14,62 e 4,06;
5) 13,25 e 3,68;
6) 12,42 e 3,45;
7) 12,20 e 3,39;
8) 11,16 e 3,10;
9) 11,16 e 3,10;
10) 10,15 e 2,82;
11) 10,08 e 2,80;
12) 9,18 e 2,55;
13) 8,82 e 2,45;
14) 8,82 e 2,45;
15) 8,10 e 2,25;
16) 6,84 e 1,90.

2. a) 50.000.000 b) 190.000.000

3. As medidas representam, respectivamente, 7.367 km e 9.199 km.

4. alternativa c

5. 27.000 km/h

6. alternativa c

7. alternativa b

8. alternativa b

9. a) 75 g
b) 37,5 g
c) 4,6875 g
d) 2.343,75 g

10. a) 594 mm × 841 mm; 0,5 m^2
b) 420 mm × 594 mm; 0,25 m^2
c) 297 mm × 420 mm; 0,125 m^2
d) 210 mm × 297 mm; 0,0625 m^2
e) 1.189 mm × 1.682 mm; 2 m^2

11. a) arestas com 1 m; volume = 1 m^3
b) Não, pois o volume terá o cubo do dobro da caixa do item **a**.

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa b

3. alternativa a

4. alternativa a

5. alternativa d

6. alternativa d

CAPÍTULO 2

1. a) $A = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$
b) $B = \{A, E, I, O\}$
c) $C = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}\}$

2. Respostas possíveis:
a) *D*: *x* é um número natural múltiplo de 12 e menor que 40
b) *E*: fases da Lua
c) *F*: *x* é um número ímpar maior que 3 e menor que 21

3. a) falsa
b) verdadeira
c) verdadeira
d) falsa
e) verdadeira
f) verdadeira

4. a) Não. Essa relação não é válida, pois nem todo número ímpar é múltiplo de 3. O elemento 5, por exemplo, pertence ao conjunto *A*, mas não pertence ao conjunto *C*.
b) Não. Essa relação não é verdadeira, pois há números ímpares que não são primos. Por exemplo, o número 49 pertence ao conjunto *A*, mas não pertence ao conjunto *B*.
c) Não. Há um número primo que é par: o número 2.

5. *A* e *C*

6. a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $Y = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

7. a) falsa
b) verdadeira
c) falsa
d) verdadeira
e) falsa
f) verdadeira
g) falsa
h) verdadeira
i) verdadeira

8. a) {2, 9}
b) {3, 9}
c) {8, 4}
d) {5, 7, 9}

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. $M = \{b\}$ ou $M = \{a, b\}$ ou $M = \{b, c\}$ ou $M = \{a, b, c\}$

10. Respostas possíveis: $A \supset B$; $A \supset C$; $A \supset D$; $B \supset C$; $D \subset B$; $D \subset C$; $B \not\subset C$; $C \not\subset D$

11. O = {João, Rui} ou O = {João, Rui, Jonas} ou O = {João, Rui, Carlos} ou O = {João, Rui, Carlos, Jonas}

12. a) $\{1, 2, 3, 4\}$ c) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $\{1, 3, 5\}$ d) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

13. 210.094.000 elementos

14. a) B c) $\varnothing$
b) $\varnothing$ d) B

15. a) $\varnothing$ c) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $\{5\}$

16. Respostas possíveis:
a) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
b) $(B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ ou $(B \cap C) - A$

17. 8 voluntários; 34 voluntários

18. 25 pessoas

19. a) 46%
b) os filmes X e Z, porque $n(X \cup Z) > n(Y \cup Z) > n(X \cup Y)$

20. I. Está de acordo com os dados, pois foram pesquisadas 100 pessoas, das quais 63 acharam o preço elevado.
II. De fato, a quantidade de pessoas que não apontaram problemas (16) é maior que a das que apontaram os três problemas (10). Porém, essa conclusão não é suficiente para saber se a maioria dos entrevistados gostou do modelo.
III. Como $n(A) > n(P) > n(D)$, é melhor para a empresa investir em melhorias no acabamento que criar vantagens na forma de pagamento.

21. a) $\{6, 8, 10\}$ c) $\{0, 2, 6, 8, 10\}$
b) $\{0, 2, 10\}$ d) $\{6, 8\}$

22. o próprio conjunto C

23. a) 15 c) 0
b) 27 d) 5

24. a) falsa
b) verdadeira
c) verdadeira
d) falsa
e) verdadeira
f) falsa

25. Não, a divisão não está definida no conjunto dos números inteiros.

26. a) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Z}$
b) $\mathbb{Q}$ d) $\mathbb{Q}$

28. a) $-\frac{91}{9}; -\frac{991}{99}$
b) $\frac{4}{3}; \frac{23}{15}$

30. a) verdadeira
b) verdadeira
c) falsa
d) verdadeira
e) verdadeira
f) falsa

31. a) dois c) infinitos
b) três d) infinitos

32. a) $\notin$ d) $\in$ g) $\subset$
b) $\notin$ e) $\subset$ h) $\not\subset$
c) $\notin$ f) $\subset$ i) $\not\subset$

33. a) verdadeira c) falsa
b) falsa d) falsa

34. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ ou $]1, 5[$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leqslant x < 7\}$ ou $[\sqrt{2}, 7[$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ou $]-\infty, 0[$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0{,}33...\}$ ou $[0{,}33...; +\infty[$

35. a) $A \cup B = A$
$A \cap B = B$
$A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2$ ou $5 \leqslant x < 7\}$
$B - A = \varnothing$
b) $A \cup B = [-1, +\infty[$
$A \cap B =]1, 6[$
$A - B = [-1, 1]$
$B - A = [6, +\infty[$
c) $A \cup B = [-3, 1] \cup [2, 5[$
$A \cap B = \varnothing$
$A - B = A$
$B - A = B$

36. alternativa d

37. alternativa a

Exercícios complementares

1. a) $\{-20, -10, -4, -2, 2, 4, 10, 20\}$
b) $\varnothing$
c) $\{0, 1, 2\}$

2. Respostas possíveis:
a) $A = \{x \mid x$ é letra da palavra banana$\}$
b) $B = \{x \mid x$ é natural de potência 2$\}$

3. a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $\{0, 1, 2\}$
c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B$
d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
e) $\{0\}$
f) $\{3, 4\}$
g) $\{3, 4, 5, 6\} = C$
h) $\varnothing$

4. a) região IV c) $\varnothing$
b) $\varnothing$

5. $C_A^B = \{2, 5, 7\}$

6. três pessoas

7. a) 12 alunos c) 15 alunos
b) 23 alunos

8. $M = \{3, 8, 10\}$; $n(M) = 3$

9. 36 pessoas têm miopia e 27 pessoas têm astigmatismo.

10. a) A
b) B
c) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$
d) $\varnothing$
e) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]2, \frac{15}{7}\right]$

11. $x = 1$ e $y = 2$

12. a) x c) $x + y$
b) y d) y

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa c

3. alternativa d

4. alternativa b

5. alternativa a

6. alternativa c

7. alternativa a

8. alternativa b

9. alternativa b

CAPÍTULO 3

1. a) não
b) R$ 72,50; R$ 154,20
c) 78 m³

2. a) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.
b) Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 3) que tem dois correspondentes em B.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

c) Não é função, pois existe um elemento em A (o elemento 5) que não tem correspondente em B.
d) É função, pois cada elemento de A tem um único correspondente em B.

3. b) Não, pois existe um elemento em A (o elemento 4) que não tem correspondente em B.

4. a) medida do diâmetro da base; preço de custo
b) R$ 0,09
c) 5 mm
d) R$ 45,00
e) 100%

5. a) $D(f) = A$; $CD(f) = B$; $Im(f) = \{6, 7, 8, 9\}$
b) Não existe x tal que $f(x) = 4$.
c) $f(5) = 6$

6. $s(\ell) = 2\ell^2$; $D(s) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(s) = \mathbb{R}_+^*$

7. a) 17
b) -7
c) -47
d) 37

8. a) $D(f) = \mathbb{R}$
b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$
c) $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 8\}$
d) $D(j) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1 \text{ e } x \neq 3\}$

9. a) $Im(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$
b) $Im(w) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$

10. a) 4
b) 1
c) Não há zero real.
d) Não há zero real.

11. 0 ou 2

12. -29

13. a) $a = 3$; $b = 2$
b) $-\frac{2}{3}$

15. $A(0, 0)$; $B(1, 3)$; $C(-6, 0)$; $D(-1, -3)$; $E(2, -1)$; $F(-5, 3)$; $G(0, 2)$; $H(0, -2)$; $I(4, 0)$

16. -2

17. $x \leqslant 0$ e $y \geqslant -3$

18. a) de 2008 a 2012
b) de 2010 a 2011

19. a) • 1
• -1
• 3
• 5
b) • 0; 3
• $-0{,}5$
• 0,9; 2,5; 4
• 1,3; 2,4
c) $Im(f) = [-1{,}5]$
d) • nenhum
• 3
• 2
• 1
e) • não
• não

21. a) Não, pois $f(8) = 31 \neq -1$
b) 2
c) Não, pois $3 \notin D(f)$.

22. a) variável independente: tempo; variável dependente: número de litros
b) $y = 8x$, em que y é o número de litros e x é o tempo em hora.
c) Em 1 hora e meia, a máquina produz 12 litros.
d) 6 horas $\rightarrow$ 48 litros; 10 horas $\rightarrow$ $\rightarrow$ 80 litros
e) 0,5 hora

24. a) $y = 3{,}10x$
b) R$ 4,65
c) 3 ℓ; 10 ℓ
d) 50 ℓ

25. a) $D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$
zero: 2
b) $D(h) = [-2, 2]$
$Im(h) = [-3, 3]$
zeros: -2, 0 e 2

26. a) f é crescente para $x \in \mathbb{R}$;
g é crescente para $x \in [0, \infty[$ e decrescente para $x \in]-\infty, 0]$;
h é crescente para $x \in]-\infty, -1]$ e para $x \in [1, +\infty[$ e decrescente para $x \in [-1, 1]$.
b) Só g tem um valor mínimo, e esse valor é $y = 1$.

28. a) 2
b) 4
c) Nesse intervalo, a função assume valores positivos.
d) não
e) $D(f) = [-3, 4]$
f) $Im(f) = [-2, 4]$
g) 4
h) -2

29. a) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
4 é o valor máximo de f.
b) $Im(g) = \mathbb{R}$
g não tem valor máximo nem valor mínimo.
c) $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$
h não tem valor máximo nem valor mínimo.
d) $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$
0 é o valor mínimo de i.
e) $Im(j) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$
-3 é o valor mínimo de j.
3 é o valor máximo de j.

32. a) verdadeira
b) Falsa, pois no intervalo [0, 1] a função é decrescente.
c) Falsa, pois no intervalo [0, 2] a função é negativa ou nula.
d) verdadeira
e) verdadeira

33. a) -2 e 2
b) crescente: $[0, +\infty[$; decrescente: $]-\infty, 0]$
c) positiva: $x < -2$ ou $x > 2$; negativa: $-2 < x < 2$
d) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, +\infty[$
e) -4; imagem de zero

34. a) década de 1930 a 1960, década de 1970 a 1980 e década de 1990 a 2000.
b) década de 1960 a 1970 e década de 1980 a 1990.
c) na década de 1980, com 269.761 pessoas nascidas com o nome Carlos.

35. Itens **a** e **d**, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$.

36. $f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. a) $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$
b) para $x > 2$
c) Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.
d) positiva em $]-\sqrt{6}, +\infty[$; negativa em $]-\infty, -\sqrt{6}[$

38. a) $f(x) = \begin{cases} 10{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leqslant x < 30 \\ 17{,}5x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leqslant x \leqslant 100 \\ 28x; \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$
b) R$ 1.400,00; R$ 2.828,00

39. a) 9
b) $\frac{19}{7}$
c) Não é possível calcular o valor de $p(x)$ para esse item porque a função não está definida para valores maiores do que 3.
d) 4
e) 2
f) $\frac{20}{7}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

40. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{9x - 1}{2 - x}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9\}$

c) $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 2\}$

e) $Im(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -9\}$

41. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 9}{4}$

b) $g^{-1}(x) = \dfrac{3 - x}{2}$

c) $h^{-1}(x) = \dfrac{-2x - 1}{14}$

d) $m^{-1}(x) = 3x - 5$

e) $n^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

f) A função *p* não é bijetora. Assim, não tem inversa.

42. a) O item **f** não admite função inversa, pois a função *p* não é bijetora.

b) Com exceção do item **f**, que não tem inversa, as leis obtidas devem ser iguais às dadas.

c) A inversa da função inversa de uma função bijetora é a própria função.

45. a) $f^{-1}(x) = -x + 3$

b) $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$

c) $h^{-1}(x) = 3x + 6$

d) $k^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{2}$

46. Em **a**, **c** e **d**, pois, em cada um desses casos, os gráficos de *f* e de *g* são simétricos em relação ao gráfico da função identidade.

Exercícios complementares

1. a) Resposta possível:
$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$f(x) = y = \pi x^2$

b) *x*: raio do círculo
y: área do círculo de raio *x*

c) *y* (área)

d) *x* (raio)

e) 4*A*

2. O preço é igual nos dois postos.

3. a) sim b) não

4. a) 0

b) Resposta possível: 3,5

c) Respostas possíveis: −1,5; 1,5; −2,5; 2,5

d) $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [0, 5]$

e) −2 e 2

5. a) Resposta possível: 75 km

b) das 10 h às 11 h

c) 2: 2 horas após a saída de Lucas, ou seja, 10 horas
150: distância, posição após 2 horas

d) 50 km

e) Sim. No item **d**. A quantidade de quilômetros percorrida pelo carro das 11 h às 12 h está representada no gráfico. Assim, a informação de que chovia torrencialmente não é relevante para a resolução da questão.

6. a) $f(x) > 0$ para $-1 < x < 3$
$f(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 3$
$f(x) < 0$ para $x < -1$ ou $x > 3$

b) crescente: $]-\infty, 1]$
decrescente: $[2, +\infty[$
constante: $]1, 2[$

c) −1 e 3

7. a) $\begin{cases} 50, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 100, \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \text{ ou } 5 \leqslant x < 6 \\ 0, \text{ se } 3 < x < 5 \text{ ou } 6 \leqslant x \leqslant 7 \\ 75, \text{ se } 7 < x \leqslant 8 \end{cases}$

b) 250 km

c) três horas

d) Respostas possíveis: Não parar entre a sexta e a sétima hora de viagem, locomovendo-se nesse período à velocidade de 75 km/h; percorrer a primeira hora a 75 km/h e se deslocar entre a sexta e a sétima hora a 50 km/h.

8. a) $]-\infty, 0]$

b) −2 e 1

c) $]-2, 2[$

9. a) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(x) = 2x - 1$

b) $f^{-1}: B \to \mathbb{R}^*$ tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x + 1}$

c) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

10. a) Não, pois para que duas grandezas sejam diretamente proporcionais, é preciso haver uma razão constante de proporcionalidade entre elas. Por exemplo, dobrando a idade, dobraria a massa, o que não ocorre no caso de Sandra.

b) Não, porque não sabemos o que ocorreu no intervalo entre 30 e 40 anos.

c) Sim, pois nos 10 primeiros anos a massa de Sandra aumentou aproximadamente 40 kg – um aumento superior a qualquer outro apresentado no gráfico em um intervalo de 10 anos.

11. alternativa c

12. $C(b) = 16b^2 + \dfrac{18}{b}$; R$ 40,00

Autoavaliação

1. alternativa a

2. alternativa b

3. alternativa c

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa c

7. alternativa c

CAPÍTULO 4

1. a) *x*: 1; *z*: 3; *w*: 1

b) *a*: 6; *b*: 4; *c*: 2; *d*: 2

c) *alfa*: 3; *beta*: 4; *phi*: 12

d) *t*: 2; *u*: 3

2. Resposta possível: Dada uma temperatura *c*, em grau Celsius, converter para grau Fahrenheit.

Passo 1. Seja *f* uma temperatura em Fahrenheit, faça $f \leftarrow \dfrac{9}{5c} + 32$.

O algoritmo termina.

3. Resposta possível: Dados um salário *s* (número real positivo) e uma taxa de reajuste *r* (número real positivo), determinar o novo salário na variável *novoSalario*.

Passo 1. Faça *novoSalario* ← (1 + *r*) · *s*.

O algoritmo termina.

4. Resposta possível: Dados *capital*, *taxa* e *tempo*, números reais positivos, determinar o juro a ser pago por um empréstimo na variável *juro*.

Passo 1. Faça *juro* ← *capital* · *taxa* · · *tempo*.

O algoritmo termina.

5. Resposta possível: Dados dois inteiros nas variáveis *num1* e *num2*, determinar o maior entre eles e guardar esse valor na variável *maior*, que é entregue como saída.

Passo 1. Faça *num1* e *num2* receberem, cada uma, um dos números inteiros da entrada.

Passo 2. Se *num1* < *num2*, vá para o **passo 3.** Senão, vá para o **passo 4.**

Passo 3. Como *num1* é menor que *num2*, faça *maior* ← *num2*. Vá para o **passo 5.**

Passo 4. Como *num1* não é menor que *num2*, então ele é maior ou igual a ele. Assim, faça *maior* ← *num1*.

Passo 5. A variável *maior* contém o maior número.

Encerra-se o algoritmo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6. Resposta possível: Dado n natural, determinar na variável *preco* o valor a ser pago por n frutas.

Passo 1. Faça n receber o valor de entrada.

Passo 2. Se $n < 12$, siga para o **passo 3**. Caso contrário, siga para o **passo 4**.

Passo 3. Faça *preco* $\leftarrow 0{,}8 \cdot n$. Vá para o **passo 5**.

Passo 4. Faça *preco* $\leftarrow 0{,}5 \cdot n$.

Passo 5. A variável *preco* contém o valor final da compra. Encerra-se o algoritmo.

7. Resposta possível: Dadas as notas de entrada, armazenadas nas variáveis $n1$ e $n2$, calcular a média aritmética (variável *media*) e, na variável *aprovacao*, armazenar "verdadeiro" se a média for maior ou igual a 5 ou "falso" se a média for menor que 5.

Passo 1. Faça $n1$ e $n2$ armazenarem, cada uma, um dos valores de entrada.

Passo 2. Faça *media* $\leftarrow \dfrac{n1 + n2}{2}$.

Passo 3. Se *media* $\geqslant 5$, vá para o **passo 4**. Senão, vá para o **passo 5**.

Passo 4. Faça *aprovacao* $\leftarrow$ verdadeiro. Vá para o **passo 6**.

Passo 5. Faça *aprovacao* $\leftarrow$ *falso*.

Passo 6. A variável *aprovacao* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

8. Resposta possível: Dados três inteiros nas variáveis *num1*, *num2* e *num3*, determinar o menor entre eles e guardar o valor na variável *menor*, entregando a variável *menor* como saída.

Passo 1. Faça *num1*, *num2* e *num3* armazenarem, cada uma, um dos três números inteiros como entrada.

Passo 2. Se *num1* < *num2*, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Se *num1* < *num3*, vá para o **passo 5**. Senão, vá para o **passo 7**.

Passo 4. Se *num2* < *num3*, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 7**.

Passo 5. Faça *menor* $\leftarrow$ *num1*. Vá para o **passo 8**.

Passo 6. Faça *menor* $\leftarrow$ *num2*. Vá para o **passo 8**.

Passo 7. Faça *menor* $\leftarrow$ *num3*. Vá para o **passo 8**.

Passo 8. A variável *menor* contém o menor dos três números. Encerra-se o algoritmo.

9. Resposta possível: Dado n um número natural, determinar a semissoma dos n primeiros números naturais.

Passo 1. Faça n receber um número natural como entrada.

Passo 2. Faça *semisSoma* $\leftarrow 0$.

Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.

Passo 4. Faça *semisSoma* $\leftarrow$ *semiSoma* $+ n$.

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.

Passo 6. Faça *semisSoma* $\leftarrow \dfrac{semisSoma}{2}$.

Passo 7. A variável *semisSoma* contém o resultado. Encerra-se o algoritmo.

10. Resposta possível: Dado um número natural n, determinar a soma dos n primeiros termos da sequência gerada por $a_n = 2n + 1$.

Passo 1. Faça n receber um inteiro positivo como entrada.

Passo 2. Faça *soma* $\leftarrow 0$.

Passo 3. Se $n = 0$, vá para o **passo 6**. Senão, vá para o **passo 4**.

Passo 4. Faça *soma* $\leftarrow$ *soma* $+ 2n + 1$.

Passo 5. Faça $n \leftarrow n - 1$. Volte para o **passo 3**.

Passo 6. A variável *soma* contém o resultado para a saída. Encerra-se o algoritmo.

11. Resposta possível:

Dado k natural, determinar o k-*ésimo* termo da sequência de Fibonacci na variável *fibonacci*.

Passo 1. Faça k receber um número natural de entrada.

Passo 2. Faça *fibonacci* $\leftarrow 1$.

Passo 3. Faça *termo1* $\leftarrow 1$.

Passo 4. Faça *termo2* $\leftarrow 1$.

Passo 5. Se $k \leqslant 2$, vá para o **passo 10**. Senão, vá para o **passo 6**.

Passo 6. Faça *fibonacci* $\leftarrow$ *termo1* $+$ *termo2*. Vá para o **passo 7**.

Passo 7. Faça *termo2* $\leftarrow$ *termo1*. Vá para o **passo 8**.

Passo 8. Faça *termo1* $\leftarrow$ *fibonacci*. Vá para o **passo 9**.

Passo 9. Faça $k \leftarrow k - 1$. Vá para o **passo 5**.

Passo 10. A variável *fibonacci* contém o valor de saída. Encerra-se o algoritmo.

12. **a)** verdadeiro
b) falso
c) falso
d) verdadeiro

13. A linha com a saída será a 7.

14. Resposta possível:

```
1 | numero1 = int(input("Entre com um inteiro
positivo não nulo: "))
2 | numero2 = int(input("Entre com outro inteiro
positivo não nulo: "))
3 | if numero1 % numero2 == 0:
4 |    print("É múltiplo.")
5 | else:
6 |   print("Não é múltiplo.")
```

15. Resposta possível:

```
1 | a = float(input("Entre com um número real: "))
2 | b = float(input("Entre com um número real: "))
3 | c = float(input("Entre com um número real: "))
4 | if c**2 == a**2 + b**2:
5 |    print("A igualdade é verdadeira.")
6 | else:
7 |    print("A igualdade é falsa.")
```

16. Resposta possível:

```
1 | x = float(input("Digite um número real: "))
2 | n = int(input("Digite um número natural: "))
3 | produto = 1
4 | contador = 0
5 | while contador < n:
6 |     produto = produto * x
7 |     contador = contador + 1
8 | print("O resultado é: ",produto)
```

17. Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número natural: "))
2 | fat = 1
3 | contador = 1
4 | if n <= 1:
5 |     print("O valor do fatorial é: 1")
6 | else:
7 |     while contador <= n:
```

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

```
8 |         fat = fat * contador
9 |         contador = contador + 1
10|     print("O valor do fatorial é: ", fat)
```

18. Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite um número inteiro: "))
2 | contaNegativos = 0
3 | while n != 0:
4 |     if n < 0:
5 |         contaNegativos = contaNegativos + 1
6 |   n = int(input("Digite um número inteiro: "))
7 | print("Você digitou ", contaNegativos, "números negativos.")
```

19. Resposta possível:

```
1 | contaPares = 0
2 | contaImpares = 0
3 | numero = int(input("Digite um número natural: "))
4 | while numero != 0:
5 |     if numero % 2 == 0:
6 |         contaPares = contaPares + 1
7 |     else:
8 |         contaImpares = contaImpares + 1
9 |     numero = int(input("Digite um número natural diferente de 0: "))
10| print("Você digitou ",contaPares," pares e ",contaImpares,"ímpares.")
```

Exercícios complementares

1. a) iii
b) i
c) iv
d) ii

2. Resposta possível:

Passo 1. Faça *n* ← entrada("Digite um número natural diferente de 0:")

Passo 2. Se o resto da divisão de *n* por 7 for igual a 0, vá para o **passo 3**. Senão, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Faça *multiplo* ← "Verdadeiro". Vá para o **passo 5**.

Passo 4. Faça *multiplo* ← "Falso".

Passo 5. Envie *multiplo* para a saída. Encerra-se o algoritmo.

4. Resposta possível:

```
1 | lado = float(input("Digite a medida do lado: "))
2 | perimetro = 4 * lado
3 | area = lado ** 2
4 | print("perímetro: ",perimetro," cm; área: ",area," cm²")
```

5. Resposta possível:

```
1 | base = float(input("Digite a medida da base: "))
2 | altura = float(input("Digite a medida da altura: "))
3 | area = (base * altura) / 2
4 | print("A área do triângulo é: ",area," cm²")
```

6. Resposta possível:

```
1 | nota1 = float(input("Digite a nota 1: "))
2 | nota2 = float(input("Digite a nota 2: "))
3 | nota3 = float(input("Digite a nota 3: "))
4 | media = (nota1 * 1 + nota2 * 2 + nota3 * 4) / 7
5 | print("A média ponderada é: ",media)
```

7. Resposta possível:

```
1 | numero1 = float(input("Digite a medida maior: "))
2 | numero2 = float(input("Digite outra medida: "))
3 | numero3 = float(input("Digite outra medida: "))
4 | if numero1**2 == numero2**2 + numero3**2:
5 |     print("O triângulo é retângulo.")
6 | else:
7 |     print("O triângulo NÃO é retângulo.")
```

8. a) 0
b) 9, 7, 5, 3 e 1

9. Resposta possível:

```
1 | idadeMinima = 16
2 | idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
3 | cidadaosHabilitados = 0
4 | while idade != 0:
5 |     if idade >= 16:
6 |         cidadaosHabilitados = cidadaosHabilitados + 1
7 |     idade = int(input("Digite a idade do cidadão: "))
8 | print("Cidadãos habilitados: ", cidadaosHabilitados)
```

10. resposta pessoal

11. Resposta possível:

```
1 | n = int(input("Digite o número de termos: "))
2 | anterior1 = 0
3 | anterior2 = 1
4 | fibonacci = 1
5 | while n != 0:
6 |     print(fibonacci)
7 |     fibonacci = anterior1 + anterior2
8 |     anterior1 = anterior2
9 |     anterior2 = fibonacci
10 |    n = n - 1
```

12. Resposta possível:

```
1 |n = int(input("Digite um número natural: "))
2 |contador = 2
3 |while contador < n:
4 |    if n % contador == 0:
5 |        break
6 |    contador = contador + 1
7 |if contador != n:
8 |    print("Não é primo.")
9 |else:
10 |    print("É primo.")
```

Autoavaliação

1. alternativa a
2. alternativa c
3. alternativa b
4. alternativa e
5. alternativa c
6. alternativa d
7. alternativa c
8. alternativa a

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e um caderno complementar). Os livros apresentam diversos conceitos da educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os estudantes transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Materiais elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livro conceituado em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos (tomo 1)*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.

Livro sobre história da Matemática com foco na invenção dos algarismos.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos (tomo 2)*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000. v. 2.

O objetivo essencial dessa obra em dois volumes é responder, em termos simples e acessíveis, a diversas questões que o público questiona a respeito da história dos algarismos e do cálculo, desde a Pré-história até a era dos computadores.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro apresenta tópicos como teoria dos conjuntos e funções (afins, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e trigonométricas).

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

Destinado a pesssoas que se interessam em ter alguma informação sucinta, embora geral, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

MODERNA

MODERNA

ISBN 978-65-5779-032-8

9 786557 790328