**ORGANIZADORA:** Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

**EDITOR RESPONSÁVEL:**
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202134

# CONEXÕES

## MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

## Funções e aplicações





Área do conhecimento:
**Matemática e suas Tecnologias**

**MANUAL DO PROFESSOR**

MODERNA

MODERNA

# CONEXÕES

## MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

**Funções e aplicações**

**Organizadora: Editora Moderna**
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

**Editor responsável:**
**Fabio Martins de Leonardo**
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

**Área do conhecimento:**
**Matemática e suas Tecnologias**

# MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

**Elaboração dos originais:**

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

**Edição de texto:** Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

**Assistência editorial:** Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

**Preparação de texto:** Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

**Assessoria pedagógica:** Fabio Simon, Fernando Barriento, Igor Suga, Jean Rocatelli, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Rodrigo Terra

**Gerência de *design* e produção gráfica:** Everson de Paula

**Coordenação de produção:** Patricia Costa

**Gerência de planejamento editorial:** Maria de Lourdes Rodrigues

**Coordenação de *design* e projetos visuais:** Marta Cerqueira Leite

**Projeto gráfico:** Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

**Capa:** Daniela Cunha
*Ilustrações*: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

**Coordenação de arte:** Wilson Gazzoni Agostinho

**Edição de arte:** Elaine Cristina da Silva

**Editoração eletrônica:** Setup Bureau Editoração Eletrônica

**Edição de infografia:** Giselle Hirata, Priscilla Boffo

**Coordenação de revisão:** Maristela S. Carrasco

**Revisão:** Beatriz Rocha, Cecilia S. Oku, Fernanda Souza, Frederico Hartje, Inaya Oliveira, Know-how Editorial, Mônica Surrage

**Coordenação de pesquisa iconográfica:** Luciano Baneza Gabarron

**Pesquisa iconográfica:** Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

**Coordenação de *bureau*:** Rubens M. Rodrigues

**Tratamento de imagens:** Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

**Pré-impressão:** Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

**Coordenação de produção industrial:** Wendell Monteiro

**Impressão e acabamento:**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

**EDITORA MODERNA LTDA.**
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

# Guia para o professor

## PARTE GERAL


**Pressupostos teórico-metodológicos** ..... IV
- A Base Nacional Comum Curricular ..... IV
- As mudanças no Ensino Médio ..... VIII
- As metodologias ativas ..... IX
- A importância da Matemática ..... XI
- A língua materna e a Matemática ..... XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática ..... XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade ..... XIV
- A gestão da sala de aula ..... XV
- Um olhar inclusivo ..... XV
- Avaliação ..... XV

**Organização e estrutura da obra** ..... XVII
- Organização dos volumes ..... XVII
- Sugestão de cronograma ..... XVIII

**Sugestões de consulta para o professor** ..... XIX
- Livros e artigos ..... XIX

**Referências bibliográficas** ..... XXI


## PARTE ESPECÍFICA


**A BNCC neste volume** ..... XXIV

**Sugestões de ampliação** ..... XXIX
Capítulo 1 Função afim ..... XXIX
Capítulo 2 Função quadrática ..... XXX
Capítulo 3 Função exponencial ..... XXX
Capítulo 4 Função logarítmica ..... XXXI
Capítulo 6 Matemática financeira ..... XXXIV

**Sugestões de avaliação** ..... XXXVI
Capítulo 1 Função afim ..... XXXVI
Capítulo 2 Função quadrática ..... XXXVIII
Capítulo 3 Função exponencial ..... XL
Capítulo 4 Função logarítmica ..... XLII
Capítulo 5 Sequências ..... XLV
Capítulo 6 Matemática financeira ..... XLVII

**Resoluções e comentários** ..... XLIX
Capítulo 1 Função afim ..... XLIX
Capítulo 2 Função quadrática ..... LXI
Capítulo 3 Função exponencial ..... LXXV
Capítulo 4 Função logarítmica ..... XCV
Capítulo 5 Sequências ..... CIV
Capítulo 6 Matemática financeira ..... CXVI

Educação financeira Projeto de vida ..... CXXVI
Pesquisa e ação Videodocumentário ..... CXXVII


MODERNA

# Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

## A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

### Competências gerais da Educação Básica

**1.** Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

**2.** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

**3.** Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

**4.** Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

**5.** Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

**6.** Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

**7.** Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

**8.** Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

**9.** Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

**10.** Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

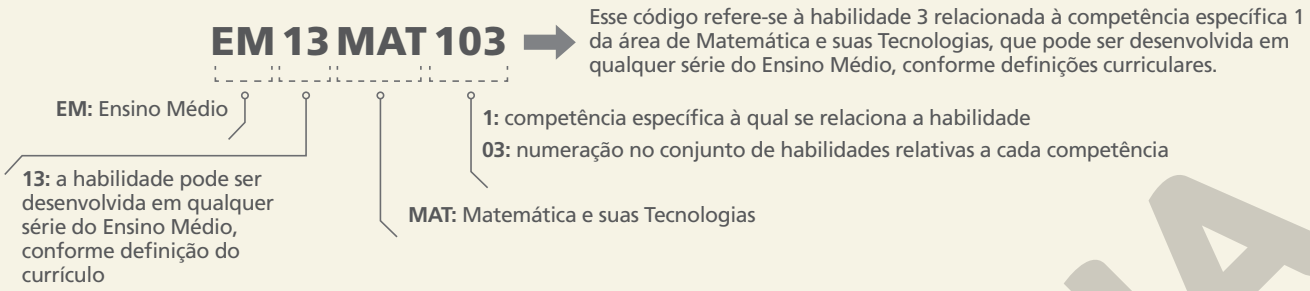
MODERNA

## Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:




É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

## Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.**

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

| HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1 |
|---|
| **(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT102)** Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. |
| **(EM13MAT103)** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. |
| **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. |
| **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). |
| **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.). |

MODERNA

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.**

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

| HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2 |
|---|
| **(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. |
| **(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. |
| **(EM13MAT203)** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. |

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.**

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

| HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 |
|---|
| **(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT303)** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. |
| **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. |
| **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. |
| **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. |
| **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. |
| **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. |
| **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. |
| **(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. |
| **(EM13MAT313)** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. |
| **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). |
| **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. |
| **(EM13MAT316)** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). |

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.**

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

| HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4 |
|---|
| **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. |
| **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. |
| **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. |
| **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. |
| **(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. |
| **(EM13MAT407)** Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise. |

MODERNA

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.**

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

| HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5 |
|---|
| **(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. |
| **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. |
| **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. |
| **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. |
| **(EM13MAT506)** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. |
| **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. |
| **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. |
| **(EM13MAT509)** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. |
| **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. |
| **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades. |

## As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

## O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

## As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

## Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

OBRA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

## A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

## A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

EM ABERTA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

## A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

## Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

REPRODUÇÃO

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

## As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

### O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

EM OFERTA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

## Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o *Scratch* trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

## Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que:

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu quinze temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

| **Temas contemporâneos transversais** | |
|---|---|
| **Ciência e tecnologia** | **Meio ambiente** |
| – Ciência e tecnologia | – Educação ambiental<br>– Educação para o consumo |
| **Multiculturalismo** | **Cidadania e civismo** |
| – Diversidade cultural<br>– Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras | – Vida familiar e social<br>– Educação para o trânsito<br>– Educação em direitos humanos<br>– Direitos da criança e do adolescente<br>– Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso |
| **Economia** | **Saúde** |
| – Trabalho<br>– Educação financeira<br>– Educação fiscal | – Saúde<br>– Educação alimentar e nutricional |

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

REPRODUÇÃO PROIBIDA

## A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

## Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

## Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

| Descritores | Avaliação pelo estudante | Avaliação pelo professor |
|---|---|---|
| 1. Cumpre os objetivos. | | |
| 2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas. | | |
| 3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados. | | |
| 4. Adota uma organização que facilita a compreensão. | | |
| 5. Faz a análise de seus erros. | | |
| 6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades. | | |

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

# Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

## Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre pensamento computacional.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

EM MODELO

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

## Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

| ANOS | BIMESTRES | CAPÍTULOS |
|---|---|---|
| 1º | 1º | Grandezas e medidas |
| | | Conjuntos |
| | 2º | Funções |
| | | Algoritmos e introdução à programação |
| | 3º | Função afim |
| | | Função quadrática |
| | | Função exponencial |
| | 4º | Função logarítmica |
| | | Sequências |
| | | Matemática financeira |
| 2º | 1º | A semelhança e os triângulos |
| | | Trigonometria no triângulo retângulo |
| | 2º | Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer |
| | | Funções trigonométricas |
| | 3º | Superfícies poligonais, círculo e áreas |
| | | Introdução à Geometria espacial |
| | 4º | Poliedros |
| | | Corpos redondos |
| 3º | 1º | Organização e apresentação de dados |
| | | Análise de dados |
| | | Medidas estatísticas |
| | 2º | Análise combinatória |
| | | Probabilidade |
| | 3º | Matrizes e determinantes |
| | | Sistemas lineares |
| | 4º | Geometria analítica |
| | | Transformações geométricas |

MODERNA

# Sugestões de consulta para o professor

## Livros e artigos

### Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.
  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.
- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.
  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.
- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.
  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).
  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.
  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.
- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.
  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.
- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).
  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.
  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.
- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).
  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?
- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.
  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.
- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

### Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.
  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.
- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.
  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

### História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.
  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.
- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

## Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo.* São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

## Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

## Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

## *Sites* e artigos para *download*

*Sites* acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  *Site* da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  *Site* da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/~leo/lem/>

  *Site* do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  *Site* da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

## Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM.* Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

# Referências bibliográficas


BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.


MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

*VIOLÊNCIA escolar e* bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

# A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

| Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume |
|---|
| **Competência geral 1**<br>Ao valorizar e utilizar conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade, como a abertura do capítulo 4, na página 85, a respeito dos estudos sobre a luz das estrelas, e a abertura e o texto introdutório do capítulo 5, nas páginas 105 e 106, ao tratar do calendário chinês, favorecem o desenvolvimento dessa competência. |
| **Competência geral 2**<br>A competência é promovida na seção *Compreensão de texto*, na página 66, do capítulo 2, uma vez que os estudantes são levados a ler uma reportagem que conta a descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene.<br>O trabalho sugerido no tópico *Função exponencial*, nas páginas 73 e 74, do capítulo 3, incentiva os estudantes a pesquisar sobre fatores que podem influenciar o desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente e, em seguida, a buscar, com base nesse estudo, informações que ajudem a prevenir a disseminação e o crescimento populacional indesejável de bactérias, o que pode contribuir com o desenvolvimento dessa competência.<br>Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, a tarefa proposta visa exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, promovendo a investigação, a reflexão e uma análise crítica a respeito das informações obtidas sobre a importância da educação para o trânsito, o que contribui com o desenvolvimento dessa competência. |
| **Competência geral 3**<br>A seção *Compreensão do texto*, na página 84, do capítulo 3, que apresenta um trecho do livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan premiado pela Academia Brasileira de Letras, o qual leva os estudantes a fruir de uma obra mundialmente conhecida, favorece o desenvolvimento dessa competência. |
| **Competência geral 4**<br>Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, ao compor o videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, os estudantes devem utilizar diferentes abordagens e linguagens para atrair a atenção dos telespectadores e transmitir a mensagem de maneira clara e objetiva, o que contribui para o desenvolvimento dessa competência. |
| **Competência geral 5**<br>A competência é desenvolvida ao longo do volume, como no estudo da função exponencial, no capítulo 3, uma vez que os estudantes devem modelar e resolver problemas com e sem apoio de tecnologias digitais, como o uso de *software* para construção de gráficos.<br>O exercício proposto 49, na página 101, do capítulo 4, ao propor a utilização de um *software* de construção de gráficos para determinar o conjunto solução de uma inequação logarítmica, também contribui com o desenvolvimento dessa competência.<br>O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, do capítulo 6, contribui para o desenvolvimento da competência, pois os alunos devem utilizar tecnologias digitais de informação, como planilhas eletrônicas, de forma crítica, significativa e reflexiva para resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.<br>Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, os estudantes são incentivados a criar um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, a pesquisar e a aprender como utilizar tecnologias e recursos digitais para a captura do áudio e do vídeo e como realizar a edição desse material, o que pode contribuir para o desenvolvimento dessa competência. |
| **Competência geral 6**<br>A seção *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, que incentiva o planejamento financeiro e propõe reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos, contribui para o desenvolvimento da competência citada. |
| **Competência geral 7**<br>A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, contribui para o desenvolvimento da competência citada, uma vez que os estudantes devem identificar e escolher fontes confiáveis para as informações e os dados coletados na internet, a fim de criar, no final da atividade, um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito. |
| **Competência geral 8**<br>A abertura do capítulo 1, o boxe *Explore* e a situação inicial apresentada no tópico *Função afim*, na página 14, contribuem para o desenvolvimento dessa competência, ao propiciar a discussão e a pesquisa sobre o novo Coronavírus no início do ano de 2020, além de tratar do tema contemporâneo saúde.<br>A seção *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, que incentiva o planejamento financeiro e propõe reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos, contribui para o desenvolvimento da competência citada. |
| **Competência geral 9**<br>A competência é promovida na seção *Compreensão de texto*, na página 66, do capítulo 2, uma vez que os estudantes são levados a ler uma reportagem que conta a descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene.<br>A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, favorece o desenvolvimento dessa competência, na medida em que os estudantes são convidados a assistir aos videodocumentários dos colegas, refletindo sobre o conteúdo apresentado e como podem contribuir de maneira construtiva para melhorar cada documentário apresentado, exercitando a empatia e o diálogo, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro. |
| **Competência geral 10**<br>As seções *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, que incentiva o planejamento financeiro e propõe reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos, e *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, que propõe a produção de videodocumentários, tendo como base as leis de trânsito e o bem-estar dos cidadãos, contribuem para o desenvolvimento da competência citada. |

MODERNA

**Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume**

**Competência específica 1**

A competência é desenvolvida em diversos momentos ao longo do volume, como no tópico *Função linear e proporcionalidade*, na página 24, do capítulo 1, e no tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2.
Essa competência também é favorecida em várias situações do capítulo 6, uma vez que os alunos vão resolver problemas que envolvem taxa percentual, juro simples ou juro composto.
Além disso, a seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, também contribui para o desenvolvimento da competência citada, uma vez que os estudantes devem produzir um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito com base na análise dos dados estatísticos pesquisados.

**Habilidade EM13MAT101**
A habilidade é favorecida ao longo do volume, como no exercício proposto 12, na página 23, no tópico *Função linear e proporcionalidade*, na página 24, e na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 36 e 37, todos do capítulo 1.
Os tópicos *Resolução de problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2, e *Aplicações da função exponencial*, nas páginas 76 e 77, do capítulo 3, e os boxes *Reflita*, das páginas 132 e 134, do capítulo 6, levam o aluno a interpretar uma situação econômica pela análise de gráfico da função representada e da taxa de variação.
O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, do capítulo 6, também favorece o desenvolvimento dessa habilidade, pois levam os alunos a interpretar criticamente uma situação socioeconômica.
Além disso, a seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, também contribui para o desenvolvimento da competência citada, uma vez que os estudantes devem produzir um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito com base na análise dos dados estatísticos pesquisados.

**Habilidade EM13MAT102**
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, propõe a criação de um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, em que os registros devem apresentar porcentagens, envolver a criação de gráficos e de tabelas para a apresentação dos dados, o que favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

**Habilidade EM13MAT104**
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 144 e 145, do capítulo 6, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade, uma vez que a inflação e os índices como INPC e IPCA são estudados, tratando os temas contemporâneos educação financeira e educação fiscal.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, propõe a criação de um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, em que os registros devem apresentar porcentagens, envolver a criação de gráficos e de tabelas para a apresentação dos dados, o que favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

**Competência específica 2**

O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 141 e 142, do capítulo 6, contribuem com o desenvolvimento dessa competência, na medida em que os estudantes devem resolver e analisar problemas relacionados a questões socioeconômicas.
As seções *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, e *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, contribuem para o desenvolvimento dessa competência, pois propõem ações com base na análise de problemas sociais e nas implicações da tecnologia, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

**Habilidade EM13MAT203**
O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, do capítulo 6, e a seção *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, que incentiva o planejamento financeiro e propõe reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos, favorecem o desenvolvimento da habilidade citada.

**Competência específica 3**

A competência é favorecida em vários momentos nos capítulos 1 e 2, como no tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2, uma vez que os alunos deverão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, modelar e resolver problemas envolvendo funções e suas representações gráficas.
O tópico *Aplicações da função exponencial*, nas páginas 76 e 77, do capítulo 3, também contribui para o desenvolvimento dessa competência, uma vez que os estudantes utilizam os conceitos e os procedimentos relacionados às funções exponenciais, e outras funções obtidas a partir dela, como estratégia na resolução de problemas.
Essa competência, também é favorecida ao longo do capítulo 4, no estudo das funções logarítmicas e na resolução de problemas que envolvem funções desse tipo, bem como ao longo do capítulo 5, no estudo de sequências.
O estudo dos tópicos *Juro simples e juro composto*, nas páginas 132 a 137, e *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, todos do capítulo 6, que proporcionam aos alunos a análise e a plausibilidade de resultados, de modo que construam uma argumentação consistente, também favorecem o desenvolvimento da habilidade citada.

**Habilidade EM13MAT302**
A habilidade é favorecida em diversos momentos do capítulo 1, como no tópico *Função linear e proporcionalidade*, na página 24, na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 36 e 37, e na resolução de problemas que envolvem funções polinomiais de 1º grau. Também é favorecida no estudo da função quadrática, no capítulo 2, em que os alunos trabalharão com a modelagem e a resolução de problemas empregando as funções polinomiais de 2º grau.

MODERNA

**Habilidade EM13MAT303**
O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 141 e 142, do capítulo 6, favorecem o desenvolvimento da habilidade citada, pois os estudantes devem interpretar e comparar situações que envolvem juro simples com as que envolvem juro composto, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

**Habilidade EM13MAT304**
O capítulo 3 favorece o desenvolvimento dessa habilidade, uma vez que os estudantes vão identificar funções exponenciais, analisá-las e representá-las graficamente, além de modelar e resolver problemas envolvendo funções exponenciais.
O tópico *Progressões geométricas*, nas páginas 115 a 122, do capítulo 5, contribui para o desenvolvimento da habilidade, pois leva o aluno a resolver e a elaborar problemas do cotidiano e da Matemática que envolvem funções exponenciais por meio de técnicas algébricas e gráficas.
O tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 141 e 142, do capítulo 6, favorecem o desenvolvimento da habilidade citada, pois os estudantes devem interpretar e comparar situações que envolvem juro simples com as que envolvem juro composto, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

**Habilidade EM13MAT305**
Essa habilidade é favorecida ao longo de todo o capítulo 4, no estudo das funções logarítmicas, bem como no exercício resolvido R9, na página 135, nos exercícios propostos nas páginas 135 e 136 e na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 141 e 142, do capítulo 6, uma vez os alunos vão resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas, nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas.

**Habilidade EM13MAT315**
Os boxes *Pensamento computacional*, na página 16, do capítulo 1, na página 47, do capítulo 2, e na página 110, do capítulo 5, contribuem para o desenvolvimento dessa habilidade, na medida em que os alunos investigam e registram, por meio de linguagem corrente e de fluxograma, algoritmos para modelar e resolver problemas.

**Competência específica 4**

A competência é favorecida em diversos momentos dos capítulos 1 e 2, como no tópico *Construção do gráfico da função afim*, na página 21, em que os alunos devem transitar entre as representações algébricas e geométricas de funções, e no tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2.
Nos boxes *Pensamento computacional*, na página 16, do capítulo 1, na página 47, do capítulo 2, e na página 110, do capítulo 5, a competência também é promovida, uma vez que os estudantes devem ler, escrever e interpretar algoritmos representados graficamente em um fluxograma e em linguagem corrente.
Também é favorecida nos tópicos ao longo de todo o capítulo 3, que levam os estudantes a compreender e a utilizar diferentes registros de representação matemáticos para as funções exponenciais, inclusive na resolução de problemas.
Contribuem também para o desenvolvimento da competência citada o estudo do tópico *Função logarítmica*, nas páginas 93 a 98, o exercício proposto 49, na página 101, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 102 e 103, todos do capítulo 4, bem como o estudo dos tópicos *Progressões aritméticas* e *Progressões geométricas*, nas páginas 109 a 115 e 115 a 122 respectivamente, do capítulo 5, e do tópico *O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros*, nas páginas 138 a 140, do capítulo 6.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, propõe a criação de um videodocumentário sobre a importância da educação para o trânsito, em que os registros devem apresentar porcentagens, envolver a criação de gráficos e de tabelas para a apresentação dos dados, o que favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

**Habilidade EM13MAT401**
A habilidade é favorecida em diversos momentos do capítulo 1, uma vez que os estudantes vão analisar gráficos de funções polinomiais de 1º grau, converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, recorrendo a *software* de construção de gráficos, como nos tópicos *Construção do gráfico da função afim*, na página 21, *Função linear e proporcionalidade*, na página 25, e na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 36 e 37. Além desses, o estudo do tópico *Representação gráfica de uma PA*, nas páginas 112 e 113, do capítulo 5, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

**Habilidade EM13MAT402**
A habilidade é favorecida no tópico *Gráfico da função quadrática*, nas páginas 43 a 55, do capítulo 2, na medida em que os alunos vão estudar como traçar gráficos de funções quadráticas com base em suas representações algébricas.

**Habilidade EM13MAT403**
No estudo das funções logarítmicas, no capítulo 4, os alunos são incentivados a analisar as relações entre a função logarítmica e a função exponencial, nas páginas 93 a 98, e a resolver problemas mobilizando os conceitos estudados na seção *Exercícios complementares*, nas páginas 102 e 103, favorecendo o desenvolvimento dessa habilidade.

**Habilidade EM13MAT404**
A habilidade é favorecida no tópico *Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau*, nas páginas 25 a 29, do capítulo 1, que levam o aluno a analisar funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios, imagem, crescimento e decrescimento e convertendo essas representações de uma para a outra, bem como no tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, do capítulo 2.
O estudo das funções exponenciais, nas páginas 73 a 77, do capítulo 3, e das funções logarítmicas, nas páginas 93 a 98, e a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 102 e 103, do capítulo 4, também contribuem para o desenvolvimento dessa habilidade.

MODERNA

**Competência específica 5**

A competência é promovida em diversos momentos do volume, como no tópico *Translação do gráfico de uma função afim*, nas páginas 26 e 27, do capítulo 1, e na seção *Compreensão de texto*, na página 66, do capítulo 2, em que trata a descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene, e ao longo do capítulo 5, no estudo de sequências, uma vez que os estudantes deverão observar padrões e realizar experimentações para estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas.

**Habilidade EM13MAT501**
A habilidade é favorecida em diversos momentos do capítulo 1, como no exercício 7 da página 17, nos tópicos *Construção do gráfico da função afim*, nas páginas 21 a 23, *Função linear e proporcionalidade*, na página 24, e no tópico *Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau*, nas páginas 25 a 27, que analisa o gráfico de uma função polinomial de 1º grau.

**Habilidade EM13MAT502**
A habilidade é favorecida no tópico *Gráfico da função quadrática*, nas páginas 43 a 55, do capítulo 2, uma vez que os alunos vão construir e analisar gráficos de funções polinomiais de 2º grau.

**Habilidade EM13MAT503**
A habilidade é favorecida em momentos do capítulo 2, como no tópico *Conjunto imagem e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática*, nas páginas 53 a 55, que leva os estudantes a investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos diversos, usando ou não tecnologias digitais, em situações diversas.

**Habilidade EM13MAT507**
Os tópicos *Progressões aritméticas*, nas páginas 109 a 115, e *Problemas que envolvem PA e PG*, nas páginas 122 e 123, ambos do capítulo 5, e o boxe *Reflita*, na página 132, do capítulo 6, favorecem o desenvolvimento da habilidade citada, pois levam os alunos a identificar e a associar PA e função afim de domínio discreto, aplicando propriedades e deduzindo fórmulas.

**Habilidade EM13MAT508**
A habilidade é favorecida nos tópicos *Progressões geométricas*, nas páginas 115 a 122, e *Problemas que envolvem PA e PG*, nas páginas 122 e 123, ambos do capítulo 5, e no boxe *Reflita*, da página 134, do capítulo 6, pois levam os alunos a identificar e a associar PG e função exponencial de domínio discreto, aplicando propriedades e deduzindo fórmulas.

**Habilidade EM13MAT510**
A habilidade é favorecida em vários momentos do capítulo 1, como no exercício 7, da página 17, e nos tópicos *Construção do gráfico da função afim*, nas páginas 21 a 23, e *Função linear e proporcionalidade*, na página 24.

**Como a competência específica e as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume**

**Competência específica 1:** *Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.*
O trabalho interdisciplinar proposto na abertura do capítulo 3, nas páginas 67 e 68, sugere um estudo sobre radiações, suas aplicações, potencialidades e riscos à saúde e ao ambiente, a partir do acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, o que pode favorecer o desenvolvimento dessa competência.

**Habilidade EM13CNT101:** *Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.*
O exercício proposto 12, da página 23, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento da habilidade, ao propor a análise da representação gráfica da decomposição na fase gasosa de dióxido de nitrogênio a 300 °C, conforme determinada reação.

**Habilidade EM13CNT103:** *Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica.*
O trabalho interdisciplinar proposto na abertura do capítulo 3, nas páginas 67 e 68, sugere um estudo sobre radiações, suas aplicações, potencialidades e riscos à saúde e ao ambiente, a partir do acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, o que contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

**Habilidade EM13CNT104:** *Avaliar os benefícios e os riscos à saúde e ao ambiente, considerando a composição, a toxicidade e a reatividade de diferentes materiais e produtos, como também o nível de exposição a eles, posicionando-se criticamente e propondo soluções individuais e/ou coletivas para seus usos e descartes responsáveis.*
O trabalho interdisciplinar proposto na abertura do capítulo 3, nas páginas 67 e 68, sugere um estudo sobre radiações, suas aplicações, potencialidades e riscos à saúde e ao ambiente, a partir do acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, o que contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

**Habilidade EM13CNT202:**
*Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como* softwares *de simulação e de realidade virtual, entre outros).*
O trabalho sugerido no tópico *Função exponencial*, nas páginas 73 e 74, do capítulo 3, que incentiva os estudantes a pesquisar sobre fatores que podem influenciar o desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente, favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

MODERNA

**Habilidade EM13CNT203:** *Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como* softwares *de simulação e de realidade virtual, entre outros).*
O trabalho sugerido no tópico *Função exponencial*, nas páginas 73 e 74, do capítulo 3, que incentiva os estudantes a pesquisar sobre fatores que podem influenciar o desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente e, em seguida, a buscar, com base nesse estudo, informações que ajudem a prevenir a disseminação e o crescimento populacional indesejável de bactérias, pode favorecer o desenvolvimento dessa habilidade.

**Habilidade EM13CNT204:** *Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como* softwares *de simulação e de realidade virtual, entre outros).*
A situação inicial do tópico *Função linear e proporcionalidade*, sobre a velocidade que a Estação Espacial Internacional orbita a Terra, na página 24, do capítulo 1, favorece a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, contribuindo para o desenvolvimento dessa habilidade.
A situação apresentada na abertura do capítulo 2, nas páginas 39 e 40, bem como o exercício resolvido R13, na página 54, e o tópico *Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função*, nas páginas 57 a 59, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, ao propiciar a modelagem e a resolução de problemas que envolvem os movimentos de objetos na Terra.

**Habilidade EM13CNT306:** *Avaliar os riscos envolvidos em atividades cotidianas, aplicando conhecimentos das Ciências da Natureza, para justificar o uso de equipamentos e recursos, bem como comportamentos de segurança, visando à integridade física, individual e coletiva, e socioambiental, podendo fazer uso de dispositivos e aplicativos digitais que viabilizem a estruturação de simulações de tais riscos.*
O trabalho interdisciplinar proposto na abertura do capítulo 3, a partir do acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, nas páginas 67 e 68, ao propor uma discussão a respeito do descarte adequado de material radioativo, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

**Como a competência específica e as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume**

**Competência específica 3:** *Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.*
O infográfico da abertura do capítulo 6, nas páginas 126 e 127, que trata da arrecadação tributária no Brasil, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, uma vez que é proposta uma discussão sobre os incentivos fiscais ambientais previstos em lei, como a de nº 5.106, que prevê o abatimento na declaração de rendimentos de pessoa física ou jurídica de 20% do valor investido em projetos de florestamento ou de reflorestamento.

**Habilidade EM13CHS305:** *Analisar e discutir o papel e as competências legais dos organismos nacionais e internacionais de regulação, controle e fiscalização ambiental e dos acordos internacionais para a promoção e a garantia de práticas ambientais sustentáveis.*
O infográfico da abertura do capítulo 6, nas páginas 126 e 127, que trata da arrecadação tributária no Brasil, propicia a pesquisa sobre incentivo fiscal a ações de foco socioambiental, como redução ou isenção de taxas ou impostos sobre produtos, bens ou serviços.

**Habilidade EM13CHS404:** *Identificar e discutir os múltiplos aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial, os jovens, levando em consideração, na atualidade, as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais.*
A seção *Educação financeira*, nas páginas 146 e 147, propicia o trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e favorece o desenvolvimento da habilidade citada, ao identificar e discutir aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial os jovens.

**Como a competência específica de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foi mobilizada no volume**

**Competência específica 7:** *Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.*
Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 148 a 150, os estudantes devem criar um videodocumentário, pesquisar e aprender como utilizar tecnologias e recursos digitais para a captura do áudio e do vídeo e como realizar a edição desse material, o que pode contribuir para o desenvolvimento dessa competência.

MODERNA

# Sugestões de ampliação

## Capítulo 1 – Função afim

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5**, das competências específicas **2** e **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT202**, **EM13CNT303** e **EM13CNT310**.

O boxe **Explore** da página de abertura desse capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, de forma a abordar a pandemia da Covid-19 que acometeu o Brasil e os demais países do mundo em 2019 e 2020. O objetivo dessa proposta é estimular a busca por informações confiáveis nos meios digitais e incentivar o trabalho colaborativo dos alunos sobre o assunto.

Inicie a aula contextualizando a pandemia causada pelo vírus SARS-Cov-2, apresente a estrutura viral em formato de "coroa" e aprofunde na questão de como os vírus são organismos enigmáticos por serem acelulares. Utilize o vídeo criado pela Visual Science para ajudar nessa primeira explicação, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=y6VC9UqAXHA> (acesso em: 2 set. 2020). No mesmo canal do YouTube, há outros vídeos demonstrando o formato de outros tipos de vírus, como H1N1. Na sequência, mostre como ocorre a invasão das células humanas pelo SARS-Cov-2. Para isso, utilize o vídeo, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=i6xTSYL7JPg> (acesso em: 2 set. 2020), e a imagem da reportagem da UFABC, disponível em: <http://proec.ufabc.edu.br/epufabc/como-detectar-o-novo-coronavirus/> (acesso em: 2 set. 2020). Nesse momento, é importante ressaltar como os receptores das células humanas precisam ser compatíveis com as estruturas do vírus para que ocorra a invasão e consequente multiplicação de estruturas virais. Como último tópico dessa breve introdução, discuta com os alunos sobre como a limpeza das mãos com os sabonetes mata o vírus.

Para a atividade em si, os alunos deverão individualmente escolher aspectos da doença, do vírus, da expansão da pandemia no Brasil e no mundo, dos métodos de tratamento, dos métodos de prevenção, das taxas de mortalidade, da comparação com outras doenças virais, entre outros fatores. Auxilie-os nesse momento. É crucial que cada aluno escolha um tópico diferente para ser abordado, pois isso será fundamental para a criação de um mural colaborativo. Apresente aos alunos a plataforma Padlet, disponível em: <https://pt-br.padlet.com/> (acesso em: 8 set. 2020); nela, de maneira muito intuitiva, interativa e *on-line*, todos os alunos poderão ao mesmo tempo criar um mural colaborativo com as informações pesquisadas. O formato da publicação de cada aluno é muito simples: haverá um título, um espaço para texto e a adição de alguma mídia, por exemplo, uma imagem, um vídeo, uma localização no *Google Maps*, entre outras. É interessante que já deixe o Padlet com as informações apresentadas no início da aula. Aproveite e adicione também uma postagem com localização de Wuhan na China, a fim de que os alunos visualizem possibilidades de postagens a serem criadas no mural. Caso prefira, o processo de pesquisa poderá ser feito em casa e a criação do mural, durante a aula; em todo o momento, como moderador do Padlet, você poderá corrigir, adicionar informações e sugerir mudanças. Após a conclusão, cada aluno deverá, brevemente, apresentar sua postagem para todos. O *link* do mural virtual colaborativo poderá ser compartilhado nas redes sociais.

Após as apresentações, explore, com os alunos, o simulador Epcal, disponível em: <https://ciis.fmrp.usp.br/covid19/epcalc/public/index.html> (acesso em: 18 ago. 2020), que é uma ferramenta que analisa, por meio de parâmetros epidemiológicos e modelos matemáticos, possíveis cenários da evolução de uma doença. Apesar de um pouco complexo, visualmente o simulador nos dá a noção de como o tempo de internação hospitalar ou o tempo em que o paciente é infeccioso, ou seja, transmite o vírus, alteram a expansão de uma pandemia numa população. Finalize a discussão destacando como a ciência e a pesquisa científica no mundo devem ser valorizadas.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Informações de detecção e invasão do vírus:**
  <http://proec.ufabc.edu.br/epufabc/como-detectar-o-novo-coronavirus/>.
- **Canal do YouTube Visual Science**
  <https://www.youtube.com/channel/UCEsum-txAsb_hIePvnXhyrQ/videos>.
- **Como criar um Padlet**
  <https://www.youtube.com/watch?v=tfAXW8pW2vc>.
- ***Site* de informações Covid-19 USP**
  <https://ciis.fmrp.usp.br/covid19/>.
- **Revista *Superinteressante***
  <https://super.abril.com.br/blog/bruno-garattoni/cientistas-de-wuhan-previram-pandemia-em-2019/>.
  (Acessos em: 2 set. 2020.)

MODERNA

## Capítulo 2 – Função quadrática

Essa atividade permite o desenvolvimento da competência geral **2**, das competências específicas **3** e **5** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT302**, **EM13MAT502** e **EM13MAT503**; das competências específicas **1** e **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT101** e **EM13CNT301**.

A abertura do capítulo permite desenvolver uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é mostrar a aplicabilidade dos conhecimentos de Matemática em um experimento de lançamento oblíquo. Será apresentada uma situação-problema, e o aluno deverá mobilizar o seu saber na busca pela solução.

Nessa atividade, serão mobilizados conceitos de Matemática e de Física de maneira que o aluno possa reconhecer que a função horária do movimento uniformemente variado (MUV), utilizada no lançamento oblíquo, é uma função quadrática e que as constantes da equação do MUV são as mesmas da função quadrática, tal como é vista em Matemática.

Para iniciar a proposta, organize os alunos em duplas ou em trios, e, em uma sala de informática, com computadores e internet disponíveis, peça aos grupos que acessem o simulador, disponível no *site* a seguir: <https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_pt_BR.html> (acesso em: 2 set. 2020).

Permita que os alunos explorem livremente o simulador antes de propor a atividade.

Em seguida, oriente-os a determinar um ângulo para fazer o lançamento. Após o lançamento, peça que registrem os valores das constantes a seguir:

- velocidade inicial ($v_0$);
- gravidade ($g$).

Os alunos deverão escrever a equação do MUV para o lançamento executado, substituindo os valores das constantes registradas.

A partir de então, sugira a eles que façam a substituição do tempo fornecido pelo simulador e calculem o alcance do projétil. Eles deverão comparar o valor calculado com o valor medido no simulador com a trena virtual, também fornecida pelo simulador. Com a equação do movimento do projétil em mãos, os alunos deverão identificar e relacionar a variável e as constantes da equação, com a função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Em seguida, os alunos deverão construir o gráfico da função quadrática, identificando nele as constantes.

Esse mesmo simulador permite alterar todos os parâmetros, proporcionando novos resultados e, consequentemente, novas discussões.

É possível, ainda, que os alunos, usando um exercício teórico já resolvido, coloquem os parâmetros (as constantes) no simulador para confirmar e visualizar o resultado. O valor do alcance também pode ser fornecido de antemão, para que eles determinem as constantes da função quadrática utilizando o simulador.

## Capítulo 3 – Função exponencial

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2** e **7**, da competência específica **1** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT103**, **EM13CNT104** e **EM13CNT306**.

A abertura desse capítulo permite desenvolver uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. O tempo de meia-vida ($t_{1/2}$) de uma substância é um assunto bastante interessante, pois permite abarcar diversos conteúdos da Química, como a radioatividade, a cinética química, o estudo das relações atômicas por meio dos isótopos, além de abrir a possibilidade de ser trabalhado em conjunto com a Matemática ao explorar as funções exponenciais.

Inicie a proposta convidando os alunos à leitura dos seguintes artigos sobre radioatividade da revista *Química Nova na Escola*:

- Raios X e Radioatividade
  Disponível em: <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc02/historia.pdf>.
- Radioatividade e História do Tempo Presente
  Disponível em: <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc19/a08.pdf>.
- O Despertar da Radioatividade ao Alvorecer do Século XX
  Disponível em: <http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc33_2/04-HQ10509.pdf>.

(Acessos em: 2 set. 2020.)

Aproveite o momento para auxiliar os alunos quanto à leitura de textos científicos, analisando a estrutura do texto, as palavras desconhecidos, a formalidade etc. Se achar pertinente, convide o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias para explorar a leitura desse tipo de texto.

Em seguida, organize os alunos em três grandes grupos para realizar uma apresentação sobre o conteúdo da radioatividade, focando em três temas:

- questões históricas da descoberta da radioatividade e a definição de isótopos radioativos (considerar também a possibilidade de se discutir as outras relações atômicas: isóbaros e isótonos);
- aplicações tecnológicas da radioatividade na medicina e na produção de energia e também de armamentos;
- acidentes radioativos (focar no caso brasileiro do césio-137).

Depois, proponha uma discussão sobre os benefícios e os malefícios dos usos da radioatividade e suas implicações na vida dos seres humanos e animais.

Comente novamente sobre o acidente brasileiro com césio-137 e levante o questionamento para os alunos do motivo pelo qual os rejeitos desse acidente (e também de outros dessa natureza) estão armazenados em caixas muito grandes feitas de concreto armado e num lugar isolado da população. Se achar relevante, é possível ainda discutir também questões geográficas como a localização de Goiânia, a composição do concreto e a introdução da técnica do concreto armado no cenário da arquitetura brasileira, podendo expandi-la para as obras de Oscar Niemeyer.

Nesse momento, introduza o conceito e o modo como se calcula o tempo de meia-vida para responder ao questionamento anteriormente colocado.

Para isso, uma sugestão é colocar caixas dentro umas das outras, a exemplo das bonecas *matrioskas*, de modo que uma caixa tenha metade do tamanho de outra. Se for conveniente e houver tempo, os alunos podem ajudar na construção das caixas.

Para apresentar o conceito de meia-vida com essa atividade, peça aos alunos que suponham uma massa total para a caixa (podendo ser em mg, g, kg, toneladas), um valor e uma unidade de medida de tempo, deixando claro que no tempo de meia-vida podem ser utilizados segundos, minutos, horas, dias, meses, anos ou até mesmo milênios.

Em seguida, retire cada uma dessas caixas, mostrando que uma é a metade da anterior e que a cada "retirada" temos a passagem de um tempo de meia-vida.

Se achar conveniente, faça a demonstração com casos específicos de isótopos radioativos como o carbono-14 que apresenta tempo de meia-vida equivalente a 5.730 anos.

Com o conceito de meia-vida sedimentado, indique que esse fenômeno apresenta relações com cálculos financeiros, datação de fósseis, crescimento ou decrescimento populacionais, uma vez que estes podem ser expressos por meio de uma função obtida a partir de uma função exponencial e, então, deduza a fórmula para o cálculo do tempo de meia-vida.

Esse assunto também pode ser extrapolado para a cinética química, levando-se em consideração o tempo de meia-vida de fármacos (farmacocinética) e a importância de se respeitar os horários de ingestão de medicamentos prescritos pelos médicos.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **A história do acidente radiológico em Goiânia**
<http://www.cesio137goiania.go.gov.br/o-acidente/>.
- **Acidente com o césio-137**
<https://www.bbc.com/portuguese/geral-45783343>.
(Acessos em: 2 set. 2020.)

## Capítulo 4 – Função logarítmica

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5** e **7**, das competências específicas **3** e **4** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT104**, **EM13MAT305**, **EM13MAT403** e **EM13MAT405**; das competências específicas **1** e **2** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT105** e **EM13CNT205**.

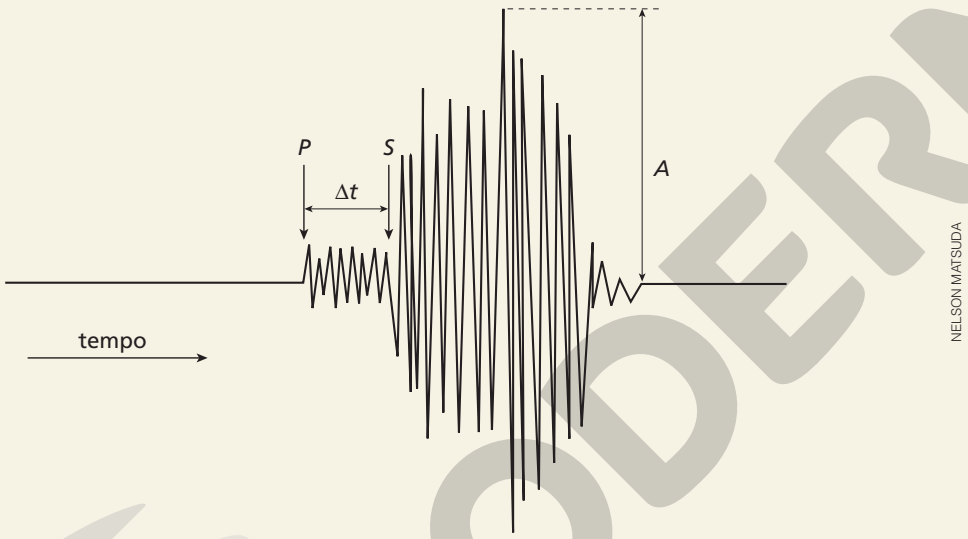
Essa atividade consiste no desenvolvimento de uma programação, em linguagem Python, voltada para a compreensão do assunto logaritmo e sua aplicabilidade na escala Richter. Tal programação poderá ser utilizada na construção de um painel informativo que pode ser utilizado em mostras culturais na escola. Para esse projeto, os professores responsáveis poderão convidar professores de outras áreas, como Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, para auxiliar na exposição dos conceitos relativos ao tópico terremoto.

MODERNA

No primeiro encontro, como motivação para introduzir o assunto, os alunos assistirão ao vídeo: "*Derrotar terremotos: Ross Stein no TEDxBermuda*". Nesse vídeo, Ross Stein, especialista no estudo de terremotos, fala sobre como as estruturas dos prédios necessitam ser reforçadas para serem mais resistentes aos terremotos. O vídeo tem 20 minutos de duração. Após esse momento, os professores poderão escolher entre apresentar conceitual ou quantitativamente a escala Richter. Nesse momento, é possível abordar os conceitos geográficos sobre movimentação de placas tectônicas e suas consequências, para que os alunos comecem a compreender os mecanismos geográficos atrelados aos tremores de terra e também suas consequências para a vida das pessoas que habitam a região afetada. O momento também é oportuno para tratar da energia liberada durante os tremores para cada nível de magnitude da escala Richter. Assim, os alunos começam a ter uma ideia sobre a energia atrelada a esses fenômenos naturais. Além disso, a situação também é propícia para abordar os conceitos de logaritmo aplicados ao cálculo das magnitudes na escala Richter. Outra sugestão seria trabalhar alguns cálculos, com a equação que define a escala Richter, conforme segue:

$$M = \log_{10} A + 3 \log_{10} (8\Delta t) - 2{,}92 = \log_{10} \left( \frac{A \cdot \Delta t^3}{1{,}62} \right)$$

Temos que *A* é a amplitude das ondas sísmicas, em milímetro, medida diretamente no sismograma; Δt é o tempo, em segundo, desde o início do trem de ondas P (primárias) até a chegada das ondas S (secundárias); M é a magnitude arbitrária, mas constante, aplicável a sismos que libertem a mesma quantidade de energia.




NELSON MATSUDA

A realização dessa atividade com professores de outras áreas permite que os alunos recebam informações relativas ao mesmo assunto, porém com três pontos de vista diferentes: físico, geográfico e matemático.

No encontro seguinte, os alunos começarão a levantar dados sobre as consequências relacionadas com cada magnitude da escala Richter; para isso, eles farão uma pesquisa pela internet ou por livros, caso a escola tenha um acervo específico para tal. A sugestão é que os alunos sejam orientados para pesquisar tais consequências em intervalos de magnitude 1, iniciando pela magnitude 0, até a magnitude 10. Ao final do encontro, ficando a critério do professor responsável pelo projeto realizar ou não essa parte, pode-se montar com a sala uma tabela com os valores e as características de cada intervalo de magnitude.

Em seguida, os alunos deverão se organizar em dez grupos, sendo um grupo para cada intervalo de magnitude já trabalhado anteriormente. O intuito é que os alunos desenvolvam uma forma visual de representar aquele intervalo de magnitude e suas consequências. Os grupos terão liberdade para escolher e desenvolver a maneira que julgarem mais relevante para representar o nível de magnitude de sua responsabilidade. Eles poderão, por exemplo, produzir vídeos simulando as consequências, sismógrafos construídos por eles mesmos, animações etc. Peça aos alunos que produzam um texto resumido sobre a sua faixa de magnitude, com o intuito de ser utilizado no terminal. Esse terminal será desenvolvido no encontro seguinte e as apresentações serão utilizadas posteriormente, no dia da apresentação dos projetos visuais.

No último encontro, os alunos e o professor responsável pelo projeto vão desenvolver em conjunto um painel informativo e interativo para ser utilizado durante a apresentação do projeto. Esse painel vai informar o que foi pesquisado pelos alunos em cada um dos níveis de magnitude de responsabilidade de cada grupo. A escolha da linguagem de programação feita para esse projeto é o Python. A ideia é que o usuário possa digitar valores de magnitudes, para que, como resposta, sejam apresentadas as informações que os alunos pesquisaram a respeito daquela magnitude.

© MODERNA

Para desenvolver a programação sem a necessidade de instalar programa algum, pode-se acessar a plataforma Repl.it em: <https://repl.it/languages/python3> (acesso em: 2 set. 2020). Essa é uma plataforma aberta e gratuita, sem a necessidade de estar logado para poder desenvolver o código. Ela permite não só o desenvolvimento de múltiplas linguagens de programação, mas, também, sua execução, diretamente pela mesma página. Além disso, caso julgar necessário, você poderá salvar e baixar o código da programação desenvolvido ao exportá-lo como arquivo de texto e, em outro momento, retornar ao *site* e carregar a mesma programação ou criar uma conta (gratuita) e salvar seus códigos *on-line*.

É importante incluir o nome dos alunos e o dos professores envolvidos no desenvolvimento do projeto na linha em que aparece "Programação desenvolvida por XYZ". Caso queira incluir mais linhas de escrita, utilize o comando print("escrever aqui"). Em cada uma das funções print("TEXTO") que aparecem na programação, você deverá incluir no lugar da palavra TEXTO o conteúdo desenvolvido pelos alunos. Atente para não se esquecer das indentações, espaços que aparecem na frente de algumas linhas. As indentações também fazem parte da programação e, ao serem aplicadas à programação, ressaltam ou definem a estrutura do algoritmo.

Exemplo de programação a ser desenvolvida para o terminal de consultas iniciais:

```
#Linguagem - Python
#Escala Richter - Magnitude
import os # biblioteca para limpar a tela
import math # biblioteca para o uso de log
condicao=True # colocamos uma condição para rodar novamente a programação (laço de repetição)
while condicao: # enquanto a condição for verdadeira, a programação recomeça
  os.system("clear") # função para limpar a tela
  print("Programação desenvolvida por XYX") # apresentação dos responsáveis pelo código
  print("Escala Richter") # apresentação do programa
  mag=float(input("Digite o valor da magnitude: ")) # o usuário deve digitar um valor
  if mag<2: # se o valor digitado for menor que 2
    print("TEXTO") # texto com as informações relativas a um terremoto de magnitude até 2
  elif 2<=mag<=2.9: # se o valor digitado estiver entre 2 e 2,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 2 e 2,9
  elif 3<=mag<=3.9: # se o valor digitado estiver entre 3 e 3,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 3 e 3,9
  elif 4<=mag<=4.9: # se o valor digitado estiver entre 4 e 4,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 4 e 4,9
  elif 5<=mag<=5.9: # se o valor digitado estiver entre 5 e 5,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 5 e 5,9
  elif 6<=mag<=6.9: # se o valor digitado estiver entre 6 e 6,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 6 e 6,9
  elif 7<=mag<=7.9: # se o valor digitado estiver entre 7 e 7,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 7 e 7,9
  elif 8<=mag<=8.9: # se o valor digitado estiver entre 8 e 8,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 8 e 8,9
  elif 9<=mag<=9.9: # se o valor digitado estiver entre 9 e 9,9
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude entre 9 e 9,9
  elif 10<=mag: # se o valor digitado for maior que 10
    print("TEXTO") # informações relativas a um terremoto de magnitude 10 ou maior
  sair=input("Fazer nova consulta? (S/N)") # consulta para sair ou rodar novamente
  if sair=="n": # se a resposta digitada for "n" o programa será encerrado, senão looping
    break # break é a função que encerra a programação, se a condição acima for verdade
```

MODERNA

No dia da apresentação, a sugestão é que a sala do projeto seja organizada da seguinte maneira: ao lado da entrada, em local de fácil visualização, esteja o terminal, com o intuito de dar boas-vindas aos visitantes da sala. Os visitantes consultam o terminal e recebem algumas informações introdutórias sobre as magnitudes e as consequências dos terremotos. Os grupos deverão estar organizados de modo a criar uma sequência de visitação, indo do menor valor de magnitude para o maior valor de magnitude. Nesse caminho, os alunos apresentam cada uma das faixas de magnitude. Com isso, os visitantes terão uma boa ideia de como funciona a escala Richter, como funcionam os terremotos e quais são suas consequências para humanidade.

Dica de aprofundamento da atividade: caso você perceba que os alunos se interessaram pelo assunto, poderá explorar o assunto "estruturas prediais" e como estas se comportam em um terremoto, aproveitando para abordar estruturas que são e não são resistentes aos terremotos. Outra sugestão para complementar a atividade é desenvolver um simulador de terremotos. Ele consiste em uma mesa com uma base fixa e um tampo livre para oscilar. Esse tampo está ligado a um motor elétrico pequeno que o fará oscilar. Para ligar o motor, você poderá utilizar uma bateria e um potenciômetro; assim, caso se queira aumentar a oscilação, basta usar o potenciômetro. Uma vez que as duas sugestões estiverem prontas, você poderá unir as estruturas ao simulador, com o intuito de ilustrar o funcionamento das estruturas construídas em momentos de tremores de terra.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Plataforma de desenvolvimento de programação**
  <https://repl.it/languages/python3>.
- **Derrotar terremotos: Ross Stein no TEDxBermuda**
  <https://www.youtube.com/watch?v=Bg4kSIgn67I>.
- **Documentação Python, em português brasileiro**
  <https://docs.python.org/pt-br/3/>.
- **Instructables – Projetos relacionados a terremotos**
  <https://www.instructables.com/howto/earthquake/>.
- **Texto sobre terremotos dos professores Eliane Angela Veit e Paulo Machado Mors, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul**
  <http://www.if.ufrgs.br/mpef/mef004/20021/Marcelo/richter-escala>.
- **DIY Shake Table – Museu Tecnológico da Inovação – Califórnia**
  <http://www.thetech.org/sites/default/files/pdfs/Science-Labs/EFE-DIY_Shake_Table.pdf>.
- ***Homemade* simple Earthquake Simulator | Shake Table, testing Google Science Journal App**
  <https://www.youtube.com/watch?v=iWgEg2aTfRo>.
- **Make an Earthquake Shake Table – Tinker Crate**
  <https://www.youtube.com/watch?v=6HgxiYBkh3U>.

  (Acessos em: 2 set. 2020.)

## Capítulo 6 – Matemática financeira

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **5**, das competências específicas **1** e **2** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT203**.

Esse capítulo permite desenvolver uma atividade de aprofundamento cujo objetivo é elaborar planejamentos financeiros com dados sobre diferentes municípios do país. A atividade será mais enriquecedora caso haja a disponibilidade de envolver o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Inicie a atividade discutindo o que é um planejamento financeiro familiar. Peça aos alunos que conversem em suas moradias sobre o assunto e pesquisem na internet e em outros meios de comunicação. Enfatize a importância de um planejamento financeiro, a fim de organizar os gastos e a renda, com intuito de ter uma vida financeira equilibrada. Analisando os dados, é possível observar se os gastos são inferiores à renda e, caso não, quais medidas podem ser tomadas para que se atinja esse objetivo. Converse com os alunos sobre o assunto, questionando-os sobre maneiras de levantar e organizar esses dados e sobre a importância de um planejamento financeiro. Se julgar conveniente, sugira que pesquisem e tragam exemplos de ferramentas que possam ser usadas no planejamento.

MODERNA

Em seguida, organize a turma em cinco grupos e proponha um cenário para cada um. Cada grupo deverá criar uma família, seguindo orientações dos cenários, que indicam a região do domicílio, a profissão de uma das pessoas, a composição mínima familiar, entre outros possíveis aspectos. Os cenários são:

- Família que mora na região Sudeste. Deve possuir pelo menos 2 adultos. Um dos integrantes da família é professor.
- Família que mora na região Centro-Oeste. Deve possuir pelo menos 1 adulto e 1 criança. Um dos integrantes da família é engenheiro. Nessa família, um dos integrantes deve possuir alguma deficiência física.
- Família que mora na região Nordeste. Deve possuir pelo menos 1 adulto. Um dos integrantes da família é enfermeiro. Essa família possui animais de estimação.
- Família que mora na região Norte. Deve possuir pelo menos 2 adultos e 2 crianças. Um dos integrantes da família é entregador de produtos comprados em aplicativos.
- Família que mora na região Sul. Deve possuir pelo menos 3 adultos. Um dos integrantes é ator. Nessa família, um dos integrantes deve ser idoso.

Para criar as famílias, os grupos devem definir estado e cidade, estilo de residência, características de cada um dos membros da família, como idade, gênero, *hobbies*, profissões etc. Para criar os dados de cada família, sugira aos grupos que utilizem o sistema agregador de informações do IBGE, Cidades@ (disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/>, acesso em: 9 set. 2020.), que reúne informações sobre os municípios e os estados do Brasil. Com isso, eles podem escolher um município e entender algumas de suas características, por exemplo, uma renda média – que pode pautar a renda dos integrantes da família. Também devem utilizar outras plataformas e recursos para compreender mais a fundo a realidade da cidade escolhida, como reconhecer opções de lazer, opções para a saúde (pública e privada), segurança etc.

Com a família criada, é importante definir todos os possíveis tipos de renda e os gastos que cada um dos integrantes possui. Além de contas de energia elétrica, água, gás, internet, é necessário considerar os gastos com alimentação, lazer, cursos, transporte etc. Nesse momento, é importante separar gastos fixos de gastos variáveis, como uma viagem ou a compra de um celular. Esses gastos podem fazer parte dos dados que devem compor o planejamento financeiro; no entanto, sua separação deve ajudar na organização das conclusões deste trabalho. Ainda, é interessante compreender necessidades individuais de cada família, como os acompanhamentos para uma pessoa que possui uma deficiência física, gastos com ração de quem possui animais etc.

Com todos os dados, os grupos devem, então, finalizar o planejamento financeiro, organizando as informações, em gráficos, tabelas ou outras representações que julgarem adequado. Para isso, podem utilizar planilhas digitais ou *softwares* voltados para o controle financeiro, justificando a escolha. Devem fazer uma análise desses gastos, tentando fazer conclusões sobre possibilidades e necessidades para o estilo de vida dessa família. Alguns exemplos de questões que podem ser respondidas: "Essa família possui uma renda maior que seus gastos? Existem gastos que podem ser cortados? Alguma parte da renda pode ser destinada ao lazer? Como algum membro da família pode aumentar sua renda? Quais medidas podem ser tomadas para que os próximos meses sejam financeiramente saudáveis para essa família? Essa família possui alguma reserva financeira para emergências? Como eles podem se prevenir de eventuais emergências?".

Ao final do trabalho, os grupos devem elaborar uma apresentação do planejamento financeiro de cada família criada, destacando aspectos da região em que vivem e utilizando essas características para sustentar algumas concepções do estilo de vida. Incentive os grupos a apresentar ações que as famílias possam tomar para ter uma vida financeira mais equilibrada, respondendo a perguntas que possam ter sido feitas pelo professor durante o desenvolvimento do trabalho ou até mesmo questões que tenham sido feitas pelos próprios integrantes do grupo durante a pesquisa.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Cartilha de Planejamento Financeiro Familiar da Caixa**
  <http://www.caixa.gov.br/Downloads/educacao-financeira-cartilhas/CARTILHA3_PLANEJAMENTO_FINANCEIRO.pdf>.
- **Aprenda – Educação Financeira**
  <http://www.caixa.gov.br/educacao-financeira/Paginas/default.aspx#aprenda>.
  (Acessos em: 2 set. 2020.)

MODERNA

# Sugestões de avaliação

## Capítulo 1 - Função afim

### Avaliação

| Objetivos do capítulo | Questões |
|---|---|
| Identificar uma função afim. | 1 |
| Resolver situações-problema que envolvam funções afins. | 2, 3 e 4 |
| Analisar o gráfico de uma função afim. | 5, 6, 7 e 8 |
| Resolver inequações que envolvam funções afins. | 9 e 10 |

**Q1 –** (Enem) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado. Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que essa empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

**b)** Y = 80X + 920
**a)** Y = 80X + 1.000
**c)** Y = 80X + 1.080
**d)** Y = 160X + 840
**e)** Y = 160X + 1.000

**Q2 –** (Unisinos) João e Pedro alugaram o mesmo modelo de carro, por um dia, em duas locadoras distintas. João alugou o carro na locadora Arquimedes, que cobra R$ 80,00 a diária, mais R$ 0,70 por quilômetro percorrido. Pedro alugou na Locadora Bháskara, que cobra R$ 50,00 a diária, mais R$ 0,90 por quilômetro percorrido. Ao final do dia, João e Pedro pagaram o mesmo valor total pela locação.

Quantos quilômetros cada um percorreu e quanto pagaram?

**a)** 150 km e R$ 185,00
**b)** 160 km e R$ 192,00
**c)** 170 km e R$ 199,00
**d)** 180 km e R$ 206,00
**e)** 190 km e R$ 213,00

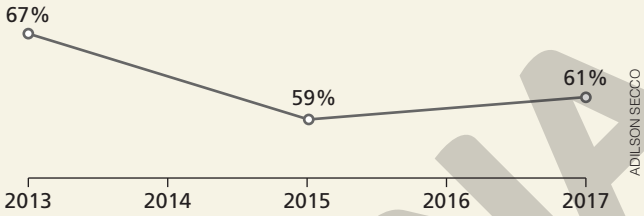
**Q3 –** (UEG) No centro de uma cidade, há três estacionamentos que cobram da seguinte maneira:

| Estacionamento A | Estacionamento B | Estacionamento C |
|---|---|---|
| R$ 5,00 pela primeira hora | R$ 4,00 por hora | R$ 6,00 pela primeira hora |
| R$ 3,00 por cada hora subsequente | | R$ 2,00 por cada hora subsequente |

Será mais vantajoso, financeiramente, parar

**a)** no estacionamento A, desde que o automóvel fique estacionado por quatro horas.
**b)** no estacionamento B, desde que o automóvel fique estacionado por três horas.
**c)** em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.
**d)** em qualquer um, desde que o automóvel fique estacionado por duas horas.
**e)** no estacionamento C, desde que o automóvel fique estacionado por uma hora.

**Q4 –** (Enem) A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.



ADILSON SECCO

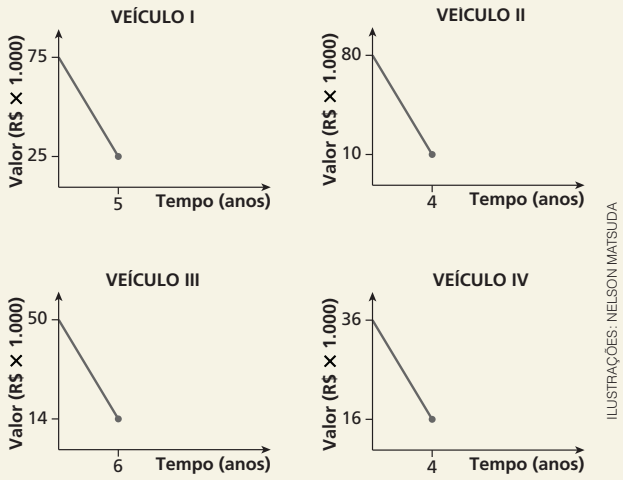
Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?

**a)** 62,3%
**b)** 63,0%
**c)** 63,5%
**d)** 64,0%
**e)** 65,5%

**Q5 –** Uma reta passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(-2, -3)$ de um plano cartesiano.

**a)** Sabendo que essa reta pode ser representada por uma equação do tipo $y = ax + b$, elabore uma estratégia para calcular os valores de $a$ e de $b$ e, assim, determinar a equação dessa reta.
**b)** Usando a estratégia obtida no item anterior, determine os valores de $a$ e de $b$ e escreva a equação dessa reta.
**c)** Verifique se essa reta pode ser a representação gráfica da função $f$, tal que $f(x) = 2x + 1$. Elabore um pequeno texto justificando a resposta dada.

**Q6 –** (Uerj) Os veículos para transporte de passageiros em um determinado município têm vida útil que varia entre 4 e 6 anos, dependendo do tipo de veículo. Nos gráficos está representada a desvalorização de quatro desses veículos ao longo dos anos, a partir de sua compra na fábrica.



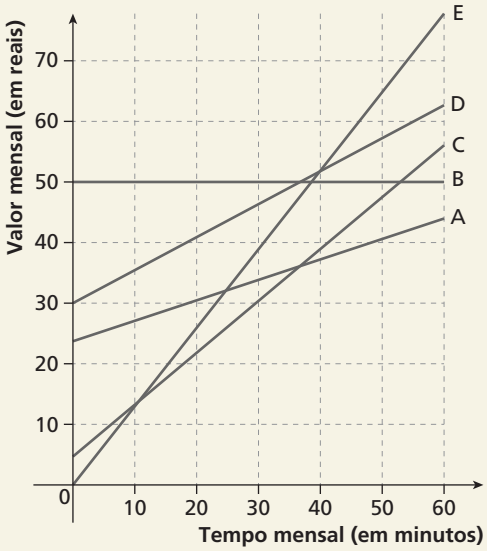
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Com base nos gráficos, o veículo que mais desvalorizou por ano foi:

**a)** I
**b)** II
**c)** III
**d)** IV

MODERNA

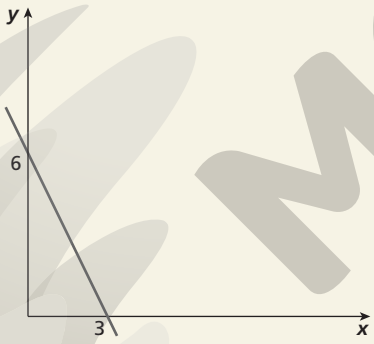
**Q7–** (Enem) No Brasil, há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico:




Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone. Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

**a)** A
**b)** B
**c)** C
**d)** D
**e)** E

**Q8–** (Eear) A função que corresponde ao gráfico a seguir é $f(x) = ax + b$, em que o valor de $a$ é




**a)** 3
**b)** 2
**c)** −2
**d)** −1

**Q9–** Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das inequações abaixo.

**a)** $(-x + 1) \cdot (x - 4) \leq 0$

**b)** $-x - 5 \leq 2x < x + 1$

**Q10–** (Fatec) Considere que:

– a frequência cardíaca máxima de uma pessoa, em batimentos por minuto bpm, é a diferença entre uma constante $K$ e a idade da pessoa. O valor de $K$ para um homem é 220 e, para uma mulher, $K$ é 226;

– a frequência cardíaca ideal para queimar gordura e emagrecer durante um treino é de 60% a 75% da frequência cardíaca máxima.

Dessa forma, a frequência cardíaca ideal para queimar gordura e emagrecer durante um treino para um homem de 40 anos, em bpm, varia de

**a)** 114 a 143.
**b)** 111 a 139.
**c)** 108 a 135.
**d)** 105 a 132.
**e)** 102 a 128.

## Resoluções da avaliação

**Q1–** O gasto com o gerente é de 1.000 reais por semana. Cada diarista recebe 80 reais por dia. Como cada diarista trabalha dois dias por semana, o gasto semanal por diarista é 160 reais. Como a empresa possui X funcionários, sendo um deles o gerente e X − 1 diaristas, o gasto (Y), em reais, que a empresa tem é dado por:
$Y = 1.000 + 160 \cdot (X - 1) \Rightarrow Y = 1.000 + 160X - 160 \Rightarrow$
$\Rightarrow Y = 840 + 160X$
alternativa d

**Q2–** Se $n$ é o número de quilômetros rodados, então:
$0{,}9 \cdot n + 50 = 0{,}7 \cdot n + 80$
$n = 150$
Cada um pagou: $0{,}9 \cdot 150 + 50 = 185$
alternativa a

**Q3–** Valor cobrado pelo estacionamento A para $t$ horas:
$y_A(t) = 5 + (t - 1) \cdot 3 \Rightarrow y_A(t) = 3t + 2$
Valor cobrado pelo estacionamento B para $t$ horas:
$y_B(t) = 4t$
Valor cobrado pelo estacionamento C para $t$ horas:
$y_C(t) = 6 + (t - 1) \cdot 2 \Rightarrow y_C(t) = 2t + 4$
Assim, verificamos que $y_A(2) = y_B(2) = y_C(2) = 8$. Logo, qualquer um será igualmente vantajoso, se o automóvel ficar estacionado por até 2 horas.
alternativa d

**Q4–** Sendo 2014 o ponto médio do intervalo [2013, 2015], a cobertura dessa campanha, que variou de forma linear em 2014, foi de: $\frac{67\% + 59\%}{2} = 63\%$
alternativa b

**Q5– a)** Espera-se que os alunos percebam que, substituindo os valores da abscissa e da ordenada de cada um dos pontos na equação $y = ax + b$, obtém-se um sistema de equações em função de $a$ e de $b$. Resolvendo esse sistema, determina-se o valor de $a$ e de $b$ e, assim, é possível escrever a equação dessa reta.

**b)** Substituindo os valores da abscissa e da ordenada do ponto $A$ na equação da reta, obtemos:
$1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$ (I)
Substituindo os valores da abscissa e da ordenada do ponto $B$ na equação da reta, obtemos:
$-3 = a \cdot (-2) + b \Rightarrow -3 = -2a + b$ (II)
Substituindo (I) em (II), obtemos:
$-3 = -2a + 1 \Rightarrow a = 2$
Portanto, a equação da reta é $y = 2x + 1$.

**c)** Espera-se que os alunos percebam que essa reta pode representar a função $f$. No texto de justificativa, os alunos podem traçar o gráfico da função $f$ em um plano cartesiano e traçar a reta que passa pelos pontos $A$ e $B$, verificando que a reta que representa o gráfico da função $f$ também passa pelos pontos $A$ e $B$; além disso, eles podem observar a semelhança entre as igualdades $y = 2x + 1$ e $f(x) = 2x + 1$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

**Q6 –** As taxas de desvalorização anual dos veículos foram iguais a:

Veículo **I**: $\frac{25 - 75}{5} = -10$ Veículo **II**: $\frac{10 - 80}{4} = -17{,}5$

Veículo **III**: $\frac{14 - 50}{6} = -6$ Veículo **IV**: $\frac{16 - 36}{4} = -5$

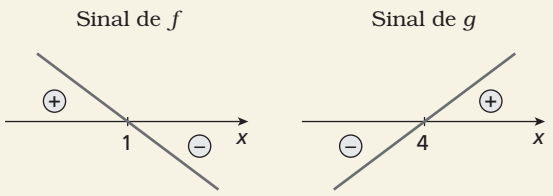
Portanto, o veículo que mais desvalorizou foi o II.
alternativa b

**Q7 –** O plano mais vantajoso é aquele que permite o maior tempo mensal de chamada pelo valor de R$ 30,00. Analisando o gráfico, trata-se da proposta C.
alternativa c

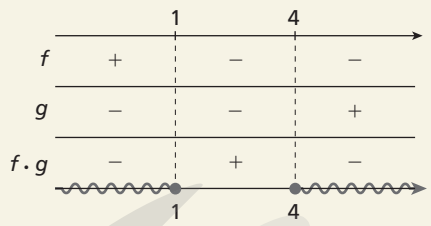
**Q8 –** Do gráfico temos $b = 6$ e $f(3) = 0$.
Assim, $0 = a \cdot 3 + 6 \Rightarrow a = -2$
alternativa c

**Q9 – a)** $(-x + 1) \cdot (x - 4) \leq 0$

Considerando $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = x - 4$, temos:




Quadro de sinais




Logo, o conjunto solução da inequação é
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$.

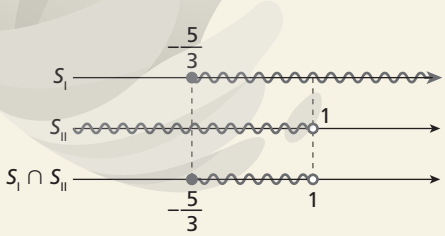
**b)** $-x - 5 \leq 2x < x + 1$

Devemos obter a solução das inequações:

(I) $-x - 5 \leq 2x \Rightarrow -3x \leq 5 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{3}$

(II) $2x < x + 1 \Rightarrow x < 1$

Fazendo a intersecção das soluções, temos:




Logo, o conjunto solução da inequação é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} \leq x < 1\right\}.$$

**Q10 –** Se $f$ é a frequência cardíaca ideal, em bpm, então:
$0{,}6 \cdot (220 - 40) \leq f \leq 0{,}75 \cdot (220 - 40) \Rightarrow 108 \leq f \leq 135$
alternativa c

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

# Capítulo 2 – Função quadrática

## Avaliação

| Objetivos do capítulo | Questões |
|---|---|
| Identificar uma função quadrática. | 1 e 2 |
| Resolver problemas que envolvam funções quadráticas. | 3, 4, 5 e 6 |
| Analisar o gráfico de uma função quadrática. | 7 e 8 |
| Resolver inequações que envolvam funções quadráticas. | 9 e 10 |

**Q1 –** Dadas as funções abaixo, verifique qual é quadrática. Nesse caso, determine o valor dos coeficientes $a$, $b$ e $c$.

**a)** $f(x) = (x + 2)(3 - x)$

**b)** $g(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2}$, se $x \neq 0$; e $g(0) = 2x - 4$

**Q2 –** Em cada caso, verifique se a parábola correspondente à função $f$ tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo. Justifique sua resposta.

**a)** $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

**b)** $f(x) = 3x^2 + 5$

**Q3 –** (Enem) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

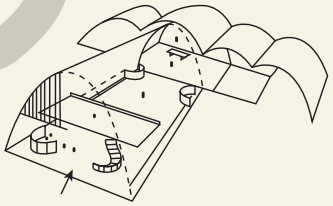


Figura 1

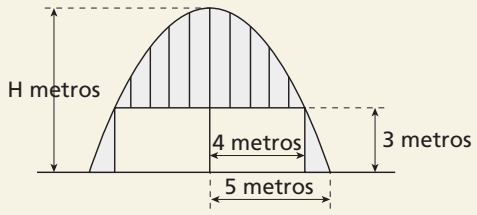



Figura 2

Qual é a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

**a)** $\frac{16}{3}$ **d)** $\frac{25}{3}$

**b)** $\frac{31}{5}$ **e)** $\frac{75}{2}$

**c)** $\frac{25}{4}$

MODERNA

**Q4–** (Enem) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde $x$ representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo.
Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

**a)** 4 **b)** 6 **c)** 9 **d)** 10 **e)** 14

**Q5–** (Enem) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que $h$ representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa.
A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

| Intervalos de temperatura (°C) | Classificação |
|---|---|
| $T < 0$ | Muito baixa |
| $0 \leqslant T \leqslant 17$ | Baixa |
| $17 < T < 30$ | Média |
| $30 \leqslant T \leqslant 43$ | Alta |
| $T > 43$ | Muito alta |

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

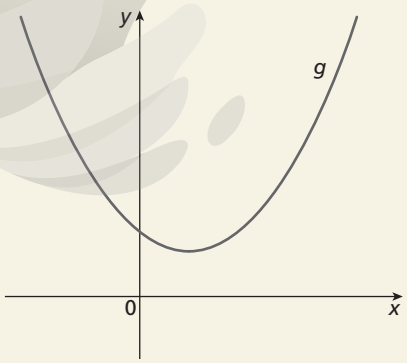
**a)** muito baixa.
**b)** baixa.
**c)** média.
**d)** alta.
**e)** muito alta.

**Q6–** Determine o ponto de intersecção com o eixo $y$ das parábolas representadas pelas funções abaixo.

**a)** $f(x) = x^2 - 3x + 2$

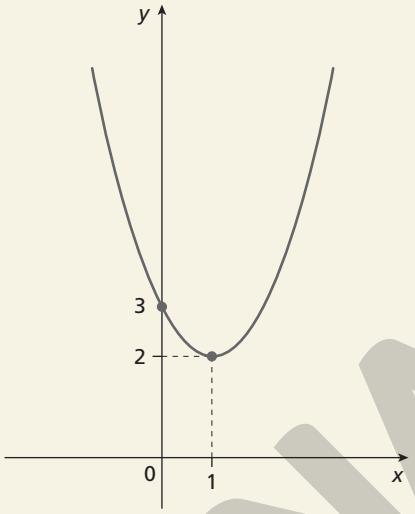
**b)** $h(x) = 2x^2 - 5x$

**Q7–** (UPF) Na figura, está representado o gráfico de uma função quadrática $g$ de domínio $\mathbb{R}$. Das expressões a seguir, aquela que pode definir uma função $g$ é:




**a)** $g(x) = x^2 + 2x + 3$
**b)** $g(x) = x^2 - x - 3$
**c)** $g(x) = -x^2 + x + 3$
**d)** $g(x) = -x^2 - 2x + 3$
**e)** $g(x) = x^2 - 2x + 3$

**Q8–** (ESPM) O gráfico abaixo representa uma função quadrática $y = f(x)$. O valor de $f(-6)$ é:




**a)** 74 **c)** 42 **e)** 37
**b)** 63 **d)** 51

**Q9–** Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações do 2º grau:

**a)** $x^2 + 7x + 10 < 0$ **b)** $\frac{-x^2 + 81}{x - 9} \leqslant 0$

**Q10–** (Uerj) Um número $N$, inteiro positivo, que satisfaz à inequação $N^2 - 17N + 16 > 0$ é:

**a)** 2 **c)** 16
**b)** 7 **d)** 17

## Resoluções da avaliação

**Q1 – a)** Aplicando a propriedade distributiva, temos:
$f(x) = (x + 2)(3 - x) \Rightarrow f(x) = 3x - x^2 + 6 - 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = -x^2 + x + 6$
Logo, $f$ é quadrática, com $a = -1$, $b = 1$ e $c = 6$.

**b)** Simplificando a expressão para $x \neq 0$, temos:
$g(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2} \Rightarrow g(x) = \frac{x^2(2x - 4)}{x^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) = 2x - 4$
Logo, $g$ não é quadrática, pois não pode ser expressa por um polinômio do 2º grau.

**Q2 – a)** $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ corresponde a uma parábola com concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$.

**b)** $f(x) = 3x^2 + 5$ corresponde a uma parábola com concavidade voltada para cima, pois $a = 3 > 0$.

**Q3–** Pontos da parábola: (5, 0) e (4, 3)
Função quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Como a parábola é simétrica ao eixo $y$: $b = 0$ e $f(0) = c = H$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 5^2 + H \\ 3 = a \cdot 4^2 + H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 25a + H \\ -3 = -16a - H \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}$ e $H = \frac{25}{3}$

alternativa d

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

**Q4–** A quantidade de bonés para se obter o lucro máximo corresponde ao valor do $x$ do vértice da parábola.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12}{-2} = 6$$

alternativa b

**Q5–** Sabemos que número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima. Como a função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$ é uma parábola de concavidade voltada para baixo, basta determinar o valor de $y$ do vértice.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[22^2 - 4(-1)(-85)]}{4(-1)} = \frac{-144}{-4} = 36$$

Logo, o número de bactérias será máximo quando a temperatura for de 36 °C. De acordo com a tabela, essa temperatura é classificada como alta.

alternativa d

**Q6–** Para determinar o ponto de intersecção com o eixo $y$, basta observar o coeficiente $c$.

**a)** $f(x) = x^2 - 3x + 2$; coeficiente $c = 2$.

Então, a parábola que representa a função $f$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 2)$.

**b)** $h(x) = 2x^2 - 5x$; coeficiente $c = 0$.

Então, a parábola que representa a função $h$ intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 0)$.

**Q7–** A concavidade da parábola é para cima, logo o coeficiente de $x^2$ tem que ser maior que zero. Portanto, as alternativas c e d estão incorretas.

Para $x = 0$, temos $g(x) > 0$. Portanto, alternativa b está incorreta.

Analisando o vértice da parábola nas alternativas possíveis, temos:

Alternativa a: $g(x) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x_v = -\frac{2}{2} = -1$

Alternativa e: $g(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow x_v = -\frac{(-2)}{2} = 1$

Do gráfico, temos que o vértice se encontra na parte positiva do eixo das abscissas. Logo, a alternativa a está incorreta.

alternativa e

**Q8–** Sabemos que $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Analisando o gráfico, sabemos também que ele intercepta o eixo $y$ em $(0, 3)$, então $c = 3$; e o vértice é $(1, 2)$. Assim:

$$x_v = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2a$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 \Rightarrow a + b = -1$$

Substituindo o valor de $b$ por $-2a$ na segunda equação, temos:

$a - 2a = -1 \Rightarrow a = 1$

Logo, $b = -2$.

Portanto, $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Calculando $f(-6)$, temos:

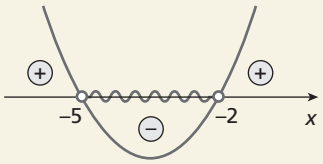
$f(-6) = (-6)^2 - 2(-6) + 3 \Rightarrow f(-6) = 51$

alternativa d

**Q9– a)** $x^2 + 7x + 10 < 0$

$f(x) = x^2 + 7x + 10$ (zeros de $f$: $-5$ e $-2$)

Como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola correspondente é voltada para cima.



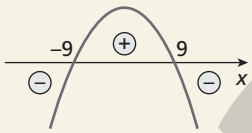

Assim, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -2\}$.

**b)** $\frac{-x^2 + 81}{x - 9} \leqslant 0$

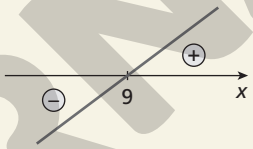
- $f(x) = -x^2 + 81$ (zeros de $f$: $-9$ e $9$)

  Como $a = -1$, a concavidade da parábola correspondente é voltada para baixo.
- $g(x) = x - 9$ (zero de $g$: $9$)

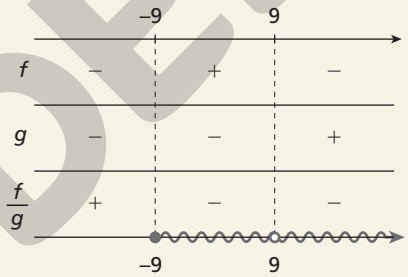
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais




Veja que 9 não é solução da inequação, pois $x - 9 \neq 0$.

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -9 \text{ e } x \neq 9\}$.

**Q10–** Como $N$ é um inteiro positivo, temos:

$N^2 - 17N + 16 > 0 \Rightarrow (N - 1)(N - 16) > 0 \Rightarrow N > 16$

Logo, o menor inteiro que satisfaz a desigualdade é 17.

alternativa d

## Capítulo 3 - Função exponencial

### Avaliação

| Objetivos do capítulo | Questões |
|---|---|
| Efetuar operações de potenciação e radiciação. | 1 e 2 |
| Identificar uma função exponencial. | 3 |
| Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial. | 4, 5 e 6 |
| Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais. | 7 e 8 |
| Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais. | 9 e 10 |

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

**Q1 –** Use um contraexemplo para justificar a falsidade das afirmações a seguir.

**a)** Toda potência de expoente natural é um número maior que zero.

**b)** Uma potência de expoente natural será negativa sempre que sua base for um número menor que zero.

**Q2 –** Em cada item, verifique se os números apresentados são iguais. Caso não sejam, compare-os e identifique o maior.

**a)** $1^{\sqrt{5}}$ e $1^{\sqrt{6}}$

**b)** $2^{\sqrt{3}}$ e $3^{\sqrt{2}}$

**c)** $6^{\sqrt{2}}$ e $5^{\sqrt{2}}$

**Q3 –** (Mackenzie) Se $f$ é uma função tal que $f(1) = m$, $f(e) = n$ e $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, então $f(2 + e)$ é

**a)** $m$

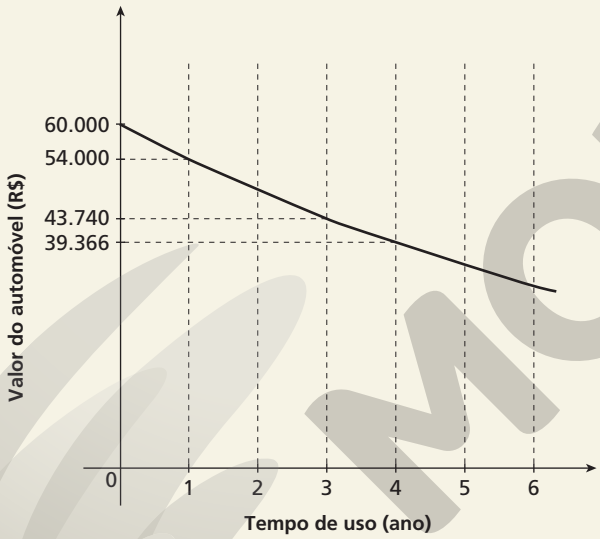
**b)** $n$

**c)** $m^2n$

**d)** $mn^2$

**e)** $m^2 + n$

**Q4 –** (Enem) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com $t$ em ano. Essa função está representada no gráfico.




Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

**a)** 48.000,00

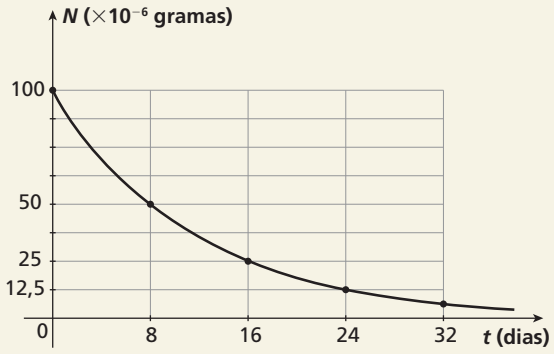
**b)** 48.114,00

**c)** 48.600,00

**d)** 48.870,00

**e)** 49.683,00

**Q5 –** (PUC) Em hospitais de grande porte das principais cidades do país são realizados tratamentos que utilizam radioisótopos emissores de radiações alfa, beta e gama. O iodo-131, por exemplo, é um radioisótopo utilizado no tratamento de hipertireoidismo. O gráfico abaixo representa a massa residual de iodo-131 ($N$) presente em uma amostra em função do tempo ($t$).




A função que melhor descreve a massa residual de iodo-131 presente na amostra, em função do tempo, é $N(t) = N_0e^{kt}$, onde

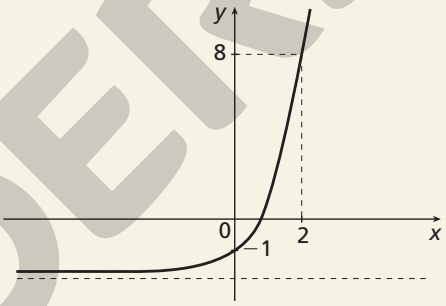
**a)** $N_0 > 0$ e $k > 0$

**b)** $N_0 < 0$ e $k > 0$

**c)** $N_0 > 0$ e $k < 0$

**d)** $N_0 < 0$ e $k < 0$

**Q6 –** (Epcar) A função real $f$ definida por $f(x) = a \cdot 3^x + b$, sendo $a$ e $b$ constantes reais, está graficamente representada abaixo.




Pode-se afirmar que o produto $(a \cdot b)$ pertence ao intervalo real

**a)** $[-4, -1[$

**b)** $[-1, 2[$

**c)** $[2, 5[$

**d)** $[5, 8]$

**Q7 –** (IFPE) No início do ano de 2017, Carlos fez uma análise do crescimento do número de vendas de refrigeradores da sua empresa, mês a mês, referente ao ano de 2016. Com essa análise, ele percebeu um padrão matemático e conseguiu descrever a relação $V(x) = 5 + 2^x$, onde $V$ representa a quantidade de refrigeradores vendidos no mês $x$. Considere: $x = 1$ referente ao mês de janeiro; $x = 12$ referente ao mês de dezembro.

A empresa de Carlos vendeu, no 2º trimestre de 2016, um total de

**a)** 39 refrigeradores.

**b)** 13 refrigeradores.

**c)** 127 refrigeradores.

**d)** 69 refrigeradores.

**e)** 112 refrigeradores.

**Q8 –** (Unicamp) Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real $x$. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a

**a)** 1.

**b)** 2.

**c)** 3.

**d)** 4.

ILUSTRAÇÕES: NEILSON MATSUDA

MODERNA

**Q9–** Resolva as inequações a seguir.

**a)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < 1$ **b)** $5^{3x} - 5^{x} \leq 0$ **c)** $3x^2 \leq 729$

**Q10–** (PUC) Cientistas brasileiros verificaram que uma determinada colônia de bactérias triplica a cada meia hora. Uma amostra de 10.000 bactérias por mililitro foi colocada em um tubo de ensaio e, após um tempo $x$, verificou-se que o total era de $2{,}43 \times 10^6$ bactérias por mililitro.
Qual é o valor de $x$?

**a)** duas horas
**b)** duas horas e 30 minutos
**c)** 3 horas e trinta minutos
**d)** 48 horas
**e)** 264 horas

## Resoluções da avaliação

**Q1 – a)** Resposta possível: o expoente da potência $(-2)^3$ é um número natural, mas essa potência é um número menor que zero:
$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

**b)** Resposta possível: a base da potência $(-2)^4$ é menor que zero e o expoente é um número natural, mas a potência é maior que zero:
$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

**Q2 – a)** Sabendo que uma potência de base 1 é igual a 1, temos:
$1^{\sqrt{5}} = 1$ e $1^{\sqrt{6}} = 1$
Logo, os números $1^{\sqrt{5}}$ e $1^{\sqrt{6}}$ são iguais.

**b)** Usando uma calculadora científica, verificamos que:
$\sqrt{3} \simeq 1{,}732$ e $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$. Assim:
$2^{\sqrt{3}} \simeq 2^{1{,}732} \simeq 3{,}322$ e $3^{\sqrt{2}} \simeq 3^{1{,}414} \simeq 4{,}728$
Logo, $3^{\sqrt{2}}$ é o maior número.

**c)** Ambas as potências têm o mesmo expoente e as bases são positivas; logo, a potência de maior base é o maior número, ou seja:
$6 > 5 \Rightarrow 6^{\sqrt{2}} > 5^{\sqrt{2}}$

**Q3–** Utilizando as informações dadas, temos:
$f(2 + e) = f(1 + (1 + e)) = f(1) \cdot f(1 + e) =$
$= f(1) \cdot f(1) \cdot f(e) = m^2 n$
alternativa c

**Q4–** Se $f(0) = 60.000$, então $b = 60.000$.
Como $f(1) = 54.000$, então:
$54.000 = 60.000 \cdot a^1 \Rightarrow a = \frac{9}{10}$
Logo, a função é dada por $f(t) = 60.000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^t$.
Calculando $f(2)$, temos:
$f(2) = 60.000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 48.600$
Portanto, o valor desse automóvel após dois anos de uso é R$ 48.600,00.
alternativa c

**Q5–** $N(t) = N_0 e^{kt}$
Analisando o gráfico sabemos que $N(0) = 100$ e $N(8) = 50$. Assim:
$N(0) = 100 \Rightarrow N_0 e^{k \cdot 0} = 100 \Rightarrow N_0 = 100 \Rightarrow N_0 > 0$
$N(8) = 50 \Rightarrow 100e^{k \cdot 8} = 50 \Rightarrow e^{k8} = \frac{1}{2} \Rightarrow k < 0$
alternativa c

**Q6–** $f(x) = a \cdot 3^x + b$
Analisando o gráfico sabemos que $f(0) = -1$ e $f(2) = 8$. Assim:
$f(0) = -1 \Rightarrow a \cdot 3^0 + b = -1 \Rightarrow b = -1 - a$ (I)
$f(2) = 8 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b = 8 \Rightarrow 9a - 1 - a = 8 \Rightarrow a = \frac{9}{8}$
Substituindo o valor de $a$ por $\frac{9}{8}$ em (I), temos:
$b = -1 - a \Rightarrow b = -1 - \frac{9}{8} \Rightarrow b = -\frac{17}{8}$
Logo: $a \cdot b = \frac{9}{8} \cdot \left(-\frac{17}{8}\right) = -\frac{153}{64} \in [-4, -1[$
alternativa a

**Q7–** Sabendo que o 2º trimestre corresponde aos meses de abril, maio e junho, temos que a venda total nesse período é dado por:
$V(4) + V(5) + V(6) = (5 + 2^4) + (5 + 2^5) + (5 + 2^6) = 127$
Portanto, a empresa vendeu 127 refrigeradores no 2º trimestre de 2016.
alternativa c

**Q8–** $f(g(x) = g(f(x)) \Rightarrow f(x^3) = g(3^x) \Rightarrow 3x^2 = (3^x)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x^3 = 3^{3x} \Rightarrow x^3 = 3x \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
Portanto, $S = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$
alternativa c

**Q9 – a)** $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{0} \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

**b)** $5^{3x} - 5^{x} \leq 0 \Rightarrow 5^{3x} \leq 5^{x} \Rightarrow 3x \leq x \Rightarrow x \leq 0$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.

**c)** $3^{x^2} \leq 729 \Rightarrow 3^{x^2} \leq 3^6 \Rightarrow x^2 \leq 6 \Rightarrow x^2 - 6 \leq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}\}$.

**Q10–** De acordo com o enunciado, podemos escrever:
$2{,}43 \cdot 10^6 = 10.000 \cdot 3^x \Rightarrow 243 \cdot 10^4 = 10^4 \cdot 3^x \Rightarrow 3^5 = 3^x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5$
Como a bactéria triplica a cada meia hora, o $x$ utilizado no cálculo representa períodos de meia hora. Portanto, $x = 5$ equivale a 2 horas e 30 minutos.
alternativa b

# Capítulo 4 - Função logarítmica

## Avaliação

| Objetivos do capítulo | Questões |
|---|---|
| Calcular logaritmo. | 1 e 2 |
| Identificar uma função logarítmica. | 3 e 4 |
| Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica. | 5 e 6 |
| Resolver situações-problema que envolvam logaritmos. | 7 e 8 |
| Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas. | 9 e 10 |

MODERNA

**Q1 –** Para cada item, determine o valor de $\log x$.

**a)** $\log x + \log_{100} x - \log_{1.000} x = 14$

**b)** $\log_{0,1} x + \log \sqrt{x} - \log_{0,001} x = -11$

**Q2 –** Usando a definição de logaritmo, determine o valor de $m$ em cada item.

**a)** $\log_3 81 = m$

**b)** $\log_m 0{,}36 = 2$

**c)** $\log_{\sqrt{7}} m = 2$

**d)** $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = m$

**e)** $\log_{\frac{3}{2}} m = -3$

**f)** $\log_m 32 = -5$

**Q3 –** (IFPE) Os alunos do curso de Meio Ambiente do campus Cabo de Santo Agostinho observaram que o número de flores em uma árvore $X$ segue o modelo matemático $F(h) = 16 - \log_2 (3h + 1)$, onde $F(h)$ é a quantidade de flores após $h$ horas de observação. Após quanto tempo de observação esta árvore estará com apenas 10 flores?

**a)** 6 horas.

**b)** 25 horas.

**c)** 20 horas.

**d)** 21 horas.

**e)** 64 horas.

**Q4 –** Considere a função $f$, com lei $f(x) = \log_3 (x - 2)$.

**a)** Escreva os conjuntos domínio e contradomínio da função $f$.

**b)** Identifique os conjuntos domínio e contradomínio de uma função $g$, sabendo que essa função é a inversa de $f$ ($f$ é bijetora).

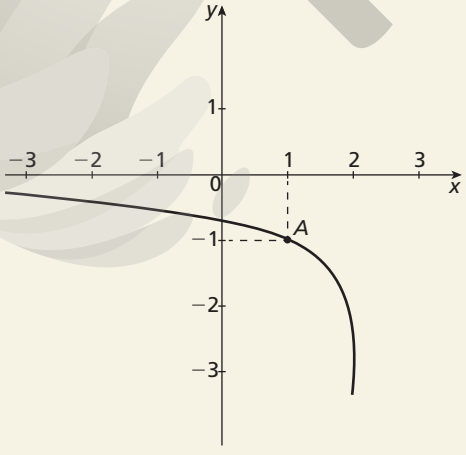
**c)** Escreva a lei de formação da função $g$.

**Q5 –** Considere a função $f$, de lei $f(x) = \log_2 (4 + x) + k$, sendo $k$ um número real.

**a)** Calcule o valor de $k$, sabendo que o gráfico de $f$ passa pela origem.

**b)** Esboce o gráfico de $f$.

**Q6 –** (UPF) Na figura, está representada parte da função $f$ definida por $f(x) = \log(ax + 2) - 1$, com $a \neq 0$ e o ponto $A(1, -1)$ pertencente ao gráfico da função $f$.




O valor de $a$ é:

**a)** 1 **b)** 2 **c)** −1 **d)** −2 **e)** 8

**Q7 –** Se o pagamento por determinado serviço for efetuado após a data de vencimento, será cobrada uma multa de acordo com o número de dias de atraso. No quadro, estão apresentados os valores dessa multa previstos para os quatro primeiros dias de atraso no pagamento desse serviço.

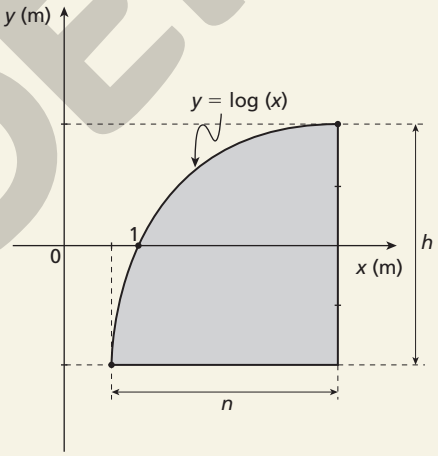
| Total de dias de atraso | Valor da multa |
|---|---|
| 1 | R$ 0,50 |
| 2 | R$ 1,00 |
| 3 | R$ 2,00 |
| 4 | R$ 4,00 |

**a)** Calcule a multa que será paga no quinto dia de atraso.

**b)** Considerando que $d$ representa o número de dias de atraso e $m$ representa o valor que será pago de multa, escreva uma expressão que possa ser utilizada para calcular $m$ em função de $d$.

**c)** Sabendo que o valor do serviço foi R$ 16.000,00, determine após quantos dias de atraso o valor pago de multa será igual ao valor do serviço. (Use: $\log 2 = 0{,}3$)

**Q8 –** (Enem) Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação $y = \log (x)$, conforme a figura.




A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo $x$ sempre divida ao meio a altura $h$ do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo $x$. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura $h$ do vidro em função da medida $n$ de sua base, em metros. A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

**a)** $\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right) - \log\left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

**b)** $\log\left(1 + \frac{n}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{n}{2}\right)$

**c)** $\log\left(1 + \frac{n}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{n}{2}\right)$

**d)** $\log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

**e)** $2 \log\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right)$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

**Q9 –** Resolva os sistemas a seguir.

**a)** $\begin{cases} x + y = \dfrac{21}{2} \\ \log_5 x - \log_5 y = \log_5 20 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x - y = 80 \\ \log (x + y) = 3 \end{cases}$

**Q10 –** (Enem) A *Hydrangea macrophylla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH $< 7$) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH $> 7$) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que pH $= -\log_{10} x$, em que $x$ é a concentração de íon hidrogênio ($H^+$). Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que $x$ assuma

**a)** qualquer valor acima de $10^{-8}$.

**b)** qualquer valor positivo inferior a $10^{-7}$.

**c)** valores maiores que 7 e menores que 8.

**d)** valores maiores que 70 e menores que 80.

**e)** valores maiores que $10^{-8}$ e menores que $10^{-7}$.

## Resoluções da avaliação

**Q1 – a)** $\log x + \log_{100} x - \log_{1.000} x = 14$

$\log x + \dfrac{\log x}{\log 100} - \dfrac{\log x}{\log 1.000} = 14$

$\log x + \dfrac{\log x}{2} - \dfrac{\log x}{3} = 14$

$6 \cdot \log x + 3 \cdot \log x - 2 \cdot \log x = 84$

$7 \cdot \log x = 84 \Rightarrow \log x = \dfrac{84}{7} \Rightarrow \log x = 12$

**b)** $\log_{0,1} x + \log \sqrt{x} - \log_{0,001} x = -11$

$\dfrac{\log x}{\log 0,1} + \dfrac{\log x}{2} - \dfrac{\log x}{\log 0,001} = -11$

$\dfrac{-\log x}{1} + \dfrac{\log x}{2} - \left(\dfrac{-\log x}{3}\right) = -11$

$-6 \cdot \log x + 3 \cdot \log x + 2 \cdot \log x = -66 \Rightarrow \log x = 66$

**Q2 – a)** $\log_3 81 = m \Rightarrow 3^m = 81 \Rightarrow m = 3^4 \Rightarrow m = 4$

**b)** $\log_m 0,36 = 2 \Rightarrow m^2 = 0,36$

Como $m > 0$, então, $m = 0,6$.

**c)** $\log_{\sqrt{7}} m = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{7}\right)^2 = m \Rightarrow m = 7$

**d)** $\log_4 \left(\dfrac{1}{16}\right) = m \Rightarrow 4^m = \dfrac{1}{16} \Rightarrow 4^m = 4^{-2} \Rightarrow m = -2$

**e)** $\log_{\frac{3}{2}} m = -3 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} = m \Rightarrow m = \dfrac{8}{27}$

**f)** $\log_m 32 = -5 \Rightarrow m^{-5} = 32 \Rightarrow m = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$

**Q3 –** $F(h) = 16 - \log_2 (3h + 1) \Rightarrow 10 = 16 - \log_2 (3h + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (3h + 1) = 6 \Rightarrow 3h + 1 = 2^6 \Rightarrow h = 21$
Portanto, a árvore estará com apenas 10 flores após 21 horas.
alternativa d

**Q4 – a)** Pelas condições de existência de logaritmo, temos:
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$
Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

**b)** Pelo item anterior, verifica-se que:
$D(g) = \mathbb{R}$ e $CD(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

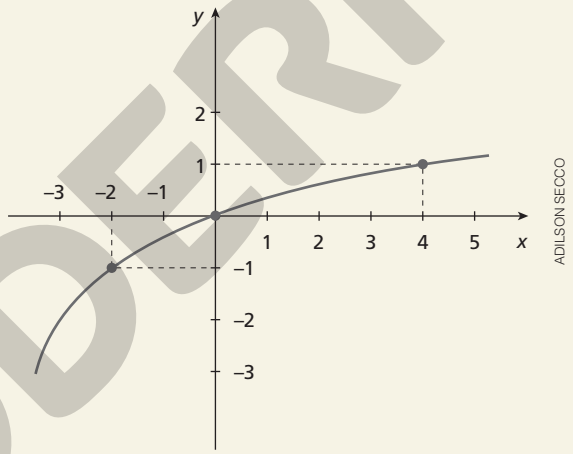
**c)** Partindo da lei de formação da função $f$, temos:
- $f(x) = \log_3 (x - 2)$ é o mesmo que $y = \log_3 (x - 2)$;
- trocando $x$ por $y$ e $y$ por $x$, obtemos $x = \log_3 (y - 2)$;
- expressando $y$ em função de $x$, temos:
$x = \log_3 (y - 2) \Rightarrow 3^x = y - 2 \Rightarrow y = 3^x + 2$

Portanto, $g(x) = 3^x + 2$.

**Q5 – a)** Se o gráfico de $f$ passa pela origem, para $x = 0$, temos $f(x) = 0$. Assim:
$0 = \log_2 (4 + 0) + k \Rightarrow -k = \log_2 4$
$2^{-k} = 4 \Rightarrow 2^{-k} = 2^2 \Rightarrow -k = 2 \Rightarrow k = -2$
Logo, $k = -2$.

**b)**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $-1$ |
| 0 | 0 |
| 4 | 1 |



ADILSON SECCO

**Q6 –** Se $A(1, -1)$ pertence ao gráfico $f$, então:
$-1 = \log (a \cdot 1 + 2) - 1 \Rightarrow a + 2 = 10^0 \Rightarrow a = -1$
alternativa c

**Q7 – a)** Primeiro, é necessário identificar um padrão no cálculo do valor da multa. Observando o quadro do enunciado, podemos construir uma terceira coluna identificando o cálculo do valor da multa para cada dia de atraso.

| Total de dias de atraso | Valor da multa | Cálculo do valor da multa |
|---|---|---|
| 1 | R$ 0,50 | $0,50 = 0,50 \cdot 2^0$ |
| 2 | R$ 1,00 | $1,00 = 0,50 \cdot 2^1$ |
| 3 | R$ 2,00 | $2,00 = 0,50 \cdot 2^2$ |
| 4 | R$ 4,00 | $4,00 = 0,50 \cdot 2^3$ |

Pelos cálculos apresentados na última coluna da tabela, conclui-se que, no quinto dia, o valor da multa será: $0,50 \cdot 2^4 = 8,00$

No quinto dia de atraso, serão pagos R$ 8,00 de multa.

**b)** É possível verificar um padrão nos cálculos apresentados na última coluna da tabela. Considerando esse padrão, temos a seguinte expressão: $m = 0,50 \cdot 2^{d-1}$

MODERNA

**c)** $16.000 = 0{,}50 \cdot 2^{d-1} \Rightarrow 32.000 = 2^{d-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 32.000 = \log 2^{d-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log (2^5 \cdot 10^3) = \log 2^{d-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 2^5 + \log 10^3 = (d-1) \cdot \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 10 = (d-1) \cdot \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 = (d-1) \cdot \log 2 - 5 \cdot \log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 = (d-1-5) \cdot \log 2$
Usando $\log 2 = 0{,}3$, temos:
$3 = (d-1-5) \cdot 0{,}3 \Rightarrow d - 6 = \frac{3}{0{,}3} \Rightarrow d = 16$
Logo, serão necessários 16 dias.

**Q8 –** Seja $k$, com $0 < k < t$, a abscissa do ponto para o qual se tem $\log k = -\frac{h}{2}$, ou seja, $h = -2 \cdot \log k$.
Assim, $\frac{h}{2} = \log (n + k) \Rightarrow h = 2 \cdot \log (n + k)$.
Igualando as duas equações encontradas para $h$, temos:
$2 \cdot \log (n + k) = -2 \cdot \log k \Rightarrow \log (n + k) + \log k = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log [(n + k) \cdot k] = 0 \Rightarrow \log (k^2 + nk) = 0 \Rightarrow k^2 + nk = 10^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 + nk - 1 - 0 \Rightarrow k = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$
Portanto: $h = 2 \cdot \log \left( n + \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \right) =$
$= 2 \cdot \log \left( \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \right)$
alternativa e

**Q9 – a)** $\begin{cases} x + y = \frac{21}{2} \\ \log_5 x - \log_5 y = \log_5 20 \end{cases}$
Manipulando a segunda equação, temos:
$\log_5 x - \log_5 y = \log_5 20 \Rightarrow \log_5 \left( \frac{x}{y} \right) = \log_5 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x}{y} = 20 \Rightarrow x = 20y$
Substituindo $x$ na primeira equação, obtemos:
$x + y = \frac{21}{2} \Rightarrow 20y + y = \frac{21}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$
Então: $x = 20y \Rightarrow x = 20 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 10$
Portanto, $S = \left\{ \left( 10, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

**b)** $\begin{cases} x - y = 80 \\ \log (x + y) = 3 \end{cases}$
Manipulando a segunda equação, temos:
$\log (x + y) = 3 \Rightarrow 10^3 = x + y \Rightarrow x + y = 1.000$
Escrevendo um sistema equivalente ao sistema dado e resolvendo-o pelo método da adição, obtemos:
$\begin{cases} x - y = 80 \\ x + y = 1.000 \end{cases}$
$2x = 1.080 \Rightarrow x = 540$
$x - y = 80 \Rightarrow 540 - y = 80 \Rightarrow y = 460$
Portanto, $S = \{(540, 460)\}$.

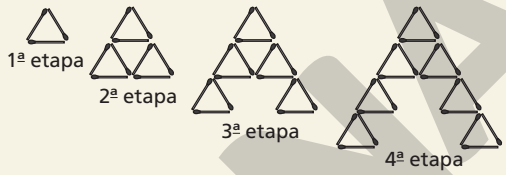
**Q10 –** Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se ter:
$7 < \text{pH} < 8 \Rightarrow 7 < -\log_{10} x < 8 \Rightarrow -8 < \log_{10} x < -7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{-8} < x < 10^{-7}$
Assim, $x$ assume valores maiores que $10^{-8}$ e menores que $10^{-7}$.
alternativa e

# Capítulo 5 – Sequências

## Avaliação

| Objetivos do capítulo | Questões |
|---|---|
| Identificar padrões numéricos e sequências. | 1, 2 e 3 |
| Resolver problemas que envolvam sequências. | 4, 5, 6, 7, 8 e 9 |
| Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas. | 10 |

**Q1 –** (Cotuca) João brinca com palitos de fósforo montando figuras. Na 1ª etapa, monta um triângulo e, nas etapas seguintes, vai acrescentando triângulos conforme a sequência representada abaixo.



NELSON MATSUDA

O número de palitos de fósforo necessários e suficientes para a construção da 10ª etapa é:
**a)** 51. **b)** 54. **c)** 57. **d)** 60. **e)** 63.

**Q2 –** Considere as seguintes sequências:
- sequência dos naturais divisores de 24;
- sequência dos naturais múltiplos de 7;
- sequência dos números quadrados perfeitos.

**a)** Classifique cada sequência em infinita ou finita.
**b)** Represente-as na forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$.
**c)** Quando possível, escreva uma lei de formação para a sequência.

**Q3 –** (Unioeste) Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por $f(x) = 3x$ e $g(x) = 3^x$. Então, é correto afirmar que a seguência $(g(f(1)), g(f(2)), g(f(3)), \ldots, g(f(n)), \ldots)$
**a)** é uma progressão geométrica de razão 27.
**b)** é uma progressão aritmética de razão 6.
**c)** é uma progressão geométrica de razão 9.
**d)** é a sequência constante (1, 1, 1, ..., 1, ...).
**e)** não é uma progressão geométrica e também não é uma progressão aritmética.

**Q4 –** Determine a razão de cada PA e classifique-a em crescente, decrescente ou constante.
**a)** $\left(1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, 5, \ldots\right)$
**b)** $(5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, \ldots)$
**c)** $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots\right)$

**Q5 –** (UFJF) Pedro começou a listar sequencialmente todos os números inteiros positivos, dispondo-os em linhas, conforme indicado na figura abaixo:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | | | | | | |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | | |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

A primeira linha é formada pelos quatro primeiros números inteiros positivos e, a partir da segunda linha, listam-se sempre dois números inteiros a mais do que haviam sido listados na linha anterior.

MODERNA

O número inteiro que ocupará a décima posição na 101ª linha será

**a)** 10.410 **c)** 213 **e)** 111

**b)** 10.310 **d)** 212

**Q6 –** Em um cinema, as poltronas estão dispostas em fila. Na primeira delas, há 18 poltronas; na segunda, há duas poltronas a mais que na primeira; na terceira, há duas poltronas a mais que na segunda; e assim sucessivamente, até a última fila.

**a)** Escreva uma expressão que indique o número de cadeiras ($S_n$) em função do número de filas ($n$).

**b)** Sabendo que no total há 270 poltronas, calcule quantas filas de poltronas há nesse cinema.

**Q7 –** (Eear) Considere que o número de células de um embrião, contadas diariamente desde o dia da fecundação do óvulo até o 30º dia de gestação, forma a sequência: 1, 2, 4, 8, 16, ...

A função que mostra o número de células, conforme o número de dias $x$, é $f$: $\{x \in \mathbb{N};\ 1 \leqslant x \leqslant 30\} \to \mathbb{N}$; $f(x) =$

**a)** $2^{x-1}$ **c)** $2^x - 1$

**b)** $2x - 1$ **d)** $x^2 - 1$

**Q8 –** (Famerp) José deseja fazer uma poupança mensal durante 10 anos, sempre acrescentando 0,5% a mais em relação ao valor poupado no mês anterior. Adotando $1{,}005^{120} = 1{,}819$ em seu cálculo final, se José começar sua poupança depositando R$ 100,00 no primeiro mês, ao final do último mês de depósito ele terá depositado um total de

**a)** R$ 69.600,00. **d)** R$ 16.380,00.

**b)** R$ 6.645,00. **e)** R$ 6.500,00.

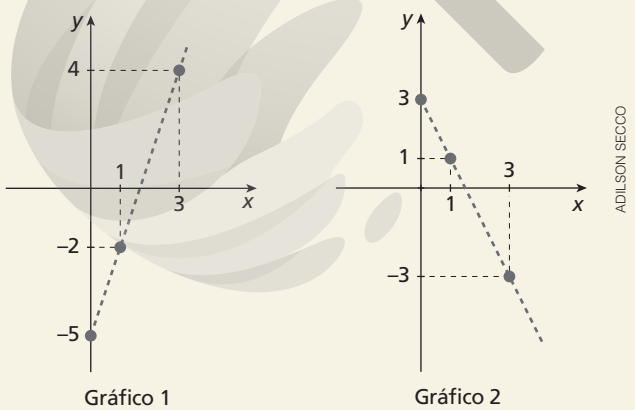
**c)** R$ 32.760,00.

**Q9 –** (Unicamp) Tendo em vista que $a$ e $b$ são números reais positivos, $a \neq b$, considere a função $f(x) = ab^x$, definida para todo número real $x$. Logo, $f(2)$ é igual a

**a)** $\sqrt{f(1)f(3)}$. **c)** $f(0)f(1)$.

**b)** $\dfrac{f(3)}{f(0)}$. **d)** $f(0)^3$.

**Q10 –** Cada um dos gráficos a seguir representa uma PA infinita.




ADILSON SECCO

Gráfico 1 Gráfico 2

Considerando esses gráficos, resolva os itens a seguir.

**a)** Encontre o valor de $a_0$ e de $a_1$ para cada PA.

**b)** Determine a razão de cada PA.

**c)** Escreva a lei de formação de cada PA.

## Resoluções da avaliação

**Q1 –** Considerando que $a_n$ é o número de palitos na etapa $n$ e que em cada etapa há um aumento de 6 palitos em relação à etapa anterior, na etapa 10, temos:

$a_1 = 3$

$a_{10} = 3 + 9 \cdot 6 = 57$

alternativa c

**Q2 – a)** • sequência dos naturais divisores de 24: finita
- sequência dos naturais múltiplos de 7: infinita
- sequência dos números quadrados perfeitos: infinita

**b)** • sequência dos naturais divisores de 24: (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)
- sequência dos naturais múltiplos de 7: (0, 7, 14, 21, 28, ...)
- sequência dos números quadrados perfeitos: (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...)

**c)** • sequência dos naturais divisores de 24: não tem uma lei de formação
- sequência dos naturais múltiplos de 7: $f(n) = 7(n - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$
- sequência dos números quadrados perfeitos: $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$

**Q3 –** $g(f(1)) = 3^{3 \cdot 1} = 3^3$

$g(f(2)) = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$

$g(f(3)) = 3^{3 \cdot 3} = 3^9$

⋮

$g(f(n)) = 3^{3 \cdot n} = 3^{3n}$

Assim, a sequência é dada por $(3^3, 3^6, 3^9, ..., 3^{3n}, ...)$.

Calculando a razão dessa sequência, temos:

$\dfrac{3^6}{3^3} = \dfrac{3^9}{3^6} = 3^3 = 27$

Portanto, é uma progressão geométrica de razão 27.

alternativa a

**Q4 – a)** $r = \dfrac{5}{3} - 1 = \dfrac{2}{3}$

Como $r > 0$, então a PA é crescente.

**b)** $r = 3 - 5 = -2$

Como $r < 0$, então a PA é decrescente.

**c)** $r = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

Como $r = 0$, então a PA é constante.

**Q5 –** O número de elementos em cada linha forma uma PA de razão 2, enquanto o último elemento de cada linha é igual à soma de elementos dessa PA. Calculando:

1ª linha: elementos: 4; último elemento: 4

2ª linha: elementos: $4 + 2 = 6$; último elemento: $4 + 6 = 10$

3ª linha: elementos: $6 + 2 = 8$; último elemento: $10 + 8 = 18$

4ª linha: elementos: $8 + 2 = 10$; último elemento: $18 + 10 = 28$

⋮

nª linha: elementos: $4 + 2(n - 1) = x$; último elemento: $\dfrac{(4 + x)n}{2}$

100ª linha: elementos $4 + 2(100 - 1) = 202$; último elemento: $\dfrac{(4 + 202)100}{2} = 10.300$

Portanto, o primeiro elemento da 101ª linha é o número: 10.301 e o 10º elemento dessa linha é o número 10.310.

alternativa b

MODERNA

**Q6 – a)** O total de poltronas nesse cinema é dado pela soma dos termos de uma PA. Para escrevermos a soma dos termos dessa PA, em função de $n$, precisamos determinar o termo $a_n$:

$a_n = 18 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n + 16$

Assim, temos:

$$S_n = \frac{n(18 + 2n + 16)}{2} = n^2 + 17n$$

**b)** $270 = n^2 + 17n \Rightarrow n^2 + 17n - 270 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos $n = 10$ ou $n = -27$. Como $n$ representa o número de filas, então n = 10.

Logo, há 10 filas de poltronas nesse cinema.

**Q7 –** Do enunciado, a sequência pode ser escrita como:

$2^0, 2^1, 2^2, \ldots 2^{x-1}, x \in \mathbb{N}, 1 \leqslant x \leqslant 30$

Assim, $f(x) = 2^{x-1}, x \in \mathbb{N}, 1 \leqslant x \leqslant 30$

alternativa a

**Q8 –** Os depósitos mensais de José constituem a progressão geométrica, cujo primeiro termo é 100, a razão é 1,005 e tem 120 elementos, pois 10 anos correspondem a 120 meses. Assim, temos:

$(100; 100 \cdot 1{,}005; 100 \cdot 1{,}005^2; \ldots; 100 \cdot 1{,}005^{119})$

Calculando a soma dos termos dessa PG, temos:

$$S_{120} = 100 \cdot \frac{1{,}005^{120} - 1}{1{,}005 - 1} \simeq 100 \cdot \frac{1{,}819 - 1}{0{,}005} \simeq 16.380$$

alternativa d

**Q9 –** Temos que $f(1) = ab$, $f(2) = ab^2$ e $f(3) = ab^3$ constituem uma progressão geométrica de primeiro termo $f(1)$ e razão $b$. Assim:

$f^2(2) = (ab^2)^2 = a^2b^4 = ab \cdot ab^3 = f(1)f(3)$

$f^2(2) = f(1)f(3) \Rightarrow f(2) = \sqrt{f(1)f(3)}$

alternativa a

**Q10 – a)** PA do gráfico 1: $a_0 = -5$; $a_1 = -2$

PA do gráfico 2: $a_0 = 3$; $a_1 = 1$

**b)** PA do gráfico 1: $r = -2 - (-5) = 3$

PA do gráfico 2: $r = 1 - 3 = -2$

**c)** PA do gráfico 1:

$f(n) = -5 + 3n \Rightarrow f(n) = 3n - 5$, com $n \in \mathbb{N}$

PA do gráfico 2:

$f(n) = 3 + n \cdot (-2) \Rightarrow f(n) = -2n + 3$, com $n \in \mathbb{N}$

## Capítulo 6 - Matemática financeira

### Avaliação

| Objetivos do capítulo | Questões |
|---|---|
| Resolver problemas que envolvam taxa percentual. | 1, 2 e 3 |
| Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto. | 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 |

**Q1 –** Um comerciante vende seus produtos com lucro de 50% sobre o preço de venda. Então, qual é o lucro obtido por ele sobre o preço de custo?

**Q2 –** Uma loja compra certo produto por R$ 500,00 a unidade e os revende por R$ 700,00 cada um.

**a)** Determine o lucro da loja sobre o preço de custo.

**b)** Por causa da crise econômica, o fornecedor passou a cobrar R$ 400,00 pelo mesmo produto e a loja a vendê-lo por R$ 600,00. Calcule o lucro da loja sobre o custo.

**c)** Se a loja desejasse manter o mesmo percentual de lucro obtido sobre o preço de custo antes da crise econômica, por quanto deveria vender esse produto?

**Q3 –** (Unisc) A função $f$ que representa o valor a ser pago após um desconto de 21% sobre o valor $x$ de um produto é

**a)** $f(x) = x - 21$

**b)** $f(x) = 0{,}79x$

**c)** $f(x) = 1{,}21x$

**d)** $f(x) = -21x$

**e)** $f(x) = 1{,}021x$

**Q4 –** (UPE) Diante da crise que o país atravessa, uma financeira oferece empréstimos a servidores públicos cobrando apenas juro simples. Se uma pessoa retirar R$ 8.000,00 nessa financeira, à taxa de juro de 16% ao ano, quanto tempo levará para pagar um montante de R$ 8.320,00?

**a)** 2 meses

**b)** 3 meses

**c)** 4 meses

**d)** 5 meses

**e)** 6 meses

**Q5 –** (Uerj) Um capital de $C$ reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de R$ 53.240,00.

Calcule o valor, em reais, do capital inicial $C$.

**Q6 –** Um capital de R$ 2.000,00 rendeu, em 3 anos, juro simples de R$ 2.160,00. Qual foi a taxa anual de juro da aplicação? E a taxa mensal?

**Q7 –** Um capital de R$ 1.000,00 será remunerado a uma taxa de 10% trimestralmente. Quantos trimestres deverá durar essa aplicação para que renda juro de R$ 210,00 no regime de juro composto?

**Q8 –** (Uece) Bruno fez um empréstimo de R$ 1.000,00 a juros simples mensais de 10%. Dois meses após, pagou R$ 700,00 e um mês depois desse pagamento, liquidou o débito. Este último pagamento, para liquidação do débito, foi de

**a)** R$ 550,00.

**b)** R$ 460,00.

**c)** R$ 490,00.

**d)** R$ 540,00.

**Q9 –** (Ifal) Em 2000, certo país da América Latina pediu um empréstimo de 1 milhão de dólares ao FMI (Fundo Monetário Internacional) para pagar em 100 anos. Porém, por problemas políticos e de corrupção, nada foi pago até hoje e a dívida está sendo "rolada" com a taxação de juros compostos de 8,5% ao ano. Determine o valor da dívida no corrente ano de 2015, em dólar.

Considere $(1{,}085)^5 \cong 1{,}5$.

**a)** 1,2 milhões.

**b)** 2,2 milhões.

**c)** 3,375 milhões.

**d)** 1,47 milhões.

**e)** 2 milhões.

MODERNA

**Q10–** (UEMG) Joaquim, um jovem empreendedor, estuda duas possibilidades para investir R$ 10.000,00. A primeira opção é aplicar durante meio ano a uma taxa de juros simples de 0,5% a.m. e a segunda, aplicar o mesmo montante a uma taxa de juros compostos.

Assinale a alternativa que apresenta uma taxa de juros compostos ao mês para que, com a mesma duração e com o mesmo montante inicial, Joaquim obtenha o mesmo rendimento da primeira possibilidade:

Dados: $\sqrt[6]{1{,}18} = 102.797 \cdot 10^{-5}$;

$\sqrt[6]{1{,}03} = 1.004.939 \cdot 10^{-6}$

**a)** 2,797% a.m.

**b)** 1,555% a.m.

**c)** 0,352% a.m.

**d)** 0,4939% a.m.

## Resoluções da avaliação

**Q1–** $L = P_V - P_C$

$0{,}5P_V = P_V - P_C \Rightarrow P_V = \frac{P_C}{0{,}5} \Rightarrow P_V = 2P_C$

Substituindo $P_V$ por $2P_C$ na equação original do lucro, temos:

$L = 2P_C - P_C = P_C$

O lucro obtido sobre o preço de custo é dado por:

$\frac{L}{P_C} = \frac{P_C}{P_C} = 1 = 100\%$

O comerciante obtém 100% de lucro sobre o preço de custo.

**Q2– a)** Sabemos que $P_C = 500$ e $P_V = 700$. Assim o lucro é dado por:

$L = P_V - P_C \Rightarrow L = 700 - 500 \Rightarrow L = 200$

Calculando o lucro da loja sobre o preço de custo, temos:

$\frac{L}{P_C} = \frac{200}{500} = 0{,}4 = 40\%$

O lucro sobre o preço de custo é 40%.

**b)** Os novos valores são $P_C = 400$ e $P_V = 600$. Calculando o lucro temos:

$L = P_V - P_C \Rightarrow L = 600 - 400 \Rightarrow L = 200$

Calculando o lucro da loja sobre o preço de custo, temos:

$\frac{L}{P_C} = \frac{200}{400} = 0{,}5 = 50\%$

O lucro sobre o preço de custo é 50%.

**c)** Antes da crise econômica, a loja obtinha 40% de lucro sobre o preço de custo. Então:

$L = P_V - P_C \Rightarrow 0{,}4 \cdot 400 = P_V - 400 \Rightarrow P_V = 560$

O preço de venda deveria ser R$ 560,00.

**Q3–** Após um desconto de 21% sobre o valor $x$, seu novo valor passará a ser $x(1 - 0{,}21)$, ou seja, $0{,}79x$.

Assim, a função que representa o valor a ser pago após o desconto é dado por $f(x) = 0{,}79x$.

alternativa b

**Q4–** Sendo 8.000 o capital, 8.320 o montante, 0,16 a.a. a taxa de juro e $t$ o tempo de aplicação, temos:

$8.320 = 8.000(1 + 0{,}16t) \Rightarrow 0{,}16t = 0{,}04 \Rightarrow t = 0{,}25$

Como a taxa de juro é de 16% ao ano, o tempo encontrado também é em ano. Transformando o tempo em meses, temos:

$0{,}25 \cdot 12 = 3$

alternativa b

**Q5–** Sendo $i = 10\% = 0{,}1$ e $t = 3$, temos:

$53.240 = C(1 + 0{,}1)^3 \Rightarrow C = \frac{53.240}{1{,}331} = 40.000$

Portanto, o capital inicial foi de R$ 40.000,00.

**Q6–** Sendo $i$ a taxa anual, temos:

$J = C \cdot i \cdot t$

$2.160 = 2.000 \cdot i \cdot 3$

$i = \frac{2.160}{6.000}$

$i = 0{,}36 = 36\%$

Logo, a taxa anual foi 36%.

Sendo $I$ a taxa mensal, temos:

$J = C \cdot I \cdot t$

$2.160 = 2.000 \cdot I \cdot 36$

$I = \frac{2.160}{72.000}$

$I = 0{,}03 = 3\%$

Logo, a taxa mensal foi 3%.

**Q7–** Sabendo que $M = C + J$ e que $M = C(1 + i)^t$, temos:

$C + J = C(1 + i)^t$

$1.000 + 210 = 1.000 \cdot (1 + 0{,}1)^t$

$(1{,}1)^t = 1{,}21$

Das propriedades operatórias dos logaritmos, vem:

$\log (1{,}1)^t = \log (1{,}21)$

$\log (1{,}1)^t = \log (1{,}1)^2$

$t = 2$

Logo, essa aplicação deverá durar dois trimestres.

**Q8–** O saldo devedor de Bruno após dois meses pode ser calculado por:

$1.000(1 + 0{,}1 \cdot 2) = 1.200$

Efetuado o pagamento de R$ 700,00, seu saldo devedor passou a ser de R$ 500,00.

Calculando o saldo devedor no mês seguinte, temos:

$500 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 1) = 550$

Portanto, o último pagamento para liquidar o débito foi de R$ 550,00.

alternativa a

**Q9–** $M = 1.000.000(1 + 0{,}085)^{15}$

$M = 1.000.000 \cdot (1{,}085)^5 \cdot (1{,}085)^5 \cdot (1{,}085)^5$

$M = 1.000.000 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5$

$M = 3.375.000$

Portanto, o valor da dívida em 2015 era de R$ 3.375.000,00.

alternativa c

**Q10–** Vamos calcular o montante aplicando o capital de R$ 10.000 no regime de juro simples.

$M = C(1 + i \cdot t) = 10.000(1 + 0{,}005 \cdot 6) = 10.300$

Aplicando esse montante ao regime de juro composto, temos:

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 10.300 = 10.000 \cdot (1 + i)^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}03 = (1 + i)^6 \Rightarrow \sqrt[6]{1{,}03} = 1 + i \Rightarrow$

$\Rightarrow 1.004.939 \cdot 10^{-6} = 1 + i \Rightarrow i = 1{,}004939 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow i = 0{,}004939 \Rightarrow i = 0{,}4939\%$

alternativa d

MODERNA

# Resoluções e comentários

## Capítulo 1 – Função afim

### Exercícios propostos

**1.** **a)** $g$ é função afim, em que $a = 2$ e $b = 4$.
**b)** $i$ não é função afim.
**c)** $f$ é função afim, em que $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$.
**d)** $k$ é função afim, em que $a = -13$ e $b = 0$.

- A função $i$ não é afim, porque não podemos encontrar números reais $a$ e $b$ tais que $i(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

**2.** **a)** $f(-2) = -3 \cdot (-2) + 1 = 6 + 1 = 7$
**b)** $f(x) = 0 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

**c)** $f\left(\sqrt{2}\right) = -3 \cdot \sqrt{2} + 1 = -3\sqrt{2} + 1$

**d)** $f(x) = 19 \Rightarrow -3x + 1 = 19 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x = 18 \Rightarrow x = -6$

- $f(x) > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$; $f(x) < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$
- Espera-se que os alunos respondam que sim por meio de um gráfico.

*Comentário*: Espera-se que, nesse exercício, os alunos reflitam sobre as possibilidades de construção de um gráfico partindo-se da lei de uma função, com o objetivo de estudá-la melhor. No entanto, tal percepção não é obrigatória, já que o assunto será estudado mais adiante.

**3.** $f(x) = ax + \frac{1}{2}$

$f(3) = 8$

$a \cdot 3 + \frac{1}{2} = 8 \Rightarrow 3a = 8 - \frac{1}{2} \Rightarrow 3a = \frac{15}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

**4.** A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamada de função identidade, com $a = 1$ e $b = 0$.
Então, para que $j(x) = (p^2 - 1)x + (2q - 6)$ seja uma função identidade, devemos ter:

- $p^2 - 1 = 1 \Rightarrow p^2 = 2 \Rightarrow p = \sqrt{2}$ ou $p = -\sqrt{2}$
- $2q - 6 = 0 \Rightarrow 2q = 6 \Rightarrow q = 3$

**5.** **a)** Se o consumidor utilizasse 82 minutos em um mês, pagaria R$ 34,50, pois não teria excedido os 100 minutos a que tinha direito.
Se o consumidor utilizasse 300 minutos no mês, pagaria R$ 34,50 pelos primeiros 100 minutos mais R$ 0,08 para cada um dos 200 outros minutos; então:
$34{,}50 + 200 \cdot 0{,}08 = 50{,}50$
Logo, ele pagaria R$ 50,50.

**b)** Dos R$ 52,90, foram pagos R$ 34,50 pelos primeiros 100 minutos, e os R$ 18,40 restantes, por 230 minutos $\left(\frac{18{,}40}{0{,}08}\right)$. Como $100 + 230 = 330$, esse consumidor usou 330 minutos.

**c)** Chamando de $x$ o número de minutos utilizados pelo consumidor, a função $f$ representará o valor que esse consumidor pagaria (em real).
Para $0 < x \leq 100$ minutos, temos: $f(x) = 34{,}50$
Para $x > 100$ minutos, temos:
$f(x) = 34{,}50 + 0{,}08(x - 100)$
Logo, a lei de formação dessa função é:

$$f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leq 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$$

**d)** O gasto mínimo com telefone, em um mês, era:
$3 \cdot 34{,}50 = 103{,}50$, ou seja, R$ 103,50

*Comentário*: Peça aos alunos que possuem assinatura de telefone residencial que comparem o plano contratado com o apresentado pelo enunciado desse exercício.

**6.** **a)** $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$
$f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$
$f(1) - f(0) = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$

**b)** $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$
$f(2) - f(1) = 5 - 2 = 3$

**c)** $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$
$f(3) - f(2) = 8 - 5 = 3$

**d)** $f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$
$f(4) - f(3) = 11 - 8 = 3$

- $f(1) - f(0) = f(2) - f(1) = f(3) - f(2) = f(4) - f(3) = 3$
Em relação à função $f$, observa-se que o acréscimo de uma unidade nos valores de $x$ corresponde a acréscimos de três unidades nos valores de $f(x)$.
- Pelo item anterior, sabe-se que o acréscimo de uma unidade nos valores de $x$ acarreta o acréscimo de três unidades nos valores de $f(x)$. Logo: $f(28) - f(27) = 3$
- $g(x) = -3x - 1$
**a)** $g(1) = -3 \cdot 1 - 1 = -4$
$g(0) = -3 \cdot 0 - 1 = -1$
$g(1) - g(0) = -4 - (-1) = -3$
**b)** $g(2) = -3 \cdot 2 - 1 = -7$
$g(2) - g(1) = -7 - (-4) = -7 + 4 = -3$
**c)** $g(3) = -3 \cdot 3 - 1 = -10$
$g(3) - g(2) = -10 - (-7) = -10 + 7 = -3$
**d)** $g(4) = -3 \cdot 4 - 1 = -13$
$g(4) - g(3) = -13 - (-10) = -13 + 10 = -3$
- Os valores encontrados são iguais ao coeficiente $a$ das respectivas funções, ou seja, para a função $f$, os valores são iguais a 3, e $a$ de $f$ é igual a 3; para a função $g$, os valores são iguais a $-3$, e $a$ de $g$ é igual a $-3$.
- Espera-se que os alunos percebam que, em ambos os casos, as diferenças calculadas são o valor do coeficiente $a$ da função, também conhecido como taxa de variação da função.

*Comentário*: A intenção desse exercício é antecipar, por meio de cálculos com números inteiros e consecutivos atribuídos a $x$ (isto é, fazendo $\Delta x = 1$), o fato de que a taxa de variação da função afim, cuja lei é dada por $y = ax + b$, é constante e igual a $a$.

**7.** **a)** Vamos considerar as funções $f$ e $g$ dadas por:
$f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$
Com base na tabela, é possível fazer a seguinte leitura:

- função $f$: $f(-2) = -1$; $f(-1) = 1$; $f(0) = 3$; $f(1) = 5$; $f(2) = 7$
Basta aplicar à lei de $f$ duas dessas igualdades, por exemplo:
$f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 3$ (I)
$f(1) = 5 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 5$ (II)
Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos:
$a = 2$ e $b = 3$
Logo: $f(x) = 2x + 3$

- função $g$: $g(-2) = 4$; $g(-1) = 3$; $g(0) = 2$; $g(1) = 1$; $g(2) = 0$
Basta aplicar à lei de $g$ duas dessas igualdades, por exemplo:

MODERNA

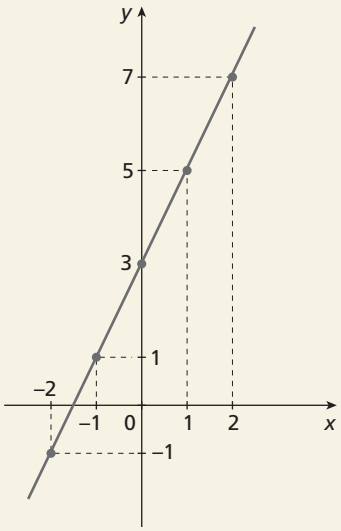
$g(0) = 2 \Rightarrow c \cdot 0 + d = 2$ (III)
$g(1) = 1 \Rightarrow c \cdot 1 + d = 1$ (IV)

Resolvendo o sistema formado por (III) e (IV), obtemos:

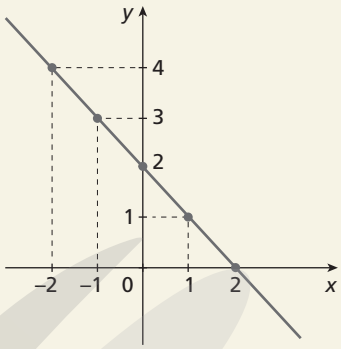
$c = -1$ e $d = 2$

Logo: $g(x) = -x + 2$

**b)** Espera-se que os alunos obtenham a seguinte reta:



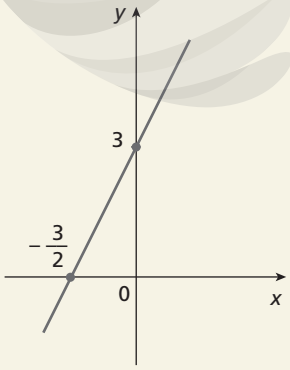

**c)** Espera-se que os alunos obtenham a seguinte reta:




**d)** Espera-se que os alunos percebam que uma função afim é representada graficamente por uma reta.

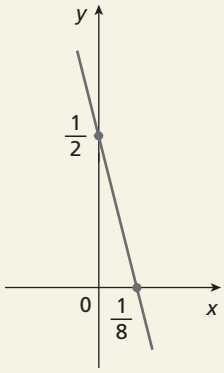
*Comentário*: Esse exercício leva os alunos, após localizar no plano cartesiano pontos dos gráficos de duas funções dados em uma tabela, a formular uma hipótese de como é o gráfico dessas funções. Espera-se que eles antecipem o conceito a ser estudado no tópico seguinte e concluam que o gráfico da função afim é uma reta.

**8.** **a)** $f(x) = 2x + 3$



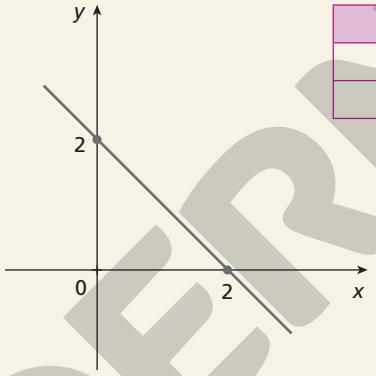

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| $-\frac{3}{2}$ | 0 |

**b)** $g(x) = -4x + \frac{1}{2}$



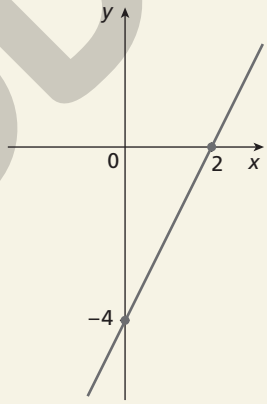

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{8}$ | 0 |

**c)** $h(x) = -x + 2$




| $x$ | $h(x)$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 2 | 0 |

**d)** $i(x) = -4 + \frac{6}{3}x$




| $x$ | $i(x)$ |
|---|---|
| 0 | −4 |
| 2 | 0 |

- Os gráficos das funções $f$ e $i$ têm em comum o fato de serem retas representativas de funções crescentes.
- Os gráficos das funções $g$ e $h$ têm em comum o fato de serem retas representativas de funções decrescentes.
- Não há ponto de intersecção entre os gráficos das funções $f$ e $i$. As funções têm a mesma taxa de variação. Portanto, os gráficos são retas paralelas.

*Comentário*: O objetivo das perguntas é propiciar a reflexão sobre a relação entre o coeficiente angular da reta correspondente e o gráfico de uma função.

Espera-se que os alunos associem o fato de o gráfico de uma função ser crescente ao coeficiente $a$ positivo e decrescente ao coeficiente $a$ negativo; no entanto, se isso não ocorrer, não há problema, pois o assunto será estudado mais adiante. Espera-se também que os alunos percebam que duas funções que têm a mesma taxa de variação, têm como gráficos retas paralelas.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**9.** O gráfico da função $f$ passa pelos pontos (0, 3) e (−3, 0). Então:

$f(x) = ax + b$

$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$

$0 = a(-3) + b \Rightarrow b = 3a$

Como $b = 3$, temos: $a = 1$

Portanto: $f(x) = x + 3$

O gráfico da função $g$ passa pelos pontos (0, 1) e (1, 0). Então:

$g(x) = cx + d$

$1 = c \cdot 0 + d \Rightarrow d = 1$

$0 = c \cdot 1 + d \Rightarrow d = -c$

Como $d = 1$, temos: $c = -1$

Portanto: $g(x) = -x + 1$

Para determinar as coordenadas do ponto $P$, devemos obter $x$ tal que:

$g(x) = f(x)$

$-x + 1 = x + 3$

$2x = -2$

$x = -1$

Para $x = -1$, temos: $f(-1) = g(-1) = 2$

Logo, as coordenadas do ponto $P$ são $(-1, 2)$.

**10.** Observando o gráfico, percebemos que os vértices $A$ e $C$ têm coordenadas $(-2, 0)$ e $(0, 3)$, respectivamente.

O vértice $B$ está sobre a reta de equação $y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$ e sobre a reta que passa pelos pontos $C$ e $(2, 0)$. Devemos determinar a equação desta última. Seja $y = ax + b$ a equação dessa reta.

Como essa reta passa pelo ponto $C(0, 3)$, temos:

$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$

Como essa reta também passa pelo ponto $(2, 0)$, temos:

$0 = a \cdot 2 + b \Rightarrow 2a + b = 0$

Substituindo o valor de $b$ por 3, obtemos:

$2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

Então, a equação da reta que passa pelos pontos $C(2, 0)$ e $B$ é: $y = -\frac{3}{2}x + 3$

Para obter as coordenadas do ponto $B$, devemos resolver o sistema formado pelas equações das duas retas que passam por esse ponto.

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{cases}$$

$$-\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{5}{4}x = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{14}{5}$$

Substituindo o valor de $x$ em qualquer uma das equações do sistema, obtemos: $y = -\frac{6}{5}$

Logo, os vértices do triângulo são:

$A(-2, 0)$, $B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ e $C(0, 3)$

**11.** **a)** Ao observar os gráficos, percebemos que a inclinação que representa o enchimento da caixa $A$ é maior do que a representação do enchimento de $B$. Portanto, a torneira $A$ tem a maior vazão.

**b)** Com os pontos (3, 480) e (0, 360), calculamos a taxa de variação de $A$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{480 - 360}{3 - 0} = \frac{120}{3} = 40$$

Com os pontos (3, 480) e (0, 420), calculamos a taxa de variação de $B$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{480 - 420}{3 - 0} = \frac{60}{3} = 20$$

Portanto, a taxa de variação que representa a torneira $A$ é 40 e a da torneira $B$ é 20.

**c)** Sendo $A$ a função da caixa $A$ e $B$ a função da caixa $B$, temos:

$A(x) = ax + b$, para $x = 0$, temos $y = 360$; assim:

$360 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 360$

$B(x) = ax + b$, para $x = 0$, temos $y = 420$, assim:

$420 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 420$

Logo, os coeficientes lineares de $A$ e $B$ são 360 e 420, respectivamente.

**d)** Significam as quantidades de litros que há em cada caixa antes da abertura das torneiras.

**e)** Determinamos a taxa de variação e os coeficientes lineares das funções nos itens **b** e **c**. Sendo $A$ a função da caixa $A$ e $B$ a função da caixa $B$, temos:
$A(x) = 360 + 40x$ e $B(x) = 420 + 20x$

**f)** Para determinar o tempo para o enchimento de cada caixa-d'água, basta determinar o valor de $x$ em cada função para $A(x) = 1.000$ e $B(x) = 1.000$.

$A(x) = 360 + 40x \Rightarrow 1.000 = 360 + 40x \Rightarrow$

$\Rightarrow 40x = 640 \Rightarrow x = 16$

$B(x) = 420 - 20x \Rightarrow 1.000 = 420 + 20x \Rightarrow$

$\Rightarrow 20x = 580 \Rightarrow x = 29$

Portanto a caixa $A$ será enchida após 16 minutos e a caixa $B$, após 29 minutos.

**g)** A caixa $A$ deverá ser enchida em 16 minutos; portanto, o domínio da função $A$ é $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 16\}$.

A caixa $B$ deverá ser enchida em 29 minutos; portanto, o domínio da função $B$ é $D(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 29\}$.

**h)** A imagem da função $A$ tem extremidades 360 (quantidade de água inicial) e 1.000 (capacidade total de água). Portanto, $Im(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid 360 \leq y \leq 1.000\}$.
A imagem da função $B$ tem extremidades 420 (quantidade de água inicial) e 1.000 (capacidade total de água). Portanto, $Im(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid 420 \leq y \leq 1.000\}$.

**12.** **a)** Com os pontos (300,0; 262) e (0, 100), temos:

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i} = \frac{262 - 100}{300 - 0} = \frac{162}{300} = \frac{54}{100} = 0{,}54$$

Portanto a taxa de variação da função é 0,54.

**b)** A taxa de variação significa a constante de velocidade com que o $NO^2$ se decompõe.

**c)** A concentração inicial pode ser calculada pelo coeficiente linear da função que é igual a 100. Dado que $\frac{1}{[NO_2]} = 100 \Rightarrow [NO_2] = \frac{1}{100} \therefore [NO_2] = 0{,}01 mol/\ell$

**d)** Sendo $y = ax + b$ a lei de formação da função representada pela reta, temos do item **a** que o coeficiente angular é $a = 0{,}54$ e pela observação do gráfico temos que o coeficiente linear é $b = 100$. Portanto, a lei de formação da função é $y = 0{,}54x + 100$.

**13.** Como a função que modela o problema é linear, podemos determinar a altura no trigésimo dia pela regra de três a seguir. Seja $x$ a altura a ser determinada.

$$\frac{10}{2} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 2}{10} \Rightarrow x = 6$$

Portanto, a planta estará com 6 cm no trigésimo dia.

alternativa e

MODERNA

**14.** Para verificar se há proporcionalidade direta, podemos fazer a seguinte tabela que relaciona a medida do lado com a área do quadrado:

| $\ell$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $A = \ell^2$ | $1 \cdot 1 = 1$ | $2 \cdot 2 = 4$ | $3 \cdot 3 = 9$ | $4 \cdot 4 = 16$ |

Como $\frac{1}{1} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{9}{3} \neq \frac{16}{4}$, não há uma constante de proporcionalidade. Portanto, as grandezas medida do lado do quadrado e área do quadrado não são proporcionais.

**15.** **a)** $f(x) = -5x + 2$

$f$ é função decrescente, pois $a = -5$ e $-5 < 0$.

**b)** $h(x) = -3 + \frac{x}{2}$

$h$ é função crescente, pois $a = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} > 0$.

**c)** $g(x) = x - \frac{3}{4}$

$g$ é função crescente, pois $a = 1$ e $1 > 0$.

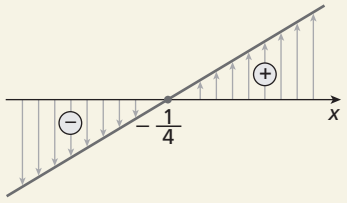
**d)** $f(x) = 1 - 2x$

$f$ é função decrescente, pois $a = -2$ e $-2 < 0$.

**16.** **a)** $f(x) = 3x + \frac{3}{4}$

Zero de $f$: $3x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Como $a = 3$ e $3 > 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:



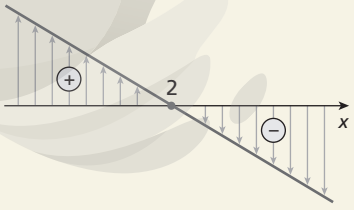

Então:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = -\frac{1}{4} \\ f(x) > 0, \text{ para } x > -\frac{1}{4} \\ f(x) < 0, \text{ para } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

**b)** $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

Zero de $g$: $-\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2$

Como $a = -\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2} < 0$, temos o seguinte esboço do gráfico:




Então:

$$\begin{cases} g(x) = 0, \text{ para } x = 2 \\ g(x) > 0, \text{ para } x < 2 \\ g(x) < 0, \text{ para } x > 2 \end{cases}$$

**17.** O coeficiente de $x$ na função $f(x) = \left(m - \frac{1}{2}\right)x + 7$ é $\left(m - \frac{1}{2}\right)$.

A função é crescente se:

$m - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2}$

A função é decrescente se:

$m - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$

**18.** **a)** Como a função $g$ passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, -1)$, temos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 0}{0 - 1} = 1$

Portanto, o coeficiente angular de $g$ é 1.

Como a função $h$ passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(-3, 0)$, temos:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 1}{-3 - 0} = \frac{1}{3}$

Portanto, o coeficiente angular de $h$ é $\frac{1}{3}$.

**b)** A função $g$ possui coeficiente angular igual a 1; então, $y = x + b$. Como ela passa pelo ponto $(1, 0)$, temos:

$b = -1$ e $y = x - 1$

Portanto, o coeficiente linear de $g$ é $-1$.

A função $h$ possui coeficiente angular igual a $\frac{1}{3}$; então, $y = \frac{1}{3}x + b$. Como ela passa pelo ponto $(0, 1)$, temos:

$b = 1$ e $y = \frac{1}{3}x + 1$

Portanto, o coeficiente linear de $h$ é 1.

**c)** $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow x = 3$

Substituindo o valor de $x$ na primeira equação, temos:

$y = x - 1 \Rightarrow y = 3 - 1 \Rightarrow y = 2$

Portanto, o ponto de intersecção é $(3, 2)$.

**d)** $h(x) < g(x)$

$\frac{1}{3}x + 1 < x - 1 \Rightarrow 2 < \frac{2x}{3} \Rightarrow x > 3$

Portanto, $h(x)$ é menor que $g(x)$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

*Comentário*: Nesse exercício, pretende-se que os alunos estabeleçam uma conexão entre as abordagens algébrica e gráfica. No item **d**, a intenção é antecipar, de maneira informal, o conceito de desigualdade aplicado na resolução de inequações, que será estudado no próximo tópico.

**19.** **a)** O salário ($s_A$) na loja A, em real, é:

$s_A = 900 + 0{,}02 \cdot 13.000 = 1.160$

O salário ($s_B$) na loja B, em real, é:

$s_B = 0{,}08 \cdot 13.000 = 1.040$

**b)** Na loja A: $s_A(x) = 900 + 0{,}02x$

Na loja B: $s_B(x) = 0{,}08x$

**c)** Loja A:

$900 + 0{,}02 \cdot x = 1.600 \Rightarrow x = \frac{700}{0{,}02} = 35.000$

Loja B:

$0{,}08 \cdot x = 1.600 \Rightarrow x = 20.000$

Logo, para um funcionário ganhar R$ 1.600,00, o total de vendas na loja A deverá ser R$ 35.000,00 e na loja B, R$ 20.000,00.

**d)** Vamos encontrar o valor total de vendas $x$ para o qual os valores recebidos nas lojas A e B se igualam.

$s_A = s_B \Rightarrow 900 + 0{,}02x = 0{,}08x \Rightarrow x = 15.000$

Supondo que o total de vendas seja, nas lojas A e B, R$ 15.001,00, então:

$s_A = 900 + 0{,}02 \cdot 15.001 = 1.200{,}02$

$s_B = 0{,}08 \cdot 15.001 = 1.200{,}08$

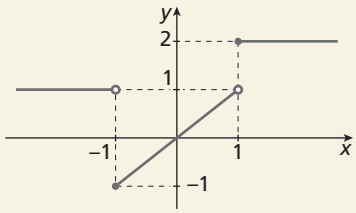
Logo, a partir de um total de vendas acima de R$ 15.000,00, é mais vantajoso trabalhar na loja B.

**20.** $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geqslant 1 \\ x, \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

ADILSON SECCO




Observando o gráfico, temos:
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1 \text{ ou } y = 2\}$

**21.** Temos que, para $x \leq -1$, o gráfico obedece à lei de formação $y = ax + b$ e passa pelos pontos $(-5, -3)$ e $(-1, 1)$. Então:

- para $x = -5$, temos $y = -3$
  Logo: $-3 = a \cdot (-5) + b$ (I)
- para $x = -1$, temos $y = 1$
  Logo: $1 = a \cdot (-1) + b$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos $a = 1$ e $b = 2$. Assim, para $x \leq -1$, o gráfico obedece à lei $y = x + 2$.

Para o intervalo $-1 < x < 1$, a função é constante e igual a 1.

Para $x \geq 1$, a função passa pelos pontos (1, 1) e (3, 3) e obedece à lei $y = ax + b$.

Então:

- para $x = 1$, temos $y = 1$
  Logo: $1 = a \cdot 1 + b$ (III)
- para $x = 3$, temos $y = 3$
  Logo: $3 = a \cdot 3 + b$ (IV)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (III) e (IV), encontramos $a = 1$ e $b = 0$. Assim, para $x \geq 1$, o gráfico obedece à lei $y = x$.

Portanto, a lei de formação da função correspondente é:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Observe que podemos escrever a lei de formação dessa função de outras maneiras, por exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x < -1 \\ 1, \text{ se } -1 \leq x < 1 \\ x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

**22.** **a)** Podemos determinar a velocidade por meio da expressão: $\frac{\Delta_s}{\Delta_t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{90-10}{1-0} = 80$

Portanto, a velocidade do automóvel é 80 km/h.

**b)** O gráfico é uma reta; então, a função horária do movimento é do tipo: $s(t) = s_0 + vt$
Observando o gráfico, percebemos que $s_0 = 10$ e do item anterior, $v = 80$
Portanto, a função horária do movimento é:
$s(t) = 10 + 80t$

**c)** Observando o gráfico, temos:
$D(s) = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} = \mathbb{R}_+$
$\text{Im}(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 10\}$

**d)** Para $t = 4$, temos: $s(4) = 10 + 80 \cdot 4 = 330$
A posição será 330 quilômetros.

**e)** $s(t) = 250 \Rightarrow 10 + 80t = 250 \Rightarrow 80t = 240 \Rightarrow t = 3$
Após 3 horas.

**23.** **a)** Para o movimento retilíneo uniforme (MRU), em que a velocidade do móvel é constante, vamos usar a função afim $s(t) = s + vt$.

Para o domínio $0 \leq t < 10$, temos:
$s = 0$ e $v = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} \Rightarrow v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} \Rightarrow v = \frac{50 - 0}{10 - 0} \therefore v = 5$

Logo, a lei de formação para esse domínio é $s(t) = 5t$, com $s(t)$ em metro e $t$ em segundo.

Para o domínio $10 \leq t < 20$, temos $s = 50$ e $v = 0$.

Logo, a lei de formação para esse domínio é $s(t) = 50$, com $s(t)$ em metro.

Para o domínio $20 \leq t \leq 40$, temos:

$$v = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} \Rightarrow v = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} \Rightarrow v = \frac{0 - 50}{40 - 20} \therefore v = -2,5$$

Com $v = -2,5$ e o ponto (40, 0), por exemplo, podemos determinar s(t):
$s(t) = s + vt \Rightarrow 0 = s - 2,5 \cdot 40 \Rightarrow s = 100$

Logo, a sentença para esse domínio é $s(t) = 100 - 2,5t$, com $s(t)$ em metro e $t$ em segundo.
Portanto a lei de formação da função é:

$$s(t) = \begin{cases} 5t, \text{se } 0 \leq t < 10 \\ 50, \text{se } 10 \leq t < 20 \\ 100 - 2,5t, \text{se } 20 \leq t < 40 \end{cases}$$

**b)** Para 5 segundos devemos usar a primeira sentença da função.
$s(t) = 5 \cdot 5 = 25$
Para 35 segundos, devemos usar a terceira sentença da função.
$s(t) = 100 - 2,5 \cdot 35 = 12,5$

Portanto, o corpo em 5 segundos estará na posição 25 m e em 35 segundos estará na posição 12,5 m.

**c)** No intervalo de 0 a 10 segundos, a taxa de variação significa que o corpo se movimenta a uma velocidade constante de 5 m/s.
De 10 a 20 segundos, a taxa de variação é zero, isso significa que o corpo permanece em repouso nesse intervalo.
De 20 a 40 segundos, a taxa de variação é negativa, pois o gráfico é decrescente nesse intervalo, isso quer dizer que o corpo está em movimento retrógrado, isto é, se deslocando no sentido contrário da trajetória com velocidade 2,5 m/s.
O módulo da taxa de variação é a velocidade em metros por segundo: $|-2,5| = 2,5$.

**d)**

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s(t)$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |

No intervalo de 1 a 10 segundos, o comportamento entre as variáveis é proporcional, pois a função é linear. Assim, existe uma constante $k$, tal que $k \cdot t = s(t)$.

**24.** **a)** $3x - 12 \leq 0 \Rightarrow 3x \leq 12 \Rightarrow x \leq 4$
Logo, o conjunto solução da inequação é:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$

**b)** $5(-x + 1) + 2(3x - 4) > -1 \Rightarrow -5x + 5 + 6x - 8 > -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 3 > -1 \Rightarrow x > 2$
Logo, o conjunto solução da inequação é:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

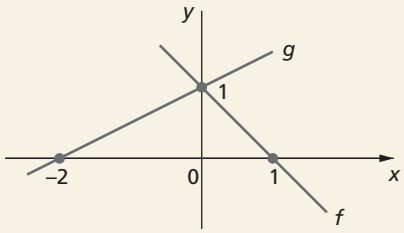
**c)** $\frac{-x + 3}{2} < \frac{2x + 5}{3} \Rightarrow \frac{3(-x + 3)}{6} < \frac{2(2x + 5)}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x + 9 < 4x + 10 \Rightarrow -3x - 4x < 10 - 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow -7x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{7}$

Assim, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$$

MODERNA

**25.** $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$




| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| −2 | 0 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

**a)** Pelo gráfico, podemos observar que, para $x > 0$, temos $f(x) < g(x)$.

**b)** Vamos resolver a inequação $f(x) < g(x)$:

$-x + 1 < \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x + x > 1 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{2}x > 0 \Rightarrow x > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Portanto, o intervalo encontrado como solução da inequação $f(x) < g(x)$ é o mesmo intervalo encontrado pela análise do gráfico.

**26.** **a)** Observando o gráfico, verifica-se que: $f(x) = g(x)$ para $x = -5$

**b)** O conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$ é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

**c)** O conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$ é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

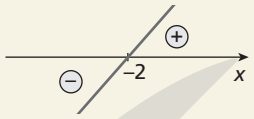
**27.** **a)** $(x + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 3x\right) > 0$

Vamos considerar $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -\frac{1}{2} + 3x$.

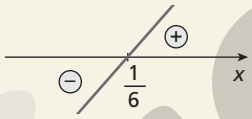
Zero de $f$: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Zero de $g$: $-\frac{1}{2} + 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

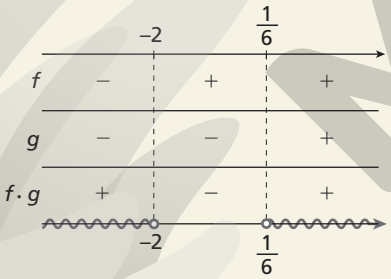
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais




Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$.

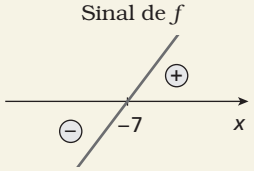
**b)** $\frac{x + 7}{2 - x} < 0$

Vamos considerar $f(x) = x + 7$ e $g(x) = 2 - x$.

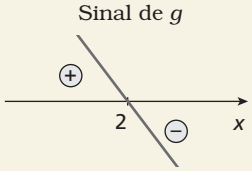
Zero de $f$: $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

Zero de $g$: $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

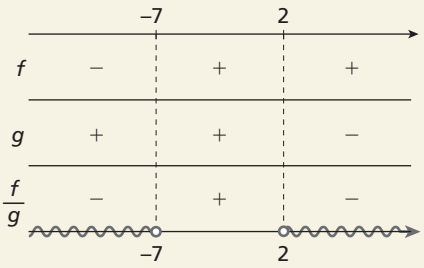
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$.

**c)** $\frac{-1}{x + 2} + \frac{2x}{x + 2} \geqslant -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-1}{x + 2} + \frac{2x}{x + 2} + 2 \geqslant 0 \Rightarrow$

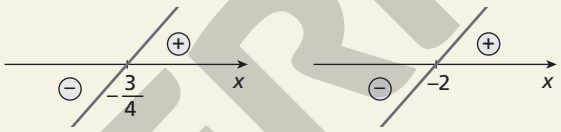
$\Rightarrow \frac{-1 + 2x + 2(x + 2)}{x + 2} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{4x + 3}{x + 2} \geqslant 0$

Vamos considerar $f(x) = 4x + 3$ e $g(x) = x + 2$.

Zero de $f$: $4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

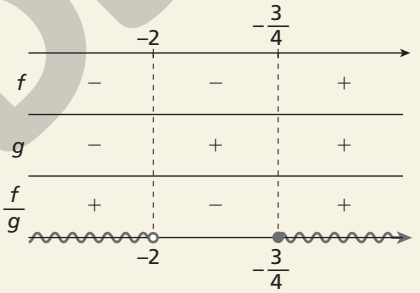
Zero de $g$: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Sinal de $f$ e sinal de $g$




Note que $-2$ não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$, ou seja: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Quadro de sinais



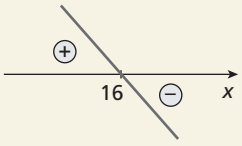

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant -\frac{3}{4}\right\}$.

**28.** $\frac{1}{x - 20} \leqslant \frac{1}{12 - x} \Rightarrow \frac{1}{x - 20} - \frac{1}{12 - x} \leqslant 0 \Rightarrow$

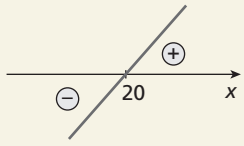
$\Rightarrow \frac{12 - x - (x - 20)}{(x - 20)(12 - x)} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-2x + 32}{(x - 20)(12 - x)} \leqslant 0$

Vamos considerar $f(x) = -2x + 32$, $g(x) = x - 20$ e $h(x) = 12 - x$.

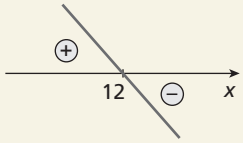
Sinal de $f$




Sinal de $g$



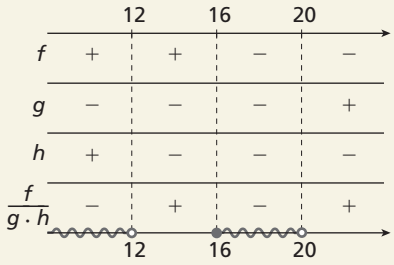

Sinal de $h$




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

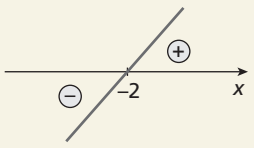
Quadro de sinais



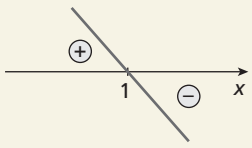

Note que 20 e 12 não são soluções da inequação, pois $g(x) \neq 0$ e $h(x) \neq 0$, ou seja:
$x - 20 \neq 0 \Rightarrow x \neq 20$
$12 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 12$
Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 12 \text{ ou } 16 \leq x < 20\}$.
Os números inteiros e estritamente positivos que satisfazem a sentença dada são:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18 e 19
Portanto, temos 15 números.
alternativa b

**29.** $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -x + 1$
$f(x) \cdot g(x) \geq 0 \Rightarrow (x + 2)(-x + 1) \geq 0$

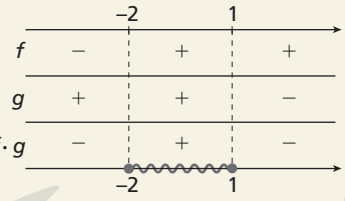
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$.
Os números inteiros que satisfazem a sentença são $-2$, $-1$, 0 e 1.
A soma desses números inteiros é dada por: $-2 - 1 + 0 + 1 = -2$
alternativa a

**30.** **a)** Pelo quadro de sinais, observamos que o zero da função $f$ é $-1$ e que o zero da função $g$ é $-\frac{1}{3}$, pois são os pontos que determinam a mudança de sinal das funções, respectivamente.

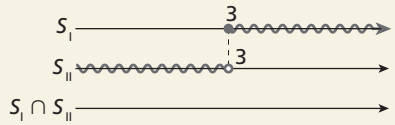
**b)** A função $f$ passa de valores negativos para positivos; portanto, é crescente. A função $g$ passa de valores positivos para negativos; portanto, é decrescente.

**c)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

**d)** Espera-se que os alunos percebam que as possíveis inequações são encontradas a partir das raízes dadas. Além disso, o intervalo da solução é aberto em $-\frac{1}{3}$ e fechado em $-1$. Isso nos leva a concluir que a equação de raiz $-\frac{1}{3}$ deve ficar no denominador. Assim, uma resposta possível é $\frac{x + 1}{-3x - 1} \leq 0$.

*Comentário*: Esse exercício propicia a reversibilidade procedimental das atividades imediatamente anteriores, levando os alunos a refletir sobre os porquês dos procedimentos de resolução de inequação-produto e de inequação-quociente.

**31.** **a)** $5 \leq 3x - 4 < x + 2$
(I) $3x - 4 \geq 5 \Rightarrow 3x \geq 9 \Rightarrow x \geq 3$
Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.
(II) $3x - 4 < x + 2 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3$
Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$.




Logo, $S = \varnothing$.

**b)** $\frac{3x}{5} \leq \frac{5x + 2}{4} \leq \frac{-x + 1}{2}$

(I) $\frac{3x}{5} \leq \frac{5x + 2}{4} \Rightarrow \frac{3x}{5} - \frac{5x + 2}{4} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12x - 25x - 10}{20} \leq 0 \Rightarrow \frac{-13x - 10}{20} \leq 0 \Rightarrow$

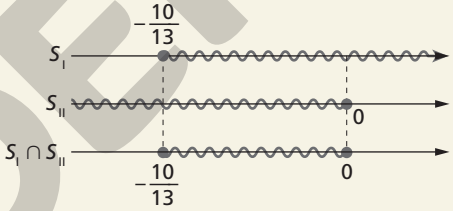
$\Rightarrow -13x - 10 \leq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{10}{13}$

Portanto, $S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{10}{13}\right\}$.

(II) $\frac{5x + 2}{4} - \frac{-x + 1}{2} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5x + 2 + 2x - 2}{4} \leq 0 \Rightarrow \frac{7x}{4} \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$

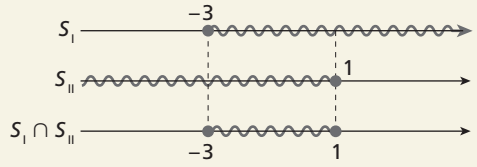
Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$.




Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leq x \leq 0\right\}$.

**c)** $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 4x - 7 \leq x - 4 \end{cases}$

(I) $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$
Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$.
(II) $4x - 7 \leq x - 4 \Rightarrow 3x \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$
Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$.




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$.

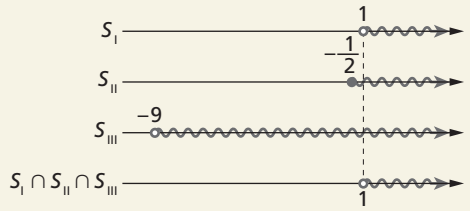
**d)** $\begin{cases} 5x - 2 > 4 - x \\ 2(7 - x) \leq 5(2x + 4) \\ 2 - 3(4 + 2x) < 6 + 2(1 - 2x) \end{cases}$

(I) $5x - 2 > 4 - x \Rightarrow x > 1$
Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.
(II) $14 - 2x \leq 10x + 20 \Rightarrow -12x \leq 6 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$
Portanto, $S_{II} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\}$.
(III) $2 - 12 - 6x < 6 + 2 - 4x \Rightarrow -2x < 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow x > -9$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Portanto, $S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -9\}$.



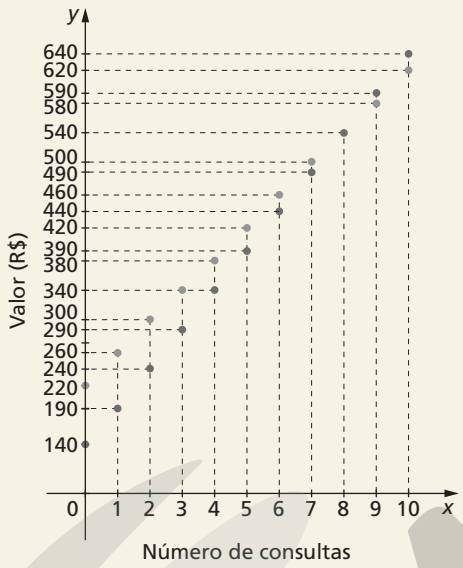

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

**32.** **a)** Plano Azul: $p_A(x) = 140 + 50x$

**b)** Plano Laranja: $p_L(x) = 220 + 40x$

**c)** $p_A(x) = p_L(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow 140 + 50x = 220 + 40x \Rightarrow 10x = 80 \Rightarrow x = 8$
Assim, para 8 consultas, o valor total a ser pago no decorrer de um ano é igual para ambos os planos.

**d)** Observe abaixo o esboço dos gráficos de $p_A(x)$ e de $p_L(x)$ em um mesmo plano cartesiano, em que os pontos cinza-claro representam o Plano Laranja e os pontos cinza-escuro representam o Plano Azul.




No gráfico, observamos que, para qualquer quantidade de consultas maior que 8, o Plano Laranja é mais vantajoso para o cliente, em particular para um número de consultas $x$ tal que $8 < x < 18$.

**e)** Da mesma forma, observando o gráfico percebemos que, para um número de consultas $x$ tal que $4 < x < 7$, o Plano Azul é o mais vantajoso para o cliente.

*Comentário*: Questões como essa (há outras no decorrer do volume) oferecem aos alunos um instrumento de análise e de tomada de decisão, em uma situação do dia a dia, promovendo o exercício da cidadania.

**33.** Sabemos que o valor é dado pela diferença entre o valor das vendas e o dos gastos. Assim, pelo enunciado:

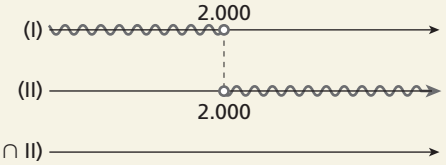
**a)** $V_s(x) = 2x - 10.000$

**b)** $V_f(x) = 3x - 12.000$

**c)** $V_s(x) = V_f(x) \Rightarrow 2x - 10.000 = 3x - 12.000 \Rightarrow x = 2.000$
Portanto, $V_s(x) = V_f(x)$ para 2.000 quilogramas.

**d)** $\begin{cases} V_s(x) > V_f(x) \\ V_s(x) < V_f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 10.000 > 3x - 12.000 \\ 2x - 10.000 < 3x - 12.000 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x > -2.000 \\ -x < -2.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2.000 \quad \text{(I)} \\ x > 2.000 \quad \text{(II)} \end{cases}$




Logo, $S = \varnothing$.

**e)** Supondo uma produção de 10.000 quilogramas, temos:
$V_s(x) = 2 \cdot 10.000 - 10.000 = 10.000,00$
$V_f(x) = 3 \cdot 10.000 - 12.000 = 18.000,00$
Portanto, o agricultor terá mais lucro na cultura de feijão.

**f)** Analisando o esquema do item **d**, verificamos que $V_f(x) > V_s(x)$ para $x > 2.000$. Logo, a quantidade mínima de feijão é de 2.001 quilogramas.

**34.** **a)** $j(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$

Como o índice da raiz é ímpar, não há restrições para o radicando.
Logo, $D(j) = \mathbb{R}$.

**b)** $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

Devemos ter: $2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$.

**c)** $h(x) = \dfrac{-2x + 3}{\sqrt{1 - x}}$

Devemos ter: $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$
Logo, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

**d)** $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

Devemos ter: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$
Logo, $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

**e)** $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + 1}}$

Devemos ter: $\sqrt[3]{x + 1} \neq 0 \Rightarrow x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$
Logo, $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

## Exercícios complementares

**1.** **a)** $y = 5(x - 1) - 4(x - 3) \Rightarrow y = x + 7$
$y = x + 7$ é lei de uma função afim, com $a = 1$ e $b = 7$.

**b)** $y = \frac{1}{x}$ não é lei de uma função afim.

**c)** $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ não é uma função afim.

**d)** $f(x) = \dfrac{3 - x}{4}$

$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{x}{4}$

$f$ é uma função afim, com $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{3}{4}$.

**2.** $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$f(p) = \frac{2}{3} \cdot 10^8 - \frac{1}{3}$

$f(q) = \frac{2}{3} \cdot 10^{10} - \frac{1}{3}$

$$\frac{f(p) - f(q)}{q - p} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 10^8 - \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 10^{10} + \cancel{\frac{1}{3}}}{10^{10} - 10^8} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(10^8 - 10^{10})}{-(10^8 - 10^{10})} = -\frac{2}{3}$$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**3.** $f(x) = 4x - 5$
Para $f(x) = -3$, temos:
$4x - 5 = -3 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Para $f(x) = 3$, temos:
$4x - 5 = 3 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$
Como $f$ é crescente, os valores do domínio de $f$ que produzem $\text{Im}(f) = [-3, 3]$ pertencem ao seguinte conjunto: $D(f) = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ou $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

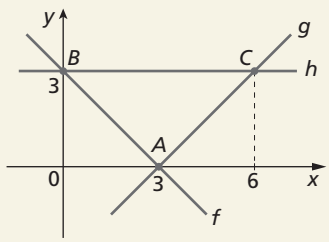
**4.** Sabemos que o preço $m$, em real, de $n$ quilogramas do produto é dado por $m = 1{,}75n$. Então, o gráfico é uma reta que contém o ponto (1; 1,75).
alternativa e

**5.** **a)** O gráfico é uma reta oblíqua aos eixos $x$ e $y$.
**b)** O coeficiente $a$ de $x$ é $-5$, ou seja, negativo; então, a função dada é decrescente.
**c)** No ponto de intersecção do gráfico de $f$ com o eixo $x$, temos:
$f(x) = 0 \Rightarrow 3 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$
Logo, o ponto de intersecção do gráfico de $f$ com o eixo $x$ é $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$.
O ponto de intersecção do gráfico de $f$ com o eixo $y$ é $(0, b)$, em que $b$ é o coeficiente linear da função $f$. Logo, esse ponto é (0, 3).
**d)** Zero de $f$: $3 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$
**e)** Como $f$ está definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, o domínio de $f$ é $\mathbb{R}$. Como $f$ é uma função afim de domínio real, a imagem de $f$ é $\mathbb{R}$.
**f)** No ponto de intersecção, temos:
$f(x) = g(x) \Rightarrow 3 - 5x = 2x - 4 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$
E, daí: $f(1) = g(1) = -2$
Logo, o ponto é $P(1, -2)$.

**6.** Como o gráfico passa pelo ponto $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$, para $x = -1$, temos $y = \frac{4}{3}$. Logo:
$\frac{4}{3} = a \cdot (-1) + b$ (I)
Como o gráfico passa pelo ponto $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$, para $x = -2$, temos $y = -\frac{5}{3}$. Logo:
$-\frac{5}{3} = a \cdot (-2) + b$ (II)
Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos $a = 3$ e $b = \frac{13}{3}$.
Portanto, a lei da função é $y = 3x + \frac{13}{3}$.

**7.** **a)** Sabemos que:
$f(x) = -x + 3$, $g(x) = x - 3$ e $h(x) = 3$
- Determinando o ponto de intersecção entre os gráficos de $f$ e de $g$, temos:
$f(x) = g(x) \Rightarrow -x + 3 = x - 3 \Rightarrow x = 3$
$f(3) = g(3) = 0$
Logo, o ponto de intersecção entre os gráficos de $f$ e de $g$ é $A(3, 0)$.
- Determinando o ponto de intersecção entre os gráficos de $f$ e de $h$, temos:
$f(x) = h(x) \Rightarrow -x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0$
$f(0) = h(0) = 3$
Logo, o ponto de intersecção entre os gráficos de $f$ e de $h$ é $B(0, 3)$.
- Determinando o ponto de intersecção entre os gráficos de $g$ e de $h$, temos:
$g(x) = h(x) \Rightarrow x - 3 = 3 \Rightarrow x = 6$
$g(6) = h(6) = 3$
Logo, o ponto de intersecção entre os gráficos de $g$ e de $h$ é $C(6, 3)$.
Portanto, os vértices desse triângulo são: $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ e $C(6, 3)$

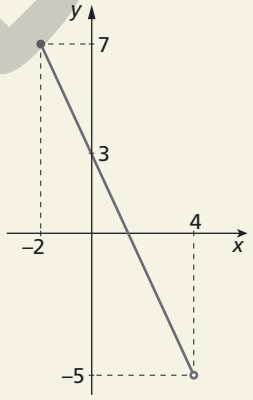
**b)**



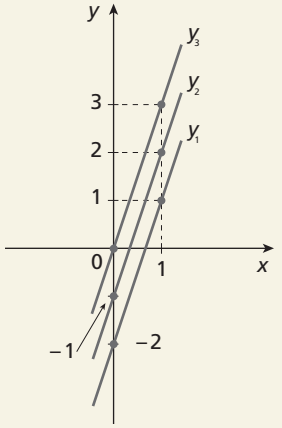

**c)** $f$ é decrescente ($a = -1 < 0$);
$g$ é crescente ($a = 1 > 0$);
$h$ é constante ($a = 0$).

**8.** **a)** Na venda de $x$ ingressos, o faturamento, por sessão, será dado por $f(x) = 50 \cdot x$.
**b)** Para que uma apresentação não tenha prejuízo, devemos ter:
$50x = 5.000 \Rightarrow x = 100$
Logo, o número mínimo de pagantes deve ser 100.
**c)** 100 pagantes por apresentação, ou seja, 400 pagantes por semana.
**d)** O lucro máximo ocorre quando há 180 pagantes, ou seja: $y = 50 \cdot 180 = 9.000$
O faturamento é R$ 9.000,00, mas o custo de uma apresentação é R$ 5.000,00. Portanto, o lucro máximo por apresentação é R$ 4.000,00.

**9.** $f$, tal que $f(x) = -2x + 3$, está definida em $A = [-2, 4[$.
Para $x = -2$, temos $f(-2) = 7$.
Para $x = 4$, temos $f(4) = -5$.
Como $f$ é decrescente, temos $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 < y \leq 7\}$.




**10.** **a)** $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = 3x - 1$ e $y_3 = 3x$

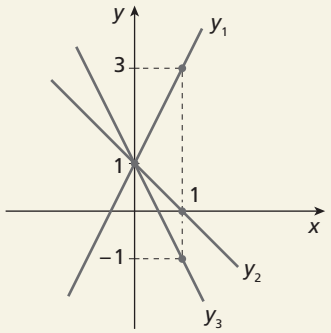



Como os coeficientes $a$ de $x$ de cada função são iguais, os gráficos correspondentes são retas paralelas, ou seja, não existe ponto de intersecção entre as retas correspondentes às funções $y_1$, $y_2$ e $y_3$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

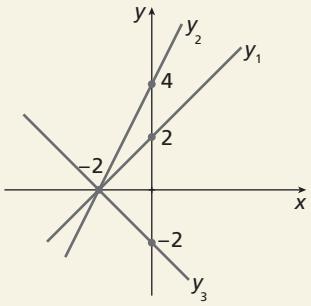
MODENA

**b)** $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -x + 1$ e $y_3 = -2x + 1$




Como os coeficientes $a$ de $x$ de cada função são diferentes entre si, as retas correspondentes têm ponto de intersecção. Como os coeficientes lineares, $b$, de cada função são iguais, todas as retas interceptam o eixo $y$ no mesmo ponto (0, 1). Assim, as três retas interceptam-se no ponto (0, 1).

**c)** $y_1 = x + 2$, $y_2 = 2x + 4$ e $y_3 = -x - 2$



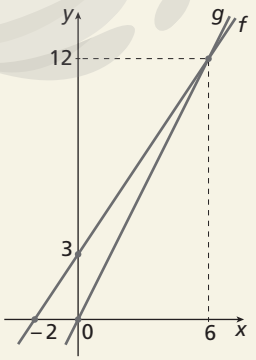

Nesse caso, os coeficientes $a$ e $b$ das funções são diferentes, mas todas as funções têm o mesmo zero. Portanto, as três retas cruzam o eixo $x$ no mesmo ponto, que é o zero das funções.

**11.** O gráfico da função passa pelos pontos (−2, 0) e (0, 3).
Para $x = -2$, temos $y = 0$. Logo:
$0 = a \cdot (-2) + b$ (I)
Para $x = 0$, temos $y = 3$. Logo:
$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$
Substituindo $b$ por 3 em (I), obtemos:
$-2a + 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$
Portanto, a lei de formação é $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$.

- Para que o gráfico dessa função intercepte o gráfico de $g(x) = 2x$, deve existir um valor de $x$ de modo que as imagens desse valor, pelas duas funções, coincidam, ou seja, que $f(x) = g(x)$. Então:

$\frac{3}{2}x + 3 = 2x \Rightarrow x = 6$

Para $x = 6$, temos $f(6) = g(6) = 12$.
Logo, o ponto de intersecção é (6, 12).
Outro modo de verificar a existência de intersecção é pelo traçado dos gráficos das duas funções em um mesmo plano cartesiano:



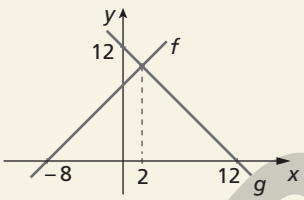

No gráfico, observamos que o ponto de intersecção das retas correspondentes aos gráficos de $f$ e de $g$ é (6, 12).

**12.** **a)** Como o gráfico da função passa pelo ponto (0, 0), para $m = 0$, temos $v = 0$. Logo:
$0 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$
Como o gráfico da função passa pelo ponto (40, 50), para $m = 40$, temos $v = 50$. Logo:
$50 = a \cdot 40 + b$
Substituindo $b$ por 0, obtemos:
$40a + 0 = 50 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$
Portanto, a lei da função apresentada é $v(m) = \frac{5}{4}m$, com $v$ representando o volume (em centímetro cúbico) e $m$ representando a massa (em grama).

**b)** $v = 30 \Rightarrow \frac{5}{4}m = 30 \Rightarrow m = 24$

Portanto, a massa correspondente a 30 cm³ é 24 g.

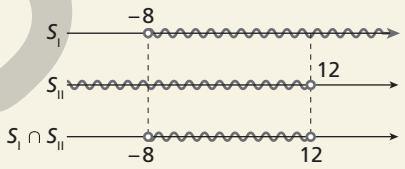
**13.**




Devemos encontrar os valores de $x$ para que as funções $f$ e $g$ sejam simultaneamente positivas e não nulas. Para isso, devemos ter $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$.
Analisando os gráficos, temos:

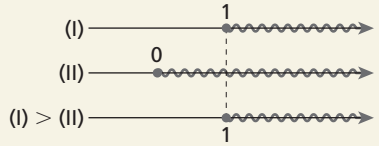
$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -8 \\ x < 12 \end{cases}$

Logo: $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$
$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 12\}$




Então, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 12\}$.
Portanto, para $-8 < x < 12$, as funções $f$ e $g$ são simultaneamente positivas e não nulas.

**14.** **a)** $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt[4]{x}$
(I) $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$
(II) $x \geqslant 0$



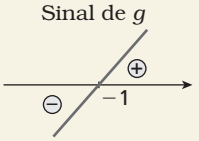

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

**b)** $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{-2x + 3}}$

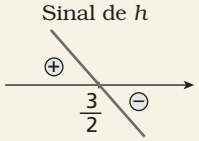
Devemos ter: $\frac{x + 1}{-2x + 3} \geqslant 0$

Vamos considerar: $g(x) = x + 1$ e $h(x) = -2x + 3$

Sinal de $g$




Sinal de $h$

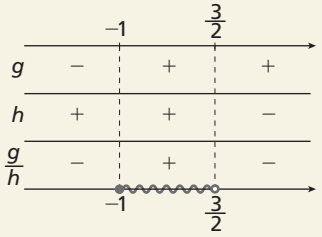



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Note que $\frac{3}{2}$ não é solução da inequação, pois $h(x) \neq 0$, ou seja: $-2x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$

Quadro de sinais




Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$.

**15.** Para que a indústria não tenha prejuízo, pela expressão, temos:
$LT(q) \geq 0 \Rightarrow 5q - (2q + 12) \geq 0 \Rightarrow 3q \geq 12 \Rightarrow q \geq 4$
Portanto, a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar é 4.
alternativa d

**16.** Seja $f$ a função que determina quanto um usuário paga pelo uso do estacionamento em $x$ horas; então:
$f(x) = 3(x - 1) + 6 \Rightarrow f(x) = 3x + 3$
A função $f$ mostra que cada usuário paga R$ 3,00 por hora e mais R$ 3,00 de taxa. Seja $n$ o número de usuários necessário para que o estacionamento tenha lucro; logo:
$3x + 3n > 320$
Para $x = 80$, temos:
$3 \cdot 80 + 3n > 320 \Rightarrow n > 26{,}66...$
Como $n \in \mathbb{N}$, temos $n = 27$.
alternativa c

**17.** $f$ é positiva para:
- $x > 0$ e $2p + 3 > 0 \Rightarrow p > -\frac{3}{2}$
- $x < 0$ e $2p + 3 < 0 \Rightarrow p < -\frac{3}{2}$

**18.** A reta $s$ passa pelos pontos $(-3, 0)$ e $(0, 2)$.
Para $x = -3$, temos $y = 0$. Logo:
$0 = a \cdot (-3) + b$ (I)
Para $x = 0$, temos $y = 2$. Logo:
$2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 2$
Substituindo $b$ por 2 em (I), obtemos:
$-3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$
Portanto, a lei da função correspondente a essa reta é $s(x) = \frac{2}{3}x + 2$.
A reta $r$ passa pelos pontos $(-3, 2)$ e $(0, -4)$.
Para $x = -3$, temos $y = 2$. Logo:
$2 = a \cdot (-3) + b$ (I)
Para $x = 0$, temos $y = -4$. Logo:
$-4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -4$
Substituindo $b$ por $-4$ em (I), obtemos:
$-3a - 4 = 0 \Rightarrow a = -2$
Portanto, a lei da função correspondente a essa reta é $r(x) = -2x - 4$.
No ponto $P$, temos $s(x) = r(x)$; então:

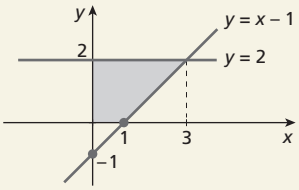
$$\frac{2}{3}x + 2 = -2x - 4 \Rightarrow \frac{2}{3}x + 2x = -4 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}x = -6 \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

Assim, $s\left(-\frac{9}{4}\right) = r\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Portanto, as coordenadas do ponto $P$ são $\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

**19.** Traçamos no plano os gráficos das funções dadas.




Em seguida, determinamos o ponto de intersecção das duas retas dadas:
$x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$
Logo, o ponto de intersecção é (3, 2).
Assim, a área procurada pode ser determinada por:

$$\text{Área} = \frac{(3 + 1) \cdot 2}{2} = 4$$

alternativa c

## Autoavaliação

**1.** Como uma função afim é aquela cuja lei de formação obedece à forma $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, a sentença correta é $f(x) = -5 + x$.
alternativa b

**2.** $f(m) = m - 0{,}15m$
$f(m) = 0{,}85m$
alternativa b

**3.** Como $y = ax + b$ e passa por $(0, 0)$ e $(-1, -1)$, temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ -1 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Assim, $y = x$.
Portanto, é uma função linear, polinomial do 1º grau e identidade. Não é uma função constante.
alternativa a

**4.** As retas correspondentes a essas funções são concorrentes, pois:
$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$
$f(0) = g(0) = -1$
Os gráficos de $f$ e de $g$ interceptam-se no ponto $(0, -1)$.
alternativa c

**5.** Vaptvupt: $v(x) = 10 + 1 \cdot x$
Ligeirinho: $l(x) = 15 + 0{,}75x$
$v(x) < l(x) \Rightarrow 10 + x < 15 + 0{,}75x \Rightarrow 0{,}25x < 5 \Rightarrow x < 20$
alternativa d

**6.** $f(x)$ intercepta o eixo $x$ quando $f(x) = 0$; então:
$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$
$f(x)$ intercepta o eixo $y$ quando $x = 0$; então:
$f(0) = ax + b = a \cdot 0 + b = b$
Portanto, no ponto $(0, b)$ o gráfico da função intercepta o eixo $y$.
alternativa a

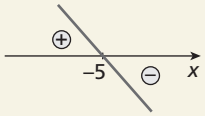
**7.** Observando o gráfico, percebemos que a função é decrescente e que $y > 0$ para $x < 2$ e $y < 0$ para $x > 2$.
alternativa b

**8.** $\frac{x - 1}{x + 2} \leq 2 \Rightarrow \frac{x - 1}{x + 2} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x - 1 - 2(x + 2)}{x + 2} \leq 0 \Rightarrow$

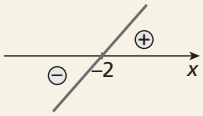
$$\Rightarrow \frac{-x - 5}{x + 2} \leq 0$$

Vamos considerar $f(x) = -x - 5$ e $g(x) = x + 2$.

Sinal de $f$




Sinal de $g$

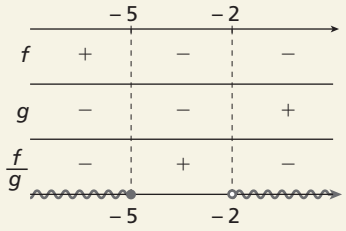



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Note que $-2$ não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$, ou seja: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

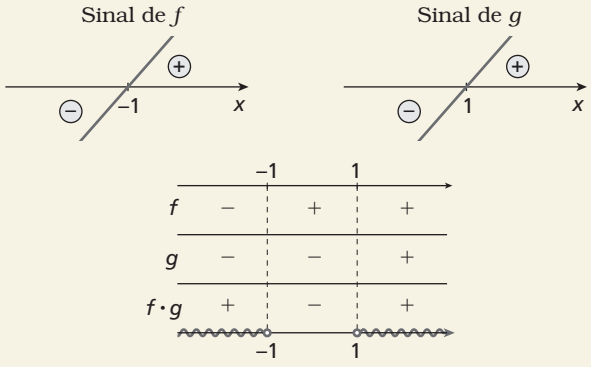
Quadro de sinais




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x > -2\}$.
alternativa c

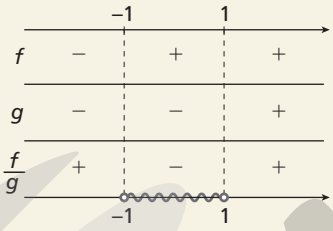
**9.** Nesse exercício, precisamos resolver item a item.
Para resolver os itens **a** e **b**, vamos considerar $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$.

**a)**




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

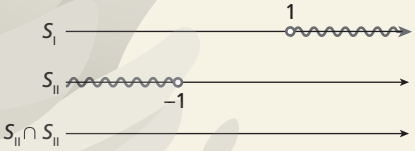
**b)**




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

**c)** $x + 2 > x + 1 > x$
$x + 2 > x + 1$, para $\forall x \in \mathbb{R}$
$x + 1 > x$, para $\forall x \in \mathbb{R}$

**d)** $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$




$S = S_I \cap S_{II} = \varnothing$
alternativa d

**10.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

Domínio de $f$: $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$g(x) = \sqrt{x - 3}$

Domínio de $g$: $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$ e $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.
alternativa a

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

## Exercícios propostos

**1.** **a)** $g$ é função quadrática, com $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$.
**b)** $h$ é função quadrática, com $a = 1$, $b = 0$ e $c = \sqrt{7}$.
**c)** $i$ não é função quadrática.
**d)** $m$ não é função quadrática.

**2.** **a)** $f(-1) = -(-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 6$

$f(-1) = -1 - 5 + 6$

$f(-1) = 0$

**b)** $f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 5 \cdot \sqrt{2} + 6$

$f(\sqrt{2}) = -2 + 5\sqrt{2} + 6$

$f(\sqrt{2}) = 4 + 5\sqrt{2}$

**c)** $f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 6$

$f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{25} - 4 + 6 = \frac{34}{25}$

**d)** $-x^2 + 5x + 6 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1$ ou $x = 6$

**e)** $-x^2 + 5x + 6 = \frac{49}{4} \Rightarrow -4x^2 + 20x - 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

**f)** $-x^2 + 5x + 6 = 20 \Rightarrow -x^2 + 5x - 14 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-14) = -31$

Como $\Delta < 0$, não existe $x$ real que satisfaça a equação $f(x) = 20$.

- Analisando esses valores, não podemos determinar em quais intervalos a função é crescente ou decrescente.
- A construção do gráfico dessa função facilitaria sua análise.

*Comentário*: O objetivo das perguntas apresentadas logo após os itens é propiciar uma reflexão sobre a análise de uma função a partir de alguns pontos e conectar esse conteúdo com o que será explorado adiante.

**3.** $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = c = -4 \Rightarrow c = -4$

$f(3) = 9a + 3b - 4 = 8 \Rightarrow 9a + 3b = 12$

$f(-2) = 4a - 2b - 4 = 4 \Rightarrow 4a - 2b = 8$

$\begin{cases} 9a + 3b = 12 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18a + 6b = 24 \\ 12a - 6b = 24 \end{cases}$

$30a + 0b = 48 \Rightarrow a = \frac{48}{30} = \frac{8}{5}$

$4 \cdot \frac{8}{5} - 2b = 8 \Rightarrow 2b = -\frac{8}{5} \Rightarrow b = -\frac{4}{5}$

$f(x) = \frac{8}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 4$

$f(-3) = \frac{8}{5}(-3)^2 - \frac{4}{5}(-3) - 4 = \frac{64}{5}$

**4.** **a)** $f(x) = (2p - 3)x^2 + 7xp + 2$

Para $f$ ser uma função quadrática, devemos ter:

$2p - 3 \neq 0 \Rightarrow p \neq \frac{3}{2}$

**b)** $g(x) = [(3p + 5)(p + 7)]x^2 + 3x + 11$

Para $g$ ser uma função quadrática, devemos ter:

$(3p + 5)(p + 7) \neq 0 \Rightarrow 3p + 5 \neq 0$ e $p + 7 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

**5.** **a)** Grupo de 2 pessoas: 2 *e-mails*

Grupo de 3 pessoas: 6 *e-mails* (3 · 2)

Grupo de 4 pessoas: 12 *e-mails* (4 · 3)

Grupo de 10 pessoas: 90 *e-mails* (10 · 9)

**b)**

| Número de pessoas do grupo | *E-mails* enviados |
|---|---|
| 2 | 2 · (2 − 1) |
| 3 | 3 · (3 − 1) |
| 4 | 4 · (4 − 1) |
| 10 | 10 · (10 − 1) |

**c)** Cada integrante do grupo envia um *e-mail* para todos os integrantes desse grupo, menos para ele próprio, ou seja, sendo $n$ o número de pessoas do grupo, o número de *e-mails* enviados será: $n \cdot (n - 1)$

**d)** $n \cdot (n - 1) = 132$

$n^2 - n = 132$

$n^2 - n - 132 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$n = \frac{1 \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n = 12$ ou $n = -11$ (não serve)

Portanto, no grupo há 12 integrantes.

*Comentário*: Esse exercício conduz os alunos, de maneira informal, ao raciocínio combinatório por meio da aplicação do princípio multiplicativo. A resolução da equação do 2º grau para a obtenção do zero de uma função quadrática, que modela uma situação da Combinatória, passa a ser vista pelos alunos como ferramenta útil na resolução de problemas.

**6.** **a)** A área $A$ do piso compreende a área de quatro quadrados de lado $x$, de dois retângulos de largura $x$ e comprimento 12 m e de dois retângulos de largura $x$ e comprimento 20 m. Então, a lei de formação é:

$A(x) = 4 \cdot x^2 + 2 \cdot 12 \cdot x + 2 \cdot 20 \cdot x$

$A(x) = 4x^2 + 64x$

**b)** Para $x = 3$, temos:

$A(3) = 4 \cdot 3^2 + 64 \cdot 3 \Rightarrow A(3) = 228$

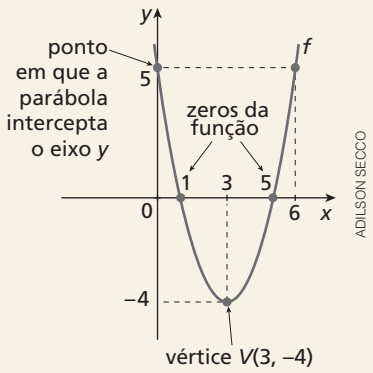
Portanto, a área será 228 m².

MODERNA

**7. a)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

| $x$ | $y = f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 0 |
| 3 | −4 |
| 5 | 0 |
| 6 | 5 |

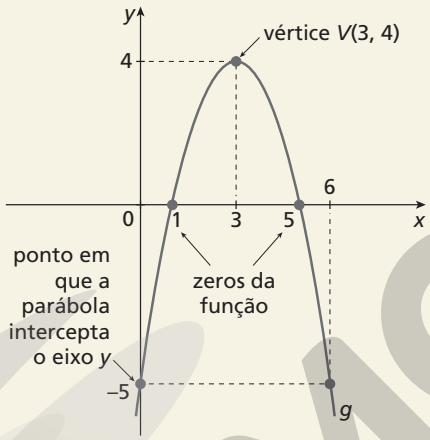



ADILSON SECCO

**b)** $g(x) = -x^2 + 6x - 5$

Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

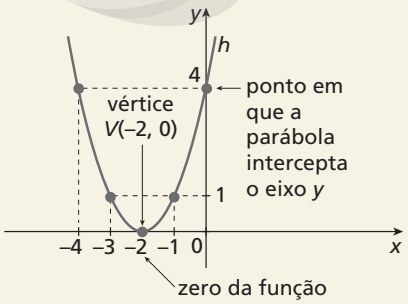
| $x$ | $y = g(x)$ |
|---|---|
| 0 | −5 |
| 1 | 0 |
| 3 | 4 |
| 5 | 0 |
| 6 | −5 |




**c)** $h(x) = x^2 + 4x + 4$

Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

| $x$ | $y = h(x)$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| −1 | 1 |
| −2 | 0 |
| −3 | 1 |
| −4 | 4 |

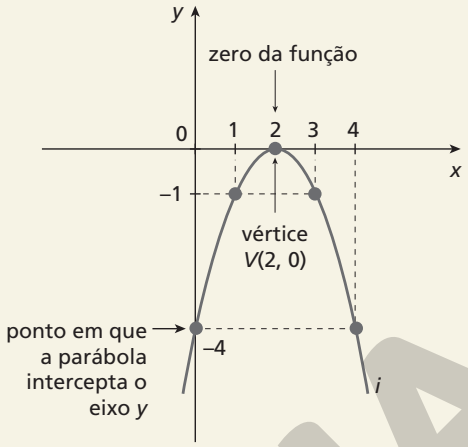



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**d)** $i(x) = -x^2 + 4x - 4$

Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

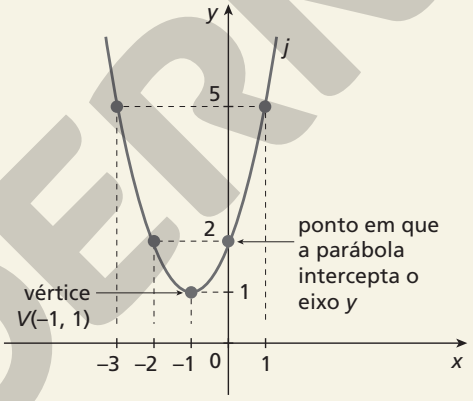
| $x$ | $y = i(x)$ |
|---|---|
| 0 | −4 |
| 1 | −1 |
| 2 | 0 |
| 3 | −1 |
| 4 | −4 |




**e)** $j(x) = x^2 + 2x + 2$

Concavidade voltada para cima ($a = 1 > 0$).

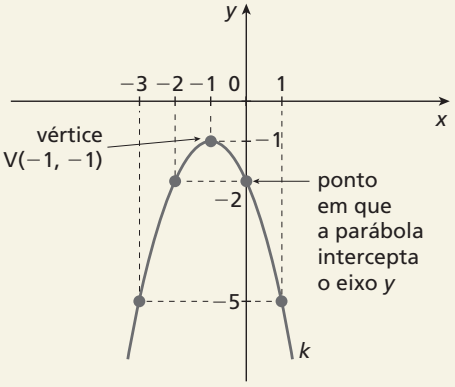
| $x$ | $y = j(x)$ |
|---|---|
| −3 | 5 |
| −2 | 2 |
| −1 | 1 |
| 0 | 2 |
| 1 | 5 |




**f)** $k(x) = -x^2 - 2x - 2$

Concavidade voltada para baixo ($a = -1 < 0$).

| $x$ | $y = k(x)$ |
|---|---|
| −3 | −5 |
| −2 | −2 |
| −1 | −1 |
| 0 | −2 |
| 1 | −5 |



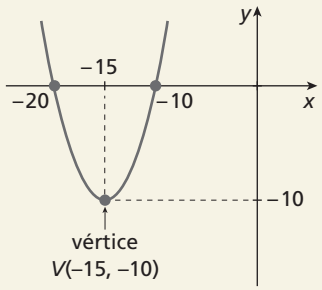

| Concavidade voltada para cima ($a > 0$) | Concavidade voltada para baixo ($a < 0$) |
|---|---|
| $f$, $h$ e $j$ | $g$, $i$ e $k$ |

| Dois zeros da função | Um zero da função | Nenhum zero da função |
|---|---|---|
| $f$ e $g$ | $h$ e $i$ | $j$ e $k$ |

*Comentário*: Ao final do exercício, incentive os alunos a pensar sobre o máximo e o mínimo de uma função quadrática, explorados na determinação do vértice.

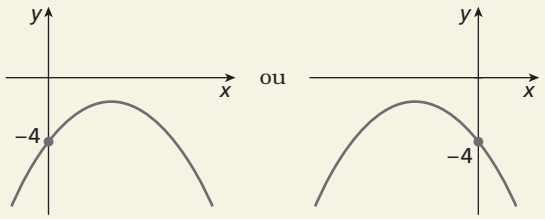
MODERNA

**8. a)**




Concavidade voltada para cima.

**b)**




Concavidade voltada para baixo.

Observe que, como passa por (0, −4), se a concavidade fosse voltada para cima, a função apresentaria dois zeros, o que não é o caso.

**9. a)** $f(x) = kx^2 - 2x + 10$

Para o gráfico ter a concavidade voltada para cima, o coeficiente de $x^2$ deve ser positivo: $k > 0$

Para o gráfico ter a concavidade voltada para baixo, o coeficiente de $x^2$ deve ser negativo: $k < 0$

**b)** $f(x) = \left(\frac{k-5}{k+1}\right)x^2 - 20$

Concavidade para cima:

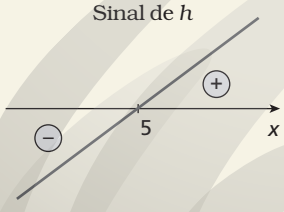
$\frac{k-5}{k+1} > 0$

Concavidade para baixo:

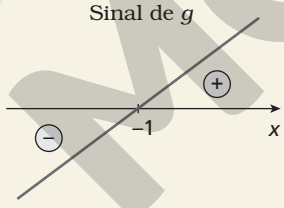
$\frac{k-5}{k+1} < 0$

Sejam $h(k) = k - 5$ e $g(k) = k + 1$.

Sinal de $h$




Sinal de $g$




Quadro de sinais

| | | −1 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | − | | − | | + |
| $g$ | − | | + | | + |
| $\frac{h}{g}$ | + | ‖ | − | ‖ | + |

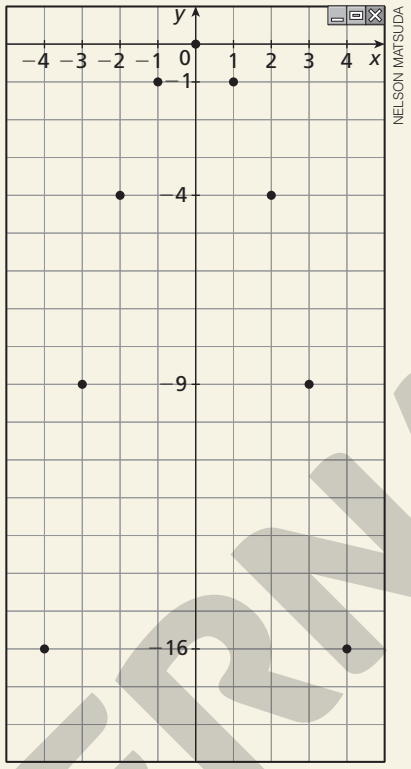
Então:

- se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
- se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

*Comentário*: No item **b**, pode-se retomar o conceito de inequação-quociente.

**10. a)** Respostas pessoais.

**b)**




NELSON MATSUDA

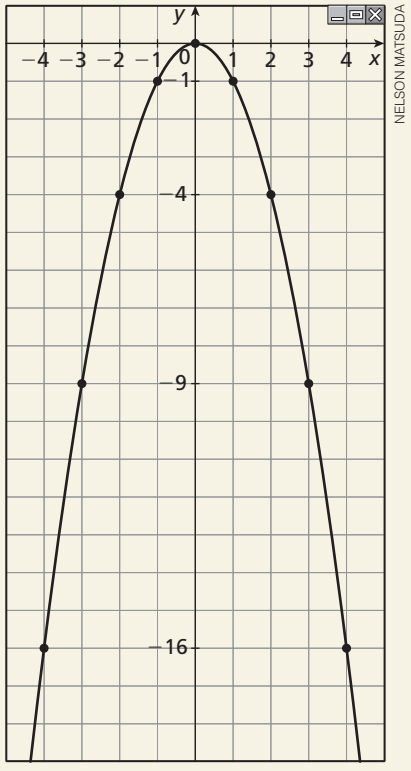
Espera-se que os alunos percebam que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

**c)** Espera-se que os alunos percebam que existe uma parábola que passa pelos pontos. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para baixo.

**d)** $g(1) = -1 \Rightarrow a \cdot 1^2 = -1 \Rightarrow a = -1$

Portanto, $g(x) = -x^2$.

**e)**




NELSON MATSUDA

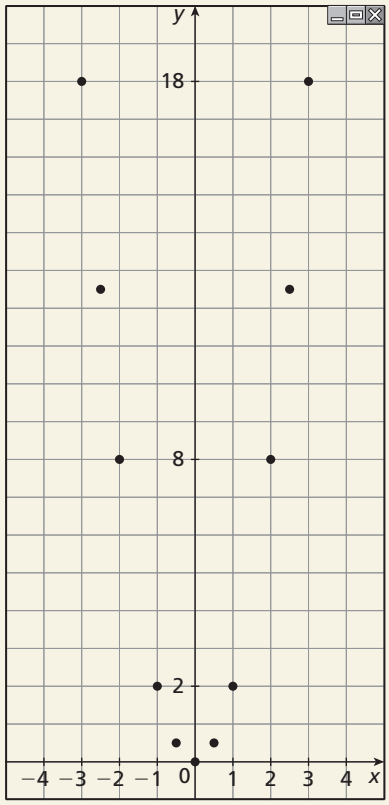
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**11. I)**

**a)** Resposta pessoal.

**b)**



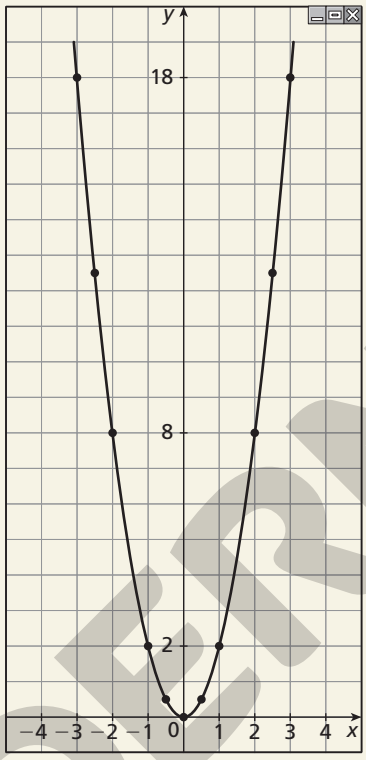

Espera-se que os alunos percebam que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

**c)** Espera-se que os alunos percebam que existe uma parábola que passa pelos pontos. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para cima.

**d)** $g(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow a = 2$

Portanto, $g(x) = 2x^2$.

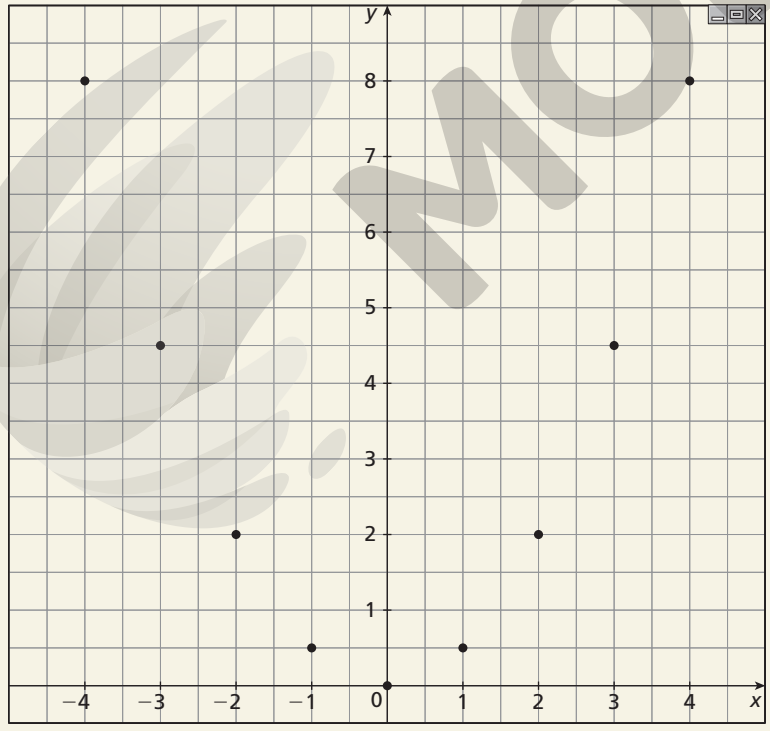
**e)**




**II)**

**a)** Resposta pessoal.

**b)**




Espera-se que os alunos percebam que os pontos são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

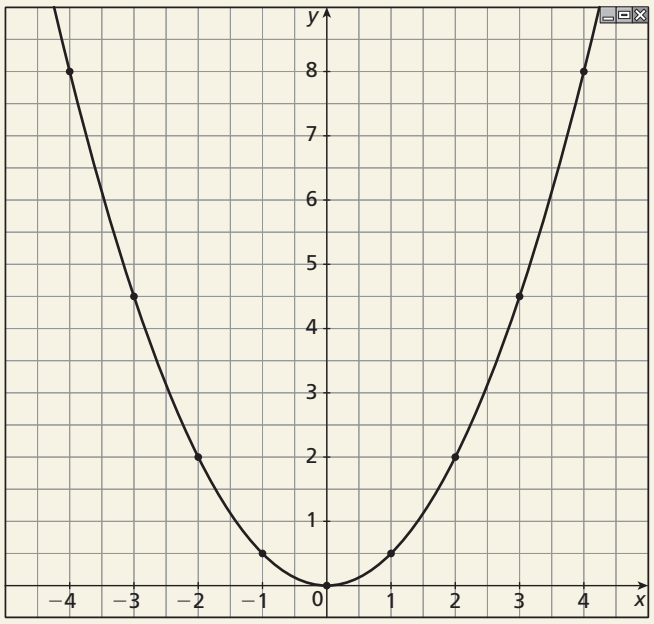
MODERNA

**c)** Espera-se que os alunos percebam que existe uma parábola que passa pelos pontos. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para cima.

**d)** $g(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Portanto, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

**e)**




NELSON MATSUDA

**12. a)** $f(x) = -2x^2 + x - 1$

A parábola intercepta o eixo $y$ quando $x = 0$.

$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$

Logo, a parábola intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, -1)$.

**b)** $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

$f(0) = \frac{0^2}{3} - \frac{0}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

As coordenadas do ponto no qual a parábola intercepta o eixo $y$ são $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

**c)** $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(0) = 0^2 + 0 = 0$

As coordenadas do ponto no qual a parábola intercepta o eixo $y$ são $(0, 0)$.

- Resposta pessoal.

*Comentário*: A pergunta apresentada no fim da questão tem por objetivo fazer com que os alunos percebam a importância do ponto $(0, c)$, que intercepta o eixo $y$, pois ele pode ser usado como referência para a obtenção do vértice da parábola.

**13. a)** $g(x) = x^2 + 3x + 2$

Vamos resolver a equação: $x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = -2$ e $x_2 = -1$

Os zeros da função são $-2$ e $-1$.

**b)** $g(x) = 2x^2 + x + 1$

Vamos resolver a equação: $2x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7 < 0$

Como $\Delta < 0$, a função não tem zeros reais.

**c)** $g(x) = -9x^2 + 6x - 1$

Vamos resolver a equação: $-9x^2 + 6x - 1 = 0$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$

O zero da função é $\frac{1}{3}$.

- Resposta pessoal.

*Comentário*: Espera-se que os alunos percebam a importância dos zeros da função na construção do respectivo gráfico.

MODERNA

**14.** Para que uma função não tenha zeros, seu discriminante deve ser negativo.

**a)** $h(x) = kx^2 - x + 25$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot k \cdot 25 = 1 - 100k$

$1 - 100k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{100}$

**b)** $h(x) = 2x^2 - 5x + k$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 25 - 8k$

$25 - 8k < 0 \Rightarrow k > \frac{25}{8}$

**15.** $f(x) = ax^2 + bx + 3$

**a)** Como 1 e 3 são zeros da função, temos que os pontos em que a parábola intercepta o eixo $x$ são (1, 0) e (3, 0). Assim:

$f(1) = 0$ e $f(3) = 0$

$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 \Rightarrow a + b + 3 = 0$ (I)

$f(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 \Rightarrow 9a + 3b + 3 = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$\begin{cases} a + b + 3 = 0 \\ 9a + 3b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$ e $b = -4$

**b)** Como $-1$ e $-3$ são zeros da função, temos que os pontos em que a parábola intercepta o eixo $x$ são $(-1, 0)$ e $(-3, 0)$. Assim:

$f(-1) = 0$ e $f(-3) = 0$

$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b + 3 = 0$ (I)

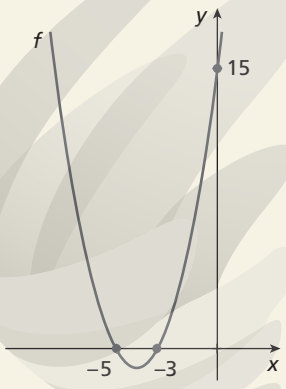
$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9a - 3b + 3 = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$\begin{cases} a - b + 3 = 0 \\ 9a - 3b + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$ e $b = 4$

**16. a)**




A parábola intercepta o eixo $y$ no ponto (0, 15). Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo:

$f(x) = ax^2 + bx + 15$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Notamos também que a parábola intercepta o eixo $x$ nos pontos $(-5, 0)$ e $(-3, 0)$. Então:

$f(-5) = 0$ e $f(-3) = 0$

$f(-5) = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25a - 5b + 15 = 0$ (I)

$f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 15 \Rightarrow$

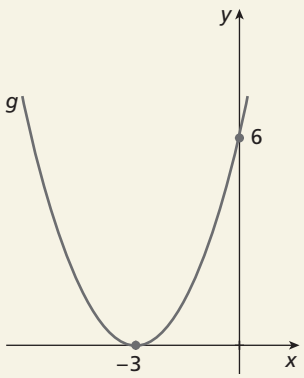
$\Rightarrow 9a - 3b + 15 = 0$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos:

$\begin{cases} 25a - 5b + 15 = 0 \\ 9a - 3b + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$ e $b = 8$

Portanto, a lei da função é $f(x) = x^2 + 8x + 15$.

**b)**




A parábola intercepta o eixo $y$ no ponto (0, 6). Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo:

$g(x) = ax^2 + bx + 6$, com $a, b \in \mathbb{R}$

A parábola intercepta o eixo $x$ em um único ponto, de coordenadas $(-3, 0)$; então, $-3$ é o zero da função.

$g(-3) = 0$

$g(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9a - 3b + 6 = 0$ (I)

Como a parábola intercepta o eixo $x$ em um único ponto, temos $\Delta = 0$. Assim:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot 6 = 0 \Rightarrow b^2 = 24a \Rightarrow a = \frac{b^2}{24}$ (II)

Substituindo a equação (II) na equação (I), obtemos:

$9 \cdot \left(\frac{b^2}{24}\right) - 3b + 6 = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}b^2 - 3b + 6 = 0$

Resolvendo essa equação, encontramos $b = 4$.

Pela equação (II), temos: $a = \frac{4^2}{24} = \frac{2}{3}$

Portanto, a lei da função é: $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

**17.** Como a parábola tangencia o eixo $x$, a função $f$, tal que $f(x) = 2x^2 - cx + (c - 2)$, tem um zero real duplo; então:

$\Delta = 0$

$\Delta = c^2 - 8(c - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 - 8c + 16 = 0 \Rightarrow (c - 4)^2 = 0 \Rightarrow c = 4$

Logo, $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$. Calculando $f(2)$, temos:

$f(2) = 8 - 8 + 2 = 2$

Portanto, $f(f(2)) = f(2) = 2$.

**18.** $f(x) = -mx^2 + 2m^2$

- Como o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo, sabemos que o coeficiente de $x^2$ é negativo, ou seja: $-m < 0 \Rightarrow m > 0$
- O gráfico de $f$ intercepta o eixo $y$ em (0, 18); então, o coeficiente $c = 2m^2$ é igual a 18. Logo:
  $2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow$
  $\Rightarrow m = 3$ ou $m = -3$
  Como $m > 0$, temos $m = 3$.
- Como $m = 3$, $f(x) = -3x^2 + 18$. O gráfico intercepta o eixo $x$ quando $y = 0$; então:
  $-3x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

  Portanto, os pontos são $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{6}, 0\right)$.

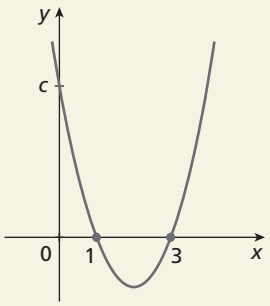
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**19.** Na primeira pergunta, é importante os alunos perceberem que o ponto de intersecção da parábola com o eixo $y$ tem não só ordenada igual ao coeficiente $c$, mas abscissa nula, ou seja, $f(0) = c$. Por isso, o procedimento justifica-se.

Respostas possíveis para os itens I, II e III:

I.




$f(x) = x^2 - 4x - c$

II. Observando o gráfico, a parábola cruza o eixo $y$ quando $x = 0$.

III. $f(x) = x^2 - 4x + c$

$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + c$

$f(0) = c$

*Comentário*: Espera-se que os alunos percebam que a ordenada do ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$ é o coeficiente $c$ da lei da função quadrática que corresponde a essa parábola.

A princípio, essa é uma questão aberta, uma vez que se pede aos alunos que argumentem livremente sobre o ponto de intersecção do eixo $y$ com o gráfico de uma função quadrática qualquer. Depois, os alunos são conduzidos a seguir passos procedimentais para confrontar a argumentação que fizeram anteriormente com a conclusão decorrente desses passos, isto é, que o ponto de intersecção é $(0, c)$.

**20.** Como essa atividade é de caráter investigativo, muitas são as relações possíveis para o estabelecimento de conclusões. A seguir, são apresentados exemplos de argumentos.

**a)** Sabendo que não há zeros da função e a parábola intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 5)$, concluímos que toda a parábola está acima do eixo $x$. Ou seja, para qualquer valor real de $x$, temos $f(x)$ positivo.

**b)** Sabendo que $(-5, 0)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo $x$ e a concavidade da parábola é voltada para baixo, concluímos que toda a parábola, com exceção do ponto $(-5, 0)$, está abaixo do eixo $x$. Ou seja, não há valor real de $x$ para o qual o valor de $f(x)$ seja positivo.

**c)** Se $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ são os pontos em que a parábola intercepta o eixo $x$ e $(0, 3)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que qualquer $x$ real que esteja no intervalo $]-3, 3[$ tem o valor de $f(x)$ correspondente positivo.

**d)** Se $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ são os pontos em que a parábola intercepta o eixo $x$ e $(0, -2)$ é o ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$, concluímos que a concavidade da parábola é voltada para baixo e que $f(x)$ é positivo para $-2 < x < -1$.

**e)** A função cuja lei é $f(x) = x^2 - 6x + 13$ não tem zeros reais ($\Delta < 0$) e, como a parábola dessa função intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 13)$, concluímos que a concavidade é voltada para cima. Então, para qualquer $x$ real, o valor de $f(x)$ correspondente é positivo.

*Comentário*: O objetivo aqui é apresentar um problema em que os alunos sintam a necessidade de aprender os procedimentos do estudo do sinal de uma função, que será o próximo tópico.

**21. a)** $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$

Primeiro, determinamos os zeros da função $g$:

$2x^2 + 3x + 7 = 0$

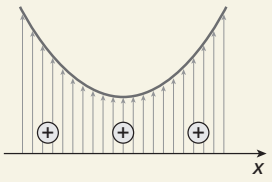
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 9 - 56 = -47 < 0$

Como o discriminante é negativo, a parábola não intercepta o eixo $x$.

Como o coeficiente de $x^2$ é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Então, $g(x) > 0$ para qualquer valor de $x$ real.

Esboço do gráfico




**b)** $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

Zeros da função $h$:

$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$

Como o coeficiente de $x^2$ é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Esboço do gráfico




Então: $\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$

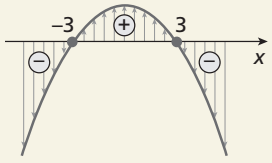
**c)** $i(x) = -x^2 + 9$

Zeros da função $i$:

$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

Como o coeficiente de $x^2$ é negativo, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Esboço do gráfico




Então: $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

*Comentário*: Ao chegar a essa parte do capítulo, os alunos já trabalharam bastante com gráficos de função quadrática; assim, seria interessante, se possível, que eles experimentassem um *software* de construção de gráficos.

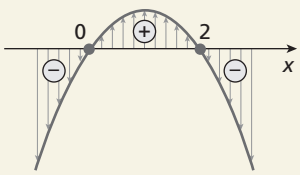
**22. a)** $f(x) = -x^2 + 2x$

Zeros da função $f$:

$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$

Como o coeficiente de $x^2$ é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Esboço do gráfico




Então, $f$ é positiva para $0 < x < 2$.

**b)** $g(x) = x^2 - 2x + 1$

Zeros da função $g$:

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

EDITORA

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Rightarrow x = 1$

Como o coeficiente de $x^2$ é positivo, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Esboço do gráfico



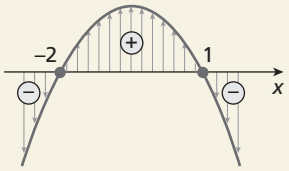

Logo, a função $g$ é positiva para qualquer $x \neq 1$.

**23. a)** $y > 0$ para $-2 < x < 1$ (gráfico acima do eixo $x$)

$y = 0$ para $x = -2$ ou $x = 1$ (pontos de intersecção com o eixo $x$)

$y < 0$ para $x < -2$ ou $x > 1$ (gráfico abaixo do eixo $x$)

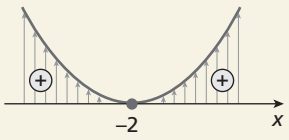
Esboço do gráfico




**b)** $y > 0$ para $x \neq -2$ (gráfico acima do eixo $x$)

$y = 0$ para $x = -2$ (ponto de intersecção com o eixo $x$)

Esboço do gráfico




**24.** Respostas possíveis:

**a)** $j_1(x) = x^2 - 3$

$j_2(x) = 2x^2 + 2$

$j_3(x) = -2x^2 - 1$

$j_4(x) = x^2 + 1$

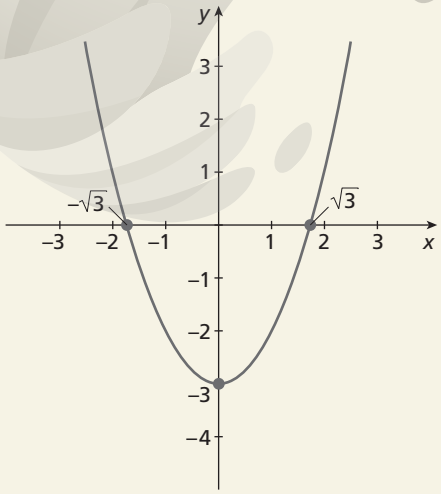
$j_5(x) = x^2 - 1$

$j_6(x) = -x^2 + 1$

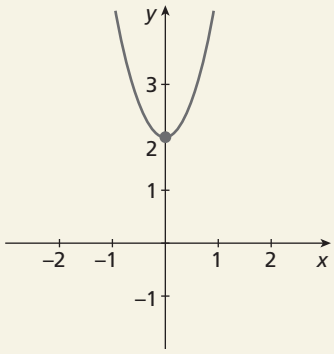
$j_7(x) = -x^2 - 1$

$j_8(x) = -3x^2 + 3$

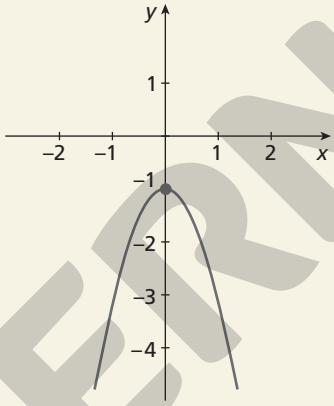
**b)** $j_1(x) = x^2 - 3$



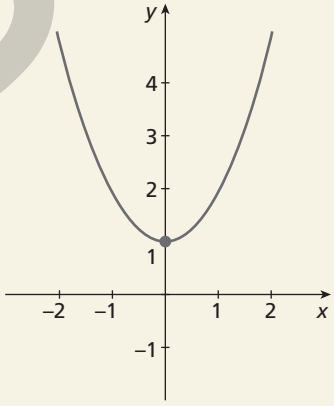

$j_2(x) = 2x^2 + 2$



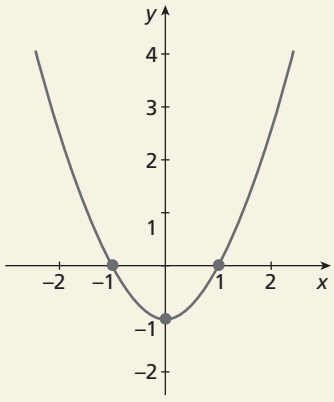

$j_3(x) = -2x^2 - 1$




$j_4(x) = x^2 + 1$



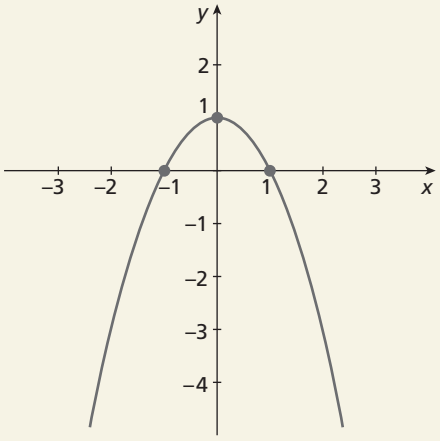

$j_5(x) = x^2 - 1$



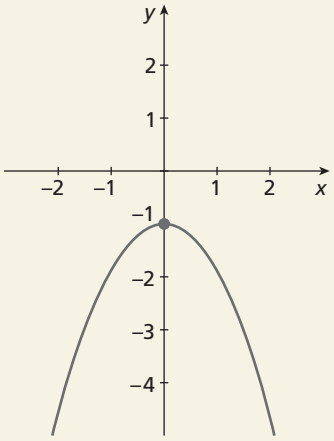

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

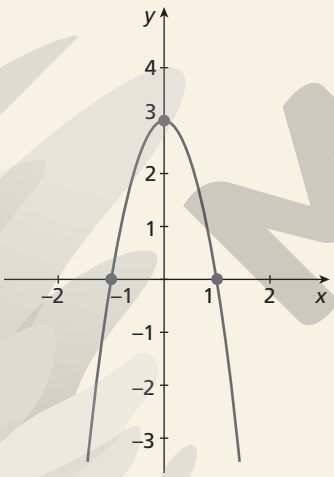
$j_6(x) = -x^2 + 1$




$j_7(x) = -x^2 - 1$




$j_8(x) = -3x^2 + 3$




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**c)** Comparando cada uma das leis com seu respectivo gráfico, percebe-se que uma função do tipo da função $j$ tem dois zeros reais quando os coeficientes $a$ e $c$ possuem sinais distintos.

**d)** Da mesma forma, percebe-se que uma função do tipo da função $j$ não tem zeros quando os coeficientes $a$ e $c$ possuem sinais iguais.

**e)** Espera-se que os alunos percebam que uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, tem o seguinte comportamento:

| $a > 0$ | |
|---|---|
| $c > 0$ | $c < 0$ |
| Nesse caso, a função $j$ é estritamente positiva. | Considerando que $x_1$ e $x_2$ são raízes de $j$, com $x_1 < x_2$, a função $j$ é:<br>• positiva nos intervalos $]-\infty, x_1[$ e $]x_2, +\infty[$;<br>• negativa no intervalo $]x_1, x_2[$.<br>Exemplo: casos $j_1(x)$ e $j_5(x)$ do item **b**. |

| $a < 0$ | |
|---|---|
| $c < 0$ | $c > 0$ |
| Nesse caso, a função $j$ é estritamente negativa. | Considerando que $x_1$ e $x_2$ são raízes de $j$, com $x_1 < x_2$, a função $j$ é:<br>• negativa nos intervalos $]-\infty, x_1[$ e $]x_2, +\infty[$;<br>• positiva no intervalo $]x_1, x_2[$.<br>Exemplo: casos $j_6(x)$ e $j_8(x)$ do item **b**. |

*Comentário*: Esse exercício pode ser feito em duplas. A troca dos gráficos esboçados tem como objetivo levar os alunos à percepção da relação entre os coeficientes $a$ e $c$ da lei da função quadrática dada por $j(x) = ax^2 + c$ e seu gráfico. A troca de respostas e a discussão de estratégias para realizar o estudo do sinal de uma função permite aos alunos praticar a oralidade e desenvolver a habilidade de argumentação.

**25. a)** $h(x) = -x^2 - 2x + 8$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (8) = 4 + 32 = 36$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-1)} = -1$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot (-1)} = 9$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(-1, 9)$.

**b)** $i(x) = x^2 - 2x - 8$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(1, -9)$.

**c)** $j(x) = x^2 + 2x - 3$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4 \cdot 1} = -4$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(-1, -4)$.

**d)** $k(x) = x^2 - 4x + 4$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

Utilizando as fórmulas do vértice, obtemos:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-0}{4} = 0$

Portanto, as coordenadas do vértice são (2, 0).

**26. a)** Como a função $h$ tem concavidade voltada para baixo, seu valor máximo é o $y_V = 9$. Como as funções $i$, $j$ e $k$ têm concavidade voltada para cima, não possuem valor máximo.

MODELO

**b)** Como as funções $i$, $j$ e $k$ têm concavidade voltada para cima, seus valores mínimos são seus $y$ do vértice, que são, respectivamente, $-9$, $-4$ e 0. A função $h$ não tem valor mínimo, pois sua concavidade está voltada para baixo.

**c)** Para que a função tenha valor máximo, o coeficiente de $x^2$ deve ser negativo ($a < 0$).

Para que a função tenha valor mínimo, o coeficiente de $x^2$ deve ser positivo ($a > 0$).

*Comentário*: Pela análise das funções apresentadas no exercício anterior, espera-se que os alunos identifiquem as características das parábolas que permitirão responder a essas questões. Essa atividade introduz os conceitos de valor máximo e valor mínimo, assuntos que serão explorados adiante.

No item **c**, espera-se que os alunos percebam que:

- a concavidade determinará se a função terá valor mínimo ($a > 0$) ou valor máximo ($a < 0$);
- o valor máximo ou mínimo será igual a $y_V$ em cada função.

**27. a)** Um dos zeros é $x_1 = 0$.

Sabe-se que $x_V$ é equidistante dos zeros da função e, nesse caso, $x_V = 4$.

Assim: $x_V - x_1 = x_2 - x_V \Rightarrow 4 - 0 = x_2 - 4 \Rightarrow x_2 = 8$

Logo, os zeros da função são $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$.

**b)** Seja $h(x) = ax^2 + bx + c$

$h(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (I)

$h(8) = 0 \Rightarrow 64a + 8b + c = 0 \Rightarrow 64a + 8b = 0$ (II)

$h(4) = 5 \Rightarrow 16a + 4b + c = 5 \Rightarrow 16a + 4b = 5$ (III)

Dividindo a equação (II) por 8, obtemos:

$8a + b = 0 \Rightarrow b = -8a$

Substituindo $b$ por $-8a$ na equação (III), obtemos:

$16a + 4 \cdot (-8a) = 5 \Rightarrow -16a = 5 \Rightarrow a = -\frac{5}{16}$

Como $b = -8a$, então: $b = -8 \cdot \left(-\frac{5}{16}\right) \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

Assim, a lei dessa função é $h(x) = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$.

**28.** $f(x) = -(m - 1)x^2 + 2x + n$

$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (2, 5)$

$x_V = \frac{-2}{-2(m-1)} = 2 \Rightarrow 2(m - 1) = 1 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

Então, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + n$.

Agora:

$y_V = \frac{-\left(4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot n\right)}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = 5 \Rightarrow \frac{4 + 2n}{2} = 5 \Rightarrow n = 3$

Logo, devemos ter $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$.

**29. a)** Uma característica comum entre as coordenadas do vértice das duas funções é que $x_V = 0$. É interessante que os alunos percebam, com esse caso particular, que em uma função do tipo $h(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$, sempre ocorrerá $x_V = 0$ e $y_V = c$.

**b)** Temos: $h(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ e $b = 0$

Assim: $x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = 0$, pois $b = 0$

Para encontrar $y_V$, basta calcular $f(x_V)$. Nesse caso:

$h(0) = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow h(0) = c$

Portanto, o vértice tem coordenadas $(0, c)$.

**30. a)** $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

Como $a > 0$, o gráfico da função $f$ tem concavidade voltada para cima. Portanto, a função tem valor mínimo.

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)]}{4 \cdot 2} = -\frac{81}{8}$

Assim, $-\frac{81}{8}$ é o mínimo da função $f$.

**b)** $h(x) = -\sqrt{5}x^2 - 5x + 1$

Como $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo. Portanto, a função tem valor máximo.

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[(-5)^2 - 4 \cdot \left(-\sqrt{5}\right) \cdot 1\right]}{4 \cdot \left(-\sqrt{5}\right)} = \frac{5\sqrt{5} + 4}{4}$

Assim, $\frac{5\sqrt{5} + 4}{4}$ é o valor máximo da função $h$.

**c)** $n(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4}$

Como $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. Portanto, a função tem valor mínimo.

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right]}{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{7}{18}$

Assim, $\frac{7}{18}$ é o valor mínimo da função $n$.

**31. a)** $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(25 - 4)}{4 \cdot 1} = -\frac{21}{4}$

A concavidade está voltada para cima; portanto, $y_V$ é ponto de mínimo. Então:

$\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{21}{4}\right\}$

**b)** $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(9 + 56)}{4 \cdot (-2)} = \frac{65}{8}$

A concavidade está voltada para baixo; portanto, $y_V$ é ponto de máximo. Então:

$\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{65}{8}\right\}$

**c)** $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(0 + 96)}{4 \cdot (-3)} = 8$

A concavidade está voltada para baixo; portanto, $y_V$ é ponto de máximo. Então:

$\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8\}$

**32. a)** $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 16\}$

A imagem indica que $y \leqslant 16$; então, concluímos que a função tem valor máximo.

**b)** Se a função tem valor máximo, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

**c)** $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = 16$

$-\Delta = 64a$

$-(64 - 48a) = 64a$

$a = -4$

**d)** $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

$g(x) = -4x^2 + 8x + 12$

$x_V = \frac{-8}{-8} = 1$ e $y_V = 16$

Logo, $V(1, 16)$.

MODERNA

**33.** $f(x) = 3x^2 + 2mx + m$

Se $\frac{4}{3}$ é o valor mínimo da função, então a parábola tem concavidade voltada para cima e $y_V = \frac{4}{3}$. Assim:

$\frac{4}{3} = \frac{-\Delta}{4a}$

$\frac{4}{3} = \frac{-[(2m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m]}{4 \cdot 3}$

$\frac{4}{3} = \frac{-4m^2 + 12m}{12}$

$m^2 - 3m + 4 = 0$

O discriminante dessa equação é $-7$, ou seja, é negativo.

Logo, não existe $m$ real tal que $\frac{4}{3}$ seja o valor mínimo de $f$.

**34.** Como os vértices das parábolas são simétricos em relação aos eixos, temos:

$V_g = \left(2, \frac{3}{2}\right)$; $V_f = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$; $V_h = \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ e

$V_i = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$

Distância entre $V_g$ e $V_i$: $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

Distância entre $V_g$ e $V_f$: $2 + 2 = 4$

Portanto: $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h = 3 \cdot 4 = 12$

**35.** **a)** $y_V = 5$ (valor máximo atingido)

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$

Mas, como $c = 0$, temos:

$y_V = \frac{-b^2}{4a} = 5 \Rightarrow -b^2 = 20a \Rightarrow b^2 = -20a$ (I)

$x_V = 1$ (tempo para atingir a altura máxima)

$x_V = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$(-2a)^2 = -20a \Rightarrow 4a^2 + 20a = 0 \Rightarrow$

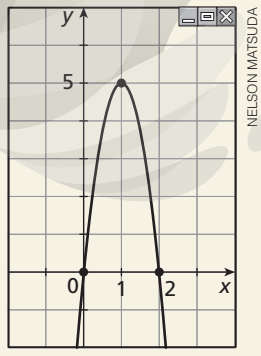
$\Rightarrow 4a \cdot (a + 5) = 0 \Rightarrow a = -5$ ou $a = 0$ (não serve)

Portanto, $a = -5$ e $b = 10$, e a lei dessa função é $h(t) = -5t^2 + 10t$.

**b)** $h(2) = -5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 = 0$

A altura é 0 m.

**c)**




NELSON MATSUDA

*Comentário*: Comente com os alunos que o *software* traça o gráfico da função cuja lei é $h(t) = -5t^2 + 10t$, sem considerar as restrições da situação. Nesse caso, a função não assume valores para $x < 0$ nem para $y < 0$.

**d)** Pelo gráfico, percebemos que o tempo de subida é igual ao tempo de descida.

*Comentário*: É interessante trabalhar uma questão interdisciplinar como esta (há outras ao longo da obra, como os exercícios **44** e **45**) com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

**36.** **a)** O custo de produção de 100 t de balas é dado por:

$c(100) = \frac{100^2}{10.000} - \frac{100}{10} + 30 \Rightarrow c(100) = 21$

Logo, o custo é igual a R$ 21,00 por quilograma.

**b)** Da mesma forma:

$c(200) = \frac{200^2}{10.000} - \frac{200}{10} + 30 \Rightarrow c(200) = 14$

Logo, o custo é igual a R$ 14,00 por quilograma.

**c)** Espera-se que os alunos percebam que essa afirmação é falsa, pois o custo da produção de pacotes de um quilograma de balas está relacionado com o número de toneladas de balas produzidas por meio de uma função quadrática.

**d)** Como a função que determina o custo é quadrática, com $a > 0$, o custo mínimo é dado por $x_V$. Assim:

$x_V = \frac{-\left(-\frac{1}{10}\right)}{2 \cdot \frac{1}{10.000}} \Rightarrow x_V = 500$

Logo, o custo mínimo, por quilograma, é obtido quando se produzem 500 toneladas de balas.

**e)** O valor do custo mínimo é dado por:

$c(500) = \frac{500^2}{10.000} - \frac{500}{10} + 30 \Rightarrow c(500) = 5$

Logo, o custo mínimo é igual a R$ 5,00.

**37.** A área pintada, em metro quadrado, é dada por:

$A(x) = 6 \cdot 4 - \frac{x \cdot 4x}{2} - \frac{2 \cdot (6 - 4x)}{2}$

$A(x) = 24 - 2x^2 - 6 + 4x$

$A(x) = -2x^2 + 4x + 18$

Assim, a área é dada por uma função do 2º grau com representação por uma parábola com concavidade voltada para baixo. Logo, a área será máxima para a abscissa do vértice da parábola.

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$

Logo, a área será máxima para $x = 1$.

alternativa c

**38.** No exercício anterior, o valor da área máxima é dado pela ordenada do vértice da parábola.

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 18]}{4 \cdot (-2)}$

$y_V = \frac{-[16 + 144]}{-8} = 20$

Logo, a área máxima pintada é 20 m².

**39.** A arrecadação diária, em real, a cada $x$ reais que ela reduzir no preço, é dada por:

$f(x) = (200 + 100 \cdot x) \cdot (10 - x)$

$f(x) = 2.000 - 200x + 1.000x - 100x^2$

$f(x) = -100x^2 + 800x + 2.000$

MODERNA

Assim, a arrecadação é dada por uma função do 2º grau com representação por uma parábola com concavidade voltada para baixo. Logo, a arrecadação máxima corresponde à ordenada do vértice da parábola.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[800^2 - 4 \cdot (-100) \cdot 2.000]}{4 \cdot (-100)}$$

$$y_V = \frac{-1.440.000}{-400} = 3.600$$

Portanto, a arrecadação máxima é R$ 3.600,00.
alternativa c

**40.** A arrecadação é máxima para $x = x_V$.

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-800}{2 \cdot (-100)} = 4$$

Portanto, a arrecadação é máxima quando a dona da lanchonete reduzir 4 reais no preço, ou seja, vender o combo por R$ 6,00.

*Comentário*: Nesse exercício, verifique se os alunos não comentem o erro de responder que ela deve vender cada combo por R$ 4,00. Lembre-os que, na função, $x$ representa a redução no preço do combo, e não o seu preço.

**41.** Resposta pessoal.

**42.** **a)** $f(x) = -4x^2 + 6x - 9$

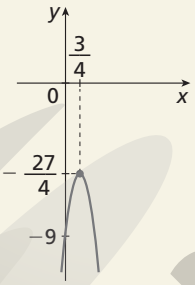
Zeros da função: não há, pois $\Delta = -108 < 0$.

Coeficiente $c$: $-9$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot (-4)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-108)}{4 \cdot (-4)} = -\frac{108}{16} = -\frac{27}{4}$$

Vértice: $\left(\frac{3}{4}, -\frac{27}{4}\right)$




**b)** $g(x) = x^2 + 6x$

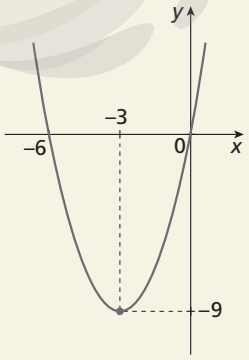
Zeros da função: $-6$ e $0$

Coeficiente $c$: $0$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4 \cdot 1} = -9$$

Vértice: $(-3, -9)$




**c)** $h(x) = \frac{3x^2}{5} + x + 5$

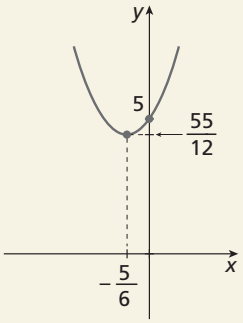
Zeros da função: não há, pois $\Delta = -11 < 0$.

Coeficiente $c$: 5

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{3}{5}} = -\frac{5}{6}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-11)}{4 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{55}{12}$$

Vértice: $\left(-\frac{5}{6}, \frac{55}{12}\right)$




**d)** $i(x) = 2x^2 + 7x - 4$

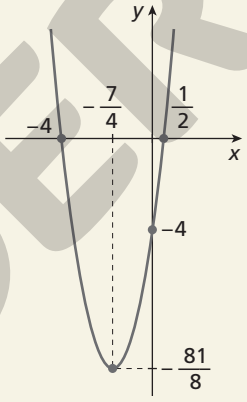
Zeros da função: $-4$ e $\frac{1}{2}$

Coeficiente $c$: $-4$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = -\frac{7}{4}$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{81}{8}$$

Vértice: $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{81}{8}\right)$




**e)** $j(x) = x^2 + 3$

Zeros da função: não há, pois $\Delta = -12 < 0$.

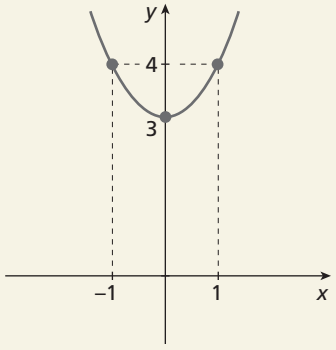
Coeficiente $c$: 3

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2} = 0$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-12)}{4} = 3$$

Até agora temos apenas o vértice $V(0, 3)$.

Nesse caso, vamos determinar as coordenadas de mais dois pontos, $j(1)$ e de seu simétrico $j(-1)$: $j(1) = j(-1) = 4$. Logo, a parábola passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(-1, 4)$.




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**f)** $l(x) = -2x^2 - 2$

Zeros da função: não há, pois $\Delta = -16 < 0$.

Coeficiente $c$: $-2$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(-2)} = 0$

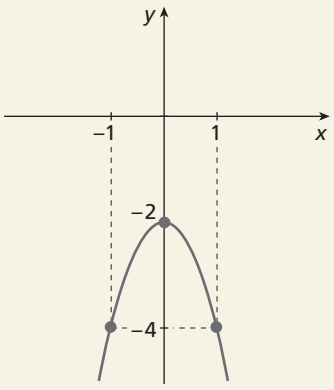
$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-16)}{4(-2)} = -2$

Até agora temos apenas o vértice $V(0, -2)$.

Vamos determinar as coordenadas de mais dois pontos, $l(1)$ e de seu simétrico $l(-1)$:

$l(1) = l(-1) = -4$

Logo, a parábola passa pelos pontos $(1, -4)$ e $(-1, -4)$.




**43.** **a)** Seja $x$ o valor do aumento, em real. Então, a sentença que apresenta o número de usuários em função da quantidade de reais que se aumenta na mensalidade é $60.000 - 400x$.

**b)** Sendo $x$ o valor do aumento, então a sentença que determina o valor de uma mensalidade, em real, em função do aumento é $75 + x$.

**c)** Atualmente, a empresa arrecada um total de 4.500.000 reais ($60.000 \cdot 75$) com as mensalidades.

Indicando por $x$ o aumento (em real) na mensalidade, sabemos que a empresa perderá $400x$ assinantes. Assim, a função que determina o faturamento mensal (em real) é dada por:

$y = (60.000 - 400x) \cdot (75 + x)$

$y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

**d)** Para determinar o aumento do faturamento máximo, devemos calcular o valor $x_V$ dessa função:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-30.000}{2 \cdot (-400)} = 37,5$

Logo, o aumento deve ser de R$ 37,50 para que a arrecadação mensal seja máxima.

**e)** Arrecadação máxima: $y_V = f(37,50)$

$f(37,50) = 4.500.000 + 30.000 \cdot 37,50 - 400(37,50)^2$

$f(37,50) = 5.062.500$

A arrecadação máxima, em um mês, será R$ 5.062.500,00.

**f)** Valor da mensalidade com o aumento:

$p = 75,00 + 37,50 = 112,50$

Número de assinantes para arrecadação máxima:

$\frac{5.062.500}{112,50} = 45.000$

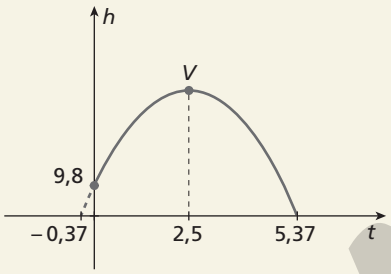
Logo, a empresa deverá ter 45.000 assinantes.

**44.** Vamos construir o gráfico correspondente à função $h(t) = -4,9t^2 + 24,5t + 9,8$

Zeros da função: $-0,37$ e $5,37$ (aproximadamente)

Coeficiente $c$: $9,8$

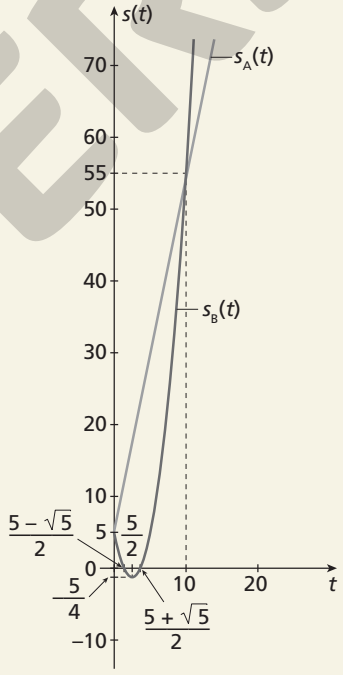
$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-24,5}{2 \cdot (-4,9)} = 2,5$




Portanto, o projétil está subindo no intervalo de 0 s a 2,5 s e descendo no intervalo de 2,5 s a 5,37 s, aproximadamente.

**45.** Esboçando os gráficos de $s_A(t)$ e $s_B(t)$, para $t \geq 0$, em um mesmo plano cartesiano é possível visualizar algumas informações importantes.

$s_A(t) = 5 + 5t$ e $s_B(t) = 5 - 5t + t^2$




$s_A(t)$ intercepta $s_B(t)$ em dois pontos, correspondentes a $s_A(t) = s_B(t)$. Vamos determiná-los:

$s_A(t) = s_B(t) \Rightarrow 5 + 5t = 5 - 5t + t^2 \Rightarrow t^2 - 10t = 0$

Resolvendo essa última equação, encontramos $t = 0$ e $t = 10$, que são os valores de $t$ para os quais os dois móveis estão emparelhados. Ou seja, os móveis estão no mesmo ponto no instante de partida e 10 s após ela, quando o móvel B passa à frente do móvel A. Para $0 < t < 10$, temos $s_A(t) > s_B(t)$. Portanto, o móvel A fica à frente do móvel B no intervalo $]0, 10[$.

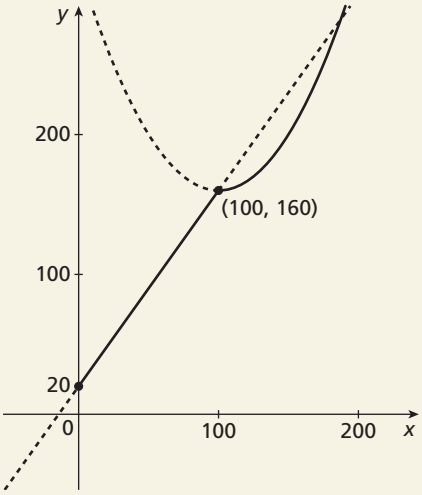
**46.** Para resolver esse problema, devemos encontrar o tempo decorrido para o forno atingir 48 °C e o tempo para atingir 200 °C.

Porém, é necessário determinar em que intervalo de tempo a temperatura estará a cada um desses valores.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Para isso, podemos traçar os gráficos das funções $f(t) = \frac{7}{5}t + 20$ e $g(t) = \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320$ usando um *software* de construção de gráficos e determinar o gráfico da função $T(t)$, destacado abaixo.




NELSON MATSUDA

Assim, a temperatura atinge 48 °C no intervalo $0 \leq t < 100$ e 200 °C no intervalo $t \geq 100$.

Logo:

- $T(t) = 48 \Rightarrow \frac{7}{5}t + 20 = 48 \Rightarrow t = 20$
- $T(t) = 200 \Rightarrow \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320 = 200 \Rightarrow t^2 - 200t + 7.500 = 0$

  $t = \frac{+200 \pm \sqrt{10.000}}{2} \Rightarrow t = 50$ ou $t = 150$

  Como $T(t) = \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320$ somente para $t \geq 100$, a solução t = 50 não convém.

Portanto, a peça deve ser colocada no forno aos 20 minutos e retirada aos 150 minutos, permanecendo no forno por 130 minutos.

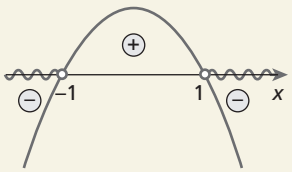
alternativa d

*Comentário*: No caso desse exercício, foi solicitado aos alunos que usassem um *software* de construção de gráficos; porém, como a questão original é de uma prova do Enem, os candidatos não puderam empregar esse recurso, devendo, portanto, fazer um esboço ou imaginar como seria o gráfico para resolver a questão.

**47. a)** $\underbrace{-x^2 + 1}_{f(x)} < 0$

Zeros de *f*:

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

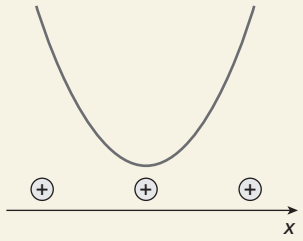



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

**b)** $\underbrace{2x^2 + 3x + 7}_{f(x)} \leq 0$

Zeros de *f*:

$2x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$, pois $\Delta = -47 < 0$

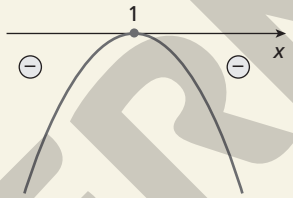



$S = \varnothing$

**c)** $\underbrace{-x^2 + 2x - 1}_{f(x)} \geq 0$

Zeros de *f*:

$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

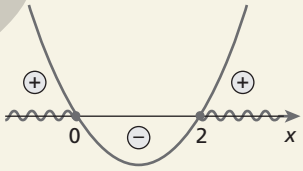



$S = \{1\}$

**d)** $x^2 + 2(x - 4) - 1 \leq 2x^2 - 9 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x}_{f(x)} \geq 0$

Zeros de *f*:

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

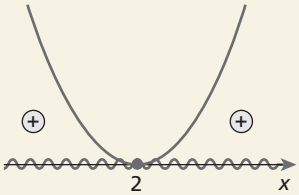



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$

**e)** $x^2 - 4x \geq -4 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{f(x)} \geq 0$

Zeros de *f*:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$




$S = \mathbb{R}$

**f)** $(-2x + 1)^2 > 0 \Rightarrow -2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

*Comentário*: Nesse item, lembre os alunos que qualquer número real ou expressão real, elevado ao quadrado, será sempre positivo ou nulo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**48.** $f(x) = 2x^2 + 1$ $\quad g(x) = x^2 + 2x + 1$

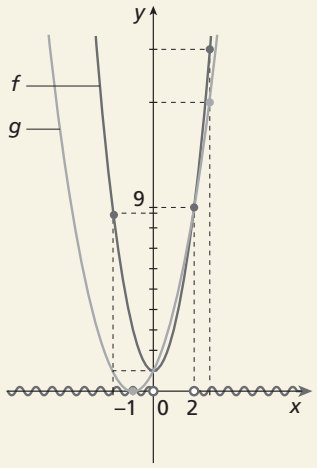
Zeros de $f$: não há $\quad$ Zero de $g$: $-1$

Coeficiente $c$ de $f$: 1 $\quad$ Coeficiente $c$ de $g$: 1

Vértice de $f$: (0, 1) $\quad$ Vértice de $g$: $(-1, 0)$

Ponto de encontro entre $f$ e $g$: $f(x) = g(x)$

$$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 1 \\ \text{ou} \\ x = 2 \text{ e } y = 9 \end{cases}$$



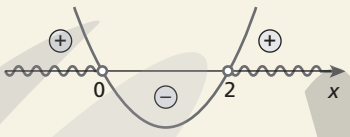

Do gráfico, temos:

$f(x) > g(x)$, quando $x < 0$ ou $x > 2$, com $x \in \mathbb{R}$

Por outro lado:

$f(x) > g(x) \Rightarrow 2x^2 + 1 > x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x > 0$

$h(x) = x^2 - 2x$ (zeros de $h$: 0 e 2)




$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

Dessa forma, percebemos que as soluções são iguais.

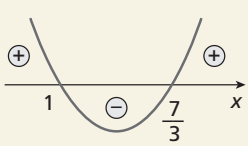
**49.** Nessa questão, é importante relembrar a necessidade do quadro de sinais para a resolução das inequações-produto e inequações-quociente, assim como a importância de estabelecer o domínio da função para a inequação-quociente.

**a)** $\overbrace{(3x^2 - 10x + 7)}^{f(x)}\overbrace{(-x^2 + 4x)}^{g(x)} \geqslant 0$

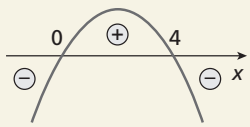
Zeros de $f$: 1 e $\frac{7}{3}$

Zeros de $g$: 0 e 4

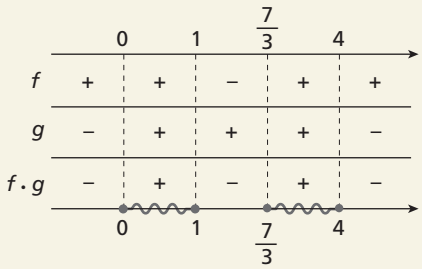
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais



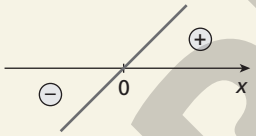

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } \frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$

**b)** $\overbrace{2x^3 + 9x^2 - 35x}^{f(x)} \leqslant 0 \Rightarrow \overbrace{x(2x^2 + 9x - 35)}^{g(x)} \leqslant 0$

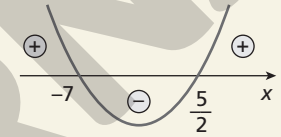
Zero de $f$: 0

Zeros de $g$: $\frac{5}{2}$ e $-7$

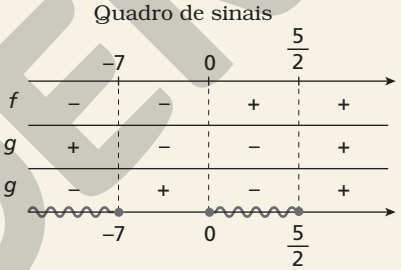
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais



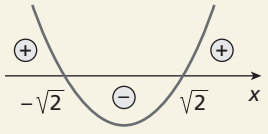

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -7 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

**c)** $\overbrace{x^4 - 4}^{f(x)} < 0 \Rightarrow \overbrace{(x^2 - 2)}^{f(x)} \cdot \overbrace{(x^2 + 2)}^{g(x)} < 0$

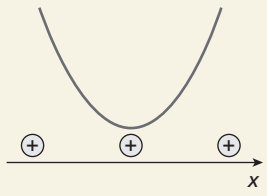
Zeros de $f$: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

$g$ não tem zeros

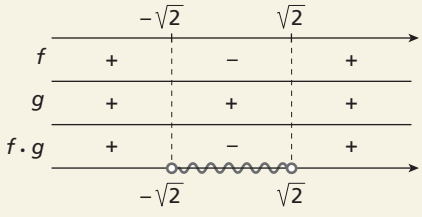
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais




$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

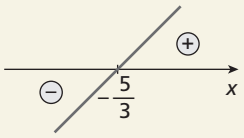
**d)** $\underbrace{\dfrac{\overbrace{3x+5}^{f(x)}}{2x^2-7x-4}}_{g(x)} \leqslant 0$

Zero de $f$: $-\frac{5}{3}$

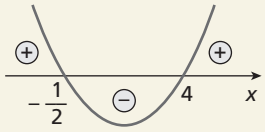
Zeros de $g$: $-\frac{1}{2}$ e $4$

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$ e $x \neq 4$

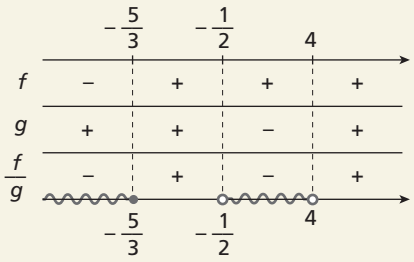
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais




$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 4\right\}$

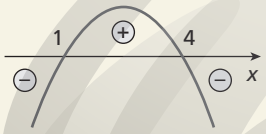
**e)** $\underbrace{\dfrac{\overbrace{-x^2+5x-4}^{f(x)}}{x^2-14x+48}}_{g(x)} \geqslant 0$

Zeros de $f$: 1 e 4

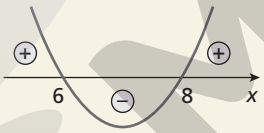
Zeros de $g$: 6 e 8

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 6$ e $x \neq 8$

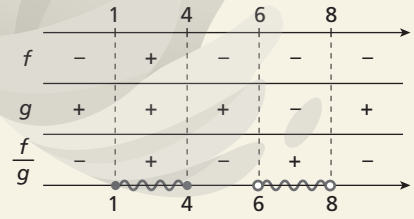
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais




$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$

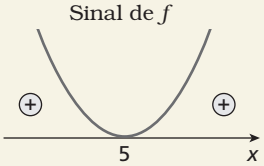
**f)** $-\dfrac{(x-5)^2}{(-x+5)^2} > 0 \Rightarrow \underbrace{\dfrac{\overbrace{(x-5)^2}^{f(x)}}{(-x+5)^2}}_{g(x)} < 0$

Zero de $f$: 5

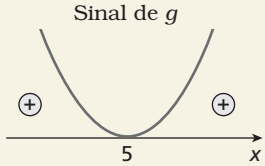
Zero de $g$: 5

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

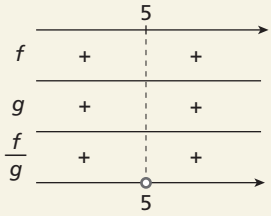
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais




$S = \varnothing$

Outra forma de resolver o item **f** é:

Note que: $(-x+5)^2 = [(-1)\cdot(x-5)]^2 = (x-5)^2$

Então:

$-\dfrac{(x-5)^2}{(-x+5)^2} > 0 \Rightarrow -\dfrac{(x-5)^2}{(x-5)^2} > 0$

Como D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$, temos:

$-1 > 0$ (falso)

Portanto, $S = \varnothing$.

**50. a)** $-\dfrac{6}{x^2-4} \leqslant 2 \Rightarrow -\dfrac{6}{x^2-4} - 2 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-6-2(x^2-4)}{x^2-4} \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{-6-2x^2+8}{x^2-4} \leqslant 0 \Rightarrow$

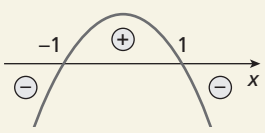
$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{\overbrace{2-2x^2}^{f(x)}}{x^2-4}}_{g(x)} \leqslant 0$

Zeros de $f$: $-1$ e $1$

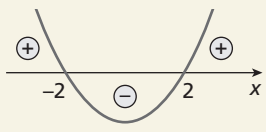
Zeros de $g$: $-2$ e $2$

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ e $x \neq 2$

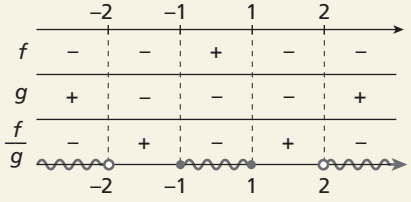
Sinal de $f$




Sinal de $g$




Quadro de sinais




$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x > 2\}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**b)** $\frac{1}{-x} < \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow$

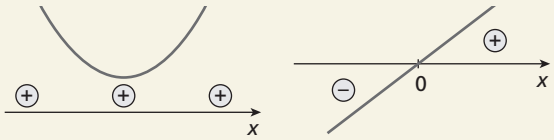
$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2 + 2x}{2x} > 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{x^2 + 2x + 2}^{f(x)}}{\underbrace{2x}_{g(x)}} > 0$$

$f$ não tem zeros

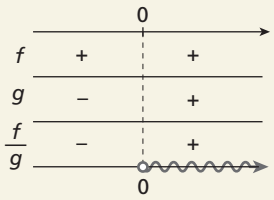
Zero de $g$: 0

Condição de existência: $g(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

Sinal de $f$ | Sinal de $g$




Quadro de sinais




$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

**51.** $\frac{\overbrace{(2x + 8)}^{f(x)}\overbrace{(-x + 3)}^{g(x)}}{\underbrace{-x^2 + 1}_{h(x)}} \leqslant 0$

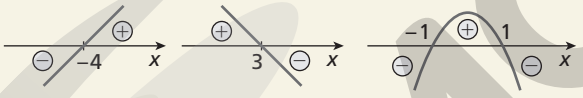
Zero de $f$: $-4$

Zero de $g$: 3

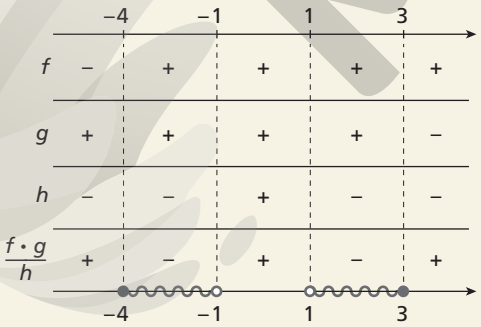
Zeros de $h$: $-1$ e 1

Condição de existência: $h(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$

Sinal de $f$ | Sinal de $g$ | Sinal de $h$




Quadro de sinais




Nos intervalos reais acima, o menor número natural que satisfaz a inequação é 2.

**52.** **a)** $f(x) = ax + b$ e o gráfico mostra que $f(2) = 0$ e $f(0) = 1$. Então:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Portanto, $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

$g(x) = ax^2 + bx + c$ e o gráfico mostra que $g(2) = 0$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$ e $g(0) = 4$, ou seja, $c = 4$. Então:

$g(x) = ax^2 + bx + 4$

$g(2) = 4a + 2b + 4 = 0$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 4 = \frac{9}{2}$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = \frac{9}{2} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ a + 2b = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$a = -2$ e $b = 2$

Portanto, $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

**b)** Os gráficos interceptam-se em $f(x) = g(x)$. Então:

$$-\frac{1}{2}x + 1 = -2x^2 + 2x + 4$$

$$4x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Se $x = 2$, temos: $y = 0$

Se $x = -\frac{3}{4}$, temos: $y = \frac{11}{8}$

Portanto, os gráficos interceptam-se em (2, 0) e $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$.

**c)** Sabemos que $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ para $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ ou $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$.

Observando o gráfico, temos $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ em $[-1, 2]$ e $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$ em $[2, +\infty[$.

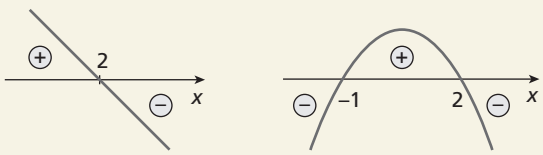
Logo, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ se $x \in \mathbb{R}$ e $x \geqslant -1$.

**d)** $\overbrace{\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)}^{f(x)}\overbrace{(-2x^2 + 2x + 4)}^{g(x)} \geqslant 0$

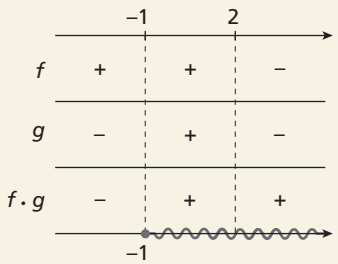
Zero de $f$: 2

Zeros de $g$: $-1$ e 2

Sinal de $f$ | Sinal de $g$




Quadro de sinais




$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

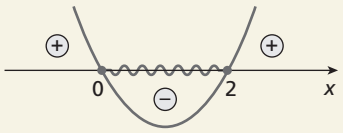
Como previsto no item **c**, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ para valores reais de $x \geqslant -1$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

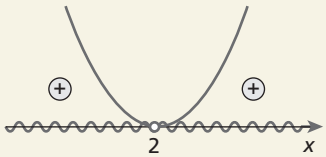
**53. a)** $\underbrace{2x \leq \overbrace{-x^2 + 4x}^{\text{(II)}} < 4}_{\text{(I)}}$

(I) $2x \leq -x^2 + 4x \Rightarrow x^2 - 2x \leq 0$

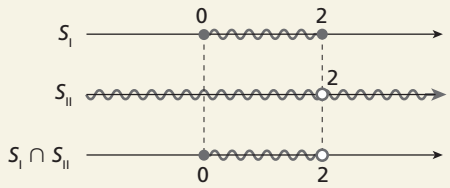



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$

(II) $-x^2 + 4x < 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 0$




$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

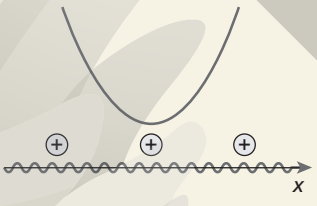



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$

**b)** $\underbrace{-4 < \frac{\overbrace{x^2 + 8x + 16}^{\text{(II)}}}{2} < 8}_{\text{(I)}}$

(I) $\frac{x^2 + 8x + 16}{2} > -4 \Rightarrow x^2 + 8x + 24 > 0$

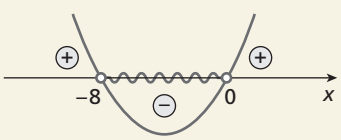
$f(x) = x^2 + 8x + 24$ ($f$ não tem zeros)



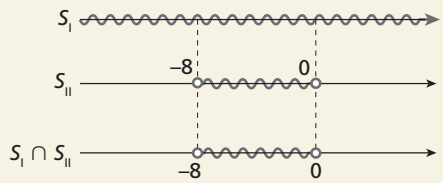

$S_I = \mathbb{R}$

(II) $\frac{x^2 + 8x + 16}{2} < 8 \Rightarrow x^2 + 8x < 0$

$g(x) = x^2 + 8x$ (zeros de $g$: $-8$ e 0)




$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

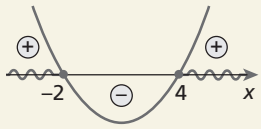


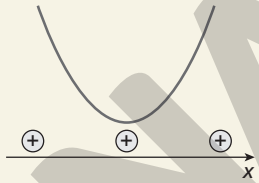

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

**c)** $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 2x + 8 < 0 & \text{(II)} \end{cases}$

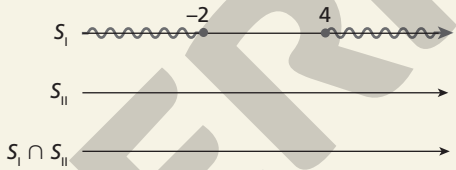
$f(x) = x^2 - 2x - 8$ (zeros de $f$: $-2$ e 4)
$g(x) = x^2 - 2x + 8$ ($g$ não tem zeros)

Sinal de $f$ Sinal de $g$




$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$ $S_{II} = \varnothing$

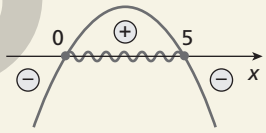


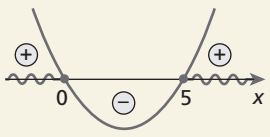

$S = \varnothing$

**d)** $\begin{cases} -x^2 + 5x \geq 0 \\ x^2 - 4x \geq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 5x \geq 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 5x \geq 0 & \text{(II)} \end{cases}$

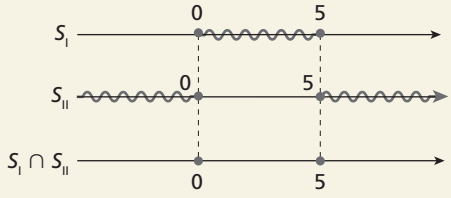
$f(x) = -x^2 + 5x$ (zeros de $f$: 0 e 5)
$g(x) = x^2 - 5x$ (zeros de $g$: 0 e 5)

Sinal de $f$ Sinal de $g$



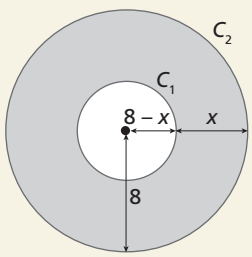




$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 5\}$




$S = \{0, 5\}$

**54.**




A área de um círculo com raio de medida $r$ é $\pi r^2$.

Pela figura, temos:

$C_1$: círculo de raio de medida $8 - x$

$C_2$: círculo de raio de medida 8

**a)** A área $A(x)$ é $A_{C_2} - A_{C_1}$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

$A(x) = \pi \cdot 8^2 - \pi \cdot (8 - x)^2$

$A(x) = 64\pi - \pi \cdot (64 - 16x + x^2)$

$A(x) = 64\pi - 64\pi + 16\pi x - \pi x^2$

$A(x) = 16\pi x - \pi x^2$

**b)** Devemos resolver a inequação:

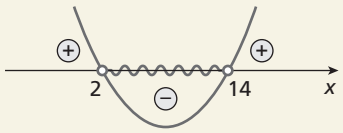
$$28\pi < 16\pi x - \pi x^2 < 65\pi \Rightarrow \underbrace{28 < \overbrace{16x - x^2}^{\text{(II)}} < 65}_{\text{(I)}}$$

Além disso, devemos ter: $0 < x < 8$ (III)

(I) $28 < 16x - x^2 \Rightarrow x^2 - 16x + 28 < 0$

$f(x) = x^2 - 16x + 28$ (zeros de $f$: 14 e 2)

Sinal de $f$

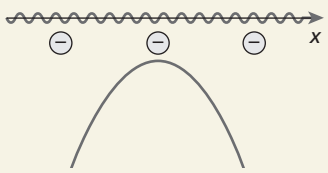



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 14\}$

(II) $16x - x^2 < 65 \Rightarrow -x^2 + 16x - 65 < 0$

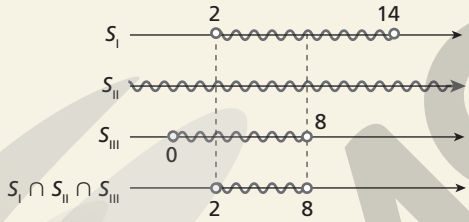
$g(x) = -x^2 + 16x - 65$ ($g$ não tem zeros)

Sinal de $g$




$S_{II} = \mathbb{R}$

(III) $S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 8\}$




$S = S_I \cap S_{II} \cap S_{III} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 8\}$

Logo, $x$ deve estar entre 2 e 8 para que a área $A(x)$ esteja entre $28\pi$ e $65\pi$.

**55. a)** Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) > 0$ para $x > 4$
- $g(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ ou $x > 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

**b)** Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) < 0$ para $x < 4$ e $x \neq 2$
- $g(x) < 0$ para $x < -2$ ou $1 < x < 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$.

**c)** Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) < 0$ para $x < 4$
- $g(x) > 0$ para $-2 < x < 1$ ou $x > 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$.

**d)** Observando os gráficos, percebemos que:

- $f(x) > 0$ para $x > 4$
- $g(x) < 0$ para $x < -2$ ou $1 < x < 2$

Logo, fazendo a intersecção dos intervalos acima, temos $S = \varnothing$.

*Comentário*: Aproveite este momento para explicar que a reta vertical tracejada que passa por $x = 4$ é uma **assíntota** do gráfico de $f$, ou seja, quanto mais perto o valor de $x$ estiver de 4, mais perto o gráfico estará dessa reta, pela direita ou pela esquerda dela, mas nunca vai "encostar" nela ou "ultrapassá-la", pois o domínio da função $f$ é $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$.

**56. a)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$

Devemos ter: $\underbrace{x^2 - 4x}_{f(x)} \neq 0$

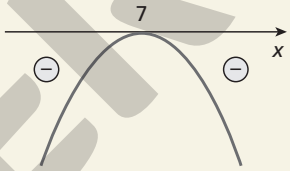
Zeros da função: $x = 4$ ou $x = 0$

Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$.

**b)** $y = \sqrt{-x^2 + 14x - 49}$

Devemos ter: $\underbrace{-x^2 + 14x - 49}_{f(x)} \geqslant 0$

Zero da função: $x = 7$

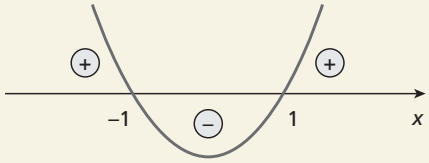



Portanto, $D = \{7\}$.

**c)** $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Devemos ter: $\underbrace{x^2 - 1}_{f(x)} > 0$

Zeros da função: $x = \pm 1$

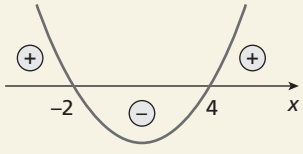



Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

**d)** $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 6x}}$

Devemos ter: $\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x - 8}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 + 6x}_{g(x)}} \geqslant 0$

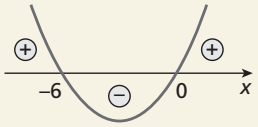
(I) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ (−2 e 4 são os zeros de $f$):




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

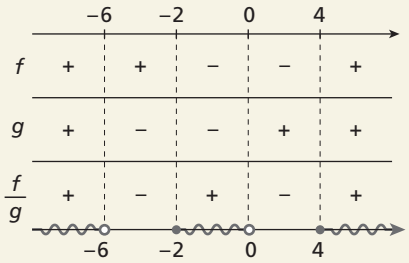
MODERNA

(II) $g(x) = x^2 + 6x$ (0 e $-6$ são os zeros de $g$):




Note que 0 e $-6$ não fazem parte do domínio da função, pois $g(x) \neq 0$.

Quadro de sinais




Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -2 \leq x < 0 \text{ ou } x \geq 4\}$.

**57.** Como a função de lei $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ tem índice ímpar, temos como única restrição que o denominador de $\frac{1}{x}$ não pode ser igual a zero.
Logo, $x \neq 0$.
Portanto, a função cuja lei é $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ não está definida para $x = 0$.

**58. a)** $f(x) = \frac{-3}{(x^2 - 2x)(x - 5)}$

Devemos ter:

$$(x^2 - 2x)(x - 5) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \neq 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \text{ e } x \neq 2 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

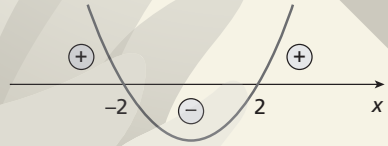
A função $f$ não está definida para $x = 0$, $x = 2$ e $x = 5$, ou seja, seu domínio é $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$.

**b)** $h(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 3) \cdot (x^2 - x)}$

Devemos ter: $x^2 - 4 \geq 0$ (I) e $(x - 3) \cdot (x^2 - x) \neq 0$ (II)

(I) $\underbrace{x^2 - 4}_{f(x)} \geq 0$

Zeros de $f$: $-2$ e 2

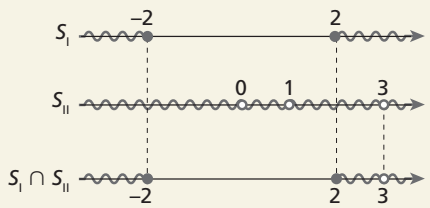



$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$

(II) $(x - 3) \cdot (x^2 - x) \neq 0$

$$\begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$$

$S_{II} = \mathbb{R} - \{0, 1, 3\}$




Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$.

**c)** $g(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2}$

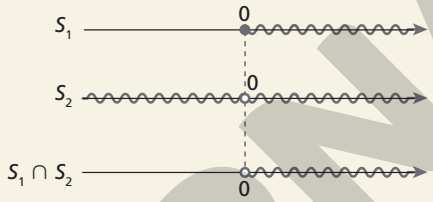
Devemos ter $x^2 \geq 0$ (numerador) e $x^2 \neq 0$ (denominador). A segunda condição é satisfeita para $x \neq 0$.

Logo, o domínio da função $g$ é $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

**d)** $i(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{2}{3}}$

Devemos ter:

- $x \geq 0$ (numerador); então: $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $x \neq 0$ (denominador); então: $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$




Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

**59. a)** Analogamente ao que foi feito no exercício **55**, vamos observar o gráfico para encontrar as soluções das inequações.
Nesse exercício, também temos $x = 4$ como uma assíntota do gráfico de $f$, e seu domínio é $D = \mathbb{R} - \{4\}$.

(I) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 4} \geq 0$

Queremos, então, saber os valores de $x$ para que $f(x) \geq 0$ e, pelo gráfico, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2 \text{ ou } x > 4\}$

(II) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

Nesse caso, queremos saber os valores de $x$ para que $f(x) < 0$ e, pelo gráfico, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

**b)** $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

*Comentário*: Se os alunos quiserem resolver as inequações desse exercício sem o auxílio do gráfico, ou seja, utilizando o estudo dos sinais, eles vão encontrar as mesmas soluções e poderão consultar o gráfico somente para conferir suas respostas. O objetivo dessas questões é apresentar o gráfico de $f$ e analisar os sinais.

## Exercícios complementares

**1. a)** Não é uma função quadrática, pois não é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

**b)** É uma função quadrática, pois é na forma

$y = ax^2 + bx + c$, com $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$ e $c = -7$.

**c)** $y = (x - 2)(x + 3) \Rightarrow y = x^2 + x - 6$

É uma função quadrática, pois é na forma

$y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$.

**d)** Não é uma função quadrática, pois não é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**e)** É uma função quadrática, pois é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a = -3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{5}$.

**f)** $y = x(x - 3) \Rightarrow y = x^2 - 3x$

É uma função quadrática, pois é na forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a = 1$, $b = -3$ e $c = 0$.

**2.** Seja $x$ o número de times.

Como cada time jogou duas vezes com cada um dos outros, temos que a expressão que representa o número de jogos é: $x \cdot (x - 1)$

Sabendo que houve 56 jogos, temos:

$x \cdot (x - 1) = 56 \Rightarrow x^2 - x - 56 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 8$ ou $x = -7$ (não serve)

Portanto, eram 8 times.

**3.**

| Número de lados do polígono ($n$) | Número de diagonais do polígono ($d$) |
|---|---|
| 3 | 0 |
| 4 | 2 |
| 5 | 5 |
| 6 | 9 |
| ⋮ | ⋮ |
| $n$ | $\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n$ |

$d = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-1) - 2n}{2} =$

$= \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

Logo: $d = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

**4. a)** $p = 12d - 0{,}05d^2$

Para $d = 50$, temos:

$p = 12 \cdot 50 - 0{,}05 \cdot 50^2 \Rightarrow p = 475$

Logo, o valor do acre será R$ 475,00.

**b)** Para $p = 400$, temos:

$12d - 0{,}05d^2 = 400 \Rightarrow 12d - 0{,}05d^2 - 400 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$d = 40$ ou $d = 200$ (não serve, pois $20 < d < 80$)

Portanto, são necessários 40 dias após o plantio.

**5.** Se uma parábola é gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

- $\Delta > 0$: a parábola intercepta o eixo $x$ em dois pontos;
- $\Delta = 0$: a parábola intercepta o eixo $x$ em um único ponto;
- $\Delta < 0$: a parábola não intercepta o eixo $x$.

**a)** $y = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow \Delta = -11 < 0$

A parábola não intercepta o eixo $x$.

**b)** $y = 2x^2 - 5x - 3 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

A parábola intercepta o eixo $x$ em dois pontos.

**c)** $y = -x^2 + x + 1 \Rightarrow \Delta = 5 > 0$

A parábola intercepta o eixo $x$ em dois pontos.

**d)** $y = 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 \Rightarrow \Delta = 0$

A parábola intercepta o eixo $x$ em um único ponto.

Portanto, as parábolas referentes aos itens **b**, **c** e **d** interceptam o eixo $x$.

**6.** Pelas fórmulas do vértice, temos:

**a)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8]}{4 \cdot 2} = -\frac{9}{2}$

Logo, $V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

**b)** $y = -x^2 + 5$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{-2} = 0$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[0 + 20]}{4(-1)} = 5$

Logo, $V = (0, 5)$.

**7. a)** $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$

$V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ e a concavidade da parábola está voltada para cima. Então:

$\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{2}\right\}$

**b)** $g(x) = -x^2 + 5$

$V = (0, 5)$ e a concavidade da parábola está voltada para baixo. Então:

$\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$

**8.** Sabemos que: $y = x^2 - mx + 3n$, $f(3) = -1$ e $f(2) = -5$.

Substituindo os valores conhecidos na lei da função, obtemos:

$\begin{cases} 9 - 3m + 3n = -1 \\ 4 - 2m + 3n = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m - 3n = 10 \\ -2m + 3n = -9 \end{cases}$

$m = 1$

Substituindo $m$ por 1 em uma das equações, obtemos:

$n = -\frac{7}{3}$

Então:

$y = x^2 - x - 7$

$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[1 + 28]}{4} = -\frac{29}{4}$

$V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$

**9.** A parábola intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, 4)$.

Então, a lei da função quadrática a ela associada é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + 4$, com $a$ e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Também notamos que a parábola intercepta o eixo $x$ nos pontos $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$. Isso significa que $-2$ e $-1$ são os zeros da função.

Substituindo as coordenadas dos pontos $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ na lei da função, obtemos:

$f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a - 2b + 4 = 0$ (I)

$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 4 = 0 \Rightarrow a = b - 4$ (II)

Substituindo $a$ por $b - 4$ em (I), obtemos:

$4 \cdot (b - 4) - 2b + 4 = 0 \Rightarrow 2b - 12 = 0 \Rightarrow b = 6$

Substituindo $b$ por 6 em (II), obtemos:

$a = 6 - 4 = 2$

Portanto, a lei da função é $y = 2x^2 + 6x + 4$.

MODERNA

**10.** $y = (k + 2)x^2 + (k^2 - 3)x + 5$

Para que a função admita valor máximo, a concavidade da parábola deve estar voltada para baixo. Então:

$(k + 2) < 0 \Rightarrow k < -2$

Sabemos que $x_V = 3$; logo:

$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-(k^2 - 3)}{2(k + 2)} = 3 \Rightarrow k^2 + 6k + 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (k + 3)^2 = 0 \Rightarrow k = -3$ (menor que $-2$)

Assim, $k = -3$.

$g(x) = -x^2 + 6x + 5$

$y_V = g(3) = -9 + 18 + 5 = 14$

**11.** $f(x) = (6 - 4t)x^2 + 4x - 6$

Para que a função tenha valor máximo, a concavidade da parábola deve estar voltada para baixo. Então:

$6 - 4t < 0 \Rightarrow t > \frac{3}{2}$

Sabemos que $x_V = 1$; logo:

$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-4}{2(6 - 4t)} = 1 \Rightarrow t = 2$

Logo, $f(x) = -2x^2 + 4x - 6$.

Assim: $y_V = f(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 6 = -4$

**12.** Sejam $x$ e $y$ as medidas dos lados do retângulo. Sabemos que o perímetro é 48; logo:

$2x + 2y = 48 \Rightarrow x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x$

Cálculo da área:

$x \cdot y = x(24 - x) = -x^2 + 24x$

$S(x) = -x^2 + 24x$ é máxima em $x_V$. Assim:

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{-2} = 12$

$y_V = S(12) = -(12)^2 + 24 \cdot 12 = -144 + 288 = 144$

Logo, a área máxima é 144 cm².

**13.** **a)** $y = -x^2 + 4x$

Zeros da função: 0 e 4

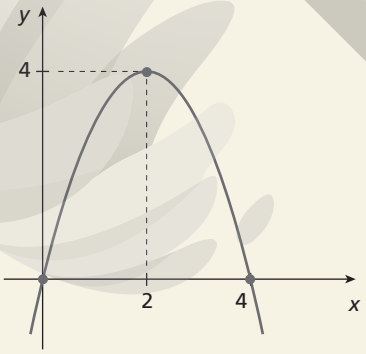
Como $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

Coeficiente $c$: 0

$x_V = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$ e $y_V = \frac{-16}{4 \cdot (-1)} = 4$

Pontos de intersecção com os eixos: (0, 0) e (4, 0)

Vértice: (2, 4)




**b)** $y = 2x^2 - 5x + 2$

Zeros da função: 2 e $\frac{1}{2}$

Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.

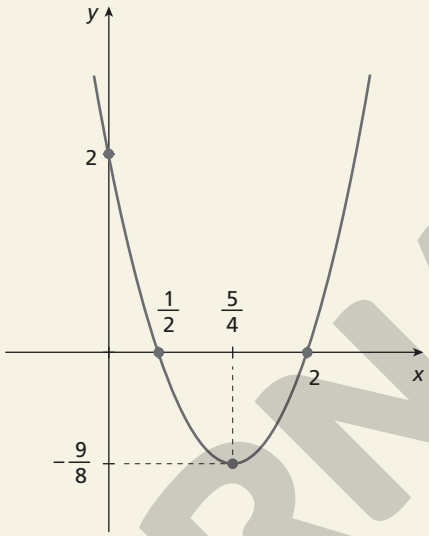
Coeficiente $c$: 2

$x_V = \frac{5}{4}$ e $y_V = -\frac{9}{8}$

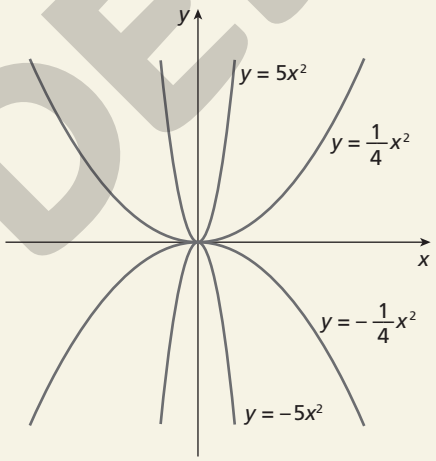
Pontos de intersecção com os eixos:

(2, 0), $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e (0, 2)

Vértice: $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$




**14.** Em um *software* de construção de gráficos obtemos:




Pode-se observar, pelos gráficos, que:

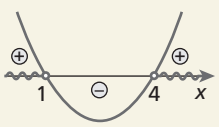
- quanto maior o valor absoluto do coeficiente de $x^2$, menor é a "abertura" da parábola;
- para $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- para $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo;
- para valores simétricos de $a$, as parábolas são simétricas em relação ao eixo $x$.

**15.** **a)** $x^2 - 5x + 4 > 0$

$f(x) = x^2 - 5x + 4$

Zeros de $f$: 1 e 4

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$.




**b)** $\overbrace{(3x^2 - 5x + 2)}^{f(x)} \cdot \overbrace{(-x^2 + 4x - 4)}^{g(x)} \geqslant 0$

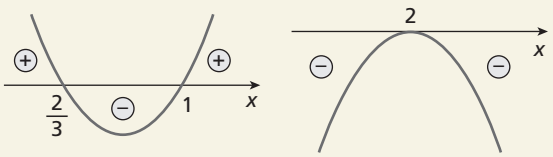
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

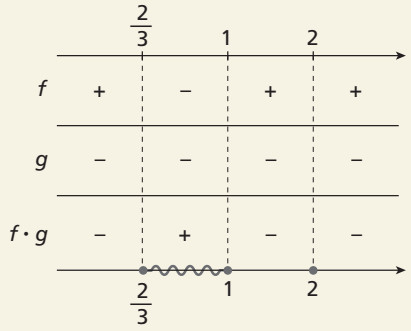
Zeros de $f$: $\frac{2}{3}$ e 1

Zero de $g$: 2

Sinal de $f$ | Sinal de $g$




Quadro de sinais




Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ ou } x = 2\right\}$.

**c)** $\frac{\overbrace{4x^2 + 3x - 1}^{f(x)}}{\underbrace{1 - x^2}_{g(x)}} \leq 0$

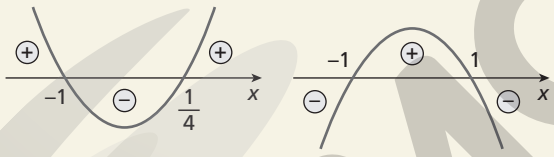
Zeros de $f$: $-1$ e $\frac{1}{4}$

Zeros de $g$: $-1$ e 1

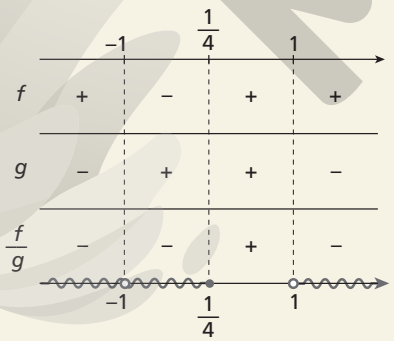
Condição de existência:

$1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq -1$

Sinal de $f$ | Sinal de $g$




Quadro de sinais




Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{4} \text{ e } x \neq -1 \text{ ou } x > 1\right\}$.

**d)** $\frac{2}{x^2 - 1} \leq \frac{x}{x - 1} \Rightarrow \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x - 1} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2 - x(x + 1)}{x^2 - 1} \leq 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{-x^2 - x + 2}^{f(x)}}{\underbrace{x^2 - 1}_{g(x)}} \leq 0;$

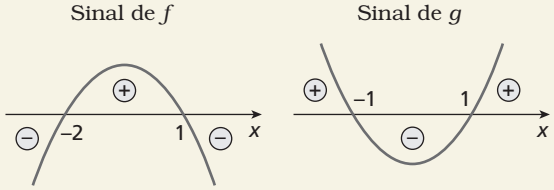
Zeros de $f$: $-2$ e 1

Zeros de $g$: 1 e $-1$

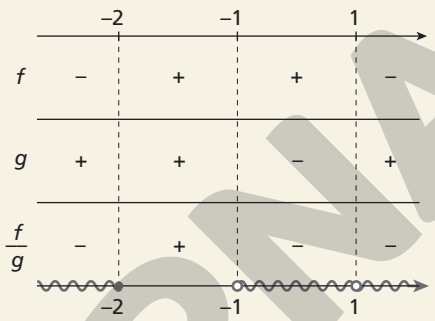
Condição de existência:

$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq -1$

Sinal de $f$ | Sinal de $g$




Quadro de sinais




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$.

**16.** Ao verificar o que determina que o vértice da parábola esteja à esquerda ou à direita do eixo $y$, estamos, na verdade, estudando as possibilidades para $x_V$.

**a)** $x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-b}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = \frac{-b}{2}$

Nesse caso, percebemos que o sinal de $x_V$ (e, portanto, a posição do vértice) depende somente do sinal do coeficiente $b$.

Então, em relação ao eixo $y$, o vértice estará:

- à direita, se $b < 0$.
- à esquerda, se $b > 0$.

**b)** $x_V = \frac{-b}{2a}$

Nesse caso, percebemos que o sinal de $x_V$ depende dos sinais dos coeficientes $a$ e $b$.

Então, em relação ao eixo $y$, o vértice estará:

- à direita, se $\begin{cases} b > 0 \text{ e } a < 0 \text{ ou} \\ b < 0 \text{ e } a > 0 \end{cases}$
- à esquerda, se $\begin{cases} b > 0 \text{ e } a > 0 \text{ ou} \\ b < 0 \text{ e } a < 0 \end{cases}$

## Autoavaliação

**1.** Dada uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, se o coeficiente $a$, de $x^2$, for nulo, então a lei da função equivalerá a $y = bx + c$, que não representa uma função quadrática. Logo, devemos ter o coeficiente de $x^2$ não nulo.

alternativa c

**2.** Para a concavidade da parábola estar voltada para cima, devemos ter:

$-m + 1 > 0 \Rightarrow m < 1$

alternativa b

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**3.** Os zeros da função $y = -x^2 + 9$ são as raízes da equação $-x^2 + 9 = 0$. Logo:

$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = +3$ ou $x = -3$

Portanto, os zeros da função são 3 e $-3$.

alternativa c

**4.** A função dada por $y = x^2 + \sqrt{3}$ tem $a = 1 > 0$; logo, seu gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

Ainda temos:

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = -4\sqrt{3} < 0$

Como $\Delta < 0$, a parábola não corta o eixo $x$; então, todos os pontos dela estão acima desse eixo. Portanto, os valores de $y$ são sempre positivos.

alternativa d

**5.** Analisando o gráfico, temos:

**a)** Falsa, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

**b)** Falsa, pois $f(x_1) = f(x_2)$.

**c)** Verdadeira, pois $f(x_V) = y_V > f(x_2)$.

**d)** Falsa, pois $f(x_V) > f(x_1)$.

alternativa c

**6.** A função dada por $y = x^2 - 4x + 3$ tem $a = 1 > 0$; logo, tem um valor mínimo que é a ordenada $-1$ do vértice.

Logo, o conjunto imagem da função é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.

alternativa b

**7.** $s(t) = 4t - 2t^2$. Observa-se que a concavidade da parábola está voltada para baixo.

O instante em que o carro para e altera o sentido do movimento é a abscissa ($t$) do vértice da parábola.

$t_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{2(-2)} = 1$

alternativa d

**8.** Consideramos um retângulo de dimensões $x$ e $y$. Então:

$2x + 2y = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$

Cálculo da área: $x \cdot y = x(50 - x) = 50x - x^2$

Logo, $S(x) = 50x - x^2$.

A área é máxima para $x_V$:

$x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{50}{2(-1)} = 25$

$y_V = S(x_V) = 50 \cdot 25 - 25^2 = 625$

alternativa a

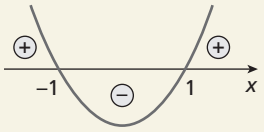
**9.** $\dfrac{x^2 - 1}{x} \leqslant 0$

Condição de existência: $x \neq 0$

- $f(x) = x^2 - 1$

  Zeros de $f$: 1 e $-1$

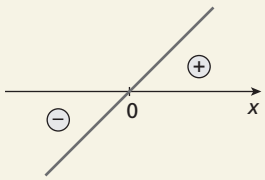
Sinal de $f$



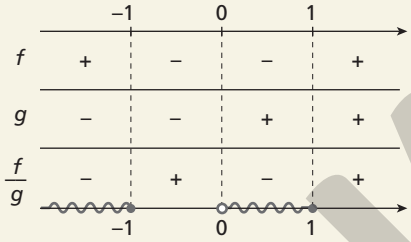

- $g(x) = x$

  Zero de $g$: 0

Sinal de $g$




Quadro de sinais




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1$ ou $0 < x \leqslant 1\}$.

alternativa a

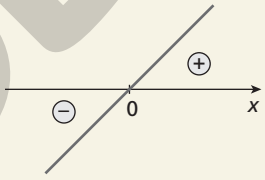
**10.** $\dfrac{x}{x^2 + 2x - 15} \geqslant 0$

Condição de existência: $x \neq -5$ e $x \neq 3$

- $h(x) = x$

  Zero de $h$: 0

Sinal de $h$

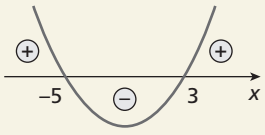



- $g(x) = x^2 + 2x - 15 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow$

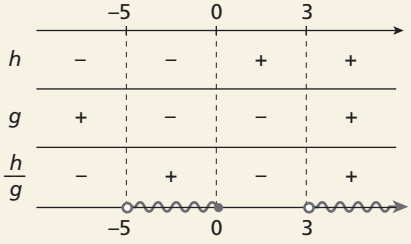
$\Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases}$

Zeros de $g$: 3 e $-5$

Sinal de $g$




Quadro de sinais




Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant 0$ ou $x > 3\}$.

alternativa b

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

## Compreensão de texto

1. O assunto principal do texto é a descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene.
2. Etiene passou a ver a Matemática de outra forma, começou a gostar da disciplina. Além disso, se sentiu muito importante por conseguir ajudar os colegas e começou a ter mais segurança, não só em Matemática, mas nas demais disciplinas. A descoberta também inspirou os colegas.
3. Resposta pessoal.
   *Comentário*: Você pode estimular a discussão entre as duplas e, depois, pedir a alguns alunos que contem suas experiências para a turma. Essa atividade propicia a reflexão sobre a influência que o pensamento negativo tem na forma como encaramos as coisas, e como ele pode colocar barreiras para a aprendizagem.
4. Seja a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Como $P$ é simétrico do ponto $(0, c)$ em relação ao eixo de simetria da parábola, a ordenada de $P$ será $c$.

   Assim:

   $f(x_P) = c$

   $ax_P^2 + bx_P + c = c$

   $ax_P^2 + bx_P = 0$

   $x_P(ax_P + b) = 0$

   $x_P = 0$ ou $x_P = -\frac{b}{a}$

   Portanto, a função tem dois pontos de ordenada $c$, o ponto $(0, c)$, ponto em que a parábola cruza o eixo $y$, e o ponto $P\left(-\frac{b}{a}, c\right)$.

   Os zeros $x_1$ e $x_2$ da função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. E a soma das raízes dessa equação é dada por: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
   Assim, mostramos que:

   $x_P = x_1 + x_2$

# Capítulo 3 – Função exponencial

## Exercícios propostos

1. **a)** $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

   **b)** $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{125}$

   **c)** $0^{10} = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

   **d)** $\left(\frac{8}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right) \cdot \left(\frac{9}{8}\right) = \frac{81}{64}$

   **e)** $3^0 = 1$

   **f)** $\pi^1 = \pi$

2. **a)** $10^9 \cdot 10^{-4} = 10^{9 + (-4)} = 10^5 = 100.000$

   **b)** $\frac{13^{19}}{13^{17}} = 13^{19} : 13^{17} = 13^{19 - 17} = 13^2 = 169$

   **c)** $(-5)^{15} : (-5)^{12} = (-5)^{15 - 12} = (-5)^3 = -125$

   **d)** $2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{-1 + (-2)} = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

   **e)** $(10 \cdot 7)^2 = 10^2 \cdot 7^2 = 100 \cdot 49 = 4.900$

   **f)** $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$

   **g)** $(2^3)^2 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

   **h)** $\left(\left(\sqrt{7}\right)^5\right)^0 = \left(\sqrt{7}\right)^{5 \cdot 0} = \left(\sqrt{7}\right)^0 = 1$

3. A diferença de tempo, em ano, entre o surgimento do *Homo habilis* e o do *Homo erectus* é de aproximadamente: $2.200.000 - 2.000.000 = 200.000 = 2 \cdot 10^5$
   alternativa b

4. **a)** $\sqrt{1,69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \sqrt{\frac{13^2}{10^2}} = \frac{13}{10} = 1,3$

   **b)** $\sqrt[3]{-1,728} = \sqrt[3]{\frac{-1.728}{1.000}} = \sqrt[3]{\frac{(-12)^3}{10^3}} = \frac{-12}{10} = -1,2$

   *Comentário*: Nos itens **a** e **b**, os alunos devem ser incentivados a resolver por meio de tentativa e erro, aplicando seus conhecimentos prévios a respeito de raízes envolvendo apenas números naturais.
   No item **a**, os alunos podem procurar o número natural que elevado ao quadrado seja igual a 169. E, no item **b**, o número natural que elevado ao cubo resulta em 1.728. A partir desses valores, é mais fácil encontrar as raízes dos números racionais.

   **c)** $81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$

   **d)** $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{4 \cdot 4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

5. **a)** $121^{0,9} : 121^{0,4} = 121^{0,9 - 0,4} = 121^{0,5} = 121^{\frac{1}{2}} = \sqrt{121} = 11$

   **b)** $(0,3)^8 \cdot (0,3)^{-7} : (0,3)^{-2} = (0,3)^{8 + (-7) - (-2)} = (0,3)^{8 - 7 + 2} =$
   $= (0,3)^3 = 0,027$

   **c)** $\frac{3^{\frac{1}{3}}}{(-3)^2 \cdot 3^{-2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{9 \cdot \frac{1}{9}} = \sqrt[3]{3}$

   **d)** $\left[(32)^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{2}{25}} = (-32)^{\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{25}} = (-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(32)} =$

   $= \sqrt[5]{(2)^5} = 2$

6. **a)** $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

   **b)** $\sqrt{80} + \sqrt{180} = \sqrt{2^4 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} =$

   $= 2 \cdot 2\sqrt{5} + 2 \cdot 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

7. **a)** $\frac{2}{\sqrt{3} - 3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3} - 3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 3}\right) = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 3^2} =$

   $= \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{3 - 9} = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{-6} = \frac{2}{-6}(\sqrt{3} + 3) = \frac{-\sqrt{3} - 3}{3}$

MODERNA

**b)** $\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \left(\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} =$

$= \dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{18}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} =$

$= \dfrac{\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} =$

$= \dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} =$

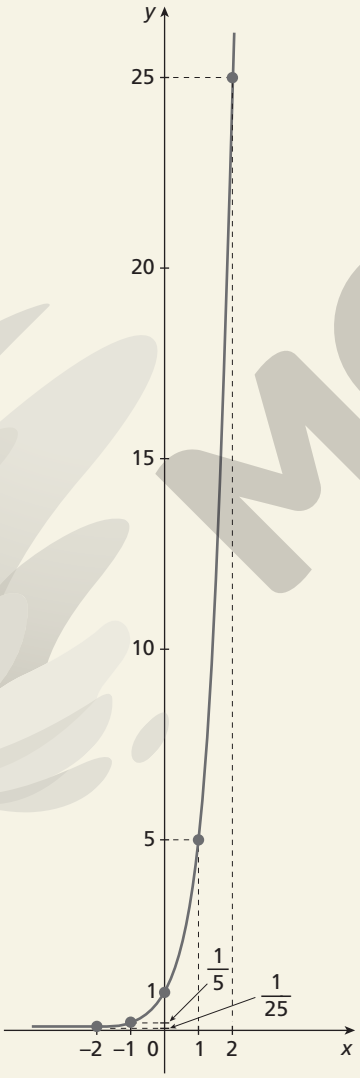
$= \dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

**8.** Com o uso de calculadora, sabemos que $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$. Ou seja, $5^{\sqrt{2}} \simeq 5^{1{,}4}$. Esse número está no intervalo entre $5^1$ e $5^2$, ou seja, entre 5 e 25.

*Comentário*: Explique aos alunos que aqui se usa a ideia da interpolação. É interessante que eles tentem localizar, no gráfico da resolução do item **a** do exercício **9**, o ponto de coordenadas $\left(\sqrt{2},\ 5^{\sqrt{2}}\right)$.

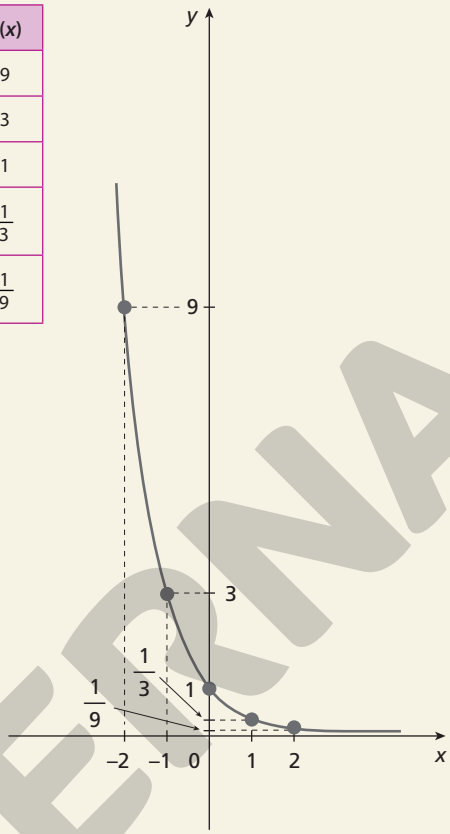
**9.** **a)** $f(x) = 5^x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $\frac{1}{25}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{5}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 5 |
| 2 | 25 |



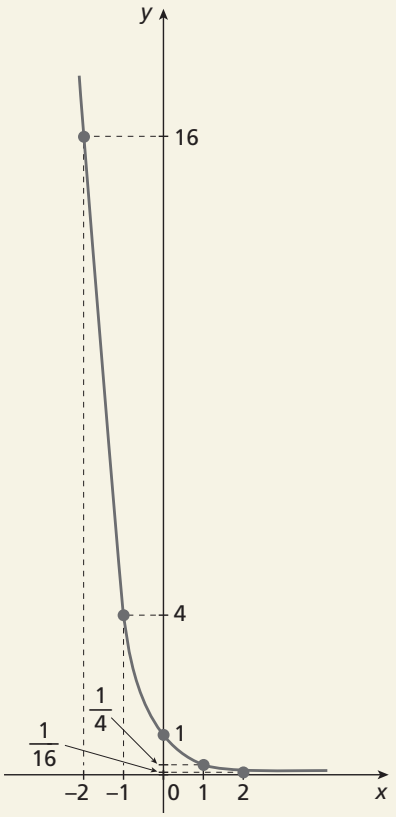

**b)** $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | 9 |
| $-1$ | 3 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{9}$ |




**c)** $h(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

| $x$ | $h(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | 16 |
| $-1$ | 4 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{4}$ |
| 2 | $\frac{1}{16}$ |

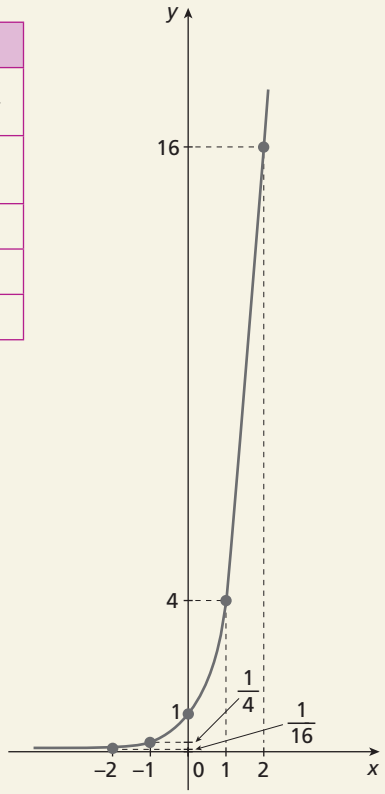



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**d)** $i(x) = 4^x$

| $x$ | $i(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $\frac{1}{16}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{4}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 4 |
| 2 | 16 |




**10.** Analisando as quatro leis, podemos concluir que apenas uma das funções é decrescente, com base entre 0 e 1.

Essa função é a $h$, cuja lei é $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. Observando os gráficos, apenas o IV é decrescente; logo, a função $h$ corresponde ao gráfico IV.

Também poderíamos verificar que:

$h(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 1 = 0$

$h(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 1 = 3$

Para analisar as funções $f$, $g$ e $i$ dadas nos itens **a**, **b** e **d**, respectivamente, podemos encontrar alguns pontos:

**a)** $f(x) = 3^{x+1}$
$f(-1) = 3^{-1+1} = 1$
$f(0) = 3^{0+1} = 3$
Ou seja, $f$ é crescente e passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(0, 3)$. O gráfico correspondente é o III.

**b)** $g(x) = 2^x + 1$
$g(0) = 2^0 + 1 = 2$
$g(1) = 2^1 + 1 = 3$
Ou seja, $g$ é crescente e passa pelos pontos $(0, 2)$ e $(1, 3)$. O gráfico correspondente é o I.

**d)** $i(x) = 4^{x-1}$
$i(1) = 4^{1-1} = 1$
$i(0) = 4^{0-1} = \frac{1}{4}$
Ou seja, $i$ é crescente e passa pelos pontos $(1, 1)$ e $\left(0, \frac{1}{4}\right)$. O gráfico correspondente é o II.

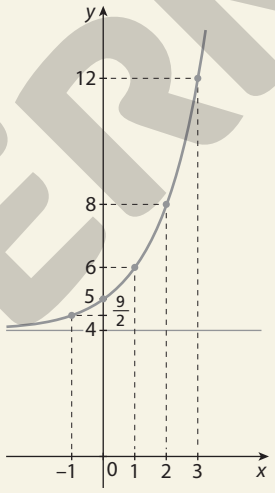
*Comentário*: Essa atividade pode ser mais bem explorada propondo aos alunos um trabalho de pesquisa, em especial se for possível utilizar um *software* de construção de gráficos, que permite agilidade para testar diversos exemplos. Avalie a conveniência de esse trabalho ser feito em grupo. Veja algumas sugestões de atividade:

- Peça um esboço dos gráficos das funções $g_1$, $g_2$, $g_3$ e $g_4$ dadas por $g_1(x) = 2^x$, $g_2(x) = 2^x + 2$, $g_3(x) = 2^x + 3$ e $g_4(x) = 2^x - 1$ em um mesmo plano cartesiano. Depois, os alunos devem redigir um texto explicando como obter o gráfico da função $g(x) = 2^x + k$, a partir do gráfico de $g_1$.

  Espera-se que eles percebam que o gráfico de $g$ é obtido deslocando-se o gráfico de $g_1$, verticalmente, $k$ unidades, no mesmo sentido do eixo $y$ se $k > 0$ e em sentido contrário se $k < 0$.
- Peça um esboço dos gráficos das funções $f_1$, $f_2$, $f_3$ e $f_4$ dadas por $f_1(x) = 3^x$, $f_2(x) = 3^{x+2}$, $f_3(x) = 3^{x-1}$ e $f_4(x) = 3^{x-2}$ em um mesmo plano cartesiano. Depois, os alunos devem redigir um texto explicando como obter o gráfico da função $f(x) = 3^{x+k}$, a partir do gráfico de $f_1$.

  Espera-se que eles percebam que o gráfico de $f$ é obtido deslocando-se o gráfico de $f_1$, horizontalmente, $k$ unidades, em sentido contrário ao do eixo $x$ se $k > 0$ e no mesmo sentido se $k < 0$.

**11.** A figura abaixo mostra parte do gráfico da função $f(x) = 2^x + 4$.




Logo, $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$.

*Comentário*: Espera-se que os alunos percebam que o gráfico da função $f$ é o gráfico da função $g(x) = 2^x$ transladado 4 unidades para cima. A partir disso, é possível obter o conjunto imagem de $f$ sem construir seu gráfico.

**12.** **a)** $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

A base $a$ é $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ $(a > 1)$; então, a função é crescente.

**b)** $h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$

A base $a$ é $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}7$ $(0 < a < 1)$; então, a função é decrescente.

**c)** $i(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$

A base $a$ é $\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$ $(a > 1)$; então, a função é crescente.

**13.** Como $a = -b$, temos: $f(x) = 2^{x+a} + b \Rightarrow f(x) = 2^{x-b} + b$
Pelo gráfico, $f(1) = 2$ e $f(2) = 3$; então:
$f(x) = 2^{x-b} + b \Rightarrow f(1) \Rightarrow 2^{1-b} + b = 2$
$f(2) \Rightarrow 2^{2-b} + b = 3$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Assim:

$$\begin{cases} 2^1 \cdot 2^{-b} + b = 2 \\ 2^2 \cdot 2^{-b} + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \cdot 2^{-b} - b = -2 \\ 4 \cdot 2^{-b} + b = 3 \end{cases}$$

Adicionando as equações do sistema, membro a membro, obtemos:

$2 \cdot 2^{-b} = 1 \Rightarrow 2^{-b} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-b} = 2^{-1} \Rightarrow -b = -1 \Rightarrow b = 1$

Como $a = -b$, temos $a = -1$. Assim, $a = -1$ e $b = 1$.

*Comentário*: Esse exercício traz dados a mais que o estritamente necessário para a resolução. É interessante questionar os alunos se, retirada a informação sobre as coordenadas de um dos três pontos destacados no gráfico, ainda assim a resolução seria possível.

**14.** $f(x) = 5^x$

**a)** $\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5$

**b)** $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5$

**c)** $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{5^2}{5^1} = 5^{2-1} = 5$

**d)** $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{5^1}{5^0} = 5^{1-0} = 5$

- Os resultados são todos iguais.
- $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

**a)** $\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$

**b)** $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2} = \frac{1}{4}$

**c)** $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-1} = \frac{1}{4}$

**d)** $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^1}{\left(\frac{1}{4}\right)^0} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-0} = \frac{1}{4}$

- Sim, os resultados são sempre iguais à base $a$ da função.
- Para $f(x) = a^x$, concluímos que: $\frac{f(x)}{f(x-1)} = a$

**15.** **a)** Pelo gráfico, a radioatividade está diminuindo, pois: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

**b)** O minério não deixará de ser radioativo, porque a curva não intercepta o eixo $x$.

**c)** Pelo gráfico, a função é decrescente; então, os possíveis valores de $a$ são elementos do conjunto:

$\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

*Comentário*: Essa atividade, assim como o exercício proposto **24**, propicia uma abordagem conceitual interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Convém avaliar com outros professores a possibilidade de pedir aos alunos uma pesquisa sobre energia nuclear.

**16.** $M = C \cdot (1 + i)^t$

$M = 20.000{,}00 \cdot (1 + 0{,}12)^3$

$M = 20.000{,}00 \cdot 1{,}12^3$

$M = 20.000{,}00 \cdot 1{,}404928$

$M = 28.098{,}56$

O montante será R$ 28.098,56.

**17.** **a)** As batatas saíram do forno em $t = 0$. Logo, a temperatura $T$ era dada por:

$T = 20 + 160 \cdot e^{-6 \cdot 0} = 20 + 160 \cdot e^0 =$

$= 20 + 160 \cdot 1 = 180$

Portanto, $T = 180$ °C.

**b)** Temos que 30 minutos é igual à meia hora. Logo, a temperatura será dada para $t = 0{,}5$.

$T = 20 + 160 \cdot e^{-6 \cdot 0{,}5} = 20 + 160 \cdot e^{-3} = 20 + 160 \cdot \frac{1}{e^3}$

Com o auxílio de uma calculadora, fazendo $e = 2{,}7$, obtemos aproximadamente 28.

Portanto, $T \simeq 28$ °C.

**18.** **a)** Pelo gráfico, $f(0) = 5.000$. Assim, a pesquisa iniciou-se com 5.000 bactérias.

**b)** Pelo gráfico, $f(6) = 15.000$. Assim, a quantidade após 6 meses foi de 15.000 bactérias.

**c)** $f(0) = 5.000 \Rightarrow k \cdot a^0 = 5.000 \Rightarrow k = 5.000$

$f(6) = 15.000 \Rightarrow 5.000 \cdot a^6 = 15.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^6 = 3 \Rightarrow a = \sqrt[6]{3}$

**d)** $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 6\}$;

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leq y \leq 15.000\}$

**e)** $f(3) = 5.000 \cdot \left(\sqrt[6]{3}\right)^3 \Rightarrow f(3) = 5.000 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3) \simeq 5.000 \cdot 1{,}73 \Rightarrow f(3) \simeq 8.650$

Logo, após 3 meses, o número de bactérias é, aproximadamente, 8.650.

*Comentário*: Esse exercício, assim como o exercício proposto **26** e o exercício complementar **9**, propicia uma abordagem conceitual interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

**19.** **a)** $10^x = 1.000 \Rightarrow 10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

**b)** $(0{,}1)^{2x} = 10 \Rightarrow (10^{-1})^{2x} = 10 \Rightarrow 10^{-2x} = 10^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

**c)** $(0{,}001)^x = 1.000 \Rightarrow (10^{-3})^x = 10^3 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

**d)** $\left(\frac{1}{100}\right)^{2x} = 0{,}0001 \Rightarrow (10^{-2})^{2x} = 10^{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{-4x} = 10^{-4} \Rightarrow -4x = -4 \Rightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

**20.** **a)** $2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

**b)** $(0{,}5)^x = 4^{1-3x} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^2)^{1-3x} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{2-6x} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x = 2 - 6x \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

$S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

MODERNA

**c)** $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{128} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x = 7 \Rightarrow x = 14$

$S = \{14\}$

**d)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 10} = \frac{1}{729} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 10} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 10 = 6 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

$S = \{-4, 4\}$

**e)** $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -1 \Rightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$3y^2 - 4y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = \frac{1}{3}$

Como $y = 3^x$, vem:

$y = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

$y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$

$S = \{-1, 0\}$

**f)** $11^{2x} + 2 \cdot 11^x = 3 \Rightarrow (11^x)^2 + 2 \cdot 11^x - 3 = 0$

Fazendo $11^x = y$, temos:

$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -3$

Como $y = 11^x$, vem:

$y = 1 \Rightarrow 11^x = 11^0 \Rightarrow x = 0$

$y = -3 \Rightarrow 11^x = -3 \Rightarrow \nexists\, x$

$S = \{0\}$

**21. a)** $2^x = 14$

$2^3 < 2^x < 2^4 \Rightarrow 3 < x < 4$

**b)** $3^x = 29$

$3^3 < 3^x < 3^4 \Rightarrow 3 < x < 4$

**c)** $3^{x+1} = 10$

$3^2 < 3^{x+1} < 3^3 \Rightarrow 2 < x + 1 < 3 \Rightarrow 1 < x < 2$

**d)** $2^{x-1} = 100$

$2^6 < 2^{x-1} < 2^7 \Rightarrow 6 < x - 1 < 7 \Rightarrow 7 < x < 8$

*Comentário*: Essa atividade resgata a ideia de cálculo por estimativa proposta no **Reflita** no início da página **78** do livro do aluno. É importante os alunos perceberem que, no estudo da Matemática, não há apenas questões com resultados únicos e exatos; há questões também com resultados estimados em um intervalo.

Outra maneira de estimar o valor de $x$, em cada item, é por meio da construção do gráfico da função cuja lei é dada pela expressão do 1º membro da igualdade. Por exemplo, no item **a**, após construir o gráfico de $f(x) = 2^x$, obtemos o valor de $x$ tal que $2^x = 14$, traçando uma reta horizontal $r$ pelo ponto (0, 14) e uma reta vertical $s$ pelo ponto de intersecção de $r$ com o gráfico de $f$. A reta $s$ intercepta o eixo $x$ em um ponto cuja abscissa é o valor procurado.



ADILSON SECCO

Procedimento similar a este pode ser feito em um *software* de construção de gráficos.

**22.** $f(x) = 2^{2x+1}$

$f(a) = 4f(b) \Rightarrow 2^{2a+1} = 4 \cdot 2^{2b+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2a+1} = 2^{2b+3} \Rightarrow 2a + 1 = 2b + 3 \Rightarrow a - b = 1$

alternativa e

**23. a)** $\begin{cases} 2^{2x+y} = 2^2 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 & \text{(I)} \\ x - y = -\frac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando as equações (I) e (II) membro a membro, temos:

$3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Substituindo o valor de $x$ em (II), obtemos:

$\frac{1}{2} - y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$

Portanto, $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$.

**b)** $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x} : 7^y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x-y} = 7^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -2 & \text{(I)} \\ 2x - y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando as equações (I) e (II) membro a membro, temos:

$3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

Substituindo o valor de $x$ em (I), obtemos:

$y = -2 + \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$

Portanto, $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$.

**24. a)** No instante inicial: $t = 0 \Rightarrow m(0) = 2.048$

Assim: $k \cdot 2^{-0,5 \cdot 0} = 2.048 \Rightarrow k = 2.048$

**b)** Pelo item anterior, temos: $m(t) = 2.048 \cdot 2^{-0,5t}$

Logo, para descobrir em quantos minutos a massa decai para 512 gramas, basta resolver a equação a seguir.

$2.048 \cdot 2^{-0,5t} = 512 \Rightarrow 2^{-0,5t} = \frac{512}{2.048} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-0,5t} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{-0,5t} = 2^{-2} \Rightarrow -0,5t = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{2}{0,5} \Rightarrow t = 4$

Logo, a massa decai para 512 g em 4 minutos.

**25.** $f(t) = a \cdot 2^{-bt}$

**a)** $f(0) = 1.024 \Rightarrow a \cdot 2^{-b \cdot 0} = 1.024 \Rightarrow a = 1.024$

$f(10) = \frac{1.024}{2} \Rightarrow 1.024 \cdot 2^{-b \cdot 10} = \frac{1.024}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-10b} = 2^{-1} \Rightarrow -10b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{10}$

Portanto, $a = 1.024$ e $b = \frac{1}{10}$.

**b)** $\frac{1}{8}$ de 1.024 é 128

$f(t) = 128 \Rightarrow 1.024 \cdot 2^{-\frac{1}{10} \cdot t} = 128 \Rightarrow$

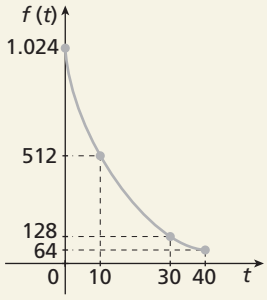
$\Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}} = \frac{128}{1.024} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}} = 2^{-3} \Rightarrow -\frac{t}{10} = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 30$

Logo, o tempo mínimo é de 30 anos.

MODERNA

**c)**




**26.** Como a massa é diretamente proporcional ao volume, para $f(t) = 2$ e $K = 128$, temos:

$f(t) = K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2 = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 12$

alternativa b

**27.** Para que os gráficos tenham um ponto em comum, deve existir um valor $x$ de modo que as imagens desse valor, pelas duas funções, coincidam, ou seja, $f(x) = g(x)$. Assim:

$\frac{1}{9^{x-1}} = 3^{x+1} \Rightarrow 3^{-2x+2} = 3^{x+1} \Rightarrow -2x + 2 = x + 1 \Rightarrow$

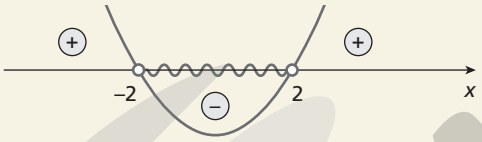
$\Rightarrow -3x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Para $x = \frac{1}{3}$, temos:

$f\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{1}{3}\right) = 3^{\frac{1}{3}+1} = 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$

Portanto, o ponto de intersecção dos gráficos é $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$.

**28. a)** $6^{x^2+1} < 6^5 \Rightarrow x^2 + 1 < 5 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$.

**b)** $\frac{1}{9} \geqslant 3^{x+3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-x-3} \Rightarrow 2 \leqslant -x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leqslant -3 - 2 \Rightarrow x \leqslant -5$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$.

**c)** $(0{,}44)^{x^2-4} \leqslant 1 \Rightarrow (0{,}44)^{x^2-4} \leqslant (0{,}44)^0 \Rightarrow x^2 - 4 \geqslant 0$




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

**d)** $\sqrt[3]{3^x} > 3^x \cdot 3^8 \Rightarrow 3^{\frac{x}{3}} > 3^{x+8} \Rightarrow \frac{x}{3} > x + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > 3x + 24 \Rightarrow -2x > 24 \Rightarrow x < -12$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$.

**29. a)** $f(x) = \sqrt{3^x - 243}$

Para existir $f(x)$, devemos ter:

$3^x - 243 \geqslant 0 \Rightarrow 3^x \geqslant 243 \Rightarrow 3^x \geqslant 3^5 \Rightarrow x \geqslant 5$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

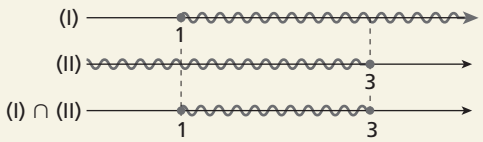
**b)** $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x}}$

Para $g(x)$ existir, devemos ter $2^x > 0$, o que é verdade para qualquer $x$ real.

Portanto, $D(g) = \mathbb{R}$.

**30. a)** $2 \leqslant 2^x \leqslant 2^3$

- $2 \leqslant 2^x \Rightarrow 1 \leqslant x \Rightarrow x \geqslant 1$ (I)
- $2^x \leqslant 2^3 \Rightarrow x \leqslant 3$ (II)




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

**b)** $\frac{1}{81} < 81^{x-1} < 9^x$

- $\frac{1}{81} < 81^{x-1} \Rightarrow 81^{-1} < 81^{x-1} \Rightarrow -1 < x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x < -1 + 1 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow x > 0$ (I)

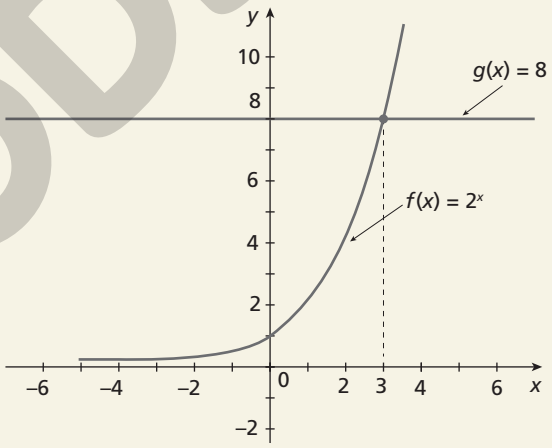
- $81^{x-1} < 9^x \Rightarrow 9^{2x-2} < 9^x \Rightarrow 2x - 2 < x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - x < 2 \Rightarrow x < 2$ (II)




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$.

**31.**




**a)** Para obter a abscissa em que $f(x) = g(x)$, fazemos:

$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Logo, $S = \{3\}$.

Podemos observar o ponto de intersecção (3, 8) no gráfico.

**b)** O gráfico mostra que $f(x) > g(x)$ para $x > 3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

**c)** O gráfico mostra que $f(x) \leqslant g(x)$ para $x \leqslant 3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

**32. a)** Sabemos que $g$ é da forma $g(x) = b^x$. Pelo gráfico, temos:

$g(1) = 3 \Rightarrow b^1 = 3 \Rightarrow b = 3$

Logo, $g(x) = 3^x$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Sabemos que $f$ é da forma $f(x) = a^{x+k}$. Pelo gráfico, temos:

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{9} \\ f(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{0+k} = \frac{1}{9} \\ a^{-3+k} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^k = \frac{1}{9} & \text{(I)} \\ a^{-3} \cdot a^k = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$a^{-3} \cdot \frac{1}{9} = 3 \Rightarrow a^{-3} = 27 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 3^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Substituindo $a$ por $\frac{1}{3}$ em (I), obtemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow k = 2$$

Logo: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

**b)** Sabemos que: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ e $g(x) = 3^x$

Os gráficos interceptam-se em $f(x) = g(x)$. Então:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 3^x \Rightarrow 3^{-x-2} = 3^x \Rightarrow -x - 2 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1$$

Logo, os gráficos interceptam-se em um ponto de abscissa $-1$. Calculando o valor da ordenada, temos:

$$f(-1) = g(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Portanto, o ponto de intersecção é $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

**c)** O intervalo representado na figura é $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$, que tem início a partir do valor de $x$ do ponto de intersecção dos gráficos: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ e $g(x) = 3^x$

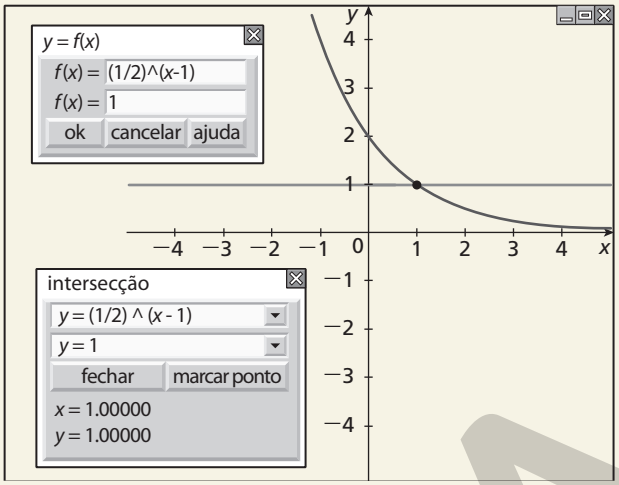
Então, para obter uma inequação que tenha como resultado $x > -1$, devemos fazer $f(x) < g(x)$ ou $g(x) > f(x)$. Observando o gráfico, notamos que o intervalo destacado corresponde à parte do gráfico em que a curva azul (função $f$) está abaixo da curva verde (função $g$), ou seja, $f(x) < g(x)$.

Logo, temos a inequação: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$

**d)** Se $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$ tem como solução $x > -1$, a solução complementar ($x \leqslant -1$) pode ser dada por:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$$

**33.** Em um *software* de construção de gráficos, escrever a expressão "$\left(\frac{1}{2}\right)$ ^ $(x - 1)$" na janela de equação explícita e clicar em ok. Depois, escrever "1" na janela de equação explícita e clicar em ok.
Clicar na função "intersecção" e no botão "marcar o ponto".
A partir da coordenada $x$ do ponto de intersecção, determinar o conjunto solução da inequação.

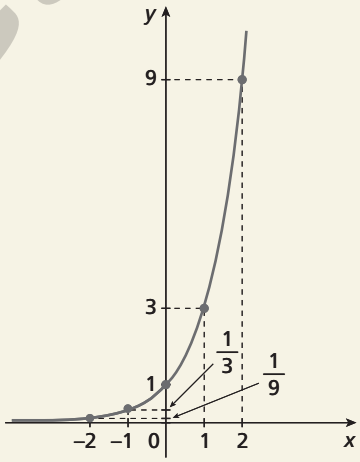



Na janela de intersecção, vê-se que o ponto de intersecção entre as funções é determinado pelo par ordenado (1, 1). Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.
*Comentário*: Mostre aos alunos que com essa atividade, percebe-se visualmente a mudança de sentido do sinal da inequação para o sinal do conjunto solução.

## Exercícios complementares

**1. a)** $f(x) = 3^x$

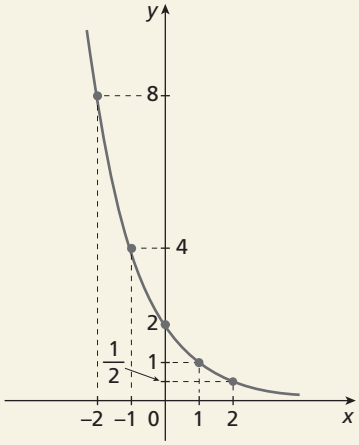
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $\frac{1}{9}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{3}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | 9 |




$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

**b)** $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | 8 |
| $-1$ | 4 |
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ |




$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**2.** Com $f(x) = 2^{5x}$ e $f(m) = 32$, temos:
$f(m) = 2^{5m} \Rightarrow 2^{5m} = 32 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{5m} = 2^5 \Rightarrow 5m = 5 \Rightarrow m = 1$

$$f\left(-\frac{m}{5}\right) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = 2^{5\left(-\frac{1}{5}\right)} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

**3.** $f(x) = 16^{1+\frac{1}{x}}$

$f(-1) + f(-2) - f(-4) =$

$= 16^{1+\frac{1}{-1}} + 16^{1+\frac{1}{-2}} - 16^{1+\frac{1}{-4}} =$

$= 16^{1-1} + 16^{1-\frac{1}{2}} - 16^{1-\frac{1}{4}} =$

$= 16^0 + 16^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{3}{4}} =$

$= 1 + \sqrt{16} - \sqrt[4]{16^3} =$

$= 1 + 4 - 2^3 =$

$= -3$

**4.** $M(t) = 50.000 \cdot (1,1)^t$

**a)** $M(3) = 50.000 \cdot (1,1)^3$

$M(3) = 50.000 \cdot 1,331$

$M(3) = 66.550,00$

Logo, após 3 meses o montante será R$ 66.550,00.

**b)** $M(6) = 50.000 \cdot (1,1)^6$

$M(6) = 50.000 \cdot 1,771561$

$M(6) = 88.578,05$

Logo, após 6 meses o montante será R$ 88.578,05.

**c)** $M(12) = 50.000 \cdot (1,1)^{12}$

$M(12) \simeq 50.000 \cdot 3,1384284$

$M(12) \simeq 156.921,42$

Logo, após 12 meses o montante será R$ 156.921,42, aproximadamente.

**5.** $V = 20.000 \cdot (0,9)^t \Rightarrow V = 20.000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 20.000 \cdot \frac{6.561}{10.000} \Rightarrow V = 13.122$

Logo, o valor desse automóvel após 4 anos será R$ 13.122,00.

**6.** $A(t) = A_0 \cdot (0,9)^t$

$A(5) = 10 \cdot (0,9)^5 \Rightarrow A(5) = 10 \cdot 0,59049 \Rightarrow A(5) \simeq 5,9$

Logo, após 5 minutos restarão no tanque aproximadamente 5,9 $m^3$ de ar.

**7.** $P(t) = 15.000 \cdot (1,035)^t$

$P(80) = 15.000 \cdot (1,035)^{80}$

$P(80) = 15.000 \cdot [(1,035)^{10}]^8$

$P(80) \simeq 15.000 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^8$

$P(80) \simeq 15.000 \cdot 2^4$

$P(80) \simeq 15.000 \cdot 16$

$P(80) \simeq 240.000$

Logo, daqui a 80 anos, haverá, aproximadamente, 240.000 indivíduos nessa população.

**8.** $f(x) = b^x$, com $0 < b < 1$

$f(1) + f(-1) = \frac{10}{3} \Rightarrow b^1 + b^{-1} = \frac{10}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow b + \frac{1}{b} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3b^2 + 3 = 10b \Rightarrow$

$\Rightarrow 3b^2 - 10b + 3 = 0 \Rightarrow b = 3$ (não serve, pois $b$ deve estar entre 0 e 1) ou $b = \frac{1}{3}$

Logo, $b = \frac{1}{3}$.

**9.** $P(t) = 64.000(1 - 2^{-0,1t})$

$P(t) = 63.000 \Rightarrow 64.000(1 - 2^{-0,1t}) = 63.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 2^{-0,1t} = \frac{63.000}{64.000} \Rightarrow -2^{-0,1t} = \frac{63}{64} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2^{-0,1t} = -\frac{1}{64} \Rightarrow 2^{-0,1t} = \frac{1}{64} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+0,1t} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow 0,1t = 6 \Rightarrow t = 60$

A população de microrganismos será de 63.000 em 60 dias.

**10.** $f(x) = \frac{5 \cdot 2^x}{\sqrt{2^x - 4}}$

Para $f(x)$ existir, devemos ter:
$2^x - 4 > 0 \Rightarrow 2^x > 4 \Rightarrow 2^x > 2^2 \Rightarrow x > 2$
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

**11.** $f(x) = 5^x$

$f(1) + f(a) - f(a + 1) + 4 \cdot f(a) =$
$= 5^1 + 5^a - 5^{a+1} + 4 \cdot 5^a =$
$= 5 + 5^a - 5^a \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^a =$
$= 5 - 4 \cdot 5^a + 4 \cdot 5^a = 5$

**12.** **a)** $(1,15)^n$

Para $n = 1$, temos: $(1,15)^1 = 1,15$
Para $n = 2$, temos: $(1,15)^2 = 1,3225$
Para $n = 3$, temos: $(1,15)^3 = 1,520875$
Para $n = 4$, temos: $(1,15)^4 = 1,74900625$
Para $n = 5$, temos: $(1,15)^5 = 2,0113571875$
Portanto, serão necessários 5 anos para que os produtos comercializados nesse país dobrem de preço.

**b)** $8 \cdot (1,15)^7 \simeq 8 \cdot 2,66 = 21,28$
O preço será, aproximadamente, R$ 21,28.

**13.** Sendo $h$ a altura da menina, $IMC = \frac{\text{massa (kg)}}{[\text{altura (m)}]^2}$ e

$RIP = \frac{\text{altura (cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa (kg)}}}$; então:

(I) $25 = \frac{64}{h^2} \Rightarrow h^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow h = 1,6$

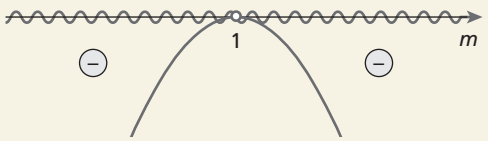
Logo, a menina tem 1,6 m de altura. Como o RIP é calculado com a altura em centímetro, vamos converter: 1,6 m = 160 cm. Logo:

(II) $RIP = \frac{160}{\sqrt[3]{64}} = \frac{160}{4} = 40$

alternativa e

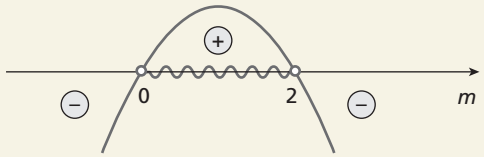
**14.** A função $f(x) = (-m^2 + 2m)^x$ é decrescente se $0 < (-m^2 + 2m) < 1$.

(I) $-m^2 + 2m < 1 \Rightarrow -m^2 + 2m - 1 < 0$




Logo, $m \neq 1$.

(II) $-m^2 + 2m > 0$



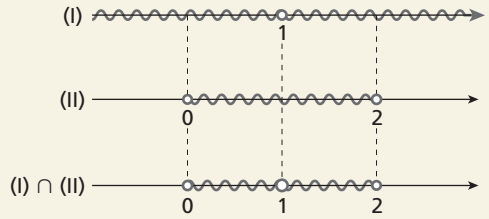

Logo, $0 < m < 2$.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Fazendo a intersecção dos dois intervalos, temos:

ADILSON SECCO




$S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 2 \text{ e } m \neq 1\}$

**15.** $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \quad \text{(I)} \\ x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$2^{5-y} + 2^y = 12 \Rightarrow 2^5 \cdot 2^{-y} + 2^y = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 32 \cdot (2^y)^{-1} + 2^y = 12$

Fazendo $2^y = t$, temos:

$32 \cdot t^{-1} + t = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 32 \cdot \frac{1}{t} + t - 12 = 0 \Rightarrow 32 + t^2 - 12t = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 - 12t + 32 = 0 \Rightarrow t = 8$ ou $t = 4$

Como $2^y = t$, vem:

$2^y = 8 \Rightarrow 2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3$

$2^y = 4 \Rightarrow 2^y = 2^2 \Rightarrow y = 2$

Substituindo os valores de $y$ em (II), obtemos:

$x = 5 - 3 = 2$ ou $x = 5 - 2 = 3$

$S = \{(2, 3), (3, 2)\}$

**16.** $x^2 - 4x + 2^m = 0$

A equação possui duas raízes reais e iguais se $\Delta = 0$.

$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 2^m \Rightarrow \Delta = 16 - 2^{2+m}$

Assim, para $\Delta = 0$, temos:

$16 - 2^{2+m} = 0 \Rightarrow 16 = 2^{2+m} \Rightarrow 2^4 = 2^{2+m} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + m = 4 \Rightarrow m = 4 - 2 \Rightarrow m = 2$

**17.** Resposta pessoal.

Espera-se que os estudantes busquem em *sites* e anúncios de imobiliárias locais os valores de imóveis disponíveis. Pode ser necessário ajudar na busca e escolha do imóvel para a simulação de financiamento. Organizar a sala em duplas pode facilitar a dinâmica de trocas dos problemas e das correções; se os alunos encontrarem dificuldades, pode-se propor que discutam com outras duplas como resolver os problemas.

## Autoavaliação

**1.** $\frac{(\sqrt{7})^8}{(\sqrt{7})^6} = (\sqrt{7})^{8-6} = (\sqrt{7})^2 = 7$

alternativa a

**2.** $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow$ seu inverso é $\frac{1}{\sqrt{3}}$

alternativa c

**3.** $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

alternativa c

**4.** A sentença $h(x) = \frac{1^x}{5}$ não é lei de formação de uma função exponencial, porque, para $h(x) = a^x$, devemos ter $a > 1$ ou $0 < a < 1$ e, nessa função, temos $a = 1$.

alternativa c

**5.** $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

Se $x = 0 \Rightarrow f(x) = a^0 = 1$

Logo, o gráfico passa pelo ponto (0, 1).

alternativa d

**6.** A função exponencial $f$, dada por $f(x) = (\sqrt{11})^x$, é crescente, pois $\sqrt{11} > 1$.

alternativa d

**7.** $\pi > 1$; portanto, $f(x) = \pi^x$ é uma função exponencial crescente.

alternativa b

**8.** $P(x) = 1{,}029 \cdot (1 + 0{,}20)^n$

$P(x) = 1{,}029 \cdot (1{,}20)^n$

Como a população cresce 20% em cada década e em 2021 terão passado duas décadas desde o início deste século, a população nesse ano será:

$P(2) = 1{,}029 \cdot (1{,}2)^2 = 1{,}48176$

alternativa b

**9.** $5^{-x} = 125 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -3$

alternativa b

**10.** $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+5} \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$

Como a base está entre 0 e 1, temos:

$2x + 5 \leqslant x - 1 \Rightarrow 2x - x \leqslant -1 - 5 \Rightarrow x \leqslant -6$

alternativa a

## Compreensão de texto

A seção *Compreensão de texto* desse capítulo apresenta aos alunos um texto em que eles poderão colocar em prática conteúdos já estudados, como potências e sequências.

Com o texto lúdico de Malba Tahan, os alunos vão conhecer a notação binária.

Para explorar esse texto em sala de aula, é importante explicar que uma mesma quantidade pode ser representada na notação decimal (usualmente usada) e na notação binária. Pode-se fazer um paralelo entre essas notações, a fim de que os alunos tenham uma melhor compreensão.

Algarismos utilizados

| Notação decimal | Notação binária |
|---|---|
| 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 | 0 e 1 |

Base utilizada

| Notação decimal | Notação binária |
|---|---|
| 10 | 2 |

Expoente utilizado

| Notação decimal | Notação binária |
|---|---|
| Qualquer número natural | Qualquer número natural |

Dessa maneira, podemos escrever qualquer quantidade nessas bases, fazendo decomposições a partir da base escolhida. Para enriquecer o trabalho, pode-se mostrar aos alunos a decomposição de uma mesma quantidade nas duas bases. Por exemplo, 182, na base decimal, pode ser escrito assim:

$182 = 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

Esse mesmo número pode ser escrito na base 2; para isso, devemos inicialmente escrevê-lo como uma soma de parcelas

MODERNA

de potências de 2. Elaborar uma tabela com algumas potências de 2 poderá ser bastante útil para fazer essas relações:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2^0 = 1$ | $2^1 = 2$ | $2^2 = 4$ | $2^3 = 8$ | $2^4 = 16$ |
| $2^5 = 32$ | $2^6 = 64$ | $2^7 = 128$ | $2^8 = 256$ | |

Desse modo, os alunos poderão perceber, por exemplo, que:

$182 = 128 + 54 = 128 + 32 + 22 = 128 + 32 + 16 + 6 =$
$= 128 + 32 + 16 + 4 + 2$

Em seguida, escrevemos novamente essa soma, utilizando as potências de 2:

$182 = 128 + 32 + 16 + 4 + 2 =$
$= 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$

Para completar a decomposição, escrevemos as potências em ordem decrescente e incluímos as potências de 2 que não aparecem, multiplicando cada uma das parcelas por 0 ou 1. Assim:

$182 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 =$
$= \mathbf{1} \cdot 2^7 + \mathbf{0} \cdot 2^6 + \mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0$

Para finalizar, devemos escrever apenas os valores 0 e 1 que multiplicam as potências de 2. Portanto, 182 na base binária será representado por 10110110.

**1.** A intenção é que os alunos expliquem as condições do problema:

- As mil moedas de 1 dinar devem ser distribuídas em 10 caixas.
- Da 1ª à 10ª caixa, a numeração deve ser feita em ordem estritamente crescente, relativa à quantidade de moedas que cada caixa contém.
- Deve ser possível fazer qualquer pagamento, de 1 a 1.000 dinares, sem que seja necessário abrir as caixas.

**2.** A quarta caixa deve ter 8 moedas, porque já temos:

- caixa 1 → **1** dinar
- caixa 2 → **2** dinares
- caixa 3 → não precisa ter 3 dinares, pois $3 = 2 + 1$
  Deverá ter **4** dinares
- caixa 4 → não precisa ter 5 dinares, pois $5 = 4 + 1$
  → não precisa ter 6 dinares, pois $6 = 4 + 2$
  → não precisa ter 7 dinares, pois $7 = 4 + 2 + 1$
  → deverá ter **8** dinares, pois não há como obter esse valor usando 1, 2 e 4.

**3.** Podemos começar registrando a quantidade de moedas de cada caixa, baseando-se no raciocínio de Beremis:

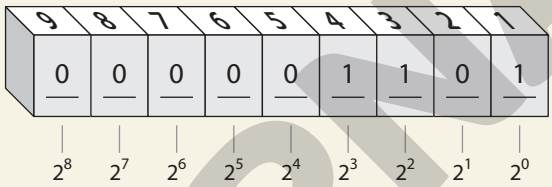
| Caixa | Quantidade de moedas |
|---|---|
| 1 | $2^0 = 1$ |
| 2 | $2^1 = 2$ |
| 3 | $2^2 = 4$ |
| 4 | $2^3 = 8$ |
| 5 | $2^4 = 16$ |
| 6 | $2^5 = 32$ |
| 7 | $2^6 = 64$ |
| 8 | $2^7 = 128$ |
| 9 | $2^8 = 256$ |
| 10 | 489 |

Então, pode-se fazer a composição usando esses números como parcelas das adições que resultem nos números pedidos e verificar em quais caixas estão essas parcelas. Ou seja:

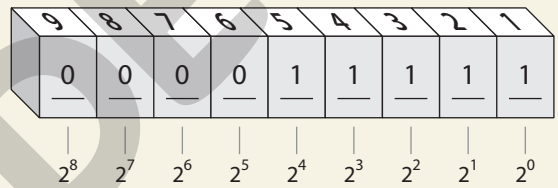
- $13 = 8 + 4 + 1$ → caixas 4, 3 e 1.
- $31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ → caixas 5, 4, 3, 2 e 1.
- $310 = 256 + (54) = 256 + 32 + (22) = 256 + 32 + 16 + (6) = 256 + 32 + 16 + 4 + 2$ → caixas 9, 6, 5, 3 e 2.
- $521 = 489 + 32$ → caixas 10 e 6.

**4.** Aplicando as respostas do item anterior:

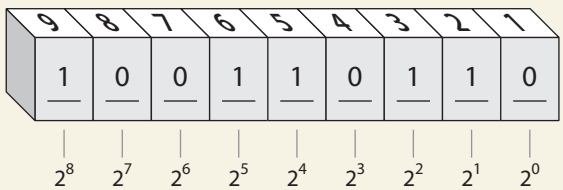
Número 13




Número 31




Número 310




**5.** Basta utilizar a resposta do item anterior:

Número 13 → 000001101

Número 31 → 000011111

Número 310 → 100110110

Espera-se que os alunos percebam que foram encontradas as mesmas representações nas atividades 4 e 5.

**6.** Resposta pessoal.

Resposta possível:

Número em notação binária: 1111110

Sua notação decimal será:

$1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$
$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 0 = 126$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

## Exercícios propostos

**1.** **a)** $\log_5 125 = 3$, pois $5^3 = 125$.

**b)** $\log_9 1 = 0$, pois $9^0 = 1$.

**c)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

**d)** $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, pois $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

**e)** $\log 1.000 = 3$, pois $10^3 = 1.000$.

**f)** $\log 0{,}01 = -2$, pois $10^{-2} = 0{,}01$.

**2.** **a)** $\log 560 = x \Rightarrow 10^x = 560$

Como $100 < 560 < 1.000$, ou seja, $10^2 < 10^x < 10^3$, concluímos que $2 < x < 3$. Logo, $\log 560$ está entre 2 e 3.

**b)** $\log_5 3 = x \Rightarrow 5^x = 3$

Como $1 < 3 < 5$, ou seja, $5^0 < 5^x < 5^1$, concluímos que $0 < x < 1$. Logo, $\log_5 3$ está entre 0 e 1.

**3.** **a)** $\log_{\sqrt{2}} 2 = x \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = 2 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow x = 2$

Assim, $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$.

**b)** $\log 0{,}1 = y \Rightarrow 10^y = 0{,}1 \Rightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$

Assim, $\log 0{,}1 = -1$.

**c)** $\log_{\frac{1}{4}} 16 = w \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^w = 16 \Rightarrow 4^{-w} = 4^2 \Rightarrow w = -2$

Assim, $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$.

**d)** $\log_2 \sqrt{128} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{128} \Rightarrow 2^x = \sqrt{2^7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

Assim, $\log_2 \sqrt{128} = \frac{7}{2}$

**e)** $\log_4 256 = x \Rightarrow 4^x = 256 \Rightarrow 4^x = 4^4 \Rightarrow x = 4$

Assim, $\log_4 256 = 4$.

**f)** Como no item **e** verificamos que $\log_4 256 = 4$, temos:

$\log_2 (\log_4 256) = x \Rightarrow \log_2 (4) = x \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Assim, $\log_2 (\log_4 256) = 2$.

**4.** $A = \log_7 7 \Rightarrow 7^A = 7^1 \Rightarrow A = 1$

$B = \log_{76} 1 \Rightarrow 76^B = 1 \Rightarrow 76^B = 76^0 \Rightarrow B = 0$

$C = \log_{0{,}5} 8 \Rightarrow (0{,}5)^C = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^C = 2^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^C = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow C = -3$

$D = \log_8 8^{-2} \Rightarrow 8^D = 8^{-2} \Rightarrow D = -2$

Logo: $B^A + C \cdot D = 0^1 + (-3) \cdot (-2) = 6$

**5.** **a)** $\log (2m - 5) = 3 \Rightarrow 2m - 5 = 10^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m = 1.005 \Rightarrow m = \frac{1.005}{2} \Rightarrow m = 502{,}5$

**b)** $\log (m - 9) = -2 \Rightarrow m - 9 = 10^{-2} \Rightarrow m = 9{,}01$

**c)** $\log_2 (5 - m) = 0 \Rightarrow 5 - m = 2^0 \Rightarrow 5 - m = 1 \Rightarrow m = 4$

**d)** $\log_m 0{,}1 = -1 \Rightarrow m^{-1} = 0{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{0{,}1}{1} \Rightarrow m = \frac{1}{0{,}1} \Rightarrow m = 10$

**6.** **a)** $\log_x 5$

Pela definição, temos: $x > 0$ e $x \neq 1$

Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

**b)** Para existir $\log_2 (3x + 5)$, devemos ter:

$3x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{3}$

Portanto, $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$.

**c)** $\log_3 \left(\frac{x - 2}{x + 4}\right)$ existe se:

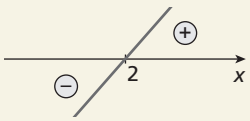
$\frac{x - 2}{x + 4} > 0$

Consideremos:

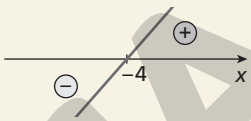
$f(x) = x - 2$ e $g(x) = x + 4$

Resolvendo a inequação-quociente, temos:

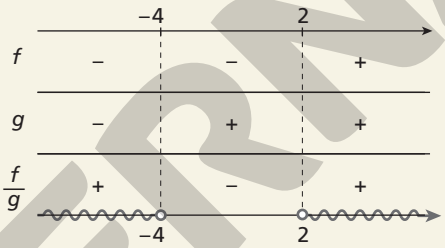
$f(x) = x - 2$




$g(x) = x + 4$




Quadro de sinais

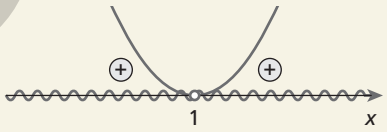



Assim, devemos ter $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$.

**d)** $\log_5 (x^2 - 2x + 1)$

Condição de existência: $x^2 - 2x + 1 > 0$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$




Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

**7.** **a)** $\log_{11} 11 = 1$, pois $11^1 = 11$.

**b)** $\log_{32} 1 = 0$, pois $32^0 = 1$.

**c)** $\log_6 6^7 = 7$, pois $6^7 = 6^7$.

**d)** $\log 100 = \log 10^2 = 2$, pois $10^2 = 10^2$.

**e)** $15^{\log_{15} 16} = 16$, pois $\log_{15} 16 = m \Rightarrow 15^m = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15^{\log_{15} 16} = 16$

**f)** $\log_3 \sqrt{81} = \log_3 \sqrt{3^4} = \log_3 3^2 = 2$, pois $3^2 = 3^2$.

**8.** **a)** $\log_7 b = 1 \Rightarrow b = 7^1 \Rightarrow b = 7$

**b)** $\log_8 x = \log_8 \left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 8^{\log_8 \left(\frac{2}{3}\right)} = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

**c)** $3^{\log_3 2} = n \Rightarrow n = 2$

**d)** $\log x^2 = \log 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

**e)** $y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^y = \sqrt{81} \Rightarrow 3^{-y} = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -y = 2 \Rightarrow y = -2$

**f)** $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[6]{5} = k \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^k = \sqrt[6]{5} \Rightarrow 5^{\frac{k}{2}} = 5^{\frac{1}{6}} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**9.** **a)** $(\log_5 10)^{\log_3 1} = (\log_5 10)^0 = 1$

**b)** $(\log_{64} 64)^{\log_3 2} = 1^{\log_3 2} = 1$

**c)** $\log(\log 10^{10}) = \log 10 = 1$

**d)** $(\log 0{,}01) \cdot (\log 100) = (\log 10^{-2}) \cdot (\log 10^2) =$
$= (-2) \cdot (2) = -4$

**e)** $(\log_3 1) \cdot (\log_5 20) = 0 \cdot \log_5 20 = 0$

**f)** $(\log_{11} 121) \cdot (\log_{13} 169) = (\log_{11} 11^2) \cdot (\log_{13} 13^2) =$
$= (2) \cdot (2) = 4$

**10.** $pH = -\log [H^+] = -\log 10^{-3} = -(-3) = 3$
Como $pH < 7$, concluímos que a solução é ácida.

*Comentário*: Esse exercício, assim como os exercícios propostos **11**, **12**, **18** e **19**, podem ser aprofundados em um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

**11.** Temos que $pH = -\log [H^+]$ e $pH = 9$. Então:
$-\log [H^+] = 9 \Rightarrow \log [H^+] = -9$
Pela definição de logaritmo: $10^{-9} = [H^+]$
Portanto, a concentração de $H^+$ é $10^{-9}$ mol/$\ell$.

**12.** Resposta pessoal.

**13.** **a)** $\log_2 (64 \cdot 13) = \log_2 64 + \log_2 13 = 6 + \log_2 13$

**b)** $\log_{\sqrt{2}} (2 \cdot 3) = \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 3 = 2 + \log_{\sqrt{2}} 3$

**c)** $\log_3 (13 \cdot 3) = \log_3 13 + \log_3 3 = \log_3 13 + 1$

**d)** $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{16}\right)^9 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{18} = 18$

**e)** $\log \left(\frac{1}{10}\right)^{19} = \log 10^{-19} = -19$

**f)** $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{26}{32}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{13}{16}\right) =$

$= \log_{\frac{1}{2}} \left(13 \cdot \frac{1}{16}\right) = \log_{\frac{1}{2}} 13 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{16}\right) =$

$= \log_{\frac{1}{2}} 13 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

**14.** **a)** $A = \log 30 + \log 7 - \log 21 =$
$= \log (3 \cdot 10) + \log 7 - \log (3 \cdot 7) =$
$= \cancel{\log 3} + \log 10 + \cancel{\log 7} - \cancel{\log 3} - \cancel{\log 7} =$
$= \log 10 = 1$

Outro modo:
$A = \log 30 + \log 7 - \log 21 =$
$= \log 30 + \log \left(\frac{7}{21}\right) = \log 30 + \log \frac{1}{3} =$
$= \log \left(30 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log 10 = 1$

Portanto, $A = 1$.

**b)** $A = \log_2 100 - \log_2 25 =$
$= \log_2 (4 \cdot 25) - \log_2 25 =$
$= \log_2 4 + \cancel{\log_2 25} - \cancel{\log_2 25} =$
$= \log_2 4 = 2$

Outro modo:
$A = \log_2 100 - \log_2 25 = \log_2 \left(\frac{100}{25}\right) = \log_2 4 = 2$

Portanto, $A = 2$.

*Comentário*: Instigar os alunos a resolver essa questão pelo segundo modo de resolução, para que eles percebam que as propriedades também podem ser usadas para transformar uma adição/subtração de logaritmos em um logaritmo de um produto/quociente.

**15.** **a)** $\log_a (b \cdot c \cdot d) = \log_a b + \log_a c + \log_a d$

**b)** $\log_a \left(\frac{2 \cdot k}{d}\right) = \log_a (2 \cdot k) - \log_a d =$
$= \log_a 2 + \log_a k - \log_a d$

**c)** $\log_a a^{-n} = -n \cdot \log_a a = -n \cdot 1 = -n$

**d)** $\log_a \left(\frac{1}{y}\right) = \log_a 1 - \log_a y = 0 - \log_a y =$
$= -\log_a y$

**16.** **a)** $\log_{12} \left(\frac{3}{4}\right) = \log_{12} 3 - \log_{12} 4 =$
$= \log_{12} 3 - 2 \log_{12} 2 \simeq -0{,}116$

**b)** $\log_{12} 6 = \log_{12} 2 \cdot 3 = \log_{12} 2 + \log_{12} 3 \simeq 0{,}721$

**17.** **a)** $\log 15 = \log (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 =$
$= 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}176$

**b)** $\log 45 = \log (3 \cdot 3 \cdot 5) = \log 3 + \log 3 + \log 5 =$
$= 0{,}477 + 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}653$

**c)** $\log \left(\frac{5}{3}\right) = \log 5 - \log 3 = 0{,}699 - 0{,}477 = 0{,}222$

**d)** $\log 0{,}6 = \log \left(\frac{6}{10}\right) = \log \left(\frac{3}{5}\right) = \log 3 - \log 5 =$
$= 0{,}477 - 0{,}699 = -0{,}222$

**e)** $\log_2 20 = \log_2 (2^2 \cdot 5) = \log_2 2^2 + \log_2 5 =$
$= 2 + 2{,}322 = 4{,}322$

**f)** $\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2 \cdot \log_2 5 = 2 \cdot 2{,}322 = 4{,}644$

**18.** $pH = -\log (3{,}8 \cdot 10^{-5}) = -(\log 3{,}8 + \log 10^{-5}) =$
$= -\log 3{,}8 - (-5) \simeq -0{,}58 + 5 = 4{,}42$

**19.** $pH = 6{,}1 + \log \left(\frac{B}{C}\right) = 6{,}1 + \log \left(\frac{25}{2}\right) =$
$= 6{,}1 + \log 25 - \log 2 = 6{,}1 + \log 5^2 - \log 2 =$
$= 6{,}1 + 2 \cdot \log 5 - \log 2 \simeq$
$\simeq 6{,}1 + 2 \cdot (0{,}699) - 0{,}301 = 7{,}197$
Logo, o pH do sangue dessa pessoa é, aproximadamente, 7,197.

**20.** **a)** $\log 32 \simeq 1{,}5051$

**b)** $\log_6 40 = \frac{\log 40}{\log 6} \simeq \frac{1{,}6021}{0{,}7782} \simeq 2{,}0587$

**21.** **a)** $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 =$
$= 0{,}30 + 0{,}48 = 0{,}78$

**b)** $\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 =$
$= 0{,}48 + 1 = 1{,}48$

**c)** $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{,}30}{0{,}48} = 0{,}625$

**d)** $\log 5 = \log \left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 =$
$= 1 - 0{,}30 = 0{,}70$

**e)** $\log 144 = \log 12^2 = 2 \cdot \log 12 = 2 \cdot \log (2^2 \cdot 3) =$
$= 2 \cdot (\log 2^2 + \log 3) =$
$= 2 \cdot (2 \cdot \log 2 + \log 3) =$
$= 2 \cdot (2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48) = 2{,}16$

**f)** $\log \sqrt[3]{30} = \log 30^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log (3 \cdot 10) =$
$= \frac{1}{3} \cdot (\log 3 + \log 10) =$
$= \frac{1}{3} \cdot (0{,}48 + 1) = 0{,}4933\ldots$

**22.** **a)** $\log_3 10 = \frac{\log 10}{\log 3} = \frac{1}{\log 3}$

**b)** $\log_2 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = \frac{1}{\log_5 2}$

**c)** $\log 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 10} = \frac{1}{\log_3 10}$

**d)** $\log_7 121 = \frac{\log_{11} 121}{\log_{11} 7} = \frac{2}{\log_{11} 7}$

MODERNA

**23.** **a)** $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

**b)** O logaritmo de $b$ na base $a$ é igual ao inverso do logaritmo de $a$ na base $b$.

**c)** $\log_a b \cdot \log_b a = \dfrac{1}{\log_b a} \cdot \log_b a = 1$

*Comentário*: Espera-se que questões desse tipo, em que os alunos, após serem orientados a dar determinados passos, são chamados a elaborar conclusões, sejam incentivos para novas experiências.

**24.** $9 - (\log_{15} 8) \cdot (\log_2 15) = 9 - 3(\log_{15} 2) \cdot (\log_2 15) =$
$= 9 - 3 \cdot \dfrac{1}{\log_2 15} \cdot \log_2 15 = 9 - 3 = 6$

**25.** $A = \log_{\frac{1}{5}} 16 \cdot \log_{16} \left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{1}{\log_{16} \left(\frac{1}{5}\right)} \cdot \log_{16} \left(\dfrac{1}{5}\right) = 1$

$B = \dfrac{1}{\log_{25} 5} = \log_5 25 = 2$

**26.** $\log_3 5 \cdot \log_7 2 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 3$
Escrevendo todos os logaritmos na base 10, temos:

$$\frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{\cancel{\log 2}}{\cancel{\log 7}} \cdot \frac{\cancel{\log 7}}{\cancel{\log 5}} \cdot \frac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 2}} = 1$$

*Comentário*: Nessa resolução, os logaritmos foram todos escritos na base 10, mas poderia ter sido empregado outro valor para a base, desde que respeitasse as restrições da definição de logaritmo. Para trabalhar esse exercício, pode-se abrir uma discussão com os alunos e, caso nenhum deles tenha empregado outra base, instigá-los a testar outros valores.

**27.** **a)** $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c$
Escrevendo todos os logaritmos na base $a$, temos:
$\dfrac{\log_a a}{\log_a b} \cdot \dfrac{\log_a b}{\log_a c} \cdot \log_a c = \log_a a = 1$

**b)** $\dfrac{\log_c a}{\log_c b} - \log_b a = \log_b a - \log_b a = 0$

**c)** $\log_b a^2 \cdot \log_a b^2 = 2 \log_b a \cdot 2 \log_a b =$
$= 2 \cdot \dfrac{\log_a a}{\log_a b} \cdot 2 \cdot \dfrac{\log_a b}{\log_a a} = 4$

**d)** $a \cdot \log_c b \cdot \log_{b^a} c^5 = \log_c b^a \cdot 5 \cdot \log_{b^a} c =$
$= \dfrac{\log b^a}{\log c} \cdot 5 \cdot \dfrac{\log c}{\log b^a} = 5$

**28.** $\log_{a^n} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a a^n} = \dfrac{\log_a b}{n \cdot \log_a a} = \dfrac{\log_a b}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a b$

**29.** **a)** Em 1 ano, ou seja, em 12 meses, teremos:
$M = 1.400 \cdot (1{,}009)^{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow M \simeq 1.400 \cdot 1{,}1135 \Rightarrow M \simeq 1.558{,}9$
Logo, o montante será de aproximadamente R$ 1.558,90

**b)** Substituindo $M$ por R$ 2.100,00, temos:
$1.400 \cdot (1{,}009)^t = 2.100 \Rightarrow (1{,}009)^t = \dfrac{2.100}{1.400} \Rightarrow$
$\Rightarrow (1{,}009)^t = 1{,}5$
Aplicando a definição de logaritmo, temos:
$t = \log_{1{,}009} 1{,}5 = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}009}$
Em uma calculadora científica, obtemos
$\log 1{,}5 \simeq 0{,}1761$ e $\log 1{,}009 \simeq 0{,}0039$. Assim:
$t \simeq \dfrac{0{,}1761}{0{,}0039} \simeq 45{,}1$
Logo, são necessários 46 meses de aplicação para que o montante chegue a R$ 2.100,00.

**30.** **a)** Após um trimestre:
$1.500 + 1.500 \cdot 0{,}2 = 1.500 \cdot (1 + 0{,}2) =$
$= 1.500 \cdot (1{,}2) = 1.800$
Logo, após um trimestre essa empresa estará devendo R$ 1.800,00.
Após dois trimestres:
$1.800 + 1.800 \cdot 0{,}2 = 1.800 \cdot (1 + 0{,}2) =$
$= 1.800 \cdot (1{,}2) = 2.160$
Assim, após dois trimestres essa empresa estará devendo R$ 2.160,00.
*Comentário*: Para calcular um acréscimo de 20% sobre um valor, espera-se que os alunos percebam que basta multiplicar o valor por 1,2.

**b)** Organizando os cálculos realizados no item anterior, temos:

| Tempo | Cálculos |
|---|---|
| Após 1 trimestre | $d = 1.500 \cdot (1{,}2)$ |
| Após 2 trimestres | $d = 1.500 \cdot (1{,}2) \cdot (1{,}2)$<br>$d = 1.500 \cdot (1{,}2)^2$ |

Analisando esses resultados, conclui-se que, para calcular o valor da dívida $d$ após $n$ trimestres, pode ser utilizada a fórmula: $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$

**c)** Usando a fórmula do item anterior, teremos:
$3.110{,}40 = 1.500 \cdot (1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = \dfrac{3.110{,}40}{1.500} \Rightarrow$
$\Rightarrow (1{,}2)^n = 2{,}0736$
Aplicando a definição de logaritmo, temos:
$n = \log_{1{,}2} 2{,}0736 \Rightarrow n = \log_{1{,}2} (1{,}2)^4 \Rightarrow n = 4$
Para chegar a R$ 3.110,40 serão necessários 4 trimestres, ou seja, 1 ano.

**d)** Mais uma vez, podemos usar a fórmula do item **b**:
$d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n \Rightarrow (1{,}2)^n = \dfrac{d}{1.500} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \log_{1{,}2} \left(\dfrac{d}{1.500}\right)$

**31.** Resposta pessoal.

**32.** **a)** $f(7) = \log_2 (7 + 1) = \log_2 8 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

**b)** $f(0) = \log_2 (0 + 1) = \log_2 1 = 0$

**c)** $f(-0{,}5) = \log_2 (-0{,}5 + 1) =$
$= \log_2 \left(\dfrac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$

**d)** $f\left(\sqrt{2} - 1\right) = \log_2 \left(\sqrt{2} - 1 + 1\right) = \log_2 \sqrt{2} =$
$= \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

**33.** **a)** $g(x) = \log_3 (x - 4) = 3 \Rightarrow x - 4 = 3^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 27 + 4 \Rightarrow x = 31$

**b)** $g(x) = \log_3 (x - 4) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x - 4 = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{3} + 4$

**34.** **a)** $f(x) = \log (2x + 5)$
Condição de existência:
$2x + 5 > 0 \Rightarrow 2x > -5 \Rightarrow x > -\dfrac{5}{2}$
Portanto: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{5}{2}\right\}$

MODERNA

**b)** $f(x) = \log_{x+2}(3 - x)$

Condição de existência do logaritmando:

$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$ (I)

Condição de existência da base:

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$ (II)

$x + 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$ (III)

Então, pelas desigualdades (I), (II) e (III), temos:

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$

**c)** $g(x) = \log_{18} 2^x$

Condição de existência: $2^x > 0$

Como, para todo $x$, $2^x > 0$, vem: $D(g) = \mathbb{R}$

**35.** Substituindo $p$ por 0,4 na equação, obtemos:

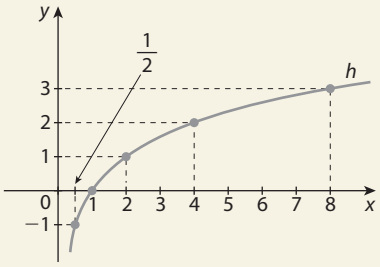
$$h(0{,}4) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{0{,}4}\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{10}{4}\right) =$$

$$= 20 \cdot [\log 10 - \log 4] = 20 \cdot [\log 10 - 2 \log 2] \simeq$$
$$\simeq 20 \cdot [1 - 2 \cdot 0{,}3] = 8$$

alternativa b

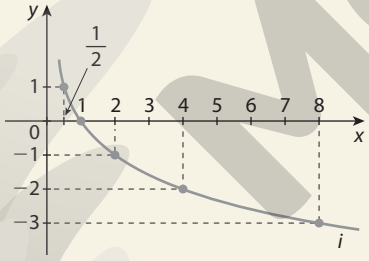
**36. a)** $h(x) = \log_2 x$

| $x$ | $h(x)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |




**b)** $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

| $x$ | $i(x)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | $-1$ |
| 4 | $-2$ |
| 8 | $-3$ |




- A função $h$ é crescente e a função $i$ é decrescente.
- Resposta possível:
  Para verificar se uma função é crescente ou decrescente, podemos observar o valor da base $a$ de $\log_a x$:

  $\begin{cases} \text{se } a > 1, \text{ a função será decrescente;} \\ \text{se } 0 < a < 1, \text{ a função será decrescente.} \end{cases}$

**37. a)** Como a base $\left(\frac{1}{10}\right)$ é um número entre 0 e 1, concluímos que a função é decrescente.

**b)** Como a base (10) é maior que 1, concluímos que a função é crescente.

**38. a)** $f(x) = \log_{k-3} x$

Para $f$ ser crescente: $k - 3 > 1 \Rightarrow k > 4$

Logo, $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$.

**b)** $f(x) = \log_{3k-1} x$

Para $f$ ser decrescente:

$0 < 3k - 1 < 1 \Rightarrow 1 < 3k < 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$

Logo, $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$.

**39. a)** $f(x) = \log_a x$

$f(9) = 2 \Rightarrow \log_a 9 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

$a = -3$ não serve devido à condição de existência.

Então: $f(x) = \log_3 x$

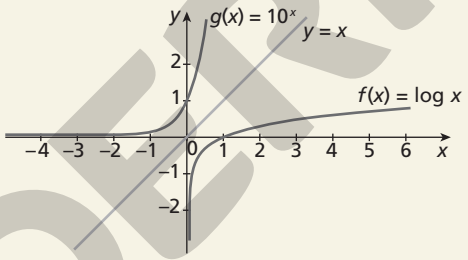
**b)** $g(x) = \log_a x$

$g(4) = -1 \Rightarrow \log_a 4 = -1 \Rightarrow a^{-1} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

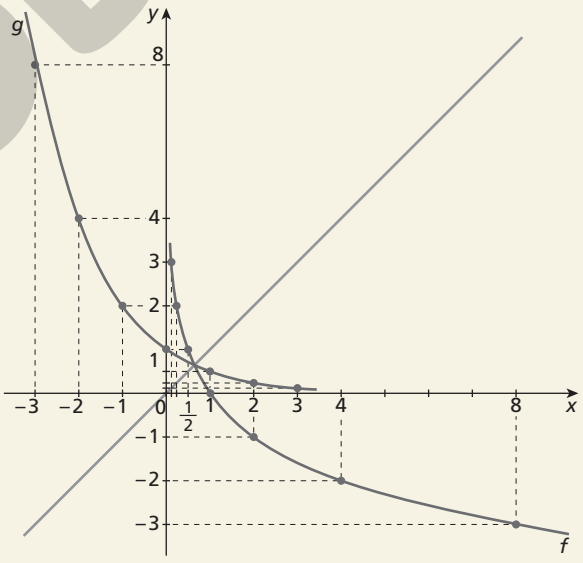
Então: $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

**40.** Em todos os itens, primeiro foi construído o gráfico de uma das duas funções e, em seguida, traçado o gráfico da outra função considerando a simetria em relação à reta $y = x$.

**a)**




**b)**




**41.** Sendo $S$ a soma das áreas dos dois retângulos, vem:

$S = (3 - 2) \cdot (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) + (4 - 3) \cdot (\log_{10} 4 - \log_{10} 3)$

$S = 1 \cdot (\log_{10} 3 - \log_{10} 2) + 1 \cdot (\log_{10} 4 - \log_{10} 3)$

$S = \log_{10} 4 - \log_{10} 2$

$S = \log_{10} 2^2 - \log_{10} 2$

$S = 2 \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 2$

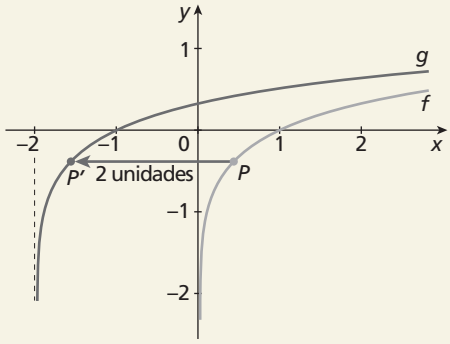
$S = \log_{10} 2$

alternativa a

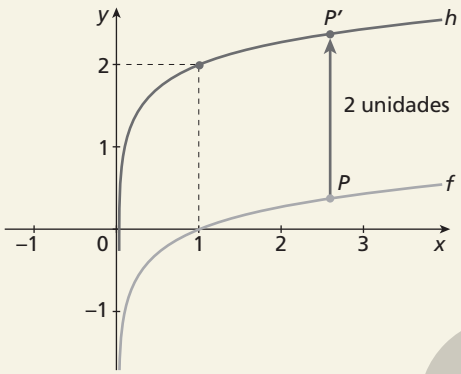
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

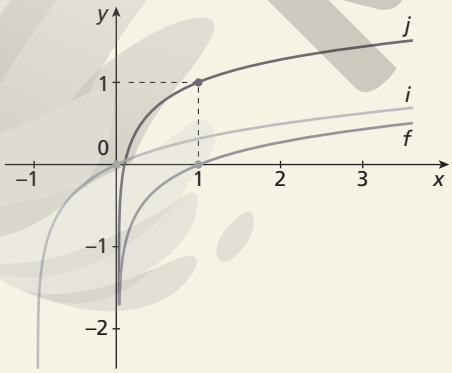
**42. a)** Uma estratégia para a obtenção dos gráficos pedidos é fazer a translação adequada do gráfico da função $f$ tal que $f(x) = \log x$.
No caso de $g(x) = \log (x + 2)$, temos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em duas unidades no sentido negativo do eixo $x$. Observe os pontos de intersecção com o eixo horizontal e os pontos $P$ e $P'$, por exemplo.




No caso de $h(x) = \log x + 2$, temos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em duas unidades no sentido positivo do eixo $y$. Observe, por exemplo, os pontos $P$ e $P'$.



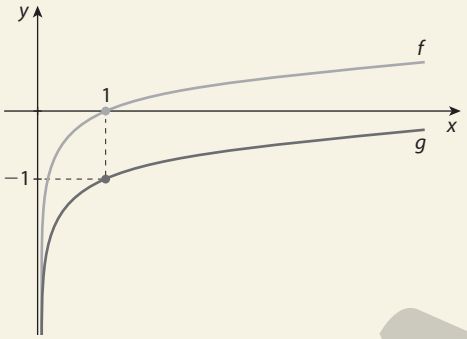

**b)** Para $i(x) = \log (x + 1)$, teremos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em uma unidade no sentido negativo do eixo $x$. No caso de $j(x) = \log x + 1$, teremos uma translação do gráfico de $f(x) = \log x$ em uma unidade no sentido positivo do eixo $y$.




*Comentário*: Se for conveniente, realizar essa atividade usando um *software* de construção de gráficos, a fim de que os alunos possam testar mais valores para generalizar as conclusões para a obtenção dos gráficos das funções $g$ e $h$ a partir do gráfico de $f$, dados $f(x) = \log x$, $g(x) = \log (x + k)$ e $h(x) = \log x + k$. Orientar os alunos a atribuir também valores negativos para $k$.

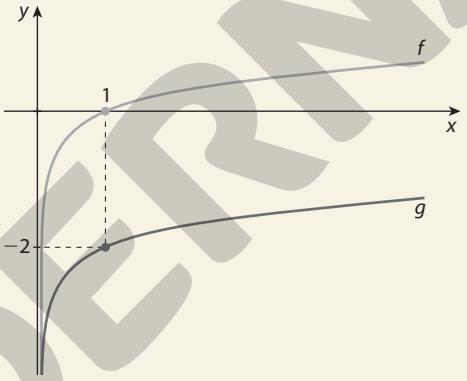
**43. a)** $g(x) = \log \left(\frac{x}{10}\right) = \log x - \log 10 = \log x - 1$

Basta transladar o gráfico de $f(x) = \log x$ uma unidade no sentido negativo do eixo $y$.




**b)** $g(x) = \log \left(\frac{x}{100}\right) = \log x - \log 100 = \log x - 2$

Basta transladar o gráfico de $f(x) = \log x$ duas unidades no sentido negativo do eixo $y$.




*Comentário*: Essa é outra atividade em que se obtém o gráfico de uma função por meio da translação do gráfico de outra função. Na discussão com um colega, os alunos têm a oportunidade de praticar a argumentação e a oralidade.

**44. a)** $\log_x 64 = 2$
Condições de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$
$\log_x 64 = 2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$
Portanto, $S = \{8\}$.

**b)** $\log_4 (x + 1) = 2$
Condição de existência: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$
$\log_4 (x + 1) = 2 \Rightarrow x + 1 = 4^2 \Rightarrow x = 16 - 1 \Rightarrow x = 15$
Portanto, $S = \{15\}$.

**c)** $\log (x - 1)^2 = \log 1$
Condição de existência:
$(x - 1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1$
$\log (x - 1)^2 = \log 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$
Portanto, $S = \{0, 2\}$.

**d)** $\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$
Condição de existência:
$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -6 \end{cases} \Rightarrow x > -2$
$\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$
$\log_{21} (x + 2)(x + 6) = 1$
$(x + 2)(x + 6) = 21^1$
$x^2 + 8x - 9 = 0$
$x = 1$ ou $x = -9$ (não serve devido à condição de existência)
Logo, $S = \{1\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**e)** $\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x - 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{7}{2}$$

$\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 \frac{x - 2}{2x - 7} = 1 \Rightarrow \frac{x - 2}{2x - 7} = 2^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2 = 2(2x - 7) \Rightarrow x - 2 = 4x - 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Logo, $S = \{4\}$.

**f)** $\log x + 2 \cdot \log^2 x - 1 = 0$

Condição de existência: $x > 0$

Fazendo $y = \log x$, temos:

$y + 2y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ ou $y = -1$

Como $y = \log x$, vem:

$\log x = \frac{1}{2} \Rightarrow 10^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow x = \sqrt{10}$ ou

$\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{10}$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$.

**45.** $\begin{cases} \log_2 (x - 2) - \log_2 (y + 1) = 1 \text{ (I)} \\ x - 3y = 2 \text{ (II)} \end{cases}$

Condições de existência: $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ y + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ y > -1 \end{cases}$

(I) $\log_2 (x - 2) = \log_2 2 + \log_2 (y + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 2) = \log_2 (2y + 2) \Rightarrow x - 2 = 2y + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2y = 4$

$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 8$ e $y = 2$

Ambos satisfazem as condições de existência; logo, $S = \{(8, 2)\}$.

**46.** $\log 0{,}5 = \log 10^{-0{,}012t} \Rightarrow \log 0{,}5 = -0{,}012t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 0{,}5}{-0{,}012} \Rightarrow t = \frac{-0{,}30}{-0{,}012} \Rightarrow t = 25$

Logo, a meia-vida dessa substância é de 25 horas.

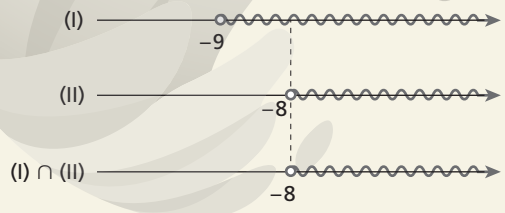
**47. a)** $\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1$

Condição de existência: $x + 9 > 0 \Rightarrow x > -9$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1 \Rightarrow x + 9 > 1 \Rightarrow x > -8$ (II)

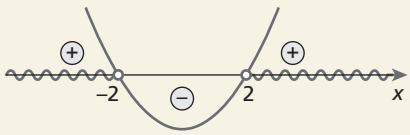
As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$.

**b)** $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5$

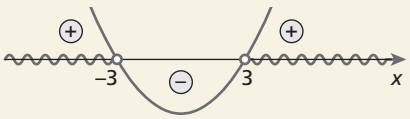
Condição de existência: $x^2 - 4 > 0$




Logo: $x < -2$ ou $x > 2$ (I)

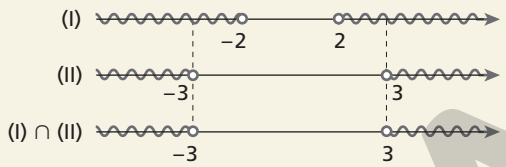
Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5 \Rightarrow x^2 - 4 > 5 \Rightarrow x^2 - 9 > 0$




Logo: $x < -3$ ou $x > 3$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$.

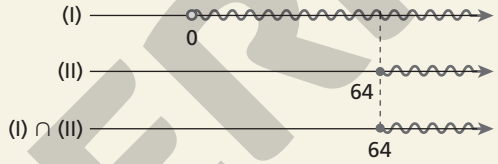
**c)** $\log_8 x \geqslant 2$

Condição de existência: $x > 0$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_8 x \geqslant 2 \Rightarrow \log_8 x \geqslant \log_8 64 \Rightarrow x \geqslant 64$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$.

**d)** $\log_{0,2} (x + 3) > 0$

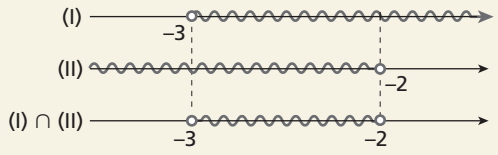
Condição de existência: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$ (I)

Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_{0,2} (x + 3) > 0 \Rightarrow \log_{0,2} (x + 3) > \log_{0,2} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3 < 1 \Rightarrow x < -2$ (II)

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$.

**e)** $\log_{0,3} (2x - 2) + \log_{0,3} 2 > 1$

Condição de existência:

$2x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$ (I)

Substituindo 1 por $\log_{0,3} 0{,}3$, resolvemos a inequação:

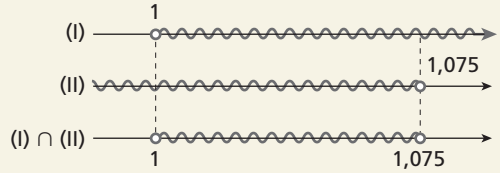
$\log_{0,3} (2x - 2) + \log_{0,3} 2 > \log_{0,3} 0{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{0,3} [(2x - 2) \cdot 2] > \log_{0,3} 0{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x - 2) \cdot 2 < 0{,}3 \Rightarrow 4x - 4 < 0{,}3 \Rightarrow 4x < 4{,}3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \frac{4{,}3}{4} \Rightarrow x < 1{,}075$ (II)

$\Rightarrow$ As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**f)** $0 < \log_3 (x - 2) < 2$

Condição de existência:

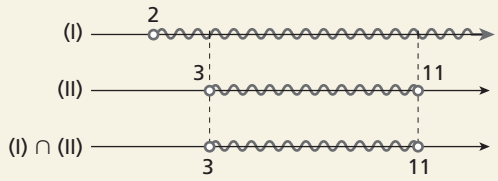
$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (I)

Substituindo 0 por $\log_3 1$ e 2 por $\log_3 9$, resolvemos a inequação: $\log_3 1 < \log_3 (x - 2) < \log_3 9$

Como a base é maior que 1, o sinal da desigualdade deve ser mantido para os logaritmandos:

$1 < x - 2 < 9 \Rightarrow 3 < x < 11$ (II)

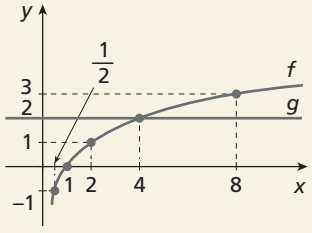
As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$.

**48.** $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2$

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $-1$ | 2 |
| 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 2 |
| 8 | 3 | 2 |




**a)** Analisando os gráficos, concluímos que $f(x) \geq g(x)$ para $x \geq 4$.

**b)** Resolvendo a inequação $f(x) \geq g(x)$:

$\log_2 x \geq 2 \Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 4 \Rightarrow x \geq 4$

Condição de existência: $x > 0$

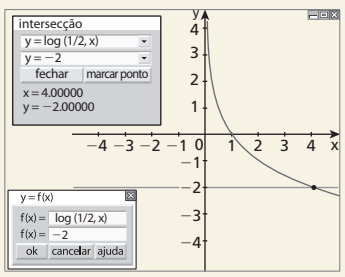
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$.

**c)** Espera-se que os alunos concluam que, resolvendo a inequação logarítmica formada pelas leis de formação das funções $f$ e $g$ ou comparando os gráficos das funções para verificar para quais valores de $x$ temos $f(x) \geq g(x)$, encontra-se o mesmo intervalo.

*Comentário*: Essa é outra atividade em que, na discussão com um colega, pedida no enunciado, os alunos têm a oportunidade de praticar a argumentação e a oralidade.

**49.** Em geral, nos *softwares* de construção de gráficos, a expressão log (*b*, *x*) significa logaritmo de *x* na base *b*.

- Escrever a expressão "log $\frac{1}{2}$, $x$" na janela de equação explícita e clicar em ok.
- Escrever "$-2$" na janela de equação explícita e clicar em ok.
- Clicar na função "intersecção" e, depois, em "marcar ponto".
- A partir da coordenada x do ponto de intersecção, determinar o conjunto solução da inequação.




Conforme a janela de intersecção, vê-se que o ponto de intersecção entre as funções é determinado pelo par ordenado (4, −2). Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$.

*Comentário*: Mostrar aos alunos que, com esse exercício, percebe-se visualmente a mudança de sentido do sinal da inequação para o sinal do conjunto solução.

## Exercícios complementares

**1. a)** $M = \log 50 + \log 40 + \log 20 + \log 2{,}5$

$M = \log (50 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 2{,}5)$

$M = \log 100.000$

$M = \log 10^5$

$M = 5 \cdot \log 10$

$M = 5 \cdot 1$

$M = 5$

**b)** $A = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$

$A = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 27}{\log 4} \cdot \frac{\log \sqrt{2}}{\log 25}$

$A = \frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 3}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{\log 3}}{2 \cdot \cancel{\log 2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\log 2}}{2 \cdot \cancel{\log 5}}$

$A = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

**2.** $\log_{10} 1{,}23 = \log_{10} \left(\frac{123}{100}\right) = \log_{10} 123 - \log_{10} 10^2 =$

$= \log_{10} 123 - 2 \cdot \log_{10} 10 = 2{,}09 - 2 \cdot 1 = 0{,}09$

alternativa b

**3.** $\log_3 (x^2 - y^2) = \log_3 [(x - y)(x + y)] =$

$= \log_3 \left(\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}\right) = \log_3 \sqrt[3]{3} + \log_3 \sqrt{3} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \log_3 3 + \frac{1}{2} \cdot \log_3 3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

alternativa e

**4.** $h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$

$3{,}5 = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$

$2 = \log_3 (t + 1) \Rightarrow t + 1 = 3^2 \Rightarrow t = 8$

alternativa b

**5.** $R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)$

$8{,}5 - 7{,}0 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)$

$1{,}5 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right) \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1{,}5}$

alternativa d

*Comentário*: Esse exercício, assim como os exercícios complementares **7**, **8** e **9**, pode ser aprofundado em trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

**6.** Primeiramente, vamos usar a informação de que a meia-vida do césio-137 é 30 anos. Assim:

$M(30) = \frac{1}{2} A$

$\frac{1}{2} A = A \cdot (2{,}7)^{30k}$

$\frac{1}{2} = (2{,}7)^{30k}$

$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(2{,}7)^{30k}$

$-\log 2 = 30k \cdot \log(2{,}7)$

$\log(2{,}7) = -\frac{0{,}3}{30k}$

$\log(2{,}7) = -\frac{1}{100k}$ (I)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Agora, vamos usar a função $M$ para determinar o tempo $t$ para que $M(t) = 0{,}1 \cdot A$

$0{,}1 \cdot A = A \cdot (2{,}7)^{kt}$

$\log 0{,}1 = \log(2{,}7)^{kt}$

$-1 = kt \cdot \log(2{,}7)$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$-1 = kt \cdot \left(-\frac{1}{100k}\right)$

$t = 100$

Portanto, o tempo necessário para que uma quantidade de césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial é de 100 anos.

alternativa e

**7.** Se $I = 100I_0$, temos:

$d = 10 \cdot \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) = 10 \cdot \log 100 = 20$

Logo, o som terá 20 decibéis.

**8.** $N_1 - N_2 = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 120 + 10 \cdot \log_{10}(I_1) - (120 + 10 \cdot \log_{10}(I_2)) = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10(\log_{10}(I_1) - \log_{10}(I_2)) = 20 \Rightarrow \log_{10}(I_1) - \log_{10}(I_2) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^2$

alternativa d

**9.** **a)** $A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**b)** $1{,}355 \cdot 10^{-20} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1{,}355 \cdot 10^{-20}}{16} = (0{,}5)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 8{,}470 \cdot 10^{-22} \simeq (0{,}5)^n$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$n = \log_{0{,}5}(8{,}470 \cdot 10^{-22}) = \frac{\log 8{,}470 + \log 10^{-22}}{\log 0{,}5}$

Com uma calculadora científica, obtemos:

$n \simeq \frac{0{,}928 - 22}{-0{,}301} = \frac{-21{,}072}{-0{,}301} \simeq 70$

Logo, terão decorridas aproximadamente 70 meias-vidas.

**10.** $P(t) = P_0 \cdot (1{,}02)^t$

Para duplicar a população, devemos ter: $P(t) = 2P_0$

$2\cancel{P_0} = \cancel{P_0} \cdot (1{,}02)^t \Rightarrow 2 = 1{,}02^t \Rightarrow t = \log_{1{,}02} 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} \simeq \frac{0{,}301}{0{,}0086} \simeq 35$

Portanto, a população estará duplicada daqui a aproximadamente 35 anos.

**11.** $\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$

Condições de existência:

$2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$ (I)

$3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ (II)

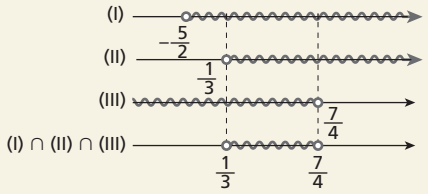
Resolvendo a inequação, obtemos:

$\log_2(2x + 5) - \log_2(3x - 1) > 1$

$\log_2\left(\frac{2x + 5}{3x - 1}\right) > \log_2 2 \Rightarrow \frac{2x + 5}{3x - 1} > 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 5 > 2(3x - 1) \Rightarrow 2x + 5 > 6x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x > -7 \Rightarrow x < \frac{7}{4}$ (III)




Portanto, $S = \left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$.

alternativa d

**12.** Condição de existência: $x > 0$

$\log_2 x^2 + \log_4 \sqrt{x} = -2{,}25$

$2 \cdot \log_2 x + \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4} = -2{,}25$

$2 \cdot \log_2 x + \frac{1}{4} \cdot \log_2 x = -2{,}25$

$\frac{9}{4} \cdot \log_2 x = -2{,}25 \Rightarrow \log_2 x = -2{,}25 \cdot \frac{4}{9}$

$\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Portanto, $S = \{0{,}5\}$.

alternativa a

**13.** $9^x = 15 \Rightarrow x = \log_9 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 9} = \frac{1}{2}\log_3 15$

Para obter $\log_3 15$ pelo gráfico, basta encontrar a ordenada correspondente a $x = 15$. Assim, obtemos: $\log_3 15 \simeq 2{,}5$

Portanto: $x \simeq \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 = 1{,}25$

alternativa d

**14.** Como $5^p = 2$, então: $\log_2 100 = \log_{5^p} 100$. Assim:

$\log_{5^p} 100 = \frac{\log_5 100}{\log_5 5^p} = \frac{1}{p} \cdot \log_5 100 = \frac{1}{p} \cdot \log_5 (5^2 \cdot 2^2) =$

$= \frac{1}{p} \cdot (\log_5 5^2 + \log_5 2^2) = \frac{1}{p} \cdot (2 \cdot 1 + 2 \cdot \log_5 5^p) =$

$= \frac{1}{p} \cdot (2 + 2p) = \frac{2 + 2p}{p}$

alternativa e

**15.** **a)** O ponto de intersecção é determinado pela equação $f(x) = g(x)$. Então:

$\log x + 1 = -\log x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \log x = -1 \Rightarrow \log x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{2}}$

Usando a função $g$, temos:

$g\left(10^{-\frac{1}{2}}\right) = -\log\left(10^{-\frac{1}{2}}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Voltando ao valor de $x$, temos:

$x = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Portanto, o ponto de intersecção é $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2}\right)$.

**b)** Resposta possível:

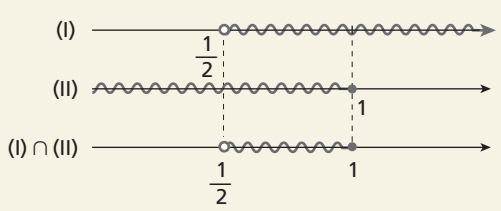
$g(x) \geqslant f(x) \Rightarrow -\log x \geqslant \log x + 1$

**16.** $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1)}$

Condições de existência: $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ (I)

Para $f(x)$ existir: $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \geqslant 0$

$\log_{\frac{1}{3}}(2x - 1) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow 2x - 1 \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant 1$ (II)




Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**17.** $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 x = \log_4 (2x - 1)$
Condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$\frac{\cancel{\log_4 3}}{\log_4 2} \cdot \frac{\cancel{\log_4 4}}{\cancel{\log_4 3}} \cdot \frac{\cancel{\log_4 5}}{\cancel{\log_4 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_4 6}}{\cancel{\log_4 5}} \cdot \frac{\log_4 x}{\cancel{\log_4 6}} =$$

$$= \log_4 (2x - 1) \Rightarrow \frac{\log_4 x}{\log_4 4^{\frac{1}{2}}} = \log_4 (2x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_4 x = \log_4 (2x - 1) \Rightarrow \log_4 x^2 = \log_4 (2x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Como esse valor atende à condição de existência, temos: $S = \{1\}$

**18.** Para $x = 1$, temos: $f(x) = 2$
Para $x = 5$, temos: $f(x) = 1$
- $\log_a 1 + k = 2 \Rightarrow 0 + k = 2 \Rightarrow k = 2$
- $\log_a 5 + k = 1 \Rightarrow \log_a 5 + 2 = 1 \Rightarrow \log_a 5 = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$

Assim:
$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x + 2$
$g(x) = f(x) - 2 \Rightarrow g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$
Logo: $g(125) = \log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

## Autoavaliação

**1.** $\log_g h = i \Leftrightarrow g^i = h$
alternativa a

**2.** Condições de existência para $\log_g h = i$
- $h > 0$
- $g > 0$ e $g \neq 1$

alternativa c

**3.** $\log_4 \frac{2}{3} = \log_4 2 - \log_4 3$
alternativa c

**4.** $\log_{39} 42 = \frac{\log 42}{\log 39}$
alternativa b

**5.** $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0{,}30 + 0{,}47 = 0{,}77$
alternativa b

**6.** $pH = -\log [H^+]$
$10 = -\log_{10} [H^+]$
$-10 = \log_{10} [H^+]$
$[H^+] = 10^{-10}$
alternativa a

**7.** Em $\log_{\frac{2}{7}} x$, a base é $\frac{2}{7}$. Como $0 < \frac{2}{7} < 1$, a função é decrescente.
alternativa d

**8.** As funções logarítmica e exponencial são funções inversas.
alternativa c

**9.** A função dada por $f(x) = \log_3 x$ é uma função logarítmica cuja representação gráfica é crescente, pois a base do logaritmo é maior que 1.
alternativa b

**10.** $\log_x 8 = 2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$
alternativa d

**11.** Condição de existência para $\log (x^2 + 6)$:
$x^2 + 6 > 0 \Rightarrow x^2 > -6$ (sempre)
Então:
$\log (x^2 + 6) < 1 \Rightarrow x^2 + 6 < 10^1 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$
alternativa d

MODERNA

## Exercícios propostos

**1. a)** $f(n) = 4n - 8$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | −4 | 0 | 4 | 8 | 12 |

Os cinco primeiros termos da sequência são −4, 0, 4, 8 e 12.

**b)** $f(n) = -3$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | −3 | −3 | −3 | −3 | −3 |

Os cinco primeiros termos da sequência são −3, −3, −3, −3 e −3.

**c)** $f(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | $\frac{1}{2}$ | 2 | $\frac{9}{2}$ | 8 | $\frac{25}{2}$ |

Os cinco primeiros termos da sequência são $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$.

**2. a)** $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 5n, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 2 | $a_2 = a_1 \cdot 5 \cdot 2 = 4 \cdot 10 = 40$ |
| 3 | $a_3 = a_2 \cdot 5 \cdot 3 = 40 \cdot 15 = 600$ |
| 4 | $a_4 = a_3 \cdot 5 \cdot 4 = 600 \cdot 20 = 12.000$ |

Os quatro primeiros termos da sequência são 4, 40, 600 e 12.000.

**b)** $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_n = 3^n \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 2 | $a_2 = 3^2 \cdot a_1 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$ |
| 3 | $a_3 = 3^3 \cdot a_2 = 27 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{243}{2}$ |
| 4 | $a_4 = 3^4 \cdot a_3 = 81 \cdot \left(-\frac{243}{2}\right) = -\frac{19.683}{2}$ |

Os quatro primeiros termos da sequência são $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$.

**c)** $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (a_{n-1})^{-2}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 2 | $a_2 = (a_1)^{-2} = (-2)^{-2} = \frac{1}{4}$ |
| 3 | $a_3 = (a_2)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$ |
| 4 | $a_4 = (a_3)^{-2} = 16^{-2} = \frac{1}{256}$ |

Os quatro primeiros termos da sequência são −2, $\frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$.

**3.** Respostas possíveis:

**a)** (I) Para $n = 1$, temos: $a_1 = 2 \cdot 0 = 2 \cdot (1 - 1)$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot (2 - 1)$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot (3 - 1)$
⋮
Para $n$ qualquer, temos: $a_n = 2(n - 1)$
Logo, uma lei de formação da sequência dos números pares é $a_n = 2(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

(II) Para $n = 0$, temos: $a_0 = 2 \cdot 0$
Para $n = 1$, temos: $a_1 = 2 \cdot 1$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 2 \cdot 2$
⋮
Para $n$ qualquer, temos: $a_n = 2n$
Logo, outra lei de formação da sequência dos números pares é $a_n = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$.

**b)** A sequência é constante; logo: $a_n = 17$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**c)** Para $n = 1$, temos: $a_1 = -3$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = -3 + 7 = a_1 + 7 = a_{2-1} + 7$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 4 + 7 = a_2 + 7 = a_{3-1} + 7$
Para $n = 4$, temos: $a_4 = 11 + 7 = a_3 + 7 = a_{4-1} + 7$
⋮
Para $n$ qualquer, temos: $a_n = a_{n-1} + 7$
Uma lei de formação da sequência é:
$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = a_{n-1} + 7, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**d)** Para $n = 1$, temos: $a_1 = -\frac{1}{4}$
Para $n = 2$, temos:
$a_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = a_{2-1} + \frac{1}{8}$
Para $n = 3$, temos:
$a_3 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = a_{3-1} + \frac{1}{8}$
Para $n = 4$, temos:
$a_4 = 0 + \frac{1}{8} = a_{4-1} + \frac{1}{8}$
⋮
Para $n$ qualquer, temos:
$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}$
Uma lei de formação da sequência é:
$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

MODENA

**e)** Para $n = 1$, temos: $a_1 = -5 = 5 \cdot (-1)^1$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 5 = 5 \cdot (-1)^2$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = -5 = 5 \cdot (-1)^3$
Para $n = 4$, temos: $a_4 = 5 = 5 \cdot (-1)^4$
⋮
Para $n \in \mathbb{N}^*$, temos: $a_n = 5 \cdot (-1)^n$, que é uma lei de formação da sequência.
Os alunos podem perceber que, quando $n$ é ímpar, $a_n = -5$ e, quando $n$ é par, $a_n = 5$. Assim, a lei de formação também pode ser:

$$a_n = \begin{cases} -5, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ 5, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

**4.** $\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_n = x \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Se $a_2 = 12$, temos $12 = x \cdot a_1$, mas $a_1 = x - 1$; então:
$12 = x \cdot (x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 4$
Para $x = -3$, a sequência será:
$(-4, 12, -36, 108, \ldots)$
Para $x = 4$, a sequência será:
$(3, 12, 48, 192, \ldots)$

**5.** **a)** $n = 1 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 1 \cdot 2 = 2$
$n = 2 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 2 \cdot 3 = 6$
$n = 3 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 3 \cdot 4 = 12$
$n = 4 \Rightarrow n \cdot (n + 1) = 4 \cdot 5 = 20$
Os números de pontos nas figuras são: (1, 3, 6, 10)
Então, para cada $n$, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.

**b)** Considerando a conclusão do item **a** (para cada $n$, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura), o número exato de pontos da enésima figura é dado por: $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$
Logo, a lei de formação que dá o número de pontos da enésima figura é: $T_n = \frac{n(n + 1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

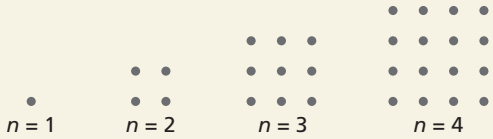
**c)** Na 13ª figura, temos $n = 13$; então:
$T_{13} = \frac{13 \cdot (13 + 1)}{2} = 13 \cdot 7 = 91$
Logo, 91 pontos formarão a 13ª figura.

**d)** Para que essa sequência tenha uma figura com 110 pontos, deve existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $T_n = 110$:
$\frac{n(n + 1)}{2} = 110$
$n^2 + n - 220 = 0$
$n = \frac{-1 \pm \sqrt{881}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{N}^*$
Portanto, essa sequência não tem uma figura com 110 pontos.
Para que essa sequência tenha uma figura com 120 pontos, deve existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $T_n = 120$:
$\frac{n(n + 1)}{2} = 120$
$n^2 + n - 240 = 0$
$n = \frac{-1 \pm 31}{2 \cdot 1}$
$n = 15$ ou $n = -16$ (não serve)
Portanto, essa sequência tem uma figura com 120 pontos, que é a 15ª figura.

*Comentário*: Nesse exercício, os alunos identificam, em função de $n$, o padrão de formação da sequência determinada pela quantidade de pontos que compõem cada figura associada ao respectivo $n$.

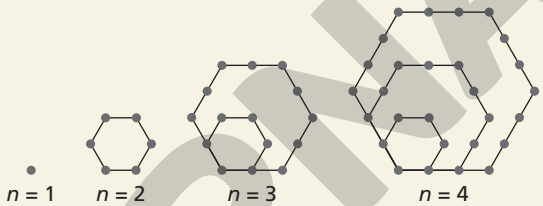
Esse momento pode ser aproveitado para apresentar aos alunos outros casos de figuras compostas de pontos, em que a quantidade de pontos das figuras determina uma sequência. É importante que os alunos analisem a sequência determinada e encontrem um padrão que permita escrever uma lei de formação para cada uma dessas sequências.
Alguns exemplos são:

- Números quadrados



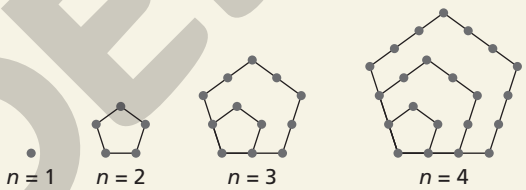

Lei de formação: $f(n) = n^2$

- Números hexagonais




Lei de formação: $f(n) = 2n^2 - n$

- Números pentagonais




Lei de formação: $f(n) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

É importante que, nesses casos, os alunos façam análises e elaborem estratégias para encontrar a lei de formação de cada sequência determinada pela quantidade de pontos de uma figura.

**6.** **a)**
- $a_2 - a_1 = -1 - (-5) = -1 + 5 = 4$
- $a_3 - a_2 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$
- $a_4 - a_3 = 7 - 3 = 4$
- $a_5 - a_4 = 11 - 7 = 4$
- $a_6 - a_5 = 15 - 11 = 4$
- $a_7 - a_6 = 19 - 15 = 4$

**b)** Espera-se que os alunos percebam que a diferença entre quaisquer dois valores consecutivos dessa sequência é igual a 4.

**c)** Espera-se que os alunos percebam que, para obter $a_8$, basta adicionar 4 ao termo $a_7 = 19$.
$a_8 = 4 + a_7 \Rightarrow a_8 = 4 + 19 \Rightarrow a_8 = 23$
Logo, o oitavo termo será 23.

**d)** Como a diferença entre dois termos consecutivos dessa sequência é igual a 4, temos:
$a_{n+1} - a_n = 4 \Rightarrow a_{n+1} = 4 + a_n$
Assim, conhecendo o valor de $a_n$, para calcular o valor de $a_{n+1}$ adiciona-se 4 ao valor de $a_n$.

*Comentário*: Esse exercício antecipa, de maneira informal, o conceito de PA, o que favorece o entendimento do próximo tópico.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**7. a)** Considerando os valores apresentados na sequência, verifica-se que, a partir do terceiro termo, cada um dos termos é obtido pela soma dos dois termos anteriores, como pode ser confirmado a seguir.

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $a_1 = 1$ |
| 2 | $a_2 = 1$ |
| 3 | $a_3 = 1 + 1 = 2$ |
| 4 | $a_4 = 2 + 1 = 3$ |
| 5 | $a_5 = 3 + 2 = 5$ |
| 6 | $a_6 = 5 + 3 = 8$ |
| 7 | $a_7 = 8 + 5 = 13$ |

**b)** Pelo padrão observado, podemos dizer que basta adicionar os dois termos anteriores para se chegar ao termo procurado. Ou seja, observando a sequência já indicada, temos:
$a_8 = a_7 + a_6 \Rightarrow a_8 = 13 + 8 = 21$
$a_9 = a_8 + a_7 \Rightarrow a_9 = 21 + 13 = 34$
$a_{10} = a_9 + a_8 \Rightarrow a_{10} = 34 + 21 = 55$

**c)** Pelas respostas dos itens anteriores, verificamos que a lei de formação dessa sequência é:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

**d)** A pesquisa também pode ser feita na internet, onde possivelmente os alunos encontrarão relação com a natureza, a pintura, a arte e a anatomia.

*Comentário*: Caso considere adequado, solicite aos alunos que busquem outras informações relacionadas à sequência de Fibonacci, como sua história, a descoberta da sequência, aplicações na Botânica etc. Caso ainda não tenha sugerido a leitura de livro para pesquisar, agora é um bom momento para indicar *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger.

**8. a)** É PA de razão $r = 7$ e $a_1 = 3$.

**b)** Não é PA, pois:

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{500} - \frac{1}{1.000} = \frac{1}{1.000}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{3}{1.000} - \frac{1}{500} = \frac{1}{1.000}$$

$$a_4 - a_3 = \frac{3}{500} - \frac{3}{1.000} = \frac{3}{1.000}$$

Como $\frac{1}{1.000} \neq \frac{3}{1.000}$, a sequência não é uma PA.

**c)** Não é PA, pois:
$a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$
$a_3 - a_2 = (-1) - 1 = -2$
Como $2 \neq -2$, a sequência não é uma PA.

**d)** É PA de razão $r = -1$ e $a_1 = \frac{1}{2}$.

**9. a)** Se $a_1 = 12$ e $r = 7$, então:
$a_2 = 12 + 7 = 19$
$a_3 = 12 + 2 \cdot 7 = 26$
$a_4 = 12 + 3 \cdot 7 = 33$
$a_5 = 12 + 4 \cdot 7 = 40$
Os cinco primeiros termos da PA são 12, 19, 26, 33 e 40.

**b)** Se $a_1 = 12$ e $r = -7$, então:
$a_2 = 12 + (-7) = 5$
$a_3 = 12 + 2 \cdot (-7) = -2$
$a_4 = 12 + 3 \cdot (-7) = -9$
$a_5 = 12 + 4 \cdot (-7) = -16$
Os cinco primeiros termos da PA são 12, 5, −2, −9 e −16.

**c)** Se $a_1 = -2$ e $r = \frac{1}{2}$, então:

$$a_2 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$a_3 = -2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$a_4 = -2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Os cinco primeiros termos da PA são $-2$, $-\frac{3}{2}$, $-1$, $-\frac{1}{2}$ e 0.

**d)** Se $a_1 = 12$ e $r = -0{,}25$, então:
$a_2 = 12 + (-0{,}25) = 11{,}75$
$a_3 = 12 + 2 \cdot (-0{,}25) = 11{,}5$
$a_4 = 12 + 3 \cdot (-0{,}25) = 11{,}25$
$a_5 = 12 + 4 \cdot (-0{,}25) = 11$
Os cinco primeiros termos da PA são 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11.

**10. a)** $r = a_2 - a_1 = -5 - (-2) = -5 + 2 = -3$
Como $r < 0$, a PA é decrescente.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = -2 + (n - 1) \cdot (-3) \Rightarrow a_n = 1 - 3n$
Portanto, a lei de formação dessa PA é
$f(n) = a_n = 1 - 3n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

**b)** $r = a_2 - a_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$
Como $r = 0$, a PA é constante.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = \sqrt{3} + (n - 1) \cdot 0 \Rightarrow a_n = \sqrt{3}$
Portanto, a lei de formação dessa PA é $f(n) = a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

**c)** $r = a_2 - a_1 = 0 - (-10) = 10$
Como $r > 0$, a PA é crescente.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_n = -10 + (n - 1) \cdot 10 \Rightarrow a_n = 10n - 20$
Portanto, a lei de formação dessa PA é
$f(n) = a_n = 10n - 20$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

**d)** $r = a_2 - a_1 = \frac{1}{500} - \frac{1}{1.000} = \frac{1}{1.000}$
Como $r > 0$, a PA é crescente.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:

$$a_n = \frac{1}{1.000} + (n - 1) \cdot \frac{1}{1.000} \Rightarrow a_n = \frac{n}{1.000}$$

Portanto, a lei de formação dessa PA é

$$f(n) = a_n = \frac{n}{1.000}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*.$$

**11.** $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, então:
$r = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4$
Como $a_n = a_1 + (n - 1)r$, então temos:
$a_{12} = a_1 + 11r = 1 + 11 \cdot 4 = 1 + 44 = 45$
Logo, a 12ª figura será formada por 45 bolinhas.

**12.** Em uma PA, temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_{12} = a_1 + (12 - 1)r \Rightarrow$

$$\Rightarrow 247 = 5 + 11r \Rightarrow r = \frac{242}{11} \Rightarrow r = 22$$

Logo, a razão dessa PA é 22.

**13. a)** $r = 13{,}40 - 14{,}20 = -0{,}80$

**b)** $a_{10} = a_1 + 9r = 14{,}20 + 9 \cdot (-0{,}80) = 7$
Se alguém comprar 10 carteiras, pagará R$ 7,00 em cada unidade e, por 10 carteiras, pagará R$ 70,00.

MODERNA

**c)** Se comprasse 8 carteiras com o valor não promocional, a pessoa pagaria:

$8 \cdot 14{,}20 = 113{,}60$

Na promoção:

$8 \cdot a_8 = 8 \cdot (a_1 + 7r) = 8 \cdot [14{,}20 + 7 \cdot (-0{,}80)] =$

$= 8 \cdot 8{,}60 = 68{,}80$

Então, ao comprar 8 carteiras, uma pessoa pagaria R$ 113,60 pelo preço normal e R$ 68,80 pelo preço promocional. Na promoção, portanto, a economia seria R$ 44,80.

**14.** $r = 1.400$ e $a_2 = 2.000$

Temos que:

$a_8 = a_1 + (8 - 1)r = a_1 + 7r$

$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_1 = a_2 - r$

Logo:

$a_8 = a_2 - r + 7r = a_2 + 6r$

$a_8 = 2.000 + 6 \cdot 1.400 = 10.400$

Portanto, no oitavo dia, o atleta terá percorrido 10.400 m, ou seja, 10,4 km.

**15.** **a)** $a_{17} = a_1 + 16r$

$-39 = a_1 + 16 \cdot 4 \Rightarrow a_1 = -39 - 64 \Rightarrow a_1 = -103$

Logo, o primeiro termo dessa PA é $-103$.

**b)** $a_{10} = a_1 + 9r$

$9 = a_1 + 9 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \Rightarrow a_1 = 9 + 1 \Rightarrow a_1 = 10$

Logo, o primeiro termo dessa PA é 10.

**16.** Resposta pessoal.

**17.** $\begin{cases} a_4 = 10 \\ a_7 + a_{13} = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3r = 10 \\ a_1 + 6r + a_1 + 12r = -25 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3r = 10 \\ 2a_1 + 18r = -25 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$a_1 = \frac{85}{4}$ e $r = -\frac{15}{4}$

**18.** Para que a sequência $(p + 5, 3p, p^2 - 1)$ seja uma PA, devemos ter:

$3p - (p + 5) = p^2 - 1 - 3p \Rightarrow p^2 - 5p + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 1$ ou $p = 4$

Logo, $p$ pode assumir o valor 1 ou o valor 4.

**19.** Como $(3, x + 7, x^2 - 4, 6x)$ é uma PA, podemos escrever o seguinte sistema:

$\begin{cases} x + 7 - 3 = x^2 - 4 - (x + 7) \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 4 - (x + 7) = 6x - (x^2 - 4) \Rightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I): $x = 5$ ou $x = -3$

De (II): $x = 5$ ou $x = -\frac{3}{2}$

Assim, para satisfazer ambas as equações, $x$ deve ser igual a 5.

Então, substituindo $x$ por 5 nos termos da PA, obtemos: (3, 12, 21, 30)

Logo, o perímetro do quadrilátero cujas medidas dos lados são 3, 12, 21 e 30 unidades de comprimento é 66 unidades de comprimento.

**20.** Para inserir quatro meios aritméticos entre $-12$ e 48, vamos determinar $a_2$, $a_3$, $a_4$ e $a_5$ da PA $(-12, a_2, a_3, a_4, a_5, 48)$.

$a_1 = -12$

$a_6 = 48 \Rightarrow -12 + 5r = 48 \Rightarrow 5r = 60 \Rightarrow r = 12$

Assim:

$a_2 = -12 + 12 = 0$

$a_3 = -12 + 2 \cdot 12 = 12$

$a_4 = -12 + 3 \cdot 12 = 24$

$a_5 = -12 + 4 \cdot 12 = 36$

Logo, a sequência procurada é $(-12, 0, 12, 24, 36, 48)$.

**21.** A sequência dos múltiplos de 4 é uma PA de razão 4.

O primeiro múltiplo de 4 existente entre 101 e 3.001 é $a_1 = 104$ e o último é $a_n = 3.000$.

De $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$3.000 = 104 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 3.000 = 104 + 4n - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n = 2.900 \Rightarrow n = 725$

Portanto, existem 725 múltiplos de 4 entre 101 e 3.001.

**22.** A sequência dos números pares é uma PA de razão 2.

O primeiro número par entre 23 e 987 é $a_1 = 24$ e o último é $a_n = 986$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 986 = 24 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 986 = 24 + 2n - 2 \Rightarrow 2n = 964 \Rightarrow n = 482$

Logo, há 482 números pares entre 23 e 987.

**23.** Temos: PA (10, ..., 184) e $r = 6$

$\uparrow \quad \uparrow$

$a_1 \quad a_n$

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 184 = 10 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 184 = 10 + 6n - 6 \Rightarrow 6n = 180 \Rightarrow n = 30$

Descontando os extremos, temos: $30 - 2 = 28$

Logo, devem ser inseridos 28 meios aritméticos.

**24.** **a)** $a_1 = 660$, $r = -30$ e $n = 12$; então:

$a_{12} = a_1 + 11r = 660 + 11 \cdot (-30) = 330$

Logo, o valor da última prestação foi R$ 330,00.

O valor da penúltima prestação é dado por $a_{11}$:

$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow a_{11} = 660 + 10 \cdot (-30) = 360$

Logo, a penúltima prestação foi R$ 360,00.

**b)** Soma da primeira e da última prestação:

$660 + 330 = 990$

Logo, a soma é R$ 990,00.

Soma da segunda e da penúltima prestação:

$630 + 360 = 990$

Logo, a soma é R$ 990,00.

**c)** O valor final da moto a prazo foi:

$V = 3.500 + 660 + 630 + 600 + 570 + 540 +$

$+ 510 + 480 + 450 + 420 + 390 + 360 + 330$

$V = 9.440$

Logo, o valor final da moto a prazo foi R$ 9.440,00.

*Comentário*: Pode-se explorar melhor o item **b** mostrando aos alunos que a soma da primeira parcela com a última é 990, que é igual à soma da segunda com a penúltima, que é igual à soma da terceira com a antepenúltima, e assim por diante. Logo, a soma das 12 parcelas é igual a $6 \cdot (990)$, ou seja, 5.940. Portanto, o valor final do carro a prazo foi R$ 5.940,00 + R$ 3.500,00 de entrada, totalizando R$ 9.440,00.

**25.** Deve-se orientar os alunos a usar $x - r$, $x$ e $x + r$ para representar três termos consecutivos de uma PA. Assim:

$\begin{cases} (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 420 \\ (x - r) + x + (x - r) = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - r^2) \cdot x = 420 \\ 3x = -12 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - xr^2 = 420 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -64 + 4r^2 = 420 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4r^2 = 484 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 121 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 11 \text{ ou } r = -11 \\ x = -4 \end{cases}$

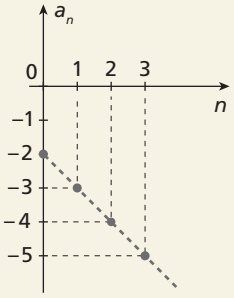
MODERNA

Para $r = 11$ e $x = -4$, temos a seguinte PA:
$(-15, -4, 7)$
Para $r = -11$ e $x = -4$, temos a seguinte PA:
$(7, -4, -15)$

**26.** Tomando o termo geral de cada PA, podemos construir o gráfico correspondente.

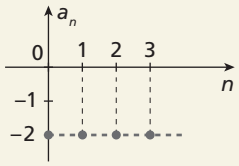
**a)** $a_n = -n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n = -n - 2$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ |



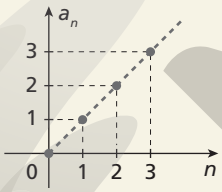

**b)** $a_n = -2$, com $n \in \mathbb{N}$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n = -2$ | $-2$ | $-2$ | $-2$ | $-2$ |



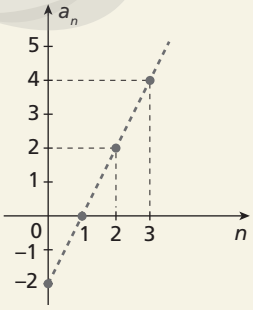

**c)** $a_n = n$, com $n \in \mathbb{N}$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n = n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |




**d)** $a_n = 2n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n = 2n - 2$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 |




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**27.** $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$
$r = 1 - 3 = -2$
$f(n) = a_n = a_0 + nr = 3 - 2n$
Logo:
$f(0) = a_0 = 3$ $\quad$ $f(2) = a_2 = -1$
$f(1) = a_1 = 1$ $\quad$ $f(3) = a_3 = -3$
alternativa d

*Comentário*: Essa questão propicia a reversibilidade procedimental do exercício imediatamente anterior. Para obter um aproveitamento mais completo, os alunos podem determinar a lei de formação de cada uma das sequências representadas graficamente.
Também pode ser aprofundado o estudo da representação gráfica de uma PA, apresentando aos alunos gráficos semelhantes aos propostos a seguir, para que eles discutam se esses gráficos podem ser representações de uma PA ou não, justificando suas decisões.

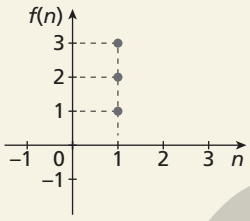


gráfico 1

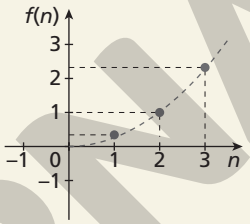


gráfico 2

Espera-se que os alunos percebam que o gráfico 1 não pode ser a representação de uma PA, pois, nesse caso, o termo $a_1$ é o único da sequência e ele está assumindo diversos valores; logo, essa representação não caracteriza uma PA.
A curva que representa o gráfico 2 não é semelhante à representação gráfica de uma função afim, ou seja, o gráfico apresentado não está associado a uma PA.

**28.** $f(n) = a_n \Rightarrow f(n) = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$
Para $n = 0$, temos $f(n) = -2$; então: $a_0 = -2$
Para $n = 3$, temos $f(n) = 3$; então:
$-2 + 3r = 3 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$
Logo:
$a_1 = a_0 + r = -2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$
$a_2 = a_0 + 2r = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$
$a_3 = 3$
$a_4 = a_0 + 4r = -2 + \frac{20}{3} = \frac{14}{3}$
Portanto, a PA é $\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$.

**29.** **a)** $r = -27 - (-57) = 30$
$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot 30 = -57 + 23 \cdot 30 = 633$
$S_{24} = \frac{24 \cdot (-57 + 633)}{2} \Rightarrow S_{24} = 12 \cdot 576 \Rightarrow S_{24} = 6.912$

**b)** $r = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$
$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot 2 = \frac{2}{3} + 23 \cdot 2 = \frac{140}{3}$
$S_{24} = \frac{24 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{140}{3}\right)}{2} \Rightarrow S_{24} = 12 \cdot \frac{142}{3} \Rightarrow S_{24} = 568$

**c)** Como a PA é constante, a soma de seus 24 primeiros termos será:
$S_{24} = 24 \cdot 7 \Rightarrow S_{24} = 168$

**d)** $r = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
$a_{24} = a_1 + (24 - 1) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{23}{4} = \frac{21}{4}$

MODERNA

$$S_{24} = \frac{24 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{21}{4}\right)}{2} \Rightarrow S_{24} = 12 \cdot \frac{19}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{24} = 57$$

**30.** Em 12 anos temos $12 \cdot 12 = 144$ parcelas. Então, temos a seguinte PA: $(600, 605, 610, ..., a_{144})$
O valor total é a soma de todas as parcelas.
Inicialmente, devemos calcular o 144º termo dessa sequência.
$a_{144} = a_1 + 143r = 600 + 143 \cdot 5 = 1.315$

$$S_{144} = \frac{144 \cdot (600 + 1.315)}{2} = 137.880$$

Logo, o valor do terreno é R$ 137.880,00.

**31.** **a)** $a_8 = a_1 + 7 \cdot (-8)$
$a_8 = 140 + (-56)$
$a_8 = 84$
Logo, no oitavo mês do plano o aluno pagará R$ 84,00.

**b)** $a_{12} = a_1 + 11 \cdot (-8) = 140 - 88 = 52$

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (a_1 + a_{12})}{2} = 6 \cdot (140 + 52) = 1.152$$

Então, o valor total anual será R$ 1.152,00.

**c)** $\frac{1.152}{12} = 96$

Logo, o valor pago por mês, em média, será R$ 96,00.

**32.** Sabemos que:
$a_1 = 3$, $r = 19 - 3 = 16$ e $S_n = 472$
Assim:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow 472 = \frac{n(3 + a_n)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3n + na_n = 944 \quad \text{(I)}$$

Temos que:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 3 + (n - 1) \cdot 16 = 16n - 13$
Substituindo o valor de $a_n$ por $16n - 13$ em (I), obtemos:
$3n + n \cdot (16n - 13) = 944 \Rightarrow 16n^2 - 10n - 944 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n = 8 \text{ ou } n = -\frac{59}{8} \text{ (não serve)}$$

Logo, devem ser somados 8 termos dessa PA para que $S_n = 472$.

**33.** Como a razão $r$ é 6, temos:

$$a_{30} = a_1 + 29r \Rightarrow a_{30} = a_1 + 29 \cdot 6 \Rightarrow a_{30} = a_1 + 174$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{30} = \frac{30 \cdot (a_1 + a_1 + 174)}{2} \Rightarrow 1.430 = 15(2a_1 + 174) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30a_1 = 1.430 - 2.610 \Rightarrow 30a_1 = -1.180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -\frac{118}{3}$$

Assim: $a_8 = a_1 + 7 \cdot r = -\frac{118}{3} + 42 = \frac{8}{3}$

Logo, o oitavo termo dessa PA é $\frac{8}{3}$.

**34.** A sequência dos múltiplos de 6 é uma PA de razão 6.
O primeiro múltiplo de 6 no intervalo ]230, 650[ é 234, e o último múltiplo de 6 nesse intervalo é 648.
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 648 = 234 + 6n - 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6n = 420 \Rightarrow n = 70$
Logo, existem 70 múltiplos de 6 entre 230 e 650.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{70} = \frac{70 \cdot (234 + 648)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{70} = 30.870$$

Portanto, a soma dos múltiplos de 6 compreendidos entre 230 e 650 é 30.870.

**35.** $\frac{x}{2} + \frac{7x}{10} + \frac{9x}{10} + ... + \frac{17x}{10} = 462$
Podemos perceber que essa equação representa a soma dos termos de uma PA em que:
$r = \frac{x}{5}$, $a_1 = \frac{x}{2}$ e $a_n = \frac{17x}{10}$
Primeiro, vamos determinar o valor de $n$:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$$\frac{17x}{10} = \frac{x}{2} + (n - 1) \cdot \frac{x}{5} \Rightarrow n - 1 = \frac{12x}{10} \cdot \frac{5}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

Agora, vamos determinar o valor de $x$:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$462 = \frac{7\left(\frac{x}{2} + \frac{17x}{10}\right)}{2} \Rightarrow \frac{22x}{10} = \frac{462 \cdot 2}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22x = 132 \cdot 10 \Rightarrow x = 60$$

Logo, $S = \{60\}$.

**36.** Representando a situação, temos:
$S_n = 448$, $a_1 = 13$, $a_2 = 15$, $a_3 = 17$ e $r = 2$
Assim:
$a_n = a_1 + (n - 1)r = 13 + (n - 1) \cdot 2 = 11 + 2n$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$448 = \frac{n \cdot (13 + 11 + 2n)}{2} \Rightarrow 448 = 12n + n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 12n - 448 = 0 \Rightarrow n = 16 \text{ ou } n = -28 \text{ (não serve)}$$

Portanto, o número total de filas desse teatro é 16.

**37.** Podemos representar as quantidades de lotes distribuídos por uma PA de $r = 2$ e $a_1 = 1$.
Se foram distribuídas 1.089.000 ações e cada lote tem 1.000 ações, então foram distribuídos 1.089 lotes.
Seja $n$ o número de clientes e $a_n$ o número de lotes do último cliente premiado, temos:
$a_n = 1 + 2(n - 1) \Rightarrow a_n = 2n - 1$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$1.089 = \frac{n(1 + 2n - 1)}{2} \Rightarrow 1.089 = n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 33 \text{ ou } n = -33 \text{ (não serve)}$$

Portanto, o número de clientes presenteados foi 33.
alternativa e

**38.** Como a PA é crescente, $r > 0$.
$(a_4)^2 = 144 \Rightarrow a_4 = 12$ (I) ou $a_4 = -12$ (II)
(I) Para $a_4 = 12$, vamos ter:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = -26 \\ a_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + r + a_1 + 2r = -26 \\ a_1 + 3r = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3r = -26 \\ a_1 + 3r = 12 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -38 \text{ e } r = \frac{50}{3}$$

(II) Para $a_4 = -12$, vamos ter:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = -26 \\ a_4 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3r = -26 \\ a_1 + 3r = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = -14 \text{ e } r = \frac{2}{3}$$

Logo, $a_1 = -38$ e $r = \frac{50}{3}$ ou $a_1 = -14$ e $r = \frac{2}{3}$.

- Se $a_1 = -38$ e $r = \frac{50}{3}$, temos:

$$a_5 = a_1 + 4r = -38 + \frac{200}{3} = \frac{86}{3}$$

$$S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \cdot \left(-38 + \frac{86}{3}\right)}{2} = -\frac{70}{3}$$

MODERNA

• Se $a_1 = -14$ e $r = \frac{2}{3}$, temos:

$a_5 = a_1 + 4r = -14 + 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{34}{3}$

$S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \cdot \left(-14 - \frac{34}{3}\right)}{2} = \frac{-\frac{380}{3}}{2} = -\frac{190}{3}$

Portanto, se $r = \frac{50}{3}$, então $S_5 = -\frac{70}{3}$ e, se $r = \frac{2}{3}$, então $S_5 = -\frac{190}{3}$.

**39.** **a)** É uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o anterior por uma constante $q = \frac{1}{4}$.

**b)** É uma PA, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o anterior a uma constante $r = 10$.

**c)** É uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o anterior por uma constante $q = 2$.

**d)** É uma PA, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido somando o anterior a uma constante $r = 1$.

**40.** **a)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi > 1$

$a_1 = \pi > 0$

Como $q > 1$ e $a_1 > 0$, a PG é crescente.

**b)** Como $q < 0$ e $a_1 \neq 0$, a PG é oscilante.

**c)** Como $q > 1$ e $a_1 < 0$, a PG é decrescente.

**d)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = 1$

Como $q = 1$ e $a \neq 0$, a PG é constante.

**41.** **a)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{12}{5}}{-3} = -\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{5}$

• $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**b)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

• $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**c)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{10}{\pi}}{5} = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{\pi}$

• $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**d)** $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{5} = -2$

• $f(n) = a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

• Para representar essas progressões graficamente, para cada valor $n$, marcamos o valor $a_n$ correspondente, obtendo os pontos $(n, a_n)$ no plano cartesiano.

**42.** **a)** $a_1 = 4$
$a_2 = 4 \cdot 6 = 24$
$a_3 = 4 \cdot 6^2 = 144$
$a_4 = 4 \cdot 6^3 = 864$
$a_5 = 4 \cdot 6^4 = 5.184$
Logo, os cinco primeiros termos da PG são 4, 24, 144, 864 e 5.184.

**b)** $a_1 = x^2$

$a_2 = x^2 \cdot \frac{y}{x^3} = \frac{y}{x}$

$a_3 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{y^2}{x^6} = \frac{y^2}{x^4}$

$a_4 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^3 = x^2 \cdot \frac{y^3}{x^9} = \frac{y^3}{x^7}$

$a_5 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^4 = x^2 \cdot \frac{y^4}{x^{12}} = \frac{y^4}{x^{10}}$

$a_6 = x^2 \cdot \left(\frac{y}{x^3}\right)^5 = x^2 \cdot \frac{y^5}{x^{15}} = \frac{y^5}{x^{13}}$

Logo, os seis primeiros termos da PG são $x^2$, $\frac{y}{x}$, $\frac{y^2}{x^4}$, $\frac{y^3}{x^7}$, $\frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$.

**43.** Resposta pessoal.

**44.** Podemos representar a situação por uma PG de $a_0 = 1$, $q = 2$ e $n = 9$ (9 · 30 min = 4 h 30 min).
$a_9 = a_0 \cdot q^9 = 1 \cdot 2^9 = 512$
Logo, após 4 horas e 30 minutos, existirão 512 bactérias.

**45.** $\begin{cases} a_4 = a_1 \cdot q^3 = 27 \\ a_7 = a_1 \cdot q^6 = 125 \end{cases} \Rightarrow q^3 = \frac{125}{27} \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{5}{3}$

$a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 = 27 \Rightarrow a_1 = \frac{27 \cdot 27}{125} \Rightarrow a_1 = \frac{729}{125}$

Logo, o primeiro termo dessa PG é $\frac{729}{125}$.

**46.** $a_2 = 1$ e $a_5 = \frac{1}{343}$

Como $a_2 = a_1 \cdot q$ e $a_5 = a_1 \cdot q^4$, temos:

$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow 1 = a_1 \cdot q \Rightarrow a_1 = \frac{1}{q}$

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow \frac{1}{343} = \frac{1}{q} \cdot q^4 \Rightarrow q^3 = \frac{1}{343} \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{1}{7}$

Logo, a razão dessa PG é $\frac{1}{7}$.

**47.** Na PG apresentada, temos:

$a_1 = 3$, $a_n = \frac{1}{19.683}$ e $q = \frac{1}{9}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Então:

$\frac{1}{19.683} = 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{59.049} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^5 \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$

Logo, essa PG tem 6 termos.

**48.** **a)** Nessa situação, temos uma PG e as seguintes informações: $a_4 = 6.600$ e $q = 2$
Logo:
$a_4 = a_1 \cdot q^3$ e $a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow a_6 = a_4 \cdot q^2$
$a_6 = a_4 \cdot q^2 = 6.600 \cdot 2^2 = 26.400$
Assim, o atleta correrá 26.400 m no sexto dia de treinamento.

**b)** $a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow 6.600 = a_1 \cdot 2^3 \Rightarrow a_1 = 825$
Portanto, o atleta correu 825 m no primeiro dia.

**49.** PG $(x, 2x, x^2)$

$q = \frac{2x}{x} = 2$

MODERNA

Como a razão é 2, temos:
$x^2 = 2 \cdot 2x$
$x^2 - 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x = 0$ (não serve, pois a PG é crescente) ou $x = 4$
Logo, $x = 4$.

**50.** Usando $x$ para o número a ser adicionado, $(2 + x, 6 + x, 15 + x)$ representará a PG que queremos determinar. Então:

$q = \frac{6 + x}{2 + x} = \frac{15 + x}{6 + x}$, com $x \neq -2$ e $x \neq -6$

$(6 + x)^2 = (2 + x) \cdot (15 + x)$
$36 + 12x + x^2 = 30 + 2x + 15x + x^2$
$17x - 12x = 36 - 30$

$x = \frac{6}{5}$

Logo, o número a ser adicionado é $\frac{6}{5}$.

**51.** Temos a seguinte PG:
$(6, a_2, a_3, a_4, a_5, 192)$
$192 = 6 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = 32 \Rightarrow q^5 = 2^5 \Rightarrow q = 2$
Logo, a PG é (6, 12, 24, 48, 96, 192).

**52.** Sendo $x$ o termo intermediário e $q \neq 0$ a razão da PG, podemos denotar os três termos consecutivos da seguinte maneira: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + x \cdot q = 105 \quad \text{(I)} \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 27.000 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (II): $x^3 = 27.000 \Rightarrow x = 30$
Multiplicando a equação (I) por $q$, temos:
$x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105q$
Substituindo $x$ por 30 nessa equação, obtemos:
$30q^2 - 75q + 30 = 0 \Rightarrow q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$

Então:
- para $q = 2$, os números procurados são 15, 30 e 60;
- para $q = \frac{1}{2}$, os números procurados são 60, 30 e 15.

**53.** Dado um quadrado de lado $a$, sua área é $a^2$ e sua diagonal mede $a\sqrt{2}$.

Assim, temos a PG: $(a, a\sqrt{2}, a^2)$

$q = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\frac{a\sqrt{2}}{a} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} \Rightarrow a = 2$

Perímetro: $4a = 4 \cdot (2) = 8$

Logo, a razão da PG é $\sqrt{2}$, e as medidas do lado e do perímetro do quadrado são, respectivamente, 2 e 8.

**54.** **a)** • Após o segundo mês:
$C_2 = C_1 + C_1 \cdot i$
$C_2 = C_0(1 + i) + C_0(1 + i)i$
$C_2 = C_0(1 + i)(1 + i)$
$C_2 = C_0(1 + i)^2$
• Após o terceiro mês:
$C_3 = C_2 + C_2 \cdot i$
$C_3 = C_0(1 + i)^2 + C_0(1 + i)^2 i$
$C_3 = C_0(1 + i)^2(1 + i)$
$C_3 = C_0(1 + i)^3$

Logo, após o segundo mês o montante aplicado será $C_2 = C_0(1 + i)^2$ e após o terceiro mês será $C_3 = C_0(1 + i)^3$.

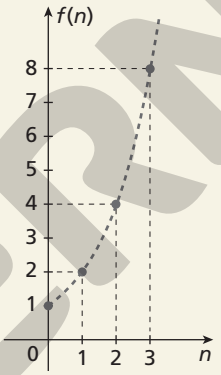
**b)** $q = \frac{C_1}{C_0} = \frac{C_0(1 + i)}{C_0} = 1 + i$
Logo, a razão é $1 + i$.

**c)** $C_0 = C_0(1 + i)^0$
$C_1 = C_0(1 + i)^1$
$C_2 = C_0(1 + i)^2$
$C_3 = C_0(1 + i)^3$
⋮
$C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

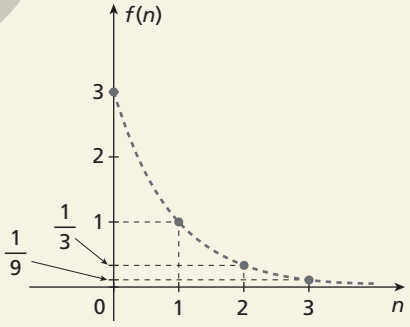
*Comentário*: Avalie a conveniência de observar aos alunos que a fórmula obtida no item **c** é a fórmula do juro composto, que será retomada no capítulo "Matemática financeira".

**55.** Considerando como domínio o conjunto dos números naturais, teremos os gráficos a seguir.

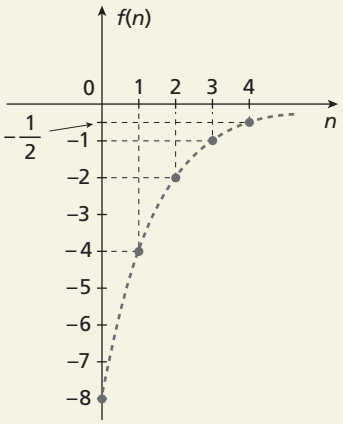
**a)** (1, 2, 4, 8, ...)




**b)** $\left(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\right)$



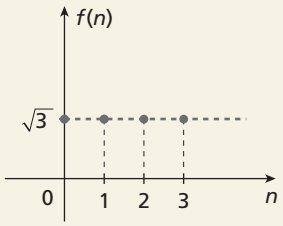

**c)** PG $\left(-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**d)** PG$\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \ldots\right)$




**56.** **a)** Como o gráfico é a representação de uma PG, temos:
$f(n) = a_n = a_0 \cdot q^n$
$f(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$
$f(1) = a_0 \cdot q^1 \Rightarrow 1 \cdot q = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$

Substituindo $a_0$ por 1 e $q$ por $\frac{1}{4}$ na lei de formação da PG, obtemos:

$f(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

**b)** Como $a_0$ é o primeiro termo, $a_9$ é o décimo termo.

Assim: $a_9 = f(9) = \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{4^9}$

**c)** Essa PG não tem nenhum termo menor ou igual a zero, pois não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant 0$.

*Comentário*: Nesse exercício é apresentado o gráfico de uma sequência cuja lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Como um aprofundamento, pode-se verificar como os valores que $n$ pode assumir influenciam o gráfico e a lei de formação de uma sequência. Para isso, os alunos podem refletir sobre as seguintes questões:

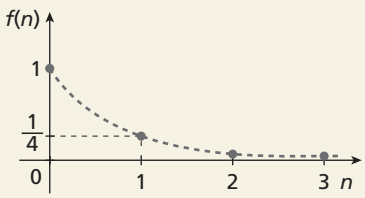
- Quais são os quatro primeiros termos da PG cuja lei de formação é: $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$?
- Considerando $n \in \mathbb{N}^*$, reescreva a lei de formação acima, de tal modo que os termos obtidos no item anterior sejam os mesmos, ou seja, a PG não seja alterada.
- Como será a representação gráfica dessa nova sequência?
- Considerando as respostas dos itens anteriores, pode-se afirmar que essa PG tem mais de uma lei de formação e mais de uma representação gráfica?

Espera-se que os alunos percebam que, para a PG apresentada no exercício, cujos quatro primeiros termos são $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right)$, a lei de formação dependerá dos valores de $n$ considerados:

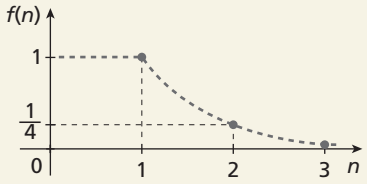
- para $n \in \mathbb{N}$, a lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$;
- para $n \in \mathbb{N}^*$, a lei de formação é $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

A representação gráfica dessa sequência também varia de acordo com os valores de $n$ considerados:

- para $n \in \mathbb{N}$, é obtido o seguinte gráfico:




- para $n \in \mathbb{N}^*$, é obtido o seguinte gráfico:




**57.** Se o número de competidores do torneio de tênis é 128, então há 64 partidas na 1ª fase. Sobrarão 64 competidores para a 2ª fase, que terá 32 partidas. Assim, na 3ª fase haverá 16 partidas; na 4ª fase, 8 partidas; na 5ª fase, 4 partidas; na 6ª fase, 2 partidas; e, na final, 1 partida. Logo, o número de partidas é dado por:

$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

alternativa e

**58.** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 256 = a_1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_1 = \frac{256}{2^{n-1}}$ (I)

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 504 = \frac{a_1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 504 = a_1 \cdot (2^n - 1)$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$504 = \frac{256}{2^{n-1}} \cdot (2^n - 1) \Rightarrow 504 \cdot 2^{n-1} = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow 504 \cdot \frac{2^n}{2} = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow 252 \cdot 2^n = 256 \cdot 2^n - 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \cdot 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$

Substituindo $n = 6$ em (I), obtemos:

$a_1 = \frac{256}{2^{6-1}} \Rightarrow a_1 = 8$

**59.** Como os termos do primeiro membro formam uma PG, temos: $a_1 = 7x$; $a_n = 189x$; $q = 3$; $S_n = 560$

Assim:

$560 = \frac{7x \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow 1.120 = 7x \cdot (3^n - 1)$ (I)

Sabemos também que:

$189x = 7x \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 3^{n-1} = 27 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow n = 4$

Substituindo $n = 4$ em (I), obtemos:

$1.120 = 7x \cdot (3^4 - 1) \Rightarrow 1.120 = 560x \Rightarrow x = 2$

**60.** Podemos escrever a sequência do número de passageiros transportados a cada ano como uma PG.

Como devemos calcular o total de passageiros em sete anos (de 2014 a 2020), o número de elementos da PG é $n = 7$.

- Para o ano de 2014, temos:
  $a_1 = 500.000$
- Para o ano de 2015, temos:
  $a_2 = 500.000 + 500.000 \cdot 0{,}04 =$
  $= 500.000 \cdot (1 + 0{,}04) = 500.000 \cdot 1{,}04 = 520.000$
- Para o ano de 2016, temos:
  $a_3 = 520.000 + 520.000 \cdot 0{,}04 = 520.000 \cdot (1 + 0{,}04) =$
  $= 520.000 \cdot 1{,}04 = 540.800$

A partir de 2015, o número de passageiros é igual ao número do ano anterior multiplicado por 1,04. Portanto, a razão da PG é $q = 1{,}04$.

Aplicando a fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de uma PG, obtemos:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{500.000 \cdot \left[(1{,}04)^7 - 1\right]}{1{,}04 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_7 \simeq 3.949.147$

Logo, de 2014 a 2020, foram transportados aproximadamente 3.949.147 passageiros por essa empresa de ônibus.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

**61.** $a_1 = 25.000$; $q = 1{,}15$

$$S_{12} = \frac{a_1 \cdot (q^{12} - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{12} = \frac{25.000 \cdot (1{,}15^{12} - 1)}{1{,}15 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{12} \simeq 725.042$$

Logo, nesse ano a empresa produziu aproximadamente 725.042 unidades desse produto.

**62.**

| Dia da semana | Número de pessoas que receberam a mensagem |
|---|---|
| Sábado | 3 |
| Domingo | $3 \cdot 3 = 9$ |
| Segunda-feira | $9 \cdot 3 = 27$ |
| Terça-feira | $27 \cdot 3 = 81$ |
| ⋮ | ⋮ |

O número de pessoas que receberam a mensagem a cada dia forma uma PG de $a_1 = 3$ e $q = 3$.

Para descobrir quantas pessoas receberam a mensagem até o sábado seguinte, é necessário calcular a soma dos oito primeiros termos dessa PG:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{3 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 9.840$$

Logo, até o sábado seguinte, 9.840 pessoas receberam a mensagem.

**63.** **a)** Aplicando a fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de uma PG, temos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_4 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_4 = \frac{\frac{1}{16} - 1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{15}{8} \Rightarrow S_4 = 1{,}875$$

**b)** $S_{10} = \frac{1.023}{512} \simeq 1{,}998$

$S_{20} = \frac{1.048.575}{524.288} \simeq 1{,}999$

**c)** Espera-se que os alunos percebam que, quanto maior o valor de $n$, mais o valor da soma desses $n$ elementos da PG se aproximará de 2.

*Comentário*: O objetivo do item **c** desse exercício é fazer os alunos refletirem sobre o comportamento da soma dos termos de uma PG infinita. Para esse item ser aprofundado, eles podem observar o comportamento do valor de $q^n$ quando o valor de $n$ aumenta e o valor de $q$ está entre $-1$ e 1. Espera-se que eles concluam que esse valor tende a zero; logo, o valor da soma dos termos dessa PG dependerá apenas dos valores de $a_1$ e $q$. Eles podem tentar elaborar um texto que justifique a resposta encontrada utilizando uma calculadora. Esse tipo de reflexão antecipa e facilita o estudo do próximo tópico a ser trabalhado.

**64.** **a)** As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = 15$ e $q = \frac{2}{3}$.

Portanto, a soma dos infinitos termos será:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{15}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{15}{\frac{1}{3}} = 15 \cdot 3 = 45$$

**b)** As parcelas formam uma PG infinita, com $a_1 = -\pi$ e $q = \frac{1}{2}$.

Portanto, a soma dos infinitos termos será:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{-\pi}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\pi}{\frac{1}{2}} = -2\pi$$

**65.** **a)** $2 - 1 + \frac{1}{2} - \ldots$ é dada pela soma dos infinitos termos de uma PG, com $q = -\frac{1}{2}$ e $a_1 = 2$.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

**b)** $12 - 4 + \frac{4}{3} - \ldots$ é dada pela soma dos infinitos termos de uma PG, com $q = -\frac{1}{3}$ e $a_1 = 12$.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{12}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{12}{1 + \frac{1}{3}} = 9$$

**66.** Temos a PG (20, 10, 5, ...).

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{20}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{20}{\frac{1}{2}} = 40$$

Para percorrer 40 km, o atleta teria que prolongar indefinidamente o seu treinamento. Logo, não ele não conseguiria totalizar 40 km de corrida.

**67.** Sem contar a primeira queda, as distâncias percorridas pela bola formam a PG (100, 50, 25, ...), em que $a_1 = 100$ e $q = \frac{1}{2}$. A soma dos infinitos termos dessa PG é igual a:

$$\frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$$

Somando a distância da primeira queda:

$200 + 100 = 300$

Logo, a distância total percorrida pela bola é 300 m.

**68.** Os lados dos quadrados formam a PG $\left(a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \ldots\right)$.

Então, suas áreas formam a PG $\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, \ldots\right)$ e, assim, sucessivamente.

Temos, então, uma PG de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo $a^2$.

O limite da soma das áreas dos quadrados é dado por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$$

**69.** PA $\left(10, x, \frac{19}{2}\right)$

$$x - 10 = \frac{19}{2} - x \Rightarrow x = \frac{39}{4}$$

Então, temos: PG $\left(1, \frac{39}{4} - 8, y\right) \Rightarrow$ PG $\left(1, \frac{7}{4}, y\right)$

Nessa PG: $q = \frac{\frac{7}{4}}{1} = \frac{7}{4}$ e $q = \frac{y}{\frac{7}{4}} = \frac{4y}{7}$

Logo: $\frac{4y}{7} = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{49}{16}$

Portanto, $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$.

**70.** Da PG $\left(20, a, 5, \frac{5}{2}\right)$, podemos calcular a razão:

$$q = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$

Assim: $a = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

A sequência $(5q, 3, b, c)$ tem $a_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ e $a_2 = 3$.

Portanto, podemos calcular a razão: $r = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

Assim: $b = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$c = b + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$

Portanto, $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$.

MODERNA

**71.** (I) Como $a$, $b$ e $a + b$ formam, nessa ordem, uma PA, temos:
$b - a = (a + b) - b \Rightarrow b = 2a$
(II) Como $2^a$, 16 e $2^b$ formam, nessa ordem, uma PG, temos:
$\frac{16}{2^a} = \frac{2^b}{16} \Rightarrow 16^2 = 2^a \cdot 2^b \Rightarrow 2^8 = 2^{a+b} \Rightarrow$
$\Rightarrow a + b = 8$
Assim, de (I) e (II), temos:
$3a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$
alternativa e

**72.** Como os três números estão em PA, podemos indicá-los por $x - r$, $x$ e $x + r$. Assim:
$x - r + x + x + r = 90 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = 30$
Logo, temos a PA $(30 - r, 30, 30 + r)$.
Acrescentando 10 ao segundo termo e 40 ao último termo, temos a PG $(30 - r, 40, 70 + r)$. Nessa PG:
$\frac{40}{30 - r} = \frac{70 + r}{40} \Rightarrow 1.600 = 2.100 + 30r - 70r - r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow r^2 + 40r - 500 = 0 \Rightarrow r = -50$ ou $r = 10$

- Se $r = -50$, os três números serão 80, 30 e $-20$ (não serve, pois, de acordo com o enunciado, os três números são positivos).
- Se $r = 10$, os três números serão 20, 30 e 40.

Portanto, os números são 20, 30 e 40.

**73.** Representando a PA e a PG, temos:
- PA $(2, a_2 + 1, a_3)$, com $a_3 > 0$
- PG $(2, a_2, a_3)$, com $a_3 > 0$

Então, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_2 + 1 - 2 = a_3 - (a_2 + 1) \\ \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{a_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_3}{2} \quad \text{(I)} \\ (a_2)^2 = 2a_3 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo o valor de $a_2$ por $\frac{a_3}{2}$ na equação (II), obtemos:
$\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 = 2a_3 \Rightarrow a_3 \cdot \left(\frac{a_3}{4} - 2\right) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_3 = 8$ ou $a_3 = 0$ (não serve)
Logo, o terceiro termo das progressões é 8.

**74.** **a)** PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e PG $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$
Sabemos que:
- PA de razão $r = 4 \Rightarrow (a - 4, a, a + 4, \ldots)$ (I)
- PG de razão $q = r - 1 \Rightarrow q = 3$
- $d_1 = a_1 + 3 = a - 4 + 3 = a - 1$
- $d_2 = a_2 + 5 = a + 5$
- $d_3 = a_3 + 19 = a + 4 + 19 = a + 23$

Podemos, então, escrever:
PG $(a - 1, a + 5, a + 23, \ldots)$
Sendo $q = 3$, temos:
$\frac{a + 5}{a - 1} = 3 \Rightarrow a + 5 = 3a - 3 \Rightarrow a = 4$
Substituindo o valor de $a$ em (I), obtemos:
PA $(0, 4, 8, \ldots)$
Portanto:
$a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$

**b)** O décimo termo da PA é:
$a_{10} = 0 + 9 \cdot 4 \Rightarrow a_{10} = 36$
A soma dos 10 primeiros termos da PA é:
$S_{10} = \frac{10 \cdot (0 + 36)}{2} \Rightarrow S_{10} = 180$

**c)** Temos a PG $(3, 9, 27, \ldots)$, com $q = 3$.
$S_5 = \frac{3 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{3 \cdot 242}{2} \Rightarrow S_5 = 363$

## Exercícios complementares

**1.** Na sequência $\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}, \frac{12}{7}, \frac{15}{8}, \ldots\right)$, temos:
$a_1 = \frac{3 \cdot 1}{3 + 1} = \frac{3}{4}$
$a_2 = \frac{3 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{6}{5}$
$a_3 = \frac{3 \cdot 3}{3 + 3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
$a_4 = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4} = \frac{12}{7}$
$a_5 = \frac{3 \cdot 5}{3 + 5} = \frac{15}{8}$
$\vdots$
$a_n = \frac{3n}{3 + n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**2.** Nos meses de janeiro, fevereiro e março foram vendidas, respectivamente, 33.000, 34.500 e 36.000 passagens. Como o padrão de crescimento é mantido para os próximos meses, essas vendas formam uma PA de razão $r = 1.500$. Queremos saber o número de passagens vendidas no mês de julho, ou seja, o sétimo termo dessa PA:
$a_7 = 33.000 + (7 - 1) \cdot 1.500 = 42.000$
Portanto, foram vendidas 42.000 passagens.
alternativa d

**3.** A sequência (1896, 1900, 1904, ..., 2016) é uma PA de $a_1 = 1896$, $a_n = 2016$ e $r = 4$.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$2016 = 1896 + (n - 1)4 \Rightarrow n - 1 = \frac{120}{4} \Rightarrow n = 31$
Assim, caso nenhum dos Jogos Olímpicos tivessem sido cancelados nesse período, em 2016 teriam ocorrido 31 vezes.
De acordo com o enunciado, em 2016 ocorreu a 28ª edição dos Jogos Olímpicos, e não a 31ª edição. Logo, os Jogos Olímpicos deixaram de acontecer três vezes nesse período.

**4.** Temos:
- $S_{10} = \frac{10 (a_1 + a_{10})}{2}$
  $100 = 5 \cdot (a_1 + a_1 + 9r) \Rightarrow 2a_1 + 9r = 20$ (I)
- $S_{20} = \frac{20 (a_1 + a_{20})}{2}$
  $400 = 10 \cdot (a_1 + a_1 + 19r) \Rightarrow 2a_1 + 19r = 40$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), encontramos: $a_1 = 1$ e $r = 2$
$a_{30} = a_1 + 29r = 1 + 29 \cdot 2 = 59$
Assim: $S_{30} = \frac{30(a_1 + a_{30})}{2} = 15 \cdot (1 + 59) = 900$
Portanto, $S_{30}$ é, sim, o quadrado de 30.

**5.** O primeiro número na forma $2^k$, com $k \in \mathbb{N}$, entre 3 e 3.000 é o número $2^2 = 4$, e o último é $2^{11} = 2.048$.
Sabemos que esses números estão em PG de razão $q = 2$.
Aplicando a fórmula do termo geral de uma PG, temos:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2.048 = 4 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 512 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{n-1} = 2^9 \Rightarrow n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10$

**6.** PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ e $q > 0$
$a_1 + a_3 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{9}{2}$ (I)
$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = (a_1)^5 \cdot q^{10} = 1.024$
$(a_1 \cdot q^2)^5 = 4^5 \Rightarrow a_1 \cdot q^2 = 4$ (II)
Substituindo o valor de $a_1 \cdot q^2$ por 4 na equação (I), obtemos:
$a_1 + 4 = \frac{9}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$

MODERNA

Substituindo o valor de $a_1$ por $\frac{1}{2}$ na equação (II), obtemos:

$\frac{1}{2}q^2 = 4 \Rightarrow q = 2\sqrt{2}$ ou $q = -2\sqrt{2}$ (não serve)

Então: $a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ e $a_3 = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$

Assim, o produto é:

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

**7.** Na equação dada, o primeiro membro representa a soma de uma PG infinita, com $a_1 = x$ e $q = \frac{1}{3}$; então:

$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \ldots = 9$

$\frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \Rightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}} = 9 \Rightarrow x = 9 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow x = 6$

Logo, $S = \{6\}$.

**8.** Vamos representar a PA e a PG, com $r \in \mathbb{N}$.

PA $(3, 3 + r, 3 + 2r, 3 + 3r, 3 + 4r, 3 + 5r, 3 + 6r, 3 + 7r)$

PG $(3 + r, 3 + 3r, 3 + 7r)$

Então, devemos ter:

$\frac{3 + 3r}{3 + r} = \frac{3 + 7r}{3 + 3r}$

$(3 + 3r)^2 = (3 + r) \cdot (3 + 7r)$

$9 + 18r + 9r^2 = 9 + 21r + 3r + 7r^2$

$2r^2 - 6r = 0 \Rightarrow 2r(r - 3) = 0 \Rightarrow r = 0$ ou $r = 3$

- Se $r = 0$, então: PG $(3, 3, 3)$ e $S_3 = 9$
- Se $r = 3$, então: PG $(6, 12, 24)$ e $S_3 = 42$

Portanto, a soma dos termos da PG é 9 ou 42.

**9.** $\left(\frac{1}{3}, a, 27\right)$ é PG, com $a > 0$; então:

$\frac{a}{\frac{1}{3}} = \frac{27}{a} \Rightarrow a^2 = \frac{27}{3} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 3$ ou $a = -3$ (não serve)

Como 9 é razão da PG e também da PA, temos:

$x + y + z = 18$

$x + x + r + x + 2r = 18$

$3x + 3r = 18$

$3x + 3 \cdot 9 = 18$

$3x = 18 - 27$

$3x = -9$

$x = -3$

**10.** $(40, x, y, 5, \ldots)$ é PG de razão $q$; então:

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1}$

$5 = 40 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Assim, $\left(\frac{1}{2}, 8 - a, \frac{7}{2}, \ldots\right)$ é PA; então:

$8 - a - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - (8 - a) \Rightarrow 2a = 16 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 6$

**11.** O 20º termo da sequência dada é o 10º termo da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, em que o primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$. Então:

$a_{20} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{1.024}$

O 31º termo da sequência dada é o 16º termo da PA (2, 4, 6, 8, ...), em que o primeiro termo é 2 e a razão é 2. Então:

$a_{31} = 2 + 15 \cdot 2 = 32$

Logo: $a_{20} \cdot a_{31} = \frac{1}{1.024} \cdot 32 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$

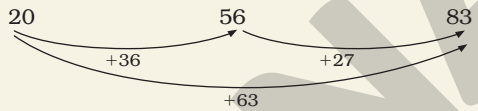
alternativa e

**12.** Queremos saber a soma das distâncias que o pêndulo percorrerá até que pare. Supondo que o número de oscilações seja tão grande quanto se queira, vamos determinar a soma de uma PG infinita, com $a_1 = x$ e $q = \frac{1}{3}$.

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{3x}{2} = 1{,}5x$

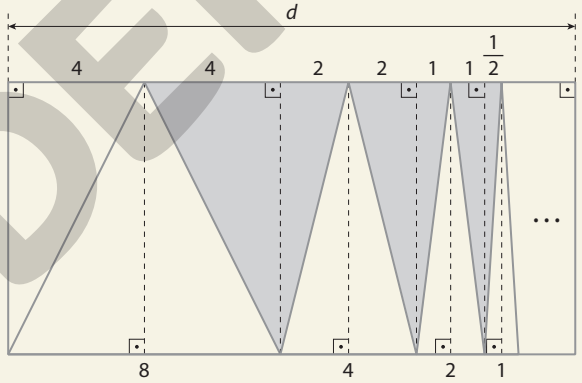
Ou seja, o pêndulo percorrerá $1{,}5x$ m até parar.

**13.**




Os possíveis valores da razão dessa PA são os valores dos divisores comuns de 36, 27 e 63. Portanto, os possíveis valores da razão dessa PA são 1, 3 ou 9.

**14.** Representando as regiões hachuradas em cinza, temos:




A sequência das áreas dos infinitos triângulos hachurados é dada por: $\left(\frac{6h}{2}, \frac{3h}{2}, \frac{3h}{4}, \ldots\right)$; então:

$a_1 = \frac{6h}{2} = 3h$ e $q = \frac{1}{2}$

A soma das áreas dos infinitos triângulos hachurados na figura é 51; logo:

$\lim_{n \to \infty} S_n = 51 \Rightarrow \frac{a_1}{1 - q} = 51 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3h}{1 - \frac{1}{2}} = 51 \Rightarrow h = \frac{51}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{17}{2}$

$d = 8 + 4 + 2 + 1 + \ldots$

$d = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$

Assim, a área, em centímetro quadrado, do retângulo de lados de medidas $h$ e $d$ será:

$A = \frac{17}{2} \cdot 16 = 136$

alternativa c

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODENA

## Autoavaliação

**1.** (2, 5, 8, 11, ...) é uma PA e (3, 12, 48, 192, ...) é uma PG. Ambas são sequências.
alternativa b

**2.** A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma PG, pois cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o antecedente por 2.
alternativa c

**3.** $a_1 = 7$, $r = -2$ e o termo geral $a_n$ é determinado por:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 7 + (n - 1) \cdot (-2)$
$a_n = 9 - 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
alternativa d

**4.** Como a lei de formação de uma PA representa uma função do 1º grau com domínio $\mathbb{N}$, o gráfico de uma PA é formado por pontos que pertencem ao gráfico de uma função afim.
alternativa a

**5.** $S_{20} = \frac{20 \cdot (1 + 20)}{2} \Rightarrow S_{20} = 210$
alternativa c

**6.** $q = \frac{-6}{-2} = \frac{-18}{-6} = 3$
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = (-2) \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
alternativa b

**7.** Temos uma PG na qual $a_1 = 20.000$ e $q = 1{,}02$. Queremos obter o valor de $a_{11}$. Então:
$a_{11} = 20.000 \cdot 1{,}02^{10} \simeq 24.380$
alternativa b

**8.** Como a lei de formação de uma PG representa uma função exponencial com domínio $\mathbb{N}$, os pontos do gráfico da PG pertencem ao gráfico de uma função exponencial.
alternativa c

**9.** $q = \frac{24}{3} = \frac{192}{24} = 8$

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$S_4 = \frac{3 \cdot (8^4 - 1)}{8 - 1} \Rightarrow S_4 = \frac{3 \cdot 4.095}{7} \Rightarrow S_4 = 1.755$

alternativa d

**10.** $q = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

alternativa a

**11.** Seja a PA $(x - r, x, x + r)$.

Temos: $x - r + x + x + r = 30 \Rightarrow x = 10$

Então, temos a PA $(10 - r, 10, 10 + r)$.

Sabemos que, adicionando 1, 2 e 9, respectivamente, a esses termos, obtemos a PG $(11 - r, 12, 19 + r)$.

Então:

$\frac{12}{11 - r} = \frac{19 + r}{12} \Rightarrow 209 + 11r - 19r - r^2 = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 + 8r - 65 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 5$ ou $r = -13$

- Se $r = 5$, temos a PA (5, 10, 15).
- Se $r = -13$, temos a PA (23, 10, −3).

Como os três números devem ser positivos, temos a PA (5, 10, 15) e, portanto, o menor deles é 5.
alternativa b

# Capítulo 6 – Matemática financeira

## Exercícios propostos

**1.** De 40 lugares, 24 estão ocupados. Então:
Lugares vazios: $40 - 24 = 16$

$\frac{16}{40} = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$

**2.** Em 30 dias, o número de horas que alguma parte do bairro ficou sem energia elétrica é dado por:
$30 \cdot 0{,}2 \cdot 24 = 144$
Como a residência em questão ficou 18 horas sem energia, a porcentagem pedida é de: $\frac{18}{144} = 0{,}125 = 12{,}5\%$
alternativa d

**3.** De 120 kWh para 156 kWh, ocorreu um aumento de 36 kWh. A taxa percentual de aumento foi:

$\frac{36}{120} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$

*Comentário*: Para aproximar esse conteúdo da realidade dos alunos e complementar o estudo de porcentagens, peça a eles que tragam faturas do consumo de energia elétrica mais recentes e façam o cálculo, em porcentagem, do acréscimo ou do decréscimo do consumo de dois meses consecutivos. Se sua região adotar o horário de verão, peça a eles que calculem a porcentagem de economia de energia durante esses meses (calcular a média) em relação aos meses em que não vigorava o horário de verão. Solicite a eles que montem um painel apresentando os dados obtidos. Essa é uma maneira de instrumentalizar o estudante para trabalhar o tema contemporâneo Educação para o consumo.

**4.** $\frac{10}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{500}{10.000} = \frac{5}{100} = 5\%$

Logo, 5% dos produtos da farmácia são de uso contínuo e exigem a apresentação de receita médica.

**5.** Sendo $x$ a quantidade inicial do produto no estoque, temos:
1º dia: $x - 0{,}4x = 0{,}6x$
2º dia: $0{,}6x - 0{,}25 \cdot 0{,}6x = 0{,}45x$
Após o segundo dia, restou $0{,}45x$ do produto no estoque, ou seja, 45% do estoque do produto não foi vendido.

**6.** $(1 + i_{acumulada}) = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$
$(1 + 0{,}38) = (1 + 0{,}15) \cdot (1 + i_2)$
$1 + i_2 = \frac{1{,}38}{1{,}15}$
$i_2 = 0{,}2 = 20\%$
Logo, a taxa de valorização no 2º mês foi de 20%.

**7.** **a)** Sendo $i_m$ a taxa de inflação mensal e $i_T$ a taxa de inflação trimestral, temos: $i_m = 5\% = 0{,}05$
$1 + i_T = (1 + 0{,}05)^3$
$1 + i_T = (1{,}05)^3$
$1 + i_T \simeq 1{,}158$
$i_T \simeq 0{,}158 = 15{,}8\%$
Logo, a taxa de inflação trimestral é aproximadamente 15,8%.

MONTRNA

**b)** $1 + i_A = (1 + i_a)^2$, em que $i_A$ é a inflação acumulada em 2 anos e $i_a$, a inflação anual.

$1 + 0{,}44 = (1 + i_a)^2$

$1 + i_a = 1{,}2$

$i_a = 0{,}2 = 20\%$

Logo, a taxa de inflação média ao ano é 20%.

**8.** Sendo $n_0$ o número de casos em janeiro e $n_f$ o número de casos após o mês de março, temos:

$n_f = n_0 \cdot (1 + 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}10) = n_0 \cdot 0{,}99$

Ou seja, $n_f = 99\%$ de $n_0$; então, houve diminuição de 1% dos casos positivos da doença.

*Comentário*: Há mais de uma forma de resolver esse exercício; por isso, é interessante pedir para o aluno resolvê-lo com outro colega. Às vezes, uma maneira de resolver complementa o raciocínio de outra.

**9.** Situação inicial: 100 pessoas, sendo 1 mulher e 99 homens.

Situação após a saída de $n$ homens:

$x$ pessoas, sendo 1 mulher e $(99 - n)$ homens.

Como queremos saber o valor de $n$ para que $(99 - n)$ represente 98% de $x$, estabelecemos:

$99 - n = 98\%$ de $x$

$99 - n = \frac{98}{100} \cdot (99 - n + 1)$

$99 - n = \frac{98}{100} \cdot (100 - n)$

$99 - n = 98 - 0{,}98n$

$0{,}02n = 1$

$n = 50$

Portanto, 50 homens devem retirar-se da sala.

*Comentário*: O resultado dessa questão, de modo geral, surpreende até mesmo aqueles que a resolvem corretamente, e por isso desafia o senso comum.

**10.** $P_V = P_C + P_C \cdot 0{,}06$

$P_V = 20.000 \cdot (1{,}06)$

$P_V = 21.200$

O automóvel deve ser vendido por R$ 21.200,00.

**11.** Sabemos que $L = P_V - P_C$; então:

$L = 38.640 - 34.500 = 4.140$

Assim:

$\frac{L}{P_C} = \frac{4.140}{34.500} = 0{,}12 = 12\%$

Portanto, obtive 12% de lucro em relação ao valor de compra do terreno.

**12.** Preço pago por Débora: $P_C$

Preço que Ana pagou: $(1 - 0{,}15) \cdot P_C$

Preço que Fernando pagou: $(1 + 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot P_C$

$(1 + 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot P_C = 1.955{,}00$

$(1 - 0{,}0225) \cdot P_C = 1.955{,}00$

$P_C = \frac{1.955{,}00}{0{,}9775}$

$P_C = 2.000{,}00$

Diferença entre os preços pagos por Débora e Fernando:
$2.000{,}00 - 1.955{,}00 = 45{,}00$

Portanto, Fernando pagaria R$ 45,00 a mais se tivesse comprado na mesma loja em que Débora comprou.

**13.** • Do enunciado, temos: $\frac{L}{P_V} = 0{,}2 \Rightarrow L = 0{,}2 \cdot P_V$

Sabemos que $L = P_V - P_C$; então:

$0{,}2 \cdot P_V = P_V - P_C \Rightarrow 0{,}8 \cdot P_V = P_C$

Mas $P_C = 28$; então:

$0{,}8 \cdot P_V = 28$

$P_V = 35$

O preço de venda é R$ 35,00.

• Se o lucro fosse 20% do preço de custo, teríamos:

$\frac{L}{P_C} = 0{,}2 \Rightarrow L = 0{,}2 \cdot P_C$

Sabemos que $L = P_V - P_C$; então:

$0{,}2 \cdot P_C = P_V - P_C \Rightarrow 1{,}2 \cdot P_C = P_V \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}2 \cdot 28 = P_V \Rightarrow P_V = 33{,}6$

O preço de venda seria R$ 33,60.

**14.** $\frac{L}{P_V} = 0{,}6 \Rightarrow L = 0{,}6 \cdot P_V$

Sabemos que $P_C = P_V - L$; então:

$P_C = P_V - 0{,}6 \cdot P_V \Rightarrow P_C = 0{,}4 \cdot P_V$

Para saber a taxa de lucro em relação ao preço de custo, devemos fazer:

$\frac{L}{P_C} = \frac{0{,}6 \cdot P_V}{0{,}4 \cdot P_V} = \frac{0{,}6}{0{,}4} = 1{,}5 = 150\%$

Logo, a taxa de lucro em relação ao preço de custo é de 150%.

**15.** Sendo $P_C$, o preço de custo; $P_V$, o preço de venda; e $P_t$, o preço de tabela, temos do enunciado que:

$P_V \geqslant 1{,}44 \cdot P_C$ e $P_t = 1{,}8 \cdot P_C$

O desconto máximo aplicado ao preço de tabela deve ser de tal forma que:

$1{,}8 \cdot P_C \cdot (1 - k) \geqslant 1{,}44 \cdot P_C$, em que $(1 - k)$ é o desconto a ser dado ao preço de tabela.

Assim:

$1{,}8 \cdot (1 - k) \geqslant 1{,}44$

$1 - k \geqslant 0{,}8$

$k \leqslant 0{,}2$

Portanto, o máximo desconto que pode ser dado ao preço de tabela é de 20%.

alternativa c

**16.** **a)** $M = C(1 + i \cdot t)$

$M = 2.000 \cdot (1 + 0{,}24 \cdot 3) \Rightarrow M = 3.440$

Logo, após 3 anos de aplicação, o montante será R$ 3.440,00.

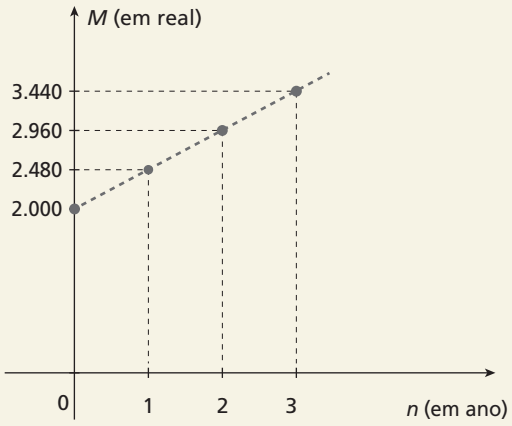
**b)** $M = 2.000 \cdot (1 + 0{,}24n)$

$M = 2.000 + 480n$, em que $M$ é o montante após $n$ anos de aplicação.

**c)**

| *n* (em ano) | *M* (em real) |
|---|---|
| 0 | 2.000 |
| 1 | 2.480 |
| 2 | 2.960 |
| 3 | 3.440 |

MODERNA




ADILSON SECCO

*Comentário*: Essa questão se relaciona com o boxe **Reflita** da página 132 do livro do estudante, e possibilita um trabalho intradisciplinar com PA e função afim.

**17.** $J = 50\% \cdot C = 0{,}5 \cdot C$

Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$; então:

$0{,}5 \cdot C = C \cdot 0{,}15 \cdot t$

$\frac{1}{2} \cdot \cancel{C} = \cancel{C} \cdot \frac{15}{100} \cdot t$

$\frac{1}{2} = \frac{15}{100} \cdot t$

$\frac{100}{30} = t$

$t = \frac{10}{3}$

$t = 3 + \frac{1}{3}$

Logo, o tempo de aplicação deve ser de 3 anos e 4 meses.

**18.** Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$; então:

$J_1 = 110.000 \cdot 0{,}06 \cdot 3$

$J_1 = 19.800$

$J_2 = 80.000 \cdot i \cdot 3$

$J_2 = 240.000i$

Mas $J_1 = J_2 + 10.200$; assim:

$19.800 = 240.000\, i + 10.200$

$i = \frac{19.800 - 10.200}{240.000} \Rightarrow i = 0{,}04 = 4\%$

A taxa de juro da aplicação do menor capital foi 4% ao mês.

**19.** **a)** Sabendo que $M = C(1 + i \cdot t)$, temos:

$29.000 = C_{FI}(1 + 0{,}16 \cdot 1)$

$C_{FI} = \frac{29.000}{1{,}16} \Rightarrow C_{FI} = 25.000$

Logo, o valor aplicado no FI foi R$ 25.000,00.

**b)** 25% ——— R$ 25.000,00

75% ——— $C_F$

$C_F = \frac{75 \cdot 25.000}{25} \Rightarrow C_F = 75.000$

$M_F = C_F \cdot (1 + 0{,}26 \cdot 1)$

$M_F = 75.000 \cdot 1{,}26$

$M_F = 94.500$

Então, após um ano de aplicação dos R$ 75.000,00 no fundo de ações, Carina tinha um montante de R$ 94.500,00.

Assim, ao final de um ano, o montante global era R$ 123.500,00.

Portanto, a rentabilidade global das aplicações de Carina foi de:

$\frac{123.500 - 100.000}{100.000} = 0{,}235 = 23{,}5\%$

**20.** **a)** Como Carlos pagou uma entrada de R$ 2.000,00, o valor do juro será de R$ 500,00, pois:

$J = 4.500 - 4.000 = 500$

Sabendo que $J = C \cdot i \cdot t$, temos:

$500 = 4.000 \cdot i \cdot 2$

$i = \frac{500}{8.000} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Logo, a taxa mensal é 6,25%.

**b)** Vamos determinar $t$ para que $i$ seja 2,5% ao mês.

$500 = 4.000 \cdot 0{,}025 \cdot t \Rightarrow t = \frac{500}{100} \Rightarrow t = 5$

Logo, a parcela deveria vencer após 5 meses.

**21.** Sabemos que $M = C(1 + i)^t$; então:

$13.310 = C(1 + 0{,}1)^3$

$C = \frac{13.310}{(1{,}1)^3} \Rightarrow C = \frac{13.310}{1{,}331} \Rightarrow C = 10.000$

Logo, Mariana deve aplicar hoje um capital de R$ 10.000,00.

**22.** $M = C_0(1 + i)^t \Rightarrow M = C_0(1 + 0{,}12)^t \Rightarrow M = C_0 \cdot 1{,}12^t$

Para duplicar o valor, devemos ter $M = 2C_0$; logo:

$2C_0 = C_0 \cdot 1{,}12^t$

$2 = 1{,}12^t$

$\log_{1{,}12} 2 = t$

$\frac{\log 2}{\log 1{,}12} = t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log\left(7 \cdot \frac{16}{100}\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 7 + 4 \cdot \log 2 - \log 100}$

Dados $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 7 \simeq 0{,}84$, temos:

$t \simeq \frac{0{,}3}{0{,}84 + 4 \cdot 0{,}3 - 2} \Rightarrow t \simeq 7{,}5$

O valor do apartamento duplicou em aproximadamente 7,5 anos, que equivale a 7 anos e 6 meses.

alternativa e

**23.** Primeira aplicação:

$M_1 = C(1 + i_1)^{t_1}$

$M_1 = 1.500 \cdot (1 + 0{,}02)^2$

$M_1 = 1.500 \cdot 1{,}0404$

$M_1 = 1.560{,}6$

MODERNA

Segunda aplicação:

$M_2 = M_1(1 + i_2 \cdot t_2)$

$1.950{,}75 = 1.560{,}6 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot t_2)$

$1 + 0{,}05 \cdot t_2 = \frac{1.950{,}75}{1.560{,}6}$

$0{,}05 \cdot t_2 = 1{,}25 - 1$

$t_2 = \frac{0{,}25}{0{,}05} \Rightarrow t_2 = 5$

Logo, o prazo da segunda aplicação foi de 5 meses.

**24.** Se o capital duplica em 2 meses de aplicação, então, após 2 meses, o montante será $2C$; assim:

$2C = C(1 + i)^2$

$(1 + i)^2 = 2$

$1 + i = \sqrt{2}$

$i = \sqrt{2} - 1$

$i \simeq 0{,}41 = 41\%$

Logo, a taxa mensal de juro é, aproximadamente, 41%.

**25.** • $1 + 700\% = (1 + i_a)^3$

$(1 + i_a)^3 = 8$

$1 + i_a = 2$

$i_a = 1 = 100\%$

Portanto, a taxa de crescimento médio por ano foi de 100%.

• $1 + 700\% = (1 + 25\%) \cdot (1 + 100\%) \cdot (1 + i_3)$

$1 + i_3 = \frac{8}{1{,}25 \cdot 2}$

$1 + i_3 = 3{,}2$

$i_3 = 2{,}2 = 220\%$

Portanto, a taxa de crescimento no terceiro ano foi de 220%.

**26.** Em 2018, as vendas foram $x$, e, em 2019, $1{,}4x$.

Sabendo que a porcentagem $p$ das vendas em 2018 foi inferior à das vendas de 2019, temos:

$p = 1 - \frac{x}{1{,}4x}$

$p = 1 - \frac{1}{1{,}4}$

$p \simeq 0{,}29$

Logo, as vendas de 2018 foram, aproximadamente, 29% inferiores às de 2019.

**27.** Primeira aplicação:

$M_1 = 4.000 \cdot (1 - 0{,}40)$

$M_1 = 4.000 \cdot 0{,}6$

$M_1 = 2.400$

Segunda aplicação:

$M_2 = M_1 \cdot (1 + 0{,}20)^2$

$M_2 = 2.400 \cdot 1{,}44$

$M_2 = 3.456$

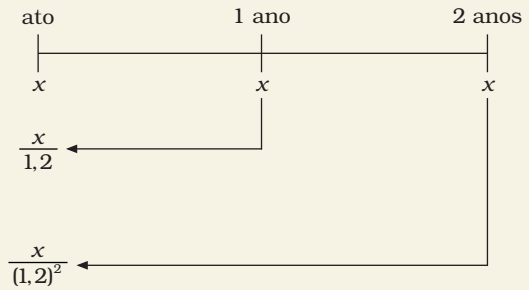
Calculando a taxa percentual pedida, temos:

$\frac{3.456}{4.000} = 0{,}864 = 86{,}4\%$

Logo, o investidor não conseguiu recuperar o dinheiro aplicado, e a taxa percentual foi 86,4%.

**28.** Resposta pessoal.

**29.** Observe o esquema:




$x + \frac{x}{1{,}2} + \frac{x}{(1{,}2)^2} = 364.000$

$(1{,}2)^2x + 1{,}2x + x = 364.000 \cdot (1{,}2)^2$

$1{,}44x + 1{,}2x + x = 364.000 \cdot 1{,}44$

$3{,}64x = 524.160$

$x = \frac{524.160}{3{,}64}$

$x = 144.000$

Portanto, o valor de cada parcela é R$ 144.000,00.

**30.** Observe o esquema:



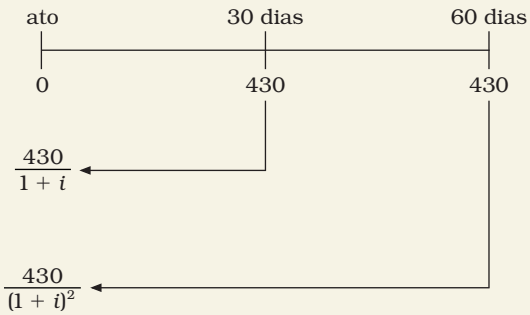

$60 + \frac{60}{1 + i} = 100$

$60 \cdot (1 + i) + 60 = 100 \cdot (1 + i) \Rightarrow 1 + i = \frac{60}{40} \Rightarrow$

$\Rightarrow i = \frac{3}{2} - 1 = 0{,}5 = 50\%$

Logo, a taxa mensal de juro é 50%.

**31.** Observe o esquema:




$0 + \frac{430}{1 + i} + \frac{430}{(1 + i)^2} = 800$

$430 \cdot (1 + i) + 430 = 800 \cdot (1 + i)^2$

Considerando $x = 1 + i$, temos:

$800x^2 - 430x - 430 = 0$

$80x^2 - 43x - 43 = 0$

$x = \frac{43 \pm \sqrt{15.609}}{160}$

$x \simeq 1{,}05$ ou $x \simeq -0{,}51$ (não convém)

Então: $1 + i \simeq 1{,}05 \Rightarrow i \simeq 0{,}05$

Logo, a taxa mensal é de, aproximadamente, 5%.

MODERNA

**32.** Vamos retirar o juro de 2 meses do valor final da dívida, que é R$ 208.080,00.

$$\frac{208.080}{(1 + 0{,}02)^2} = \frac{208.080}{(1{,}02)^2} = 200.000$$

Portanto, João terá de pagar R$ 200.000,00.

**33.** • O valor do refrigerador à vista é $x$, tal que:

$$x = 400 + \frac{600}{(1{,}05)^2} \simeq 400 + 544{,}22 \simeq 944{,}22$$

• Segundo o plano do consumidor, ele quer pagar R$ 400,00 de entrada e mais duas prestações mensais e iguais. Sendo $y$ o valor de cada prestação mensal, para que o plano do consumidor seja equivalente ao plano anunciado, devemos ter:

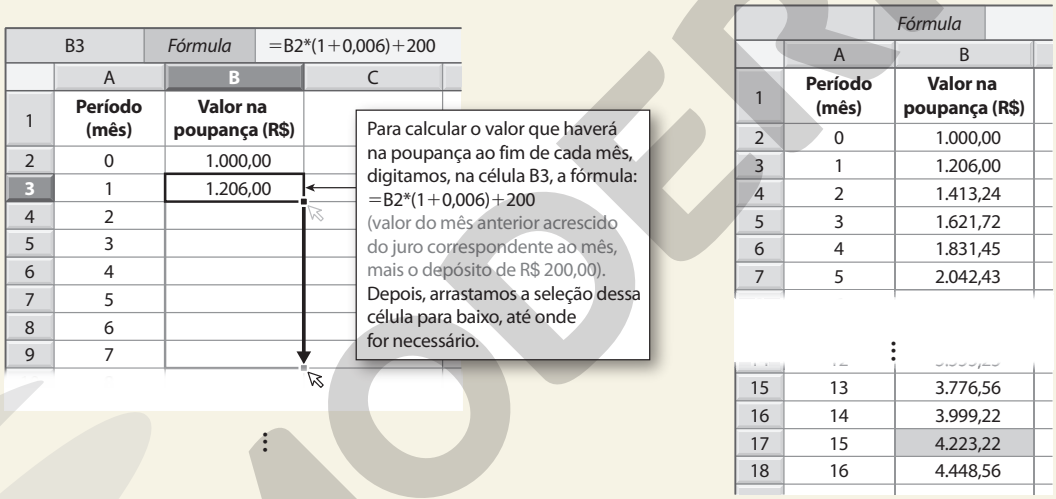
$$400 + \frac{y}{1{,}05} + \frac{y}{(1{,}05)^2} \simeq 944{,}22$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$y \simeq \frac{1.041 - 441}{2{,}05} \simeq 292{,}68$$

Logo, o valor de cada parcela deverá ser, aproximadamente, R$ 292,68.

**34.** Para resolver esse problema, basta montar uma planilha como esta:



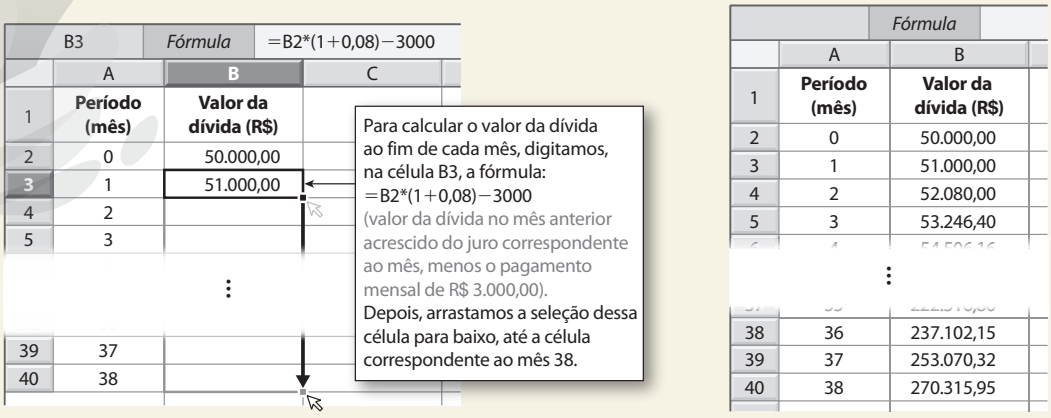
| B3 | *Fórmula* | =B2*(1+0,006)+200 | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| 1 | **Período (mês)** | **Valor na poupança (R$)** | |
| 2 | 0 | 1.000,00 | |
| 3 | 1 | 1.206,00 | |
| 4 | 2 | | |
| 5 | 3 | | |
| 6 | 4 | | |
| 7 | 5 | | |
| 8 | 6 | | |
| 9 | 7 | | |

Para calcular o valor que haverá na poupança ao fim de cada mês, digitamos, na célula B3, a fórmula: =B2*(1+0,006)+200 (valor do mês anterior acrescido do juro correspondente ao mês, mais o depósito de R$ 200,00). Depois, arrastamos a seleção dessa célula para baixo, até onde for necessário.

| | *Fórmula* | |
|---|---|---|
| | A | B |
| 1 | **Período (mês)** | **Valor na poupança (R$)** |
| 2 | 0 | 1.000,00 |
| 3 | 1 | 1.206,00 |
| 4 | 2 | 1.413,24 |
| 5 | 3 | 1.621,72 |
| 6 | 4 | 1.831,45 |
| 7 | 5 | 2.042,43 |
| ⋮ | | |
| 15 | 13 | 3.776,56 |
| 16 | 14 | 3.999,22 |
| 17 | 15 | 4.223,22 |
| 18 | 16 | 4.448,56 |

Portanto, Luana conseguirá juntar R$ 4.200,00 na poupança depois de no mínimo 15 meses.

**35.** Inserindo as informações em uma planilha, temos:



| B3 | *Fórmula* | =B2*(1+0,08)−3000 | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| 1 | **Período (mês)** | **Valor da dívida (R$)** | |
| 2 | 0 | 50.000,00 | |
| 3 | 1 | 51.000,00 | |
| 4 | 2 | | |
| 5 | 3 | | |
| 39 | 37 | | |
| 40 | 38 | | |

Para calcular o valor da dívida ao fim de cada mês, digitamos, na célula B3, a fórmula: =B2*(1+0,08)−3000 (valor da dívida no mês anterior acrescido do juro correspondente ao mês, menos o pagamento mensal de R$ 3.000,00). Depois, arrastamos a seleção dessa célula para baixo, até a célula correspondente ao mês 38.

| | *Fórmula* | |
|---|---|---|
| | A | B |
| 1 | **Período (mês)** | **Valor da dívida (R$)** |
| 2 | 0 | 50.000,00 |
| 3 | 1 | 51.000,00 |
| 4 | 2 | 52.080,00 |
| 5 | 3 | 53.246,40 |
| ⋮ | | |
| 38 | 36 | 237.102,15 |
| 39 | 37 | 253.070,32 |
| 40 | 38 | 270.315,95 |

Assim, observando os dados da planilha, concluímos que o valor da dívida de Everton após 38 meses era R$ 270.315,95.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**36. a)** Na planilha eletrônica, compomos uma coluna com o período da aplicação em anos e outras duas com os montantes para juro simples e juro composto.

| C3 | *Fórmula* | =150000*(1,15)^A3 | | |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E |
| 1 | **Período (ano)** | **Montante (juro simples) 20%** | **Montante (juro composto) 15%** | | |
| 2 | 0 | R$ 150.000,00 | R$ 150.000,00 | | |
| 3 | 1 | R$ 180.000,00 | R$ 172.500,00 | | |
| 4 | 2 | R$ 210.000,00 | R$ 198.375,00 | | |
| 5 | 3 | R$ 240.000,00 | R$ 228.131,25 | | |
| 6 | 4 | R$ 270.000,00 | R$ 262.350,94 | | |
| 7 | 5 | R$ 300.000,00 | R$ 301.703,58 | | |
| 8 | 6 | R$ 330.000,00 | R$ 346.959,11 | | |
| 9 | 7 | R$ 360.000,00 | R$ 399.002,98 | | |
| 10 | 8 | R$ 390.000,00 | R$ 458.853,43 | | |
| 11 | 9 | R$ 420.000,00 | R$ 527.681,44 | | |
| 12 | 10 | R$ 450.000,00 | R$ 606.833,66 | | |
| 13 | | | | | |
| 14 | | | | | |
| 15 | | | | | |
| 16 | | | | | |

NELSON MATSUDA

**b)** Sim, o rendimento do investimento no regime de juro composto supera o rendimento do investimento no regime de juro simples ao final do quinto ano.

**c)** Montante ao final do 10º ano:

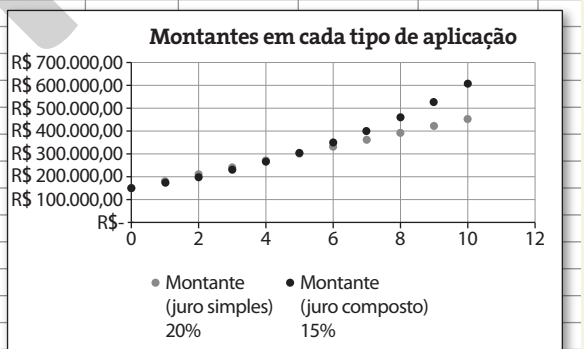
• Juro simples: R$ 450.000,00 • Juro composto: R$ 606.833,66

Assim, a diferença será R$ 156.833,66 (606.833,66 − 450.000,00).

**d)** A melhor aplicação a ser feita no período de 10 anos é a do regime de juro composto.

**e)** Selecionamos as células com os dados, clicamos no menu **inserir**, depois em **criar gráfico**. O gráfico que melhor representa a situação é o de **dispersão**.

| A1 | *Fórmula* | Período (ano) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H |
| 1 | **Período (ano)** | **Montante (juro simples) 20%** | **Montante (juro composto) 15%** | | | | | |
| 2 | 0 | R$ 150.000,00 | R$ 150.000,00 | | | | | |
| 3 | 1 | R$ 180.000,00 | R$ 172.500,00 | | | | | |
| 4 | 2 | R$ 210.000,00 | R$ 198.375,00 | | | | | |
| 5 | 3 | R$ 240.000,00 | R$ 228.131,25 | | | | | |
| 6 | 4 | R$ 270.000,00 | R$ 262.350,94 | | | | | |
| 7 | 5 | R$ 300.000,00 | R$ 301.703,58 | | | | | |
| 8 | 6 | R$ 330.000,00 | R$ 346.959,11 | | | | | |
| 9 | 7 | R$ 360.000,00 | R$ 399.002,98 | | | | | |
| 10 | 8 | R$ 390.000,00 | R$ 458.853,43 | | | | | |
| 11 | 9 | R$ 420.000,00 | R$ 527.681,44 | | | | | |
| 12 | 10 | R$ 450.000,00 | R$ 606.833,66 | | | | | |
| 13 | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | |




NELSON MATSUDA

**37.** Resposta pessoal.

## Exercícios complementares

**1.** Sendo $a$ o número de candidatos aprovados, $r$ o número de candidatos reprovados e $t$ o total de candidatos, temos:

$\frac{a}{r} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = \frac{3a}{2}$

MODERNA

Queremos:

$$\frac{a}{t} = \frac{a}{a+r} = \frac{a}{a+\frac{3a}{2}} = \frac{a}{\frac{5a}{2}} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

alternativa d

*Comentário*: Se achar conveniente, oriente os alunos a construir um retângulo dividido em duas partes proporcionais a 2 e a 3 para ilustrar o enunciado e, assim, facilitar seu entendimento.

**2.** Sejam $p_i$ o preço inicial, $p_a$ o preço com aumento e $p_f$ o preço final.

Então, temos:

$p_a = (1 + 0,20) \cdot p_i$

$p_f = (1 - 0,20) \cdot p_a$

$p_f = (1 - 0,20) \cdot (1 + 0,20) \cdot p_i$

$p_f = 0,80 \cdot 1,20 \cdot p_i$

$p_f = 0,96p_i$

Portanto, o preço final será 96% do preço inicial.

**3.** **a)** Se o aumento fosse de 50%, teríamos:

$260 \cdot (1 + 0,50) = 260 \cdot 1,50 = 390$

Mas o preço original sofreu o seguinte aumento:

$260 \cdot (1 + 0,20) \cdot (1 + 0,30) = 405,6$

Portanto, dois aumentos sucessivos de 20% e de 30% **não** equivalem a um de 50%.

**b)** Conforme calculado no item **a**:

- Novo valor: R$ 405,60
- Taxa de aumento acumulada: $\frac{145,60}{260} = 56\%$

**4.** Sejam $x$ o número de mulheres e $y$ o total de pessoas. Então:

$$\begin{cases} x = \frac{25}{100}y \\ (x-3) = \frac{20}{100}(y-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x & \text{(I)} \\ (x-3) = \frac{20}{100}(y-3) & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$(x-3) = \frac{20}{100} \cdot (4x-3)$$

$x - 3 = 0,8x - 0,6$

$x - 0,8x = 3 - 0,6$

$0,2x = 2,4 \Rightarrow x = 12$

Portanto, havia 12 mulheres. E se 3 mulheres se retirarem, restarão 9.

**5.** Quantidade de álcool que já está no reservatório:

18% de 30 $\ell$ = 5,4 $\ell$

Quantidade de álcool que o reservatório cheio deve ter:

20% de 40 $\ell$ = 8 $\ell$

Portanto, dos 10 $\ell$ que serão colocados, 2,6 $\ell$ devem ser de álcool, pois 10 − 5,4 = 2,6. Calculando a porcentagem, temos:

$$\frac{2,6}{10} = 26\%$$

alternativa d

**6.** $P_C = 9$ (por unidade)

$P_V = x - 0,1x = 0,9x$

$$\frac{L}{P_C} = 0,4 \Rightarrow L = 0,4 \cdot P_C \Rightarrow L = 0,4 \cdot 9 \Rightarrow L = 3,6$$

Sabemos que $L = P_V - P_C$; então:

$3,6 = 0,9x - 9 \Rightarrow x = 14$

Logo, o valor de $x$ é R$ 14,00.

alternativa d

**7.** Se a inflação é 25%, o que custava $x$ reais passa a custar $1,25x$ reais.

O poder aquisitivo, que era de 100%, passa a ser de:

$$\frac{x}{1,25x} = 0,8 = 80\%$$

Ou seja, o poder aquisitivo sofreu uma queda de 20%.

**8.** $J = C \cdot i \cdot t$

$$\frac{2}{3} \cdot C \cdot 0,06 \cdot 2 + \frac{1}{3}C \cdot 0,045 \cdot 3 = C \cdot i \cdot 3$$

$0,08 + 0,045 = i \cdot 3$

$$i = \frac{0,125}{3} \text{ (taxa mensal)}$$

$$i_{\text{anual}} = 12 \cdot \frac{0,125}{3} = 0,5$$

Portanto, a taxa anual deveria ser de 50%.

**9.** Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$. Se chamarmos de $x$ a parte aplicada a 1,8% a.m., então a parte aplicada a 3% será $(24.000 - x)$. Assim:

$480 = x \cdot 0,018 \cdot 1 + (24.000 - x) \cdot 0,03 \cdot 1$

$480 = 0,018x - 0,03x + 720$

$0,012x = 240$

$x = 20.000$

Portanto, R$ 20.000,00 foi aplicado a 1,8% a.m. e R$ 4.000,00 foi aplicado a 3% a.m.

**10.** Chamando de $x$ a quantia aplicada no banco A, o restante é dado por $(60.000 - x)$. Sabemos que $J = C \cdot i \cdot t$; então:

$x \cdot 0,05 \cdot 1 = (60.000 - x) \cdot 0,07 \cdot 1$

$$\frac{x \cdot 0,05}{0,07} = 60.000 - x$$

$$\frac{5}{7}x + x = 60.000$$

$$x = \frac{60.000 \cdot 7}{12}$$

$x = 35.000$

Portanto, a pessoa aplicou R$ 35.000 no banco A.

alternativa e

**11.** $$211,60 = 250 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$$

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{211,60}{250}$$

Usando uma calculadora, obtemos:

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 0,8464$$

$$1 - \frac{p}{100} = 0,92 \Rightarrow \frac{p}{100} = 0,08 \Rightarrow p = 8$$

O valor de $p$ é 8.

**12.** • $3.600,00 = C_1(1 + 0,014)^3$

$$C_1 = \frac{3.600}{(1,014)^3} \Rightarrow C_1 \simeq 3.452,94$$

Então, para pagar uma dívida de R$ 3.600,00 daqui a 3 meses, a pessoa deve aplicar hoje, aproximadamente, R$ 3.452,94.

• $8.700 = C_2(1 + 0,014)^5$

$$C_2 = \frac{8.700}{(1,014)^5} \Rightarrow C_2 \simeq 8.115,77$$

Então, para pagar uma dívida de R$ 8.700,00 daqui a 5 meses, a pessoa deve aplicar hoje, aproximadamente, R$ 8.115,77.

MODERNA

**13.** $M = C(1 + i)^t$

$\frac{144}{100}C = C(1 + i)^2$

$1{,}44 = (1 + i)^2$

$1 + i = 1{,}2$

$i = 0{,}2 = 20\%$

alternativa a

**14.** $M = C(1 + i)^t$

$1.000.000 = 1.000(1 + 0{,}1)^t$

$(1{,}1)^t = 1.000$

$\log (1{,}1)^t = \log 1.000$

$t \cdot \log 1{,}1 = 3$

$t = \dfrac{3}{\log \frac{11}{10}}$

$t = \dfrac{3}{\log 11 - \log 10}$

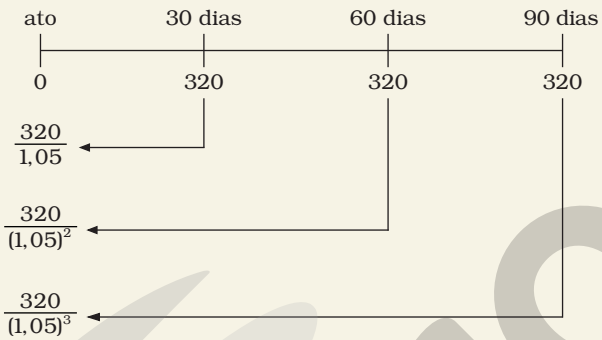
$t = \dfrac{3}{1{,}04 - 1}$

$t = \dfrac{3}{0{,}04} \Rightarrow t = 75$

Portanto, o tempo de aplicação encontrado é de 75 anos, que corresponde a $\frac{3}{4}$ de século.

alternativa e

**15.** Observe o esquema:




Então:

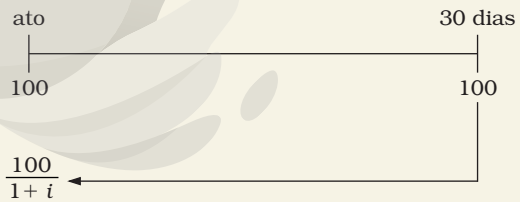
$0 + \frac{320}{1{,}05} + \frac{320}{(1{,}05)^2} + \frac{320}{(1{,}05)^3} \simeq 871{,}44$

Ou seja, o valor à vista dessa mercadoria é, aproximadamente, R$ 871,44.

**16.** Valor à vista: R$ 180,00, pois $200 - 200 \cdot 0{,}10 = 180$.

Valor a prazo: duas prestações de R$ 100,00 cada uma.

Então:




Assim:

$100 + \frac{100}{1 + i} = 180 \Rightarrow 100 = 80 + 80i \Rightarrow$

$\Rightarrow i = 0{,}25 = 25\%$

alternativa d

**17.** **a)** No regime de juro composto, temos:

$M_0 = 300$, $M_1 = 600$, $M_2 = 1.200$

Então:

$M = 300 \cdot (1 + i)^t$

$600 = 300 \cdot (1 + i)^1$

$(1 + i)^1 = 2$

$i = 1 \Rightarrow i = 100\%$

Logo: $M(t) = 300 \cdot (1 + 1)^t$ ou $M(t) = 300 \cdot 2^t$

Assim:

$M(3) = 300 \cdot 2^3 \Rightarrow M(3) = 2.400$

Portanto, no regime de juro composto, o montante, após 3 meses, será de R$ 2.400,00.

**b)** No gráfico, observamos que a linha referente a juro simples está abaixo da linha referente a juro composto após o 1º mês. Isso significa que o juro simples é desvantajoso para o investidor já após o 1º mês.

**18.** • $1 + i_{\text{acumulada}} = (1 + 0{,}012) \cdot (1 + 0{,}008) \cdot (1 + 0{,}013)$

Usando uma calculadora, obtemos:

$1 + i_{\text{acumulada}} \simeq 1{,}0334$

$i_{\text{acumulada}} \simeq 0{,}0334 = 3{,}34\%$

• $1 + 0{,}04 \simeq 1{,}0334 \cdot (1 + i)$

$1 + i \simeq \dfrac{1{,}04}{1{,}0334}$

Usando uma calculadora, obtemos:

$i \simeq 1{,}0064 - 1 \Rightarrow i \simeq 0{,}0064 = 0{,}64\%$

**19.** Seja $i_{\text{acumulada A}}$ a taxa acumulada no investimento A ao final de 1 ano (12 meses):

$i_{\text{acumulada A}} + 1 = (1 + 0{,}03)^{12} \Rightarrow i_{\text{acumulada A}} \simeq 1{,}426 - 1 =$

$= 0{,}426 = 42{,}6\%$

A taxa anual do investimento B foi dada no enunciado e corresponde a 36% ao ano.

A taxa do investimento C corresponde a 18% ao semestre. Assim, sendo $i_{\text{acumulada C}}$ a taxa acumulada no investimento C ao final de 1 ano (2 semestres), teremos:

$i_{\text{acumulada C}} + 1 = (1 + 0{,}18)^2 \Rightarrow i_{\text{acumulada C}} = 1{,}3924 - 1 =$

$= 0{,}3924 = 39{,}24\%$

Portanto, o investimento com a maior rentabilidade anual é o investimento A.

alternativa c

**20.** Vamos analisar cada uma das cinco opções:

• Opção 1: Pagamento à vista dos R$ 55.000,00. Nesse caso, Arthur pagaria o valor total e não teria de pagar ou receber mais nada depois.

• Opção 2: Pagamento a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00 e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali a 6 meses.

Arthur dispõe de R$ 55.000,00. Dando uma entrada de R$ 30.000,00, ele poderia aplicar R$ 25.000,00 à taxa de 10% ao semestre. Assim, após 6 meses, Arthur teria:

R$ 25.000,00 · $(1 + 0{,}10)^1$ = R$ 27.500,00

Pagando a prestação de R$ 26.000,00 que falta, restaria para ele R$ 1.500,00.

• Opção 3: Pagamento a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00 para dali a 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses.

Dando uma entrada de R$ 20.000,00, Arthur poderia aplicar R$ 35.000,00 à taxa de 10% ao semestre. Assim, após 6 meses, Arthur teria:

R$ 35.000,00 · $(1 + 0{,}10)^1$ = R$ 38.500,00

MODERNA

Pagando a primeira prestação, de R$ 20.000,00, combinada para essa data, sobrariam R$ 18.500,00 para ele reaplicar. Após 6 meses, esse valor renderia 10%, ou R$ 1.850,00, o que totalizaria R$ 20.350,00.

Pagando a última prestação, de R$ 18.000,00, Arthur ficaria com um crédito de R$ 2.350,00.

- Opção 4: Pagamento a prazo com uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39.000,00.

  Com uma entrada de R$ 15.000,00, Arthur poderia aplicar R$ 40.000,00 à taxa de 10% ao semestre. Assim, após 12 meses (2 períodos de rendimento da aplicação),

  Arthur teria:

  $R\$\ 40.000,00 \cdot (1 + 0,10)^2 = R\$\ 48.400,00$

  Efetuando o pagamento de R$ 39.000,00, Arthur ficaria com um crédito de R$ 9.400,00.

- Opção 5: Pagamento a prazo, dali a um ano, no valor de R$ 60.000,00.

  Se Arthur aplicasse seus R$ 55.000,00 por 1 ano à taxa de 10% ao semestre, ele teria, no final da aplicação:

  $R\$\ 55.000,00 \cdot (1 + 0,10)^2 = R\$\ 66.550,00$

  Efetuando o pagamento de R$ 60.000,00, sobraria um crédito de R$ 6.550,00.

Portanto, é mais vantajoso financeiramente que Arthur escolha a opção 4.

alternativa d

**21.** Sabemos que: $L = P_V - P_C$

Na primeira semana, o lucro foi:

$$L_1 = 30\% \cdot \frac{2}{3} \cdot 150.000 \cdot P_C$$

$$L_1 = 30.000 \cdot P_C$$

Na segunda semana, o lucro foi:

$$L_2 = 15\% \cdot \frac{1}{3} \cdot 150.000 \cdot P_C$$

$$L_2 = 7.500 \cdot P_C$$

A taxa média foi:

$$\frac{30.000 \cdot P_C + 7.500 \cdot P_C}{150.000 P_C} =$$

$$= \frac{37.500 P_C}{150.000 P_C} = 0,25$$

Logo, a taxa média foi 25%.

**22.** Seja $y$ o rendimento dessa aplicação e $i$ o imposto sobre o rendimento. Então:

$$y = x\% \text{ de } x = \frac{x}{100} \cdot x = \frac{x^2}{100}$$

$$i = x\% \text{ de } y = \frac{x}{100} \cdot \frac{x^2}{100} = \frac{x^3}{10.000}$$

Para que a aplicação não gere prejuízo, o rendimento menos o valor do imposto não deve ser negativo, ou seja:

$$y - i \geqslant 0 \Rightarrow \frac{x^2}{100} - \frac{x^3}{10.000} \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100x^2 - x^3}{10.000} \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100x^2 - x^3 \geqslant 0 \Rightarrow x^2(100 - x) \geqslant 0$$

Como $x^2$ é sempre maior ou igual a zero, então:

$100 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 100$

Portanto, o maior valor de $x$ para que a aplicação não gere prejuízo é R$ 100,00.

alternativa c

## Autoavaliação

**1.** A cada 3 meninos, há 5 meninas. Então, a porcentagem de meninas da classe é:

$$\frac{5}{8} = 62,5\%$$

alternativa c

**2.** $\frac{22}{100} \cdot 300 = 66$

alternativa a

**3.** $950 \cdot 0{,}18 = 171$

O desconto será de R$ 171,00. Portanto, o cliente pagará R$ 779,00, pois $950 - 171 = 779$.

alternativa c

**4.** $x \cdot 1{,}15 = 48{,}30$

$x = 42$

O produto custava R$ 42,00.

alternativa b

**5.** $1.000{,}00 - 885{,}00 = 115{,}00$

O aparelho teve um desconto de R$ 115,00. Calculando a porcentagem em relação ao preço original, temos:

$\frac{115}{1.000} = 0{,}115 = 11{,}5\%$

Isso significa um desconto de 11,5% do valor inicial.

alternativa d

**6.** $M = C \cdot (1 + 0{,}04) \cdot (1 - 0{,}04)$

$M = C \cdot (1{,}04) \cdot (0{,}96)$

$M = 0{,}9984C$

Como $0{,}9984C < C$, então, houve prejuízo.

alternativa b

**7.** No regime de juro simples, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o montante resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro.

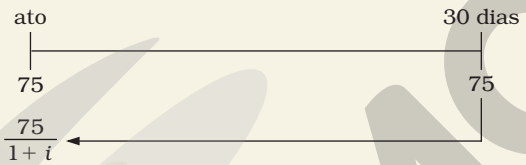
alternativa c

**8.** No regime de juro composto, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem a um novo montante. A partir daí, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior.

alternativa a

**9.** Valor à vista: $150 \cdot (1 - 0{,}1) = 135$

Para a compra parcelada, podemos fazer o seguinte esquema:




ADILSON SECCO

Assim:

$75 + \frac{75}{1+i} = 135 \Rightarrow \frac{75}{1+i} = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \frac{75}{60} \Rightarrow i = 25\%$

alternativa d

**10.**
- Saldo no começo da aplicação (após o 1º depósito): 300
- Saldo no final do 1º mês (após o 2º depósito):

  $300 \cdot (1 + 0{,}02) + 300 = 306 + 300 = 606$
- Saldo no final do 2º mês (após o 3º depósito):

  $606 \cdot (1{,}02) + 300 = 618{,}12 + 300 = 918{,}12$

Portanto, o saldo da aplicação após o 3º depósito era de R$ 918,12.

alternativa a

## Compreensão de texto

**1.** Resposta pessoal.

**2.** Resposta pessoal.

MODERNA

**3.** A sigla INPC corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor. A sigla IPCA corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo. A diferença entre eles está no uso do termo "amplo". O IPCA engloba uma parcela maior da população. Ele aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 e 40 salários mínimos.

O INPC verifica a variação do custo de vida médio apenas de famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos.

**4.** Foi calculada da mesma maneira como se calcula juro composto. Suponha que, em um mês qualquer, tenhamos tido um IPCA de 5%, ou seja, os preços sofreram um reajuste médio de 5%; no mês posterior, tivemos um IPCA de 3%. Assim, um preço $P$ terá como preço final $P_1 = P \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}03 = P \cdot 1{,}0815$.

## EDUCAÇÃO FINANCEIRA

## Projeto de vida

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **6**, **8** e **10** da BNCC e da habilidade **EM13MAT203**, articulada com a competência específica **2**, uma vez que os alunos são incentivados a aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações na tomada de decisões. As atividades e as discussões propostas favorecem o desenvolvimento dos temas contemporâneos **trabalho**, **educação financeira** e **educação fiscal**.

Além disso, a seção favorece o trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, com o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS404** da BNCC, ao identificar e discutir aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial os jovens, considerando as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais.

### Para começar e pensar

Pergunte aos alunos e discuta com eles quais informações são indispensáveis em um currículo. É possível que citem: informações de contato, objetivo, perfil profissional, formação e experiências anteriores.

Após a leitura do currículo apresentado no Livro do Estudante, destaque a importância do desenvolvimento de habilidades intrapessoais, como criatividade e proatividade, e interpessoais, como trabalho em equipe e liderança.

**1.** Respostas pessoais.

**a)** Para algumas vagas de emprego, informações sobre participação em competições escolares podem ser valiosas, podendo reforçar o perfil descrito pelo candidato. As demais informações são importantes para que o contratante conheça alguns atributos dos candidatos.

**b)** Experiências anteriores, como jovem aprendiz e estágios, e cursos de idiomas.

**c)** Os alunos podem propor modificações nos objetivos e na disposição das informações, por exemplo, e sugerir a inclusão de mais detalhes no perfil profissional.

**2.** Podem ser citadas qualidades como liderança, criatividade, trabalho em equipe, proatividade, entre outras. É importante ressaltar aos alunos que as informações contidas em um currículo profissional devem refletir o perfil real do indivíduo, uma vez que, em processos seletivos, há etapas de entrevistas e dinâmicas de grupo em que as características dos candidatos são avaliadas criteriosamente.

**3.** O currículo criado pelos alunos deve conter informações de contato, formação (escolar e cursos extras), perfil profissional e objetivos.

### Para discutir

Com base na leitura do contracheque ilustrado, peça aos alunos que pesquisem as faixas de desconto do Imposto de Renda no ano corrente. Em seguida, proponha uma roda de conversa baseada nos seguintes questionamentos: "O valor do salário influencia no percentual de desconto do Imposto de Renda?"; "Por que existe essa variação?"; "Você acha que salários mais altos devem ser taxados com percentuais mais altos?".

Tabela do Imposto de Renda vigente em 2020:

- até R$1.903,98: isenção;
- 1ª faixa: 7,5% para bases de R$ 1.903,99 até R$ 2.826,65;
- 2ª faixa: 15% para bases de R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05;
- 3ª faixa: 22,5% para bases de R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68;
- 4ª faixa: 27,5% para bases a partir de R$ 4.664,69.

**4. a)** $\frac{96}{1.110 + 90} = 0{,}08 = 8\%$

**b)** $\frac{72}{1.110 + 90} = 0{,}06 = 6\%$

Para que um funcionário tenha direito ao vale-transporte, a empresa pode, de acordo com a legislação em vigor, descontar um percentual do salário-base do trabalhador. Caso o desconto seja superior ao do vale-transporte, não é vantajoso para o trabalhador pleitear esse benefício, já que não é obrigatório.

**5. a)** Em qualquer trabalho que exceda 8 horas diárias, o trabalhador tem direito a um intervalo para repouso e alimentação. Nesse caso, apesar de não ser obrigatório, algumas empresas oferecem vale-refeição. Considerando apenas os dias com jornada de 8 horas, Sabrina recebe R$10,00 por dia (considerando 22 dias úteis). Se o sábado fosse considerado, seria em torno de R$ 8,50 por dia (considerando 22 dias úteis e 4 sábados).

**b)** Considerando 26 dias de trabalho (30 dias mensais menos 4 domingos), ela recebe R$ 7,50 por dia para as passagens de ida e volta.

**6.** Para mais informações sobre a Consolidação das Leis do Trabalho (CLT), consulte o texto completo da legislação no *site* <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/del5452.htm>. Acesso em: 8 set. 2020.
Até setembro de 2020, o regime de trabalho chamado de *home office* não constava na CLT. Verifique o que os alunos conseguiram encontrar em sua pesquisa sobre o tema e levante uma discussão sobre o que eles entendem sobre o *home office* e o que eles acham que deveria ser previsto em lei, tanto para o empregado quanto para o empregador.

## Para finalizar

**7.** Resposta pessoal. Incentive os alunos a pesquisar profissões diversas, levando em conta a carga horária, a renda, a formação ou a experiência necessária, a área de atuação, as demandas do mercado de trabalho etc.

**8.** Resposta pessoal. Promova uma roda de conversa com os alunos sobre a relação dinheiro × felicidade, considerando que, geralmente, as pessoas passam boa parte do dia trabalhando. Compartilhar os seguintes questionamentos:

"Dinheiro traz felicidade?"; "Ter uma vida financeiramente estável compensa a infelicidade no trabalho?"; "A seu ver, pessoas que trabalham em ocupações de que não gostam podem desenvolver problemas psicológicos como estresse, estafa, depressão ou ansiedade?".

**9.** Resposta pessoal. Antes de os alunos partirem para a escrita dos projetos, esclareça os termos:

- Curto prazo: projetos de até 1 ano, como viagem, reforma na casa, festa de aniversário, participação em um curso etc.
- Médio prazo: projetos de 1 a 5 anos, como comprar um carro, alcançar uma promoção, concluir uma faculdade ou um curso técnico etc.
- Longo prazo: projetos de mais de 5 anos, como adquirir uma casa própria, criar o próprio negócio, fazer um plano de previdência privada etc.

É importante que os alunos compreendam que os projetos a médio e a longo prazo exigem mais foco, planejamento e determinação, pois os resultados não são imediatos.

Oriente-os a escrever os projetos em uma folha e a guardá-la, a fim de que a leiam meses ou anos depois. A leitura posterior propicia um momento de reflexão sobre os sonhos e os projetos idealizados, analisando os fatores que culminaram no sucesso ou na mudança de planos.

## PESQUISA E AÇÃO

### Videodocumentário

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5**, **7**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2** e **4** e das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT102** e **EM13MAT104**, além de favorecer o trabalho interdisciplinar com o desenvolvimento da competência específica 7 de Linguagens e suas Tecnologias. Todo o trabalho e toda a discussão a respeito das ações no trânsito envolvem os temas contemporâneos **educação para o trânsito** e **ciência e tecnologia**.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a atividade desta seção é proposta em etapas, que poderão ser feitas no decorrer do período escolar. Mesmo que algumas etapas, como a pesquisa, possam ser realizadas fora da sala de aula, é importante avaliar o perfil dos alunos e

MODERNA

orientá-los com relação ao planejamento, ao prazo, ao material necessário e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações e o acompanhamento.

As pessoas precisam estar preparadas para conviver de maneira segura e responsável no trânsito.

É importante haver ações que conscientizem todos a agir de maneira colaborativa nos diferentes papéis que possam assumir no trânsito: de pedestres, ciclistas, condutores ou passageiros. A proposta dessa atividade é mobilizar os alunos a refletir sobre educação para o trânsito e possibilitar que eles se tornem multiplicadores da mensagem de conscientização para a comunidade escolar.

## Etapa 1:

Nessa etapa, com base nas questões propostas, a turma será orientada a pesquisar e a conversar sobre a contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito e sobre a importância da educação para o trânsito como maneira de torná-lo mais cooperativo e seguro. Estimule os alunos a pensar sobre a relevância da solidariedade e da cooperação para que o trânsito seja seguro, aspecto que pode ser abordado no videodocumentário.

**1 e 2.** Esses momentos de conversa têm o objetivo de envolver os alunos no tema e despertar em cada um o interesse pela produção do videodocumentário. Estimule-os a expor suas ideias e opiniões e faça contribuições a fim de ajudá-los a pensar no tema.

**3.** Oriente os alunos a buscar informação em *sites* confiáveis.

**4.** Para a criação do videodocumentário, é preciso que o grupo defina um ponto de vista a ser defendido ou refutado. Por isso, o momento de pesquisa e compartilhamento de informações entre os alunos é importante para que ampliem seu repertório de conhecimentos sobre o tema e definam uma abordagem, produzindo uma obra consistente e com objetivo claro.

## Etapa 2:

Caso julgue oportuno, apresente aos alunos um videodocumentário sobre trânsito, de modo que eles se inspirem e observem a estrutura desse gênero. Enquanto assistem, peça que observem: o ponto de vista apresentado, se há um narrador, se o conteúdo é exposto por meio de entrevistas, quem é o entrevistado, se há música, se há cenas filmadas e quais são essas cenas, qual é o título do videodocumentário e como ele é apresentado, como os dados são divulgados. Uma sugestão de videodocumentário que trata do trânsito chama-se "Luto em Luta", produzido por jovens após perderem o amigo em um acidente de trânsito, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=6vG4NXgdJA8>. Acesso em: 8 set. 2020.

**5.** Caso os alunos decidam narrar um texto, explique aos redatores que esse texto deve ser conciso e interligar as cenas de forma coerente, construindo uma linha de raciocínio.

**6.** Explique aos alunos que a filmagem de cenas como carros e ciclistas transitando nas vias deve ser feita acompanhada por um adulto. Além disso, oriente-os a não filmar o rosto das pessoas, pois, para uso de imagem, seria necessária a autorização delas. É importante dizer também que as cenas podem transmitir a mensagem por si mesmas, sem que seja preciso narrador ou ator.

**7.** Para a criação do videodocumentário, atue como mediador, de modo que os alunos tenham autonomia para criar, mas sejam orientados quanto à organização e à realização das atividades. Os grupos precisam ter sempre em mente que o ponto de vista do videodocumentário deve ser apresentado de modo coerente. Assim, é importante que todos os integrantes do grupo conversem e definam juntos aspectos do trabalho, em todas as fases.

## Etapa 3:

Caso julgue oportuno, escolha, com a turma, alguns alunos que poderão realizar a abertura e o fechamento do evento de exibição dos vídeos, explicando os objetivos, o processo de criação e produção, bem como a importância da educação para o trânsito na sociedade.

Os vídeos também podem ser disponibilizados no *site* ou nas redes sociais da instituição, para ampliar e divulgar a mensagem de conscientização e educação para o trânsito; porém, para isso, é importante providenciar autorização de uso de imagem de alunos e entrevistados.

## Etapa 4:

**10.** Após a exibição dos vídeos, é importante promover um momento de conversa com os alunos para que avaliem todas as etapas da atividade, reflitam sobre os pontos positivos e negativos e sugiram melhorias para a criação de outros videodocumentários no futuro.

**11.** Durante o momento de autoavaliação, espera-se que os alunos sejam incentivados a pensar sobre seu processo de aprendizagem, a analisar as dificuldades enfrentadas e como foram resolvidas, bem como a refletir sobre o que aprenderam.

MODERNA

# CONEXÕES

## MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

### Funções e aplicações

**Organizadora: Editora Moderna**
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

**Editor responsável:**
**Fabio Martins de Leonardo**
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

**Área do conhecimento:**
**Matemática e suas Tecnologias**

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

**Elaboração dos originais:**

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

**Edição de texto:** Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

**Preparação de texto:** Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

**Assessoria pedagógica:** Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

**Gerência de *design* e produção gráfica:** Everson de Paula

**Coordenação de produção:** Patricia Costa

**Gerência de planejamento editorial:** Maria de Lourdes Rodrigues

**Coordenação de *design* e projetos visuais:** Marta Cerqueira Leite

**Projeto gráfico:** Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

**Capa:** Daniela Cunha

*Ilustrações*: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

**Coordenação de arte:** Wilson Gazzoni Agostinho

**Edição de arte:** Elaine Cristina da Silva

**Editoração eletrônica:** Setup Bureau Editoração Eletrônica

**Edição de infografia:** Giselle Hirata, Priscilla Boffo

**Coordenação de revisão:** Maristela S. Carrasco

**Revisão:** Ana Maria C. Tavares, Ana Paula Felippe, Beatriz Rocha, Cecilia S. Oku, Frederico Hartje, Know-how Editorial, Inaya Oliveira, Mônica Surrage, Rita de Cássia Sam, Vânia Bruno

**Coordenação de pesquisa iconográfica:** Luciano Baneza Gabarron

**Pesquisa iconográfica:** Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

**Coordenação de *bureau*:** Rubens M. Rodrigues

**Tratamento de imagens:** Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

**Pré-impressão:** Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

**Coordenação de produção industrial:** Wendell Monteiro

**Impressão e acabamento:**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

**EDITORA MODERNA LTDA.**
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

# Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto*, *Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

***Os editores***

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e das modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e de desenvolvimento.

# Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, as competências trabalhadas neste volume.

## Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

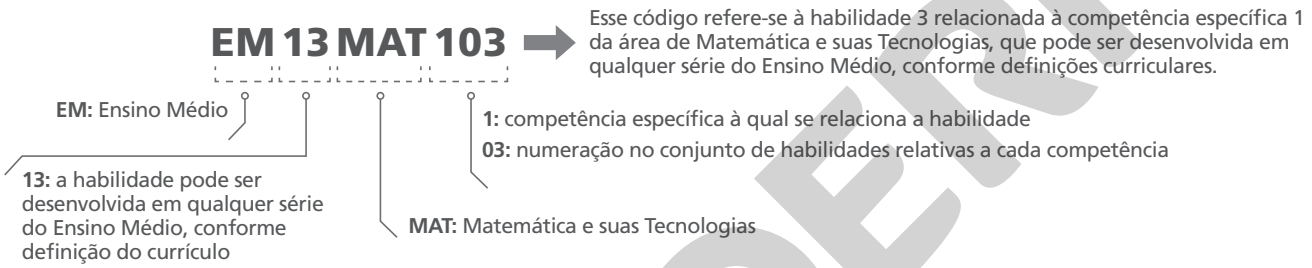
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

# Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:




É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

## Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1:** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

| HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1 |
|---|
| (**EM13MAT101**) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| (**EM13MAT102**) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. |
| (**EM13MAT104**) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. |

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2:** Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

| HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2 |
|---|
| (**EM13MAT203**) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. |

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3:** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

| HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 |
|---|
| **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT303)** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. |
| **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. |
| **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. |
| **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. |

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4:** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

| HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4 |
|---|
| **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. |
| **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. |
| **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. |
| **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5:** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

| HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5 |
|---|
| **(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. |
| **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. |
| **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. |
| **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. |

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EM MODERNA

| |
|---|
| **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. |
| **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. |

# Competências específicas e habilidades de outras áreas

## Ciências da Natureza e suas Tecnologias

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1:** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

| HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 1, 2 E 3 |
|---|
| **(EM13CNT101)** Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. |
| **(EM13CNT103)** Utilizar o conhecimento sobre as radiações e suas origens para avaliar as potencialidades e os riscos de sua aplicação em equipamentos de uso cotidiano, na saúde, no ambiente, na indústria, na agricultura e na geração de energia elétrica. |
| **(EM13CNT104)** Avaliar os benefícios e os riscos à saúde e ao ambiente, considerando a composição, a toxicidade e a reatividade de diferentes materiais e produtos, como também o nível de exposição a eles, posicionando-se criticamente e propondo soluções individuais e/ou coletivas para seus usos e descartes responsáveis. |
| **(EM13CNT202)** Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros). |
| **(EM13CNT203)** Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros). |
| **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros). |
| **(EM13CNT306)** Avaliar os riscos envolvidos em atividades cotidianas, aplicando conhecimentos das Ciências da Natureza, para justificar o uso de equipamentos e recursos, bem como comportamentos de segurança, visando à integridade física, individual e coletiva, e socioambiental, podendo fazer uso de dispositivos e aplicativos digitais que viabilizem a estruturação de simulações de tais riscos. |

## Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3:** Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.

| HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 3 E 4 |
|---|
| **(EM13CHS305)** Analisar e discutir o papel e as competências legais dos organismos nacionais e internacionais de regulação, controle e fiscalização ambiental e dos acordos internacionais para a promoção e a garantia de práticas ambientais sustentáveis. |
| **(EM13CHS404)** Identificar e discutir os múltiplos aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial, os jovens, levando em consideração, na atualidade, as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais. |

## Linguagens e suas tecnologias

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 7:** Mobilizar práticas de linguagem no universo digital, considerando as dimensões técnicas, críticas, criativas, éticas e estéticas, para expandir as formas de produzir sentidos, de engajar-se em práticas autorais e coletivas, e de aprender a aprender nos campos da ciência, cultura, trabalho, informação e vida pessoal e coletiva.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

# Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

| CAPÍTULO 1 – Função afim | |
|---|---|
| **Objetivo** | **Justificativa** |
| O objetivo desse capítulo é identificar uma função afim, analisar o gráfico de uma função afim, além de resolver situações-problema e inequações que envolvam esse tipo de função. | A função afim, cujo gráfico é uma reta, serve para modelar problemas, como os econômicos, sociais e aqueles que envolvem as Ciências da Natureza. Situações em que o comportamento é diretamente proporcional também são modelados pela função afim. Nesse sentido, torna-se necessário e de grande importância o trabalho com esse tipo de função. |
| **CAPÍTULO 2 – Função quadrática** | |
| **Objetivo** | **Justificativa** |
| Esse capítulo tem como objetivo identificar uma função quadrática, analisar o gráfico, além de resolver problemas e inequações que envolvam esse tipo de função. | Há várias situações-problema como as de cinemática que podem ser modeladas por uma função quadrática. Tendo como gráfico uma parábola, esse tipo de função auxilia também na resolução de problemas que envolvem máximos e mínimos. Por exemplo, a determinação de área máxima de um retângulo, dado o seu perímetro. |
| **CAPÍTULO 3 – Função exponencial** | |
| **Objetivo** | **Justificativa** |
| Esse capítulo tem como objetivo efetuar as operações de potenciação e radiciação, bem como identificar uma função exponencial, analisar e construir o gráfico dessa função, resolver problemas que envolvam esse tipo de função e resolver equações, sistemas e inequações exponenciais. | A função exponencial é usada como modelagem matemática de muitas situações da vida real, tais como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos, crescimento ou decrescimento de uma população. Um exemplo interessante de comportamento exponencial visto no ano de 2020 foi a disseminação do coronavírus. Dessa maneira, a função exponencial tem importância pelas aplicações em diversas áreas e aspectos da vida social e da pesquisa científica. |
| **CAPÍTULO 4 – Função logarítmica** | |
| **Objetivo** | **Justificativa** |
| O objetivo desse capítulo é calcular logaritmos, bem como identificar uma função logarítmica, analisar e construir o gráfico dessa função, além de resolver problemas, equações, sistemas e inequações que envolvam logaritmos. | A função logarítmica é a função inversa da exponencial, e serve para modelar situações que envolvem pH, abalos sísmicos, radioatividade, cálculos financeiros, entre outras. Assim como a função exponencial, tem importância pelas aplicações em diversas áreas e em diferentes aspectos da vida social e da pesquisa científica. |
| **CAPÍTULO 5 – Sequências** | |
| **Objetivo** | **Justificativa** |
| Esse capítulo tem como objetivo identificar padrões numéricos e sequências, bem como resolver problemas que envolvam sequências, além de interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas. | Com o estudo desse capítulo, pode-se determinar padrões e elementos de uma sequência numérica, bem como a soma de seus elementos. O trabalho das sequências tem diversas aplicações, pois pode-se associar as progressões aritméticas e geométricas com as funções afim e exponencial, respectivamente. |
| **CAPÍTULO 6 – Matemática financeira** | |
| **Objetivo** | **Justificativa** |
| O objetivo desse capítulo é resolver problemas que envolvam taxa percentual, além de analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto. | O estudo da Matemática financeira é importante por seu uso no cotidiano. Saber fazer cálculos de empréstimos, financiamentos, descontos, taxas de juro e rendimento de investimentos é uma boa qualidade para ter uma vida financeira saudável. |

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

# Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer, pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.



Pilares do *pensamento computacional*.

## *Pensamento computacional* e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara, para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural $n$ qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de $n$ por 2 é 0 quando $n$ é par ou 1 quando $n$ é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ -2 & 13 \\ \hline 06 & \\ -\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural $n$ qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

**Passo 1**. Dado $n$ natural, calcula-se o resto $r$ da divisão de $n$ por 2.

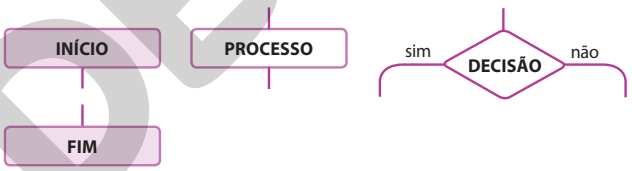
**Passo 2**. Verifica-se se $r = 0$. Se $r$ for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

**Passo 3**. O valor de $r$ é 0, portanto $n$ é par. Encerra-se o algoritmo.

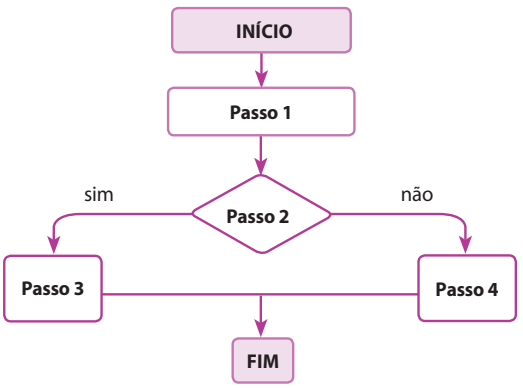
**Passo 4**. O valor de $r$ é 1, portanto $n$ é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.

Símbolos terminais | Símbolo de processo | Símbolo de estrutura de decisão




O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural $r$, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

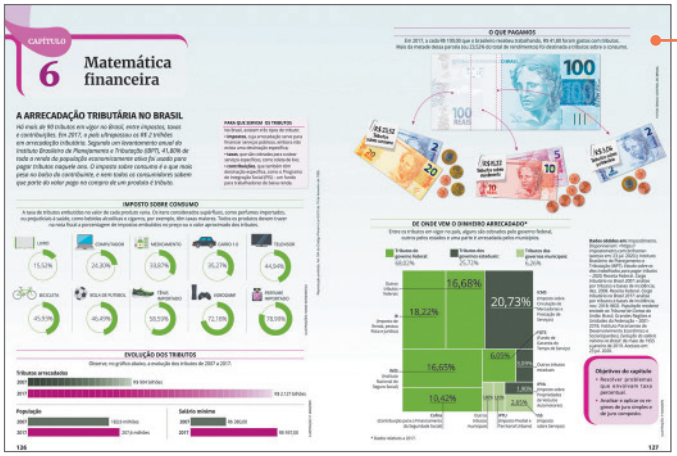
Nesta obra, você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# Organização da obra

**Videotutorial**
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.

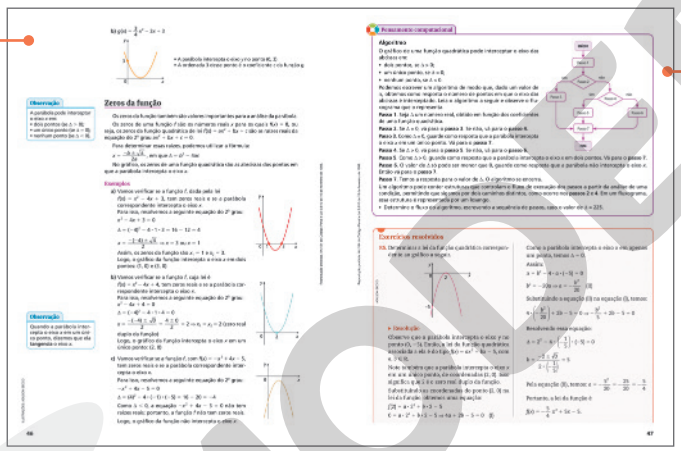



## Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

## Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.



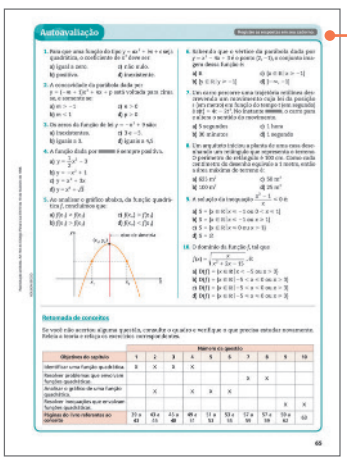

## Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:




## Exercícios complementares

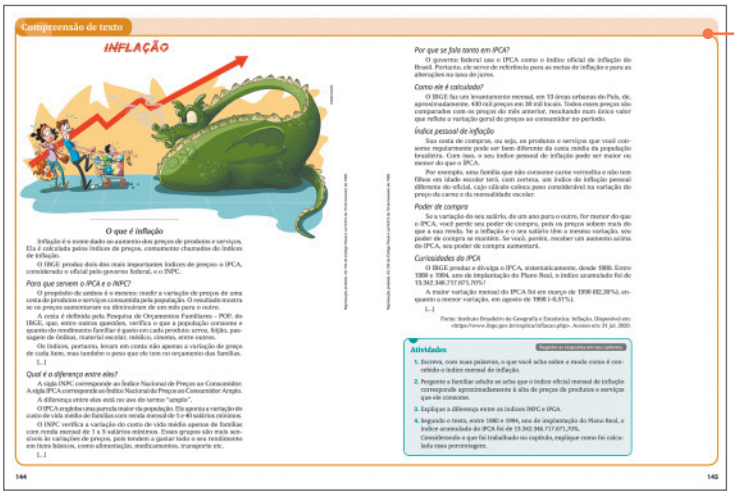
- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.




## Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.




## Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.

**Ícone de atividade em grupo**

## Educação financeira

Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros.







## Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

## Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e à consulta a outras fontes de informação.




Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# Sumário


**CAPÍTULO 1 Função afim ..... 14**

**1. Função afim ..... 14**

**2. Gráfico da função afim ..... 18**

2.1. Taxa de variação ..... 18

2.2. Desigualdade triangular ..... 19

2.3. Construção do gráfico da função afim ..... 21

2.4. Função linear e proporcionalidade ..... 24

2.5. Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau ..... 25

**3. Inequações do 1º grau ..... 30**

3.1. Inequação-produto e inequação-quociente ... 31

3.2. Inequações simultâneas ..... 33

3.3. Identificação do domínio de uma função por meio de inequações ..... 35

**Exercícios complementares ..... 36**

**Autoavaliação ..... 38**

**CAPÍTULO 2 Função quadrática ..... 39**

**1. Função quadrática ..... 39**

**2. Gráfico da função quadrática ..... 43**

2.1. Elementos da parábola ..... 44

2.2. Estudo do sinal da função por meio de seus zeros ..... 49

2.3. Vértice do gráfico da função quadrática ..... 51

2.4. Conjunto imagem e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática ..... 53

**3. Construção do gráfico da função quadrática ... 56**

3.1. Escolhendo pontos convenientes ..... 56

3.2. Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função ..... 57

**4. Inequações do 2º grau ..... 59**

4.1. Inequação-produto e inequação-quociente ... 60

4.2. Inequações simultâneas ..... 61

4.3. Identificação do domínio de uma função por meio de inequações ..... 63

**Exercícios complementares ..... 64**

**Autoavaliação ..... 65**

**Compreensão de texto ..... 66**

**CAPÍTULO 3 Função exponencial ..... 67**

**1. Introdução ao estudo da função exponencial . 68**

1.1. Potência de expoente natural ..... 69

1.2. Potência de expoente inteiro negativo ..... 70

1.3. Potência de expoente racional ..... 71

1.4. Potência de expoente irracional ..... 73

**2. Função exponencial ..... 73**

2.1. Gráfico da função exponencial ..... 74

2.2. Aplicações da função exponencial ..... 76

**3. Equações exponenciais e sistemas ..... 78**

**4. Inequações exponenciais ..... 80**

**Exercícios complementares ..... 82**

**Autoavaliação ..... 83**

**Compreensão de texto ..... 84**



MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**CAPÍTULO 4** Função logarítmica ..... 85

**1. Logaritmo** ..... 86
**2. Propriedades operatórias dos logaritmos** ..... 89
2.1. Logaritmo de um produto ..... 89
2.2. Logaritmo de um quociente ..... 89
2.3. Logaritmo de uma potência ..... 90
2.4. Mudança de base ..... 91
**3. Função logarítmica** ..... 93
3.1. Gráfico da função logarítmica ..... 94
**4. Equações logarítmicas e sistemas** ..... 98
**5. Inequações logarítmicas** ..... 99
**Exercícios complementares** ..... 102
**Autoavaliação** ..... 104

**CAPÍTULO 5** Sequências ..... 105

**1. Sequências e padrões** ..... 106
1.1. Sequências numéricas ..... 106
**2. Progressões aritméticas** ..... 109
2.1. Termo geral de uma PA ..... 110
2.2. Representação gráfica de uma PA ..... 112
2.3. Soma dos *n* primeiros termos de uma PA ..... 114
**3. Progressões geométricas** ..... 115
3.1. Termo geral de uma PG ..... 116
3.2. Representação gráfica de uma PG ..... 118
3.3. Soma dos *n* primeiros termos de uma PG ..... 119
3.4. Soma dos infinitos termos de uma PG ..... 121
**4. Problemas que envolvem PA e PG** ..... 122
**Exercícios complementares** ..... 124
**Autoavaliação** ..... 125

**CAPÍTULO 6** Matemática financeira ..... 126

**1. Introdução** ..... 128
**2. Taxa percentual** ..... 128
2.1. Aumentos e descontos sucessivos ..... 129
2.2. Lucro e prejuízo ..... 131
**3. Juro simples e juro composto** ..... 132
3.1. Juro simples ..... 132
3.2. Juro composto ..... 134
3.3. Atualização financeira ..... 136
**4. O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros** ..... 138
4.1. Construção de gráficos com dados da planilha eletrônica ..... 140
**Exercícios complementares** ..... 141
**Autoavaliação** ..... 143
**Compreensão de texto** ..... 144

**Educação financeira** ..... 146
**Pesquisa e ação** ..... 148
**Ampliando os conhecimentos** ..... 151
**Respostas** ..... 153
**Referências bibliográficas** ..... 160

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

1

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302**, **EM13MAT315**, **EM13MAT401**, **EM13MAT404**, **EM13MAT501** e **EM13MAT510**.

# Função afim



PRASHANTH VISHWANATHAN/BLOOMBERG/GETTY IMAGES

Um trabalhador usando uma máscara protetora é examinado com um termômetro infravermelho quando entra em um prédio em Nova Délhi, na Índia, em março de 2020.

A abertura desse capítulo, o boxe **Explore** e a situação apresentada nesse tópico contribuem com o desenvolvimento da competência geral **8** e do tema contemporâneo **saúde**.

**Objetivos do capítulo**

- Identificar uma função afim.
- Resolver situações-problema que envolvam funções afins.
- Analisar o gráfico de uma função afim.
- Resolver inequações que envolvam funções afins.

**Explore**

Faça uma pesquisa na internet e explique o porquê da Organização Mundial de Saúde recomendar o uso de máscaras durante a pandemia do novo Coronavírus.

## 1 Função afim

A pandemia causada pelo novo Coronavírus no início do ano de 2020 mudou hábitos de locomoção e consumo. Visando a diminuição de contágio, a Organização Mundial de Saúde (OMS) recomendou que as pessoas permanecessem em casa. Com o tráfego de pessoas reduzido, locais como lojas, escritórios e restaurantes fecharam as suas portas.

Protocolos como higienização das mãos e a aferição da temperatura corporal passaram a ser tomados no acesso aos estabelecimentos essenciais que permaneceram abertos, como supermercado e alguns locais de trabalho.

Observe a foto da aferição da temperatura de um trabalhador na Índia. O aparelho de infravermelho está indicando 98 °F. Essa unidade de medida de temperatura, Fahrenheit, é adotada em alguns países. No Brasil, a temperatura é medida em grau Celsius. Para converter a temperatura em grau Fahrenheit para grau Celsius, podemos usar a seguinte função:

$$f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

Sendo $f(x)$ a medida em grau Celsius e $x$ a medida em grau Fahrenheit.

A máscara foi recomendada para diminuição do contágio pelo novo Coronavírus. Por exemplo, se uma de duas pessoas que estão conversando estiver contaminada e as duas estiverem usando máscaras, a chance de contágio cai sensivelmente.

As competências específicas **3** e **4** e as habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT401** são favorecidas em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, modelar ou resolver problemas empregando funções e diversos registros de representação matemáticos.

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função afim.

A seguir, vamos definir função de modo geral e logo depois definir a função afim.

Considerando dois conjuntos, $A$ e $B$, não vazios, dizemos que $f$ é uma **função** de $A$ em $B$ se, e somente se, para cada elemento $x$ de $A$ existe, em correspondência, um único elemento $y$ de $B$. Indicamos essa função assim: $f: A \to B$ (lemos: "função $f$ de A em $B$").

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem números reais $a$ e $b$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Os números reais $a$ e $b$ são os coeficientes da função afim.

### Exemplos

**a)** $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -\frac{1}{2}x + 5$, em que $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 5$.

**b)** $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = -7x$, em que $a = -7$ e $b = 0$.

**c)** $n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -5$, em que $a = 0$ e $b = -5$.

## Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Dada uma função $f: A \to B$, temos:

- conjunto $A$ é chamado de **domínio** da função $f$, que indicamos por D ou D($f$) (lemos: "domínio de $f$"), e o conjunto $B$ é chamado de **contradomínio** da função $f$, que indicamos por CD ou CD($f$) (lemos: "contradomínio de $f$");
- para cada $x \in D(f)$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado de **imagem** de $x$ pela função $f$. O conjunto formado por todas as imagens de $x$ é chamado de conjunto imagem da função, que indicamos por Im ou Im($f$) (lemos: "conjunto imagem de $f$").

Para definir uma função $f$, é preciso conhecer o domínio D($f$), o contradomínio CD($f$) e a maneira pela qual cada $x$ do domínio se corresponde com um único $y = f(x)$ do contradomínio. Cada função é dada por uma lei.

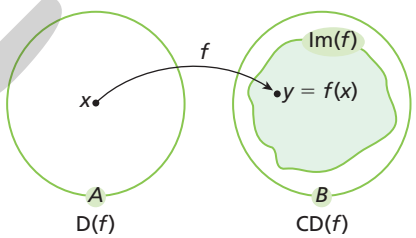


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

## Função polinomial

Função polinomial na variável real $x$ é toda função definida por

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ (com $n \in \mathbb{N}$), para todo $x \in \mathbb{R}$.

Na função polinomial:

- $a_n$, $a_{n-1}$, ..., $a_2$, $a_1$, $a_0$ são números reais chamados de coeficientes da função;
- $n$ é o grau do polinômio que expressa a função (com $a_n \neq 0$);
- o grau da função é determinado pelo grau do polinômio, e o grau do polinômio de uma só variável é dado pelo maior expoente da variável.

## Casos particulares de função afim

A função afim pode ser constante, se $a = 0$, ou polinomial do 1º grau, se $a \neq 0$.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função constante** quando existe um número real $b$ tal que $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

### Exemplos

**a)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -13$

**b)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{7}$

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função polinomial do 1º grau** quando existem números reais $a$ e $b$, com a $\neq 0$, tal que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

### Observações

- Quando $f$ é uma função de $A$ em $B$, podemos também dizer que $f$ **leva** $A$ para $B$, ou que $f$ é uma aplicação de $A$ em $B$, ou ainda que $f$ é uma **transformação** de $A$ em $B$.
- Para indicar o valor que a função $f$ assume para $x$, escrevemos $f(x)$ (lemos: "$f$ de $x$").
- Dada uma função $f$ de $A$ em $B$, é comum usar a letra $x$ para designar um elemento genérico de $A$ e a letra $y$ para designar o valor correspondente $f(x)$. Dizemos que $x$ é a **variável independente** e que $y$ é a **variável dependente**.
- As funções podem ser definidas por uma **lei matemática**. Por exemplo, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x$. Por essa lei, entendemos que um número real $x$ é transformado, pela função $f$, no triplo de $x$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

## Exemplos

**a)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -11x + \sqrt{2}$ **b)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}x$

Uma função polinomial do 1º grau que tem o coeficiente $b = 0$ recebe o nome de **função linear**. Por exemplo, $f(x) = 3x$ e $g(x) = -6x$.

A função polinomial do 1º grau $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é chamada de **função identidade**. Nesse caso, temos $a = 1$ e $b = 0$.

Nosso cotidiano está repleto de situações que recaem em uma função afim. Acompanhe como obter a função afim que converte grau Fahrenheit para grau Celsius.

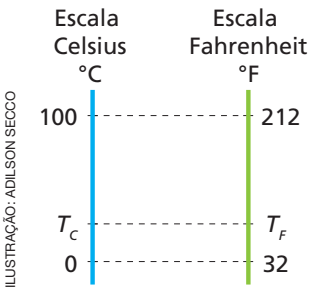


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

As duas escalas termométricas se correspondem conforme o esquema ao lado. Observe que 0 °C corresponde a 32 °F, e 100 °C correspondem a 212 °F.

Sendo $T_C$ a temperatura na escala Celsius e $T_F$ a temperatura na escala Fahrenheit, dado que a função é afim, considere $T_C = f(x)$ e $T_F = x$ em $f(x) = ax + b$:

$T_C = a \cdot T_F + b$

Precisamos determinar os valores de $a$ e $b$. Para isso, vamos resolver um sistema.

Para $T_C = 0$, temos $T_F = 32$, substituindo na lei, temos:

$0 = a \cdot 32 + b \Rightarrow b = -32 \cdot a$ (I)

e para $T_C = 100$, temos $T_F = 212$, substituindo na função:

$100 = a \cdot 212 + b \Rightarrow 212 \cdot a + b = 100$ (II)

Substituindo (I) em (II):

$212 \cdot a - 32 \cdot a = 100 \Rightarrow 180 \cdot a = 100 \Rightarrow a = \frac{5}{9}$

Substituímos o valor de $a$ em (I) e obtemos $b$:

$b = -32 \cdot \frac{5}{9} = -\frac{160}{9}$

Portanto, a função para determinar a temperatura em grau Celsius, dado a temperatura em grau Fahrenheit é:

$T_C = \frac{5}{9} \cdot T_F - \frac{160}{9}$

**Reflita**

Qual é a temperatura aferida em grau Celsius no aparelho da foto do início do capítulo?

$T_C = \frac{5}{9} \cdot 98 - \frac{160}{9} = 36{,}67$

## Pensamento computacional

### Algoritmo

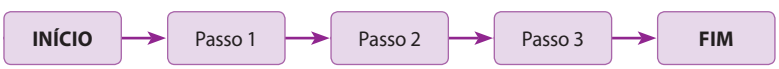
**Algoritmo**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita e bem definida de passos que, quando rigorosamente seguidos na ordem determinada, permitem resolver um problema ou realizar uma tarefa. A transformação de uma temperatura de uma escala para outra, como foi feito com a temperatura em grau Fahrenheit para Celsius – e vice-versa – pode ser representada por meio de um algoritmo em linguagem corrente. Veja:

**Passo 1.** Seja $T_F$ uma temperatura qualquer, em grau Fahrenheit.

**Passo 2.** Seja $T_C$ a temperatura em grau Celsius. Faça $T_C = \frac{5}{9} \cdot T_F - \frac{160}{9}$.

**Passo 3.** $T_C$ é a temperatura convertida, em grau Celsius. Encerra-se o algoritmo.

Os passos desse algoritmo podem ser representados graficamente por meio de um fluxograma, como o ilustrado a seguir.




- Sabe-se que uma escala de temperatura muito utilizada por cientistas é a Kelvin. A expressão que nos fornece a conversão da escala Kelvin para a escala Celsius é $T_C = T_K - 273$, em que $T_C$ é a temperatura em Celsius e $T_K$ a temperatura em Kelvin. Escreva, em linguagem corrente, um algoritmo que resolve a conversão da escala Kelvin para a Celsius, tomando o algoritmo acima como referência.

O boxe *pensamento computacional* favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315** e da competência específica **4**, uma vez que o aluno interpreta um algoritmo representado graficamente em um fluxograma e deve escrevê-lo em linguagem corrente.

**Passo 1.** Seja $T_K$ uma temperatura qualquer, em Kelvin.
**Passo 2.** Seja $T_C$ a temperatura em grau Celsius. Faça $T_C = T_K - 273$.
**Passo 3.** $T_C$ é a temperatura convertida, em grau Celsius. Encerra-se o algoritmo.

MODERNA
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Um dos pilares do *pensamento computacional* é o de **decomposição** e trata-se de dividir um problema em partes menores, de modo que ao resolver cada parte o todo estará resolvido. A atividade proposta no item **c** do exercício **5** contribui com o desenvolvimento deste pilar uma vez que os alunos devem escrever uma função composta por mais de uma sentença, dividindo a lei que determina o valor da conta telefônica em partes que dependem de condições diferentes.

## Exercício resolvido

**R1.** Dada a função afim $g$ tal que $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$, calcular:

a) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ b) $x$, para $g(x) = 4$

▸ **Resolução**

a) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{6} - \frac{6}{6} = -\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{3}x - 1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{3}x = 5 \Rightarrow x = 15$

O exercício **7** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT501** e **EM13MAT510** da BNCC, pois os alunos poderão investigar relações entre números expressos em tabelas e conjuntos de dados para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

A função $i$ não é afim porque não assume forma $ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**1.** Das funções abaixo, identifique quais são leis de funções afins. Nesses casos, determine o valor dos coeficientes $a$ e $b$.

a) $g(x) = 2x + 4$ $a = 2$ e $b = 4$

b) $i(x) = 2 + x^2$ Não é função afim.

c) $f(x) = -\sqrt{3}$ $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$

d) $k(x) = -13x$ $a = -13$ e $b = 0$

- Por que entre os itens, há função que não é afim?

**2.** Considerando a função $f$, dada por $f(x) = -3x + 1$, calcule:

a) $f(-2)$ 7

b) $x$, para $f(x) = 0$ $\frac{1}{3}$

c) $f(\sqrt{2})$ $-3\sqrt{2} + 1$

d) $x$, para $f(x) = 19$ $-6$

- Para quais valores de $x$ temos $f(x)$ maior que zero? E menor que zero?
- Você conhece alguma forma de representar essa função de maneira que possa estudá-la melhor?

Ver resolução no Guia do professor.

**3.** Determine o valor de $a$ para que se tenha $f(3) = 8$ na função dada por $f(x) = ax + \frac{1}{2}$. $\frac{5}{2}$

**4.** Determine os valores de $p$ e $q$ para que a função $j$, dada por $j(x) = (p^2 - 1)x + (2q - 6)$, seja uma função identidade. $p = \pm\sqrt{2}$ ; $q = 3$

**5.** Em certa cidade, a assinatura residencial de uma linha telefônica custava R$ 34,50 e dava direito à utilização de 100 minutos mensais. Caso o consumidor excedesse os 100 minutos, ele pagaria R$ 0,08 por minuto excedente.

a) Quanto o consumidor pagaria por sua conta se utilizasse 82 minutos em um mês? E se utilizasse 300 minutos? R$ 34,50; R$ 50,50

b) Um consumidor pagou R$ 52,90 por sua conta telefônica. Quantos minutos esse consumidor usou? 330 minutos

c) Escreva no caderno a lei de formação da função que representa essa situação.

d) Se, em uma residência dessa cidade, havia três linhas telefônicas, qual era o valor mínimo gasto com telefone em um mês? R$ 103,50

**6.** Dada a função $f$, com $f(x) = 3x - 1$, determine:

a) $f(1) - f(0)$ 3

b) $f(2) - f(1)$ 3

c) $f(3) - f(2)$ 3

d) $f(4) - f(3)$ 3

Ver resolução no Guia do professor.

- Observando os itens anteriores, identifique a variação que ocorre no valor de $f(x)$ quando é acrescentada uma unidade ao valor de $x$.
- Sem fazer contas, determine o valor de $f(28) - f(27)$.
- Refaça os itens anteriores para $g(x) = -3x - 1$.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor do coeficiente de $x$ na lei da função? De que forma?
- Que conclusão podemos estabelecer?

**7.** A tabela a seguir apresenta alguns valores reais de $x$ e os respectivos valores de $f(x)$ e $g(x)$ das funções afins $f$ e $g$.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ | $7$ |
| $g(x)$ | $4$ | $3$ | $2$ | $1$ | $0$ |

a) Considerando os valores apresentados na tabela, determine a lei de formação da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$

b) Em um plano cartesiano, faça a representação gráfica dos pontos dados na tabela relativos à função $f$. Em seguida, elabore uma hipótese sobre como deve ser o gráfico de $f$, trace uma linha que passe pelos pontos obtidos e contemple sua hipótese. Ver resolução no Guia do professor.

c) Em outro plano cartesiano, faça o que se pede no item **b** para os dados relativos à função $g$.

d) Considerando os gráficos construídos nos itens **b** e **c**, que figura geométrica se espera que seja empregada para representar graficamente uma função afim? uma reta

Ver resolução no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**5. c)** $f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$

# 2 Gráfico da função afim

## 2.1 Taxa de variação

**Observação**

A lei de uma função afim pode ser escrita na forma $y = ax + b$. Essa sentença é chamada de **equação da reta** correspondente.
Veremos que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Dada uma função, podemos estudar seu comportamento analisando a relação entre a variação das imagens ($\Delta y$) e a variação dos respectivos elementos do domínio que as determinam ($\Delta x$), ou seja, podemos verificar como varia $f(x)$ atribuindo diferentes valores para $x$.

Como exemplo, vamos analisar o comportamento da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$.

Primeiro, escolhemos dois elementos do domínio e calculamos as respectivas imagens:

- Para $x_1 = 0$, temos $f(x_1) = y_1 = 1$.
- Para $x_2 = 1$, temos $f(x_2) = y_2 = -2$.

Em seguida, comparamos a variação entre as imagens obtidas com a variação dos respectivos elementos do domínio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{1 - 0} = -3$$

Assim, o número $-3$ é a **taxa de variação** da função $f$ no intervalo $[0, 1]$.

Agora, vamos calcular a taxa de variação dessa função em outro intervalo.

- Para $x_3 = -4$, temos $f(x_3) = y_3 = 13$.
- Para $x_4 = -2$, temos $f(x_4) = y_4 = 7$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{7 - 13}{-2 - (-4)} = \frac{-6}{2} = -3$$

**Reflita**

- Será que, para qualquer intervalo do domínio dessa função, obteremos a mesma taxa de variação $-3$?
- O que isso significa?

- Sim, em qualquer intervalo a taxa de variação é $-3$.
- Significa que a taxa de variação de uma função afim é constante para qualquer intervalo do domínio.

Observar a conveniência de discutir com os alunos a demonstração, para essa função, da conclusão sobre a constância da taxa de variação. Para isso, atribuir a $x$ valores $x_2$ e $x_1$ e depois calcular a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Se julgar oportuno, pedir aos alunos que calculem a taxa de variação em outros intervalos a fim de que percebam que o valor obtido é sempre $-3$. Esse fato será verificado no exercício resolvido **R2**.

Percebemos que o número $-3$ é, novamente, a taxa de variação da função $f$ no intervalo $[-4, -2]$.

Vamos calcular a taxa de variação em mais um intervalo.

Para $x_5 = -7$, temos $f(x_5) = y_5 = 22$.

Para $x_6 = \frac{1}{2}$, temos $f(x_6) = y_6 = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5} = \frac{-\frac{1}{2} - 22}{\frac{1}{2} - (-7)} = \frac{\frac{-45}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{-45}{2} \cdot \frac{2}{15} = -3$$

O número $-3$ é a taxa de variação da função $f$ no intervalo $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$.

Observe que a taxa de variação da função $f$ encontrada nos intervalos $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$ e $[-4, -2]$ é a mesma encontrada no intervalo $[0, 1]$.

Sabemos que uma função afim é definida por $f(x) = ax + b$, sendo $a$ e $b$ números reais.

Para $x = x_1$, temos $f(x_1) = y_1 = ax_1 + b$.

Para $x = x_2$, temos $f(x_2) = y_2 = ax_2 + b$.

Para $x_1 \neq x_2$, temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Note que a taxa de variação não depende do intervalo escolhido; ela sempre vale $a$.

A taxa de variação de uma função afim $f$, dada por $f(x) = ax + b$, é constante para qualquer intervalo do domínio e, numericamente, é igual ao coeficiente $a$.

O fato de a taxa de variação de uma função afim ser constante significa que para acréscimos iguais na variável $x$ correspondem acréscimos iguais na variável $f(x)$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

### Exercício resolvido

**R2.** Verificar que a taxa de variação da função afim dada por $f(x) = -3x + 1$ é igual ao coeficiente de $x$, ou seja, $-3$.

**▸ Resolução**

Consideremos $x$ e $x + h$ (com $h \in \mathbb{R}^*$) dois elementos do domínio.

- $f(x) = -3x + 1$
- $f(x + h) = -3(x + h) + 1 = -3x - 3h + 1$

Assim: $\frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{-3x - 3h + 1 - (-3x + 1)}{h} =$

$= \frac{-3x - 3h + 1 + 3x - 1}{h} = \frac{-3h}{h} = -3$

Portanto, a taxa de variação da função de lei $f(x) = -3x + 1$ é $-3$.

Observe novamente que a taxa de variação encontrada $(-3)$ é igual ao coeficiente $a$ da função.

Quando o valor de $x$ aumenta 1 unidade, o valor de $f(x)$ decresce 3 unidades; quando o valor de $x$ aumenta 2 unidades, o valor de $f(x)$ decresce 6 unidades; e assim por diante.

| $f(x) = -3x + 1$ | |
|---|---|
| $x$ | $f(x)$ |
| $-2$ | 7 |
| $-1$ | 4 |
| 0 | 1 |
| 1 | $-2$ |
| 2 | $-5$ |

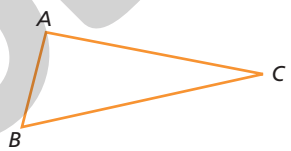
(+1, −3) (+2, −6)

## 2.2 Desigualdade triangular

Dados três pontos distintos, eles podem estar alinhados ou não: no primeiro caso, eles pertencem à mesma reta; no segundo, determinam um triângulo.

Em um triângulo, a medida de um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois. Observe:

No triângulo ABC, ao lado, temos:

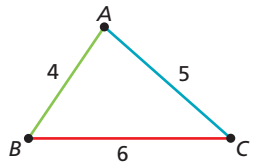



- $AB < AC + BC$
- $BC < AB + AC$
- $AC < AB + BC$

Desse modo, podemos considerar que dados três pontos, $A$, $B$ e $C$, se as desigualdades entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, apresentadas acima, forem verificadas, então os três pontos determinam um triângulo e, portanto, não estão alinhados.

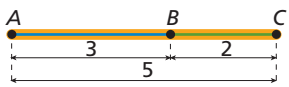
**Exemplos**

**a)** Dados os pontos $A$, $B$ e $C$ não alinhados, determinamos um triângulo cujos lados medem 4, 5 e 6. Analisando as medidas dos segmentos, percebemos que:




- $4 < 5 + 6$
- $5 < 4 + 6$
- $6 < 5 + 4$

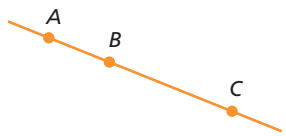
**b)** Dados os pontos $A$, $B$ e $C$ alinhados, obtemos segmentos que medem 2, 3 e 5. Analisando as medidas dos segmentos, percebemos que:



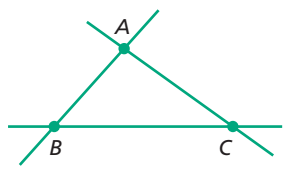

- $3 < 2 + 5$
- $2 < 3 + 5$
- $5 = 3 + 2$

**Observação**

- Três pontos distintos alinhados:




- Três pontos distintos não alinhados:




Note que, em ambos os casos, é possível obter três segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

# Função afim e reta

O gráfico de uma função afim é uma reta.

**Reflita**

Pode-se afirmar que, se $AC \neq AB + BC$, os pontos $A$, $B$ e $C$ não estão alinhados e, portanto, determinam um triângulo?

Não, os pontos podem estar alinhados, como os desta figura:




Verifica-se que $AC \neq AB + BC$ e, no entanto, os pontos $A$, $B$ e $C$ não determinam um triângulo.

## Demonstração

Seja a função afim dada por $f(x) = ax + b$.

Para provar que o gráfico dessa função é uma reta, devemos mostrar que três pontos distintos quaisquer do gráfico dessa função, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, pertencem a uma mesma reta.

Vamos supor $x_1 < x_2 < x_3$.

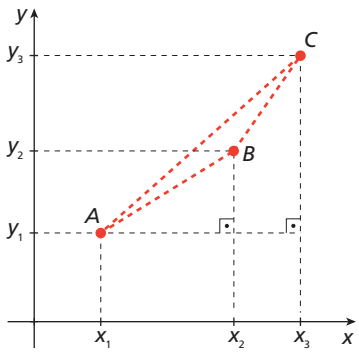



ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

Para provar que os pontos $A$, $B$ e $C$ pertencem a uma mesma reta, como vimos no exemplo **b** anterior, devemos demonstrar que $AC$ é igual a $AB + BC$.

Como o ponto $A$ pertence ao gráfico de $f$, temos: $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$

Para o ponto $B$, temos: $y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$

O ponto $C$ também pertence ao gráfico de $f$; então: $y_3 = f(x_3) = ax_3 + b$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [ax_3 + b - (ax_1 + b)]^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - ax_1 - b)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + [a(x_3 - x_1)]^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2$

$(AC)^2 = (x_3 - x_1)^2(1 + a^2)$

$\sqrt{(AC)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2(1 + a^2)}$

Como $AC > 0$ e $x_3 - x_1 > 0$:

$AC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

Analogamente, aplicamos o teorema de Pitágoras para obter $AB$ e $BC$:

$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow AB = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

$(BC)^2 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \Rightarrow BC = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$

Assim:

$AB + BC = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = \left[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)\right]\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

$AB + BC = AC$

Como $AB + BC = AC$, então $A$, $B$ e $C$ estão em uma mesma reta.

Portanto, o gráfico de uma função afim é uma reta.

**Observação**

Na função afim dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente $a$ é chamado de **coeficiente angular** ou taxa de variação, e o termo constante $b$ é chamado de **coeficiente linear** da reta que representa o gráfico da função $f$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

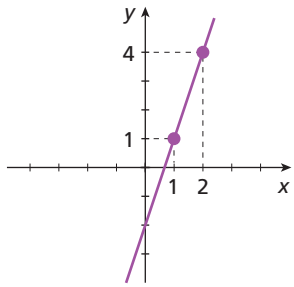
## 2.3 Construção do gráfico da função afim

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau pode ser determinado por apenas dois pontos, uma vez que dois pontos distintos são suficientes para determinar uma reta.

### Exemplos

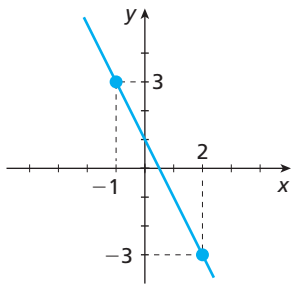
**a)** $f(x) = 3x - 2$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |




**b)** $g(x) = -2x + 1$

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| −1 | 3 |
| 2 | −3 |

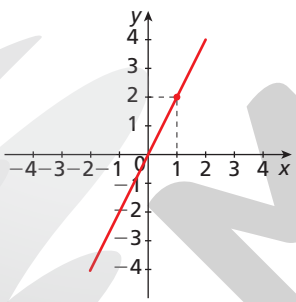



A função polinomial de 1º grau com $b = 0$ (linear), passa pela origem do plano cartesiano e quando crescente, tem o comportamento proporcional entre as variáveis $y$ e $x$. Pois a razão entre $y$ e o seu correspondente $x$ é igual a uma constante $k$, com $x$ e $y$ não nulos.

### Exemplos

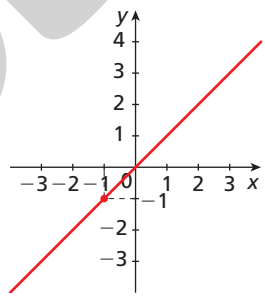
**a)** $f(x) = 2x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |




**b)** $g(x) = x$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| −1 | −1 |



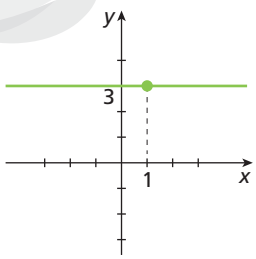

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta oblíqua aos eixos $x$ e $y$.

Como o gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo $x$, podemos determiná-lo conhecendo um único ponto.

### Exemplos

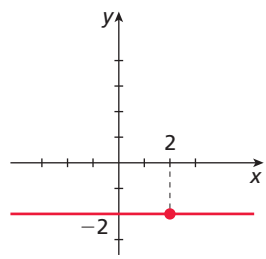
**a)** $f(x) = 3$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 3 |




**b)** $g(x) = -2$

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| 2 | −2 |




O gráfico da função constante $f(x) = 0$ coincide com o eixo $x$.

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **4** e das habilidades **EM13MAT401**, **EM13MAT501** e **EM13MAT510** da BNCC, pois os alunos irão verificar a conversão de uma representação algébrica de função polinomial de 1º grau em sua representação geométrica no plano cartesiano, distinguindo casos de comportamento proporcional, além de investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, identificando quando essa representação é de uma função polinomial de 1º grau.

**Reflita**

Você já viu que os valores de $x$ do domínio de $f$ para os quais $f(x) = 0$ são chamados de zeros da função. Sabendo disso, quais são os zeros da função $f(x) = 3x - 2$? E da função afim $g(x) = -2x + 1$?

Para determinar o zero da função $f$, devemos ter $f(x) = 0$. Dessa forma, quando $f(x) = 0$, temos $x = \frac{2}{3}$. Analogamente, para $g(x) = -2x + 1$, temos $x = \frac{1}{2}$.

Espera-se que os alunos percebam que a função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$, não tem zeros, e que os zeros da função constante $f(x) = 0$ são todos os números reais. Caso os alunos tenham dificuldade, pedir que analisem o gráfico dessas funções. No primeiro caso, o gráfico não intercepta o eixo $x$; no segundo, o gráfico coincide com o eixo $x$.

Observar que há duas intenções: levar os alunos a refletir sobre a abordagem assumida nesta obra, que é a associação entre Álgebra e Geometria; e levar os alunos, sempre que possível, a generalizar conscientemente suas conclusões. Essas intenções apresentam-se em outras atividades, seja em boxes **Reflita**, seja em exercícios propostos.

**Reflita**

Quais são os zeros da função constante $f(x) = b$, com $b \neq 0$? E da função constante $f(x) = 0$?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

## Coeficiente linear

Para determinar o ponto em que o gráfico de uma função afim de lei $f(x) = ax + b$ intercepta o eixo $y$, fazemos $x = 0$:

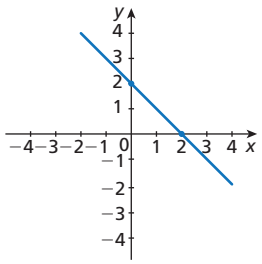
$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow f(0) = b$

Ou seja, para $x = 0$, $y = b$. Assim, o ponto $(0, b)$ é o de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas.

### Exemplos

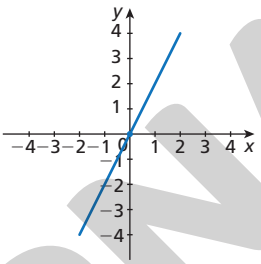
**a)** $f(x) = -x + 2$

Como o coeficiente linear é 2, a intersecção do gráfico de $f$ com o eixo das ordenadas é o ponto (0, 2).



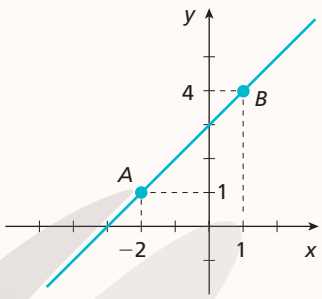

**b)** $g(x) = 2x$

Como o coeficiente linear é 0, a intersecção do gráfico de $g$ com o eixo das ordenadas é o ponto (0, 0).




## Exercícios resolvidos

**R3.** Dado o gráfico abaixo de uma função polinomial do 1º grau, determinar a lei de formação dessa função.




▸ **Resolução**

Vamos considerar $y = ax + b$ como a lei da função.

Como a reta passa pelo ponto $(0, 3)$, $b = 3$.

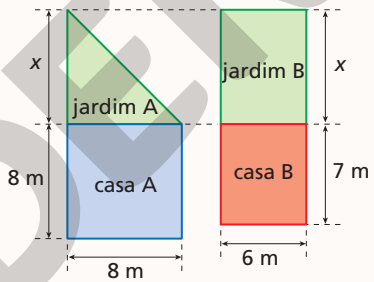
Observamos as coordenadas de dois pontos do gráfico, nesse caso, $A$ e $B$.

Como $A(-2, 1)$ e $B(1, 4)$, podemos determinar a taxa de variação da função por esses dois pontos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{(4-1)}{(1-(-2))} = \frac{3}{3} = 1$$. Assim, $a = 1$.

Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = x + 3$.

**R4.** Um arquiteto pretende construir duas casas com jardim, uma do lado da outra. Ao esboçar a planta com as duas casas, ele teve dúvida quanto à medida de um dos lados de cada jardim, pois precisa construir as casas de modo que a área ocupada pela casa B e pelo jardim B seja maior que a área ocupada pela casa A e pelo jardim A.




Nessas condições, quais são os valores possíveis para $x$?

▸ **Resolução**

Vamos determinar as leis das funções que representam a área que cada casa e seu jardim ocupam em função da medida $x$.

Área ocupada pela casa A e pelo jardim A:

$$A_1 = 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x = 64 + 4x$$

Área ocupada pela casa B e pelo jardim B:

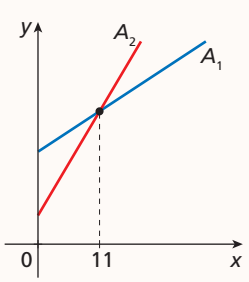
$A_2 = 6 \cdot 7 + 6 \cdot x = 42 + 6x$

Portanto, $A_1 = 4x + 64$ e $A_2 = 6x + 42$.

Para $A_1 = A_2$, temos $x = 11$, que é a abscissa do ponto de intersecção dos gráficos que representam $A_1$ e $A_2$.

Esboçando os gráficos, percebemos que $A_2$ é maior que $A_1$ quando $x > 11$, pois nesse intervalo o gráfico de $A_2$ está acima do gráfico de $A_1$.

Portanto, $x$ tem de ser maior que 11 m.




MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

O exercício **12** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13CNT101** da BNCC, pois os alunos terão a oportunidade de interpretar situações relativas às Ciências da Natureza e suas Tecnologias que envolvam a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação.

## Exercícios propostos

**8.** Construa o gráfico de cada uma das funções polinomiais do 1º grau. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = -4x + \frac{1}{2}$

c) $h(x) = -x + 2$

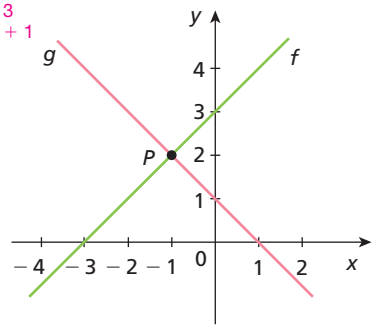
d) $i(x) = -4 + \frac{6}{3}x$

Responda:

- O que os gráficos das funções $f$ e $i$ têm em comum?
- E os gráficos das funções $g$ e $h$?
- Determine o ponto de intersecção entre os gráficos das funções $f$ e $i$.

**9.** Dê a lei de formação das funções polinomiais do 1º grau correspondentes às retas $f$ e $g$. Determine o ponto de intersecção dessas duas retas.

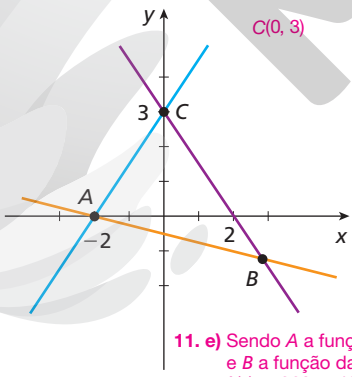
$f(x) = x + 3$
$g(x) = -x + 1$
$P(-1, 2)$




**10.** Observe o gráfico e dê as coordenadas de $A$, $B$ e $C$, sabendo que a equação da reta que passa pelos pontos $A$ e $B$ é:

$$y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$$

$A(-2, 0)$
$B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$
$C(0, 3)$

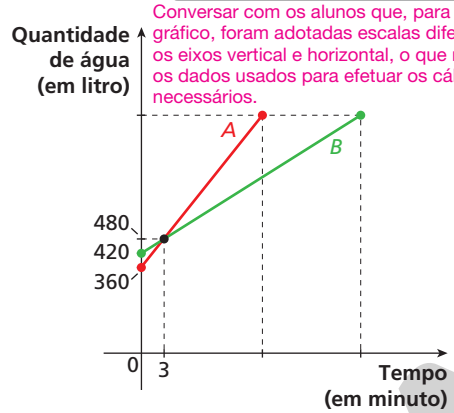



**11.** Observe os gráficos a seguir que representam o enchimento de duas caixas-d'água, A e B de 1.000 litros cada uma, sendo que cada caixa tem uma torneira para enchê-la. Depois, responda às questões.

**11. e)** Sendo $A$ a função da caixa $A$ e $B$ a função da caixa $B$, temos: $A(x) = 360 + 40x$ e $B(x) = 420 + 20x$

Registre as respostas em seu caderno.

Conversar com os alunos que, para construir o gráfico, foram adotadas escalas diferentes para os eixos vertical e horizontal, o que não invalida os dados usados para efetuar os cálculos necessários.




NELSON MATSUDA

a) As duas torneiras têm a mesma vazão? Se não, qual delas tem a maior vazão? Não; a torneira A tem a maior vazão.

b) Qual é a taxa de variação de cada função representada pelas retas? A: 40 e B: 20

c) Determine os coeficientes lineares dos gráficos das funções. A: 360 e B: 420

d) O que significam os valores encontrados no item **c**? As quantidades de litros que há em cada caixa antes da abertura das torneiras.

e) Qual é a lei de formação de cada função?

f) Qual é o tempo para o enchimento de cada caixa-d'água? A: 16 minutos; B: 29 minutos

g) Qual é o domínio de cada função representada pelas retas? $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 16\}$ $D(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 29\}$

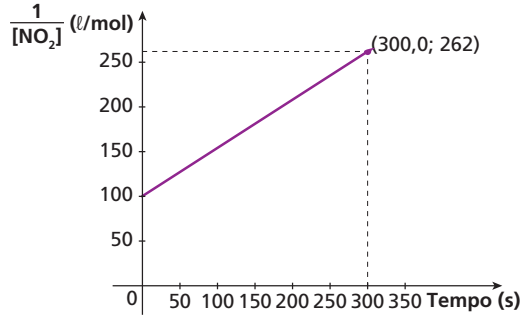
h) Qual é a imagem de cada função representada pelas retas? $Im(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid 360 \leqslant y \leqslant 1.000\}$ $Im(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid 420 \leqslant y \leqslant 1.000\}$

**12.** O gráfico a seguir foi obtido com os dados da decomposição na fase gasosa de dióxido de nitrogênio a 300° C, conforme a reação:

$$NO_2(g) \rightarrow NO(g) + \frac{1}{2}O_2(g)$$

**12. c)** $\frac{1}{[NO_2]} = 100 \Rightarrow [NO_2] = \frac{1}{100}$

$\therefore [NO_2] = 0{,}01\ mol/\ell$




NELSON MATSUDA

Responda às questões: **b)** Significa a constante de velocidade com que o $NO_2$ se decompõe.

a) Determine a taxa de variação da função que representa a reação. $\frac{27}{50} = 0{,}54$

b) O que significa essa taxa de variação?

c) Qual é a concentração inicial de $NO_2$?

d) Determine a lei de formação da função representada pelo gráfico. $y = 0{,}54x + 100$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **1** e das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302**, **EM13MAT501** e **EM13MAT510** da BNCC, pois os alunos vão interpretar uma situação relativa às Ciências da Natureza e suas Tecnologias que envolve a variação de grandezas, investigando as relações entre os números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas e generalizações, que podem ser expressas algebricamente.



NASA/ESA

Imagem da Estação Espacial Internacional e do ônibus espacial ancorado Endeavour, em maio de 2011.

# 2.4 Função linear e proporcionalidade

A Estação Espacial Internacional orbita a Terra a uma velocidade de 7,66 quilômetros por segundo. Verifique na tabela a seguir a distância $s$ (em quilômetros) percorrida pela Estação em função do tempo $t$ (em segundos), durante 5 segundos.

| $t$ (em segundos) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $s$ (em km) | 7,66 | 15,32 | 22,98 | 30,64 | 38,30 |

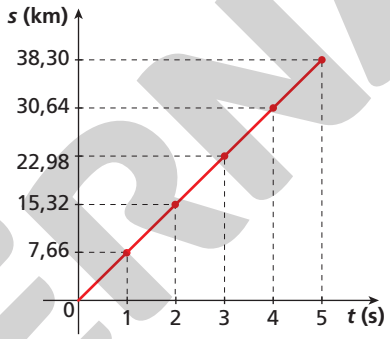
Observe que: $\frac{s}{t} = \frac{7{,}66}{1} = \frac{15{,}32}{2} = \frac{22{,}98}{3} = \frac{30{,}64}{4} = \frac{38{,}30}{5} = k$

Assim, $\frac{s}{t} = k \Rightarrow s = k \cdot t$. Como $k = 7{,}66$, podemos expressar o quanto a Estação Espacial percorre em determinado tempo por meio da função linear: $s(t) = 7{,}66t$, sendo $s(t)$ em quilômetros e $t$ em segundos.

Note que $k$ é a velocidade (razão entre distância e tempo) dada em quilômetros por segundo.

Dizemos que os valores de $s$ são **diretamente proporcionais** aos respectivos valores de $t$ porque se a variável tempo dobra a variável distância também dobra; se a variável tempo triplica, a variável distância também triplica, e assim por diante.

Veja ao lado o gráfico dessa função linear.




Se $y = f(x)$, dizemos que $y$ é diretamente proporcional a $x$ quando as seguintes condições forem satisfeitas:

1ª) $y$ é uma função crescente de $x$;

2ª) se multiplicarmos $x$ por um número natural $n$, o valor correspondente de $y$ também fica **multiplicado** por $n$. Ou seja:

$f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo valor de $x$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

**Observação**

Consideramos para o gráfico ao lado não apenas os pontos da tabela, mas uma semirreta com extremidade na origem do plano cartesiano, pois o domínio da função para o nosso exemplo é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$.

**Reflita** 27.576 km.

Qual é a distância percorrida pela Estação Espacial em 1 hora?

**Observação**

Se $y = f(x)$ e a grandeza $y$ for inversamente proporcional a $x$, vale a seguinte expressão: $y \cdot x = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$, sendo $k$ a constante de proporcionalidade inversa.

Não. Na função que relaciona as grandezas inversamente proporcionais, a variável independente encontra-se no denominador de uma fração, diferente de uma função linear que é do tipo $f(x) = ax$.

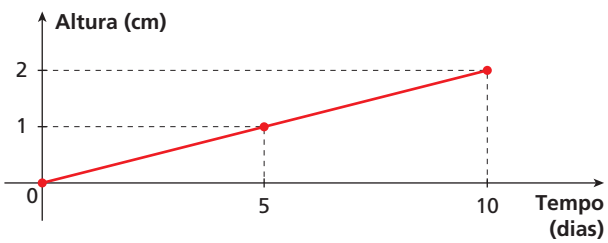
**Reflita**

A função que relaciona as grandezas inversamente proporcionais é uma função linear?

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**13.** (UERN) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo.




Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá no trigésimo dia, uma altura igual a: alternativa e

**a)** 5 **b)** 150 **c)** 15 **d)** 30 **e)** 6

**14.** Dado um quadrado de lado de medida $\ell$, explique se a área A do quadrado é diretamente proporcional ao seu lado $\ell$. Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÃO: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



A situação sobre a Estação Espacial Internacional propicia a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ao favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** uma vez que os alunos poderão elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos desse veículo com base na análise das interações gravitacionais.

# 2.5 Análise do gráfico da função polinomial do 1º grau

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **4** e das habilidades **EM13MAT401**, **EM13MAT404** e **EM13MAT501** da BNCC, pois os alunos irão analisar a conversão de uma representação algébrica de função polinomial de 1º grau em sua representação geométrica no plano cartesiano.

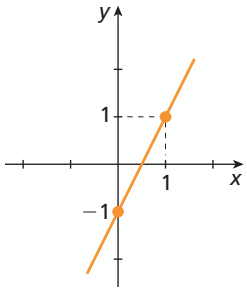
## Crescimento e decrescimento de uma função

Uma função polinomial do 1º grau, de lei $f(x) = ax + b$, pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor do coeficiente $a$ da função.

### Exemplos

**a)** $f(x) = 2x - 1$ $(a > 0)$

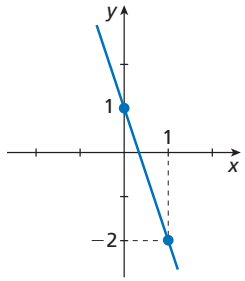
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $-5$ |
| $-1$ | $-3$ |
| $0$ | $-1$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $3$ |




Quando aumentamos o valor de $x$, os correspondentes valores de $f(x)$ também aumentam. Portanto, a função $f$ é **crescente**.

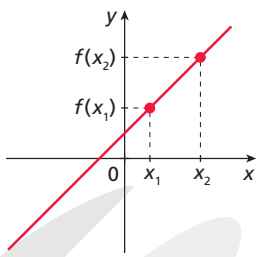
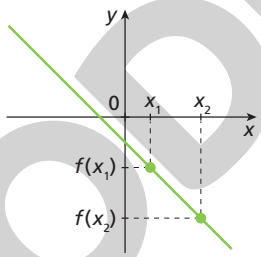
**b)** $g(x) = -3x + 1$ $(a < 0)$

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $7$ |
| $-1$ | $4$ |
| $0$ | $1$ |
| $1$ | $-2$ |
| $2$ | $-5$ |




Quando aumentamos o valor de $x$, os correspondentes valores de $g(x)$ diminuem. Portanto, a função $g$ é **decrescente**.

De modo geral, temos:

| Função crescente ($a > 0$) | Função decrescente ($a < 0$) |
|---|---|
|  |  |
| $x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 > ax_1 \Rightarrow ax_2 + b > ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$ | $x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 < ax_1 \Rightarrow ax_2 + b < ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) < f(x_1)$ |





### Exemplos

**a)** $f(x) = -\sqrt{2}x + 3$ é uma função decrescente, pois $-\sqrt{2} < 0$, ou seja, $a < 0$.

**b)** $g(x) = 0{,}5x - 2$ é uma função crescente, pois $0{,}5 > 0$, ou seja, $a > 0$.

Uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, com $b \in \mathbb{R}$ e $a = 0$, não é crescente nem decrescente. Nesse caso, a função é constante. Por exemplo, $h(x) = 3$ é uma função constante, pois $a = 0$.

### Observação

Para uma função polinomial do 1º grau crescente, como a função $f$, a taxa de variação é positiva. No caso de uma função polinomial do 1º grau decrescente, como a função $g$, a taxa de variação é negativa.

### Exercício resolvido

**R5.** Dada a função afim de lei $f(x) = (-3 + m)x + 7$, discutir para que valores de $m$ a função é crescente, decrescente ou constante.

▸ **Resolução**

Observe que o coeficiente de $x$ nessa função é $(-3 + m)$.

A função é crescente se: $-3 + m > 0 \Rightarrow m > 3$

A função é decrescente se: $-3 + m < 0 \Rightarrow m < 3$

} Nesses casos, temos uma função polinomial do 1º grau.

A função é constante se: $-3 + m = 0 \Rightarrow m = 3$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Intersecção da reta

- com o eixo $y$: ponto $(0, b)$
- com o eixo $x$: ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

# Zero da função polinomial do 1º grau

Os zeros de uma função $f$ são os números reais $x$ para os quais $f(x) = 0$. Assim, o zero da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$ é a raiz da equação do 1º grau $ax + b = 0$.

Para calcular o zero da função, devemos fazer:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

No gráfico, o zero de uma função polinomial do 1º grau é a abscissa do ponto em que a reta intercepta o eixo $x$.

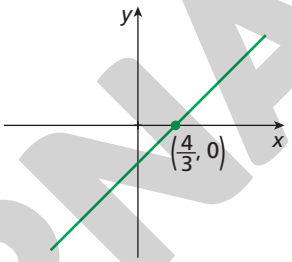
### Exemplo

Vamos obter o zero da função $f$, dada por $f(x) = x - \frac{4}{3}$, e o ponto no qual a reta, que é seu gráfico, intercepta o eixo $x$.

Para isso, devemos resolver a seguinte equação:

$x - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ (zero da função)

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo $x$ no ponto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, como mostrado ao lado. Como $a = 1$, $f$ é uma função crescente.




**Reflita**

- Qual é o zero da função identidade?
- Em que ponto o gráfico da função identidade corta os eixos $x$ e $y$?

- função identidade: $f(x) = x$
  zero de $f$: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- O valor $b$, do termo constante da lei de formação da função $f$, é zero. Assim, o ponto em que o gráfico da função identidade intercepta o eixo $y$ é $(0, 0)$, que é também o ponto em que o gráfico intercepta o eixo $x$.

### Exercício resolvido

**R6.** Determinar o valor de $m$ para que o gráfico da função $j$, com $j(x) = (-3 + 6m)x + 5$, intercepte o eixo x no ponto $(1, 0)$.

▶ **Resolução**

Para $x = 1$, temos $j(x) = 0$.

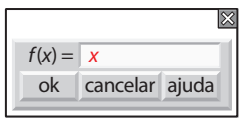
Assim: $0 = (-3 + 6m) \cdot 1 + 5 \Rightarrow 6m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$

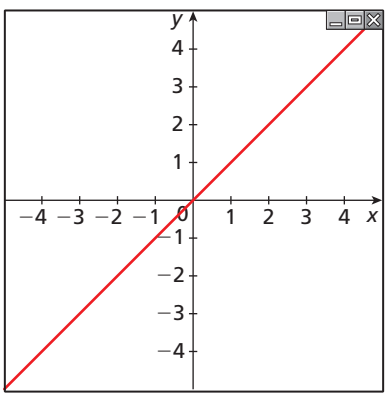
Logo, para $m = -\frac{1}{3}$, o gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $(1, 0)$.

# Translação do gráfico de uma função afim

Vamos utilizar um *software* de construção de gráficos para construir o gráfico das funções $f$ e $g$ de leis $y = x$ e $y = x + 1$, respectivamente.

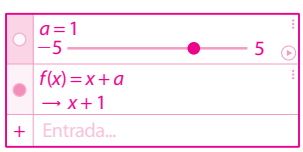
Primeiramente, digitamos "$x$" no campo para digitar a lei da função. E então, obtemos o gráfico de $f$.




Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **5**, uma vez que os alunos serão incentivados a estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e *software* de construção de gráficos, identificando a necessidade ou não de uma demonstração cada vez mais formal na validação das conjecturas.

Em alguns *softwares* como o GeoGebra e o Desmos, basta inserir a expressão algébrica com o parâmetro para que o *software* disponibilize um controle deslizante do parâmetro e ao deslizar o controle, o gráfico é automaticamente transladado no plano. Observar o exemplo da função $f$ na figura a seguir.



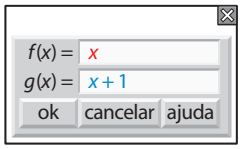

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

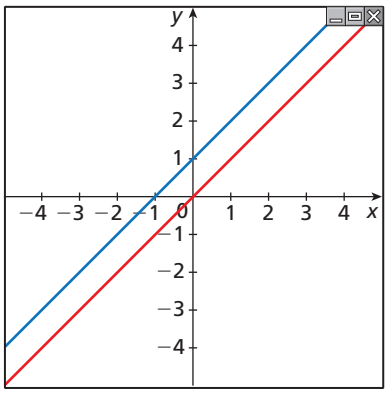
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No mesmo plano do gráfico da função $f$, vamos construir o gráfico de $g$. Assim, digitamos: "$x + 1$" no campo destinado à expressão de $g$.

Ao clicar em ok, obtemos o gráfico de $g$.




Podemos observar que o gráfico de $g$ é uma translação paralela do gráfico de $f$ em uma unidade para cima, na direção vertical ou em uma unidade para a esquerda, na direção horizontal.

**Explore**

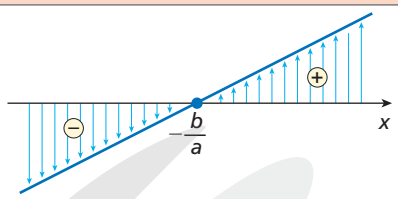
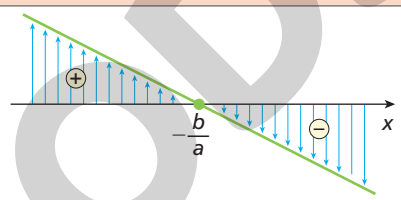
Use um *software* de construção de gráficos para construir, em um mesmo plano cartesiano, gráficos da função $y = ax + b$. Primeiramente, estude os casos em que $b = 0$ (função linear) e $a$ é um número real não nulo. Não deixe de utilizar valores negativos e positivos para $a$. Em outro plano, construa gráficos da função $y = ax + b$, com $b$ diferente de 0. Mantenha o coeficiente $a$ e faça variações com o coeficiente $b$. Depois de verificar as construções feitas, escreva um texto concluindo o que foi observado com a atividade.

É esperado que o aluno perceba que a variação do parâmetro $a$ em $y = ax + b$ irá modificar a inclinação da reta. Mantendo o coeficiente $a$ e variando o coeficiente $b$, a reta será transladada paralelamente à reta original.

## Estudo do sinal da função pelo gráfico

Para estudar o sinal da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$, temos de determinar para quais valores de $x$ a função é positiva, nula ou negativa.

Podemos fazer esse estudo esboçando o gráfico da função. Para isso, analisamos se a função é crescente ou decrescente.

| Função crescente ($a > 0$) | Função decrescente ($a < 0$) |
|---|---|
|  |  |
| $f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$<br>$f(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$<br>$f(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{a}$ | $f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$<br>$f(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{a}$<br>$f(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{a}$ |

**Observação**

Estudar o sinal de uma função significa determinar os valores de $x$ para os quais seu gráfico está acima do eixo $x$, intercepta-o ou está abaixo dele.

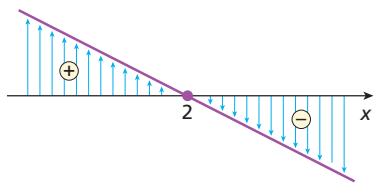
### Exemplo

Vamos estudar o sinal da função polinomial do 1º grau $f$ dada por $f(x) = -3x + 6$.

Primeiro, determinamos o zero de $f$: $-3x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

Como o coeficiente de $x$ é negativo, temos o esboço do gráfico ao lado.

Então, $f(x) = 0$ para $x = 2$; $f(x) > 0$ para $x < 2$ e $f(x) < 0$ para $x > 2$.




## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**15.** Classifique cada função polinomial do 1º grau abaixo como crescente ou decrescente.

a) $f(x) = -5x + 2$ decrescente

b) $h(x) = -3 + \frac{x}{2}$ crescente

c) $g(x) = x - \frac{3}{4}$ crescente

d) $f(x) = 1 - 2x$ decrescente

**16.** Estude o sinal das funções polinomiais do 1º grau dadas por:

a) $f(x) = 3x + \frac{3}{4}$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

a) $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{4}$;
$f(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{4}$;
$f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{4}$

b) $g(x) = 0$ para $x = 2$; $g(x) > 0$ para $x < 2$; $g(x) < 0$ para $x > 2$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

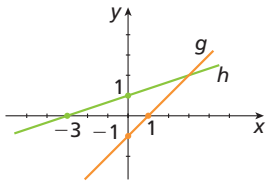
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

A função é crescente para $m > \frac{1}{2}$ e decrescente para $m < \frac{1}{2}$.

**17.** Dada a função de lei $f(x) = \left(m - \frac{1}{2}\right)x + 7$, discuta para que valores de $m$ a função é crescente e para que valores de $m$ ela é decrescente.

**18.** Observe o gráfico das funções afins $g$ e $h$.




**a)** Calcule o coeficiente angular das retas que são os gráficos de $g$ e $h$. $g$: 1; $h$: $\frac{1}{3}$

**b)** Determine o coeficiente linear de cada uma das retas representadas no gráfico. $g$: $-1$; $h$: 1

**c)** Determine o ponto de intersecção das retas. (3, 2)

**d)** Para quais valores de $x$ tem-se $h(x)$ menor que $g(x)$? $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

No exercício 19 os alunos devem identificar as informações relevantes à resolução do problema no enunciado. Esse processo corrobora com o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pilar **abstração**, do *pensamento computacional*.

**19.** Na época do Natal, a loja A oferece aos funcionários temporários, que trabalham 6 horas por dia, um salário fixo de R$ 900,00 mais uma comissão de 2% (em reais) sobre o total vendido; já a loja B não oferece salário fixo para o mesmo tipo de funcionário, mas paga 8% (em reais) de comissão sobre o total vendido.

**a)** R$ 1.160,00; R$ 1.040,00

**a)** Para um total de vendas de R$ 13.000,00, qual é o salário recebido na loja A? E na loja B?

**b)** Escreva a lei de formação das funções correspondentes ao salário recebido em cada uma das lojas pelo total de vendas. $s_A(x) = 900 + 0{,}02x$; $s_B(x) = 0{,}08x$

**c)** Qual deve ser o total de vendas para que um funcionário da loja A receba R$ 1.600,00 de salário? E da loja B? loja A: R$ 35.000,00; loja B: R$ 20.000,00

**d)** A partir de que valor de vendas é mais vantajoso trabalhar na loja B? a partir de valores acima de R$ 15.000,00

## Resolução de situações-problema pelo gráfico da função

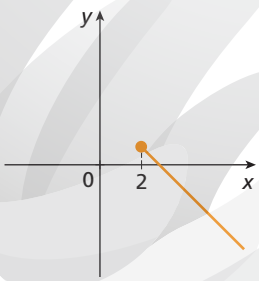
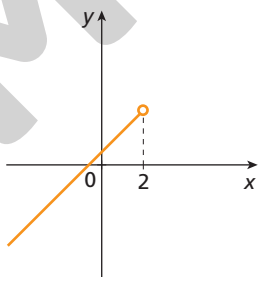
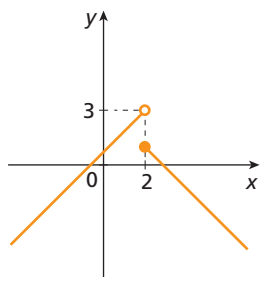
Em muitas situações-problema, usamos o gráfico de funções cujas leis são do tipo $y = ax + b$, com domínio restrito, ou seja, subconjuntos de $\mathbb{R}$ (distintos de $\mathbb{R}$). Vamos analisar algumas dessas situações por meio de exemplos.

### Exemplos

**a)** Vamos escrever o domínio e o conjunto imagem da função:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, \text{ se } x \geqslant 2 \\ x + 1, \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

Para isso, vamos construir o gráfico de $f$ por partes.

| Primeiro, construímos o gráfico de $f$ para $x \geqslant 2$. | Em seguida, construímos o gráfico de $f$ para $x < 2$. | Finalmente, construímos o gráfico de $f$. |
|---|---|---|
|   |   |   |
| Para $x \geqslant 2$, o gráfico da função $f$ segue a lei $y = 3 - x$. | Para $x < 2$, o gráfico da função $f$ segue a lei $y = x + 1$. | Para $x \geqslant 2$, o gráfico de $f$ está contido na reta $y = 3 - x$; para $x < 2$, na reta $y = x + 1$. |

Observando o gráfico, temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 3\}$.

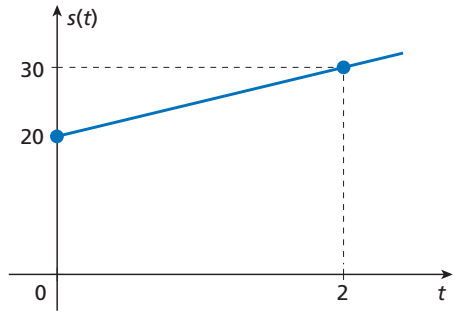
**b)** O movimento uniforme caracteriza-se pela velocidade constante e diferente de zero. Por esse motivo, o espaço percorrido em intervalos de tempos iguais é sempre o mesmo. Assim, a função horária desse movimento é dada pela lei $s(t) = s_0 + v \cdot t$, em que $s(t)$ é a posição (em metro) no instante $t$ (em segundo); $s_0$ é o espaço inicial quando $t = 0$; e $v$ é a velocidade constante (em metro por segundo).

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observando o gráfico abaixo, vamos resolver algumas questões.




- Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico?

  Observando o gráfico, percebemos que $s_0 = 20$ m; assim, $s(t) = 20 + vt$.

  Como $s(2) = 30$, temos:
  $20 + 2v = 30 \Rightarrow v = 5$

  Assim, a função horária do movimento é: $s(t) = 20 + 5t$

- Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função?

  Observando o gráfico, temos $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 20\}$.

- Qual será a posição após 10 segundos?

  Para $t = 10$, temos: $s(10) = 20 + 5 \cdot 10 \Rightarrow s(10) = 70$

  Portanto, após 10 segundos estará na posição 70 metros.

- Após quanto tempo estará na posição 120 metros?

  Para $s(t) = 120$, temos: $20 + 5t = 120 \Rightarrow t = 20$

  Logo, após 20 segundos estará na posição 120 metros.

**Observação**

Para construir o gráfico ao lado, adotamos escalas diferentes para os eixos vertical e horizontal, o que não invalida os dados usados para efetuar os cálculos necessários.

Avaliar a conveniência de citar que $v$ é a taxa de variação do espaço percorrido $\Delta s$ pelo tempo decorrido $\Delta t$. Assim:

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{(30 - 20)}{(2 - 0)} = 5$

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**20.** Construa o gráfico da função a seguir e, depois, identifique o conjunto imagem.

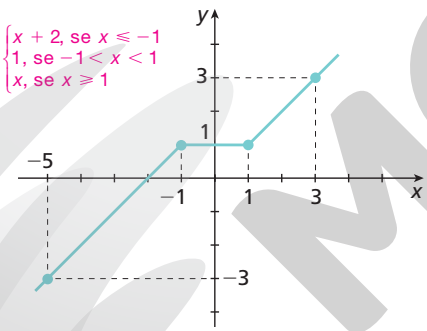
Ver resolução no Guia do professor.

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geq 1 \\ x, \text{ se } -1 \leq x < 1 \\ 1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

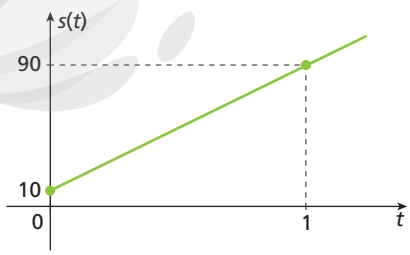
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1 \text{ ou } y = 2\}$

**21.** Observe o gráfico e determine a lei de formação da função correspondente.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$




**22.** Considere o gráfico a seguir, que representa a posição (em quilômetro) de um automóvel em função do tempo (em hora).




a) Qual é a velocidade do automóvel? 80 km/h

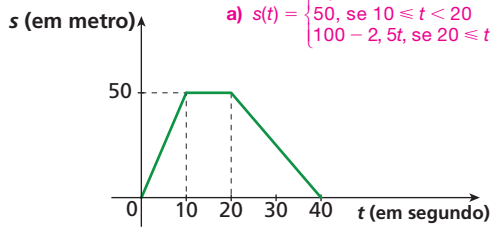
b) Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico? $s(t) = 10 + 80t$

c) Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função? $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 10\}$

d) Qual será a posição do carro após 4 horas? 330 quilômetros

e) Após quanto tempo o carro estará na posição 250 quilômetros? 3 horas

**23.** Observe o gráfico que representa o movimento de um corpo que se desloca numa trajetória retilínea em função do tempo. Depois responda às questões.




NELSON MATSUDA

a) $s(t) = \begin{cases} 5t, \text{ se } 0 \leq t < 10 \\ 50, \text{ se } 10 \leq t < 20 \\ 100 - 2,5t, \text{ se } 20 \leq t \leq 40 \end{cases}$

a) Determine a lei de formação da função (espaço × tempo) representada pelo gráfico.

b) Em que posição estará o corpo em 5 segundos? E em 35 segundos? 25 m; 12,5 m

c) O que significa a taxa de variação no intervalo de:

- 0 a 10 segundos?
- 10 a 20 segundos?
- 20 a 40 segundos?

d) Faça uma tabela com segundos inteiros de 1 a 10 e as suas respectivas posições. Feito isso, explique se nesse intervalo o comportamento entre as variáveis é proporcional.

Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

23. c) • Uma velocidade constante de 5 m/s.
- Nesse intervalo a taxa de variação é zero, isso significa que o corpo permanece em repouso.
- A taxa de variação é negativa, −2,5. Nesse caso significa que o movimento é retrógrado, isto é, o corpo está se deslocando no sentido contrário da trajetória.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# 3 Inequações do 1º grau

Toda inequação que pode ser reduzida a uma desigualdade em que o primeiro membro é um polinômio do tipo $ax + b$ (com $a \neq 0$) e o segundo membro é zero é chamada de **inequação do 1º grau** na incógnita $x$.

**Exemplos**

**a)** $4x - 3 \geqslant 0$ **b)** $8x > 0$ **c)** $-\sqrt{7}x + 1 \leqslant 0$ **d)** $-5x - 0{,}2 < 0$

A seguir, vamos usar os princípios de equivalência das desigualdades para resolver inequações.

## Princípio aditivo de equivalência das desigualdades

Ao adicionar aos dois membros de uma desigualdade um mesmo número, obtemos outra desigualdade equivalente de mesmo sentido.

**Exemplo**

$-4 > -7 \Rightarrow -4 + 12 > -7 + 12 \Rightarrow 8 > 5$

sinal mantido

## Princípio multiplicativo de equivalência das desigualdades

Ao multiplicar os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número **positivo**, obtemos outra desigualdade equivalente de mesmo sentido.

**Exemplo**

$21 > 15 \Rightarrow 21 \cdot \frac{1}{3} > 15 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow 7 > 5$

sinal mantido

Ao multiplicar os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número **negativo**, obtemos outra desigualdade equivalente de sentido invertido.

**Exemplos**

**a)** $14 > 1 \Rightarrow 14 \cdot (-3) < 1 \cdot (-3) \Rightarrow -42 < -3$

sinal invertido

**b)** $-32 < 64 \Rightarrow -32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) > 64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 16 > -32$

sinal invertido

### Exercícios resolvidos

**R7.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $3(x + 2) \leqslant 2(2x + 4)$.

▸ **Resolução**

$3(x + 2) \leqslant 2(2x + 4)$
$3x + 6 \leqslant 4x + 8$
$3x - 4x \leqslant 8 - 6$
$-x \leqslant 2$
$x \geqslant -2$
Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$.

**R8.** Determinar o conjunto solução da inequação $\frac{x + 4}{3} - \frac{3x + 2}{4} \geqslant 0$.

▸ **Resolução**

$\frac{x + 4}{3} - \frac{3x + 2}{4} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{4(x + 4) - 3(3x + 2)}{12} \geqslant \frac{0}{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 16 - 9x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow -5x + 10 \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5x \geqslant -10 \Rightarrow x \leqslant 2$
Assim, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**24.** Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

**a)** $3x - 12 \leqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

**b)** $5(-x + 1) + 2(3x - 4) > -1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

**c)** $\frac{-x + 3}{2} < \frac{2x + 5}{3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$

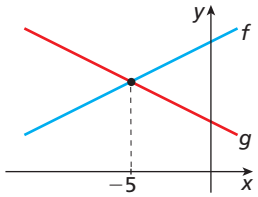
**25.** Em um mesmo plano cartesiano, utilizando um *software* específico, construa os gráficos das funções $f$ e $g$ dadas por $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Ver resolução no Guia do professor.

**a)** Analise os intervalos do domínio em que $f(x) < g(x)$.

**b)** Monte a inequação, resolva-a e compare a solução com sua análise dos gráficos. O que você conclui?

**26.** Os gráficos de duas funções, $f$ e $g$, estão representados no plano cartesiano abaixo.




ADILSON SECCO

Analisando o gráfico, resolva as questões a seguir.

**a)** Para qual valor de $x$ tem-se $f(x) = g(x)$? $x = -5$

**b)** Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$? $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

**c)** Determine o conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

# 3.1 Inequação-produto e inequação-quociente

Acompanhe o estudo de inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções afins.

Sendo $f$ e $g$ funções na variável real $x$, chamamos de **inequação-produto** as sentenças expressas por: $f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$

### Exemplos

**a)** $\left(\frac{1}{3} - 4x\right) \cdot (x - 1) > 0$

**b)** $(0{,}45x - 7) \cdot (8 - 2x) < 0$

**c)** $(89x + 1) \cdot \left(x + \frac{3}{5}\right) \geqslant 0$

**d)** $(3x + 4) \cdot \left(x - \sqrt{11}\right) \cdot (5 - 2x) \leqslant 0$

**Observação**

O primeiro membro da inequação pode ser formado pelo produto de mais de duas funções.

Sendo $f$ e $g$ funções na variável real $x$, com $g(x) \neq 0$, chamamos de **inequação-quociente** as sentenças expressas por:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} < 0,\ \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \text{ e } \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

### Exemplos

**a)** $\frac{x + 7}{x} > 0$

**b)** $\frac{\sqrt{3}x}{x - 13} < 0$

**c)** $\frac{0{,}32x - 2}{x + 9} \geqslant 0$

**d)** $\frac{x}{23 - x} \leqslant 0$

## Exercícios resolvidos

**R9.** Determinar, em $\mathbb{R}$, a solução da inequação $x^2 - 1 \geqslant 0$.

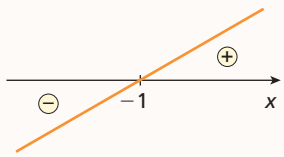
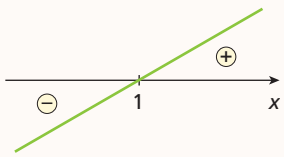
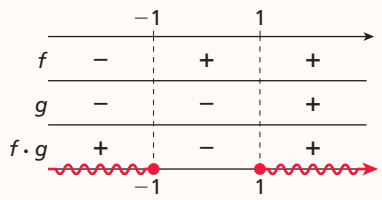
▸ **Resolução**

Podemos fatorar a expressão $x^2 - 1$. Veja: $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$

Assim, escrevemos essa inequação como a inequação-produto $(x + 1) \cdot (x - 1) \geqslant 0$.

Seja $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$. Para que o produto $f(x) \cdot g(x)$ seja positivo ou nulo, devemos ter $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ ou, então, $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) \leqslant 0$.

MODERNA

| Sinal de $f$ | Sinal de $g$ | Quadro de sinais |
|---|---|---|
|  |  |  |



Os valores de $x$ que tornam o produto $(x + 1) \cdot (x - 1)$ maior ou igual a zero podem ser indicados pelo intervalo: $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Logo, o conjunto solução da inequação $x^2 - 1 \geqslant 0$ é

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

**R10.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\frac{2 - 5x}{x + 1} \leqslant -1$.

**▸ Resolução**

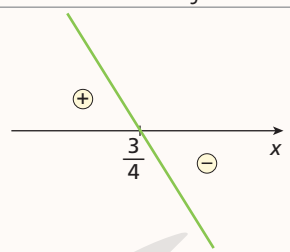
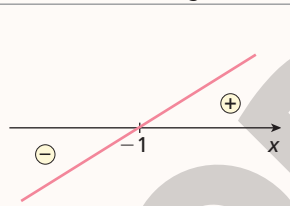
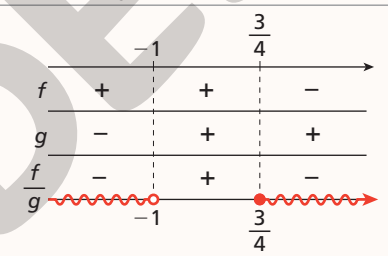
Essa inequação tem o segundo membro diferente de zero. Então, fazemos:

$$\frac{2 - 5x}{x + 1} \leqslant -1 \Rightarrow \frac{2 - 5x}{x + 1} + 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{-4x + 3}{x + 1} \leqslant 0$$

Seja $f(x) = -4x + 3$ e $g(x) = x + 1$. Para que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ seja negativo ou nulo, devemos ter $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) < 0$ ou, então, $f(x) \leqslant 0$ e $g(x) > 0$.

**Observação**

Preste atenção para não cometer o erro de estudar os sinais das funções $y = 2 - 5x$ e $y = x + 1$. O quadro de sinais só pode ser usado quando a inequação-quociente tem o segundo membro igual a zero.

| Sinal de $f$ | Sinal de $g$ | Quadro de sinais |
|---|---|---|
|  |  |  |



Observe que $-1$ não é solução da inequação, pois $g(x) \neq 0$.

Ou seja: $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Os valores de $x$ que tornam o quociente $\frac{-4x + 3}{x + 1}$ menor ou igual a zero podem ser indicados pelo intervalo: $]-\infty, -1[ \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$

Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant \frac{3}{4}\right\}$.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**27.** Resolva, em $\mathbb{R}$, cada inequação-produto e cada inequação-quociente.

a) $(x + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} + 3x\right) > 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$

b) $\frac{x + 7}{2 - x} < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$

c) $\frac{-1}{x + 2} + \frac{2x}{x + 2} \geqslant -2$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant -\frac{3}{4}\right\}$

**28.** (PUC) Quantos números inteiros e estritamente positivos satisfazem a sentença $\frac{1}{x - 20} \leqslant \frac{1}{12 - x}$?

a) Dezesseis.
b) Quinze.
c) Catorze.
d) Treze.
e) Menos de treze.

alternativa b

**29.** (Mackenzie-SP) Sendo $f(x) = x + 2$ e $g(x) = -x + 1$, a soma dos valores inteiros de $x$ tais que $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ é:

a) $-2$ b) $-3$ c) $0$ d) $3$ e) $2$

alternativa a

MODELA

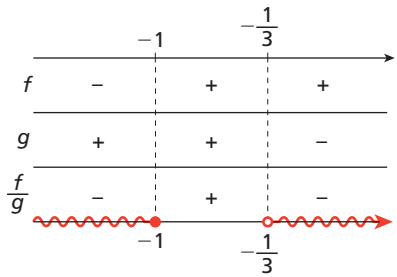
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**30. d)** Resposta possível: $\frac{x+1}{-3x-1} \leqslant 0$

Espera-se que os alunos percebam que há várias inequações-quociente cuja solução é a apresentada no quadro de sinais: basta que $f$ seja uma função afim crescente de zero igual a $-1$ e $g$ seja uma função afim decrescente de zero igual a $-\frac{1}{3}$.

**30.** Sabendo que $f$ e $g$ são funções afins, analise este quadro de sinais, usado para resolver uma inequação.




a) Qual é o zero da função $f$? E da função $g$? $-1; -\frac{1}{3}$

b) As funções $f$ e $g$ são crescentes ou decrescentes? $f$ é crescente e $g$ é decrescente.

c) De acordo com esse quadro de sinais, qual é a solução da inequação?

d) Escreva uma inequação cuja solução seja a resposta apresentada no quadro de sinais. Apresente para os colegas a inequação que você encontrou e analise as inequações encontradas por eles. Há somente uma opção de resposta?

**30. c)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

**Pensamento computacional**

**Decomposição**

Durante a realização dos exercícios propostos é necessário decompor o estudo das inequações produto e quociente para determinar a solução de cada uma delas. Ao realizar os exercícios dessa maneira, coloca-se em prática habilidades relacionadas a um dos pilares do *pensamento computacional*: a **decomposição**. Quando um problema é complexo, vale analisar se é possível decompô-lo em subproblemas ou etapas, de modo que a resolução de cada uma das partes, etapas ou subdivisões, faça com que o problema inicial também seja solucionado.

- Reflita e dê um exemplo em que outro tipo de situação a decomposição pode ser útil.

Respostas possíveis: Podemos decompor superfícies representadas por figuras geométricas planas quando não podemos calcular a área de maneira direta, decompondo a figura em outras cuja área pode ser mais facilmente calculada.

## 3.2 Inequações simultâneas

**Inequações simultâneas** são inequações apresentadas por duas desigualdades ou por meio de um sistema de inequações.

**Exemplos**

**a)** $\frac{1}{2} \leqslant 7x - 2 < 3x + \sqrt{5}$

**b)** $\begin{cases} 6x + (8 + x) > 9x - 0{,}3 \\ \sqrt{2}\,x - x \leqslant x + \frac{7}{5} \end{cases}$

Para resolver inequações desse tipo, devemos determinar a solução de cada inequação e fazer a intersecção das soluções.

### Exercícios resolvidos

**R11.** Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x - (3 + 2x) < 4 \\ 7x - x^2 \geqslant -x(x - 4) - 9 \end{cases}$$

▸ **Resolução**

Inicialmente, devemos resolver cada uma das inequações do sistema.

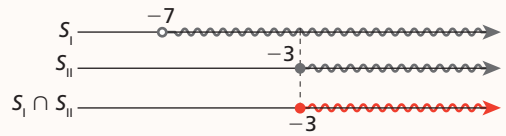
(I) $x - (3 + 2x) < 4 \Rightarrow x - 3 - 2x < 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x < 7 \Rightarrow x > -7$

Portanto, $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -7\}$.

(II) $7x - x^2 \geqslant -x(x - 4) - 9$
$7x - x^2 \geqslant -x^2 + 4x - 9$
$3x \geqslant -9$
$x \geqslant -3$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

Agora, faremos a intersecção das soluções de cada uma das inequações.




Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**R12.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $3 \leq 2x - 2 < x + 5$.

▸ **Resolução**

Inicialmente, devemos determinar a solução das inequações:

$3 \leq 2x - 2$ (I) e $2x - 2 < x + 5$ (II)

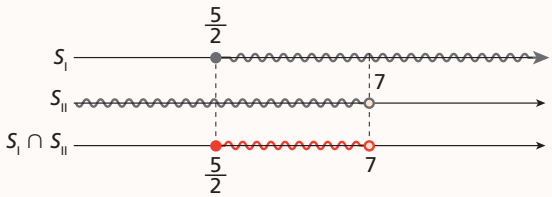
(I) $3 \leq 2x - 2 \Rightarrow 3 + 2 \leq 2x \Rightarrow 5 \leq 2x \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$

Portanto, $S_I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2}\right\}$.

(II) $2x - 2 < x + 5 \Rightarrow 2x - x < 5 + 2 \Rightarrow x < 7$

Portanto, $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$.

Agora, precisamos fazer a intersecção das soluções de cada uma das inequações.




ADILSON SECCO

Logo, o conjunto solução da inequação é

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leq x < 7\right\}$.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**31.** Determine a solução das inequações em $\mathbb{R}$.

a) $5 \leq 3x - 4 < x + 2$ $S = \varnothing$

b) $\frac{3x}{5} \leq \frac{5x + 2}{4} \leq \frac{-x + 1}{2}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leq x \leq 0\right\}$

c) $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 4x - 7 \leq x - 4 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$

d) $\begin{cases} 5x - 2 > 4 - x \\ 2(7 - x) \leq 5(2x + 4) \\ 2 - 3(4 + 2x) < 6 + 2(1 - 2x) \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

**32.** Uma empresa de planos de saúde está lançando duas novas modalidades de planos:

- Plano Azul: valor fixo anual de R$ 140,00 mais R$ 50,00 por consulta realizada no decorrer do ano. O usuário terá direito a até 20 consultas anuais.
- Plano Laranja: valor fixo anual de R$ 220,00 mais R$ 40,00 por consulta realizada no decorrer do ano. O usuário terá direito a até 60 consultas anuais.

a) Escreva uma lei matemática que represente o valor total pago por uma pessoa que usa o Plano Azul em função do número de consultas realizadas nesse período. $140 + 50x$

b) Refaça o item anterior considerando uma pessoa que utiliza o Plano Laranja. $220 + 40x$

c) Calcule a quantidade de consultas que devem ser realizadas no decorrer de um ano para que o valor total pago seja o mesmo para ambos os planos. 8 consultas

d) Considerando que o número anual de consultas efetuadas por uma pessoa possa ser expresso pela inequação $8 < x < 18$, em que $x$ é o número de consultas, identifique qual dos planos é mais vantajoso para essa pessoa. Plano Laranja

e) Se o número $x$ de consultas realizadas por uma pessoa em um ano pode ser representado pela inequação $4 < x < 7$, verifique qual dos planos é mais vantajoso nesse caso. Plano Azul

**33.** Um agricultor tem um terreno e duas opções: plantar soja, ou plantar feijão. O gasto com a plantação de soja será R$ 10.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, R$ 2,00. Já o gasto com a plantação de feijão será R$ 12.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, R$ 3,00.

a) Que lei de formação dá o valor $V_s(x)$ obtido na produção de soja em função do número $x$ de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação? $V_s(x) = 2x - 10.000$

b) Que lei de formação dá o valor $V_f(x)$ obtido na produção de feijão em função do número $x$ de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação? $V_f(x) = 3x - 12.000$

c) Para quantos quilogramas teremos $V_s(x) = V_f(x)$? 2.000 quilogramas

d) Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema:

$\begin{cases} V_s(x) > V_f(x) \\ V_s(x) < V_f(x) \end{cases}$ $S = \varnothing$

e) Se o agricultor pretende produzir 10.000 quilogramas, em qual das duas culturas (soja ou feijão) ele terá mais lucro? cultura de feijão

f) Que quantidade mínima, em quilograma, esse agricultor precisa produzir para que seja mais vantajoso plantar feijão? 2.001 quilogramas

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

## 3.3 Identificação do domínio de uma função por meio de inequações

Algumas funções reais não têm como domínio o conjunto $\mathbb{R}$. Pela natureza de suas leis, apresentam restrição de valores, tendo como domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$ (distinto de $\mathbb{R}$).

Para identificar o domínio de algumas dessas funções, podemos aplicar o estudo das inequações.

### Exercícios resolvidos

**R13.** Identificar o domínio da função dada por $y = \frac{1}{x + 1}$.

▸ **Resolução**

Como o denominador de uma fração não pode ser nulo, devemos ter:

$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

**R14.** Determinar o domínio da função $h$ dada por $h(x) = \sqrt{\frac{2x - 2}{x - 7}}$.

▸ **Resolução**

Como o denominador de expressões fracionárias não pode ser nulo e o radicando não pode ser negativo, devemos ter:

$$\underbrace{\frac{\overbrace{2x - 2}^{f(x)}}{\underbrace{x - 7}_{g(x)}}}_{} \geqslant 0 \text{ e } x - 7 \neq 0$$

Inicialmente, vamos resolver a inequação-quociente.

Para $f(x) = 0$, temos:

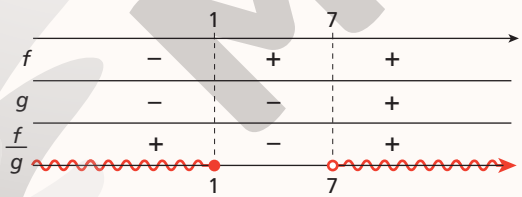
$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Como a função $f$ é crescente, concluímos que $f(x) > 0$ para $x > 1$ e $f(x) < 0$ para $x < 1$.

Para $g(x) = 0$, temos:

$x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

Como a função $g$ é crescente, concluímos que $g(x) > 0$ para $x > 7$ e $g(x) < 0$ para $x < 7$.




ADILSON SECCO

Para obter o domínio da função $h$, temos de excluir o valor de $x$ que anula o denominador, ou seja, excluímos o número 7.

Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x > 7\}$.

### Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

**34.** Determine o domínio das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $j(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$ $D(j) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

c) $h(x) = \frac{-2x + 3}{\sqrt{1 - x}}$

d) $g(x) = \frac{x}{x + 1}$ $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

e) $i(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + 1}}$ $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

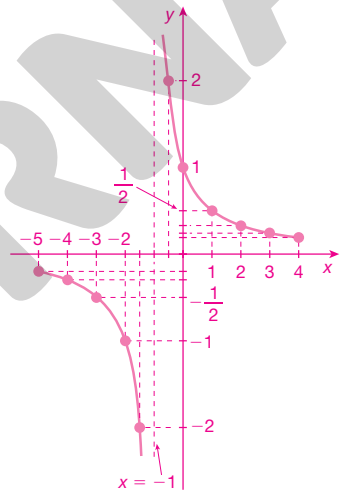
b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{2}\right\}$ c) $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

Espera-se que os alunos percebam que o gráfico não intercepta a reta $x = -1$ nem intercepta o eixo $x$.

**Reflita**

Investigue o gráfico da função dada por: $y = \frac{1}{x + 1}$

(*Dica*: ao esboçar o gráfico, considere o domínio da função e atribua valores para $x$.)




ADILSON SECCO

Espera-se que os alunos percebam que $x - 7$ tem de ser diferente de zero, mas que $2x - 2$ pode ser zero. Dessa maneira, $\frac{2x - 2}{x - 7}$ pode ser zero. Então, devemos considerar $\frac{2x - 2}{x - 7} \geqslant 0$ e $x - 7 \neq 0$.

**Reflita**

Por que, no exercício **R14**, não é possível dizer que o domínio pode ser obtido diretamente pela resolução da inequação $\frac{2x - 2}{x - 7} > 0$?

**Observação**

Caso o índice da raiz seja ímpar, não há restrições quanto ao sinal do radicando. Por exemplo, o domínio da função $f$ dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302** e **EM13MAT401** da BNCC.

## Aplicação

**1.** Dadas as funções abaixo, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, identifique as que são afins, coloque-as na forma $f(x) = ax + b$ e determine os números reais $a$ e $b$.

**a)** $y = 5(x - 1) - 4(x - 3)$ Não é função afim.

**b)** $y = \frac{1}{x}$ Não é função afim.

**c)** $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ $a = 1$ e $b = 7$

**d)** $f(x) = \frac{3 - x}{4}$ $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{3}{4}$

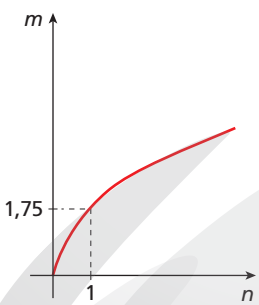
**2.** Se $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, $p = 10^8$ e $q = 10^{10}$, determine o valor de $\frac{f(p) - f(q)}{q - p}$. $-\frac{2}{3}$

**3.** Seja $f$ uma função afim definida por $f(x) = 4x - 5$. Determine os valores do domínio dessa função que produzem imagem no intervalo $[-3, 3]$. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$

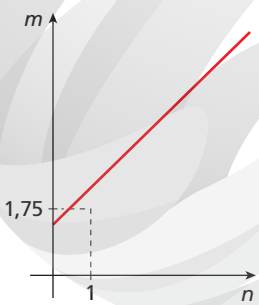
**4.** (Enem) As frutas que antes se compravam por dúzia, hoje em dia, podem ser compradas por quilograma, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço $m$ pago em reais pela compra de $n$ quilogramas desse produto é: alternativa e

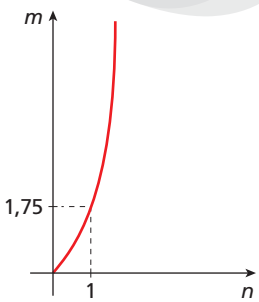
**a)**



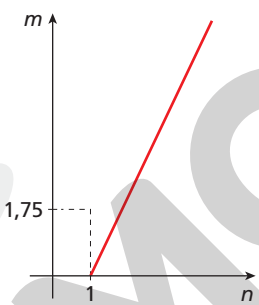

**b)**



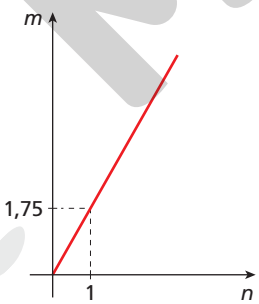

**c)**




**d)**




**e)**




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**5. b)** decrescente **c)** $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$; $(0, 3)$ **e)** $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

**5.** Dada a função $f$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 - 5x$, responda às perguntas.

**a)** Que tipo de curva representa graficamente essa função? reta oblíqua aos eixos $x$ e $y$

**b)** A função dada é crescente ou decrescente?

**c)** Qual é o ponto de intersecção do gráfico de $f$ com o eixo $x$? E com o eixo $y$?

**d)** Qual é o zero da função? $x = \frac{3}{5}$

**e)** Quais são o domínio e a imagem da função?

**f)** Qual é o ponto de intersecção do gráfico de $f$ com o da função $g(x) = 2x - 4$? $P(1, -2)$

**6.** Determine a lei de uma função polinomial do 1º grau cujo gráfico passe pelos pontos $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ e $\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$. $y = 3x + \frac{13}{3}$

**7.** Os pontos de intersecção das retas que representam as funções afins $f$, $g$ e $h$ determinam os vértices de um triângulo.

**a)** Quais são os vértices desse triângulo se $f(x) = -x + 3$, $g(x) = x - 3$ e $h(x) = 3$? $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(6, 3)$

**b)** Construa os gráficos dessas funções em um mesmo plano cartesiano. Ver resolução no Guia do professor.

**c)** Classifique as funções $f$, $g$ e $h$ em crescente, decrescente ou constante. $f$ é decrescente, $g$ é crescente e $h$ é constante.

**8.** O preço do ingresso de uma peça de teatro é R$ 50,00, e o custo da apresentação de uma sessão é R$ 5.000,00.

Supondo não haver ingressos promocionais, responda às perguntas.

**a)** Que expressão relaciona o faturamento por sessão dessa peça com o número de ingressos vendidos? $y = 50 \cdot x$

**b)** Qual deve ser o número mínimo de pagantes para que uma apresentação não acarrete prejuízo? 100 pagantes

**c)** Considerando quatro apresentações semanais, qual deve ser o número mínimo de frequentadores por semana para que não haja prejuízo? 400 frequentadores

**d)** Qual é o lucro máximo por sessão se o teatro tem 180 lugares? R$ 4.000,00

**9.** Determine a imagem da função $f$ dada por $f(x) = -2x + 3$, definida em $A = [-2, 4[$. Em seguida, construa seu gráfico. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 < y \leqslant 7\}$ Ver resolução no Guia do professor.

**10.** Faça um esboço dos gráficos das funções afins dadas em cada item, em um mesmo plano cartesiano. Em seguida, analise o que essas funções têm em comum.

Se você quiser, utilize um *software* de construção de gráficos. Ver resolução no Guia do professor.

**a)** $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = 3x - 1$ e $y_3 = 3x$

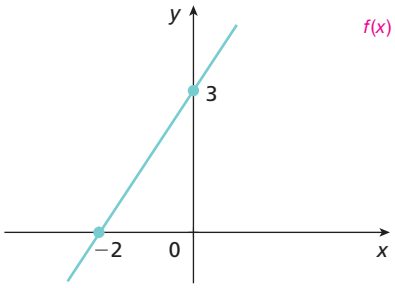
**b)** $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -x + 1$ e $y_3 = -2x + 1$

**c)** $y_1 = x + 2$, $y_2 = 2x + 4$ e $y_3 = -x - 2$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

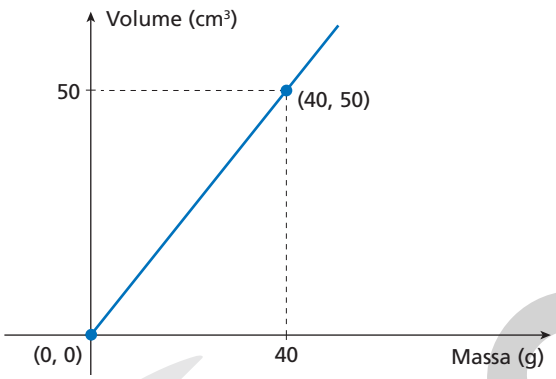
**11.** Determine a lei de formação da função cujo gráfico é:




$f(x) = \frac{3}{2}x + 3$

- O gráfico dessa função intercepta o gráfico da função afim dada por $g(x) = 2x$? Em caso afirmativo, quais são as coordenadas do ponto em que isso acontece? sim; no ponto $P(6, 12)$

**12.** (Vunesp) Apresentamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0 °C.

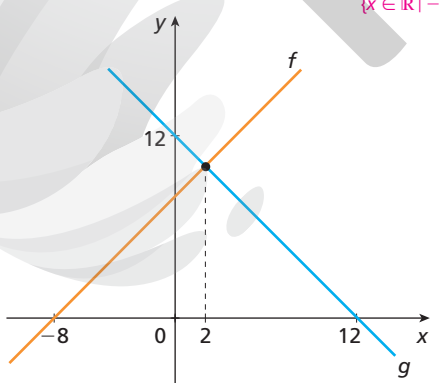



Com base nos dados do gráfico, determine:

**a)** a lei da função apresentada no gráfico. $v(m) = \frac{5}{4}m$

**b)** qual é a massa (em grama) de 30 cm³ de álcool. 24 g

**13.** Para que valores de $x$ as funções $f$ e $g$, representadas abaixo, são simultaneamente positivas e não nulas? $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 12\}$




**14.** Escreva o domínio das funções:

**a)** $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt[4]{x}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

**b)** $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{-2x + 3}}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < \frac{3}{2}\right\}$

**15.** (Enem) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade $q$ de produtos é dado por uma função, simbolizada por $CT$, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade $q$ também é uma função, simbolizada por $FT$. O lucro total ($LT$) obtido pela venda da quantidade $q$ de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$. Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo? alternativa d

**a)** 0
**b)** 1
**c)** 3
**d)** 4
**e)** 5

**16.** (Fuvest-SP) Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora de uso, R$ 3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R$ 320,00. Considere um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é: alternativa c

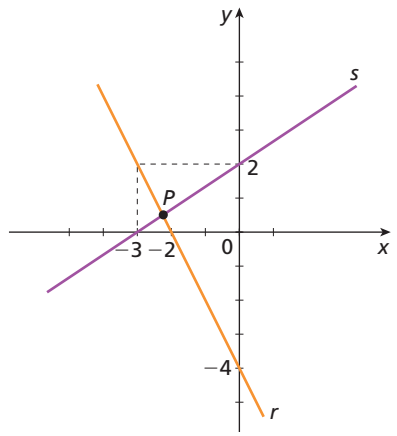
**a)** 25
**b)** 26
**c)** 27
**d)** 28
**e)** 29

**17.** $f$ é positiva para $x > 0$, se $p > -\frac{3}{2}$
$f$ é positiva para $x < 0$, se $p < -\frac{3}{2}$

## Aprofundamento

**17.** Dada a função $f(x) = (2p + 3)x$, quais são os valores de $p$ para que $f(x)$ seja positiva?

**18.** Determine as coordenadas do ponto P. $P\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$




**19.** (Mackenzie-SP) Os gráficos de $y = x - 1$ e $y = 2$ definem com os eixos uma região de área: alternativa c

**a)** 6
**b)** $\frac{5}{2}$
**c)** 4
**d)** 3
**e)** $\frac{7}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

# Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** A sentença ▬ é a lei de uma função afim. alternativa b

**a)** $f(x) = 1 - x^2$ **c)** $f(x) = \sqrt{x} + 3$

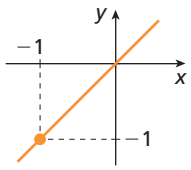
**b)** $f(x) = -5 + x$ **d)** $f(x) = x^3$

**2.** O valor a ser pago por uma mercadoria de valor $m$, após um desconto de 15%, pode ser dado por: alternativa b

**a)** $f(m) = m - 0{,}15$ **c)** $f(m) = -0{,}15m$

**b)** $f(m) = 0{,}85m$ **d)** $f(m) = 1{,}15m$

**3.** O gráfico abaixo não representa uma: alternativa a




**a)** função constante.

**b)** função identidade.

**c)** função polinomial do 1º grau.

**d)** função linear.

**4.** Considere as funções afins $f(x) = x - 1$ e $g(x) = -1$. As retas correspondentes a essas funções: alternativa c

**a)** são paralelas.

**b)** passam pela origem.

**c)** são concorrentes.

**d)** são paralelas ao eixo $x$.

**5.** A transportadora Vaptvupt cobra R$ 10,00 mais R$ 1,00 por quilômetro rodado para fazer uma entrega. Já a transportadora Ligeirinho cobra R$ 0,75 por quilômetro rodado e uma taxa fixa de R$ 15,00. Se $x$ é o número de quilômetros rodados, então podemos dizer que a Vaptvupt cobra menos que a Ligeirinho no intervalo: alternativa d

**a)** $15 \leqslant x < 25$ **c)** $x > 20$

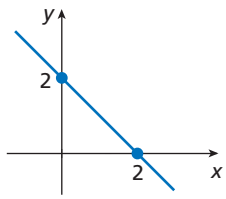
**b)** $x \leqslant 15$ **d)** $x < 20$

**6.** O zero da função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$ e as coordenadas do ponto em que o gráfico da função intercepta o eixo $y$ são, respectivamente: alternativa a

**a)** $-\frac{b}{a}$ e $(0, b)$ **c)** $-\frac{b}{a}$ e $(a, 0)$

**b)** $b$ e $(a, 0)$ **d)** $a$ e $(0, b)$

**7.** Os valores de $x$ para os quais a função afim, representada pelo gráfico abaixo, é positiva são: alternativa b




**a)** $x > 2$ **b)** $x < 2$ **c)** $x > -2$ **d)** $x < -2$

**8.** A solução da inequação $\frac{x-1}{x+2} \leqslant 2$ é: alternativa c

**a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$

**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x > -2\}$

**d)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } x \neq -2\}$

**9.** $S = \varnothing$ é solução da inequação: alternativa d

**a)** $(x + 1) \cdot (x - 1) > 0$ **c)** $x + 2 > x + 1 > x$

**b)** $\frac{(x+1)}{(x-1)} < 0$ **d)** $\begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

**10.** O domínio da função $f$, dada por $f(x) = \frac{1}{x+2}$, é ▬, e da função $g$, de lei $g(x) = \sqrt{x-3}$, é ▬. alternativa a

**a)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

**b)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$; $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

**c)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$; $D(g) = \varnothing$

**d)** $D(f) = \varnothing$; $D(g) = \{3\}$

## Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

| | Número da questão | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Objetivos do capítulo** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Identificar uma função afim. | X | X | X | | | | | | | |
| Resolver situações-problema que envolvam funções afins. | | X | | | X | | | | | |
| Analisar o gráfico de uma função afim. | | | X | X | | X | X | | | |
| Resolver inequações que envolvam funções afins. | | | | | X | | | X | X | X |
| **Páginas do livro referentes ao conceito** | 14 a 17 | 14 a 17 | 14 a 23 | 18 a 23 | 30 a 33 | 25 e 26 | 27 e 28 | 30 a 33 | 30 a 34 | 35 |

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

CAPÍTULO

2

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT302**, **EM13MAT315**, **EM13MAT402**, **EM13MAT404**, **EM13MAT502** e **EM13MAT503**.

As competências específicas **3** e **4** da BNCC são favorecidas ao longo deste capítulo, uma vez que os alunos deverão utilizar diferentes registros de representação e estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, modelar ou resolver problemas em diversos contextos.

# Função quadrática

HIPÓLITO PEREIRA/AGÊNCIA O GLOBO

## 1 Função quadrática

Esse capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** da BNCC, já que os alunos construirão modelos empregando as funções polinomiais de 2º grau para resolver problemas em contextos diversos.

O voleibol, esporte olímpico presente em todos os continentes, foi criado por William George Morgan em 1895 e chegou ao Brasil cerca de 20 anos depois, tendo sido jogado pela 1ª vez em Pernambuco (1915) ou em São Paulo (1916).

O Brasil tem, no feminino e no masculino, um histórico de vitórias significativas no cenário internacional.

Credita-se ao jogador Bernard Rajzman da seleção brasileira, nos anos 1980, a criação do saque "Jornada nas Estrelas" – alusão à série *Star Trek* – que consistia em sacar a bola para o alto, com a parte externa da mão, elevando a bola a mais de 25 metros.

Após a carreira de glória na quadra, Bernard continuou a participar do esporte ocupando cargos públicos e tornou-se também membro efetivo do Comitê Olímpico Brasileiro (COB) e do Comitê Olímpico Internacional (COI) desde 2013. Em 2005, foi o primeiro brasileiro indicado para integrar o Hall da Fama do vôlei mundial nos Estados Unidos. Hoje, idoso e valorizado, tem o respeito e o reconhecimento internacional.

A trajetória parabólica da bola pode ser analisada como a composição de dois movimentos: um vertical e outro horizontal. Considerando apenas a componente vertical do movimento descendente da bola em queda livre, a distância $S$ percorrida, em metro, depois de um intervalo de tempo $t$ (medido em segundo a partir do zero no início da descida), pode ser modelada pela função $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

A constante $g$ corresponde à aceleração da gravidade, que, nas proximidades da superfície da Terra, vale aproximadamente 9,8 m/s$^2$. Assim, $S(t) = 4{,}9t^2$.

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função quadrática.

**Objetivos do capítulo**

- Identificar uma função quadrática.
- Resolver problemas que envolvam funções quadráticas.
- Analisar o gráfico de uma função quadrática.
- Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.

Na final contra a União Soviética (1982), Bernard fez oito pontos com o saque Jornada nas Estrelas. Foto de Hipólito Pereira no Maracanãzinho, Rio de Janeiro (RJ).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MANUAL

**Observação**

Os números reais $a$, $b$ e $c$ são os **coeficientes** da função quadrática.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau** quando existem números reais $a$, $b$ e $c$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

## Exemplos

**a)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = 2x^2 + 3x - 15$, em que $a = 2$, $b = 3$ e $c = -15$.

**b)** $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de lei $g(x) = -\frac{x^2}{4} + 5$, em que $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ e $c = 5$.

**c)** $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $h(x) = -x + \sqrt{2}x^2$, em que $a = \sqrt{2}$, $b = -1$ e $c = 0$.

**d)** $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de lei $i(x) = -\frac{3}{2}x^2$, em que $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$ e $c = 0$.

Observe que as funções dadas pelas leis abaixo não são quadráticas, pois nenhuma dessas funções pode ser expressa por um polinômio do 2º grau.

- $f(x) = 10x$
- $g(x) = \frac{1}{x^2}$
- $h(x) = \sqrt{x}$
- $i(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$

A situação apresentada na abertura desse capítulo contribui tanto com a habilidade **EM13CNT204** de Ciências na Natureza e suas Tecnologias, quanto com o tema contemporâneo **processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso** e, por ser um esporte cultuado pelos jovens, está inserida na cultura juvenil.

Há várias situações para as quais é possível criar um modelo matemático, e muitas delas podem ser representadas por funções quadráticas.

No saque Jornada nas Estrelas, por exemplo, qual seria a distância vertical percorrida pela bola, na descida em queda livre, se o tempo fosse igual a 1 s? E se o tempo fosse igual a 2 s?

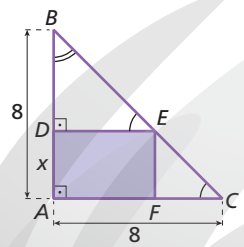
Considere a função $S(t) = 4{,}9t^2$.

- Para $t = 1$, temos: $S(1) = 4{,}9 \cdot 1^2 = 4{,}9$
  Após 1 s de queda livre, a bola estaria a 4,9 m abaixo do ponto mais alto de sua trajetória.
- Para $t = 2$, temos: $S(2) = 4{,}9 \cdot 2^2 = 19{,}6$
  Após 2 s de queda livre, a bola estaria a 19,6 m abaixo do ponto mais alto de sua trajetória.

Então, para o tempo de queda livre de 2 s, a bola estaria mais próxima do chão da quadra se comparada à distância com o tempo de 1 s e, portanto, mais próxima de marcar um ponto no voleibol.

Agora, observe uma situação de Geometria.

Um triângulo retângulo isósceles $ABC$ tem catetos que medem 8 unidades de comprimento. Escolhe-se um ponto $E$ qualquer sobre o segmento $\overline{BC}$ e constrói-se um retângulo $ADEF$, como mostra a figura ao lado.



ADILSON SECCO

É possível posicionar o ponto $E$ em $\overline{BC}$ para que a área do retângulo $ADEF$ seja 16 unidades de área (u.a.)?

Uma das formas de resolver esse problema é descrever a situação algebricamente. Vamos expressar a área do retângulo $ADEF$ em função das medidas de seus lados.

Considerando $x$ a medida do segmento $\overline{AD}$, o segmento $\overline{DB}$ mede $8 - x$.

Os triângulos $DBE$ e $ABC$ são semelhantes, pois têm os ângulos correspondentes congruentes. Dessa forma, temos dois triângulos retângulos isósceles e, portanto, o segmento $\overline{DE}$ também mede $8 - x$.

Assim, a área $A$ do retângulo $ADEF$ em função de $x$ pode ser expressa por:

$A(x) = x \cdot (8 - x) = 8x - x^2$

Para verificar se o retângulo $ADEF$ pode ter área 16 u.a., basta substituir $A(x)$ por 16 na lei e determinar o valor de $x$ correspondente. Veja:

$16 = 8x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 8x - 16 = 0$

A situação está, agora, representada por uma equação e podemos resolvê-la por meio da fatoração do trinômio quadrado perfeito do 1º termo.

$-x^2 + 8x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 4)^2 = 0 \Rightarrow (x - 4) \cdot (x - 4) = 0$

Então:

$(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 4$

Assim, concluímos que o ponto $E$ deve ser posicionado, em $\overline{BC}$, a 4 unidades de $\overline{AB}$ e a 4 unidades de $\overline{AC}$, obtendo um retângulo $ADEF$ com área igual a 16 u.a.

**Recorde**

- A forma fatorada de $a^2 + 2ab + b^2$ é $(a + b)^2$.
- A forma fatorada de $a^2 - 2ab + b^2$ é $(a - b)^2$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Vale lembrar que nem sempre é fácil resolver uma equação por meio da fatoração; então, outra maneira de resolver a equação é utilizando a fórmula resolutiva apresentada a seguir.

## *Fórmula de resolução de uma equação do 2º grau*

A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, também conhecida como fórmula de Bhaskara, é um modo eficiente para resolver qualquer equação do 2º grau. Para deduzir essa fórmula, considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de coeficientes reais **a**, **b** e **c**, sendo $a \neq 0$.

**1º)** Inicialmente, adicionamos $-c$ a ambos os membros da equação:

$ax^2 + bx + c - c = 0 - c$

$ax^2 + bx = -c$

**2º)** Multiplicamos os dois membros por 4**a**:

$(ax^2 + bx) \cdot 4a = -c \cdot 4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

**3º)** Adicionamos $\mathbf{b}^2$ a ambos os membros:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

**4º)** A seguir, fatoramos o primeiro membro da equação:

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

**5º)** Então, chegamos a conclusão que:

$2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ ou $2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$ $\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

**6º)** Isolando $x$ na equação anterior:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada **discriminante** da equação e é representada pela letra grega $\Delta$ (delta).

Assim, obtemos a seguinte fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac$$

Quanto às raízes, temos:

- Se $\Delta > 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ terá duas raízes reais e distintas: $x_1 \neq x_2$.
- Se $\Delta = 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ terá duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2$.
- Se $\Delta < 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não terá raiz real.

### Exemplos

**a)** $2x^2 - 11x + 5 = 0$

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 81$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_1 = 5 \text{ ou } x_2 = \frac{1}{2}$$

A equação apresenta duas raízes reais e distintas.

**b)** $2x^2 + 4x + 4 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -16$

A equação não apresenta raízes reais.

**c)** $x^2 - 20x + 100 = 0$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100 = 0$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = x_2 = 10$$

A equação apresenta duas raízes reais e iguais.

- $x^2 - 8x + 16 = 0$

  $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$

  $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

- $m = 0$

**Explore**

- Resolva a equação $x^2 - 8x + 16 = 0$ usando a fórmula resolutiva.
- Se a equação $x^2 - 2x + (m + 1) = 0$ apresenta duas raízes reais iguais, qual é o valor de $m$?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No boxe **Explore**, os estudantes devem identificar e refletir sobre as informações relevantes à resolução de um problema, discutindo quando há excesso ou falta de informação. Essa reflexão pode contribuir para o desenvolvimento do pilar **abstração** do *pensamento computacional*.

## Exercícios resolvidos

**R1.** Dada a função quadrática de lei $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x^2$, calcular:

a) $g\left(\frac{3}{4}\right)$

b) $x$, para $g(x) = \frac{1}{2}$

▸ **Resolução**

a) $g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = \frac{21}{16}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{3} + x^2 = 0$

$x\left(\frac{1}{3} + x\right) = 0$

$x = 0$ ou $\frac{1}{3} + x = 0$

$x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$

**R2.** Seja $f$ uma função quadrática em que $f(0) = 2$, $f(2) = 12$ e $f(-1) = 6$. Determinar a lei de formação dessa função.

▸ **Resolução**

Sabe-se que a lei de uma função quadrática é $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a$, $b$ e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dessa forma:

- Se $f(0) = 2$, temos:
  $2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 2$ (I)
- Se $f(2) = 12$, temos:
  $12 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = 12$ (II)
- Se $f(-1) = 6$, temos:
  $6 = a(-1)^2 + b(-1) + c \Rightarrow a - b + c = 6$ (III)

Assim, obtemos um sistema de três equações com três incógnitas:

$$\begin{cases} c = 2 \text{ (I)} \\ 4a + 2b + c = 12 \text{ (II)} \\ a - b + c = 6 \text{ (III)} \end{cases}$$

Pela equação (I), temos $c = 2$.

Para determinar os valores de $a$ e $b$, basta resolver o sistema formado pelas equações (II) e (III), substituindo $c$ por 2:

$$\begin{cases} 4a + 2b + 2 = 12 \\ a - b + 2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da adição:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

Multiplicamos ambos os membros por 2.

$$\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ 2a - 2b = 8 \end{cases}$$

$6a + 0 = 18 \Rightarrow a = 3$

Substituindo $a$ por 3 em $a - b = 4$, obtemos:

$3 - b = 4 \Rightarrow -b = 4 - 3 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$

Para escrever a lei de formação da função quadrática, substituímos os valores encontrados ($a = 3$, $b = -1$ e $c = 2$) na lei $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Assim, a lei de formação dessa função é $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

**Observação**

O sistema de equações $\begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$ poderia ser resolvido também pelo método da substituição.

**R3.** Para quais valores reais de $p$ a função dada por $f(x) = [(p - 3)(p + 5)]x^2 - 4x + 8$ é quadrática?

▸ **Resolução**

Para que a função seja quadrática, de acordo com a definição, é necessário que o coeficiente do termo $x^2$ seja não nulo.

Dessa forma, é preciso que $(p - 3)(p + 5) \neq 0$.

Observe que $(p - 3)(p + 5)$ será diferente de zero quando ocorrerem simultaneamente as seguintes condições:

- $p - 3 \neq 0 \Rightarrow p \neq 3$
- $p + 5 \neq 0 \Rightarrow p \neq -5$

Assim, a função dada por $f(x) = [(p - 3)(p + 5)] \cdot x^2 - 4x + 8$ é quadrática para $p \neq 3$ e $p \neq -5$, com $p \in \mathbb{R}$.

Espera-se que os alunos percebam que, se o coeficiente do termo $x^2$ for igual a zero, ou seja, se $f(x) = 0x^2 + bx + c$, então $f$ será uma função afim, cuja lei pode ser representada por $f(x) = bx + c$.

**Reflita**

Por que na definição de função quadrática o coeficiente do termo $x^2$ tem de ser diferente de zero?

**Explore**

Discuta com um colega as suposições a seguir.
O que aconteceria se, no exercício resolvido **R2**:
**a)** faltasse uma das informações $f(0) = 2$, $f(2) = 12$ e $f(-1) = 6$?
**b)** houvesse mais a informação: $f(1) = 4$?
**c)** houvesse mais a informação: $f(1) = 5$?

**a)** A lei da função quadrática ficaria indeterminada, pois teríamos um sistema, em qualquer das três situações, de três equações e apenas duas incógnitas.

**b)** A lei da função quadrática ficaria a mesma $f(x) = 3x^2 - x + 2$, pois $f(1) = 4$.
**c)** Não existiria a função, pois para $x = 1$ haveria mais de uma imagem.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Das leis de funções em $\mathbb{R}$ abaixo, identifique quais são leis de funções quadráticas e escreva o valor dos coeficientes $a$, $b$ e $c$.

a) $g(x) = x^2 - x$ $a = 1, b = -1$ e $c = 0$

b) $h(x) = x^2 + \sqrt{7}$ $a = 1, b = 0$ e $c = \sqrt{7}$

c) $i(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ Não é lei de uma função quadrática.

d) $m(x) = (x - 20)^3$ Não é lei de uma função quadrática.

**2.** Dada a função $f$, tal que $f(x) = -x^2 + 5x + 6$, calcule, quando possível:

a) $f(-1)$ 0

b) $f(\sqrt{2})$ $4 + 5\sqrt{2}$

c) $f\left(-\frac{4}{5}\right)$ $\frac{34}{25}$

d) $x$, para $f(x) = 0$ $x = -1$ ou $x = 6$

e) $x$, para $f(x) = \frac{49}{4}$ $\frac{5}{2}$

f) $x$, para $f(x) = 20$ Não existe $x$ real que satisfaça $f(x) = 20$.

- Analisando esses valores, é possível determinar em quais intervalos a função é crescente ou decrescente? Ver resolução no Guia do professor.
- Em sua opinião, haveria uma forma de representar essa função que facilitasse sua análise? resposta pessoal

**3.** Sabendo que $f$ é uma função quadrática tal que $f(0) = -4$, $f(3) = 8$ e $f(-2) = 4$, calcule o valor de $f(-3)$. $\frac{64}{5}$

**4.** Que valores reais de $p$ tornam as funções $f$ e $g$ quadráticas?

a) $f(x) = (2p - 3)x^2 + 7xp + 2$ $p \neq \frac{3}{2}$

b) $g(x) = [(3p + 5)(p + 7)]x^2 + 3x + 11$ $p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

**5.** Um grupo de estudo formou uma lista de discussão pela internet. O combinado foi que, depois de cada aula, os integrantes trocariam *e-mails* com as conclusões individuais sobre a aula e os mandariam para todos os integrantes da lista. Todos cumpriram o combinado.

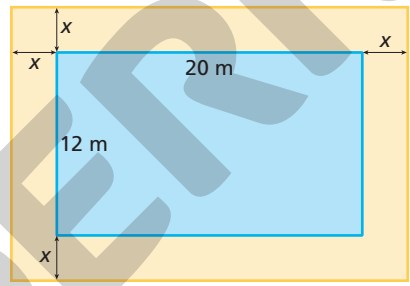
a) Se o grupo fosse formado por 2 pessoas, quantos *e-mails* seriam enviados após uma aula? E se o grupo fosse formado por 3 pessoas, quantos *e-mails* seriam enviados? E se fossem 4 pessoas? E se fossem 10? 2; 6; 12; 90

b) Construa um quadro com os resultados obtidos no item **a** e mostre como você calculou o número de *e-mails* para cada número de pessoas. Ver resolução no Guia do professor.

c) Encontre a expressão que determina o número de *e-mails* em função do número de pessoas do grupo. Sendo $n$ o número de pessoas, o número de *e-mails* é $n(n - 1)$.

d) Calcule o número de integrantes do grupo sabendo que foram enviados 132 *e-mails* após uma aula. 12 integrantes

**6.** Uma piscina retangular foi planejada conforme a figura abaixo.




A área $A$ do piso em volta dessa piscina depende da medida $x$ escolhida. Faça o que se pede.

a) Qual é a lei de formação da função que expressa a área desse piso em função de $x$? $A(x) = 4x^2 + 64x$

b) Calcule a área $A$, em metro quadrado, para $x$ igual a 3 m. $A(x) = 228$ m²

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT402** e **EM13MAT502** da BNCC, na medida em que os alunos vão estudar como traçar gráficos de funções quadráticas a partir de suas representações algébricas, distinguindo casos nos quais uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra.

# 2 Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada **parábola**.

Quando representam uma função quadrática, as parábolas podem ter a abertura (**concavidade**) voltada para cima ou para baixo.



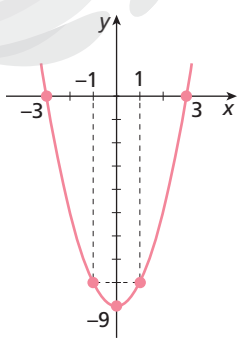
BRILLENSTIMMER/SHUTTERSTOCK

Nem toda curva é uma parábola. Na foto, que mostra uma corrente de metal tensionada entre dois postes, a curva que a corrente descreve é denominada **catenária**.

### Exemplos

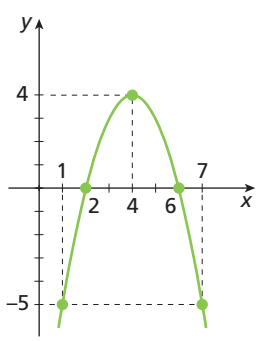
**a)** $f(x) = x^2 - 9$ $(a > 0)$

| $x$ | $y = f(x)$ |
|---|---|
| −3 | 0 |
| −1 | −8 |
| 0 | −9 |
| 1 | −8 |
| 3 | 0 |




**b)** $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ $(a < 0)$

| $x$ | $y = g(x)$ |
|---|---|
| 1 | −5 |
| 2 | 0 |
| 4 | 4 |
| 6 | 0 |
| 7 | −5 |




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Na prática, observamos o sinal do coeficiente $a$ da função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ para determinar o sentido da concavidade da parábola. Assim:

- Se $a > 0$, como no exemplo **a**, a parábola tem a concavidade voltada para **cima**.
- Se $a < 0$, como no exemplo **b**, a parábola tem a concavidade voltada para **baixo**.

**Observação**

Mais adiante, estudaremos cada um desses elementos, pois, com base neles, é possível construir o esboço do gráfico e analisar a função quadrática.

## 2.1 Elementos da parábola

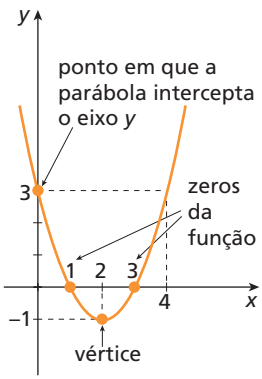
Em situações práticas, é útil identificar os seguintes elementos de uma parábola:

- o ponto em que ela intercepta o eixo $y$;
- os zeros da função que ela representa;
- o vértice.

### Exemplos

**a)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$

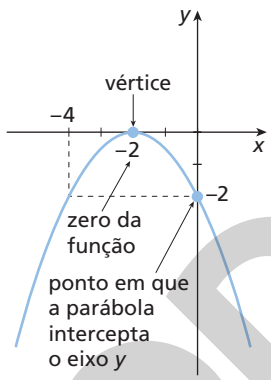
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 0 | −1 | 0 | 3 |




- (0, 3) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$.
- 1 e 3 são os zeros da função.
- O ponto (2, −1) é o vértice.

**b)** $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$

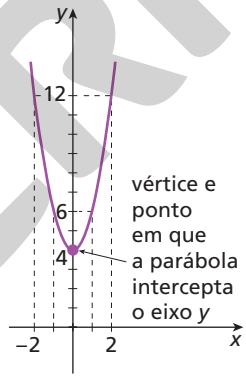
| $x$ | 0 | −2 | −4 |
|---|---|---|---|
| $h(x)$ | −2 | 0 | −2 |




- (0, −2) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$.
- −2 é o zero da função.
- O ponto (−2, 0) é o vértice.

**c)** $j(x) = 2x^2 + 4$

| $x$ | 0 | 1 | −1 | 2 | −2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $j(x)$ | 4 | 6 | 6 | 12 | 12 |




- (0, 4) é o ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$.
- Não há zeros da função.
- O ponto (0, 4) é o vértice.

### Exercício resolvido

**R4.** Seja $f$ a função quadrática definida por $f(x) = (m - 3)x^2 + 2x - m$.

**a)** Analisar, em função de $m$, a concavidade da parábola que representa $f$.

**b)** Verificar se existe algum valor de $m$ que faça o gráfico da função passar pelo ponto (0, −3).

▸ **Resolução**

**a)** A concavidade da parábola depende do sinal do coeficiente $a$ da função.

- Para a parábola ter a concavidade voltada para cima, o coeficiente de $x^2$ deve ser positivo:
  $m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3$
- Para a parábola ter a concavidade voltada para baixo, o coeficiente de $x^2$ deve ser negativo:
  $m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$

**b)** Substituindo as coordenadas do ponto (0, −3) na lei da função $f$ dada, temos:
$-3 = (m - 3) \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - m \Rightarrow m = 3$

Mas, se $m = 3$, a função $f$ não é quadrática, pois: $a = 3 - 3 = 0$

Portanto, não existe valor real para $m$ tal que o gráfico da função $f$ passe pelo ponto (0, −3).

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**9. a)** • se $k > 0$, a concavidade é voltada para cima;
• se $k < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

**b)** • se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
• se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**7.** Atribua valores para $x$ e calcule a imagem correspondente. Em seguida, construa a parábola de cada função.

**a)** $f(x) = x^2 - 6x + 5$ **d)** $i(x) = -x^2 + 4x - 4$

**b)** $g(x) = -x^2 + 6x - 5$ **e)** $j(x) = x^2 + 2x + 2$

**c)** $h(x) = x^2 + 4x + 4$ **f)** $k(x) = -x^2 - 2x - 2$

• Agora, verifique em cada parábola se a concavidade está voltada para cima ou para baixo e determine o número de zeros de cada função.

Ver resolução no Guia do professor.

**8.** Analise a concavidade de cada parábola, conhecendo algumas características da função.

**a)** Os zeros da função são $-20$ e $-10$, e o vértice da parábola é $(-15, -10)$. concavidade voltada para cima

**b)** A função não tem zeros reais, e a intersecção do gráfico com o eixo $y$ ocorre em $(0, -4)$. concavidade voltada para baixo

**9.** Analise, em função de $k$, a concavidade das parábolas que representam as funções quadráticas cujas leis são dadas por:

**a)** $f(x) = kx^2 - 2x + 10$ **b)** $f(x) = \left(\frac{k-5}{k+1}\right)x^2 - 20$

**10.** Considere uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e alguns valores assumidos por essa função, expressos na tabela a seguir.

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-16$ | $-9$ | $-4$ | $-1$ | $0$ | $-1$ | $-4$ | $-9$ | $-16$ |

**a)** Analise cada valor de $x$ e o valor correspondente de $g(x)$. Você percebe alguma relação entre esses valores? Você saberia expressar essa relação por meio de uma lei? respostas pessoais

**b)** Usando um *software* de construção de gráficos, represente cada par da tabela por um ponto no plano cartesiano. Como esses pontos se dispõem em relação ao eixo das ordenadas? Você percebe algum padrão na disposição desses pontos?

Ver resolução no Guia do Professor.

**c)** Você acredita que existe uma parábola que passa por esses pontos? Em caso afirmativo, qual seria o vértice e como seria a concavidade dessa parábola? Espera-se que os alunos percebam que sim. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para baixo.

**d)** Considerando os valores da tabela, a função $g$ poderia ser do 2º grau expressa por uma lei do tipo $g(x) = ax^2$. Encontre a lei da função $g$ nesse caso. $g(x) = -x^2$

**e)** No *software* de construção de gráficos, no mesmo plano cartesiano que você representou os pontos do item **b**, trace agora o gráfico da função $g$ cuja lei você determinou no item **d**. Comprove se o gráfico passa pelos pontos, ou seja, se a lei determinada realmente pode ser a lei da função $g$, cujos valores estão expressos na tabela.

Ver resolução no Guia do Professor.

**11.** Resolva novamente os itens do exercício **10** considerando cada uma das tabelas a seguir.

Ver resolução no Guia do Professor.

I)

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| $-3$ | $18$ |
| $-\frac{5}{2}$ | $\frac{25}{2}$ |
| $-2$ | $8$ |
| $-1$ | $2$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $0$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $1$ | $2$ |
| $2$ | $8$ |
| $\frac{5}{2}$ | $\frac{25}{2}$ |
| $3$ | $18$ |

II)

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| $-4$ | $8$ |
| $-3$ | $\frac{9}{2}$ |
| $-2$ | $2$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $2$ | $2$ |
| $3$ | $8$ |
| $3$ | $\frac{9}{2}$ |
| $4$ | $8$ |

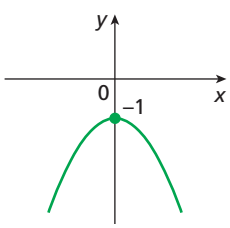
## Ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$

Como vimos, o ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$ é um dos elementos importantes para seu estudo.

Considere a função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$. As coordenadas do ponto em que a parábola correspondente intercepta o eixo $y$ são $(0, c)$.

### Exemplos

**a)** $f(x) = -x^2 - 1$



ADILSON SECCO

• A parábola intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, -1)$.
• A ordenada $-1$ desse ponto é o coeficiente $c$ da função $f$.

**Reflita**

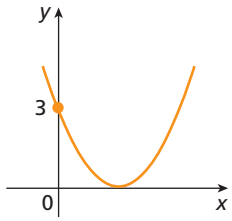
Existe alguma função quadrática cujo gráfico não intercepte o eixo $y$? Explique sua resposta.

Não. Como o domínio de uma função quadrática é $\mathbb{R}$, o gráfico correspondente a essa função sempre intercepta o eixo $y$, pois o elemento 0 (abscissa do ponto em que o gráfico intercepta o eixo $y$) pertence a $\mathbb{R}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PODERIA

**b)** $g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$




- A parábola intercepta o eixo *y* no ponto (0, 3).
- A ordenada 3 desse ponto é o coeficiente *c* da função *g*.

**Observação**

A parábola pode interceptar o eixo *x* em:
- dois pontos (se $\Delta > 0$);
- um único ponto (se $\Delta = 0$);
- nenhum ponto (se $\Delta < 0$).

## Zeros da função

Os zeros da função também são valores importantes para a análise da parábola.

Os zeros de uma função *f* são os números reais *x* para os quais $f(x) = 0$, ou seja, os zeros da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes reais da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Para determinar essas raízes, podemos utilizar a fórmula:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$

No gráfico, os zeros de uma função quadrática são as abscissas dos pontos em que a parábola intercepta o eixo *x*.

### Exemplos

**a)** Vamos verificar se a função *f*, dada pela lei $f(x) = x^2 - 4x + 3$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo *x*.

Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

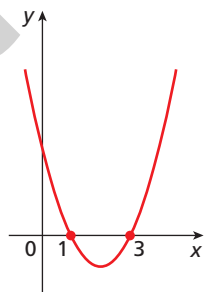
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = 3$ ou $x = 1$

Assim, os zeros da função são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo *x* em dois pontos: (1, 0) e (3, 0)




**b)** Vamos verificar se a função *f*, cuja lei é $f(x) = x^2 - 4x + 4$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo *x*.

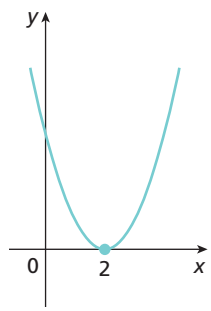
Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$ (zero real duplo da função)

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo *x* em um único ponto: (2, 0)




**Observação**

Quando a parábola intercepta o eixo *x* em um único ponto, dizemos que ela **tangencia** o eixo *x*.

**c)** Vamos verificar se a função *f*, com $f(x) = -x^2 + 4x - 5$, tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo *x*.

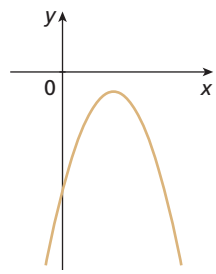
Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$-x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 - 20 = -4$

Como $\Delta < 0$, a equação $-x^2 + 4x - 5 = 0$ não tem raízes reais; portanto, a função *f* não tem zeros reais.

Logo, o gráfico da função não intercepta o eixo *x*.




Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

## Pensamento computacional

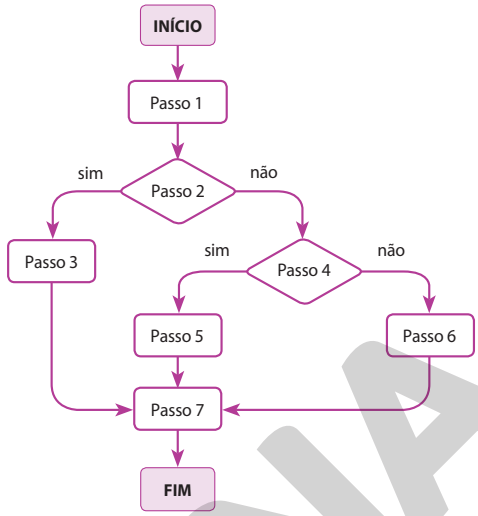
Esse boxe favorece o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, pois os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

### Algoritmo

O gráfico de uma função quadrática pode interceptar o eixo das abcissas em:

- dois pontos, se $\Delta > 0$;
- um único ponto, se $\Delta = 0$;
- nenhum ponto, se $\Delta < 0$.

Podemos escrever um algoritmo de modo que, dado um valor de $\Delta$, obtemos como resposta o número de pontos em que o eixo das abcissas é interceptado. Leia o algoritmo a seguir e observe o fluxograma que o representa.



NELSON MATSUDA

**Passo 1**. Seja $\Delta$ um número real, obtido em função dos coeficientes de uma função quadrática.

**Passo 2**. Se $\Delta = 0$, vá para o **passo 3**. Se não, vá para o **passo 4**.

**Passo 3**. Como $\Delta = 0$, guarde como resposta que a parábola intercepta o eixo $x$ em um único ponto. Vá para o **passo 7**.

**Passo 4**. Se $\Delta > 0$, vá para o **passo 5**. Se não, vá para o **passo 6**.

**Passo 5**. Como $\Delta > 0$, guarde como resposta que a parábola intercepta o eixo $x$ em dois pontos. Vá para o **passo 7**.

**Passo 6**. O valor de $\Delta$ só pode ser menor que 0, guarde como resposta que a parábola não intercepta o eixo $x$. Então vá para o **passo 7**.

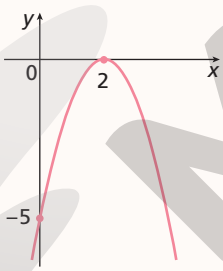
**Passo 7**. Temos a resposta para o valor de $\Delta$. O algoritmo se encerra.

Um algoritmo pode conter estruturas que controlam o fluxo de execução dos passos a partir da análise de uma condição, permitindo que sigamos por dois caminhos distintos, como ocorre nos **passos 2** e **4**. Em um fluxograma, essa estrutura é representada por um losango.

- Determine o fluxo do algoritmo, escrevendo a sequência de passos, caso o valor de $\Delta = 225$.
  Passo 1, passo 2, passo 4, passo 5, passo 7.

## Exercícios resolvidos

**R5.** Determinar a lei da função quadrática correspondente ao gráfico a seguir.



ADILSON SECCO

▸ **Resolução**

Observe que a parábola intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, -5)$. Então, a lei da função quadrática associada a ela é do tipo $f(x) = ax^2 + bx - 5$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Note também que a parábola intercepta o eixo $x$ em um único ponto, de coordenadas $(2, 0)$. Isso significa que 2 é o zero real duplo da função.

Substituindo as coordenadas do ponto $(2, 0)$ na lei da função, obtemos uma equação:

$f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5$

$0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 5 \Rightarrow 4a + 2b - 5 = 0$ (I)

Como a parábola intercepta o eixo $x$ em apenas um ponto, temos $\Delta = 0$.

Assim:

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot (-5) = 0$

$b^2 = -20a \Rightarrow a = -\frac{b^2}{20}$ (II)

Substituindo a equação (II) na equação (I), temos:

$4 \cdot \left(-\frac{b^2}{20}\right) + 2b - 5 = 0 \Rightarrow -\frac{b^2}{5} + 2b - 5 = 0$

Resolvendo essa equação:

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (-5) = 0$

$b = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = 5$

Pela equação (II), temos: $a = -\frac{5^2}{20} = -\frac{25}{20} = -\frac{5}{4}$

Portanto, a lei da função é

$f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 5x - 5$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**R6.** Considerando a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 6x - k$, determinar para quais valores reais de $k$ a função $f$:

**a)** tem dois zeros reais distintos.

**b)** tem um zero real duplo.

**c)** não tem zeros reais.

▸ **Resolução**

Vamos calcular o discriminante da equação $2x^2 - 6x - k = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) = 36 + 8k$

**a)** Para que a função $f$ tenha dois zeros reais distintos, o discriminante deve ser positivo ($\Delta > 0$).

Logo: $36 + 8k > 0 \Rightarrow k > -\frac{9}{2}$

**b)** Para que a função $f$ tenha um zero real duplo, o discriminante deve ser nulo ($\Delta = 0$).

Logo: $36 + 8k = 0 \Rightarrow k = -\frac{9}{2}$

**c)** Para que a função $f$ não tenha zeros reais, o discriminante deve ser negativo ($\Delta < 0$).

Logo: $36 + 8k < 0 \Rightarrow k < -\frac{9}{2}$

Para a realização do exercício **16**, os alunos devem conhecer e reconhecer as propriedades dos gráficos das funções quadráticas para encontrar as leis de cada uma, o que permite o reaproveitamento de estratégias para a obtenção das leis, como a observação do ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$ e quantas raízes reais a função possui. Dessa maneira, o exercício contribui para o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pilar **reconhecimento de padrões** do *pensamento computacional*.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**12.** Determine o ponto em que o gráfico de cada função intercepta o eixo $y$.

**a)** $f(x) = -2x^2 + x - 1$ $(0, -1)$

**b)** $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$ $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

**c)** $f(x) = x^2 + x$ $(0, 0)$

- Conhecer esse ponto facilita a construção do gráfico? Por quê? resposta pessoal

**13.** Obtenha, quando existir, os zeros reais das funções dadas por:

**a)** $g(x) = x^2 + 3x + 2$ $-2$ e $-1$

**b)** $g(x) = 2x^2 + x + 1$ Não existem zeros reais.

**c)** $g(x) = -9x^2 + 6x - 1$ $\frac{1}{3}$

- Conhecer os zeros da função facilita a construção do gráfico? Por quê? resposta pessoal

**14.** Calcule os valores reais de $k$ para que as funções quadráticas não tenham zeros reais.

**a)** $h(x) = kx^2 - x + 25$ **b)** $h(x) = 2x^2 - 5x + k$

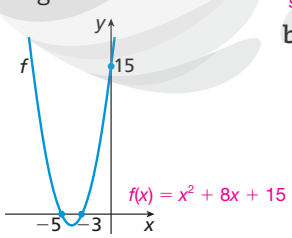
**15.** Dada a função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + 3$, encontre os valores de $a$ e $b$ para cada caso.

**a)** 1 e 3 são os zeros da função. $a = 1$ e $b = -4$

**b)** $-1$ e $-3$ são os zeros da função. $a = 1$ e $b = 4$

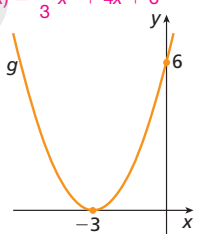
**16.** Escreva a lei da função quadrática relativa a cada gráfico.

**a)**




$f(x) = x^2 + 8x + 15$

**b)** $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 6$




**17.** A parábola determinada pela função quadrática de lei $f(x) = 2x^2 - cx + (c - 2)$, com $c \in \mathbb{R}$, tangencia o eixo das abscissas. Calcule $f(f(2))$. 2

**18.** Determine os valores de $m$ real sabendo que o gráfico da função quadrática de lei $f(x) = -mx^2 + 2m^2$ tem concavidade voltada para baixo e que o ponto de intersecção desse gráfico com o eixo $y$ é $(0, 18)$. Em seguida, determine os pontos em que o gráfico da função encontrada intercepta o eixo $x$.

$m = 3$; $(\sqrt{6}, 0)$ e $(-\sqrt{6}, 0)$

**19.** Por que é correto o procedimento de identificar o coeficiente $c$ de uma função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ como a ordenada do ponto de intersecção do gráfico com o eixo $y$?

Liste os motivos que, em sua opinião, explicam esse procedimento. Ver resolução no Guia do professor.

Feito isso, siga os passos:

I. Desenhe no plano cartesiano uma parábola qualquer que represente uma função quadrática.

II. Na parábola desenhada, identifique o valor de $x$ do ponto em que ela intercepta o eixo $y$.

III. Substitua na lei da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ o valor de $x$ que você encontrou no passo anterior e determine sua imagem. $x = 0$; $f(0) = c$

- Compare os passos descritos com os motivos que você listou. Há semelhanças? Quais? resposta pessoal

**20.** Conhecendo alguns dados de uma parábola, você saberia dizer, sem desenhar o gráfico, para quais valores reais de $x$ tem-se $f(x)$ positivo?

**a)** A função $f$ não tem zeros reais. Para qualquer valor real de $x$.
A parábola intercepta o eixo $y$: $(0, 5)$

**b)** Zero real duplo da função $f$: $-5$ Não há valor real de $x$.
Concavidade da parábola: voltada para baixo.

**c)** Zeros da função $f$: $-3$ e $3$ $-3 < x < 3$
A parábola intercepta o eixo $y$: $(0, 3)$

**d)** Pontos em que a parábola intercepta o eixo $x$: $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$ $-2 < x < -1$
A parábola intercepta o eixo $y$: $(0, -2)$

**e)** Lei da função: $f(x) = x^2 - 6x + 13$
Para qualquer valor real de $x$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO



**14. a)** $k > \frac{1}{100}$ **b)** $k > \frac{25}{8}$

No exercício **20** exploramos a ideia da **aula invertida**, pois o objetivo da análise pedida é apresentar um problema em que os alunos sintam a necessidade e se preparem para aprender os procedimentos do estudo do sinal de uma função, que será o próximo assunto.

## 2.2 Estudo do sinal da função por meio de seus zeros

Conhecendo os zeros de uma função quadrática *f*, ou sabendo da sua inexistência, e o esboço do gráfico da função, é possível estudar o sinal dessa função, ou seja, determinar para quais valores de *x* a função é positiva, negativa ou nula.

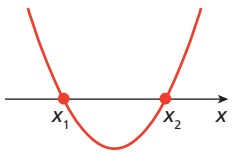
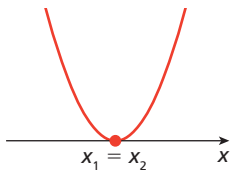
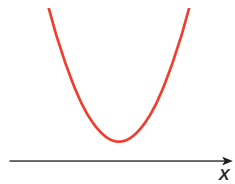
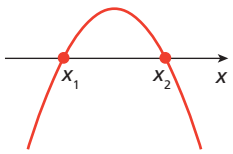
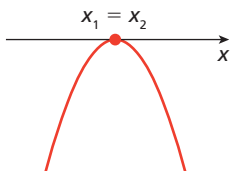
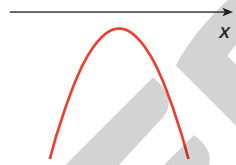
O sinal da função *f* depende do modo como a parábola intercepta o eixo *x*. Dessa forma, podemos agrupar as parábolas em três casos:

**1º caso**: quando a parábola intercepta o eixo *x* em dois pontos;

**2º caso**: quando a parábola intercepta o eixo *x* em um único ponto;

**3º caso**: quando a parábola não intercepta o eixo *x*.

Organizando esses casos em um quadro, temos:

| | 1º caso ($\Delta > 0$) | 2º caso ($\Delta = 0$) | 3º caso ($\Delta < 0$) |
|---|---|---|---|
| $a > 0$ |  |  |  |
| $a < 0$ |  |  |  |

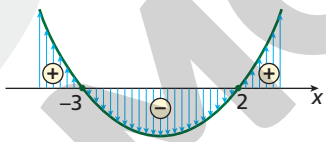
Pelo esboço do gráfico, é possível estudar o sinal de uma função quadrática.

### Exemplos

**a)** Vamos estudar o sinal da função quadrática *f*, com $f(x) = x^2 + x - 6$. Para isso, inicialmente determinamos os zeros de *f*:

$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 2$

Em seguida, fazemos um esboço do gráfico da função. Como o coeficiente de $x^2$ é positivo, a concavidade da parábola está voltada para cima.



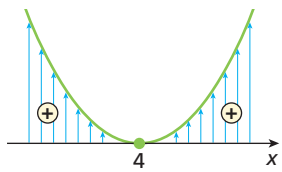

Agora, observando o esboço, determinamos para quais valores de *x* as imagens são positivas, negativas ou nulas.

Concluímos que: $\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 2 \\ f(x) < 0 \text{ para } -3 < x < 2 \end{cases}$

**b)** Vamos estudar o sinal da função *i* dada por $i(x) = x^2 - 8x + 16$.

A função *i* tem zero real duplo: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$

Como o coeficiente de $x^2$ é positivo, obtemos o esboço do gráfico abaixo.




Portanto: $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } x \neq 4 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = 4 \end{cases}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Em alguns *softwares*, basta selecionar a curva que já ficam destacados os pontos em que ela cruza os eixos *y* e *x* (zeros), e o vértice, no caso da parábola.

## Exercícios resolvidos

**R7.** Considere a função $g$, dada por $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$.

Determinar, quando existirem, os valores de $x$ cujas imagens pela função $g$ são negativas.

**▸ Resolução**

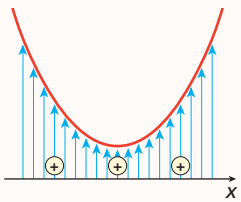
Inicialmente, vamos fazer o estudo do sinal da função $g$. Para isso, devemos encontrar seus zeros.

$2x^2 + 3x + 4 = 0$

$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = -23$

Como $\Delta < 0$, a equação $2x^2 + 3x + 4 = 0$ não tem raízes reais. Portanto, a função $g$ não tem zeros reais.

Considerando que o coeficiente de $x^2$ é positivo e que a função não tem nenhum zero real, obtemos o esboço do gráfico, representado abaixo.




Analisando esse esboço, verificamos que para qualquer valor de $x$ a função $g$ é positiva.

Portanto, não existe valor real de $x$ em que a função $g$ seja negativa.

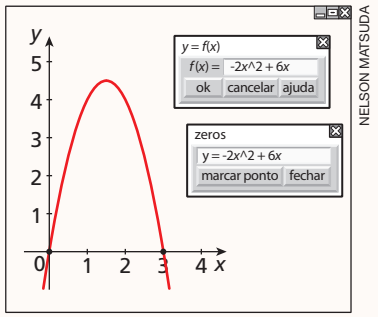
**R8.** Usando um *software* de construção de gráficos, estudar o sinal da função $f$ dada por $f(x) = -2x^2 + 6x$.

**▸ Resolução**

Vamos construir o gráfico da função utilizando um *software* de construção de gráficos e determinar seus zeros.

**Observação**

Em alguns *softwares* há variações para escrever as expressões matemáticas. Para escrever $-2x^2 + 6x$, por exemplo, podemos digitar: $-2x^2+6x$ ou $-2x*x+6x$



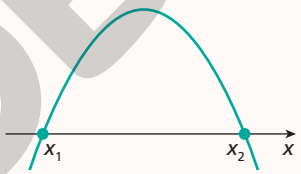

Observando o gráfico construído, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } 0 < x < 3 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 3 \\ f(x) < 0 \text{ para } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

**R9.** Considerando a função $h$, definida por $h(x) = -x^2 + 5x - p - 3$, verificar para quais valores de $p$ a função $h$ apresentará valores positivos.

**▸ Resolução**

Como o coeficiente de $x^2$ é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Então, para que a função $h$ tenha valores positivos, a parábola que representa graficamente a função deve cruzar o eixo $x$ conforme indicado no esboço abaixo.




Nesse caso, precisamos impor a condição $\Delta > 0$. Assim:

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-p - 3)$

$\Delta = 25 - 4p - 12$

$\Delta = -4p + 13$

Como $\Delta > 0$, temos: $-4p + 13 > 0 \Rightarrow p < \frac{13}{4}$

Assim, a função $h$ terá valores positivos quando $p < \frac{13}{4}$.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**21.** Estude o sinal das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir.

**a)** $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$ **c)** $i(x) = -x^2 + 9$

**b)** $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

Se quiser, como auxílio, use um *software* de construção de gráficos.

**22.** Determine para que valores reais de x cada uma das seguintes funções é positiva.

**a)** $f(x) = -x^2 + 2x$ $0 < x < 2$

**b)** $g(x) = x^2 - 2x + 1$ $x \neq 1$

**23.** Observe o estudo do sinal das funções quadráticas $f$ e $g$ e faça um esboço do seu gráfico.

**a)** Estudo do sinal de $f$: Ver resolução no Guia do professor.

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } -2 < x < 1 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -2 \text{ ou } x = 1 \\ f(x) < 0 \text{ para } x < -2 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

**b)** Estudo do sinal de $g$:

$$\begin{cases} g(x) > 0 \text{ para } x \neq -2 \\ g(x) = 0 \text{ para } x = -2 \end{cases}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



**21. a)** $g(x) > 0$ para qualquer valor de $x$ real **b)** $\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

**24.** Considere uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, em que $a$ e $c$ são números reais e $a \neq 0$.

Ver resolução no Guia do professor.

**a)** Atribuindo valores reais (positivos e negativos) para $a$ e $c$, escreva pelo menos oito leis de formação diferentes para funções do mesmo tipo da função $j$.

**b)** Faça o gráfico associado a cada uma das leis elaboradas no item anterior.

**c)** Comparando cada uma das leis com seu gráfico, verifique como deve ser o sinal de $a$ e de $c$ para que uma função do tipo da função $j$ tenha dois zeros reais.

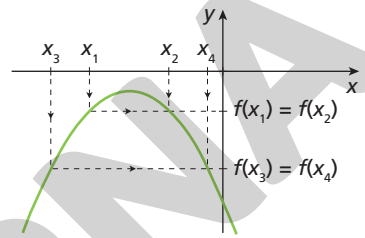
**d)** Verifique como deve ser o sinal de $a$ e de $c$ para que funções desse tipo não tenham zeros reais.

**e)** Compare as respostas dos itens anteriores com as de um colega. Em seguida, elaborem uma estratégia para realizar o estudo do sinal de uma função do tipo $j(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$, sem fazer o esboço do gráfico.

## 2.3 Vértice do gráfico da função quadrática

Ao construir gráficos de funções quadráticas, você notou que, com exceção da ordenada $y_V$ do vértice, cada imagem está associada a dois valores de $x$?

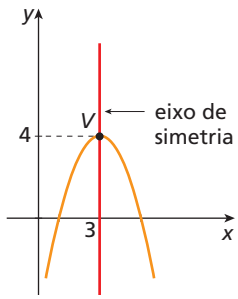
Na parábola, dois pontos de ordenadas iguais estão à mesma distância da reta perpendicular ao eixo $x$ que passa pelo vértice $V(x_V, y_V)$ dessa parábola. Essa reta é chamada de **eixo de simetria** e seus pontos são tais que $x = x_V$ qualquer que seja o valor de $y$.




Assim, quaisquer dois valores de $x$ equidistantes de $x_V$ têm a mesma imagem.

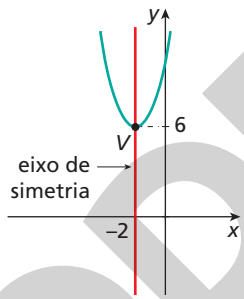
### Exemplos

**a)** $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



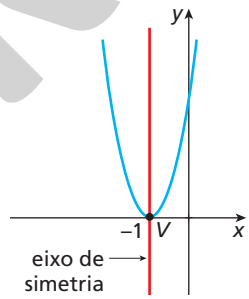

- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = 3$.

**b)** $g(x) = x^2 + 4x + 10$




- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -2$.

**c)** $h(x) = 3x^2 + 6x + 3$




- Os pontos do eixo de simetria são tais que $x = -1$.

As coordenadas do vértice de uma parábola, gráfico da função quadrática cuja lei é $f(x) = ax^2 + bx + c$, são dadas por $x_V = \frac{-b}{2a}$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$.

### Demonstração

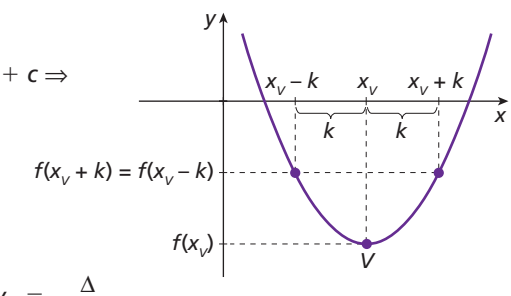
Dado o gráfico da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, considere $(x_V, y_V)$ o vértice da parábola.

Como $x_V + k$ e $x_V - k$, com $k \neq 0$, são equidistantes de $x_V$, temos: $f(x_V + k) = f(x_V - k)$

$a(x_V + k)^2 + b(x_V + k) + c = a(x_V - k)^2 + b(x_V - k) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x_V^2 + 2x_Vk + k^2) + bx_V + bk + c = a(x_V^2 - 2x_Vk + k^2) + bx_V - bk + c \Rightarrow$

$\Rightarrow 2ax_Vk + bk = -2ax_Vk - bk \Rightarrow 4ax_Vk = -2bk \Rightarrow x_V = -\frac{b}{2a}$




Sabemos, ainda, que $y_V = f(x_V)$. Assim:

$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow$

$\Rightarrow y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{\Delta}{4a}$

Portanto, as coordenadas do vértice de uma parábola são:

$x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$

Se julgar conveniente, fazer passo a passo essa demonstração no quadro com os alunos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

O exercício resolvido **R11** trata dos temas contemporâneos **diversidade cultural** e **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**.

## Exercícios resolvidos

**R10.** Calcular as coordenadas do vértice da parábola correspondente a $g(x) = -x^2 - 5x - 7$.

▸ **Resolução**

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = 25 - 28 = -3$

Aplicando as fórmulas do vértice, temos:

- $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot (-1)} = -\frac{5}{2}$
- $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-3)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{3}{4}$

Portanto, as coordenadas do vértice dessa parábola são $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

**Observação**

Conhecendo $x_V$, também podemos calcular $y_V$ substituindo o valor de $x_V$ na lei da função.

$y_v = g(x_v) = g\left(-\frac{5}{2}\right) =$

$= -\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 7 = -\frac{3}{4}$

Então, $y_V = -\frac{3}{4}$.

**R11.** Uma das provas dos I Jogos Mundiais dos Povos Indígenas de 2015, em Palmas (TO) foi o arremesso de lança. A contagem de pontos e a classificação são feitas de acordo com as distâncias alcançadas pelos atletas. O objetivo é a distância e não o alvo, portanto a técnica corporal é essencial para que o atleta consiga impulso. O vencedor da prova foi Itaguari Pataxó que alcançou a marca 44,40 m. As trajetórias das lanças arremessadas são arcos de parábolas. Supondo que o trecho de parábola descrita pela lança de Itaguari, representada em um plano cartesiano, passe pelo ponto (0, 1) e tenha por vértice o ponto (22, 5), determinar a lei de formação da função quadrática cujo gráfico passe por esses pontos.



EDUARDO KNAPP/FOLHAPRESS

Itaguari Pataxó, vencedor da prova de arremesso de lança dos I Jogos Mundiais dos Povos Indígenas de 2015, em Palmas (TO).

**Observação**

A lei de uma função quadrática pode ser dada por $y = ax^2 + bx + c$. Essa sentença é chamada de **equação da parábola** correspondente.

▸ **Resolução**

Para determinar a lei $y = f(x)$ de uma função quadrática, é preciso encontrar os coeficientes $a$, $b$ e $c$ da função, com $a \neq 0$, de modo que $y = ax^2 + bx + c$.

Como (0, 1) é ponto da parábola, temos:

$1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 1$

Como o vértice da parábola é (22, 5) e $c = 1$, temos:

$x_v = 22 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 22 \Rightarrow b = -44a$ (I)

$y_v = 5 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = 5 \Rightarrow \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow -b^2 + 4a \cdot 1 = 20a \Rightarrow b^2 + 16a = 0$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(-44a)^2 + 16a = 0 \Rightarrow 1.936a^2 + 16a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16a(121a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $121a + 1 = 0$

$a = 0$ (não serve pois $a \neq 0$)

$121a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{121}$ (III)

Substituindo (III) em (I), temos:

$b = -44 \cdot \left(-\frac{1}{121}\right) = \frac{44}{121} = \frac{4}{11}$

Portanto, a lei da função é:

$f(x) = -\frac{1}{121}x^2 + \frac{4}{11}x + 1$

No exercício **26** trabalhamos a ideia da **aula invertida**, pois, com base nas funções apresentadas no exercício **25**, espera-se que os alunos identifiquem as características das parábolas que permitirão responder às questões propostas. Essa atividade introduz os conceitos de valor máximo e valor mínimo, assuntos que serão explorados no próximo tópico.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**25.** Determine o vértice das parábolas referentes às funções dadas por:

a) $h(x) = -x^2 - 2x + 8$ (−1, 9)

b) $i(x) = x^2 - 2x - 8$ (1, −9)

c) $j(x) = x^2 + 2x - 3$ (−1, −4)

d) $k(x) = x^2 - 4x + 4$ (2, 0)

**26.** Considere as funções do exercício anterior.

a) Qual é o maior valor que cada função pode assumir (maior imagem)?

b) Qual é o menor valor que cada função pode assumir (menor imagem)?

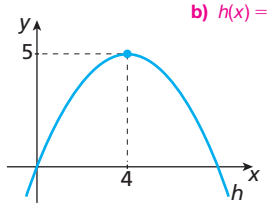
c) Qual característica a lei de formação deve ter para que a função tenha um valor máximo? E para que tenha um valor mínimo?

Ver resolução no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**27.** Considere o gráfico de uma função quadrática apresentado a seguir.



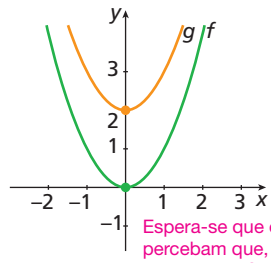

**a)** Analisando o gráfico, calcule os zeros da função, sabendo que o gráfico passa pela origem do plano cartesiano. 0 e 8

**b)** Encontre a lei dessa função quadrática.

**b)** $h(x) = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$

**28.** Determine $m$ e $n$ para que o vértice da parábola que representa a função $f$, dada por $f(x) = -(m - 1)x^2 + 2x + n$, seja $(2, 5)$. $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$

**29.** No plano cartesiano a seguir estão representadas as funções dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 2$.




**a)** Identifique uma característica comum entre as coordenadas do vértice dessas duas funções.

Espera-se que os alunos percebam que, nas duas funções, tem-se $x_v = 0$

**b)** Verifique algebricamente que as coordenadas do vértice de uma função do tipo $h(x) = ax^2 + c$ serão sempre $(0, c)$.

Ver resolução no Guia do professor.

## 2.4 Conjunto imagem e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT503** da BNCC, uma vez que os alunos investigam pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos diversos, usando ou não tecnologias digitais.



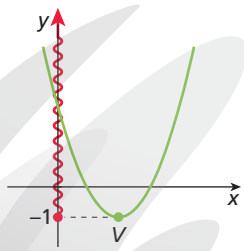
IVAN MUÑOZ OSORIO

Em um barco, avarias ou outras situações de emergência podem ocorrer. Nessas circunstâncias, sinalizadores luminosos devem ser disparados para dar um alerta à guarda costeira ou a outras embarcações nas proximidades. No projeto industrial dos sinalizadores, uma propriedade importante é altura máxima que o artefato pode alcançar na sua trajetória de arco parabólico. Para modelar essa situação, emprega-se uma função quadrática e determina-se a ordenada do vértice da parábola de sua presumida trajetória.

Uma função quadrática tem um **valor máximo** ou um **valor mínimo**. Esse valor é a ordenada do vértice da parábola que a representa e nos permite determinar o conjunto imagem dessa função. Quando a concavidade da parábola é voltada para baixo, a função tem um valor máximo; quando a concavidade é voltada para cima, tem um valor mínimo.

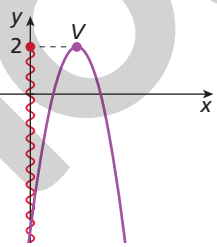
### Exemplos

**a)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$




Essa função tem $y_v = -1$.
A parábola tem concavidade voltada para cima. Então, $f(x) \geqslant -1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Logo, $-1$ é o valor mínimo de $f$ e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$.

**b)** $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$

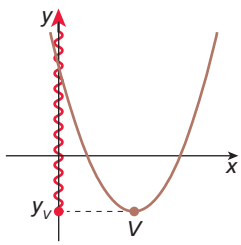
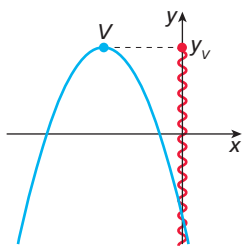



Essa função tem $y_v = 2$.
A parábola tem concavidade voltada para baixo. Então, $f(x) \leqslant 2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Logo, 2 é o valor máximo de $g$ e $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$.

**Observação**

O símbolo $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer que seja".

Para uma função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos:

| Concavidade voltada para cima ($a > 0$) | Concavidade voltada para baixo ($a < 0$) |
|---|---|
|   Essa função tem valor mínimo $y_V$. O valor mínimo de $f$ é $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}$ |   Essa função tem valor máximo $y_V$. O valor máximo de $f$ é $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$. $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{-\Delta}{4a}\right\}$ |

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O exercício **R13** pode contribuir com o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** da BNCC de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, uma vez que os estudantes devem elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra.

## Exercícios resolvidos

**R12.** Determinar o valor máximo ou mínimo da função $f$ dada por $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x - 15$ e escrever seu conjunto imagem.

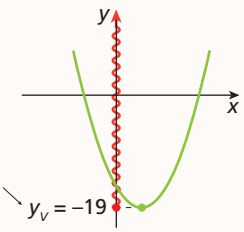
### ▸ Resolução

Como $a > 0$, o gráfico da função $f$ tem a concavidade voltada para cima.

Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-15)\right]}{4 \cdot \frac{1}{4}}$$

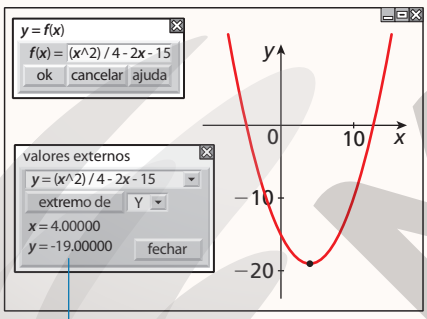
$$y_V = \frac{-(4 + 15)}{1} = -19$$




Logo, $-19$ é o valor mínimo dessa função e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -19\}$.

Poderíamos resolver esse exercício com o auxílio de um *software* de construção de gráficos. Nesse caso, não seria necessário calcular a ordenada do vértice. Observe:

Construímos o gráfico da função e depois determinamos as coordenadas de seu vértice.




Selecionando a ferramenta "valores extremos", obtemos as coordernadas do ponto extremo, ou seja, do vértice da parábola.

Portanto, o vértice é $(4, -19)$, e como a parábola tem concavidade para cima: $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -19\}$.

**R13.** Durante uma situação de emergência, o capitão de um barco disparou um sinalizador em busca de ajuda.

A lei que descreve a altura atingida pelo sinal luminoso em função do tempo é dada por $h(t) = 80t - 5t^2$, sendo $h$ a altura do sinal, em metro, e $t$ o tempo decorrido após o disparo, em segundo.

**a)** Qual altura máxima esse sinal luminoso atinge?

**b)** Quantos segundos se passam, após o disparo, até o sinal luminoso atingir a altura máxima?

### ▸ Resolução

**a)** Para determinar a altura máxima que esse sinal atinge, precisamos encontrar o valor máximo da função. Analisando o sinal do coeficiente $a$, podemos concluir que o gráfico da função $h$ é um arco de parábola com concavidade voltada para baixo.

É possível determinar o valor máximo da função usando a fórmula da ordenada do vértice:

$\Delta = 80^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 6.400$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-6.400}{-20} = 320$$

Logo, a altura máxima que o sinal luminoso atinge é 320 metros.

**b)** O tempo que o sinal luminoso leva para atingir a altura máxima corresponde ao $x_V$ da parábola. Utilizando a fórmula da abscissa do vértice, temos:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2 \cdot (-5)} = \frac{-80}{-10} = 8$$

Logo, o sinal luminoso atinge a altura máxima 8 segundos após o disparo.

**R14.** Seja a função quadrática $f$ dada por $f(x) = (m - 3)x^2 + 2x - m$. Para que valores reais de $m$ a função tem $-1$ como valor máximo?

### ▸ Resolução

Se $-1$ é o valor máximo da função, então a parábola tem concavidade voltada para baixo e $y_V = -1$.

Aplicando a fórmula da ordenada do vértice, temos $-1 = \frac{-\Delta}{4a}$.

Substituindo os valores dos coeficientes na fórmula e resolvendo-a, obtemos:

$$-1 = \frac{-\left[2^2 - 4 \cdot (m - 3) \cdot (-m)\right]}{4 \cdot (m - 3)}$$

$$-1 = \frac{-[4 + 4m^2 - 12m]}{4m - 12}$$

$$-4m + 12 = -4 - 4m^2 + 12m$$

$$4m^2 - 16m + 16 = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$m = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, para $m = 2$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e $-1$ como valor máximo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Em alguns *softwares*, basta selecionar a parábola traçada que já ficam destacados os pontos em que ela cruza os eixos $y$ e $x$ (zeros), e o vértice (com as devidas coordenadas).

**36. c)** Espera-se que os alunos percebam que essa afirmação é falsa, pois o custo da produção de pacotes de 1 quilograma de balas está relacionado com o número de toneladas de balas produzidas por meio de uma função quadrática.

**31. b)** $\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{65}{8}\right\}$ **c)** $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 8\}$

## Exercícios propostos

**30. a)** valor mínimo: $-\frac{81}{8}$ **b)** valor máximo: $\frac{5\sqrt{5}+4}{4}$

Registre as respostas em seu caderno.

**30.** Determine o valor máximo ou mínimo das funções quadráticas dadas por:

**a)** $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

**b)** $h(x) = -\sqrt{5}x^2 - 5x + 1$

**c)** $n(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4}$ **c)** valor mínimo: $\frac{7}{18}$

**31.** Determine o conjunto imagem das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir.

**a)** $f(x) = x^2 - 5x + 1$

**b)** $g(x) = -2x^2 + 3x + 7$

**c)** $h(x) = -3x^2 + 8$ **31. a)** $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{21}{4}\right\}$

Se quiser, como auxílio, use um *software* de construção de gráficos.

**32.** O conjunto imagem da função quadrática $g$, com $g(x) = ax^2 + 8x + 12$, é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 16\}$.

**a)** A função $g$ tem valor máximo ou valor mínimo? valor máximo

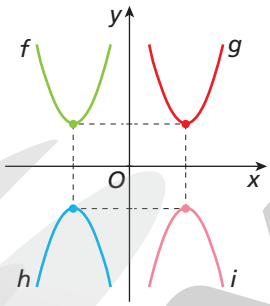
**b)** A concavidade da parábola correspondente está voltada para cima ou para baixo? para baixo

**c)** Qual é o valor de $a$? $-4$

**d)** Determine as coordenadas do vértice da parábola. (1, 16)

**33.** Calcule os valores reais de $m$ para que a função de lei $f(x) = 3x^2 + 2mx + m$ tenha $\frac{4}{3}$ como valor mínimo. Não existe $m$ real tal que $\frac{4}{3}$ seja valor mínimo de $f$.

**34.** Observe os gráficos das funções quadráticas $f$, $g$, $h$ e $i$.




ADILSON SECCO

Considere que os vértices das parábolas são simétricos em relação aos eixos ou à origem $O$. Sabendo que $\text{Im}(h) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{3}{2}\right\}$ e que a abscissa do vértice do gráfico de $g$ é 2, calcule a área do retângulo determinado pelos vértices dessas funções. 12 unidades de área

**35.** Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Um segundo após o lançamento, a pedra atinge 5 metros de altura e começa a descer. A lei que descreve a altura $h$, em metro, em relação ao tempo $t$, em segundo, é do tipo $h(t) = at^2 + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Avaliar a conveniência de esclarecer aos alunos a diferença entre o gráfico (parábola) da função e a trajetória descrita pela pedra.

**a)** Determine a lei dessa função. $h(t) = -5t^2 + 10t$

**b)** Qual é a altura da pedra 2 segundos após o lançamento? 0 m

**c)** Usando um *software* de construção de gráficos, trace o gráfico correspondente a essa situação. Ver resolução no Guia do professor.

**d)** Compare o tempo de subida com o tempo de descida da pedra. O que você pode concluir? o tempo de subida é igual ao de descida

**36.** Uma empresa produtora de doces verificou que o custo por pacotes de 1 quilograma (em real) para a produção mensal de $x$ toneladas de balas pode ser calculado por meio da seguinte lei matemática:

$$c(x) = \frac{x^2}{10.000} - \frac{x}{10} + 30, \text{ com } 100 \leqslant x \leqslant 800$$

**a)** Determine o custo (em real) por quilograma de bala dessa empresa com a produção de 100 toneladas de balas. R$ 21,00

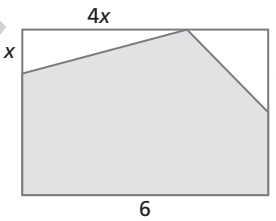
**b)** Quanto essa empresa gasta por quilograma para produzir 200 toneladas de balas? R$ 14,00

**c)** Pode-se afirmar que quanto maior o número de toneladas de balas produzidas menor será o custo por pacotes de 1 quilograma de balas?

**d)** Quantas toneladas de balas deverão ser produzidas para obter um custo mínimo por quilograma? 500 toneladas

**e)** Qual é o valor desse custo mínimo? R$ 5,00

**37.** (UFSM-RS) Na parede da sala de aula de Manolito, que tem 4 m de altura e 6 m de largura, será pintado um painel, conforme a figura apresentada. O valor de $x$ para que a área pintada seja máxima é:




NELSON MATSUDA

alternativa c

**a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** 2 **e)** 4

**38.** Considerando o exercício anterior, calcule qual seria o valor da área máxima pintada. 20 m²

**39.** (Fuvest-SP) A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um combo a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 combos a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse combo?

**a)** R$ 2.000,00

**b)** R$ 3.200,00

**c)** R$ 3.600,00

**d)** R$ 4.000,00

**e)** R$ 4.800,00

alternativa c

**40.** No exercício anterior, para obter a máxima arrecadação diária, a dona da lanchonete deveria vender cada combo por quanto? R$ 6,00

**41.** Elabore um problema contextualizado que envolva máximo ou mínimo de uma função quadrática. Passe seu problema para um colega resolver e resolva o problema criado por ele. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**35.** Nesse exercício, o aluno deve identificar as informações relevantes à resolução do problema no enunciado e aplicar conhecimentos prévios na obtenção da lei de formação da função, a fim de obter os coeficientes dela, aplicando conhecimentos dos pilares **abstração** e **reconhecimento de padrões** do *pensamento computacional*.

**Reflita**

Voltando ao saque de voleibol "Jornada nas Estrelas" da abertura do capítulo, considere que a trajetória parabólica da bola esteja contida em um plano perpendicular ao plano da rede e que seja descrita pela função $h(x) = -0{,}5x^2 + 7x + 1$, em que $h$ representa a altura da bola em relação ao chão da quadra e $x$ representa a distância horizontal a partir da linha de saque do fundo da quadra.

- Qual é a altura máxima alcançada pela bola?
- A que distância aproximada do ponto de saque a bola cairia no chão?
- Sabendo que a rede separa cada parte da quadra de vôlei em dois quadrados com lados medindo 9 m de comprimento, a bola cairia na quadra adversária?

- A trajetória é um arco de parábola com a concavidade voltada para baixo, logo tem um ponto de máximo que é a ordenada do vértice.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[7^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 1\right]}{4 \cdot (-0{,}5)} = 25{,}5$$

A altura máxima é 25,5 metros.

- Quando a bola está no chão a sua altura $h$ é zero.

$h = 0 \Rightarrow -0{,}5x^2 + 7x + 1 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot 1}}{2 \cdot (-0{,}5)} \simeq \frac{-7 \pm 7{,}14}{-1}$$

$x_1 \simeq -0{,}14$ (não serve); $x_2 \simeq 14{,}14$

- A bola cairia no chão a aproximadamente 14,14 m da linha de fundo do sacador. Logo, a bola cairia no lado da quadra adversária, pois $9 \text{ m} < 14{,}14 \text{ m} < 18 \text{ m}$.

# 3 Construção do gráfico da função quadrática

## 3.1 Escolhendo pontos convenientes

Para esboçar o gráfico (parábola) correspondente a uma função quadrática, podem-se escolher os seguintes pontos convenientes:

- os pontos em que a parábola intercepta o eixo $y$ e o eixo $x$ (caso existam);
- o vértice.

### Exemplo

Vamos esboçar o gráfico da função dada pela lei $f(x) = -x^2 - 4x - 3$.

Calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

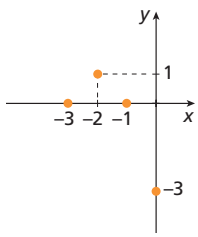
- coeficiente $c$: $-3$
- zeros da função: $-3$ e $-1$
- coordenadas dos vértices: $x_V = -2$ e $y_V = 1$

Pontos formados:

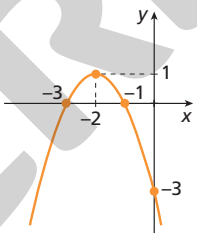
- intersecção com os eixos: $(0, -3)$, $(-3, 0)$ e $(-1, 0)$
- vértice: $(-2, 1)$

Com essas informações, vamos esboçar o gráfico da função $f$ realizando duas etapas.

**1ª etapa:** Localizamos os pontos no plano cartesiano.

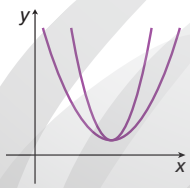



**2ª etapa**: Traçamos uma parábola que passa pelos pontos.

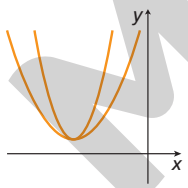



Existem parábolas cujo vértice não se encontra sobre nenhum dos eixos e a função associada a elas não possui zeros reais.

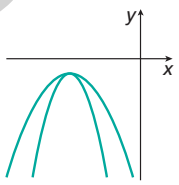
Nesses casos, para construir a parábola relacionada a uma função desse tipo, é necessário determinar as coordenadas do vértice da parábola e identificar o ponto em que a parábola intercepta o eixo $y$. Com essas informações, pode-se esboçar o gráfico da função utilizando a simetria da parábola em relação à reta vertical que passa pelo vértice.



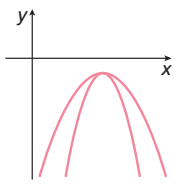

Parábolas com vértice no 1º quadrante e que não interceptam o eixo $x$.




Parábolas com vértice no 2º quadrante e que não interceptam o eixo $x$.




Parábolas com vértice no 3º quadrante e que não interceptam o eixo $x$.




Parábolas com vértice no 4º quadrante e que não interceptam o eixo $x$.

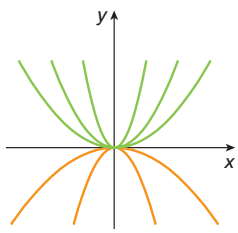
Há, ainda, parábolas cujos vértices se encontram sobre o eixo $y$, e as funções a elas associadas têm apenas um zero ou não têm zero.

**Reflita**

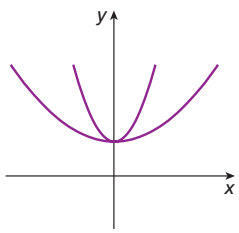
Certa parábola intercepta os eixos $x$ e $y$ em um mesmo ponto, que coincide com seu vértice.

Quais são as coordenadas do vértice dessa parábola?

O vértice da parábola coincide com a intersecção dos eixos $x$ e $y$; portanto, as coordenadas do vértice são $x = 0$ e $y = 0$, ou seja, $V(0, 0)$.




Parábolas com vértice (0, 0).



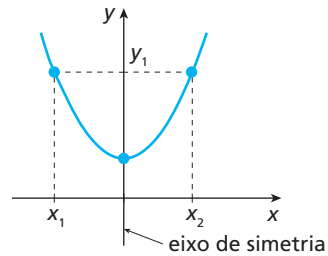

Parábolas com vértice no eixo $y$ e que não interceptam o eixo $x$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nesses casos, como existem infinitas parábolas com esse vértice, para construir gráficos desse tipo é necessário atribuir outro valor a $x$, calcular a imagem correspondente e, a partir daí, esboçar o gráfico da função utilizando a simetria da parábola.




### Exemplo

Vamos esboçar o gráfico da função $g$ dada por $g(x) = 2x^2 + 1$.

Repetindo o procedimento do exemplo anterior, calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

- coeficiente $c$: 1
- zeros da função: $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8$

(Logo, a função $g$ não tem zeros reais.)

- coordenadas do vértice: $x_v = -\frac{0}{2 \cdot 2} = 0$; $y_v = -\frac{(0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 2} = -\frac{(-8)}{8} = 1$

Observando os valores encontrados, verificamos que o gráfico da função $g$ não intercepta o eixo $x$, e o vértice da parábola coincide com o ponto em que o gráfico intercepta o eixo $y$: (0, 1)

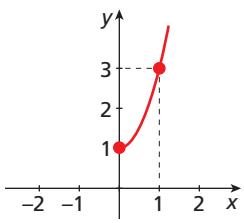
Então, vamos determinar outro ponto pertencente ao gráfico da função $g$. Para isso, atribuiremos um valor para $x$ e calcularemos sua respectiva imagem.

Sendo $x = 1$, temos: $g(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow g(1) = 3$

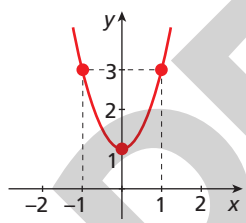
Logo, a parábola passa pelo ponto (1, 3).

Com essas informações, vamos traçar o esboço do gráfico dessa função.

**1ª etapa**: Localizamos os pontos (0, 1) e (1, 3) no plano cartesiano e traçamos parte da parábola.




**2ª etapa:** Utilizamos simetria para traçar o restante da parábola.




### Exercício proposto

Registre as respostas em seu caderno.

Ver resolução no Guia do professor.

**42.** Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = -4x^2 + 6x - 9$

b) $g(x) = x^2 + 6x$

c) $h(x) = \frac{3x^2}{5} + x + 5$

d) $i(x) = 2x^2 + 7x - 4$

e) $j(x) = x^2 + 3$

f) $l(x) = -2x^2 - 2$

## 3.2 Resolvendo problemas pela análise do gráfico da função

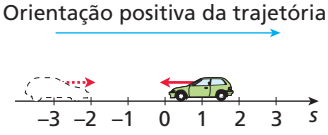
A análise do gráfico de uma função favorece o entendimento da variação das grandezas envolvidas. Em situações práticas, essa facilidade é mais evidente.

### Exemplos

**a)** Um móvel percorre uma trajetória retilínea descrevendo um movimento uniformemente variado cuja lei da posição $s$ (em metro) em função do tempo $t$ (em segundo) é $s(t) = -3 + 4t - t^2$. O móvel saiu da posição $-3$ com velocidade 4 m/s, com movimento a favor da orientação positiva da trajetória. Diminuiu a velocidade até parar e voltou, aumentando a velocidade.

Vamos determinar os intervalos de tempo em que o móvel se movimenta a favor da orientação positiva da trajetória e contra ela. Em que instantes o móvel passa pela posição zero (origem) da trajetória?

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT404** da BNCC, articuladas com as respectivas competências específicas **1** e **4**, além da competência específica **3**, já que os alunos interpretarão situações diversas e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas e analisarão funções em suas representações algébrica e gráfica. Também favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** de Ciências da Natureza de suas Tecnologias, uma vez que os alunos elaboram explicações e cálculos relativos aos movimentos de objetos na Terra.




ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

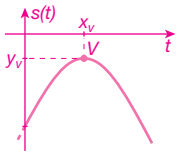
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**Reflita**

- Como pode ser o gráfico (posição × tempo) de um móvel, em movimento uniformemente variado, que não passa pela origem dos espaços?
- Qual é o significado do vértice do gráfico da função em um movimento desse tipo?

• Resposta possível:

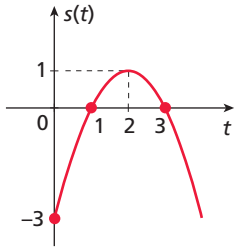



ADILSON SECCO

Este gráfico pode representar a lei de formação do movimento uniformemente variado de um móvel que não passa pela origem dos espaços.

• Neste gráfico, a abscissa e a ordenada do vértice indicam, respectivamente, o instante e o local em que o móvel parou e alterou o sentido do movimento.

Para visualizar melhor a variação da posição ($s$) em função do tempo ($t$), vamos construir o gráfico da função $s$.




Como 1 e 3 são os zeros da função $s$, então a parábola intercepta o eixo $x$ em (1, 0) e (3, 0).

Calculando as coordenadas do vértice, obtemos:

- $x_V = \dfrac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$
- $y_V = \dfrac{-[4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)]}{4 \cdot (-1)} = 1$

Para $t = 0$, temos $s(0) = -3$.

Portanto, a parábola intercepta o eixo $y$ no ponto $(0, -3)$.

Observe que $D(s) = [0, +\infty[$ e $Im(s) = ]-\infty, 1]$.

Pelo gráfico construído, analisamos o que ocorre nos intervalos:

- para $0 < t < 2$, o móvel se movimentou a favor da orientação positiva da trajetória;
- para $t = 2$, o móvel parou e alterou o sentido do movimento;
- para $t > 2$, o móvel se movimentou contra a orientação positiva da trajetória.

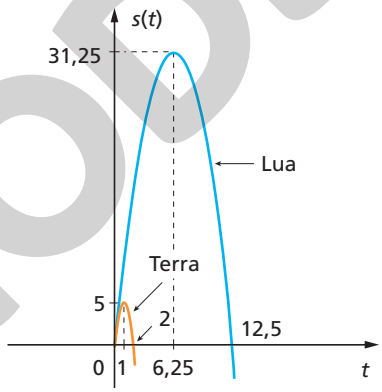
No gráfico, os instantes em que o móvel passa pela posição zero são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo $x$, ou seja, os zeros da função. Nesse caso, são os instantes $t = 1$ e $t = 3$.

**b)** Na Lua, um astronauta lança uma rocha verticalmente para cima com velocidade de 10 m/s. Ao chegar à Terra, o astronauta faz a mesma experiência com a mesma rocha e à mesma velocidade. As leis que representam o movimento da rocha (em metro), em função do tempo (em segundo), em cada local são:

$s_{Lua}(t) = 10t - 0{,}8t^2$ e $s_{Terra}(t) = 10t - 5t^2$

Vamos calcular em qual dos dois locais o tempo de subida e o de descida são menores, e qual é a diferença entre esses tempos.

Podemos construir as duas parábolas em um mesmo plano cartesiano.




Observando as parábolas, vemos que o tempo de subida e descida da rocha é menor na Terra. A diferença entre esses tempos é de 10,5 segundos.

**Observações**

- $s_{Lua}(t) = 10t - 0{,}8t^2$
  Zeros da função: 0 e 12,5
  Ponto de intersecção do gráfico com o eixo $y$: (0, 0)
  Vértice do gráfico: (6,25; 31,25)
- $s_{Terra}(t) = 10t - 5t^2$
  Zeros da função: 0 e 2
  Ponto de intersecção do gráfico com o eixo $y$: (0, 0)
  Vértice do gráfico: (1, 5)

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**43.** Uma empresa de TV a cabo, que tem 60.000 assinantes e cobra de cada um R$ 75,00 mensais, fez uma pesquisa de mercado para decidir o aumento que aplicará em sua mensalidade. Os resultados desse estudo indicam que a empresa perderá 400 assinantes para cada real adicionado à mensalidade.

**a)** Escreva a sentença que determina o número de assinantes em função da quantidade de reais adicionados à mensalidade. $60.000 - 400x$

**b)** Encontre a sentença que determina o valor de uma mensalidade (em real) em função do aumento. $75 + x$

**c)** Dê a lei da função que determina o faturamento mensal (em real), dependendo da quantidade de reais adicionados à mensalidade. $y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

**d)** De quanto deve ser o aumento para maximizar o faturamento mensal? R$ 37,50

**e)** Qual é a arrecadação máxima que a empresa pode obter em um mês ao aplicar esse aumento? R$ 5.062.500,00

**f)** Quantos assinantes deverá ter essa empresa para obter a arrecadação máxima? 45.000

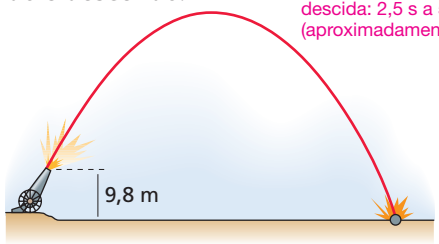
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**44.** Um projétil é lançado e sua altura em função do tempo é dada por $h(t) = -4{,}9t^2 + 24{,}5t + 9{,}8$, com $h$ em metro e $t$ em segundo. Determine os intervalos de tempo em que o projétil está subindo e descendo.

subida: 0 s a 2,5 s
descida: 2,5 s a 5,37 s (aproximadamente)




**45.** Dois móveis, A e B, no mesmo instante, partem do mesmo ponto e realizam movimentos retilíneos que obedecem às leis $s_A(t) = 5 + 5t$ e $s_B(t) = 5 - 5t + t^2$. Determine o intervalo de tempo em que o móvel A fica na frente do móvel B.

O móvel A fica na frente do móvel B no intervalo ]0, 10[.

**46.** Resolva o exercício a seguir usando um *software* de construção de gráficos.

(Enem) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.

Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leqslant t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \geqslant 100 \end{cases}$$

em que $T$ é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e $t$ é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.

Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C.

O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a: alternativa d

**a)** 100 **b)** 108 **c)** 128 **d)** 130 **e)** 150

# 4 Inequações do 2º grau

Toda inequação que pode ser reduzida a uma desigualdade em que o primeiro membro é um polinômio do tipo $ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) e o segundo membro é zero é chamada de **inequação do 2º grau** na incógnita $x$.

**Exemplos**

**a)** $3x^2 - 8x - 3 \geqslant 0$
**b)** $-x^2 + 0{,}5x \leqslant 0$
**c)** $5x^2 - 2 < 0$
**d)** $-4x^2 + x + \sqrt{3} > 0$

Para resolver inequações do 2º grau, podemos utilizar o estudo do sinal da função quadrática, conforme visto no tópico "Estudo do sinal da função por meio de seus zeros", na página 49.

**Observação**

Veja o cálculo dos zeros da função $-x^2 + 4x + 5 = 0$:
$x^2 - 4x - 5 = 0$
$(x + 1) \cdot (x - 5) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$
$x = -1$ ou $x = 5$

## Exercício resolvido

**R15.** Resolver, em $\mathbb{Z}$, a inequação

$$-3x^2 + 7x + 4 > -2x^2 + 3x - 1.$$

▸ **Resolução**

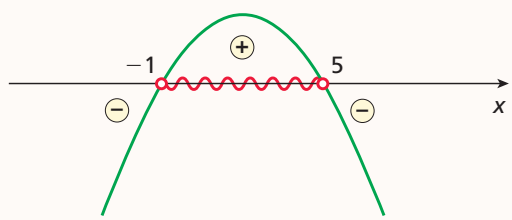
$-3x^2 + 7x + 4 > -2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x^2 + 7x + 4 + 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{-x^2 + 4x + 5}_{f(x)} > 0$

Calculando os zeros da função $f$, obtemos $x = -1$ ou $x = 5$.

Conhecendo os zeros da função, podemos fazer o esboço do gráfico:




A função é positiva para $x$ real tal que $-1 < x < 5$. Como queremos somente valores inteiros, apenas 0, 1, 2, 3 e 4 satisfazem essa condição.

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**47.** Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações do 2º grau.

a) $-x^2 + 1 < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

b) $2x^2 + 3x + 7 \leqslant 0$ $S = \varnothing$

c) $-x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$ $S = \{1\}$

d) $x^2 + 2(x - 4) - 1 \leqslant 2x^2 - 9$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

e) $x^2 - 4x \geqslant -4$ $S = \mathbb{R}$

f) $(-2x + 1)^2 > 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

**48.** Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções $f$ e $g$ dadas por $f(x) = 2x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, se possível usando um *software* de construção de gráficos. Ver resolução no Guia do professor.

Em seguida, analise os intervalos do domínio em que $f(x) > g(x)$.

Monte a inequação, resolva-a e depois compare a solução com sua análise dos gráficos.

**Observação**

Só podemos usar o quadro de sinais quando o segundo membro da inequação for igual a zero.

# 4.1 Inequação-produto e inequação-quociente

Você já trabalhou com inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções afins. Agora, estudaremos inequações desse tipo que também envolvem funções quadráticas, utilizando novamente o quadro de sinais.

## Exercício resolvido

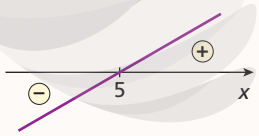
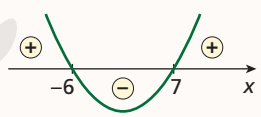
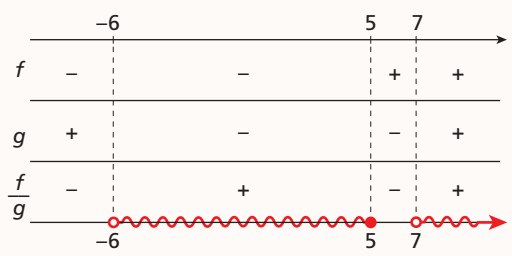
**R16.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\frac{x - 5}{x^2 - x - 42} \geqslant 0$.

▸ **Resolução**

Para $\frac{x - 5}{x^2 - x - 42} \geqslant 0$, vamos considerar $f(x) = x - 5$ e $g(x) = x^2 - x - 42$.

O zero de $f$ é 5, e os zeros de $g$ são $-6$ e 7.

Vamos estudar o sinal das funções $f$ e $g$ e, em seguida, montar o quadro de sinais.

| Sinal de $f$ | Sinal de $g$ | Sinal de $g$ |
|---|---|---|
|  |  |  |



Observe que $-6$ e 7 não são soluções da inequação, pois o denominador $x^2 - x - 42$ deve ser diferente de zero.

Logo, o conjunto solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leqslant 5 \text{ ou } x > 7\}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**49. a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } \frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 4\}$ **b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -7 \text{ ou } 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\}$

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**49.** Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a) $(3x^2 - 10x + 7)(-x^2 + 4x) \geqslant 0$

b) $2x^3 + 9x^2 - 35x \leqslant 0$

c) $x^4 - 4 < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

d) $\frac{3x + 5}{2x^2 - 7x - 4} \leqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 4\}$

e) $\frac{-x^2 + 5x - 4}{x^2 - 14x + 48} \geqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$

f) $-\frac{(x - 5)^2}{(-x + 5)^2} > 0$ $S = \varnothing$

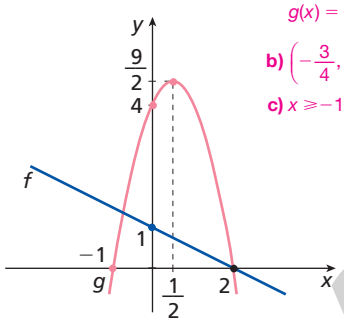
**50.** Reduza cada inequação a outra com o segundo membro igual a zero e determine a solução em $\mathbb{R}$.

a) $\frac{-6}{x^2 - 4} \leqslant 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $\frac{1}{-x} < \frac{1}{2}x + 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

**51.** Encontre o menor valor natural que $x$ pode assumir para que $\frac{(2x + 8)(-x + 3)}{-x^2 + 1} \leqslant 0$. 2

**52.** A função afim $f$ e a função quadrática $g$ estão representadas a seguir.




a) Determine as leis das funções $f$ e $g$.

b) Em que pontos os gráficos se interceptam?

c) Sem fazer cálculos, com base no gráfico, determine quais valores de $x$ tornam $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$.

d) Resolva a inequação $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e compare a resposta com a do item **c**. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

**a)** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$

**b)** $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$ e $(2, 0)$

**c)** $x \geqslant -1$

## 4.2 Inequações simultâneas

Nesse tópico, vamos estudar inequações simultâneas envolvendo funções quadráticas.

Inequações simultâneas são aquelas apresentadas por duas desigualdades ou por meio de um sistema de inequações.

Para resolver inequações desse tipo, devemos:

1º) encontrar a solução de cada inequação;

2º) fazer a intersecção das soluções.

## Exercícios resolvidos

**R17.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $4x^2 - 7x + 2 \leqslant 2x^2 - 3x + 2 < -3x + 4$.

▸ **Resolução**

Inicialmente, vamos reduzir a inequação simultânea em:

(I) $4x^2 - 7x + 2 \leqslant 2x^2 - 3x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x \leqslant 0$

(II) $2x^2 - 3x + 2 < -3x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 2 < 0$

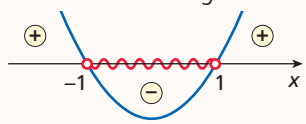
Considerando $f(x) = 2x^2 - 4x$ e $g(x) = 2x^2 - 2$, temos:

- Zeros de $f$: 0 e 2
- Zeros de $g$: −1 e 1

Sinal de $f$

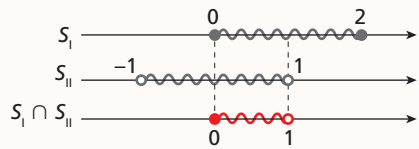



Sinal de $g$




$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

Agora, vamos fazer a intersecção das soluções das inequações (I) e (II).




Logo, o conjunto solução das inequações simultâneas é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**R18.** Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema de inequações: $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -\frac{1}{2}(x^2 + x) \leqslant \frac{1}{3}(3 - 6x) \end{cases}$

**▸ Resolução**

Primeiro, vamos reduzir a segunda inequação a uma forma mais simples:

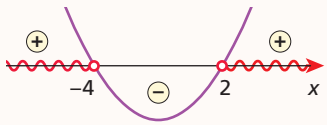
$$-\frac{1}{2}(x^2 + x) \leqslant \frac{1}{3}(3 - 6x) \Rightarrow \frac{-x^2}{2} - \frac{x}{2} \leqslant 1 - 2x \Rightarrow -x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 \\ -x^2 + 3x - 2 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{x^2 + 2x - 8}^{f(x)} > 0 \text{ e } \overbrace{-x^2 + 3x - 2}^{g(x)} \leqslant 0$$

- Zeros de $f$: $-4$ e $2$

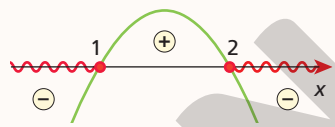
Sinal de $f$




$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$

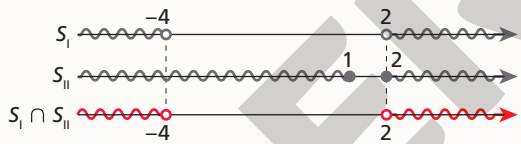
- Zeros de $g$: $1$ e $2$

Sinal de $g$




$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

Agora, fazemos a intersecção das soluções de cada uma das inequações.




Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**53.** Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

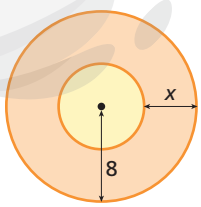
a) $2x \leqslant -x^2 + 4x < 4$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$

b) $-4 < \frac{x^2 + 8x + 16}{2} < 8$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$

c) $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geqslant 0 \\ x^2 - 2x + 8 < 0 \end{cases}$ $S = \varnothing$

d) $\begin{cases} -x^2 + 5x \geqslant 0 \\ x^2 - 4x \geqslant x \end{cases}$ $S = \{0, 5\}$

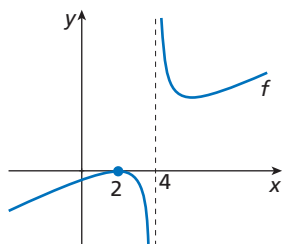
**54.** A figura mostra dois círculos de mesmo centro.

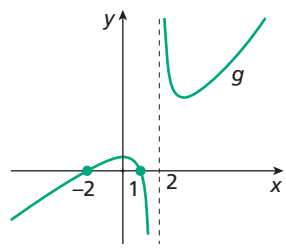



a) Encontre a área $A(x)$ da coroa circular (região alaranjada). $A(x) = 16\pi x - \pi x^2$

b) Determine $x$ para que essa área fique entre $28\pi$ e $65\pi$. $2 < x < 8$

**55.** Os gráficos abaixo representam, respectivamente, as funções de leis: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$ e $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$




Observe os gráficos e resolva os itens a seguir.

a) $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

c) $f(x) < 0 < g(x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

d) $g(x) < 0 < f(x)$ $S = \varnothing$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

## 4.3 Identificação do domínio de uma função por meio de inequações

Nem todas as funções reais têm como domínio o conjunto $\mathbb{R}$. Algumas, pela natureza de sua lei, apresentam restrição de valores, tendo como domínio um subconjunto de $\mathbb{R}$ (distinto de $\mathbb{R}$).

Utilizando o estudo que fizemos das inequações, podemos identificar o domínio de algumas dessas funções.

**Observações**

- O denominador de expressões fracionárias não pode ser zero.
- O radicando de raízes de índice par não pode ser negativo, ou seja, deve ser positivo ou nulo.

### Exercício resolvido

**R19.** Identificar o domínio da função dada pela lei: $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 7}}$

▸ **Resolução**

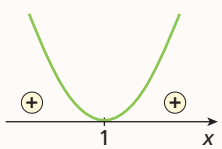
Em $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x - 7}}$, devemos ter: $\dfrac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{f(x)}}{\underbrace{2x - 7}_{h(x)}} \geqslant 0$

Inicialmente, vamos resolver a inequação-quociente:

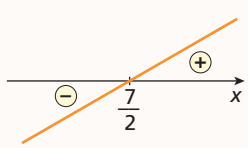
$f(x) = x^2 - 2x + 1$ (zero real duplo de $f$: 1)

$h(x) = 2x - 7 \left(\text{zero de } h\text{: } \dfrac{7}{2}\right)$

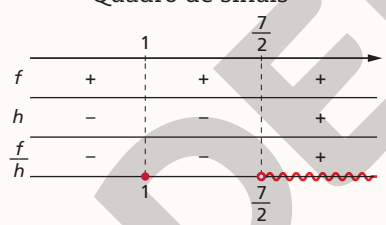
Sinal de $f$




Sinal de $h$




Quadro de sinais




O zero da função $h$ não pode ser considerado, pois anula o denominador da inequação.

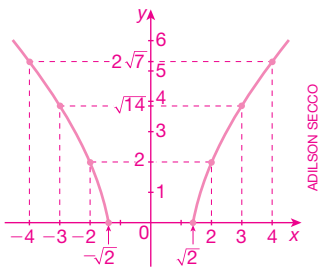
Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x > \dfrac{7}{2}\right\}$.

**Reflita**

Investigue como seria o gráfico da função dada por: $y = \sqrt{2x^2 - 4}$

Condição de existência:
$2x^2 - 4 \geqslant 0 \Rightarrow 2x^2 \geqslant 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}$
Logo: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{2}\right\}$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-\sqrt{2}$ | 0 |
| $\sqrt{2}$ | 0 |
| 2 | 2 |
| $-2$ | 2 |
| 3 | $\sqrt{14}$ |
| $-3$ | $\sqrt{14}$ |
| 4 | $2\sqrt{7}$ |
| $-4$ | $2\sqrt{7}$ |




ADILSON SECCO

### Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**56.** Identifique o domínio de cada função.

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$

b) $y = \sqrt{-x^2 + 14x - 49}$ $D = \{7\}$

c) $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

d) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 6x}}$

**57.** Para que valores reais de $x$ a função dada por $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$ não está definida? $x = 0$

**58.** Escreva para que valores reais cada função dada abaixo está definida.

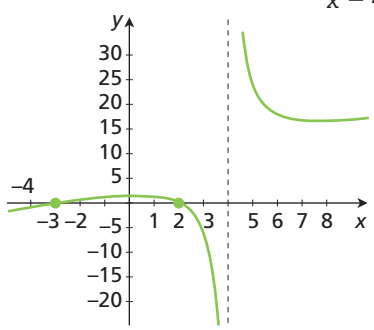
a) $f(x) = \dfrac{-3}{(x^2 - 2x)(x - 5)}$ $\mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$

b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x - 3)(x^2 - x)}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 3\}$

c) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^2}$ $\mathbb{R} - \{0\}$

d) $i(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\frac{x}{2}}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

**59.** Veja o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4}$.




a) Determine as soluções das seguintes inequações:

(I) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} \geqslant 0$ (II) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

- Explique como você determinou as soluções.

b) Escreva o domínio da função $f$. $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

**56. c)** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
**d)** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

**59. a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } -3 \leqslant x \leqslant 2\}$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

**3.** $d = \frac{n(n-1)}{2} - n$ ou $d = \frac{n(n-3)}{2}$

## Aplicação

**1.** Identifique, entre as seguintes leis, aquelas que são leis de funções quadráticas. Justifique sua resposta. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y = 3x^4 - 8x^2 + 5$ Não é função quadrática.

b) $y = \frac{1}{3}x^2 - 7$ É função quadrática.

c) $y = (x - 2)(x + 3)$ É função quadrática; $y = x^2 + x - 6$.

d) $y = 2x - 7$ Não é função quadrática.

e) $y = -3x^2 + 2x + \sqrt{5}$ É função quadrática.

f) $y = x(x - 3)$ É função quadrática; $y = x^2 - 3x$.

**2.** Em certa fase de um campeonato, os times jogaram turno e returno, ou seja, cada time jogou duas vezes com cada um dos outros times: uma partida no próprio campo e outra no campo do adversário. Sabendo que, nessa fase, houve 56 jogos, quantos eram os times? 8 times

**3.** Qual sentença determina o número $d$ de diagonais de um polígono convexo de $n$ lados?

**4.** O valor $p$, em real, por acre (4.047 $m^2$) de uma produção de trigo, $d$ dias depois de plantado, é dado por $p = 12d - 0{,}05d^2$, com $20 < d < 80$.

a) Encontre o valor ($p$) do acre de trigo 50 dias depois de o grão ter sido plantado. R$ 475,00

b) Quantos dias depois de plantado o trigo obtém-se $p = 400$? 40 dias depois

**5.** Sem construir o gráfico da função correspondente, indique em quais casos a parábola intercepta o eixo $x$. Justifique sua resposta.

a) $y = x^2 - 3x + 5$ A parábola não intercepta o eixo $x$, pois $\Delta = -11 < 0$.

b) $y = 2x^2 - 5x - 3$ A parábola intercepta o eixo $x$ em dois pontos, pois $\Delta = 49 > 0$.

c) $y = -x^2 + x + 1$ A parábola intercepta o eixo $x$ em dois pontos, pois $\Delta = 5 > 0$.

d) $y = 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1$ A parábola intercepta o eixo $x$ em um único ponto, pois $\Delta = 0$.

**6.** Determine os vértices das parábolas que correspondem às funções dadas por:

a) $y = 2x^2 - 10x + 8$ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

b) $y = -x^2 + 5$ (0, 5)

**7.** Escreva o conjunto imagem das funções abaixo.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$ $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{2}\right\}$

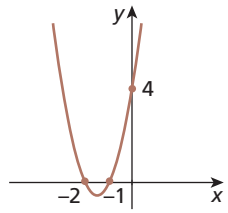
b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $g(x) = -x^2 + 5$ $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$

**8.** A parábola que corresponde à função quadrática $y = x^2 - mx + 3n$ passa pelos pontos (3, −1) e (2, −5). Determine os valores de $m$ e $n$.

Em seguida, determine o vértice dessa parábola.

$m = 1$ e $n = -\frac{7}{3}$; $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$

**9.** Dê a lei da função quadrática cujo gráfico é a parábola abaixo. $y = 2x^2 + 6x + 4$




ADILSON SECCO

**10.** Determine o valor de $k$ para que a parábola correspondente à função quadrática $g$, sabendo que $g(x) = (k + 2)x^2 + (k^2 - 3)x + 5$, admita valor máximo em $x = 3$. Nessas condições, obtenha o valor máximo da função. $k = -3$; $y_v = 14$

**11.** Calcule o valor de $t$ para que a função quadrática de lei $f(x) = (6 - 4t)x^2 + 4x - 6$ tenha valor máximo quando a abscissa do vértice for igual a 1. Em seguida, determine a ordenada do vértice. $t = 2$; $y_v = -4$

**12.** Determine a área máxima que pode ter um retângulo de perímetro igual a 48 cm. 144 $cm^2$

**13.** Esboce o gráfico correspondente a cada uma das funções dadas pelas leis abaixo. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y = -x^2 + 4x$ b) $y = 2x^2 - 5x + 2$

**14.** Usando um *software* de construção de gráfico, construa, em um mesmo plano cartesiano, as parábolas correspondentes às funções dadas pelas leis a seguir.

a) $y = 5x^2$ c) $y = \frac{1}{4}x^2$

b) $y = -5x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$

- Que relação você observa entre a forma da parábola e o coeficiente de $x^2$? Ver resolução no Guia do professor.

**15.** Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações.

a) $x^2 - 5x + 4 > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

b) $(3x^2 - 5x + 2) \cdot (-x^2 + 4x - 4) \geqslant 0$

c) $\frac{4x^2 + 3x - 1}{1 - x^2} \leqslant 0$ b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x = 2\right\}$

d) $\frac{2}{x^2 - 1} \leqslant \frac{x}{x - 1}$ c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{4} \text{ e } x \neq -1 \text{ ou } x > 1\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$

## Aprofundamento

**16.** Existem parábolas que têm o vértice sobre o eixo $y$. Nos demais casos, o vértice pode estar à direita ou à esquerda desse eixo. Ver resolução no Guia do professor.

a) Quando a função é do tipo $y = x^2 + bx + c$, o que determina a posição do vértice em relação ao eixo $y$? Justifique.

b) E quando a função é do tipo $y = ax^2 + bx + c$? Justifique.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

# Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Para que uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$ seja quadrática, o coeficiente de $x^2$ deve ser: alternativa c

**a)** igual a zero.
**b)** positivo.
**c)** não nulo.
**d)** inexistente.

**2.** A concavidade da parábola dada por $y = (-m + 1)x^2 + nx + p$ está voltada para cima se, e somente se: alternativa b

**a)** $m > -1$
**b)** $m < 1$
**c)** $n > 0$
**d)** $p > 0$

**3.** Os zeros da função de lei $y = -x^2 + 9$ são: alternativa c

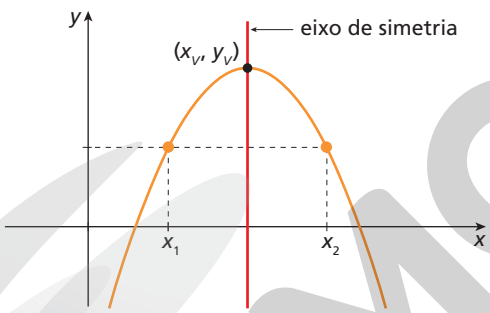
**a)** inexistentes.
**b)** iguais a 3.
**c)** 3 e $-3$.
**d)** iguais a 4,5.

**4.** A função dada por [redacted] é sempre positiva. alternativa d

**a)** $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
**b)** $y = -x^2 + 1$
**c)** $y = x^2 + 3x$
**d)** $y = x^2 + \sqrt{3}$

**5.** Ao analisar o gráfico abaixo, da função quadrática $f$, concluímos que: alternativa c

**a)** $f(x_1) \neq f(x_2)$
**b)** $f(x_1) > f(x_2)$
**c)** $f(x_v) > f(x_2)$
**d)** $f(x_v) < f(x_1)$




ADILSON SECCO

**6.** Sabendo que o vértice da parábola dada por $y = x^2 - 4x + 3$ é o ponto $(2, -1)$, o conjunto imagem dessa função é: alternativa b

**a)** $\mathbb{R}$
**b)** $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
**c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$
**d)** $]-\infty, -1]$

**7.** Um carro percorre uma trajetória retilínea descrevendo um movimento cuja lei da posição $s$ (em metro) em função do tempo $t$ (em segundo) é $s(t) = 4t - 2t^2$. No instante [redacted], o carro para e altera o sentido do movimento. alternativa d

**a)** 5 segundos
**b)** 30 minutos
**c)** 1 hora
**d)** 1 segundo

**8.** Um arquiteto iniciou a planta de uma casa desenhando um retângulo que representa o terreno. O perímetro do retângulo é 100 cm. Como cada centímetro do desenho equivale a 1 metro, então a área máxima do terreno é: alternativa a

**a)** 625 $m^2$
**b)** 100 $m^2$
**c)** 50 $m^2$
**d)** 25 $m^2$

**9.** A solução da inequação $\frac{x^2 - 1}{x} \leqslant 0$ é: alternativa a

**a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant 1\}$
**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$
**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$
**d)** $S = \varnothing$

**10.** O domínio da função $f$, tal que $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 2x - 15}}$, é: alternativa b

**a)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 3\}$
**b)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant 0 \text{ ou } x > 3\}$
**c)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0 \text{ ou } x > 3\}$
**d)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

## Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

| | Número da questão | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Objetivos do capítulo** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| Identificar uma função quadrática. | X | X | X | X | | | | | | |
| Resolver problemas que envolvam funções quadráticas. | | | | | | | X | X | | |
| Analisar o gráfico de uma função quadrática. | | X | | X | X | X | | | | |
| Resolver inequações que envolvam funções quadráticas. | | | | | | | | | X | X |
| **Páginas do livro referentes ao conceito** | 39 a 43 | 43 a 45 | 46 a 48 | 49 a 51 | 51 a 53 | 53 a 55 | 57 a 59 | 57 a 59 | 59 a 62 | 63 |

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

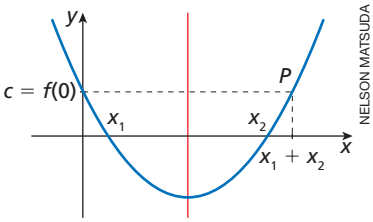
Ao ler o relato de Camille, os alunos entram em contato, e de maneira mais próxima, com a abordagem própria das Ciências, incluindo investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses. Além disso, essa aproximação pode permitir o apoio mútuo entre os alunos. Dessa maneira, essa seção contribui para o desenvolvimento das competências gerais **2** e **9** e da competência específica **5** da BNCC.

# Compreensão de texto

## Teorema de Etiene

*Observação de estudante durante aula do professor Leonardo Muniz mudou seu desempenho na disciplina e ganhou publicação em revista renomada.*

Quando o assunto é Matemática, não é incomum encontrar alunos que apresentem resistência ou dificuldade de entendimento da matéria. Essa era a realidade de Camille Etiene, estudante do curso técnico em Química [do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense – IFF, Campus Bom Jesus do Itabapoana], que hoje não só se declara apaixonada pela disciplina como também tem um teorema para chamar de seu: o Teorema de Etiene.



NELSON MATSUDA

[...] ela recorda com alegria a satisfação de sua descoberta, realizada durante uma aula do primeiro ano do curso técnico, em 2018, quando estudavam funções quadráticas, que têm como gráfico a curva chamada parábola. O professor Leonardo Muniz explica que ensina aos alunos um esquema de cinco passos para o esboço da parábola. O último é a marcação do ponto P, que é o simétrico do ponto de intersecção da parábola com o eixo y (ponto (0, c)), em relação ao eixo de simetria da parábola, como [mostrado] na imagem abaixo, que representa o gráfico de uma função quadrática qualquer com raízes reais.



ERIKA VIEIRA/IFF BOM JESUS

Camille Etiene, estudante do curso técnico em Química do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense – IFF, Campus Bom Jesus do Itabapoana. Rio de Janeiro, 2020.

"Enquanto fazíamos a lista de exercícios e discutíamos as perguntas, olhei para o quadro e vi que, para encontrar o ponto P, era só somar as raízes (os valores de $x_1$ e $x_2$)", conta Etiene. O professor concordou e, imediatamente, os colegas começaram a aplicar a ideia às questões já resolvidas. Identificaram que o argumento era válido e Leonardo chamou a atenção da turma para a prova, que é o processo de mostrar que o teorema está correto. A comemoração foi imediata; um momento de descoberta coletiva que mudou o modo como Camille e os colegas enxergavam a tão temida matemática: "a felicidade foi contagiando a sala toda", relata a aluna.

Etiene, que antes precisava de aulas particulares para superar os desafios da disciplina, hoje oferece auxílio aos que também têm dificuldades com os números. E não só em matemática: "Fiquei muito boa nas matérias de exatas. Nas provas eu estudava para mim e ajudava os colegas e com isso me senti muito especial", afirma.

[...] O Teorema de Etiene mudou a vida de Camille e inspirou colegas, familiares e educadores. Um artigo sobre ele foi publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM), periódico de prestígio entre os profissionais da área. "É um teorema bem simples, mas mudou minha visão e a visão de amigos. Foi muito importante para mim, minha família e amigos. Aproximou mais a turma e isso foi muito legal", conclui.

**Fonte**: <http://portal1.iff.edu.br/nossos-campi/bom-jesus-do-itabapoana/noticias/teorema-de-etiene-estudante-do-curso-tecnico-em-quimica-cria-teorema-matematico>. Acesso em: 29 jul. 2020.

**2.** Etiene passou a ver a Matemática de outra forma, começou a gostar da disciplina. Além disso, se sentiu muito importante por conseguir ajudar os colegas e começou a ter mais segurança, não só em Matemática, mas também nas demais disciplinas. A descoberta também inspirou os colegas.

**3.** Resposta pessoal. Estimular a discussão entre as duplas e, depois, pedir a alguns alunos que contem suas experiências para a turma. Essa atividade propicia a reflexão sobre a influência que o pensamento negativo tem na forma que encaramos as coisas, e como isso pode colocar barreiras para a aprendizagem.

## Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Qual é o assunto principal do texto?
A descoberta de um teorema pela aluna Camille Etiene.

**2.** Como a experiência vivida por Etiene mudou sua vida escolar?

**3.** Você acredita que algumas vezes podemos ter resistência a determinados assuntos, achando que não somos capazes de entendê-los, e não necessariamente dificuldade? Você já passou por alguma situação parecida com a de Etiene? Converse com um colega a respeito.

**4.** O "Teorema de Etiene" pode ser enunciado como: "O ponto P, simétrico do ponto (0, c), em relação ao eixo de simetria da parábola, tem como abscissa o número real $x_p = x_1 + x_2$, sendo $x_1$ e $x_2$ os zeros da função quadrática que tem a parábola como gráfico."
Junte-se a um colega e demonstrem esse teorema.
Dicas:

- Percebam que, independente de como é o gráfico da função quadrática $f$, a ordenada de $P$ será sempre c, ou seja, $f(x_p) = c$.
- Seja uma equação do 2º grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a soma das raízes dessa equação é dada por $-\frac{b}{a}$ e o produto é dado por $\frac{c}{a}$.

Ver resolução no Guia do Professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

3

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3** e **4**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT304** e **EM13MAT404**.

# Função exponencial




Técnicos da Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) trabalham na área contaminada pelo acidente radiológico com césio-137 em Goiânia, GO, 1987.

LORISVALDO DE PAULA/O POPULAR/ESTADÃO CONTEÚDO

**Objetivos do capítulo**

- Efetuar as operações de potenciação e radiciação.
- Identificar uma função exponencial.
- Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial.
- Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais.
- Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais.

PROIBIDO

Os tópicos do capítulo articulam com a competência específica **4**, a competência geral **5** e a habilidade **EM13MAT304** da BNCC, pois os alunos estudam a fim de compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemática para as funções exponenciais, inclusive na modelagem e na resolução de problemas com e sem apoio de tecnologias digitais.

Se julgar pertinente, propor trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias a partir do tema "acidente radioativo com césio-137" ocorrido em Goiânia – GO. Sugerir aos alunos que pesquisem a respeito de radioatividade, da radioatividade do césio-137, sobre isótopos radioativos e suas aplicações na ciência e na tecnologia. Podem ser feitas perguntas norteadoras como: "O que é um elemento radioativo?"; "O que é um isótopo radioativo de um elemento químico?"; "Quais são as aplicações na ciência e na tecnologia?"; "Quais são as consequências para a saúde e para o ambiente ao manipular material radioativo sem os devidos cuidados?"; "Quantos anos serão necessários para que a região afetada pelo césio-137 se torne segura?"; "Como deve ser o descarte de lixo radioativo?"; "Você já ouviu falar de outros acidentes radioativos? Se sim, quais eram os elementos químicos envolvidos?". Mais informações a respeito desse assunto acessar o *site*: <http://www.cesio137goiania.go.gov.br/>. Acesso em: 8 jun. 2020. Na "galeria de vídeos" desse *site* há, ainda, dois episódios do programa *Viver Ciência* sobre o acidente com o césio-137 que podem enriquecer a pesquisa. O tema dialoga com a competência específica **1** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, na medida em que o aluno é levado a refletir sobre um elemento químico e um fenômeno natural associado, o césio e sua meia-vida, seu uso em equipamento médico-hospitalar e a destinação de resíduos radioativos em nosso país. Esse trabalho também pode favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT103** e **EM13CNT104**, com o estudo sobre radiações, suas aplicações, suas potencialidades e seus riscos à saúde e ao ambiente, e da habilidade **EM13CNT306**, ao propor uma discussão a respeito do descarte adequado de material radioativo. Essa situação trata os temas contemporâneos **saúde**, **educação ambiental** e **ciência e tecnologia**.

# 1 Introdução ao estudo da função exponencial

Em setembro de 1987, aconteceu em Goiânia, capital do estado de Goiás, um dos maiores acidentes radiológicos do mundo. O manuseio indevido de um aparelho de radioterapia abandonado gerou uma contaminação com césio-137, que é material radioativo com meia-vida de cerca de 30 anos. O acidente envolveu direta e indiretamente centenas de pessoas e até hoje algumas áreas contaminadas com a substância estão isoladas.

*Meia-vida* de um material radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Assim, determinada quantidade de césio-137 teria sua massa reduzida pela metade somente após cerca de 30 anos. Esse decaimento pode ser expresso por meio de uma função obtida a partir de uma função exponencial.

Além de situações como essa, funções obtidas a partir da exponencial são usadas para descrever muitos fenômenos da vida real, como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos (por meio de técnicas que utilizam a radioatividade), crescimento ou decrescimento de uma população etc. Em alguns casos, a função fornece apenas valores aproximados para os valores reais, pois os fenômenos são influenciados por diversos fatores, que podem não estar sendo considerados na função matemática.

Considere a seguinte situação: segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), estima-se que em 2019 o Brasil tinha 210,1 milhões de habitantes e uma taxa de crescimento populacional de 0,79% ao ano. Com base nesses dados e supondo que a taxa se mantenha constante, podemos fazer uma estimativa da população para o ano de 2050.

| Estimativa populacional | |
|---|---|
| **Ano** | **População** |
| 2019 | 210.100.000 |
| 2020 | $210.100.000 + 0{,}0079 \cdot 210.100.000 = 211.759.790$ |
| 2021 | $211.759.790 + 0{,}0079 \cdot 211.759.790 \simeq 213.432.692$ |
| ⋮ | ⋮ |
| 2049 | $263.956.258 + 0{,}0079 \cdot 263.956.258 \simeq 266.041.513$ |
| 2050 | $266.041.513 + 0{,}0079 \cdot 266.041.513 \simeq 268.143.241$ |

Dados da estimativa de 2019 obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

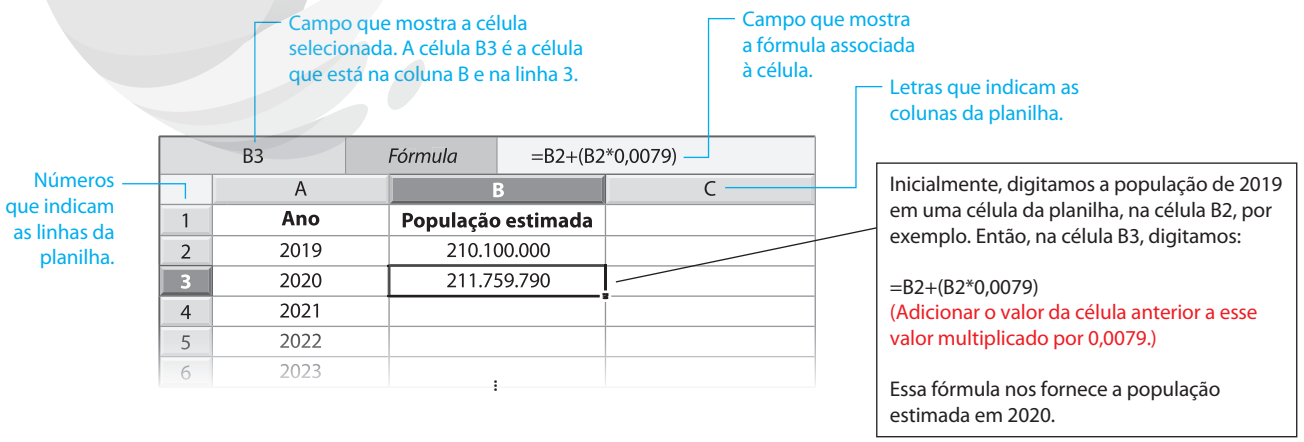
**Observação**

Na página do IBGE, há diversas projeções para a população do Brasil e dos estados brasileiros: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Portanto, se a taxa de crescimento permanecer constante até 2050, a população brasileira será de aproximadamente 268,1 milhões de habitantes.

Note que é extremamente trabalhoso construir uma tabela como essa, pois cada valor depende do cálculo da população do ano anterior. Ou seja, a cada passo o valor obtido anteriormente é multiplicado por 1,0079. Então, para estimar a população de 2050, precisamos calcular a população ano a ano, de 2020 a 2050.

Uma maneira de facilitar esses cálculos seria usar uma planilha eletrônica. Observe:




NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NELSON MATSUDA

| B33 | *Fórmula* | =B32+(B32*0,0079) |
|---|---|---|
| | A | B | C |
| 1 | **Ano** | **População estimada** | |
| 2 | 2019 | 210.100.000 | |
| 3 | 2020 | 211.759.790 | |
| 4 | 2021 | 213.432.692 | |
| 5 | 2022 | 215.118.811 | |
| ⋮ | | | |
| 30 | 2047 | 261.887.348 | |
| 31 | 2048 | 263.956.258 | |
| 32 | 2049 | 266.041.513 | |
| 33 | 2050 | 268.143.241 | |
| 34 | | | |

Não é necessário repetir a fórmula para cada célula da coluna. Basta selecionar a célula B3, levar o cursor até a quina da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção até a célula correspondente à população em 2050 (B33). Esse procedimento copia a fórmula da célula B3 para as células B4 a B33, substituindo B2, respectivamente, por B3, B4, B5, ..., B31 e B32.
Dessa forma, obtemos as populações estimadas em cada um dos anos.

Além da planilha eletrônica, outra maneira de representar os mesmos cálculos é perceber uma regularidade entre os valores de cada linha. Veja:

| Estimativa populacional | |
|---|---|
| **Ano** | **População** |
| 2019 | 210.100.000 |
| 2020 | $210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^1 = 211.759.790$ |
| 2021 | $210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^2 \simeq 213.432.692$ |
| ⋮ | ⋮ |
| 2049 | $210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^{30} \simeq 266.041.513$ |
| 2050 | $210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^{31} \simeq 268.143.241$ |
| $x$ | $210.100.000 \cdot (1 + 0{,}0079)^{x - 2019}$ |

Dados da estimativa de 2019 obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

A diferença no cálculo a partir da regularidade é que um valor não dependerá do número da população do ano anterior. Com essa nova tabela, também é possível perceber que o crescimento é exponencial: a população de cada ano é o produto da constante 210.100.000 por uma potência de base 1,0079.

É importante ressaltar que as estimativas nem sempre revelam os fatos da realidade com muita precisão. Por exemplo, para estimar a população brasileira em 2050, consideramos que a taxa de crescimento se manterá constante; no entanto, de acordo com o IBGE, essa taxa ainda está diminuindo. Isso significa que, em 2050, a população real poderá ser menor que a população estimada.

A seguir, ampliaremos o estudo da potenciação e de suas propriedades, o que nos auxiliará no estudo da função exponencial e na resolução de equações e inequações exponenciais.

## 1.1 Potência de expoente natural

As potências são úteis para representar números muito grandes, como a distância da Terra ao Sol, ou números muito pequenos, como a massa de um átomo.

A distância da Terra ao Sol, por exemplo, é de aproximadamente 150.000.000.000 m e pode ser representada por $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

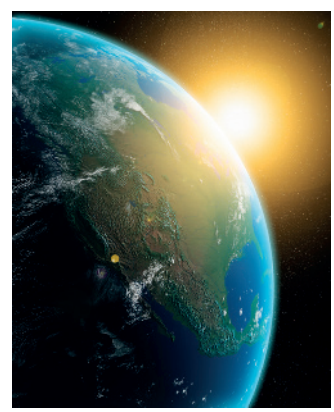
Nesse tipo de notação, utilizamos uma potência de base 10.

Dados um número real $a$ e um número natural $n$, com $n \geqslant 2$, a potência de base $a$ e expoente $n$ é indicada por $a^n$ e é o produto de $n$ fatores iguais a $a$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Para $n = 1$ e $n = 0$, definimos:

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$, para $a \neq 0$



ANDRZEJ WOJCICKI/SCIENCE PHOTO LIBRARY/GETTY IMAGES

Ilustração esquemática sem escala representando o Sol e a Terra; cores-fantasia.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**Exemplos**

**a)** $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

**b)** $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

**c)** $\left(\sqrt{7}\right)^1 = \sqrt{7}$

**d)** $(-1)^0 = 1$

Dados dois números reais $a$ e $b$ e dois números naturais $m$ e $n$, temos as seguintes propriedades:

**1ª propriedade**: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$

**2ª propriedade**: $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{(m-n)}$ (para $a \neq 0$ e $m > n$)

**3ª propriedade**: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

**4ª propriedade**: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (para $b \neq 0$)

**5ª propriedade**: $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$

**Exemplos**

**a)** $5^2 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^5 = 5^{(2+3)}$

**b)** $\frac{8^5}{8^3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}}{\cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8}} = 8^2 = 8^{5-3}$

**c)** $(8 \cdot 9)^2 = (8 \cdot 9) \cdot (8 \cdot 9) = 8 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 8^2 \cdot 9^2$

**d)** $(7 : 3)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{7^2}{3^2}$

**e)** $(3^4)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 3^{(4+4)} = 3^{(4 \cdot 2)}$

Observe que, para $a \neq 0$, definimos $a^0$ de modo que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$ seja válida para $m$ ou $n$ (ou ambos) nulos. Por exemplo: $4^0 \cdot 4^7 = 1 \cdot 4^7 = 4^7 = 4^{(0+7)}$

**Observação**

Dados um número real $a$ e dois números naturais $m$ e $n$, temos, em geral, $a^{m^n} \neq (a^m)^n$. Por exemplo, $3^{1^2} \neq (3^1)^2$, pois: $3^{1^2} = 3^1 = 3$ e $(3^1)^2 = 3^2 = 9$.

## 1.2 Potência de expoente inteiro negativo

Dados um número real $a$, diferente de zero, e um número natural $n$, vamos definir $a^{-n}$ de maneira que a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$, que vale quando $m$ e $n$ são números naturais, seja preservada quando $m$ e $n$ são números inteiros.

Em particular, para $a \neq 0$, devemos ter: $a^n \cdot a^{-n} = a^{(n+(-n))} = a^0 = 1$

Portanto, $a^n \cdot a^{-n} = 1$ implica definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ para } a \neq 0$$

Dizemos que $a^{-n}$ é o **inverso** de $a^n$.

**Observação**

Se $m$ e $n$ são números inteiros, então, para a 2ª propriedade, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, basta que $a$ seja diferente de zero ($m$ não precisa ser maior que $n$).

**Exemplos**

**a)** $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

**b)** $(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$

**c)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

As cinco propriedades enunciadas para as potências de expoentes naturais são válidas para quaisquer expoentes $m$ e $n$ inteiros.

**Observação**

Nas Ciências, é usual escrever números muito grandes ou muito pequenos, que tenham representação decimal finita, em **notação científica**. Nesse tipo de notação, o número é escrito na forma:

$N \cdot 10^m$, em que $1 \leq N < 10$ e $m$ é um número inteiro



CLOUDS HILL IMAGING LTD/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Microscopia eletrônica do ácaro *Dermatophagoides pteronyssinus*, ampliado 45 vezes, colorizada artificialmente. Esse ácaro mede aproximadamente $3 \cdot 10^{-4}$ m de comprimento.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Calcule as potências a seguir.

a) $(-2)^4$ 16

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$ $-\frac{1}{125}$

c) $0^{10}$ 0

d) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$ $\frac{81}{64}$

e) $3^0$ 1

f) $\pi^1$ $\pi$

**2.** Calcule o valor das seguintes expressões:

a) $10^9 \cdot 10^{(-4)}$ 100.000

b) $\frac{13^{19}}{13^{17}}$ 169

c) $(-5)^{15} : (-5)^{12}$ $-125$

d) $2^{-1} \cdot 2^{-2}$ $\frac{1}{8}$

e) $(10 \cdot 7)^2$ 4.900

f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ $-\frac{27}{125}$

g) $(2^3)^2$ 64

h) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^5\right)^0$ 1

**3.** A vida na Terra teve início há cerca de 4,6 bilhões de anos, mas os primeiros ancestrais dos seres humanos só surgiram há aproximadamente 4 milhões de anos. O *Homo habilis*, um de nossos ancestrais, surgiu há cerca de 2 milhões e 200 mil anos. O *Homo erectus* apareceu há apenas 2 milhões de anos. Nossa espécie, o *Homo sapiens*, surgiu entre 400 mil e 100 mil anos atrás, o que significa que nossa existência é relativamente recente.

Qual é a diferença de tempo, em ano, entre o surgimento do *Homo habilis* e do *Homo erectus*, aproximadamente? alternativa b

a) $4 \cdot 10^5$

b) $2 \cdot 10^5$

c) $1{,}8 \cdot 10^6$

d) $2 \cdot 10^6$

e) $4{,}1 \cdot 10^6$

# 1.3 Potência de expoente racional

## Raiz enésima

Dado um número $a$, real e não negativo, e um número natural $n$, com $n \geqslant 1$, a **raiz enésima** de $a$ é definida como o número $b$, real e não negativo, tal que $b^n = a$. Escrevemos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geqslant 0$$

O símbolo $\sqrt{\ }$ é conhecido como **radical**, $a$ é o **radicando** e $n$ é o **índice**.

- Se $n$ for um número ímpar, pode-se definir $\sqrt[n]{a} = b$, em que $a$ e $b$ são números reais negativos tais que $b^n = a$.

  Veja:

  $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$

- Se $n$ for um número par e $a$ for um número real negativo, não é possível definir $\sqrt[n]{a}$ em $\mathbb{R}$, pois, nesse caso, não há um número real $b$ tal que $b^n = a$.

  Veja:

  $\sqrt{-9}$ não está definida nos números reais, pois não existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 = -9$.

### Exemplos

a) $\sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$

c) $\sqrt[4]{0} = 0$, pois $0^4 = 0$

d) $\sqrt[10]{1.024} = 2$, pois $2^{10} = 1.024$

A raiz enésima de um número apresenta as seguintes propriedades (sendo $a$ e $b$ reais não negativos, $m$ inteiro, $n$ e $p$ naturais e não nulos):

**1ª propriedade:** $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

**2ª propriedade:** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (para $b \neq 0$)

**3ª propriedade:** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

**4ª propriedade:** $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$

**5ª propriedade:** $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

**Pensamento computacional**

**Abstração**

No exercício **3**, é preciso identificar as informações relevantes, dentre as diversas disponíveis, para responder à pergunta proposta. Buscar a informação relevante, filtrando-a de todas as disponíveis, durante a resolução de um problema pode favorecer o desenvolvimento de um dos pilares do pensamento computacional: a **abstração**.

- Quais informações do enunciado não foram utilizadas na resolução do exercício **3**?
- Elabore um problema em que as informações que não foram utilizadas sejam necessárias e as que foram utilizadas possam ser descartadas.

- Não foram utilizadas: início da vida na Terra (4,6 bi de anos); primeiros ancestrais (4 bi de anos) e aparecimento do *Homo sapiens* (entre 400 e 100 mil anos).
- resposta pessoal

**Observação**

Em geral, o índice 2 é omitido na representação de raízes. Assim:

$\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

## Exercícios resolvidos

**R1.** Simplificar a expressão: $\sqrt{12} + \sqrt{108}$

▸ **Resolução**

Fatorando os radicandos, temos:

$\sqrt{12} + \sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} =$

$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} =$

$= 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

Logo: $\sqrt{12} + \sqrt{108} = 8\sqrt{3}$

**R2.** Efetuar a racionalização do denominador da expressão: $\frac{5}{\sqrt{3} + 2}$

▸ **Resolução**

Para racionalizar, é necessário eliminar as raízes do denominador de uma expressão. No caso da expressão apresentada, deve-se fazer as seguintes manipulações:

$\frac{5}{\sqrt{3} + 2} = \frac{5}{\sqrt{3} + 2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 2} =$

$= \frac{5(\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} = \frac{5\sqrt{3} - 10}{3 - 4} = \frac{5\sqrt{3} - 10}{-1} =$

$= 10 - 5\sqrt{3}$

Logo: $\frac{5}{\sqrt{3} + 2} = 10 - 5\sqrt{3}$

## Definição de potência de expoente racional

Dados um número real positivo $a$ e um número racional $\frac{p}{q}$ (em que $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q > 0$), definimos:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

**Observação**

No cálculo da raiz quadrada do quadrado de um número $a$, observe que: $\sqrt{a^2} = |a|$
Por exemplo:
$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

**Exemplos**

**a)** $7^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{7^2} = \sqrt[9]{49}$

**b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}$

**c)** $\left(\sqrt{11}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{11}\right)^2} = \sqrt[3]{11}$

**d)** $\left[(-5)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

As cinco propriedades enunciadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes racionais.

## Exercício resolvido

**R3.** Calcular o valor de $x$ sendo: $x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$

▸ **Resolução**

$x = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} =$

$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = 3\sqrt{3}$

Portanto, $x$ vale $3\sqrt{3}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

## 1.4 Potência de expoente irracional

Sendo $a$ um número real positivo e $x$ um número irracional, podemos estimar uma potência $a^x$ por meio de aproximações, conforme mostra o exercício resolvido a seguir.

### Exercício resolvido

**R4.** Determinar entre quais potências de 3 com expoente natural está compreendido $3^{\sqrt{2}}$.

▸ **Resolução**

Temos: $3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$, pois $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$. Então, $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$. Isso significa que $3^{\sqrt{2}}$ situa-se entre os números inteiros 3 e 9.

As cinco propriedades estudadas para as potências de expoentes naturais também são válidas para as potências de expoentes irracionais.

### Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**4.** Determine o valor de:

a) $\sqrt{1{,}69}$ 1,3

b) $\sqrt[3]{-1{,}728}$ −1,2

c) $81^{\frac{1}{2}}$ 9

d) $4^{\frac{2}{3}}$ $2\sqrt[3]{2}$

**5.** Efetue as operações e determine o resultado ao final.

a) $121^{0,9} : 121^{0,4}$ 11

b) $(0,3)^8 \cdot (0,3)^{-7} : (0,3)^{-2}$ 0,027

c) $\dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{(-3)^2 \cdot 3^{-2}}$ $\sqrt[3]{3}$

d) $\left[32^{\frac{5}{2}}\right]^{\frac{2}{25}}$ 2

**6.** Simplifique as expressões.

a) $\sqrt{50} - \sqrt{8}$ $3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{80} + \sqrt{180}$ $10\sqrt{5}$

**7.** Racionalize o denominador das expressões a seguir.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3} - 3}$ $\dfrac{-\sqrt{3} - 3}{3}$

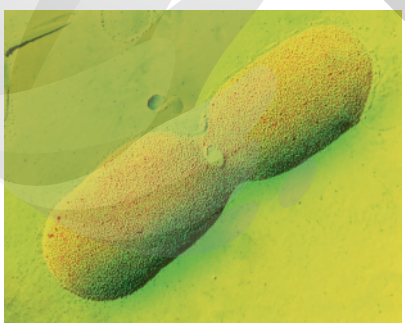
b) $\dfrac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

**8.** Determine entre quais números inteiros a potência $5^{\sqrt{2}}$ está. entre 5 e 25

## 2 Função exponencial

Acompanhe a situação a seguir.

A principal forma de multiplicação das bactérias é a divisão binária. Nesse tipo de divisão, o material genético é duplicado, e a bactéria se divide ao meio, originando duas novas bactérias idênticas a ela.



DR. TONY BRAIN/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Bactéria *E. coli* em processo de divisão binária. Imagem ampliada 24.390 vezes, colorizada artificialmente.



CULTURE CREATIVE/AFP

A Microbiologia é o estudo dos microrganismos, ou seja, de seres vivos que só podem ser vistos por meio de microscópios, como vírus, bactérias e alguns fungos.

Sabendo que determinada colônia, iniciada por uma única bactéria, duplica a cada 20 minutos, quantas bactérias existirão após 2 horas e 40 minutos?

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404** da BNCC, já que os alunos analisarão funções em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínio, imagem e intervalos de crescimento e decrescimento.

O tema que introduz o tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC, uma vez que os estudantes vão estudar o crescimento populacional de bactérias a partir de uma abordagem matemática. Se julgar oportuno, propor um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Os alunos podem pesquisar, por exemplo, quais fatores podem influenciar no desenvolvimento de bactérias em nosso organismo ou no ambiente, identificando as que podem ser prejudiciais à saúde, e, em seguida, buscar informações que os ajudem a prevenir a disseminação e o crescimento populacional indesejável de bactérias. Esse trabalho também pode favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT202** e **EM13CNT203**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Após um período de 20 minutos, teremos 2 bactérias. Após dois períodos de 20 minutos, ou seja, 40 minutos, teremos 4 bactérias. Vamos fazer um esquema:

1 período de 20 min → 2 bactérias → $2^1$
2 períodos de 20 min → 4 bactérias → $2^2$
3 períodos de 20 min → 8 bactérias → $2^3$
4 períodos de 20 min → 16 bactérias → $2^4$

Então, após 2 horas e 40 minutos, ou seja, após 8 períodos de 20 minutos, teremos 256 bactérias.

Da mesma maneira, após $x$ períodos de 20 minutos, o número $n$ de bactérias será dado por $n = 2^x$. Esse é um exemplo de função em que a variável está no expoente da expressão que a define.

**Observação**

A combinação dos símbolos em $\mathbb{R}_+^*$ indica que consideramos apenas os números reais positivos e excluímos o zero.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é chamada de **função exponencial** de base $a$ quando existe um número real $a$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

### Exemplos

**a)** $f(x) = 3^x$ **b)** $g(x) = (0{,}7)^x$ **c)** $h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **d)** $i(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$

**Observação**

Existem funções que podem ser obtidas a partir da função exponencial. Por exemplo:
$f(x) = 3^{(2x+1)}$
$g(x) = 5 \cdot 4^x$
$h(x) = 2^x - 1$

Em uma função exponencial de lei $f(x) = a^x$, a base $a$ deve ser positiva e diferente de 1, pois:

- se $a = 1$, então $f$ é uma função constante igual a 1.
- se $a = 0$ e $x \leqslant 0$, então $a^x$ não está definida; portanto, $f$ também não está.
- se $a = 0$ e $x > 0$, então $f$ é uma função constante igual a 0.
- se $a < 0$, então $f$ não está definida para todo $x$ real. Por exemplo:

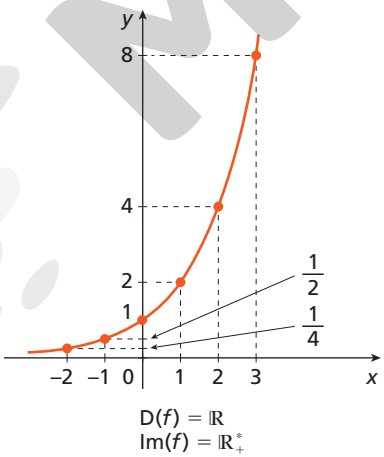
se $a = -4$, então $f(x) = (-4)^x$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

## 2.1 Gráfico da função exponencial

Observe os gráficos e alguns pontos das funções exponenciais dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- $f(x) = 2^x$

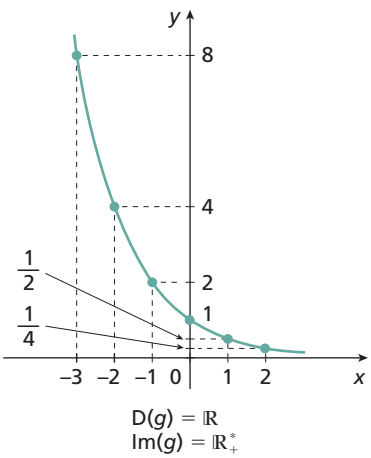
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |




$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

- $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| $-3$ | 8 |
| $-2$ | 4 |
| $-1$ | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ |




$D(g) = \mathbb{R}$
$Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

**Observação**

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** quando, para qualquer $y \in B$, sempre há $x$ tal que $f(x) = y$, ou seja, quando $Im(f) = CD(f)$. Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, exponencial, dada pela lei $g(x) = a^x$; segue da definição de função exponencial que $g$ é sobrejetora, pois $Im(g) = CD(g) = \mathbb{R}_+^*$.

O gráfico de qualquer função exponencial cuja lei é $f(x) = a^x$ é uma curva que tem aspecto semelhante ao dos gráficos apresentados acima e intercepta o eixo $y$ no ponto (0, 1).

Observe que os gráficos das funções se aproximam do eixo $x$, mas não o intersectam nem o tangenciam. Por isso, a reta $y = 0$ é chamada de **assíntota** dos gráficos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

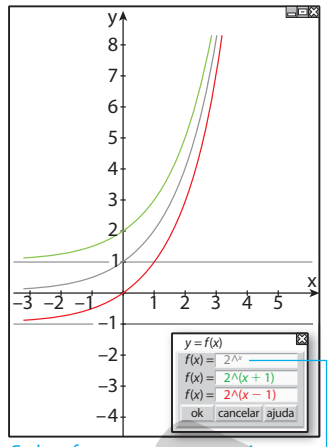
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

As funções obtidas a partir da função exponencial nem sempre têm essas características. Em um *software* de construção de gráficos, vamos construir, por exemplo, os gráficos das funções $f$ (em cinza), $i$ (em verde) e $h$ (em vermelho), tais que $f(x) = 2^x$, $i(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = 2^x - 1$.

Note que:

- o gráfico da função $i(x) = 2^x + 1$ é o gráfico da função $f$ transladado 1 unidade para cima;
- o gráfico da função $h(x) = 2^x - 1$ é o gráfico da função $f$ transladado 1 unidade para baixo.

Observe que o gráfico da função $h$ passa pela origem do plano cartesiano, no ponto (0, 0), o domínio de $h$ é $D(h) = \mathbb{R}$ e seu conjunto imagem é $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -1\}$. A assíntota do gráfico de $h$ é a reta $y = -1$.



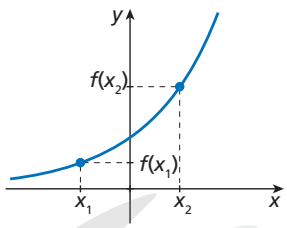
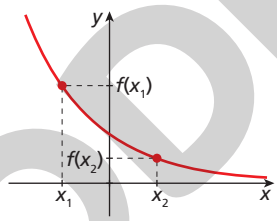

Cada *software* tem uma maneira diferente de escrever as expressões que representam as funções. Nesse exemplo, para indicar "2 elevado a x", escrevemos: 2^x. Note também que nesse *software* as leis das funções são diferenciadas pelas cores, pois todas elas estão representadas pela letra *f*.

## Crescimento e decrescimento de uma função exponencial

Analisando as tabelas de valores e os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, apresentados na página anterior, temos:

- quando os valores de $x$ aumentam, os correspondentes valores de $f(x) = 2^x$ também aumentam. Isso ocorre porque a base $a$ é maior que 1 (nesse exemplo, $a = 2$). Portanto, a função $f$ é **crescente**.
- quando os valores de $x$ aumentam, os correspondentes valores de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ diminuem. Isso ocorre porque a base $a$ está entre 0 e 1 $\left(\text{nesse exemplo, } a = \frac{1}{2}\right)$. Portanto, a função $g$ é **decrescente**.

De modo geral, temos:

| Função crescente ($a > 1$) | Função decrescente ($0 < a < 1$) |
|---|---|
|  |  |
| $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ | $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$ |





### Exemplos

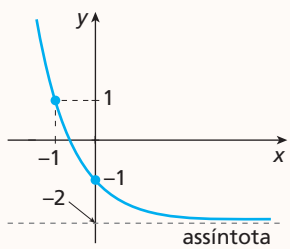
**a)** $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
$g$ é decrescente

**b)** $h(x) = (0{,}4)^x$
$h$ é decrescente

**c)** $i(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$
$i$ é crescente

### Exercício resolvido

**R5.** Observar o gráfico da função $f$, dada por $f(x) = a \cdot 3^{-x} + b$, e determinar os valores de $a$ e $b$.




▸ **Resolução**

Os pontos $(-1, 1)$ e $(0, -1)$ pertencem ao gráfico de $f$.

Para $x = -1$, temos: $f(-1) = 1$
Assim: $1 = a \cdot 3^{-(-1)} + b \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = a \cdot 3 + b$ (I)
Para $x = 0$, temos: $f(0) = -1$
Assim: $-1 = a \cdot 3^{-(0)} + b \Rightarrow -1 = a \cdot 1 + b$ (II)
Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos: $a = 1$ e $b = -2$

Portanto, $f(x) = 3^{-x} - 2$, ou seja, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.

**Reflita**

Qual é o domínio e o conjunto imagem da função $i(x) = 2^x + 1$? Em qual ponto o gráfico da função $i$ corta o eixo $y$? Qual é sua assíntota?

$D(i) = \mathbb{R}$; $Im(i) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$; ponto: (0, 2); assíntota: $y = 1$

**Observação**

Dizemos que uma função $f: A \to B$ é **injetora** se, para quaisquer $x_1$ e $x_2$ de $A$, $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$. Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, exponencial, dada pela lei $g(x) = a^x$ e $x_1$ e $x_2$ em $\mathbb{R}$, tais que $x_1 \neq x_2$. Suponha, por absurdo, que $g(x_1) = g(x_2)$. Então $a^{x_1} = a^{x_2}$, mas pelas propriedades da potenciação sabemos que se $a^{x_1} = a^{x_2}$ então $x_1 = x_2$, o que é absurdo. Essa contradição nos indica que se $x_1 \neq x_2$, temos $g(x_1) \neq g(x_2)$, isto é, $g$ é injetora.

Para $f(x) \leqslant -2$, teríamos:
$\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2 \leqslant -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 0$
Isso é absurdo, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ é sempre maior que zero.

**Reflita**

Por que, neste caso, $f(x)$ não pode ser menor ou igual a $-2$?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

No exercício **10**, os estudantes mobilizam estratégias e conhecimentos previamente adquiridos para relacionar as leis de cada função aos seus respectivos gráficos, uma vez que os padrões do comportamento da função em termos gráficos podem ser analisados a partir dos coeficientes e base da função exponencial. Dessa maneira, praticam-se habilidades do **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**9.** Construa o gráfico das funções exponenciais a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d) $i(x) = 4^x$

**10.** Associe cada uma das leis de funções a seguir à sua respectiva representação gráfica. Em seguida, se achar conveniente, use um *software* de construção de gráficos para conferir sua resposta.

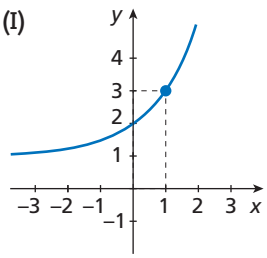
a) $f(x) = 3^{x+1}$ III

b) $g(x) = 2^x + 1$ I

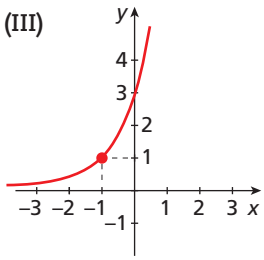
c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ IV

d) $i(x) = 4^{x-1}$ II

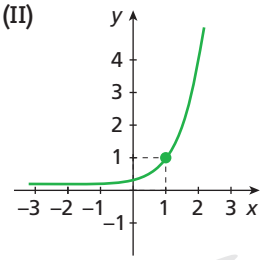
(I)



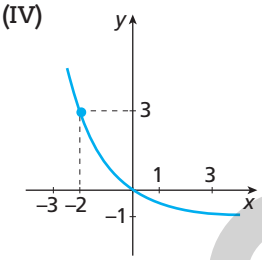

(III)




(II)




(IV)




**11.** Qual é a imagem da função $f(x) = 2^x + 4$? Se achar conveniente, use um *software* de construção de gráficos para ajudar na resolução. $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$

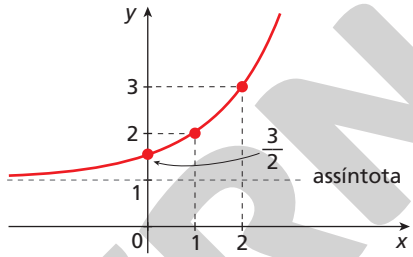
**12.** Classifique as funções dadas pelas leis abaixo em crescente ou decrescente.

a) $g(x) = (\sqrt{2})^x$ crescente

b) $h(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$ decrescente

c) $i(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$ crescente

**13.** Observe abaixo o gráfico da função $f$, dada por $f(x) = 2^{x+a} + b$, e determine os valores de $a$ e $b$, sabendo que $a = -b$. $a = -1$ e $b = 1$




**14.** Dada a função $f$, tal que $f(x) = 5^x$, determine:

a) $\frac{f(4)}{f(3)}$ 5 b) $\frac{f(3)}{f(2)}$ 5 c) $\frac{f(2)}{f(1)}$ 5 d) $\frac{f(1)}{f(0)}$ 5

- O que você observa nos resultados encontrados? Ver resolução no Guia do professor.
- Refaça os itens anteriores empregando a lei $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor da base $a$ da função? De que maneira?
- Então, a que conclusão chegamos?

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT304** da BNCC, na medida em que os alunos resolvem e elaboram problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação entre grandezas. Além disso, o tópico permite articulação com a competência específica **3**, uma vez que os estudantes utilizam os conceitos e os procedimentos relacionados às funções exponenciais, e outras funções obtidas a partir dela, como estratégia na elaboração e resolução de problemas.

O regime de juro composto e a obtenção de suas fórmulas serão estudados no capítulo "Matemática financeira".

# 2.2 Aplicações da função exponencial

São muitas as áreas do conhecimento que fazem uso de funções do tipo exponencial, ou de funções obtidas a partir dela, para resolver situações recorrentes: Engenharia, Ciências da Natureza, Geologia, Finanças, entre outras. Veja alguns exemplos.

### Exemplos

**a)** Um capital de R$ 100,00 foi investido em uma aplicação financeira que rende 2% ao mês. Podemos utilizar a expressão $M(t) = 100 \cdot 1{,}02^t$ para calcular o saldo $M$ dessa aplicação após $t$ meses.

Para $t = 1$, temos: $M(1) = 100 \cdot 1{,}02^1 \Rightarrow M(1) = 102$
Portanto, após 1 mês o saldo será de R$ 102,00.
Para $t = 12$, temos: $M(12) = 100 \cdot 1{,}02^{12} \Rightarrow M(12) \simeq 126{,}82$
Logo, após 1 ano o saldo será aproximadamente de R$ 126,82.

**b)** Em determinada cidade, o número de habitantes é dado pela função $H$, sendo $H(r) = k \cdot 2^{3r}$, em que $k$ é constante e $r$ (que é o raio de distância a partir do centro dessa cidade) é positivo e dado em quilômetro.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Sabendo que existem 12.288 habitantes em um raio de 4 km contados desde o centro, quantos habitantes há em um raio de 6 km?
Empregando a função dada, podemos descobrir o valor da constante $k$:
$H(r) = k \cdot 2^{3r}$

$12.288 = k \cdot 2^{3 \cdot 4} \Rightarrow 12.288 = k \cdot 2^{12} \Rightarrow k = \frac{12.288}{2^{12}} \Rightarrow k = \frac{12.288}{4.096} \Rightarrow k = 3$

Assim, para calcular o número de habitantes em um raio de 6 km, substituímos a constante $k$ por 3 e o raio $r$ por 6:

$H(r) = k \cdot 2^{3r} \Rightarrow H(6) = 3 \cdot 2^{(3 \cdot 6)} \Rightarrow H(6) = 3 \cdot 2^{18} \Rightarrow H(6) = 786.432$

Portanto, há 786.432 pessoas em um raio de 6 km.

**c)** Vimos que meia-vida de um elemento radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Considerando que a meia-vida do césio-137 é 30 anos, a massa de determinada quantidade desse elemento ao longo do tempo pode ser dada por $M(t) = m \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$, em que $m$ é a massa inicial e $t$ é o tempo, em meias-vidas.

Assim, considerando, por exemplo, uma quantidade de 96 g de césio-137, sua massa após $t$ meias-vidas será: $M(t) = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

Vamos calcular a massa após 90 anos, que corresponde a 3 meias-vidas:

$M(t) = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{96}{8} = 12$

Logo, após 90 anos, 96 g de césio-137 se reduzirão a 12 g.

**Explore**

Elabore uma pergunta para cada um dos exemplos ao lado. Passe suas questões para um colega resolver e resolva as questões criadas por ele. resposta pessoal



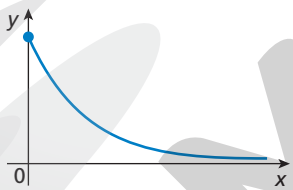
MEGGI/SHUTTERSTOCK

Isótopo radioativo césio-137.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**15.** A radioatividade é a propriedade que algumas substâncias têm de emitir radiações. Observe o gráfico da função $f$, sendo $f(x) = a^x$, com $a \neq 1$, que representa a radioatividade $y$ de determinado minério em função do tempo $x$.



ADILSON SECCO

Agora, responda às questões.

**a)** A radioatividade está aumentando ou diminuindo? Por quê? Diminuindo, pois: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

**b)** Esse minério deixará de ser radioativo em algum momento? Por quê? Não, porque a curva não corta o eixo $x$.

**c)** Quais são os possíveis valores de $a$? $\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

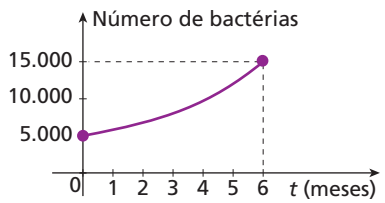
**16.** Certo montante pode ser calculado pela fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$, em que $C$ é o capital, $i$ é a taxa corrente e $t$ é o tempo. Com um capital de R$ 20.000,00, a uma taxa anual de 12% ($i = 0{,}12$), qual será o montante após 3 anos? R$ 28.098,56

**17.** Segundo a lei de resfriamento do cientista inglês Isaac Newton (1643-1727), a temperatura de um corpo diminui exponencialmente. Por exemplo, sob certas condições, a temperatura $T$ de batatas assadas, após saírem do forno, em grau Celsius, é dada por $T = 20 + 160 \cdot e^{-6t}$, em que $e \simeq 2{,}7$ e $t$ é o tempo decorrido, em hora.

**a)** Qual era a temperatura das batatas quando saíram do forno? 180 °C

**b)** Com uma calculadora, calcule a temperatura das batatas 30 minutos após saírem do forno. $\simeq$ 28 °C

**18.** Em uma pesquisa, obteve-se o gráfico abaixo, que indica o crescimento de uma cultura de bactérias no decorrer de 6 meses.



ADILSON SECCO

**a)** Com quantas bactérias se iniciou a pesquisa? 5.000 bactérias

**b)** Após 6 meses, qual é a quantidade total de bactérias? 15.000 bactérias

**c)** Admitindo a lei de formação da função que representa essa situação como $f(t) = k \cdot a^t$, determine os valores de $a$ e de $k$. $a = \sqrt[6]{3}$ e $k = 5.000$

**d)** Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função? $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 6\}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leq y \leq 15.000\}$

**e)** Qual é o número de bactérias após 3 meses? $\simeq$ 8.650 bactérias

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# 3 Equações exponenciais e sistemas

**Reflita**

Entre quais números inteiros consecutivos está $x$ para que $2^x = 20$?

Como $2^4 < 20 < 2^5$, temos $4 < x < 5$.

Equações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **equações exponenciais**.

### Exemplos

**a)** $2^x = 7$ **b)** $5^{-x} = \sqrt{5}$ **c)** $14^{x+9} = \left(\frac{1}{28}\right)^{-x} + 2$

Podemos resolver algumas dessas equações escrevendo ambos os membros da igualdade como potências de mesma base $a$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) e aplicando a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

**Reflita**

Sejam $a$, $b$, $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $b < 0$. Por que não existe $x$ real que satisfaça a equação $a^x = b$?

Porque, para todo $a > 0$ e todo $x$ real, temos $a^x > 0$.

## Exercícios resolvidos

**R6.** Resolver a equação exponencial $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27}$.

▸ **Resolução**

Primeiro, vamos escrever os membros da equação em uma mesma base:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{27} \Rightarrow \left(3^{-1}\right)^x = 27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}}$$

Logo: $-x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Portanto, $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

**R7.** Resolver a equação $4^x + 4 \cdot 2^x = 5$.

▸ **Resolução**

$4^x + 4 \cdot 2^x = 5 \Rightarrow \left(2^2\right)^x + 4 \cdot 2^x - 5 = 0 \Rightarrow \left(2^x\right)^2 + 4 \cdot \left(2^x\right) - 5 = 0$

Escrevendo $2^x = y$, temos: $y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -5$

Como $y = 2^x$, temos:

- $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$
- $2^x = -5$ (não existe $x$ real que satisfaça essa equação)

Portanto, $S = \{0\}$.

**R8.** Resolver o sistema de equações: $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = \frac{1}{2} \\ 7^{x+y} = 1 \end{cases}$

▸ **Resolução**

Primeiro, vamos desenvolver cada uma das equações.

- $2^x \cdot 4^y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x \cdot \left(2^2\right)^y = 2^{-1} \Rightarrow 2^x \cdot 2^{2y} = 2^{-1} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2^{x+2y} = 2^{-1} \Rightarrow x + 2y = -1$ (I)
- $7^{x+y} = 1 \Rightarrow 7^{x+y} = 7^0 \Rightarrow x + y = 0$ (II)

Agora, resolveremos o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -1$$

Portanto, $S = \{(1, -1)\}$.

**Observação**

Note que a solução do sistema é o par ordenado $(1, -1)$, em que $x = 1$ e $y = -1$, e não os números 1 e $-1$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**R9.** Determinar o ponto de intersecção dos gráficos das funções: $f(x) = \frac{1}{2^{x+1}}$ e $g(x) = 4^{x+1}$

**▸ Resolução**

Para que os gráficos tenham um ponto em comum, deve existir pelo menos um valor de $x$ tal que as imagens desse valor pelas duas funções coincidam, ou seja, $f(x) = g(x)$. Assim:

$$\frac{1}{2^{x+1}} = 4^{x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = (2^2)^{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2^{-1})^{x+1} = 2^{2x+2} \Rightarrow 2^{-x-1} = 2^{2x+2}$$

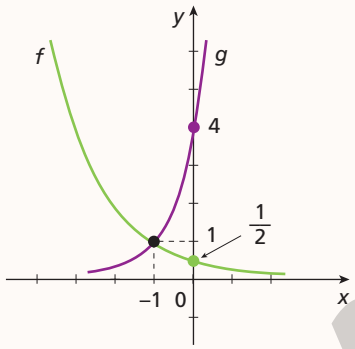
Portanto: $-x - 1 = 2x + 2 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Para $x = -1$, temos:

$f(-1) = g(-1) = 4^{-1+1} = 4^0 = 1$

Logo, o ponto de intersecção é $(-1, 1)$.

Para visualizar esse ponto no plano cartesiano, podemos construir os gráficos das funções:




ADILSON SECCO

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**19.** Dê o conjunto solução das equações a seguir.

a) $10^x = 1.000$ $S = \{3\}$

b) $(0,1)^{2x} = 10$ $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

c) $(0,001)^x = 1.000$ $S = \{-1\}$

d) $\left(\frac{1}{100}\right)^{2x} = 0,0001$ $S = \{1\}$

**20.** Resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 64$ $S = \{6\}$

b) $(0,5)^x = 4^{(1-3x)}$ $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x = \frac{1}{128}$ $S = \{14\}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-10} = \frac{1}{729}$ $S = \{-4, 4\}$

e) $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x = -1$ $S = \{-1, 0\}$

f) $11^{2x} + 2 \cdot 11^x = 3$ $S = \{0\}$

**21.** Dada a equação $2^x = 7$, podemos determinar entre quais números inteiros consecutivos está sua solução. Basta observar que $4 < 2^x < 8$, ou seja, $2^2 < 2^x < 2^3$. Como potências de base 2 crescem quando crescem seus expoentes, e vice-versa, concluímos que $2 < x < 3$, isto é, a solução está entre 2 e 3.

Agora, indique entre quais números inteiros consecutivos está a solução de cada equação.

a) $2^x = 14$ $3 < x < 4$

b) $3^x = 29$ $3 < x < 4$

c) $3^{x+1} = 10$ $1 < x < 2$

d) $2^{x-1} = 100$ $7 < x < 8$

**22.** (Fuvest-SP) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se $a$ e $b$ são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que: alternativa e

a) $a + b = 2$

b) $a + b = 1$

c) $a - b = 3$

d) $a - b = 2$

e) $a - b = 1$

**23.** Resolva os sistemas de equações exponenciais.

a) $\begin{cases} 2^{2x+y} = 4 \\ 2^{x-y} = 2^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^{-2} \\ 7^{2x} : 7^y = 1 \end{cases}$

**24.** Certa substância se decompõe segundo a lei $m(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$, em que $k$ é uma constante, $t$ indica o tempo em minuto e $m(t)$ é a massa da substância em grama no instante $t$.

a) Sabendo que no instante inicial ($t = 0$) há 2.048 gramas, qual é o valor de $k$? $k = 2.048$

b) A massa dessa substância decai para 512 gramas após quantos minutos? 4 minutos

**25.** (Unicamp-SP) Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $f(t) = a \cdot 2^{-bt}$, onde a variável $t$ é dada em anos e $a$ e $b$ são constantes.

a) Encontre as constantes $a$ e $b$ de modo que a população inicial ($t = 0$) seja igual a 1.024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial. $a = 1.024$ e $b = \frac{1}{10}$

b) Qual é o tempo mínimo para que a população se reduza a $\frac{1}{8}$ da população inicial? 30 anos

c) Esboce o gráfico da função $f(t)$ para $t \in [0, 40]$. Ver resolução no Guia do professor.

**26.** (Unifesp) Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada 2 horas. Daí, se $K$ é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função $f(t) = K \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ para estimar a sua eliminação depois de um tempo $t$, em horas. Neste caso, o tempo mínimo necessário para que uma pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de: alternativa b

a) 12 horas e meia.

b) 12 horas.

c) 10 horas e meia.

d) 8 horas.

e) 6 horas.

**27.** Determine o ponto de intersecção dos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{9^{x-1}}$ e $g(x) = 3^{x+1}$. $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

23. a) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$ b) $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

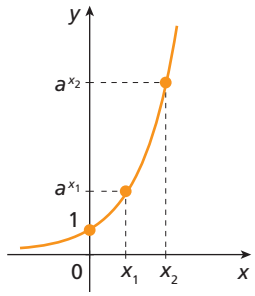
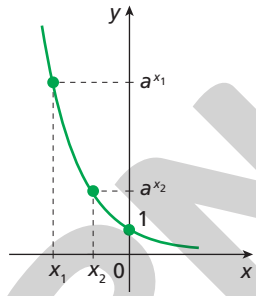
# 4 Inequações exponenciais

Inequações que têm a incógnita em pelo menos um expoente são chamadas de **inequações exponenciais**.

### Exemplos

**a)** $3^x < 27$ **b)** $2^{-3x} \geqslant \sqrt{5}$ **c)** $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 7^3$ **d)** $8^{x+6} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^{-x} + 2^x$

Já vimos que uma função exponencial pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base $a$.

| Função crescente ($a > 1$) | Função decrescente ($0 < a < 1$) |
|---|---|
|  |  |
| $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$ | $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$ |

ADILSON SECCO

Dessa maneira, podemos concluir que:

- Quando a base da potência é maior que 1, a relação de desigualdade entre as potências se mantém entre os expoentes. Ou seja, para $a > 1$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 > x_1$$

sinal mantido

- Quando a base da potência está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes. Ou seja, para $0 < a < 1$, temos:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow x_2 < x_1$$

sinal invertido

Sempre que for possível escrever ambos os membros de uma inequação exponencial como potências de mesma base, poderemos resolvê-la usando alguma dessas relações.

**Observação**

Analogamente, temos:
- se $a > 1$, então:
  $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow x_2 \geqslant x_1$
- se $0 < a < 1$, então:
  $a^{x_2} \geqslant a^{x_1} \Rightarrow x_2 \leqslant x_1$

## Exercícios resolvidos

**R10.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação exponencial $5^{x+12} < 25$.

▸ **Resolução**

$5^{x+12} < 25 \Rightarrow 5^{x+12} < 5^2$

Como a base 5 é maior do que 1, temos:

$x + 12 < 2 \Rightarrow x < -10$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10\}$.

**R11.** Determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8$$

▸ **Resolução**

Como $0 < \frac{1}{8} < 1$, temos:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow x + 3 \geqslant 8 \Rightarrow x \geqslant 5$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

**Outro modo:**

Note que, aplicando as propriedades de potências, também poderíamos trabalhar com uma inequação com base maior que 1:

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^8 \Rightarrow 8^{-(x+3)} \leqslant 8^{-8} \Rightarrow$

$\Rightarrow -(x + 3) \leqslant -8 \Rightarrow x \geqslant 5$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**R12.** Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+5x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$$

**▸ Resolução**

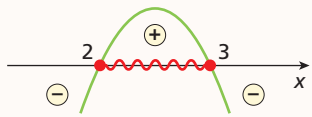
Como a base é um número entre 0 e 1, temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+5x} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{6} \Rightarrow -x^2 + 5x \geqslant 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$$

Resolvendo a equação $-x^2 + 5x - 6 = 0$, obtemos $x = 2$ ou $x = 3$.

Então, para $-x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$, temos o intervalo indicado ao lado:




Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$.

**Reflita**

Com um colega e a partir da resposta do exercício **R12**, determinem o conjunto solução da inequação:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+5x} > \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$$

Espera-se que os alunos percebam que o conjunto solução dessa inequação é o conjunto complementar do conjunto solução da inequação do **R12**, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

**R13.** Determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $2^x < 2^3 < 2^{2x}$.

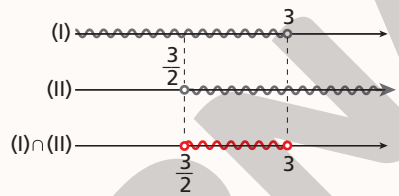
**▸ Resolução**

Esse tipo de inequação é conhecido como **inequação exponencial dupla**, por ter mais de uma desigualdade na mesma sentença.

Dessa maneira, estudam-se os dois casos separadamente:

- $2^x < 2^3 \Rightarrow x < 3$ (I)
- $2^3 < 2^{2x} \Rightarrow 3 < 2x \Rightarrow x > \frac{3}{2}$ (II)

As duas desigualdades devem ser simultaneamente satisfeitas: $x < 3$ e $x > \frac{3}{2}$




Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3\right\}$.

32. a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$; $g(x) = 3^x$ b) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**28.** Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $6^{x^2+1} < 6^5$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

b) $\frac{1}{9} \geqslant 3^{x+3}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

c) $(0{,}44)^{x^2-4} \leqslant 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

d) $\sqrt[3]{3^x} > 3^x \cdot 3^8$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$

**29.** Identifique o domínio das funções $f$ e $g$.

a) $f(x) = \sqrt{3^x - 243}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x}}$ $D(g) = \mathbb{R}$

**30.** Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações a seguir.

a) $2 \leqslant 2^x \leqslant 2^3$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

b) $\frac{1}{81} < 81^{x-1} < 9^x$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

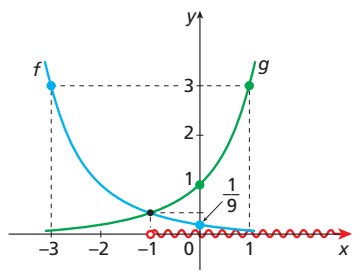
**31.** Em um mesmo sistema cartesiano, trace o gráfico das funções $f$ e $g$, tal que $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 8$. Em seguida, com base no gráfico, resolva as inequações e a equação abaixo: Ver resolução no Guia do professor.

a) $f(x) = g(x)$ $S = \{3\}$

b) $f(x) > g(x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $f(x) \leqslant g(x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

**32.** Observe os gráficos das funções $f$ e $g$, tal que $g$ é uma função exponencial e $f$ é uma função obtida a partir da exponencial, do tipo $f(x) = a^{x+k}$, em que $k$ é um número inteiro.




a) Quais são as leis de formação das funções representadas na figura?

b) Qual é o ponto de intersecção dos gráficos das funções?

c) Escreva uma inequação exponencial, usando a resposta do item **a**, cuja solução seja o intervalo de $x$ destacado na figura acima.

d) Escreva uma inequação cuja solução seja o complementar do intervalo de $x$ representado na figura acima.

**33.** Use um *software* de construção de gráficos para determinar o conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 1$. Ver resolução no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

# Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

## Aplicação

Ver resolução no Guia do professor.

**1.** Construa os gráficos das seguintes funções e identifique o domínio e a imagem de cada uma.

**a)** $f(x) = 3^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

**b)** $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ $D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$

**2.** Se $f(x) = 2^{5x}$ e $f(m) = 32$, determine o valor de $f\left(-\frac{m}{5}\right)$. $\frac{1}{2}$

**3.** Se $f(x) = 16^{1+\frac{1}{x}}$, calcule o valor de:

$f(-1) + f(-2) - f(-4)$ $-3$

**4.** Uma aplicação financeira obedece à lei $M(t) = 50.000 \cdot (1{,}1)^t$, em que $M(t)$ é o montante após $t$ meses. Determine o montante após:

**a)** 3 meses. R$ 66.550,00

**b)** 6 meses. R$ 88.578,05

**c)** 1 ano. ≃ R$ 156.921,42

**5.** O valor V, em real, de certo automóvel daqui a t anos é dado pela lei $V = 20.000 \cdot (0{,}9)^t$. Calcule o valor desse automóvel daqui a 4 anos. R$ 13.122,00

**6.** Um equipamento retira ar de um tanque segundo a lei $A(t) = A_0 \cdot (0{,}9)^t$, em que $A(t)$ é o volume de ar do tanque após $t$ minutos e $A_0$ é o volume inicial de ar contido no tanque. Determine o volume de ar que restará em um tanque de 10 $m^3$ após 5 minutos ligado a esse equipamento. ≃ 5,9 $m^3$

**7.** Estima-se que certa população aumente de acordo com a lei $P(t) = 15.000 \cdot (1{,}035)^t$, sendo $t$ o tempo em anos e $P(t)$ o número de indivíduos após $t$ anos. Adotando $(1{,}035)^{10} = \sqrt{2}$, determine o número de indivíduos daqui a 80 anos. ≃ 240.000 indivíduos

**8.** Seja a função dada por $f(x) = b^x$, com $0 < b < 1$.

Se $f(1) + f(-1) = \frac{10}{3}$, determine o valor de $b$. $\frac{1}{3}$

**9.** A função P, dada por $P(t) = 64.000(1 - 2^{-0{,}1t})$, descreve o comportamento de uma população de microrganismos, sendo P o número de microrganismos e t o número de dias após o instante 0. Determine t para que a população de microrganismos seja igual a 63.000. 60 dias

**10.** Encontre o domínio da função $f$, sendo $f(x) = \frac{5 \cdot 2^x}{\sqrt{2^x - 4}}$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

## Aprofundamento

**11.** Se $f(x) = 5^x$, determine o valor de:

$f(1) + f(a) - f(a + 1) + 4 \cdot f(a)$ 5

**12.** A taxa de inflação anual de certo país é 15%, isto é, a cada ano os produtos comercializados nesse país têm seus preços multiplicados por 1,15 e, em $n$ anos, por $(1{,}15)^n$.

**a)** Quantos anos são necessários para que os produtos comercializados nesse país dobrem de preço? 5 anos

Espera-se que os alunos resolvam esse exercício por meio de aproximações, sem usar o conceito de logaritmo, que será estudado no capítulo "Função logarítmica".

**b)** Qual será o preço daqui a 7 anos de um produto que hoje custa R$ 8,00 nesse país? ≃ R$ 21,28

**13.** (Enem) Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

| $IMC = \frac{\text{massa (kg)}}{[\text{altura (m)}]^2}$ | $RIP = \frac{\text{altura (cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa (kg)}}}$ |
|---|---|

ARAUJO, C. G. S.; RICARDO, D. R. Índice de massa corporal: um questionamento científico baseado em evidências. *Arq. Bras. Cardiologia*, v. 79, n. 1, 2002 (adaptado).

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 $kg/m^2$, então ela possui RIP igual a:

alternativa e

**a)** 0,4 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$ **c)** 8 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$ **e)** 40 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$

**b)** 2,5 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$ **d)** 20 $cm/kg^{\frac{1}{3}}$

**14.** Para que valores reais de $m$ a função $f$, dada por $f(x) = (-m^2 + 2m)^x$, é decrescente? $0 < m < 2$ e $m \neq 1$

**15.** Resolva o sistema: $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$

**16.** Para que valores de $m$ a equação $x^2 - 4x + 2^m = 0$ possui duas raízes reais e iguais? 2

**17.** Sabe-se que o valor total, numa situação a juro composto, é calculado a partir da expressão $M(t) = C \cdot (1 + i)^t$. Elabore uma situação-problema na qual uma pessoa deseja comprar um imóvel. Pesquise os valores dos imóveis e as taxas de juro na região em que vive (pode ser um imóvel novo ou já construído), propondo a quem for resolver o problema que simule financiamentos para 10, 20 e 30 anos, determinando os valores das parcelas em cada um dos casos. Troque sua situação com um colega e resolvam os problemas propostos um pelo outro, destrocando ao final e conversando a respeito das resoluções. resposta pessoal




DIRCEU PORTUGAL/FOTOARENA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

# Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Pode-se afirmar que $\frac{(\sqrt{7})^8}{(\sqrt{7})^6}$ é igual a: alternativa a

a) 7
b) $(\sqrt{7})^{14}$
c) $(\sqrt{7})^{\frac{4}{3}}$
d) $(\sqrt{7})^{48}$

**2.** O inverso de $3^{\frac{1}{2}}$ é: alternativa c

a) $\frac{1}{3}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
d) $\frac{1}{3^{-\frac{1}{2}}}$

**3.** Após racionalizar e simplificar a expressão $\frac{2}{\sqrt{8}}$, obtém-se: alternativa c

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $\frac{\sqrt{8}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{8}}{8}$

**4.** A sentença [redacted] não é a lei de formação de uma função exponencial. alternativa c

a) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$
b) $g(x) = (\sqrt{2})^x$
c) $h(x) = \frac{1^x}{5}$
d) $i(x) = (0{,}3)^x$

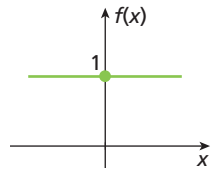
**5.** O gráfico da função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com $a$ real, $a > 0$ e $a \neq 1$, para todo $x$ real, passa pelo ponto: alternativa d

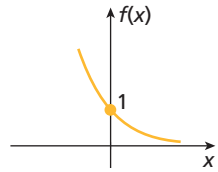
a) (0, 0)
b) (1, 0)
c) (0, −1)
d) (0, 1)

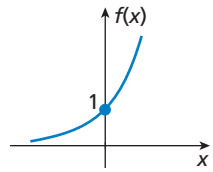
**6.** A função exponencial dada por $f(x) = (\sqrt{11})^x$ é: alternativa d

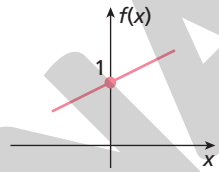
a) decrescente.
b) nula.
c) constante.
d) crescente.

**7.** A função $f$, tal que $f(x) = \pi^x$, pode ser representada pelo gráfico: alternativa b

a)



c)



b)



d)



**8.** No início deste século, a população da Índia girava em torno de 1,029 bilhão de habitantes. Supondo que ela cresça 20% a cada década, em 2021 essa população será de aproximadamente: alternativa b

a) 1,440 bilhão.
b) 1,482 bilhão.
c) 1,5 bilhão.
d) 1,235 bilhão.

**9.** Na equação $5^{-x} = 125$, o valor de $x$ é: alternativa b

a) 3
b) −3
c) −1
d) 0,3

**10.** Se $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x+5} \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{x-1}$, então $x \in \mathbb{R}$ tal que: alternativa a

a) $x \leqslant -6$
b) $x \geqslant 6$
c) $x \leqslant 6$
d) $x \geqslant -6$

## Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

| | Número da questão | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Objetivos do capítulo** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Efetuar as operações de potenciação e radiciação. | X | X | X | | | | | | | |
| Identificar uma função exponencial. | | | | X | X | | | | | |
| Analisar e construir o gráfico de uma função exponencial. | | | | | X | X | X | | | |
| Resolver situações-problema que envolvam funções exponenciais. | | | | | | | | X | | |
| Resolver equações, sistemas e inequações exponenciais. | | | | | | | | | X | X |
| **Páginas do livro referentes ao conceito** | 68 a 73 | 68 a 73 | 68 a 73 | 73 a 76 | 73 a 76 | 73 a 76 | 73 a 76 | 76 e 77 | 78 a 81 | 78 a 81 |

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

# Compreensão de texto

O livro *O homem que calculava* já foi traduzido para diversos idiomas e recebeu um prêmio da Academia Brasileira de Letras em 1972, tendo mais de 90 edições. Conhecer e apreciar uma obra como essa, ainda que uma de suas histórias, contribui com o desenvolvimento da competência geral **3** da BNCC, uma vez que o aluno pode fruir de uma obra mundialmente conhecida.

## *Sobre uma história de Malba Tahan*

### *O problema dos mil dinares*

Talvez muitos não saibam que Malba Tahan, autor do encantador livro *O homem que calculava*, foi o professor de matemática brasileiro chamado Júlio César de Mello e Souza (1895-1974). Além de autor de mais de cem livros de Literatura Oriental, Didática e Matemática, foi um mestre na arte de contar histórias. Neste artigo farei referência a uma delas.

Trata-se do problema dos mil dinares, apresentado em seu livro *Novas lendas orientais* (Editora Record, 1990). A Beremis, protagonista de *O homem que calculava*, apresentou-se o seguinte desafio aritmético:

Determinar como 1.000 moedas de 1 dinar foram distribuídas em 10 caixas do mesmo tamanho, numeradas e fechadas, de maneira que:

**a)** A numeração das caixas, de 1 até 10, foi feita em ordem estritamente crescente, relativa ao conteúdo de moedas que cada uma encerra.

**b)** É possível fazer qualquer pagamento, de 1 a 1.000 dinares, sem precisar abrir as caixas.

Depois de pensar um pouco, Beremis apresentou a seguinte solução:

A primeira caixa deve conter uma moeda, pois caso contrário não poderíamos fazer um pagamento de 1 dinar. A segunda caixa deve conter duas moedas, pois, se tivesse 3, 4 ou mais dinares, não seria possível fazer o pagamento de 2 dinares.

A caixa de número 3 deve ter quatro moedas, pois o conteúdo das duas primeiras caixas já permite fazer pagamentos de 1, 2 e 3 dinares. Beremis continua o seu raciocínio, até estabelecer a seguinte distribuição das moedas nas caixas numeradas de 1 a 9.




$2^8$ $2^7$ $2^6$ $2^5$ $2^4$ $2^3$ $2^2$ $2^1$ $2^0$

Quanto à décima caixa, conclui que deve conter

$1.000 - (2^8 + 2^7 + 2^6 + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0) = 489$

**Justificativa da solução, usando a notação binária**

Uma justificativa da solução de Beremis pode ser fornecida utilizando a notação binária (base 2) para representar os números. Por exemplo, para fazer um pagamento de 352 (notação decimal) dinares observamos que:

$352 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

Logo, na base 2, o número 352 se escreve 101100000, o que significa que escolhemos as caixas de números 9, 7 e 6.

Visto que 511 é 111111111 em notação binária, para fazer um pagamento dessa quantia, escolhemos todas as caixas, da primeira à nona. [...]

Fonte: SÁNCHEZ, Jesus A. P. Sobre uma história de Malba Tahan. *Revista do Professor de Matemática*, n. 35, 1997.

## Atividades

**4** e **5.** 13 → 000001101; 31 → 000011111; 310 → 100110110
Espera-se que os alunos percebam que, em ambos os exercícios, foram encontradas as mesmas representações.

Registre as respostas em seu caderno.

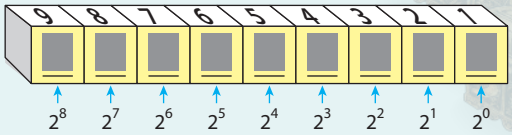
**1.** Com suas palavras, escreva em seu caderno as condições que Beremis deveria contemplar para distribuir as 1.000 moedas nas 10 caixas.

Ver resolução no Guia do professor.

**2.** Por que a quarta caixa deve ter 8 moedas?

**3.** Com quais caixas Beremis faria um pagamento de 13 dinares? E de 31 dinares? E de 310 dinares? E de 521?

**4.** Reproduza três vezes a figura, que representa as caixas de moedas:




ADILSON SECCO

Em seguida, de acordo com as caixas usadas para formar os números 13, 31 e 310, preencha as lacunas:

- com **1** para as caixas usadas;
- com **0** para as caixas não usadas.

**5.** Escreva, na notação binária, os números 13, 31 e 310; em seguida, compare esses resultados com os obtidos no exercício anterior. O que você percebeu?

**6.** Escreva um número na notação binária que tenha sete caracteres **0** ou **1**. A seguir, troque-o com um colega para que cada um de vocês escreva, em notação decimal, o número do outro. resposta pessoal

ILUSTRAÇÕES: TOMA



**2.** Porque o conteúdo das três primeiras caixas permite fazer pagamentos de 1 a 7 dinares.

**3.** 13: caixas 4, 3 e 1; 31: caixas 5, 4, 3, 2 e 1; 310: caixas 9, 6, 5, 3 e 2; 521: caixas 10 e 6.

CAPÍTULO

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3** e **4**; habilidades **EM13MAT305**, **EM13MAT403** e **EM13MAT404**.

# 4 Função logarítmica

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

**Objetivos do capítulo**

- Calcular logaritmo.
- Identificar uma função logarítmica.
- Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica.
- Resolver situações-problema que envolvam logaritmos.
- Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas.

**Pessoa observando as estrelas da Via Láctea na Chapada dos Veadeiros, Goiás, 2019.**

**Hiparco de Niceia** (c. 180 a.C.-125 a.C.), astrônomo e matemático grego, catalogou aproximadamente 850 estrelas visíveis a olho nu. De sua época aos dias atuais, o mundo passou por muitas transformações. Atualmente, graças aos avanços científicos e tecnológicos, é possível estimar que só na Via Láctea, galáxia do nosso Sistema Solar, existam centenas de bilhões de estrelas; no Universo, há outra centena de bilhões de galáxias, tendo outras centenas de bilhões de estrelas.

Hiparco determinou uma grandeza para especificar o brilho aparente das estrelas e dividiu-a em uma escala com seis categorias, sendo a categoria 1 para as estrelas mais brilhantes e a categoria 6 para as que tinham menor brilho. Tempos depois, essa grandeza veio a ser chamada de **magnitude**.

Em 1856, o astrônomo inglês Norman Robert Pogson (1829-1891), considerando o fato de que as estrelas da 1ª categoria, na escala usada por Hiparco, eram aproximadamente 100 vezes mais brilhantes do que as estrelas da 6ª categoria, propôs uma expressão matemática com base em **logaritmos** para determinar a magnitude de uma estrela.

Nessa definição, o Sol é classificado com magnitude igual a –26,7 (estrela de maior brilho a olho nu) e a estrela Vega, com magnitude zero. (Vega é usada como referência na obtenção da magnitude de outras estrelas.) Com esses dois exemplos, pode-se perceber que quanto menor for a magnitude de uma estrela, maior será seu brilho aparente.

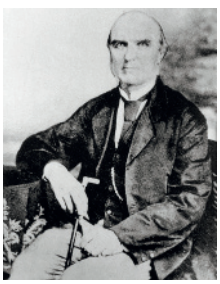
Dados obtidos em: <http://www.uc.pt/iii/romuloccv/recursos_multimedia/artigos_apresentacoes_cientificas/docs/NormanPogson.pdf>. Acesso em: 6 ago. 2020; EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. São Paulo: Ed. da Unicamp, 2004. p. 202.

LEBRECHT HISTORY/BRIDGEMAN IMAGES/KEYSTONE BRASIL



Observatório de Alexandria na época de Hiparco de Niceia (c. 180 a.C.-125 a.C.).

SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA



Retrato do astrônomo inglês Norman Robert Pogson (1829-1891).

A abertura deste capítulo favorece uma discussão a respeito dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender a realidade. Se julgar pertinente, pedir aos alunos que aprofundem a pesquisa a respeito dos estudos sobre a luz das estrelas por meio do *link* <http://www.if.ufrgs.br/~fatima/fis2010/Aula15-132.pdf> (Acesso em: 6 ago. 2020.). Essa abordagem favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

A competência específica **3** e a habilidade **EM13MAT305** da BNCC são favorecidas em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas envolvendo funções logarítmicas.

# 1 Logaritmo

No capítulo anterior, vimos diversas situações que apresentam comportamento exponencial. Agora, estudaremos aquelas que podem ser modeladas pela sua função inversa, a **função logarítmica**. Inicialmente, vamos entender o que significa **logaritmo**.

Acompanhe a situação a seguir.

Determinada bactéria divide-se ao meio a cada hora, conforme indica a tabela abaixo.

| Tempo ($t$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de bactérias ($n$) | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |

Analisando os dados, concluímos que o número $n$ de bactérias em função da quantidade $t$ de horas pode ser descrito por: $n = 2^t$

Com base nessas informações, podemos responder às seguintes perguntas:

- Quantas bactérias haverá após 10 horas?

  Essa é uma pergunta que envolve potenciação, e a resposta é:

  $n = 2^t \Rightarrow n = 2^{10} \Rightarrow n = 1.024$

  Logo, haverá 1.024 bactérias.

- Em quantas horas haverá 1.024 bactérias?

  Essa é uma pergunta que envolve logaritmo, pois, para respondê-la, devemos encontrar o valor do **expoente** $t$ na equação: $1.024 = 2^t$

  O valor de $t$ é 10, pois $2^{10} = 1.024$, isto é, teremos 1.024 bactérias após 10 horas.

  Dizemos que 10 é o **logaritmo** de 1.024 na **base** 2. Representamos assim:

  $10 = \log_2 1.024$ ou $\log_2 1.024 = 10$

Dados os números reais positivos $a$ e $b$, com $a \neq 1$, o **logaritmo de $b$ na base $a$** é o número real $x$ tal que $a^x = b$. Ou seja:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

O número $b$ é conhecido por **logaritmando**.

**Observação**

$\log_a b$ existe quando ocorrem as condições $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$, chamadas condições de existência.

**Reflita, p. 87**
Aplicando a definição de logaritmo para tentar calcular o valor de $x$ em cada caso, temos:
- $\log_5 (-25) = x \Rightarrow 5^x = -25$
  Como uma potência de base positiva sempre terá como resultado um número positivo, concluímos que, nesse caso, não existe $x$ real que satisfaça a igualdade: $\log_5 (-25) = x$
  $\log_2 0 = x \Rightarrow 2^x = 0$
  O resultado de uma potência será nulo apenas quando sua base for igual a zero; então, não existe $x$ real que satisfaça a igualdade: $\log_2 0 = x$
- $\log_1 10 = x \Rightarrow 1^x = 10$
  Como uma potência cuja base é igual a 1 sempre terá 1 como resultado, concluímos que não existe $x$ real que satisfaça a igualdade: $\log_1 10 = x$
- $\log_0 2 = x \Rightarrow 0^x = 2$
  Como uma potência cuja base é zero terá, necessariamente, resultado igual a zero, concluímos que não existe $x$ real que satisfaça a igualdade: $\log_0 2 = x$
  $\log_{-1} 6 = x \Rightarrow (-1)^x = 6$
  Uma potência cuja base é igual a $-1$ pode ter dois resultados possíveis: 1, se o expoente for um número par, ou $-1$, se o expoente for um número ímpar; então, concluímos que não existe $x$ real que satisfaça a igualdade: $\log_{-1} 6 = x$

**Reflita**

Entre quais números inteiros está $\log_3 10$?

Espera-se que os alunos percebam que, para responder a essa pergunta, eles devem descobrir qual é o expoente $x$ tal que $3^x = 10$.
Como $3^2 = 9$ e $3^3 = 27$, conclui-se que: $3^2 < 3^x < 3^3$, ou seja, $2 < x < 3$
Portanto, $\log_3 10$ está entre 2 e 3.

## Exemplos

**a)** $\log_6 36 = 2$, pois $6^2 = 36$

**b)** $\log_2 0{,}5 = -1$, pois $2^{-1} = 0{,}5$

**c)** $\log_{10} 1 = 0$, pois $10^0 = 1$

**d)** $\log_{\sqrt[3]{12}} 12 = 3$, pois $\left(\sqrt[3]{12}\right)^3 = 12$

**Observação**

Sempre que a base é omitida, subentende-se que o logaritmo tem base 10, ou seja, $\log_{10} b = x$ pode ser escrito também como $\log b = x$. Por exemplo:
- $\log 1.000 = 3$, pois $10^3 = 1.000$
- $\log 0{,}01 = -2$, pois $10^{-2} = 0{,}01$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

## Exercícios resolvidos

**R1.** Calcular os valores de:

**a)** $\log_2 32$

**b)** $\log 0{,}001$

**▸ Resolução**

Podemos encontrar esses valores mentalmente.

**a)** Para descobrir o valor do logaritmo, nos perguntamos: "O número 2 elevado a qual expoente resulta em 32?".

A resposta é 5, pois $2^5 = 32$.

Portanto, $\log_2 32 = 5$.

**b)** Como a base não está escrita, subentendemos que ela vale 10. Então, nos perguntamos: "O número 10 elevado a qual expoente resulta em 0,001?".

A resposta é $-3$, pois:

$$10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{1.000}\right) = 0{,}001$$

Portanto, $\log 0{,}001 = -3$.

**Outro modo:**

Também podemos encontrar esses valores algebricamente. Para isso, vamos chamar o valor desconhecido de $x$.

**a)** Seja $\log_2 32 = x$. Então, pela definição de logaritmo:

$2^x = 32$

Escrevendo os dois membros na mesma base, temos:

$2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

Ou seja, $\log_2 32 = 5$.

**b)** $\log 0{,}001 = x \Rightarrow \log_{10} 0{,}001 = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10^x = 0{,}001 \Rightarrow 10^x = \frac{1}{1.000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^x = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$$

Ou seja, $\log 0{,}001 = -3$.

**R2.** Determinar o valor de $\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{2})^3$.

**▸ Resolução**

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{2})^3 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^x = (\sqrt{2})^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2^3}\right)^x = \sqrt{2^3} \Rightarrow (2^{-3})^x = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-3x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Logo: $\log_{\frac{1}{8}} (\sqrt{2})^3 = -\frac{1}{2}$

**R3.** Verificar entre quais números inteiros está $\log_4 20$.

**▸ Resolução**

Sendo $\log_4 20 = x$, temos: $4^x = 20$

Sabemos que $4^2 = 16$ e $4^3 = 64$.

Então: $4^2 < 20 < 4^3$, ou seja, $4^2 < 4^x < 4^3$.

Logo: $2 < x < 3$

Portanto, $\log_4 20$ está entre 2 e 3.

**R4.** Calcular quanto vale $k$ se $\log_k 81 = 4$.

**▸ Resolução**

Primeiro, observamos as restrições. Pela definição de logaritmo, para a base, devemos ter $k > 0$ e $k \neq 1$.

$\log_k 81 = 4 \Rightarrow k^4 = 81 \Rightarrow k = 3$ ou $k = -3$ ($-3$ não serve em razão das restrições)

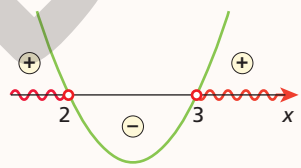
Logo, $k$ vale 3.

**R5.** Calcular para que valores reais de $x$ existe $\log_{x-2} (x^2 - 5x + 6)$.

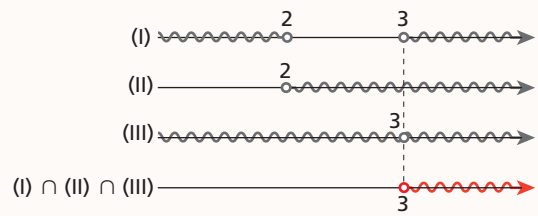
**▸ Resolução**

Para que exista o logaritmo indicado, devemos impor as seguintes condições:

- para o logaritmando: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$ (I)




- para a base: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (II)
- para a base: $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$ (III)




Como as três condições devem ocorrer:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

**Reflita**

Nas igualdades abaixo, aparecem expressões que não respeitam as restrições da definição de logaritmo. Tente calcular $x$ em cada uma delas e veja o que acontece.

- logaritmando não positivo:
  $\log_5 (-25) = x$;
  $\log_2 0 = x$
- base igual a 1:
  $\log_1 10 = x$
- base não positiva:
  $\log_0 2 = x$;
  $\log_{-1} 6 = x$

Ver resolução na página anterior.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Calcule mentalmente e depois registre o resultado.

a) $\log_5 125$ 3

b) $\log_9 1$ 0

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$ 4

d) $\log_2 \frac{1}{16}$ −4

e) $\log 1.000$ 3

f) $\log 0{,}01$ −2

**2.** Entre quais números inteiros estão os logaritmos a seguir?

a) $\log 560$ entre 2 e 3

b) $\log_5 3$ entre 0 e 1

**3.** Calcule, aplicando a definição de logaritmo.

a) $\log_{\sqrt{2}} 2$ 2

b) $\log 0{,}1$ −1

c) $\log_{\frac{1}{4}} 16$ −2

d) $\log_2 \sqrt{128}$ $\frac{7}{2}$

e) $\log_4 256$ 4

f) $\log_2 (\log_4 256)$ 2

**4.** Se $A = \log_7 7$, $B = \log_{76} 1$, $C = \log_{0,5} 8$ e $D = \log_8 8^{-2}$, determine $B^A + C \cdot D$. 6

**5.** Aplicando a definição de logaritmo, calcule o valor de $m$ nas expressões a seguir.

a) $\log (2m - 5) = 3$ 502,5

b) $\log (m - 9) = -2$ 9,01

c) $\log_2 (5 - m) = 0$ 4

d) $\log_m 0{,}1 = -1$ 10

**6.** Determine os possíveis valores de $x$ para que exista:

a) $\log_x 5$

b) $\log_2 (3x + 5)$

c) $\log_3 \left(\frac{x-2}{x+4}\right)$

d) $\log_5 (x^2 - 2x + 1)$

**6. a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

**b)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$

**c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$

**d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

## Consequências da definição de logaritmo

Satisfeitas as condições de existência de um logaritmo, temos:

**1ª consequência**: $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

**2ª consequência**: $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

**3ª consequência**: $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$

**4ª consequência**: $a^{\log_a n} = n$, pois $\log_a n = m \Rightarrow a^m = n \Rightarrow a^{\log_a n} = n$

**5ª consequência**: $\log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n$, pois $a^{\log_a m} = n \Rightarrow m = n$

Com base nessas consequências, podemos calcular algumas expressões. Veja os exemplos a seguir.

**a)** $\left(\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}\right) \cdot \left(3^{\log_3 8}\right) = 1 \cdot 8 = 8$

**b)** $\log_4 (\log_3 3^4) = \log_4 4 = 1$

**c)** $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

**d)** $(\log 1) \cdot (\log_4 100) = 0 \cdot (\log_4 100) = 0$

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**7.** Com base nas consequências estudadas, calcule o valor das seguintes expressões:

a) $\log_{11} 11$ 1

b) $\log_{32} 1$ 0

c) $\log_6 6^7$ 7

d) $\log 100$ 2

e) $15^{\log_{15} 16}$ 16

f) $\log_3 \sqrt{81}$ 2

**8.** Determine os valores desconhecidos de:

a) $\log_7 b = 1$ 7

b) $\log_8 x = \log_8 \left(\frac{2}{3}\right)$ $\frac{2}{3}$

c) $3^{\log_3 2} = n$ 2

d) $\log x^2 = \log 9$ 3 ou −3

e) $y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81}$ −2

f) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[6]{5} = k$ $\frac{1}{3}$

**9.** Determine o valor das expressões a seguir.

a) $(\log_5 10)^{\log_3 1}$ 1

b) $(\log_{64} 64)^{\log_3 2}$ 1

c) $\log (\log 10^{10})$ 1

d) $(\log 0{,}01) \cdot (\log 100)$ −4

e) $(\log_3 1) \cdot (\log_5 20)$ 0

f) $(\log_{11} 121) \cdot (\log_{13} 169)$ 4

**10.** O pH de uma solução indica se ela é ácida (pH < 7) ou básica (pH > 7) e é dado pela fórmula $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração de íons $H^+$ na solução, em mol/ℓ. Uma solução com concentração de $10^{-3}$ mol/ℓ de íons $H^+$ é ácida ou básica? ácida

**11.** Considerando a fórmula do exercício anterior, se o pH de uma substância é igual a 9, qual é a concentração de $H^+$ em mol/ℓ? $10^{-9}$

**12.** Reescreva o exercício 10 substituindo o valor da concentração em mol/ℓ de íons $H^+$ de modo que a solução torne-se básica. Peça a um colega que resolva o exercício reescrito por você. Resolva o exercício de seu colega. resposta pessoal

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

# 2 Propriedades operatórias dos logaritmos

## 2.1 Logaritmo de um produto

O logaritmo do produto de dois números positivos, em uma base $a$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números na base $a$.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Observe:

$$\log_3 (3 \cdot 9) = \log_3 (3^1 \cdot 3^2) = \log_3 3^{1+2} = 1 + 2 = \log_3 3 + \log_3 3^2 = \log_3 3 + \log_3 9$$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$

(III) $\log_a (b \cdot c) = z \Leftrightarrow a^z = b \cdot c$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$a^z = b \cdot c \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y \Rightarrow \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

**Exemplos**

**a)** $\log_5 (25 \cdot 625) = \log_5 25 + \log_5 625 = \log_5 5^2 + \log_5 5^4 = 2 + 4 = 6$

**b)** $\log 500 = \log (100 \cdot 5) = \log 100 + \log 5 = 2 + \log 5$

## 2.2 Logaritmo de um quociente

O logaritmo do quociente de dois números positivos, em uma base $a$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números na base $a$.

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Observe:

$$\log_3 \left(\frac{3}{9}\right) = \log_3 \left(\frac{3^1}{3^2}\right) = \log_3 3^{1-2} = 1 - 2 = \log_3 3 - \log_3 3^2 = \log_3 3 - \log_3 9$$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$

(III) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Leftrightarrow a^z = \frac{b}{c}$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$a^z = \frac{b}{c} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y \Rightarrow \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

**Exemplos**

**a)** $\log_5 \left(\frac{125}{625}\right) = \log_5 125 - \log_5 625 = \log_5 5^3 - \log_5 5^4 = 3 - 4 = -1$

**b)** $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = \log_4 1 - \log_4 16 = \log_4 1 - \log_4 4^2 = 0 - 2 = -2$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**Observação**

- $(\log_a b)^n = \log_a^n b$
- $\log_a^n b \neq \log_a b^n$

Por exemplo:

(I) $\log_5^2 3 = (\log_5 3) \cdot (\log_5 3)$

(II) $\log_5 3^2 = 2 \cdot \log_5 3$

Observe que (I) é diferente de (II).

## 2.3 Logaritmo de uma potência

O logaritmo de uma potência em uma base $a$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é igual ao produto do expoente da potência pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Observe:

$\log_5 4^3 = \log_5 (4 \cdot 4 \cdot 4) = \log_5 4 + \log_5 4 + \log_5 4 = 3 \cdot \log_5 4$

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

(II) $\log_a b^n = y \Leftrightarrow a^y = b^n$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$a^y = b^n \Rightarrow a^y = (a^x)^n \Rightarrow a^y = a^{x \cdot n} \Rightarrow y = n \cdot x \Rightarrow \log_a b^n = n \cdot \log_a b$

### Exemplos

**a)** $\log_5 5^8 = 8 \cdot \log_5 5 = 8 \cdot 1 = 8$ **b)** $\log_2 \sqrt{3} = \log_2 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 3$

### Exercícios resolvidos

**R6.** Aplicando as propriedades operatórias, reescrever os logaritmos abaixo na forma de uma adição e/ou subtração.

**a)** $\log (3^2 \cdot 5^3)$

**b)** $\log \left(\frac{2^3 \cdot 3}{5^2 \cdot 7}\right)$

▸ **Resolução**

**a)** $\log (3^2 \cdot 5^3) =$

$= \log 3^2 + \log 5^3 =$

$= 2 \cdot \log 3 + 3 \cdot \log 5$

**b)** $\log \left(\frac{2^3 \cdot 3}{5^2 \cdot 7}\right) =$

$= \log (2^3 \cdot 3) - \log (5^2 \cdot 7) =$

$= \log 2^3 + \log 3 - (\log 5^2 + \log 7) =$

$= 3 \cdot \log 2 + \log 3 - 2 \cdot \log 5 - \log 7$

**R7.** Dado $\log 2 \simeq 0{,}3$, obter o valor aproximado de:

**a)** $\log 5$ **b)** $\log 20$ **c)** $\log \sqrt{5}$

▸ **Resolução**

**a)** $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \simeq 1 - 0{,}3 =$

$= 0{,}7$

**b)** $\log 20 = \log (2 \cdot 10) =$

$= \log 2 + \log 10 \simeq 0{,}3 + 1 = 1{,}3$

**c)** $\log \sqrt{5} = \log 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 5 \simeq \frac{1}{2} \cdot 0{,}7 =$

$= 0{,}35$

**R8.** Utilizando as propriedades, simplificar a expressão: $\log 50 + \log 20 - \log 8$

▸ **Resolução**

$\log 50 + \log 20 - \log 8 =$

$= \log (2 \cdot 5^2) + \log (2^2 \cdot 5) - \log 2^3 =$

$= \log 2 + \log 5^2 + \log 2^2 + \log 5 - \log 2^3 =$

$= \cancel{\log 2} + 2 \cdot \log 5 + \cancel{2 \cdot \log 2} + \log 5 - \cancel{3 \cdot \log 2} =$

$= 3 \cdot \log 5$

### Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**13.** Aplicando as propriedades estudadas, simplifique ao máximo cada um dos itens.

**a)** $\log_2 (64 \cdot 13)$ $6 + \log_2 13$

**b)** $\log_{\sqrt{2}} (2 \cdot 3)$ $2 + \log_{\sqrt{2}} 3$

**c)** $\log_3 (13 \cdot 3)$ $\log_3 13 + 1$

**d)** $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{16}\right)^9$ $18$

**e)** $\log \left(\frac{1}{10}\right)^{19}$ $-19$

**f)** $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{26}{32}\right)$ $\log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

**14.** Utilizando as propriedades dos logaritmos, determine o valor de A.

**a)** $A = \log 30 + \log 7 - \log 21$ $1$

**b)** $A = \log_2 100 - \log_2 25$ $2$

**15.** Admitindo satisfeitas as condições de existência, desenvolva as expressões abaixo, aplicando as propriedades dos logaritmos.

**a)** $\log_a (b \cdot c \cdot d)$ $\log_a b + \log_a c + \log_a d$

**b)** $\log_a \left(\frac{2 \cdot k}{d}\right)$ $\log_a 2 + \log_a k - \log_a d$

**c)** $\log_a a^{-n}$ $-n$

**d)** $\log_a \left(\frac{1}{y}\right)$ $-\log_a y$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**16.** Calcule os logaritmos abaixo sabendo que $\log_{12} 3 \simeq 0{,}442$ e $\log_{12} 2 \simeq 0{,}279$.

**a)** $\log_{12}\left(\frac{3}{4}\right)$ $\simeq -0{,}116$ **b)** $\log_{12} 6$ $\simeq 0{,}721$

**17.** Considerando $\log 3 = 0{,}477$, $\log 5 = 0{,}699$ e $\log_2 5 = 2{,}322$, calcule:

**a)** $\log 15$ 1,176 **d)** $\log 0{,}6$ −0,222

**b)** $\log 45$ 1,653 **e)** $\log_2 20$ 4,322

**c)** $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ 0,222 **f)** $\log_2 25$ 4,644

**18.** Vimos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração de íons $H^+$ na solução, em mol/ℓ. Qual é o pH de uma solução com concentração de $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ mol/ℓ de íons $H^+$? $\simeq 4{,}42$

(*Dado*: $\log 3{,}8 \simeq 0{,}58$)

**19.** O pH do sangue dos seres humanos, em condições normais, é 7,4 (levemente básico). Algumas alterações, como certas doenças, podem modificar esse valor. Pode-se calcular o pH do sangue pela equação de Henderson-Hasselbalch, dada por $pH = 6{,}1 + \log\left(\frac{B}{C}\right)$, em que $B$ representa a concentração de bicarbonato, a substância básica (ou alcalina), em mmol/ℓ, e $C$ representa a concentração de ácido carbônico, a substância ácida, em mmol/ℓ. Calcule o pH do sangue de uma pessoa cuja concentração de bicarbonato é 25 mmol/ℓ e de ácido carbônico é 2 mmol/ℓ. $\simeq 7{,}197$

(*Dados*: $\log 5 \simeq 0{,}699$ e $\log 2 \simeq 0{,}301$)

(mmol/ℓ significa milimol por litro.)

## 2.4 Mudança de base

Se você observar com atenção, verá que algumas calculadoras científicas têm a tecla log. Essa tecla calcula logaritmos na base 10. Se, em uma calculadora como a mostrada ao lado, apertarmos a tecla log e, em seguida, digitarmos o número 100, aparecerá o número 2, que é o resultado de log 100. Em calculadoras como essa, se quisermos calcular logaritmos em bases diferentes de 10, teremos de usar a propriedade de mudança de base, enunciada a seguir.



ARTUR SYNENKO/SHUTTERSTOCK

Se $a$, $b$ e $c$ são números reais positivos, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

O texto apresenta o procedimento para calcular log 100 utilizando uma calculadora como a reproduzida ao lado. Se forem utilizadas outras calculadoras científicas, esse procedimento pode variar.

Vamos deduzir essa propriedade. Considere os seguintes logaritmos:

(I) $\log_c b = x \Leftrightarrow c^x = b$

(II) $\log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a$

(III) $\log_a b = z \Leftrightarrow a^z = b$

Pelas sentenças (I) e (III), temos $a^z = c^x$. Substituindo (II) nessa expressão, obtemos:

$$a^z = c^x \Rightarrow (c^y)^z = c^x \Rightarrow c^{y \cdot z} = c^x \Rightarrow y \cdot z = x \Rightarrow z = \frac{x}{y} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

### Exemplos

**a)** Recorrendo à propriedade de mudança de base, vamos determinar o valor de $\log_8 16$.

Escolhendo a base 2, temos:

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4 \cdot \log_2 2}{3 \cdot \log_2 2} = \frac{4}{3}$$

**b)** Sabendo que $\log 11 \simeq 1{,}04$, vamos determinar um valor aproximado de $\log_{11} 1.000$.

Para isso, como o dado fornecido está na base 10, vamos fazer a mudança para essa base:

$$\log_{11} 1.000 = \frac{\log 1.000}{\log 11} = \frac{\log 10^3}{\log 11} = \frac{3 \cdot \log 10}{\log 11} = \frac{3}{\log 11} \simeq \frac{3}{1{,}04} \simeq 2{,}88$$

Se achar conveniente, mostrar aos alunos como calcular logaritmos usando uma planilha eletrônica. Nesse caso, para calcular $\log_2 10$, por exemplo, basta digitar, em uma célula qualquer da planilha, a fórmula:
=LOG(10; 2)
└ base
└ logaritmando

**Reflita**

Poderíamos escolher uma base diferente de 2 para determinar o valor de $\log_8 16$? Justifique sua resposta.

Sim, pois, para $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$\log_8 16 = \frac{\log_a 2^4}{\log_a 2^3} = \frac{4 \cdot \log_a 2}{3 \cdot \log_a 2} = \frac{4}{3}$$

Avaliar a conveniência de discutir com os alunos outros exemplos em que a base do logaritmo e o logaritmando podem ser escritos como potências de mesma base (respeitando as condições de existência). Observar que, nesses casos, pode-se calcular o logaritmo efetuando a mudança para qualquer base.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODENA

## Exercícios resolvidos

**R9.** Determinar o resultado de:

a) $\frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot (\log 49)$

b) $\log 6 \cdot \log_6 10$

c) $\log_3 8 \cdot \log_2 3$

▸ **Resolução**

a) $\frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot (\log 49) = \frac{1}{8} \cdot (\log_7 10) \cdot \frac{\log_7 49}{\log_7 10} =$

$= \frac{1}{8} \cdot \cancel{(\log_7 10)} \cdot \frac{2}{\cancel{\log_7 10}} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$

b) $\log_6 \cdot \log_6 10 = \cancel{\log 6} \cdot \frac{\log 10}{\cancel{\log 6}} = \log 10 = 1$

c) $\log_3 8 \cdot \log_2 3 = \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \cdot \cancel{\log_2 3} = \log_2 2^3 =$

$= 3 \cdot \log_2 2 = 3$

**R10.** Em uma calculadora científica, calcular $\log_4 20$.

▸ **Resolução**

Na calculadora científica, como vimos, geralmente temos apenas a tecla log, que calcula o logaritmo na base 10. Por isso, para calcular $\log_4 20$, devemos efetuar a mudança para a base 10: $\log_4 20 = \frac{\log 20}{\log 4}$

Na calculadora, obtemos: $\log 20 \simeq 1{,}3$ e $\log 4 \simeq 0{,}6$.

Assim:

$\log_4 20 = \frac{\log 20}{\log 4} \simeq \frac{1{,}3}{0{,}6} \simeq 2{,}17$

Então, concluímos que $\log_4 20 \simeq 2{,}17$.

**R11.** Uma dívida $D$ aumenta 10% ao mês.

a) Determinar o valor da dívida após 1 mês, após 2 meses e após $n$ meses.

b) Calcular o número $n$ de meses para que a dívida quadruplique.

▸ **Resolução**

a) Após 1 mês, a dívida valerá:

$(100\% + 10\%) \cdot D = 110\% \cdot D = 1{,}1D = D(1{,}1)^1$

No 2º mês, o juro incide sobre a dívida acumulada no final do 1º mês. Então, após 2 meses, a dívida valerá:

$(100\% + 10\%) \cdot 1{,}1D = 110\% \cdot 1{,}1D =$

$= 1{,}1 \cdot 1{,}1D = D(1{,}1)^2$

Após $n$ meses, teremos: $D(1{,}1)^n$

b) Vamos calcular o número $n$ de meses para que a dívida quadruplique, ou seja, para que ela seja $4D$:

$D(1{,}1)^n = 4D \Rightarrow (1{,}1)^n = 4$

Aplicando a definição de logaritmo nessa última equação, podemos escrever: $n = \log_{1,1} 4$

Efetuando a mudança de base, temos:

$n = \frac{\log 4}{\log 1{,}1}$

Em uma calculadora científica, obtemos $\log 4 \simeq 0{,}6021$ e $\log 1{,}1 \simeq 0{,}0414$. Assim:

$n \simeq \frac{0{,}6021}{0{,}0414} \Rightarrow n \simeq 14{,}5$

Como o cálculo é feito mês a mês, concluímos que a dívida quadruplicará em 15 meses.

## Exercícios propostos

**22.** a) $\frac{1}{\log 3}$ b) $\frac{1}{\log_5 2}$ c) $\frac{1}{\log_3 10}$ d) $\frac{2}{\log_{11} 7}$

Registre as respostas em seu caderno.

**20.** Com uma calculadora científica, determine o valor aproximado, com quatro casas decimais, de:

a) $\log 32 \simeq 1{,}5051$ b) $\log_6 40 \simeq 2{,}0587$

**21.** Considerando $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log 6$ 0,78 c) $\log_3 2$ 0,625 e) $\log 144$ 2,16

b) $\log 30$ 1,48 d) $\log 5$ 0,7 f) $\log \sqrt[3]{30}$ 0,4933...

**22.** Transforme cada logaritmo a seguir em um logaritmo na base indicada.

a) $\log_3 10$ na base 10 c) $\log 3$ na base 3

b) $\log_2 5$ na base 5 d) $\log_7 121$ na base 11

**23.** Sendo $a$ e $b$ números reais positivos, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, transforme $\log_a b$ para a base $b$ e responda às questões.

a) Qual é o resultado? $\frac{1}{\log_b a}$

b) Com base no logaritmo que foi dado e no logaritmo encontrado, que conclusão pode ser obtida? O logaritmo de $b$ na base $a$ é igual ao inverso do logaritmo de $a$ na base $b$.

c) De acordo com sua conclusão, o que acontecerá ao multiplicar $\log_a b$ por $\log_b a$? O resultado será 1.

**24.** Quando simplificada, qual é o valor da expressão $9 - (\log_{15} 8) \cdot (\log_2 15)$? 6

**25.** Calcule os valores de:

$A = \log_{\frac{1}{5}} 16 \cdot \log_{16} \frac{1}{5}$ e $B = \frac{1}{\log_{25} 5}$ $A = 1$ e $B = 2$

**26.** Calcule o produto:

$\log_3 5 \cdot \log_7 2 \cdot \log_5 7 \cdot \log_2 3$ 1

**27.** Admitindo satisfeitas as condições de existência, calcule o valor das expressões a seguir.

a) $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c$ 1 c) $\log_b a^2 \cdot \log_a b^2$ 4

b) $\frac{\log_c a}{\log_c b} - \log_b a$ 0 d) $a \cdot \log_c b \cdot \log_{b^a} c^5$ 5

**28.** Admitindo satisfeitas as condições de existência, escreva $\log_{a^n} b$ na base $a$. $\frac{1}{n} \cdot \log_a b$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**29.** Thiago investiu R$ 1.400,00 em uma aplicação financeira que rende 0,9% ao mês. A fórmula $M = 1.400 \cdot (1{,}009)^t$ relaciona o montante $M$ (valor total acumulado) com o tempo $t$ de investimento, em meses.
Com uma calculadora, calcule:

**a)** o montante após 1 ano de aplicação; ≃ R$ 1.558,91

**b)** o tempo de aplicação necessário para que o montante chegue a R$ 2.100,00. 46 meses

**30.** Reúna-se com um colega e resolvam o exercício. Uma microempresa realizou um empréstimo no valor de R$ 1.500,00. A cada trimestre sem pagamento, o valor que deverá ser pago pelo empréstimo é corrigido aplicando-se uma taxa de juro trimestral de 20%. R$ 1.800,00 e R$ 2.160,00, respectivamente

**a)** Qual será o valor da dívida dessa empresa após 1 trimestre? E após 2 trimestres?

**b)** Escrevam uma fórmula que possa ser utilizada para calcular o valor $d$ dessa dívida após $n$ trimestres. (*Dica*: Analisem os cálculos feitos no item anterior.) $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$

**c)** Quantos anos são necessários para que essa dívida seja de R$ 3.110,40? 1 ano

**d)** Escrevam uma lei matemática que possa ser utilizada para determinar o número $n$ de trimestres necessários para que essa dívida atinja um valor $d$. $n = \log_{1,2}\left(\frac{d}{1.500}\right)$

**31.** Reescreva o exercício anterior considerando outro valor de empréstimo, outro valor de taxa de juro e outro prazo. Elabore também um novo valor para o item **c**. Depois, peça a um colega que resolva seu exercício, enquanto você resolve o dele. resposta pessoal

Esse tópico favorece o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** e das habilidades **EM13MAT305**, **EM13MAT403** e **EM13MAT404** da BNCC, pois os alunos vão resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas, analisar funções definidas por uma sentença em sua representação algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e estabelecer relações entre as representações de funções exponencial e logarítmica.

# 3 Função logarítmica

Como vimos no início deste capítulo, considerando bactérias que se multiplicam por divisões sucessivas, originando, a cada hora, duas bactérias, é possível determinar o número $n$ de bactérias em função da quantidade $t$ de horas por meio da equação $n = 2^t$.

Aplicando o que foi visto sobre logaritmo, pode-se escrever uma igualdade a fim de determinar a quantidade $t$ de horas necessárias para que se obtenha $n$ bactérias: $n = 2^t \Rightarrow t = \log_2 n$

Nesse caso, a quantidade $t$ de horas é determinada em função da quantidade $n$ de bactérias. Observe que esse é um exemplo de função em que a variável está no logaritmando.

Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ chama-se **função logarítmica** quando existe um número real $a$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

**Exemplos**

**a)** $f(x) = \log_7 x$ **b)** $g(x) = \log_{0,3} x$ **c)** $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

**Observação**

Existem funções que podem ser obtidas a partir de uma função logarítmica. Por exemplo:

- $f(x) = \log (x + 1)$
- $g(x) = \log_{\frac{3}{2}} x^2$
- $h(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} (3x - 4)$

## Exercícios resolvidos

**R12.** Dadas as funções $f(x) = \log (x + 3)$ e $g(x) = \log_5 x$, calcular $f(7)$ e $g(1)$.

▸ **Resolução**

Para calcular $f(7)$, basta substituir $x$ por 7 em $f(x) = \log (x + 3)$. Assim:
$f(7) = \log (7 + 3) = \log 10 = 1$
Do mesmo modo, para calcular $g(1)$, substituímos $x$ por 1 na lei da função $g$:
$g(1) = \log_5 1 = 0$

**R13.** Identificar o domínio das seguintes funções:

**a)** $g(x) = \log (x^2 - 1)$

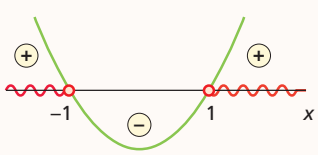
**b)** $h(x) = \log_{x+1} (4 - x^2)$

▸ **Resolução**

**a)** $g(x) = \log (x^2 - 1)$

Considerando as condições de existência, devemos ter: $x^2 - 1 > 0$

Estudando o sinal da função dada por $y = x^2 - 1$, cujos zeros são $-1$ e 1, podemos fazer o seguinte esquema:




Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

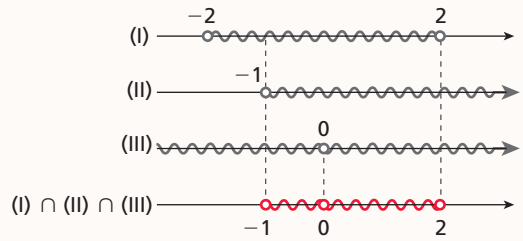
**b)** $h(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$

Considerando as condições de existência, temos:

(I) $4 - x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$

(II) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

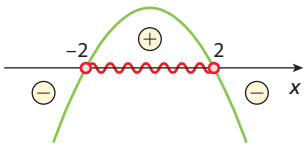
(III) $x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$




Portanto, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ e } x \neq 0\}$.

**Observação**

Para $4 - x^2 > 0$, temos:




## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**32.** Considerando a função dada por $f(x) = \log_2(x + 1)$, determine:

**a)** $f(7)$ 3

**b)** $f(0)$ 0

**c)** $f(-0{,}5)$ −1

**d)** $f(\sqrt{2} - 1)$ $\frac{1}{2}$

**33.** Dada a função $g$, tal que $g(x) = \log_3(x - 4)$, determine o valor de $x$ para:

**a)** $g(x) = 3$ 31

**b)** $g(x) = \frac{1}{2}$ $\sqrt{3} + 4$

**34.** Identifique o domínio das funções dadas por:

**a)** $f(x) = \log(2x + 5)$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\right\}$

**b)** $f(x) = \log_{x+2}(3 - x)$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$

**c)** $g(x) = \log_{18} 2^x$ $D(g) = \mathbb{R}$

**35.** (Vunesp) O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transforma esse resultado em altitude.

Suponha que a altitude $h$ acima do nível do mar, em quilômetro, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica $p$, em atm, por $h(p) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{p}\right)$. Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4 atm. Considerando a aproximação $\log_{10} 2 = 0{,}3$, a altitude $h$ do avião nesse instante, em quilômetro, era de: alternativa b

**a)** 5 **c)** 9 **e)** 12

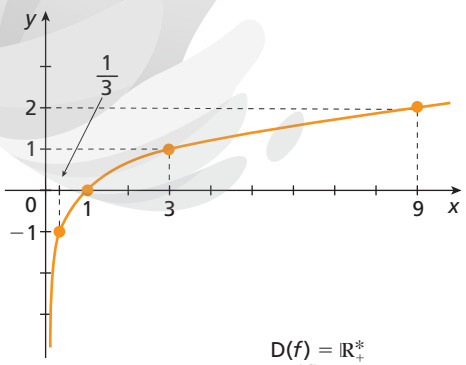
**b)** 8 **d)** 11

## 3.1 Gráfico da função logarítmica

Observe a seguir os gráficos de duas funções logarítmicas.

- $f(x) = \log_3 x$

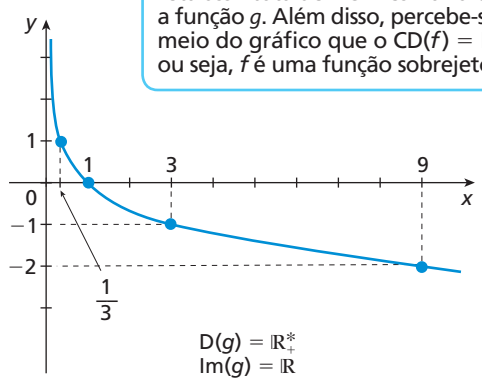
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | −1 |
| 1 | 0 |
| 3 | 1 |
| 9 | 2 |




$D(f) = \mathbb{R}_+^*$
$Im(f) = \mathbb{R}$

- $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | 1 |
| 1 | 0 |
| 3 | −1 |
| 9 | −2 |




$D(g) = \mathbb{R}_+^*$
$Im(g) = \mathbb{R}$

**Observação**

Observe que, quanto mais o valor de $x$ se aproxima de zero, pela direita, mais o gráfico de $f$ se aproxima do eixo $y$, sem tocá-lo, isto é, o eixo $y$ é a reta assíntota de $f$. O mesmo vale para a função $g$. Além disso, percebe-se por meio do gráfico que o $CD(f) = Im(f)$, ou seja, $f$ é uma função sobrejetora.

Observando esses gráficos, percebemos que ambos interceptam o eixo $x$ no ponto (1, 0) e não encostam no eixo das ordenadas. O gráfico de qualquer função logarítmica $f(x) = \log_a x$ tem essas características e aspecto semelhante a um dos gráficos acima.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

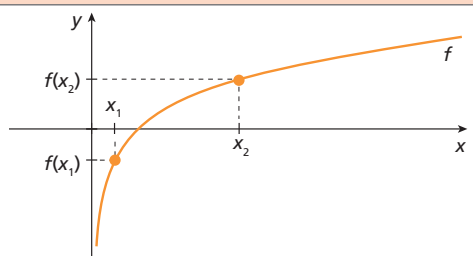
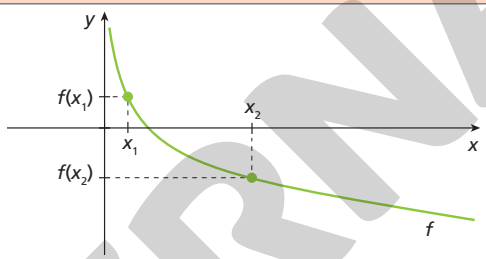
MODERNA

## Crescimento e decrescimento de uma função logarítmica

Analisando as tabelas de valores e os gráficos das funções $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ apresentados na página anterior, podemos chegar às conclusões abaixo.

- Quando os valores de $x$ aumentam, os correspondentes valores de $f(x) = \log_3 x$ também aumentam. Isso ocorre porque a base $a$ é maior que 1 ($a = 3$). Portanto, a função $f$ é **crescente**.
- Quando os valores de $x$ aumentam, os correspondentes valores de $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ diminuem. Isso ocorre porque a base $a$ está entre 0 e 1 $\left(a = \frac{1}{3}\right)$. Portanto, a função $g$ é **decrescente**.

De modo geral, temos:

| Função crescente ($a > 1$) | Função decrescente ($0 < a < 1$) |
|---|---|
|  |  |
| $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ | $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$ |





### Exemplos

**a)** $g(x) = \log_2 x$

$g$ é crescente

**b)** $h(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

$h$ é crescente

**c)** $i(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

$i$ é decrescente

**d)** $j(x) = \log_{0,1} x$

$j$ é decrescente

**Reflita**

Dê o sinal de $\log_a x$ para:

- $a > 1$ e $x > 1$ positivo
- $a > 1$ e $0 < x < 1$ negativo
- $0 < a < 1$ e $x > 1$ negativo
- $0 < a < 1$ e $0 < x < 1$ positivo

## Uma relação entre a função logarítmica e a função exponencial

Vejamos agora uma importante relação entre a função logarítmica e a função exponencial.

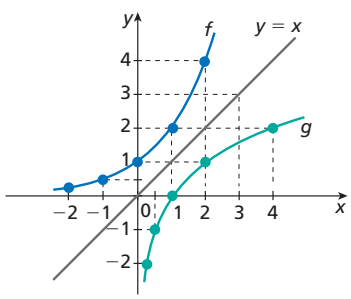
Dada uma função bijetora $f: A \to B$, chamamos de **função inversa** de $f$ a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, para todo $x \in A$ e $y \in B$, com $y = f(x)$, temos $f^{-1}(y) = x$.

A partir da definição podemos compreender que a função inversa $f^{-1}$ associa um elemento $y \in \text{Im}(f)$ ao elemento $x \in \text{D}(f)$. Uma consequência disso é que os gráficos da função e da sua função inversa são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i$, definida como $i(x) = x$, que é a bissetriz dos quadrantes ímpares.

As funções logarítmica e exponencial são funções inversas. Como exemplo, observe os gráficos de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

| $x$ | $f(x) = 2^x$ |
|---|---|
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |

| $x$ | $g(x) = \log_2 x$ |
|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | $-2$ |
| $\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |





**Observação**

Uma função $f: A \to B$ é dita **bijetora** se for sobrejetora e injetora. Sabemos que a função logarítmica é sobrejetora. Além disso, ela é injetora, pois dados quaisquer $x_1, x_2 \in \text{D}(f)$, com $x_1 \neq x_2$, temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Veja:
Sejam $x_1, x_2 \in \text{D}(f)$, com $x_1 \neq x_2$. Suponha por absurdo que $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Aplicando a definição de logaritmo temos: $a^{\log_a x_2} = x_1$. Pelas consequências da definição de logaritmo vistas anteriormente, sabemos que $a^{\log_a x_2} = x_2$. Assim, chegamos a um absurdo, pois esse resultado nos diz que $x_1 = x_2$. Portanto, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, $f$ é injetora.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

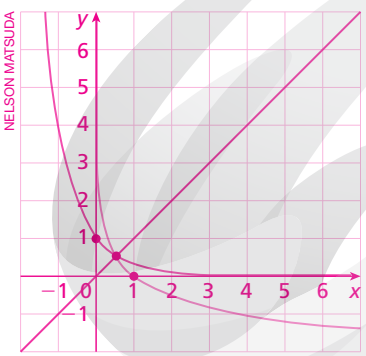
## Pensamento computacional

### Reconhecimento de padrões

Resolver um problema, ainda que seja o esboço dos gráficos das funções exponencial e logarítmica, como no exercício resolvido **R14**, bem como conhecer e reconhecer os padrões do comportamento das funções e do desenho de seus gráficos, permite o reaproveitamento de estratégias para a resolução do problema. São exemplos: a observação do valor da base da exponencial, do logaritmo, ou saber que os gráficos cruzarão os eixos do sistema cartesiano em determinado ponto e observar que essas funções são inversas e simétricas em relação à reta $y = x$ no sistema de coordenadas.

- Esboce o gráfico das funções $m(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ e $n(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, destacando ao menos dois pares de pontos simétricos e o ponto de intersecção do gráfico das funções.

NELSON MATSUDA




Resposta possível: (1, 0), (0, 1), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (4, −1) e (−1, 4).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

### Observação

Poderíamos ter feito primeiro o esboço do gráfico da função $h$ e, a partir dele, por simetria, fazer o esboço do gráfico da função $i$.

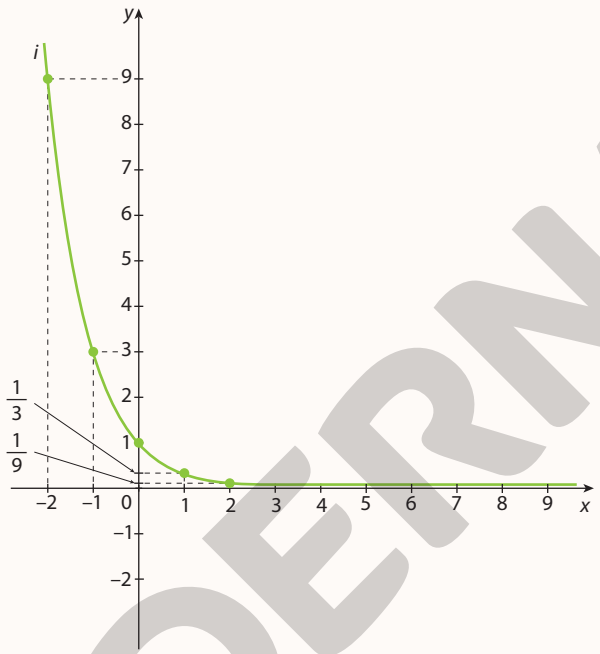
## Exercícios resolvidos

**R14.** Esboçar os gráficos das funções inversas $i$ e $h$, tais que $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

▸ **Resolução**

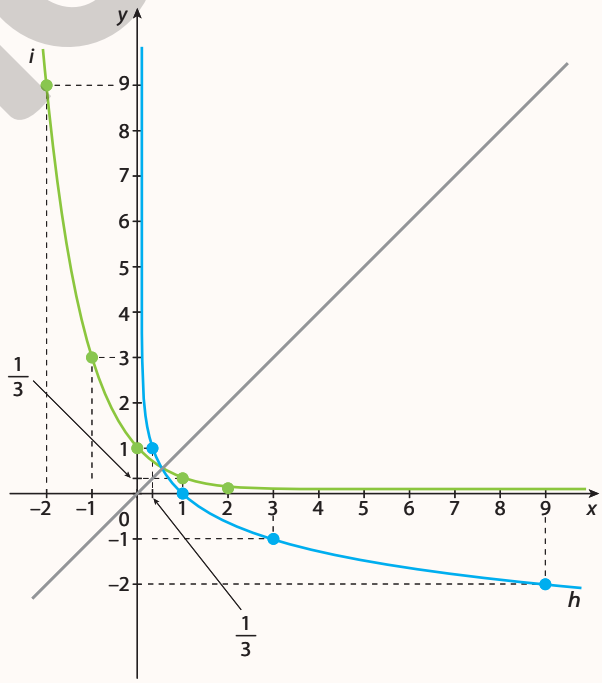
Primeiro, faremos um esboço do gráfico da função $i$. Para isso, vamos atribuir valores a $x$ e calcular os respectivos valores de $i(x)$.

| $x$ | $i(x)$ |
|---|---|
| −2 | 9 |
| −1 | 3 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | $\frac{1}{9}$ |




Sabendo que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta $y = x$, é possível fazer o esboço do gráfico da função $h$.

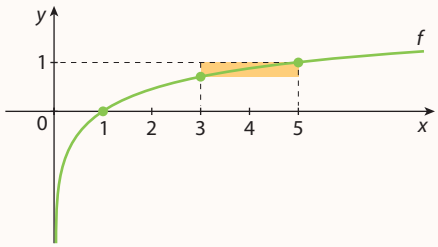
Logo, os gráficos de $i$ e $h$ estão representados no plano cartesiano pelas curvas verde e azul, respectivamente.




MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**R15.** A figura abaixo representa o gráfico de uma função logarítmica.




**a)** Determinar a lei da função.

**b)** Calcular a área do retângulo destacado.
(*Dado*: $\log_5 3 \simeq 0{,}68$)

▸ **Resolução**

**a)** A função é da forma $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Precisamos descobrir o valor da base $a$.
Pelo gráfico, temos que $f(5) = 1$.
Então:
$1 = \log_a 5 \Rightarrow a^1 = 5 \Rightarrow a = 5$
Logo: $f(x) = \log_5 x$

**b)** A base do retângulo mede:
$5 - 3 = 2$
A altura do retângulo mede:
$\log_5 5 - \log_5 3 = 1 - \log_5 3$
Assim, calculamos a área do retângulo:
$2 \cdot (1 - \log_5 3) = 2 - 2 \cdot \log_5 3 \simeq 2 - 2 \cdot 0{,}68 = 0{,}64$
Logo, a área do retângulo é, aproximadamente, 0,64 unidade de área.

Nos exercícios **36** a **40**, **42** e **43**, os alunos devem utilizar os conhecimentos adquiridos previamente observando as bases das funções logarítmicas, bem como seus parâmetros e coeficientes, a fim de esboçar seu gráfico ou determinar seu comportamento. Essas tarefas dialogam com o pilar **reconhecimento de padrões** do *pensamento computacional*.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**36.** Usando uma tabela, esboce os gráficos das seguintes funções logarítmicas:

**a)** $h(x) = \log_2 x$ crescente

**b)** $i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ decrescente

- Qual função é crescente e qual é decrescente?
- Como você responderia a essas perguntas sem construir os gráficos correspondentes?

Ver resolução no Guia do professor.

**37.** Classifique cada uma das funções em crescente ou decrescente, justificando sua resposta.

**a)** $y = \log_{\frac{1}{10}} x$

**b)** $y = \log x$

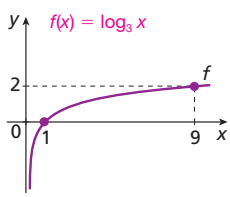
**38.** Determine o valor de $k$ para que:

**a)** $f(x) = \log_{k-3} x$ seja uma função crescente.

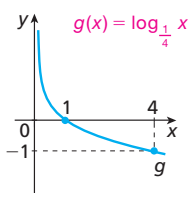
**b)** $f(x) = \log_{3k-1} x$ seja uma função decrescente.

**39.** Em cada item, determine a função logarítmica representada pelo gráfico.

**a)**




**b)**



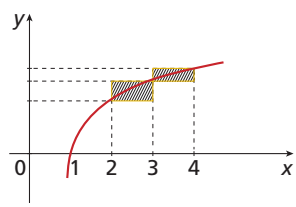

**40.** Em cada item, construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções dadas por:

Ver resolução no Guia do professor.

**a)** $f(x) = \log x$ e $g(x) = 10^x$

**b)** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

**41.** (Fuvest-SP) A curva da figura que se segue representa o gráfico da função $y = \log_{10} x$, para $x > 0$.




Assim sendo, a área da região hachurada formada pelos dois retângulos é: alternativa a

**a)** $\log_{10} 2$

**b)** $\log_{10} 3$

**c)** $\log_{10} 4$

**d)** $\log_{10} 5$

**e)** $\log_{10} 6$

**37.** Ver resolução no Guia do professor.
**a)** decrescente
**b)** crescente

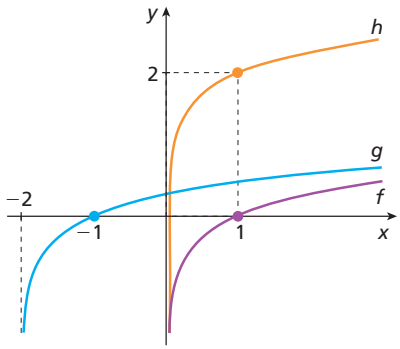
**38. a)** $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$ **b)** $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

**42.** Carlos esboçou, em um plano cartesiano, o gráfico da função $f(x) = \log x$. Depois, apenas com base nesse gráfico, esboçou os gráficos das funções $g(x) = \log (x + 2)$ e $h(x) = \log x + 2$, obtendo o seguinte resultado: Ver resolução no Guia do professor.




ADILSON SECCO

a) Explique como Carlos construiu esses gráficos. Se achar conveniente, avalie sua hipótese em um *software* de construção de gráficos, testando outros valores.

b) Utilizando a mesma estratégia de Carlos, faça, em um único plano cartesiano, um esboço para os gráficos das funções dadas por $f(x) = \log x$, $i(x) = \log (x + 1)$ e $j(x) = \log x + 1$.

**43.** Reúna-se com um colega e, com base no gráfico da função $f(x) = \log x$, construam o esboço dos gráficos das seguintes funções: Ver resolução no Guia do professor.

a) $g(x) = \log \left(\frac{x}{10}\right)$ b) $g(x) = \log \left(\frac{x}{100}\right)$

(*Dica*: Primeiro, reescrevam as leis das funções usando as propriedades dos logaritmos.)

# 4 Equações logarítmicas e sistemas

Equações que têm a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo (ou em ambos) são classificadas como **equações logarítmicas**.

**Observação**

Se o número obtido na resolução de uma equação logarítmica não satisfizer as condições de existência do logaritmo, o conjunto solução será o conjunto vazio.

**Exemplos**

**a)** $\log (2x - 3) = -1$ **b)** $\log_x^2 x + \log_x x = 2$ **c)** $\log_x 5 + 7 = 0$

Podemos resolver equações logarítmicas de diversas maneiras: aplicando a definição de logaritmo, usando as propriedades dos logaritmos, efetuando mudanças de variável etc. Acompanhe, nos exercícios resolvidos a seguir, alguns modos de resolução.

## Exercícios resolvidos

**R16.** Determinar o valor de $x$ sabendo que $\log_6 (x + 5) = 2$.

▸ **Resolução**

Primeiro, estabelecemos a condição de existência:
$x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

Em seguida, resolvemos a equação dada usando a definição de logaritmo:
$\log_6 (x + 5) = 2 \Rightarrow 6^2 = x + 5 \Rightarrow x = 31$

Como 31 atende à condição de existência do logaritmo, então $x$ é igual a 31.

**R17.** Resolver a equação $\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6)$.

▸ **Resolução**

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x + 7 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{7}{2} \\ x > 6 \end{cases} \Rightarrow x > 6$$

Para resolver equações como essa, podemos usar a consequência da definição de logaritmo:
$\log_a m = \log_a n \Rightarrow m = n$

Assim:
$\log_5 (2x + 7) = \log_5 (x - 6) \Rightarrow 2x + 7 = x - 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - x = -6 - 7 \Rightarrow x = -13$

Como $x = -13$ não obedece à condição de existência ($x > 6$), concluímos que não existe $x$ que satisfaça a equação, ou seja, $S = \varnothing$.

**R18.** Resolver a equação $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 0$.

▸ **Resolução**

Estabelecemos as condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

Resolvemos a equação utilizando as propriedades e a definição de logaritmo:
$\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 0 \Rightarrow \log_3 [x(x - 2)] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_3 (x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x = 3^0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

Apenas $x_1$ atende às condições de existência.
Portanto, $S = \{1 + \sqrt{2}\}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**R19.** Resolver o sistema: $\begin{cases} \log x - \log y = \log 4 \\ 4^{x+y} = 1.024 \end{cases}$

▸ **Resolução**

Condições de existência do logaritmo:
$x > 0$ e $y > 0$

Preparando o sistema, temos:

$$\begin{cases} \log x - \log y = \log 4 \\ 4^{x+y} = 1.024 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log \frac{x}{y} = \log 4 \\ 4^{x+y} = 4^5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \Rightarrow x = 4y \text{ (I)} \\ x + y = 5 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II): $4y + y = 5 \Rightarrow y = 1$

Substituindo $y$ por 1 em (I): $x = 4 \cdot 1 \Rightarrow x = 4$

Como ambos os resultados obedecem à condição de existência, $S = \{(4, 1)\}$.

**Observação**

Em um sistema em que há duas equações e duas incógnitas, a solução, se existir, será um par ordenado $(x, y)$. Por isso, há necessidade de colocar, além das chaves na solução, os parênteses: $S = \{(x, y)\}$

**R20.** Resolver a equação $\log^2 x - 5 \cdot \log x + 4 = 0$.

▸ **Resolução**

Condição de existência: $x > 0$

Substituindo $\log x$ por $y$, obtemos:

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$ e $y_2 = 1$

Como $y = \log x$, temos:

- $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$
- $\log x = 4 \Rightarrow x = 10.000$

Como ambos os resultados obedecem à condição de existência, temos $S = \{10, 10.000\}$.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**44.** Resolva as equações a seguir.

a) $\log_x 64 = 2$ $S = \{8\}$

b) $\log_4 (x + 1) = 2$ $S = \{15\}$

c) $\log (x - 1)^2 = \log 1$ $S = \{0, 2\}$

d) $\log_{21} (x + 2) + \log_{21} (x + 6) = 1$ $S = \{1\}$

e) $\log_2 (x - 2) - \log_2 (2x - 7) = 1$ $S = \{4\}$

f) $\log x + 2 \cdot \log^2 x - 1 = 0$ $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$

**45.** Resolva o sistema.

$\begin{cases} \log_2 (x - 2) - \log_2 (y + 1) = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$ $S = \{(8, 2)\}$

**46.** A massa $A$ de uma substância radioativa decai segundo a lei $A = A_0 \cdot 10^{-0,012t}$, em que $t$ é o tempo de decaimento, em hora, e $A_0$ é a massa inicial, isto é, a massa correspondente a $t = 0$.

Para calcular a meia-vida dessa substância, ou seja, o tempo decorrido para que $A = \frac{1}{2}A_0$, um químico substituiu $A$ por $\frac{1}{2}A_0$ nessa lei e obteve a equação $\log 0,5 = \log 10^{-0,012t}$. Considerando $\log 0,5 = -0,30$, resolva essa equação para obter a meia-vida da substância. 25 horas

# 5 Inequações logarítmicas

Inequações que têm a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo (ou em ambos) são denominadas **inequações logarítmicas**.

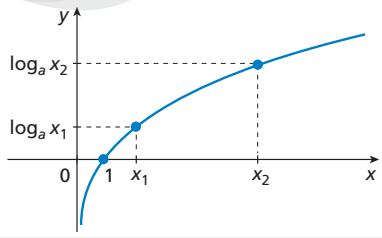
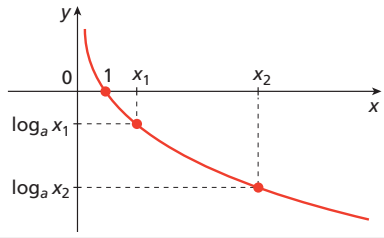
**Exemplos**

**a)** $\log_3 (x + 1) > \log_3 x$ **b)** $\log_5 (x - 2) - \log_7 (x^2 + 4) \leqslant 9$ **c)** $\log_6 x \geqslant 0$

Já vimos que uma função logarítmica pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor da base $a$.

**Observação**

Nesta obra, estudaremos apenas as inequações logarítmicas que apresentam a incógnita no logaritmando.

| Função crescente ($a > 1$) | Função decrescente ($0 < a < 1$) |
|---|---|
|  |  |
| $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$ | $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$ |





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**Observação**

Analogamente, temos:
- se $a > 1$, então:
  $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(x) \geqslant g(x)$
- se $0 < a < 1$, então:
  $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x) \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(x) \leqslant g(x)$

Assim, podemos chegar às conclusões a seguir.

- Quando a base do logaritmo é maior que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos. Ou seja, para $\boldsymbol{a > 1}$, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$$

sinal mantido

- Quando a base do logaritmo está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos. Ou seja, para $\boldsymbol{0 < a < 1}$, temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

sinal invertido

Apesar de essas regras serem análogas às utilizadas na resolução de inequações exponenciais, devemos lembrar que a função exponencial tem domínio $\mathbb{R}$, ou seja, não há condição de existência, ao contrário da função logarítmica, cujo domínio é $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, ao resolver inequações logarítmicas, é fundamental determinar as condições de existência.

## Exercícios resolvidos

**R21.** Resolver a inequação $\log (x + 13) > \log 2$.

▸ **Resolução**

Condição de existência:

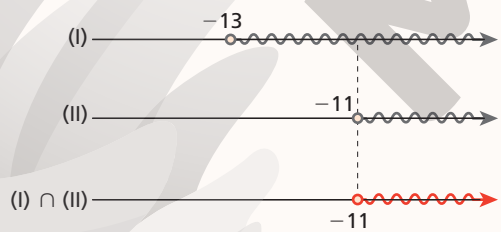
$x + 13 > 0 \Rightarrow x > -13$ (I)

Como a base é 10 (maior que 1), a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos:

$\log (x + 13) > \log 2 \Rightarrow x + 13 > 2 \Rightarrow x > -11$ (II)

sinal mantido

As duas desigualdades devem ser satisfeitas: $x > -13$ e $x > -11$




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -11\}$.

**R22.** Resolver a inequação

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant -2.$$

▸ **Resolução**

Condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ -x + 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 10 \text{ (I)}$$

Agora, para resolver a inequação, devemos escrever $-2$ como o logaritmo de um número na base $\frac{1}{3}$.

De acordo com a 3ª consequência da definição de logaritmo, para escrever um número real $n$ como logaritmo de base $a$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, basta trocá-lo por $\log_a a^n$. Assim:

$$-2 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$$

Portanto:

$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant -2$

$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (-x + 10) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$

$\log_{\frac{1}{3}} [x(-x + 10)] \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$

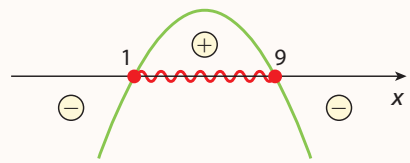
Como a base é $\frac{1}{3}$ (está entre 0 e 1), a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos:

$\log_{\frac{1}{3}} [x(-x+10)] \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9 \Rightarrow [x(-x+10)] \geqslant 9 \Rightarrow$

sinal invertido

$\Rightarrow -x^2 + 10x - 9 \geqslant 0$

Resolvendo a equação $-x^2 + 10x - 9 = 0$, obtemos $x = 1$ ou $x = 9$.



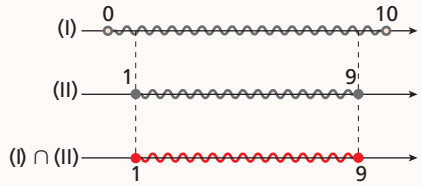

Portanto: $-x^2 + 10x - 9 \geqslant 0 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 9$ (II)

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

As desigualdades (I) e (II) devem ser satisfeitas:




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 9\}$.

**R23.** Determinar os valores de $x$ que tornam verdadeira a desigualdade: $1 < \log_3 (2x - 1) < 4$

**▸ Resolução**

Condição de existência:

$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ (I)

Devemos escrever 1 e 4 como os logaritmos de um número na base 3:

- $1 = \log_3 3^1 = \log_3 3$
- $4 = \log_3 3^4 = \log_3 81$

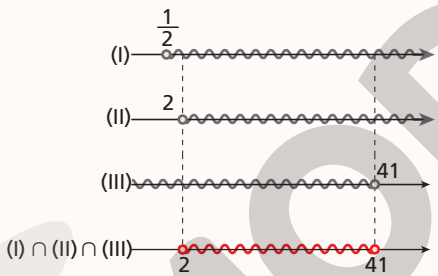
Dessa forma, temos: $\log_3 3 < \log_3 (2x - 1) < \log_3 81$

Como a base é 3 (maior que 1): $3 < 2x - 1 < 81$

Assim:

- $3 < 2x - 1 \Rightarrow x > 2$ (II)
- $2x - 1 < 81 \Rightarrow x < 41$ (III)

As desigualdades (I), (II) e (III) devem ser satisfeitas:




Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 41\}$.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**47.** Resolva as inequações.

a) $\log_{12} (x + 9) > \log_{12} 1$

b) $\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{5}} 5$

c) $\log_8 x \geqslant 2$

d) $\log_{0,2} (x + 3) > 0$

e) $\log_{0,3} (2x - 2) + \log_{0,3} 2 > 1$

f) $0 < \log_3 (x - 2) < 2$

**48.** Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos de $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2$. Ver resolução no Guia do professor.

a) Analise, com um colega, os intervalos do domínio em que $f(x) \geqslant g(x)$.

b) Resolvam a inequação $f(x) \geqslant g(x)$ e comparem a solução com a análise dos gráficos.

c) Redijam a conclusão a que chegaram.

**49.** Use um *software* de construção de gráficos para determinar o conjunto solução da inequação $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x \leqslant -2$. Ver resolução no Guia do professor.

**47. a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$
**b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
**c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$
**d)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$
**e)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$
**f)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$

O exercício **49** propõe a utilização de um *software* de construção de gráficos na investigação da solução de uma inequação logarítmica. Dessa maneira, é favorecido o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** e da competência geral **5** da BNCC.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

# Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** e das habilidades **EM13MAT305**, **EM13MAT403** e **EM13MAT404** da BNCC, uma vez que os alunos colocarão em prática, ao resolver problemas, as estratégias, os conceitos, as definições e os procedimentos matemáticos, utilizando diferentes registros das funções logarítmicas e, quando conveniente, explorando sua relação com a função exponencial.

## Aplicação

**1.** Determine o valor de:

**a)** $M = \log 50 + \log 40 + \log 20 + \log 2{,}5$ 5

**b)** $A = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$ $\frac{3}{8}$

**2.** (Cesgranrio-RJ) Se $\log_{10} 123 = 2{,}09$, o valor de $\log_{10} 1{,}23$ é: alternativa b

**a)** 0,0209
**b)** 0,09
**c)** 0,209
**d)** 1,09
**e)** 1,209

**3.** (Mackenzie-SP) Considerando que $x - y = \sqrt[3]{3}$ e que $x + y = \sqrt{3}$, o valor de $\log_3 (x^2 - y^2)$ é: alternativa e

**a)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$
**b)** $\frac{2}{5}$
**c)** $\sqrt{3}$
**d)** $\frac{3}{2}$
**e)** $\frac{5}{6}$

**4.** (UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático $h(t) = 1{,}5 + \log_3 (t + 1)$, com $h(t)$ em metro e $t$ em ano. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em ano) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de: alternativa b

**a)** 9
**b)** 8
**c)** 5
**d)** 4
**e)** 2

**5.** (PUC) As indicações $R_1$ e $R_2$ de dois terremotos, na escala Richter, estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)$, em que $E_1$ e $E_2$ medem as respectivas energias, liberadas pelos terremotos em forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Nessas condições, se $R_1 = 8{,}5$ e $R_2 = 7{,}0$, é correto afirmar que a razão entre $E_1$ e $E_2$, nessa ordem, é igual a: alternativa d

**a)** 0,5
**b)** 1,5
**c)** $10^{0,5}$
**d)** $10^{1,5}$

**6.** (Enem) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após $t$ anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde $A$ é a massa inicial e $k$ é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial? alternativa e

**a)** 27
**b)** 36
**c)** 50
**d)** 54
**e)** 100

**7.** A intensidade sonora é medida em uma unidade conhecida por decibel. Para medi-la, primeiro associa-se uma intensidade $I_0$ a um som muito fraco, que seria o menor som audível pelo ser humano. Se um som tem intensidade $I$, o valor, em decibel, desse som é dado pela fórmula: $d = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$

Quantos decibéis terá um som cuja intensidade equivale a $100I_0$? 20 decibéis

**8.** (Vunesp) O nível sonoro $N$, medido em decibéis (dB), e a intensidade $I$ de um som, medida em watt por metro quadrado ($W/m^2$), estão relacionados pela equação $N = 120 + 10 \cdot \log_{10} (I)$. Suponha que foram medidos em certo local os níveis sonoros $N_1$ e $N_2$ de dois ruídos com intensidades $I_1$ e $I_2$, respectivamente. Sendo $N_1 - N_2 = 20$ dB, a razão $\frac{I_1}{I_2}$ é: alternativa d

**a)** $10^{-2}$
**b)** $10^{-1}$
**c)** 10
**d)** $10^2$
**e)** $10^3$

**9. a)** $A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**9.** A meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade.

**a)** Escreva a lei que fornece a massa final $A$ em função da massa inicial $A_0$ e do tempo $n$.

**b)** Se 16 gramas de uma substância se reduzirem, daqui a $n$ meias-vidas, a aproximadamente $1{,}355 \cdot 10^{-20}$ grama, qual será o valor aproximado de $n$? (*Dica*: Use uma calculadora científica.) ≃ 70

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**10.** Estima-se hoje que a população de determinado país aumente de acordo com a lei $P(t) = P_0 \cdot (1{,}02)^t$, sendo $t$ o tempo em ano, $P_0$ a população quando $t = 0$ e $P(t)$ o total de habitantes após $t$ anos. Daqui a quantos anos aproximadamente a população desse país estará duplicada? (*Dica*: Use uma calculadora científica.) aproximadamente 35 anos

**11.** (Fuvest-SP) O conjunto dos números reais $x$ que satisfazem a inequação $\log_2 (2x + 5) - \log_2 (3x - 1) > 1$ é o intervalo: alternativa d

**a)** $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$

**b)** $\left]\frac{7}{4}, \infty\right[$

**c)** $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$

**d)** $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$

**e)** $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

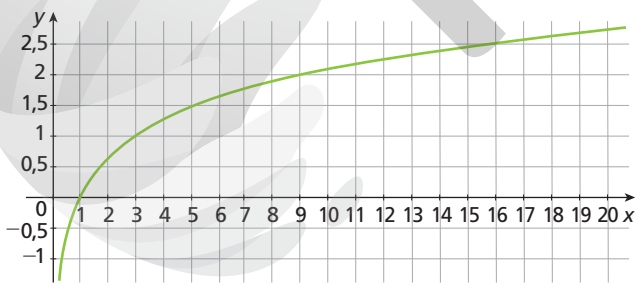
**12.** (ESPM-SP) A solução da equação

$\log_2 x^2 + \log_4 \sqrt{x} = -2{,}25$ é: alternativa a

**a)** 0,5
**b)** 3,5
**c)** 7,5
**d)** 10,5
**e)** 13,5

## Aprofundamento

**13.** (Insper-SP) Na figura abaixo, está representada, fora de escala, uma parte do gráfico $y = \log_3 x$.



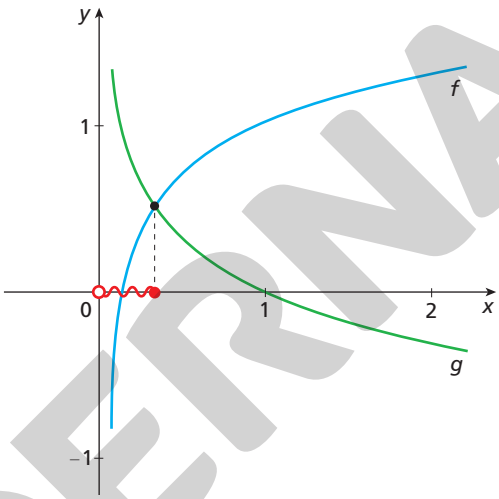

A partir do gráfico, pode-se concluir que a solução da equação $9^x = 15$ vale, aproximadamente: alternativa d

**a)** 2,50
**b)** 1,65
**c)** 1,45
**d)** 1,25
**e)** 1,10

**14.** (Fuvest-SP) Sabendo-se que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a: alternativa e

**a)** $\frac{2}{p}$
**b)** $2p$
**c)** $2 + p^2$
**d)** $2 + 2p$
**e)** $\frac{2 + 2p}{p}$

**15.** Observe os gráficos das funções $f(x) = \log x + 1$ e $g(x) = -\log x$ e responda às questões a seguir.




**a)** Qual é o ponto de intersecção dos gráficos das funções? $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2}\right)$

**b)** Escreva uma inequação cuja solução seja o intervalo de $x$ representado na figura.
Resposta possível: $-\log x \geqslant \log x + 1$

**16.** Escreva o domínio da função:

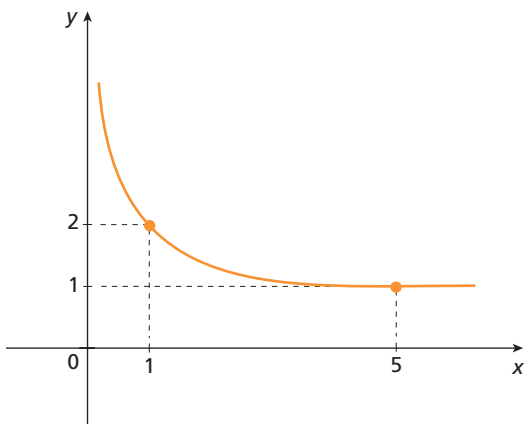
$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1)}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$

**17.** Resolva a equação:

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 x = \log_4 (2x - 1)$
$S = \{1\}$

## Desafio

**18.** Observe o gráfico da função dada por $f(x) = \log_a x + k$.




- Sabendo que $g(x) = f(x) - 2$, calcule $g(125)$. −3

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

# Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Sendo $g$ e $h$ números reais positivos, com $g \neq 1$, se $\log_g h = i$, então: alternativa a

**a)** $g^i = h$ **c)** $h^g = i$
**b)** $g^h = i$ **d)** $i^h = g$

**2.** Considerando $\log_g h = i$, pode-se afirmar que: alternativa c

**a)** $g$ pode ser zero.
**b)** $h$ pode ser zero.
**c)** $h$ deve ser positivo.
**d)** $h$ deve ser diferente de 1.

**3.** É possível afirmar que $\log_4 \left(\frac{2}{3}\right)$ equivale a: alternativa c

**a)** $\log_4 2 + \log_4 3$ **c)** $\log_4 2 - \log_4 3$
**b)** $\log_4 2 : \log_4 3$ **d)** $\log_4 2 \cdot \log_4 3$

**4.** Pode-se afirmar que $\log_{39} 42$ equivale a: alternativa b

**a)** $\log 42 \cdot \log 39$ **c)** $\log_{42} 39$
**b)** $\frac{\log 42}{\log 39}$ **d)** $\frac{\log 39}{\log 42}$

**5.** Admitindo $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}47$, então $\log 6$ é igual a: alternativa b

**a)** 0,141
**b)** 0,77
**c)** −0,17
**d)** 0,15

**6.** Sabemos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $pH = -\log [H^+]$; então, podemos afirmar que, se o pH de uma substância é 10, a concentração de $H^+$ é: alternativa a

**a)** $10^{-10}$ **b)** $10^{10}$ **c)** $-10^{10}$ **d)** 1.010

**7.** A função $f$, tal que $f(x) = \log_{\frac{2}{7}} x$, é: alternativa d

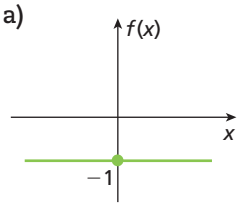
**a)** crescente. **c)** constante.
**b)** nula. **d)** decrescente.

**8.** As funções dadas por $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = 3^x$ são: alternativa c

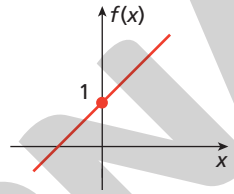
**a)** opostas. **c)** inversas.
**b)** polinomiais. **d)** constantes.

**9.** A função $f$, de lei $f(x) = \log_3 x$, pode ser representada pelo gráfico: alternativa b

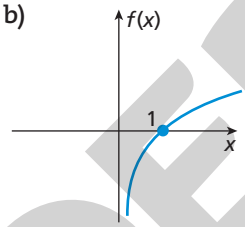
**a)**



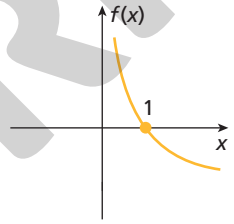

**c)**




**b)**




**d)**




**10.** A equação $\log_x 8 = 2$ tem por solução: alternativa d

**a)** 64 **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $-\sqrt{2}$ **d)** $2\sqrt{2}$

**11.** Se $\log (x^2 + 6) < 1$, então $x \in \mathbb{R}$ tal que: alternativa d

**a)** $x > 2$ **c)** $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
**b)** $x < -2$ **d)** $-2 < x < 2$

## Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

| | Número da questão | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Objetivos do capítulo** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Calcular logaritmo. | X | X | X | X | X | X | | | | | |
| Identificar uma função logarítmica. | | | | | | | X | X | X | | |
| Analisar e construir o gráfico de uma função logarítmica. | | | | | | | X | | X | | |
| Resolver situações-problema que envolvam logaritmos. | | | | | | X | | | | | |
| Resolver equações, sistemas e inequações logarítmicas. | | | | | | | | | | X | X |
| **Páginas do livro referentes ao conceito** | 86 a 88 | 86 a 88 | 89 a 91 | 91 a 93 | 89 a 91 | 86 a 88 | 93 a 98 | 95 a 98 | 94 a 98 | 98 e 99 | 99 a 101 |

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

5

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT304**, **EM13MAT315**, **EM13MAT401**, **EM13MAT507** e **EM13MAT508**.

# Sequências



ALOISIO MAURICIO/FOTOARENA

Dança do Leão na comemoração do Ano-Novo chinês, ano do rato de metal, no templo Zu Lai, o maior templo budista da América Latina, localizado na cidade de Cotia (SP). Foto de 2020.

**Objetivos do capítulo**

- Identificar padrões numéricos e sequências.
- Resolver problemas que envolvam sequências.
- Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas.

## *Calendário Chinês*

Esse calendário lunissolar teve início com a chegada do imperador Huangdi, em 2637 a.C. Ele possui 354 ou 355 dias dividido em 12 meses com 29 a 30 dias [1 ano tem 12 lunações que duram 354 dias. Para sincronizar com o ciclo solar (365,25 dias), é acrescentado 1 mês aproximadamente a cada 3 anos] [...]. Os chineses relacionam cada ano a um dos doze animais que, de acordo com a lenda, teria atendido ao chamado de Buda para uma reunião. Os doze animais foram transformados em signos do horóscopo chinês e, na ordem, são rato, boi/búfalo, tigre, coelho, dragão, serpente/cobra, cavalo, cabra/bode/carneiro, macaco, galo/galinha, cão e porco/javali. Segundo a crença, os animais também recebem a influência dos cinco elementos fundamentais do Universo: metal, madeira, água, fogo e terra. [...]

Fonte: FREITAS, Rosana. Calendários e comemorações de Ano-Novo ao redor do mundo. *MultiRio*, 26 dez. 2019. Disponível em: <multirio.rio.rj.gov.br/index.php/leia/reportagens-artigos/reportagens/15399-calendários-e-comemorações-de-ano-novo-ao-redor-do-mundo>. Acesso em: 20 ago. 2020.

Ao tratar do calendário chinês, valoriza-se o conhecimento historicamente construído a respeito desse tema, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC.

Observe no quadro os signos do horóscopo chinês nos anos de 1924 a 1931.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rato | boi | tigre | coelho | dragão | serpente | cavalo | cabra | macaco | galo | cão | porco |
| 1924 | 1925 | 1926 | 1927 | 1928 | 1929 | 1930 | 1931 | 1932 | 1933 | 1934 | 1935 |
| 1936 | 1937 | 1938 | 1939 | 1940 | 1941 | 1942 | 1943 | 1944 | 1945 | 1946 | 1947 |
| 1948 | 1949 | 1950 | 1951 | 1952 | 1953 | 1954 | 1955 | 1956 | 1957 | 1958 | 1959 |
| 1960 | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 | 1970 | 1971 |
| 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 | 1978 | 1979 | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 |
| 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 |
| 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
| 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 |
| 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 | 2025 | 2026 | 2027 | 2028 | 2029 | 2030 | 2031 |

STOCKSMARTSTART/SHUTTERSTOCK

Observando o quadro, os anos relacionados ao dragão no período apresentado são: 1928, 1940, 1952, 1964, 1976, 1988, 2000, 2012 e 2024. Esse conjunto de números exemplifica o objeto de estudo deste capítulo: as **sequências numéricas**.

Diversas situações desse capítulo demandam a utilização de estratégias, de conceitos, de definições e de procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **3** da BNCC.

# 1 Sequências e padrões

Os anos representados pelo dragão indicados no quadro formam uma **sequência** ou **sucessão**, que podemos representar da seguinte maneira:

(1928, 1940, 1952, 1964, 1976, 1988, 2000, 2012, 2024)

Os elementos ou termos dessa sequência podem ser representados por uma letra (geralmente usa-se a letra $a$) e um índice, que indica a posição ou a ordem do elemento na sequência. Dessa maneira: $a_1 = 1928$ é o primeiro termo da sequência, $a_2 = 1940$ é o segundo termo e assim sucessivamente até $a_9 = 2024$.

Com os dados fornecidos pelo quadro, também podemos escrever outras sequências, por exemplo:

- a sequência dos anos do rato indicados no quadro: (1924, 1936, 1948, 1960, 1972, 1984, 1996, 2008, 2020);
- os primeiros quatro anos do cavalo a partir de 1970: (1978, 1990, 2002, 2014).

Se a sequência tiver um último termo, ela é **finita**; caso contrário, dizemos que é **infinita** e a indicamos colocando reticências no final.

### Exemplos

**a)** A sequência dos números naturais primos é infinita. Para indicá-la, escrevemos seus primeiros elementos e colocamos reticências no final:

(2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)

**b)** A sequência formada pelas letras iniciais dos dias de uma semana é finita: (D, S, T, Q, Q, S, S). Veja que os termos de uma sequência não são necessariamente distintos.

Note que todas essas sequências pressupõem certa ordem em seus termos.

Em uma sequência, $a_n$ representa um termo genérico, na posição $n$. Assim, se $n = 5$, $a_5$ é o quinto termo; se $n = 100$, $a_{100}$ é o centésimo termo. O termo subsequente a $a_n$ é representado por $a_{n+1}$, e o antecessor de $a_n$, a partir do segundo termo, é representado por $a_{n-1}$.

Nesse tópico, e em todo este capítulo, o aluno vai se deparar com situações em que deverá observar padrões, realizar experimentações para estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.

## 1.1 Sequências numéricas

Um tipo importante de sucessão são as sequências numéricas.

Uma **sequência numérica infinita** é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^*$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Uma **sequência numérica finita** de $n$ termos é uma função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

**Explore**

Pesquise e obtenha o calendário (gregoriano) do ano em que você nasceu, os calendários de 28 e de 56 anos antes e os de 28 e 56 anos depois de nascido. Compare-os.

a) O que você descobriu sobre esses calendários?

b) Escreva uma sequência de cinco termos com anos que têm calendários semelhantes.

**a)** A cada 28 anos, os calendários se repetem, com as datas caindo sempre no mesmo dia da semana.

**b)** resposta pessoal

**Observação**

Quando for conveniente, podemos representar o primeiro termo de uma sequência por $a_0$, em vez de $a_1$. Nesse caso, o domínio da função é $\mathbb{N}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Assim, temos $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$. Uma sequência finita de $n$ termos é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, e uma sequência infinita é indicada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$.

## Determinação de uma sequência numérica

Algumas sequências numéricas podem ser determinadas por uma **lei de formação**, ou seja, uma lei que associa a cada número natural $n$ diferente de zero um termo $a_n = f(n)$. O termo $a_n$, nesse caso, é conhecido por **termo geral** da sequência.

### Exemplos

**a)** Para determinar a sequência de números naturais ímpares, podemos utilizar a seguinte lei de formação: $f(n) = 2n - 1$, em que $n \in \mathbb{N}^*$. Essa lei de formação associa cada número natural diferente de zero a um termo da sequência formada pelos números naturais ímpares. Nesse caso, o primeiro termo da sequência será indicado por $a_1$. No quadro a seguir estão determinados os quatro primeiros termos dessa sequência:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ | $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ | $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ | $a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ |

Assim, podemos verificar que a sequência dos números naturais ímpares é (1, 3, 5, 7, ...). Como $n$ pertence a um conjunto infinito, a sequência também é infinita. A lei de formação que expressa $a_n$ em função de $n$ é $a_n = 2n - 1$, com $n$ natural não nulo.

**b)** Considerando a sequência (7, 14, 21, 28, 35), verificamos que pode ser estabelecida uma relação entre o valor de cada termo e sua posição na sequência:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1 = 7 = 7 \cdot 1$ | $a_2 = 14 = 7 \cdot 2$ | $a_3 = 21 = 7 \cdot 3$ | $a_4 = 28 = 7 \cdot 4$ | $a_5 = 35 = 7 \cdot 5$ |

A partir da análise do quadro, pode-se deduzir e descrever essa sequência por meio do termo geral $a_n = 7n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

**Reflita**

Suponha que a lei de formação que determina uma sequência associe cada número natural a um termo $a_n = f(n)$. Resolva os itens a seguir.

- Represente o primeiro termo dessa sequência.
- Considerando $n \in \mathbb{N}$, a lei de formação da sequência do exemplo a precisará ser alterada. Por quê?
- Escreva uma nova lei de formação para determinar a sequência de números naturais ímpares considerando $n \in \mathbb{N}$.

- $a_0$
- A lei de formação precisou ser alterada porque, ao substituir $n$ por 0, devemos obter 1, que é o primeiro número natural ímpar.
- $f(n) = 2n + 1$

**Reflita**

Por que na sequência do exemplo **b** se considerou $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e não $n \in \mathbb{N}^*$?

Porque a sequência apresentada é finita.

## Exercícios resolvidos

**R1.** Escrever a sequência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 5, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$$

**Resolução**

Nessa sequência, a primeira equação da lei de formação serve para identificar o primeiro termo e a outra, para identificar os próximos termos ($a_n$), que dependem do anterior ($a_{n-1}$).

Portanto, a sequência pedida é:

(−2, −11, −38, −119, ...)

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | $a_1 = -2$ |
| 2 | $a_2 = 3 \cdot a_1 - 5 = 3 \cdot (-2) - 5 = -11$ |
| 3 | $a_3 = 3 \cdot a_2 - 5 = 3 \cdot (-11) - 5 = -38$ |
| 4 | $a_4 = 3 \cdot a_3 - 5 = 3 \cdot (-38) - 5 = -119$ |

**R2.** Considerar a sequência numérica definida por $f(n) = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

**a)** Calcular os quatro primeiros termos.

**b)** Determinar a ordem do termo 163.

**c)** Verificar se 111 pertence a essa sequência.

**Reflita**

Dada a representação da sequência infinita (1, 3, 5, ...), podemos afirmar que o próximo elemento é, com certeza, 7?

Não; pode ser, por exemplo, 6, caso a lei de formação seja: $a_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6}$. Se julgar oportuno, comentar com os alunos que não podemos presumir o próximo termo sem conhecer a lei de formação de uma sequência.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

▸ **Resolução**

a)

| $n$ | $f(n) = 3n + 1$ |
|---|---|
| 1 | $f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ |
| 2 | $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ |
| 3 | $f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$ |
| 4 | $f(4) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$ |

Portanto, os quatro primeiros termos da sequência são: 4, 7, 10 e 13.

b) Devemos calcular $n$, $n \in \mathbb{N}^*$, de modo que $f(n) = 163$.

$3n + 1 = 163 \Rightarrow n = \frac{163 - 1}{3} \Rightarrow n = 54$

Logo, 163 é o 54º termo da sequência.

c) Devemos verificar se existe $n$, $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $3n + 1 = 111$.

$3n + 1 = 111 \Rightarrow n = \frac{111 - 1}{3} \Rightarrow n = \frac{110}{3}$

Como $\frac{110}{3} \notin \mathbb{N}^*$, concluímos que 111 não pertence à sequência.

**R3.** Descrever, por meio da expressão do termo geral, a sequência (0, 6, 12, 18, 24, 30, ...).

▸ **Resolução**

Para $n = 1$, temos: $a_1 = 0 = 6 \cdot 0 = 6 \cdot (1 - 1)$
Para $n = 2$, temos: $a_2 = 6 = 6 \cdot 1 = 6 \cdot (2 - 1)$
Para $n = 3$, temos: $a_3 = 12 = 6 \cdot 2 = 6 \cdot (3 - 1)$
Para $n$ qualquer, temos: $a_n = 6 \cdot (n - 1)$
Logo, um termo geral possível é: $a_n = 6(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola para reproduzir esses procedimentos usando uma planilha eletrônica. Se achar conveniente, pedir a eles que encontrem os termos de outras sequências usando uma planilha. O uso de planilhas eletrônicas pode ser feito em diversos outros momentos deste capítulo, como ao determinar os termos de PAs e PGs, ao calcular a soma desses termos etc.

## Usando planilhas eletrônicas para determinar os termos de uma sequência

Algumas vezes, o termo geral de uma sequência é dado por uma lei tal que, para calcular um termo, é necessário conhecer os termos anteriores. Por exemplo, veja a sequência dada pela lei de formação:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 10 \\ a_n = n + a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Como você faria para calcular o termo $a_{57}$ dessa sequência?

Para calcular o termo $a_{57}$, seria necessário conhecer os valores de $a_{56}$ e $a_{55}$. Mas, para calcular esses valores, seria necessário saber os valores de $a_{54}$ e $a_{53}$ e assim por diante; ou seja, para determinar o termo $a_{57}$, seria preciso calcular todos os termos do $a_3$ ao $a_{56}$.

Perceba que realizar esse procedimento fazendo as contas uma a uma, mesmo que usando uma calculadora, seria extremamente trabalhoso. Uma maneira de facilitar esse processo seria usar uma planilha eletrônica, como mostrado a seguir.

Vamos usar duas colunas da planilha: A e B. A coluna A será usada para os valores de $n$, e a coluna B, para os valores de $a_n$.

Inicialmente, para preencher a coluna A, basta digitar 1 na célula A2 e, na célula A3, digitar a fórmula: =A2+1
(Adiciona 1 ao valor da célula A2)
Para preencher as próximas células dessa coluna, basta selecionar a célula A3, levar o cursor até o canto inferior direito da célula e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo, até onde for conveniente; no nosso caso, pelo menos até $n = 57$.

B4 | Fórmula | =A4+B3–B2

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $a_n$ |
| 2 | 1 | –2 |
| 3 | 2 | 10 |
| 4 | 3 | 15 |
| 5 | 4 | |
| 6 | 5 | |
| 7 | 6 | |
| 8 | 7 | |
| 9 | 8 | |
| ⋮ | | |

Digitamos os valores de $a_1$ e de $a_2$ nas células B2 e B3, respectivamente.
Então, na célula B4, digitamos a fórmula: =A4+B3–B2
(No caso da sequência, o valor de A4 é o valor correspondente a $n$, o valor de B3 é o correspondente a $a_{n-1}$, e o valor de B2 é o correspondente a $a_{n-2}$)

Para copiar a fórmula para as outras células da coluna, basta selecionar a célula B4, levar o cursor até o canto inferior direito da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção para baixo. Assim, preenchemos os valores de $a_n$ até $n = 57$.

B58 | Fórmula | =A58+B57–B56

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $a_n$ |
| 2 | 1 | –2 |
| 3 | 2 | 10 |
| 4 | 3 | 15 |
| 5 | 4 | 9 |
| 6 | 5 | –1 |
| 7 | 6 | –4 |
| ⋮ | | |
| 52 | 51 | 63 |
| 53 | 52 | 57 |
| 54 | 53 | 47 |
| 55 | 54 | 44 |
| 56 | 55 | 52 |
| 57 | 56 | 64 |
| 58 | 57 | 69 |
| 59 | 58 | |

Assim, encontramos o termo $a_{57}$ da sequência: $a_{57} = 69$

**Observação**

Note que, para determinar qualquer outro termo dessa sequência, bastaria continuar arrastando a seleção da célula B4 até a célula conveniente.

**Reflita**

Determine o 86º e o 104º termo dessa sequência.

$a_{86} = 94$ e $a_{104} = 112$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se achar conveniente, pedir aos alunos que resolvam os exercícios **1** e **2** usando uma planilha eletrônica e, também, que calculem outros termos dessas sequências ou da "sequência de Fibonacci", apresentada no exercício **7**.

**5. b)** $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ **c)** 91 pontos

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, determine os cinco primeiros termos das sequências numéricas definidas pelas leis:

**a)** $f(n) = 4n - 8$ −4, 0, 4, 8 e 12

**b)** $f(n) = -3$ −3, −3, −3, −3 e −3

**c)** $f(n) = \frac{1}{2} \cdot n^2$ $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$

**2.** Determine e escreva os quatro primeiros termos das sequências numéricas definidas pelas seguintes leis:

**a)** $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 5n, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ 4, 40, 600 e 12.000

**b)** $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_n = 3^n \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$

**c)** $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (a_{n-1})^{-2}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$ −2, $\frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$

**3.** Escreva uma lei de formação para as seguintes sequências: Ver resolução no Guia do professor.

**a)** (0, 2, 4, 6, 8, 10, ...)

**b)** (17, 17, 17, 17, ...)

**c)** (−3, 4, 11, 18, ...)

**d)** $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

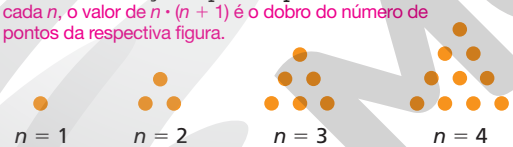
**e)** (−5, 5, −5, 5, ...)

**4.** Considere a sequência determinada pela lei:

$\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_n = x \cdot a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{cases}$

Sabendo que $a_2 = 12$, escreva os elementos dessa sequência. (−4, 12, −36, 108, ...) ou (3, 12, 48, 192, ...)

**5.** A quantidade de pontos nas figuras a seguir formam a sequência de números triangulares. Observe e faça o que se pede. **a)** 2, 6, 12, 20. Para cada $n$, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.




ADILSON SECCO

**a)** Calcule os valores numéricos de $n \cdot (n + 1)$ para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ e compare-os com os números de pontos das figuras.

**b)** Determine uma lei de formação que dá o número de pontos da enésima figura dessa sequência.

**c)** Indique quantos pontos formarão a 13ª figura.

**d)** Responda: essa sequência tem uma figura com 110 pontos? E com 120 pontos? não; sim

**6.** Considere esta sequência numérica infinita:

(−5, −1, 3, 7, 11, 15, 19, ...)

**a)** Calcule o valor das subtrações a seguir.

- $a_2 - a_1$ 4
- $a_3 - a_2$ 4
- $a_4 - a_3$ 4
- $a_5 - a_4$ 4
- $a_6 - a_5$ 4
- $a_7 - a_6$ 4

**b)** Analisando os resultados obtidos no item anterior, que resultado você espera encontrar para a subtração $a_n - a_{n-1}$, para $n \geqslant 2$? 4

**c)** Utilizando o valor de $a_7$, determine o valor de $a_8$. 23

**d)** Elabore uma estratégia que possa ser utilizada para determinar o valor de $a_{n+1}$ conhecendo o valor de $a_n$. Espera-se que os alunos percebam que basta somar 4 ao valor de $a_n$ para determinar $a_{n+1}$.

**7.** Leonardo de Pisa, também conhecido por Leonardo Fibonacci ou "filho de Bonaccio", foi um dos mais talentosos matemáticos da Idade Média. Entre suas descobertas, pode ser citada a "sequência de Fibonacci": **a)** Espera-se que os alunos percebam que, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à soma dos dois termos anteriores.

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)

**a)** Analisando os sete primeiros termos dessa sequência, descubra o padrão de formação para essa sequência e escreva um parágrafo para explicar sua descoberta. Você pode resolver esse item com um colega.

**b)** Utilizando o padrão de formação identificado no item anterior e sabendo que $n \in \mathbb{N}$, escreva os termos $a_8$, $a_9$ e $a_{10}$ dessa sequência.

**c)** Escreva a lei de formação dessa sequência.

**d)** A "sequência de Fibonacci" pode ser aplicada no desenvolvimento de diversos padrões relacionados a fenômenos naturais. Faça uma pesquisa e identifique algumas dessas aplicações. resposta pessoal

No exercício **5**, os alunos devem identificar o padrão de formação da sequência dos números triangulares a partir de seu padrão de formação, observando e identificando quais características são relevantes à resolução. Dessa maneira, o exercício contribui para o desenvolvimento dos pilares **abstração** e **reconhecimento de padrões** do *pensamento computacional*. Na medida em que determina a lei de formação da sequência no item **c**, trabalha-se, também, o pilar do **algoritmo**.

**7. b)** $a_8 = 21$; $a_9 = 34$; $a_{10} = 55$ **c)** $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$

# 2 Progressões aritméticas

O dono de uma papelaria preparou um quadro com o valor a ser pago de acordo com a quantidade de fotocópias simples pedida pelos clientes.

| Número de fotocópias simples | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor a ser pago (R$) | 0,40 | 0,80 | 1,20 | 1,60 | 2,00 | 2,40 | 2,80 | 3,20 | 3,60 | 4,00 |



TASCHA RASSADORNYINDEE/EYEEM/GETTY IMAGES

Observe que o valor a ser pago, em função do número de fotocópias simples, determina a sequência: (0,40; 0,80; 1,20; 1,60; 2,00; 2,40; 2,80; 3,20; 3,60; 4,00).

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT507** ao identificar e associar PA e função afim de domínio discreto aplicando propriedades e deduzindo fórmulas. O trabalho com as PAs é feito a partir da utilização de diferentes registros matemáticos (algébricos e gráficos), permitindo o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

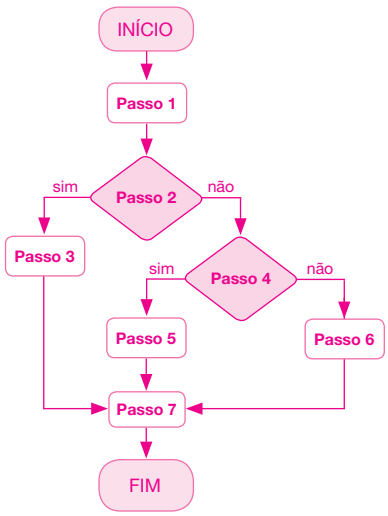
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELNA

**Passo 1.** Seja $r$ a razão de uma PA.
**Passo 2.** Se $r > 0$, vá para o **passo 3**. Se não, vá para o **passo 4**.
**Passo 3.** Como $r > 0$, então a PA é crescente. Vá para o **passo 7**.
**Passo 4.** Se $r = 0$, vá para o **passo 5**. Se não, vá para o **passo 6**.
**Passo 5.** Como $r = 0$, então a PA é constante. Vá para o **passo 7**.
**Passo 6.** Como $r$ só pode ser menor que 0, então a PA é decrescente. Vá para o **passo 7**.
**Passo 7.** Temos a resposta para a razão $r$. O algoritmo se encerra.

### Pensamento computacional

Escreva um algoritmo em linguagem corrente que, dada a razão de uma PA, conclui se a PA é crescente, decrescente ou constante. Em seguida, represente os passos desse algoritmo com um fluxograma.




NELSON MATSUDA

### Observações

- Note que a fórmula ao lado é a lei de formação de uma função e que $n$ é o número de termos da PA até o termo $a_n$.
- Quando o primeiro termo de uma PA é representado por $a_0$, o termo geral é dado por: $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$

Os termos dessa sequência, a partir do segundo, são obtidos somando a constante 0,40 ao termo antecedente. Esse é um exemplo de progressão aritmética.

Uma **progressão aritmética (PA)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao anterior uma constante $r$, chamada de **razão da PA**.

A razão pode ser calculada fazendo $r = a_n - a_{n-1}$, para qualquer $n \geqslant 2$.

#### Exemplos

**a)** $(-7, -4, -1, 2, 5)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_2 - a_1 = -4 - (-7) = 3$
**b)** $(32, 12, -8, ...)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_3 - a_2 = -8 - 12 = -20$
**c)** $(6, 6, 6, 6, ...)$ é uma PA e sua razão é: $r = a_4 - a_3 = 6 - 6 = 0$

## Classificação de uma PA

Uma PA é classificada em:

- **crescente**, quando $r > 0$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior;
- **decrescente**, quando $r < 0$, ou seja, quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior;
- **constante**, quando $r = 0$, ou seja, quando todos os termos têm o mesmo valor.

#### Exemplos

**a)** $\left(2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...\right)$ é uma PA crescente $\left(r = \frac{1}{2}\right)$.
**b)** $(4, 1, -2, -5, -8, -11, ...)$ é uma PA decrescente $(r = -3)$.
**c)** $(-3, -3, -3, -3, ...)$ é uma PA constante $(r = 0)$.

## 2.1 Termo geral de uma PA

Em uma PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ de razão $r$, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PA:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$
$a_3 = (a_1 + r) + r$
$a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r$
$a_4 = (a_1 + 2r) + r$
$a_4 = a_1 + 3r$

Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, chegaremos à conclusão de que o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

### Exercícios resolvidos

**R4.** Descrever a sequência $(8, 15, 22, 29, 36, ...)$ por meio da expressão de seu termo geral.

▸ **Resolução**

Nessa sequência, cada um dos termos, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com 7. Então, essa sequência é uma PA de razão $r = 7$ e primeiro termo $a_1 = 8$.

Como o termo geral de uma PA pode ser dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow a_n = 8 + 7n - 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = 1 + 7n$

Portanto, o termo geral dessa sequência é $a_n = 1 + 7n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

**R5.** Camila estabeleceu como meta para seus treinos que cada semana nadaria 400 metros a mais que na semana anterior. Sabe-se que, na segunda semana, ela nadou 1.100 m. Quantos metros nadará na décima semana?

O boxe de *pensamento computacional* contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315** e da competência específica **4** da BNCC, uma vez que o aluno deve elaborar um algoritmo e representá-lo por meio de linguagem corrente e um fluxograma.

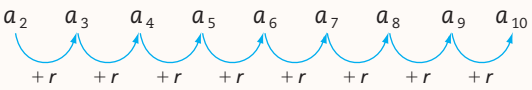
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se julgar oportuno, ao trabalhar o exercício resolvido **R7**, apresentar aos alunos as leis nº 12.619, de 30/4/2012, e nº 13.103, de 2/3/2015, conhecidas como "Leis dos Caminhoneiros" por tratarem do exercício da profissão de motorista profissional de transporte de cargas e de passageiros com enfoque no regramento da jornada de trabalho. Uma discussão a respeito dessas leis envolve o tema contemporâneo **trabalho**.

▸ **Resolução**

A sequência dos percursos de Camila é uma PA de razão $r = 400$ e $a_2 = 1.100$. Queremos obter $a_{10}$. Veja o esquema que relaciona $a_{10}$ com $a_2$ e $r$:




$a_{10} = a_2 + 8 \cdot r \Rightarrow a_{10} = 1.100 + 8 \cdot 400 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{10} = 4.300$

Portanto, Camila nadará 4.300 metros na décima semana.

**R6.** Dados três termos consecutivos de uma PA, $a_p$, $a_q$, $a_s$, nessa ordem, escrever $a_q$ em função de $a_p$ e $a_s$.

▸ **Resolução**

Pela definição de PA, temos: $r = a_q - a_p$ e $r = a_s - a_q$

Assim: $a_q - a_p = a_s - a_q \Rightarrow 2a_q = a_s + a_p$

Portanto, $a_q = \dfrac{a_p + a_s}{2}$, ou seja, dados três termos consecutivos de uma PA, o termo do meio é a **média aritmética** dos outros dois.

**R7.** Em uma estrada, um projeto de segurança pública prevê a instalação de cinco postos de apoio aos motoristas. Esses postos devem se situar ao longo da estrada a igual distância um do outro e dos marcos km 4 e km 250. Determinar a localização desses postos.

▸ **Resolução**

Este problema equivale a interpolar cinco meios aritméticos entre 4 e 250.

**Interpolar meios aritméticos** significa inserir termos entre os que já foram dados de tal forma que a sequência seja uma PA. Nesse caso:

$$4, \underbrace{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6}_{\text{cinco meios aritméticos}}, 250$$

Assim, a PA considerada contém sete termos, sendo $a_1 = 4$ e $a_7 = 250$.

Como $a_7 = a_1 + 6r$, segue que:

$250 = 4 + 6r \Rightarrow r = 41$

Agora, podemos calcular:

$a_2 = 4 + 1 \cdot 41 \Rightarrow a_2 = 45$

$a_3 = 4 + 2 \cdot 41 \Rightarrow a_3 = 86$

$a_4 = 4 + 3 \cdot 41 \Rightarrow a_4 = 127$

$a_5 = 4 + 4 \cdot 41 \Rightarrow a_5 = 168$

$a_6 = 4 + 5 \cdot 41 \Rightarrow a_6 = 209$

Logo, os postos de apoio aos motoristas devem ser instalados nos quilômetros 45, 86, 127, 168 e 209.

**R8.** Quantos múltiplos de 6 existem entre 4.000 e 5.000?

▸ **Resolução**

A sequência dos múltiplos de 6 é uma PA de razão 6.

O primeiro múltiplo de 6 existente nesse intervalo é $a_1 = 4.002$ e o último é $a_n = 4.998$.

Substituindo esses valores na expressão $a_n = a_1 + (n - 1)r$, obtemos:

$4.998 = 4.002 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow n = 167$

Portanto, existem 167 múltiplos de 6 entre 4.000 e 5.000.

**R9.** Determinar os cinco termos de uma PA sabendo que o produto dos extremos é igual a $-48$ e que a soma dos demais termos é igual a 12.

▸ **Resolução**

Os termos dessa PA podem ser indicados da seguinte forma: $x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} (x - 2r) \cdot (x + 2r) = -48 \\ (x - r) + (x) + (x + r) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4r^2 = -48 \quad \text{(I)} \\ 3x = 12 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos: $3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Substituímos $x$ por 4 na equação (I):

$4^2 - 4r^2 = -48 \Rightarrow 4r^2 = 64 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 4$ ou $r = -4$

- Se $r = -4$, temos a PA $(12, 8, 4, 0, -4)$.
- Se $r = 4$, temos a PA $(-4, 0, 4, 8, 12)$.

Logo, os termos da PA são $-4$, 0, 4, 8 e 12.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**8.** Identifique quais das sequências são PA. alternativas a, d

a) (3, 10, 17, 24)

b) $\left(\dfrac{1}{1.000}, \dfrac{1}{500}, \dfrac{3}{1.000}, \dfrac{3}{500}, \ldots\right)$

c) $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

d) $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2}, \ldots\right)$

**9.** Calcule os cinco primeiros termos de cada PA.

a) $a_1 = 12$ e $r = 7$ 12, 19, 26, 33 e 40

b) $a_1 = 12$ e $r = -7$ 12, 5, $-2$, $-9$ e $-16$

c) $a_1 = -2$ e $r = \dfrac{1}{2}$ $-2, -\dfrac{3}{2}, -1, -\dfrac{1}{2}$ e 0

d) $a_1 = 12$ e $r = -0{,}25$ 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**10. a)** decrescente; $r = -3$; $a_n = 1 - 3n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
**b)** constante; $r = 0$; $a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
**c)** crescente; $r = 10$; $a_n = -20 + 10n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
**d)** crescente; $r = \frac{1}{1.000}$; $a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**10.** Classifique cada PA em crescente, decrescente ou constante, identificando a razão de cada uma. A seguir, considerando o primeiro termo e a razão, obtenha uma lei de formação para essas progressões aritméticas.

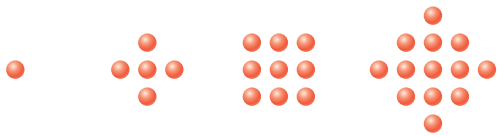
**a)** $(-2, -5, -8, -11, -14)$

**b)** $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, ...)$

**c)** $(-10, 0, 10, ...)$

**d)** $\left(\frac{1}{1.000}, \frac{1}{500}, \frac{3}{1.000}, \frac{1}{250}, ...\right)$

**11.** Na sequência de figuras, as quantidades de bolinhas estão em progressão aritmética.



1ª figura 2ª figura 3ª figura 4ª figura

ADILSON SECCO

- Continuando a sequência, quantas bolinhas formarão a 12ª figura? 45 bolinhas

**12.** Determine a razão de uma PA que tem $a_1 = 5$ e $a_{12} = 247$. 22

**13.** Um artesão confecciona carteiras e as vende em uma feira na cidade por R$ 14,20 cada uma. Para incentivar as vendas no atacado, ele decidiu fazer uma promoção, na qual o cliente pagará de acordo com a quantidade que comprar, limitada a 10 carteiras, segundo o quadro:

| Número de carteiras | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Valor unitário (R$) | 14,20 | 13,40 | 12,60 | 11,80 |

Veja que o valor unitário decresce em PA à medida que aumenta o número de carteiras compradas.

**a)** Qual é a razão dessa PA? −0,80
**b)** Se alguém comprar 10 carteiras, qual será o valor total da compra? R$ 70,00
**c)** Comparando com o valor não promocional, quanto uma pessoa economizaria se comprasse 8 carteiras na promoção? R$ 44,80

**14.** Durante os treinos para uma maratona, um atleta decidiu a cada dia aumentar em 1.400 m o circuito a ser percorrido. Sabendo que no segundo dia ele completou um circuito de 2 km, quantos quilômetros ele terá percorrido no oitavo dia? 10,4 km

**15.** Determine o primeiro termo da PA na qual:
**a)** $a_{17} = -39$ e $r = 4$ −103 **b)** $a_{10} = 9$ e $r = -\frac{1}{9}$ 10

**16.** Construa uma PA de cinco termos e troque-a com a construída por um colega. Cada um deve descobrir uma lei de formação para a PA do outro. Depois destroquem para avaliar se o colega respondeu corretamente. resposta pessoal

**17.** Calcule os valores de $a_1$ e de $r$ em uma PA sabendo que $a_4 = 10$ e que $a_7 + a_{13} = -25$. $a_1 = \frac{85}{4}$; $r = -\frac{15}{4}$

**18.** Determine o valor de $p$ para que a sequência $(p + 5, 3p, p^2 - 1)$ seja uma PA. $p = 1$ ou $p = 4$

**19.** As medidas dos lados de um quadrilátero estão em PA e podem ser expressas em ordem crescente por 3, $x + 7$, $x^2 - 4$ e $6x$. Qual é o perímetro desse quadrilátero? 66 unidades de comprimento

**20.** Interpole quatro meios aritméticos entre −12 e 48. (−12, 0, 12, 24, 36, 48)

**21.** Quantos são os múltiplos de 4 entre 101 e 3.001? 725

**22.** Quantos números pares existem entre os números 23 e 987? 482

**23.** Quantos meios aritméticos devem ser inseridos entre os números 10 e 184 para que a razão da PA obtida seja igual a 6? 28

**24.** Na compra de uma moto a prazo, Rui pagou R$ 3.500,00 de entrada e 12 prestações que decaíam em PA, sendo a primeira de R$ 660,00, a segunda de R$ 630,00, a terceira de R$ 600,00 e assim por diante.
**a)** Qual foi o valor da última prestação? E da penúltima? R$ 330,00; R$ 360,00
**b)** Qual é a soma da primeira com a última prestação? E da segunda com a penúltima? R$ 990,00; R$ 990,00
**c)** Qual foi o valor final da moto a prazo? R$ 9.440,00

**25.** Três números estão em PA. Qual é essa PA se o produto deles é 420 e a soma é −12? (−15, −4, 7) ou (7, −4, −15)

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Representar uma progressão aritmética por meio de um gráfico no plano cartesiano contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401** da BNCC, uma vez que interpreta-se o termo geral $a_n$ como uma função polinomial do 1º grau na variável $n$.

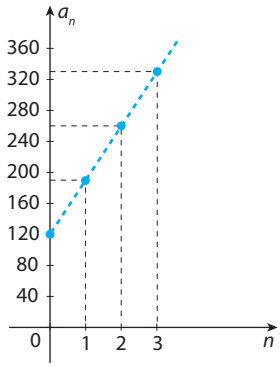
## 2.2 Representação gráfica de uma PA

Para fazer reparos na instalação elétrica, um técnico cobra R$ 120,00 pela visita mais R$ 70,00 a cada hora transcorrida. Observe o quadro a seguir.

| Tempo (h) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Custo (R$) | 120,00 | 190,00 | 260,00 | 330,00 |

O custo, em função das horas gastas no reparo, forma uma PA (120, 190, 260, 330, ...), em que $a_0 = 120$ e $r = 70$.

O termo geral $(a_n)$ de uma PA, de primeiro termo $a_0$ e razão $r$, é uma função que associa a cada número natural $n$ o valor $a_n = a_0 + nr$, com $n \in \mathbb{N}$. Essa função assemelha-se a uma função afim, mas com domínio no conjunto dos números naturais. Assim, o gráfico dessa função será formado por pontos colineares: $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., $(n, a_n)$, ... Veja ao lado os pontos de coordenadas (0, 120), (1, 190), (2, 260) e (3, 330).




## Exercício resolvido

**R10.** Sabendo que a soma e o produto dos três primeiros termos de uma PA crescente são iguais a $-3$ e 8, respectivamente, escrever a lei e construir o gráfico dessa sequência.

### ▸ Resolução

Podemos representar os três primeiros termos dessa PA por $x - r$, $x$ e $x + r$.

Pelo enunciado: $(x - r) + x + (x + r) = -3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Como o produto desses primeiros termos é igual a 8, temos:

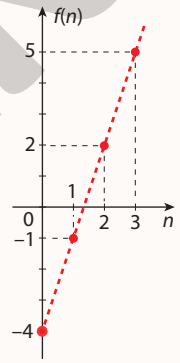
$(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-1 - r) \cdot (-1) \cdot (-1 + r) = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow (r + 1) \cdot (r - 1) = 8 \Rightarrow r^2 - 1 = 8 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = -3$ ou $r = 3$

Como a razão não pode ser negativa, pois a PA é crescente, segue que $r$ é igual a 3. Assim, os três primeiros termos dessa PA são $-4$, $-1$ e 2. Agora, escrevemos a lei de formação:

$f(n) = a_n \Rightarrow f(n) = a_0 + nr \Rightarrow f(n) = -4 + 3n$, com $n \in \mathbb{N}$

Partindo dessa lei de formação, podemos construir o gráfico da PA.

| $n$ | $f(n) = -4 + 3n$ |
|---|---|
| 0 | $f(0) = -4 + 3 \cdot 0 = -4$ |
| 1 | $f(1) = -4 + 3 \cdot 1 = -1$ |
| 2 | $f(2) = -4 + 3 \cdot 2 = 2$ |
| 3 | $f(3) = -4 + 3 \cdot 3 = 5$ |




Observe que os pontos do gráfico da PA pertencem ao gráfico de uma função afim.

## Exercícios propostos

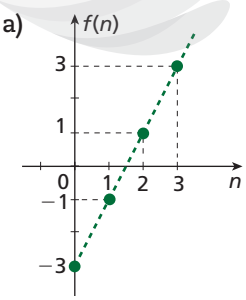
Registre as respostas em seu caderno.

**26.** Sendo $n$ um número natural, construa, para cada item, o gráfico cartesiano da progressão aritmética determinada pela lei de formação:

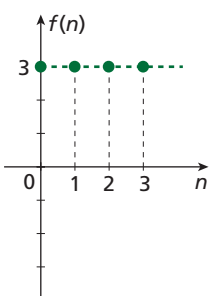
a) $a_n = -n - 2$ Ver resolução no Guia do professor.
b) $a_n = -2$
c) $a_n = n$
d) $a_n = 2n - 2$

**27.** Verifique qual dos gráficos representa a PA $(3, 1, -1, ...)$. alternativa d

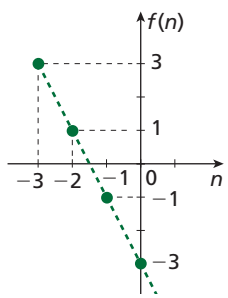
a)



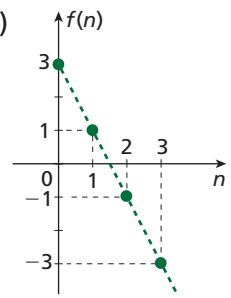

b)



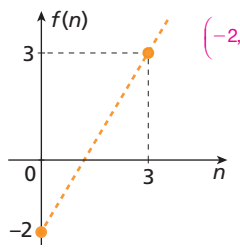

c)




d)




**28.** Escreva os elementos da PA de cinco termos sabendo que dois de seus pontos estão representados no gráfico.




$\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO



MUSEU ESTATAL PUSHKIN DE BELAS ARTES, MOSCOU

Carl Friedrich Gauss, retratado por Christian Albrecht Jensen (1850), era filho único de pais sem instrução. Foi matemático, astrônomo e físico.
Óleo sobre tela, 66 cm × 52 cm.

## 2.3 Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII. Conta-se que, quando criança, o professor de sua turma pediu aos alunos que calculassem a soma 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100. Para surpresa do professor, Gauss resolveu rapidamente o desafio e foi o único a acertar a resposta: 5.050. Ele percebeu que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

$$101 \quad 101 \quad 101$$

Como são 50 parcelas iguais a 101, a soma dos termos dessa PA será igual a:
$50 \cdot 101 = 5.050$

A soma dos *n* primeiros termos de uma PA, sendo conhecidos o primeiro e o último termos da progressão, é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

### Demonstração

Considere a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$. A soma dos *n* primeiros termos pode ser indicada por:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ (I)

Ou, invertendo a ordem dos elementos:

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$ (II)

Somando membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{a_1 + a_n} + \ldots + \underbrace{(a_{n-2} + a_3)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_n + a_1)}_{a_1 + a_n}$$

Veja que $2 \cdot S_n$ tem *n* parcelas iguais a $a_1 + a_n$. Assim: $2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$

Portanto: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

Para justificar o fato de que a soma de dois termos ($a_p$ e $a_q$), equidistantes dos extremos de uma PA, é igual à soma dos extremos, vamos considerar dois grupos com a mesma quantidade de termos:

$$\underbrace{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p,}_{a_p = a_1 + (p-1)r} \ldots, \underbrace{a_q, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)}_{a_n = a_q + (n-q)r}$$

Subtraindo $a_p$ de $a_n$, temos: $a_n - a_p = [a_q + (n - q)r] - [a_1 + (p - 1)r]$

Lembrando que $(p - 1) = (n - q)$, obtemos: $a_n - a_p = a_q - a_1$

Logo: $a_n + a_1 = a_q + a_p$

### Exercício resolvido

**R11.** Calcular a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos.

▸ **Resolução**

A sequência dos números naturais pares não nulos (2, 4, 6, ...) forma uma PA de razão 2 e primeiro termo 2.

Assim: $a_{45} = a_1 + 44r \Rightarrow a_{45} = 2 + 44 \cdot 2 \Rightarrow a_{45} = 90$

Logo:

$$S_{45} = \frac{45 \cdot (a_1 + a_{45})}{2} \Rightarrow S_{45} = \frac{45 \cdot (2 + 90)}{2} \Rightarrow S_{45} = 2.070$$

Portanto, a soma dos 45 primeiros números naturais pares não nulos é 2.070.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

## Exercícios propostos

38. $r = \frac{50}{3}$ e $S = -\frac{70}{3}$ ou $r = \frac{2}{3}$ e $S = -\frac{190}{3}$

Registre as respostas em seu caderno.

**29.** Calcule a soma dos 24 primeiros termos de cada PA.

a) $(-57, -27, 3, \ldots)$ 6.912

b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{14}{3}, \ldots\right)$ 568

c) $(7, 7, 7, \ldots)$ 168

d) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \ldots\right)$ 57

**30.** Calcule o valor de um terreno vendido a um cliente nas seguintes condições: 1ª parcela de R$ 600,00 e, daí em diante, parcelas que aumentam R$ 5,00 a cada mês, até completar o pagamento, em 12 anos. R$ 137.880,00

**31.** Uma academia de ginástica oferece o seguinte plano anual: em janeiro, o aluno paga R$ 140,00. A partir daí, o valor da mensalidade decresce R$ 8,00 a cada mês.

a) Quanto o aluno pagará no oitavo mês do plano? R$ 84,00

b) Que valor total anual o aluno pagará? R$ 1.152,00

c) Em um ano, em média, quanto o aluno pagará por mês? R$ 96,00

**32.** Dada a PA (3, 19, 35, ...), qual deve ser o valor de $n$ para que $S_n = 472$? 8 termos

**33.** A soma dos 30 primeiros termos de uma PA é 1.430. Sabendo que a razão é 6, determine seu oitavo termo. $\frac{8}{3}$

**34.** Calcule a soma dos múltiplos de 6 compreendidos entre 230 e 650. 30.870

**35.** Resolva a equação.

$$\frac{x}{2} + \frac{7x}{10} + \frac{9x}{10} + \ldots + \frac{17x}{10} = 462 \quad S = \{60\}$$

**36.** Um teatro tem 448 lugares, distribuídos da seguinte maneira: na primeira fila, há 13 poltronas; na segunda, 15; na terceira, 17; e assim sucessivamente, até completar $n$ filas. Determine o número total de filas desse teatro. 16

**37.** (Mackenzie-SP) Uma empresa decidiu presentear seus principais clientes com lotes de 1.000 ações. Os clientes foram classificados em ordem crescente, de acordo com o faturamento de cada um deles. Ao primeiro, a empresa entregou 1 lote, ao segundo, 3 lotes, ao terceiro, 5 lotes, e assim por diante. Se a empresa distribuiu um total de 1.089.000 ações, o número de clientes presenteados foi: alternativa e

a) 47 b) 37 c) 43 d) 32 e) 33

**38.** Em uma PA crescente de cinco termos, a soma do segundo com o terceiro é igual a −26 e o quadrado do quarto termo é 144. Determine o valor da razão e a soma dos termos dessa PA.

Esse tópico pode favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304** da BNCC, pois o aluno vai se deparar com situações e problemas que envolvem funções exponenciais analisadas a partir de um domínio discreto. Essas situações favorecem, por sua vez, o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT508**, pois nelas os alunos devem identificar e associar PG e função exponencial, aplicando propriedades e deduzindo algumas fórmulas. Além disso, deverá compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos no trabalho com as PGs, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

# 3 Progressões geométricas

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2018 o estado mais populoso do Brasil era São Paulo, com aproximadamente 45.540.000 habitantes, população essa maior que as das regiões Norte e Centro-Oeste juntas. Sabendo que a população do estado de São Paulo teve um crescimento de cerca de 0,8% em relação a 2017 e supondo que esse crescimento anual se mantenha, qual seria a estimativa para a população desse estado em 2021?



TALES AZZI/PULSAR IMAGENS

Pedestres e ciclistas num domingo ensolarado na Av. Paulista, na cidade de São Paulo, com o Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand (MASP) ao fundo (2018).

Para calcular esse valor, vamos partir da população em 2018.

| População estimada do estado de São Paulo | |
|---|---|
| **Data** | **Número de habitantes** |
| 2018 | 45.540.000 |
| 2019 | 45.540.000 · 1,008 = 45.904.320 |
| 2020 | 45.904.320 · 1,008 = 46.271.554,56 |
| 2021 | 46.271.554,56 · 1,008 = 46.641.726,99648 |

Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html>. Acesso em: 20 ago. 2020.

**Reflita**

Por que os números obtidos a partir de 2020 não são números inteiros?

Espera-se que os alunos percebam que os valores obtidos são estimativas, não valores exatos.

Logo, em 2021, a população estimada seria de aproximadamente 46.641.727 habitantes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observe que, a partir de 2019, a estimativa da população do estado de São Paulo foi obtida multiplicando-se a população do ano anterior pela constante 1,008.

A sequência (45.540.000; 45.904.320; 46.271.554,56; 46.641.726,99648) é um exemplo de progressão geométrica.

Uma **progressão geométrica (PG)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante $q$, chamada de **razão da PG**.

**Reflita**

Invertendo a ordem dos termos de uma PG de três termos e razão $q$, não nula, obtemos uma PG de razão $\frac{1}{q}$? sim

Quando $a_{n-1} \neq 0$, a razão pode ser calculada fazendo-se $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, para qualquer $n \geqslant 2$.

**Exemplos**

**a)** $(-2, -4, -8, -16, \ldots)$ é uma PG e sua razão é: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-4}{-2} = 2$

**b)** $(1, -3, 9, -27, \ldots)$ é uma PG e sua razão é: $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{-27}{9} = -3$

**c)** $(10, 10, 10, 10, \ldots)$ é uma PG e sua razão é: $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{10}{10} = 1$

## Classificação de uma PG

Uma PG pode ser classificada em crescente, decrescente, constante, estacionária ou oscilante, de acordo com suas características. Observe o quadro a seguir.

| Exemplos de PGs | Características |
|---|---|
| $(-8, -4, -2, -1, \ldots)$; com $a_1 = -8$ e $q = \frac{1}{2}$<br>$(3, 6, 12, 24, \ldots)$; com $a_1 = 3$ e $q = 2$ | Os termos das duas PGs estão em ordem crescente de valor.<br>Na primeira: $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$; na segunda: $a_1 > 0$ e $q > 1$.<br>Uma PG que apresente essas características é classificada como **crescente**. |
| $(-3, -9, -27, \ldots)$; com $a_1 = -3$ e $q = 3$<br>$\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$; com $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{2}$ | Os termos das duas PGs estão em ordem decrescente de valor.<br>Na primeira: $a_1 < 0$ e $q > 1$; na segunda: $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$.<br>Uma PG que apresente essas características é classificada como **decrescente**. |
| $(\sqrt{7}, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \ldots)$; com $a_1 = \sqrt{7}$ e $q = 1$<br>$(0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$; com $a_1 = 0$ e $q \in \mathbb{R}$ | Em cada uma das PGs, todos os termos têm o mesmo valor.<br>Na primeira: $a_1 \neq 0$ e $q = 1$; na segunda: $a_1 = 0$ e $q \in \mathbb{R}$.<br>Uma PG que apresente essas características é classificada como **constante**. |
| $(3, 0, 0, 0, \ldots)$; com $a_1 = 3$ e $q = 0$ | Apenas o primeiro termo da PG é diferente de zero ($a_1 \neq 0$);<br>além disso, sua razão é $q = 0$.<br>Uma PG que apresente essas características é classificada como **estacionária**. |
| $(2, -10, 50, \ldots)$; com $a_1 = 2$ e $q = -5$<br>$(-7, 14, -28, \ldots)$; com $a_1 = -7$ e $q = -2$ | Em ambas as PGs, dois termos consecutivos têm sinais alternados.<br>Na primeira: $a_1 > 0$ e $q < 0$; na segunda: $a_1 < 0$ e $q < 0$.<br>Uma PG que apresente essas características é classificada como **oscilante**. |

## 3.1 Termo geral de uma PG

**Reflita**

Quando, em uma PG de razão $q$, o primeiro termo é representado por $a_0$, qual é a lei de formação da função que determina o termo geral da PG? $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \in \mathbb{N}$

Dada uma PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão $q$, podemos escrever qualquer termo em função do primeiro. Para isso, basta considerar a definição de PG:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_2 \cdot q$

$a_3 = (a_1 \cdot q) \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q$

$a_4 = (a_1 \cdot q^2) \cdot q$

$a_4 = a_1 \cdot q^3$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se continuarmos seguindo o mesmo raciocínio, encontraremos o termo geral, que ocupa a enésima posição na PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

Observe que essa fórmula é a lei de formação de uma função e que $n$ é o número de termos da PG até o termo $a_n$.

## Exercícios resolvidos

**R12.** Determinar o oitavo termo da progressão geométrica $(-3, 18, -108, \ldots)$.

▸ **Resolução**

Primeiro, devemos encontrar a razão da PG:

$$q = \frac{-108}{18} \Rightarrow q = -6$$

Depois, basta aplicar a fórmula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para $n = 8$, $a_1 = -3$ e $q = -6$:

$a_8 = -3 \cdot (-6)^{8-1} \Rightarrow a_8 = 839.808$

Logo, o oitavo termo dessa PG é 839.808.

**R13.** Interpolar três meios geométricos entre 4 e 256.

▸ **Resolução**

**Interpolar meios geométricos** significa inserir termos entre os que já foram dados de tal forma que a sequência seja uma PG. Nesse caso:

$$4, \underbrace{a_2, a_3, a_4}_{\text{três meios geométricos}}, 256$$

A PG considerada tem cinco termos, sendo $a_1 = 4$ e $a_5 = 256$.

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 256 = 4 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow q = 2\sqrt{2}$ ou $q = -2\sqrt{2}$

Há duas possibilidades:

- para $q = 2\sqrt{2}$, a sequência procurada é $(4, 8\sqrt{2}, 32, 64\sqrt{2}, 256)$;
- para $q = -2\sqrt{2}$, a sequência é $(4, -8\sqrt{2}, 32, -64\sqrt{2}, 256)$.

**R14.** Quantos termos tem a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{81}{32}\right)$?

▸ **Resolução**

A sequência apresentada tem $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{3}{2}$.

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{81}{32} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

Logo, a PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{81}{32}\right)$ tem cinco termos.

**R15.** Obter três números em PG de modo que a soma deles seja 333 e o produto seja 27.000.

▸ **Resolução**

Sendo $x$ o termo intermediário e $q \neq 0$ a razão da PG, podemos denotar os três termos consecutivos da seguinte maneira: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

Primeiro, indicamos o produto, determinando o valor de $x$:

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 27.000 \Rightarrow x^3 = 27.000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{27.000} \Rightarrow x = 30$$

Depois, indicamos a soma:

$$\frac{x}{q} + x + x \cdot q = 333 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \cdot q^2 + x \cdot q + x - 333q = 0 \quad \text{(I)}$$

Substituindo o valor $x$ por 30 na equação (I), obtemos:

$30 \cdot q^2 + 30 \cdot q + 30 - 333q = 0$

$30q^2 - 303q + 30 = 0$

Resolvendo a equação, chegamos a $q = \frac{1}{10}$ ou $q = 10$.

Assim:

- para $q = \frac{1}{10}$, obtemos a PG: (300, 30, 3)
- para $q = 10$, obtemos a PG: (3, 30, 300)

Logo, os números procurados são 3, 30 e 300.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**39.** Identifique quais das sequências numéricas podem ser PA e quais podem ser PG.

a) $\left(-8, -2, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$ PG

b) $(5, 15, 25, \ldots)$ PA

c) $(1, 2, 4, 8, \ldots)$ PG

d) $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ PA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**41. a)** $q = \frac{4}{5}$; $a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ **c)** $q = \frac{2}{\pi}$; $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**b)** $q = \sqrt{3}$; $a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ **d)** $q = -2$; $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Para representar graficamente, para cada valor $n$, marcamos o valor $a_n$ correspondente, obtendo os pontos $(n, a_n)$ no plano cartesiano.

**40.** Classifique as PGs em constante, oscilante, crescente ou decrescente.

**a)** $(\pi, \pi^2, \pi^3, \pi^4, \pi^5, \ldots)$ crescente

**b)** PG com $q < 0$ e $a_1 \neq 0$ oscilante

**c)** PG com $a_1 < 0$ e $q > 1$ decrescente

**d)** $(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5})$ constante

**41.** Calcule a razão de cada PG.

**a)** $\left(-3, -\frac{12}{5}, -\frac{48}{25}, \ldots\right)$ **c)** $\left(5, \frac{10}{\pi}, \frac{20}{\pi^2}, \ldots\right)$

**b)** $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \ldots)$ **d)** $(5, -10, 20, \ldots)$

- Qual é a lei de formação dessas PGs em função do primeiro termo e da razão?
- Que processo adotaríamos para representar essas progressões graficamente?

**42.** Responda às perguntas. **b)** $x^2$, $\frac{y}{x}$, $\frac{y^2}{x^4}$, $\frac{y^3}{x^7}$, $\frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$

**a)** Quais são os cinco primeiros termos da PG em que $a_1 = 4$ e $q = 6$? 4, 24, 144, 864 e 5.184

**b)** Quais são os seis primeiros termos da PG em que $a_1 = x^2$ (com $x \neq 0$) e $q = \frac{y}{x^3}$?

**43.** Construa uma PG de cinco termos e dê para um colega descobrir uma lei de formação. Você deve descobrir uma lei de formação da PG construída por ele. Depois, destroquem para avaliar se as respostas estão corretas. resposta pessoal

**44.** Uma população de bactérias dobra seu número a cada 30 minutos. Considerando que o processo se inicia com uma única bactéria, quantas existirão após 4 horas e 30 minutos? 512 bactérias

**45.** Determine o primeiro termo da PG em que $a_4 = 27$ e $a_7 = 125$. $\frac{729}{125}$

**46.** O segundo termo de uma PG é 1 e o quinto termo é $\frac{1}{343}$. Determine a razão dessa PG. $\frac{1}{7}$

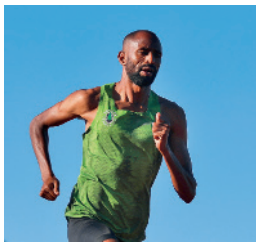
**47.** Determine o número de termos da PG

$\left(3, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{19.683}\right)$. 6 termos

**48.** Um atleta corre, a cada dia, o dobro da distância que correu no dia anterior. Sabendo que esse atleta correu 6.600 m no quarto dia de treinamento, qual é a distância que ele:

**a)** correrá no sexto dia? 26.400 m

**b)** correu no primeiro dia? 825 m



CHRISTIAN PETERSEN/GETTY IMAGES

Hassan Mead, corredor de longa distância, em Sedona, Arizona, Estados Unidos. Foto de 2020.

**49.** A sequência $(x, 2x, x^2)$ forma uma PG crescente. Determine o valor de $x$. 4

**50.** Que número deve ser adicionado a 2, 6 e 15, nessa ordem, para que a nova sequência se torne uma PG? $\frac{6}{5}$

**51.** Interpole quatro meios geométricos entre 6 e 192. (6, 12, 24, 48, 96, 192)

**52.** Três números, que estão em PG, têm soma 105 e produto 27.000. Determine esses números. 15, 30 e 60

**53.** As medidas do lado, da diagonal e da superfície de um quadrado formam uma PG. Determine a razão dessa PG e as medidas do lado e do perímetro desse quadrado. $\sqrt{2}$; 2; 8

**54.** Um capital inicial $C_0$ foi aplicado e cresce à taxa de $i$ ao mês. Após o primeiro mês, o montante aplicado foi: **a)** $C_2 = C_0(1 + i)^2$; $C_3 = C_0(1 + i)^3$ **b)** $q = (1 + i)$

$C_1 = C_0 + C_0 \cdot i \Rightarrow C_1 = C_0(1 + i)$

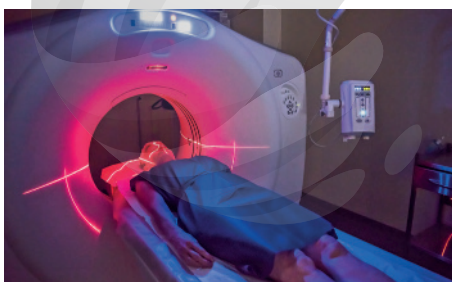
**a)** De quanto será o montante aplicado após o segundo mês? E após o terceiro mês?

**b)** Qual é a razão da PG $(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots)$?

**c)** Utilize a fórmula do termo geral para determinar $C_n$ (montante após $n$ meses) em função de $C_0$. $C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A introdução do tópico a seguir, em que se modela a meia-vida do isótopo radioativo do iodo por meio de uma função exponencial de domínio discreto, favorece o desenvolvimento da competência específica **3** da BNCC.



JOHNNYGREIG/E+/GETTY IMAGES

Pessoa submetida a tomografia computadorizada em hospital. Foto de 2016.

## 3.2 Representação gráfica de uma PG

Na medicina nuclear, é importante conhecer a velocidade com que um elemento radioativo se desintegra para saber por quanto tempo haverá radioatividade no organismo.

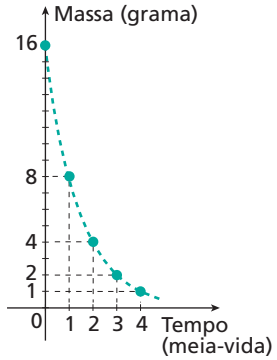
Chama-se **meia-vida** o tempo necessário para desintegrar metade da massa de algum elemento radioativo existentes em uma amostra. Um exemplo é do isótopo radioativo do iodo, cuja meia-vida é 8 dias, aproximadamente. Esse elemento é usado no diagnóstico de doenças da glândula tireoide.

É possível interpretar graficamente o decaimento radioativo. Suponha que se deseje representar a desintegração de 16 gramas de iodo.

A lei de formação que descreverá a situação é do tipo exponencial: $f(n) = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, em que $n$ é a quantidade de meias-vidas ($n \in \mathbb{R}_+$) e $f(n)$ é a massa.

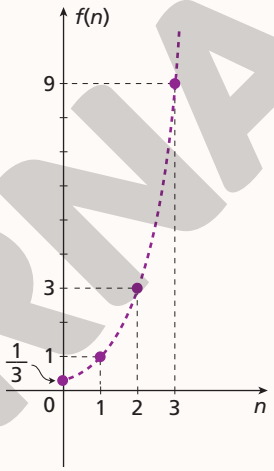
Observe que, para $n \in \mathbb{N}$, temos a sequência (16, 8, 4, 2, 1, ...), que é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

O termo geral $(a_n)$ de uma PG, de primeiro termo $a_0$ e razão $q$, é uma função que associa a cada número natural $n$ o valor $a_n = a_0 \cdot q^n$, com $n \notin \mathbb{N}$. Para $a_0 \neq 0$, $q > 0$ e $q \neq 1$, essa função assemelha-se a uma função exponencial com restrição do domínio ao conjunto dos números naturais. O gráfico dessa função será formado pelos pontos $(0, a_0)$, $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, ..., $(n, a_n)$, ... Veja, no gráfico ao lado, os pontos de coordenadas (0, 16), (1, 8), (2, 4), (3, 2) e (4, 1).




## Exercício resolvido

**R16.** Construir o gráfico da progressão geométrica em que $a_0 = \frac{1}{3}$ e $q = 3$.




▸ **Resolução**

Inicialmente, escrevemos a lei de formação dessa PG:

$a_n = f(n) = \frac{1}{3} \cdot 3^n$, com $n \in \mathbb{N}$

Aplicando a lei, encontramos alguns pontos do gráfico da PG:

- para $n = 0$: $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 3^0 = \frac{1}{3}$
- para $n = 1$: $f(1) = \frac{1}{3} \cdot 3^1 = 1$
- para $n = 2$: $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3$
- para $n = 3$: $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$

Observe que os pontos do gráfico da PG pertencem ao gráfico de uma função do tipo exponencial.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**55.** Construa o gráfico das progressões geométricas.

a) (1, 2, 4, 8, ...)

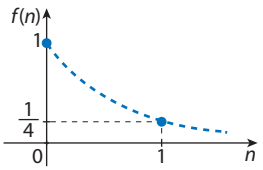
b) $\left(3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...\right)$

c) PG com $a_0 = -8$ e $q = \frac{1}{2}$

d) PG com $a_0 = \sqrt{3}$ e $q = 1$

Ver resolução no Guia do professor.

**56.** Observe ao lado o gráfico de uma PG.




a) Qual é a lei de formação dessa PG?

b) Qual é o décimo termo dessa PG? $\frac{1}{4^9}$

c) Essa PG tem algum termo menor ou igual a zero? não

**56. a)** $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

# 3.3 Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

A soma dos $n$ primeiros termos de uma PG, sendo conhecidos o primeiro termo $a_1$ e a razão $q$, com $q \neq 1$, é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

**Observação**

Para a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão $q = 1$, temos:

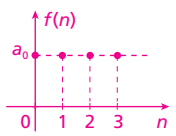
$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 + a_1 \cdot q + ... + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 + a_1 \cdot 1 + ... + a_1 \cdot 1^{n-1} =$

$= \underbrace{a_1 + a_1 + ... + a_1}_{n \text{ vezes}} = n \cdot a_1$

**Reflita**

Se $q = 1$, como é o gráfico da PG cuja lei de formação é $a_n = a_0 \cdot q^n$?

Espera-se que os alunos percebam que, se $q = 1$, a PG assemelha-se a uma função constante, com restrição do domínio aos números naturais. Nesse caso, a lei de formação é $f(n) = a_0$, com $n \in \mathbb{N}$.




CHRISTIAN PETERSEN/GETTY IMAGES
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO
MODERNA

**Reflita**

Qual é a soma dos $n$ primeiros termos de uma PG de razão $q = 0$?

Espera-se que os alunos percebam que $S_n = a_1$ para $q = 0$.
Se julgar oportuno, pedir que apliquem a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ e verifiquem sua validade nesse caso.

**Demonstração**

Primeiro, consideramos a soma dos termos da PG: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ (I)
Depois, multiplicamos os dois membros da sentença pela razão $q$, com $q \neq 1$:

$q \cdot S_n = q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$

$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_n \cdot q$

$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n+1}$ (II)

Subtraindo (I) de (II), vem:

$q \cdot S_n - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$

$q \cdot S_n - S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_{n+1} - a_1 - a_2 - a_3 - ... - a_n$

$S_n \cdot (q - 1) = a_{n+1} - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{[a_1 \cdot q^{(n+1)-1}] - a_1}{q - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n = \frac{(a_1 \cdot q^n) - a_1}{q - 1}$

Logo, para $q \neq 1$, temos: $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

## Exercícios resolvidos

**R17.** Calcular a soma dos sete primeiros termos da PG (6, 18, 54, ...).

▸ **Resolução**

Essa PG tem $a_1 = 6$ e $q = 3$. Aplicando a fórmula, obtemos:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{6 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_7 = \frac{6 \cdot (2.187 - 1)}{2} \Rightarrow S_7 = 3 \cdot 2.186$

$S_7 = 6.558$

Portanto, a soma dos sete primeiros termos dessa PG é 6.558.

**R18.** Determinar o valor de $x$ na sentença $4x + 16x + ... + 4.096x = 10.920$, sabendo que os termos do primeiro membro formam uma PG.

▸ **Resolução**

A PG $(4x, 16x, ..., 4.096x)$ tem $a_1 = 4x$, $a_n = 4.096x$ e $q = 4$, com $x \neq 0$.

Vamos calcular o valor de $n$ utilizando a fórmula do termo geral de uma PG:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 4.096x = 4x \cdot 4^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1.024 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^5 = 4^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 = n - 1 \Rightarrow n = 6$

Agora, aplicamos a fórmula da soma dos $n$ primeiros termos de uma PG:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{4x \cdot (4^6 - 1)}{4 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10.920 = \frac{4x \cdot 4.095}{3} \Rightarrow 10.920 = 5.460x \Rightarrow x = 2$

Então, $x$ é igual a 2.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**57.** (Enem) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão $n$ competidores, e assim sucessivamente até a partida final. Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas. Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:

a) $2 \cdot 128$ alternativa e
b) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
c) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$
d) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
e) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

**58.** A soma dos $n$ termos de uma PG finita é 504. Sabe-se que $a_n = 256$ e $q = 2$. Calcule o primeiro termo da PG. 8

**59.** Calcule $x$ na equação abaixo, sabendo que os termos do primeiro membro formam uma PG.

$7x + 21x + ... + 189x = 560$ 2

**60.** A cada ano, o número de passageiros de uma empresa de ônibus cresce 4%. Se em 2014 foram transportadas 500.000 pessoas, calcule o total de passageiros transportados de 2014 a 2020.
aproximadamente 3.949.147 passageiros

**61.** Em janeiro do ano passado, uma empresa produziu 25.000 unidades de certo produto. A partir de fevereiro, a cada mês, a produção foi 15% maior que

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

no mês anterior. Determine a quantidade total de unidades que essa empresa produziu nesse ano. aproximadamente 725.042 unidades

**62.** No sábado passado, Paula enviou uma mensagem por *e-mail* para três amigos. No dia seguinte, cada amigo de Paula que recebeu o *e-mail* enviou-o para três amigos, e assim por diante. Se nenhuma pessoa recebeu a mensagem mais de uma vez, descubra quantas pessoas receberam a mensagem até o sábado seguinte. 9.840 pessoas

**63.** Considere a PG infinita, em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

**a)** Calcule a soma dos quatro primeiros termos.

**b)** Usando uma calculadora, responda: qual é a soma dos dez primeiros termos? E dos vinte primeiros? $\simeq 1{,}998$; $\simeq 1{,}999$

**c)** Conforme aumentamos o número de termos somados, você acha que a soma se aproxima de algum número? Se sim, qual? Sim, aproxima-se do número 2.

**a)** 1,875 ou $\frac{15}{8}$

## 3.4 Soma dos infinitos termos de uma PG

Já estudamos a soma nos $n$ primeiros termos de uma PG para $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, veremos como calcular a soma dos termos de uma PG infinita. Para isso, vamos primeiro analisar o valor de algumas potências. Observe.

| $n$ | $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ |
|---|---|
| 1 | $\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$ |
| 2 | $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$ |
| 3 | $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0{,}421875$ |
| ⋮ | ⋮ |
| 10 | $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{59.049}{1.048.576} \simeq 0{,}056314$ |

| $n$ | $\left(-\frac{1}{5}\right)^n$ |
|---|---|
| 1 | $\left(-\frac{1}{5}\right)^1 = -\frac{1}{5} = -0{,}2$ |
| 2 | $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0{,}04$ |
| 3 | $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125} = -0{,}008$ |
| ⋮ | ⋮ |
| 10 | $\left(-\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{9.765.625} \simeq 0{,}0000001$ |

Analisando os valores obtidos, verificamos que, em ambas as potências, quanto maior for o valor de $n$, mais próximo de zero será o resultado obtido. Intuitivamente, podemos considerar que para qualquer número real $a$, com $0 < |a| < 1$, quanto maior for o valor de $n$, mais próximo de zero estará o valor de $a^n$. Dizemos, então, que, para $-1 < a < 1$, quando $n$ tende a infinito, o valor de $a^n$ tende a zero, ou, ainda, para $-1 < a < 1$, o limite de $a^n$, quando $n$ tende a infinito, é igual a zero.

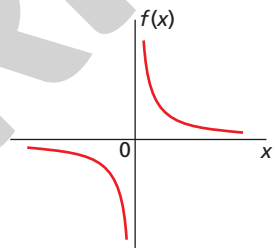
Em linguagem simbólica: $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$, para $-1 < a < 1$

**Exemplos**

**a)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} (-0{,}6)^n = 0$

**Reflita**

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, observe o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.




ADILSON SECCO

Quando $x$ tende a infinito, para qual valor tende $f(x)$?

Quanto maior ou quanto menor o valor de $x$, mais o gráfico de $f$ se aproxima do eixo $x$. Portanto, quando $x$ tende a infinito, $f(x)$ tende a zero.

**Observação**

Vale lembrar que o módulo de um número real $x$ é tal que:
$|x| = x$, se $x \geqslant 0$
$|x| = -x$, se $x < 0$

## Cálculo da soma dos infinitos termos de uma PG

Para calcular a soma dos termos de uma PG infinita, vamos partir do cálculo da soma dos $n$ primeiros termos de uma PG.

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ uma progressão geométrica em que $q \in \mathbb{R}$ e $-1 < q < 1$, ou seja, $|q| < 1$. Como vimos, quando $n$ tende a infinito, a potência $q^n$ tende a zero. Sabendo disso, vamos calcular o **limite** da soma $S_n$ nesse caso.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Logo, para $-1 < q < 1$, a soma dos infinitos termos da PG é dada por:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

## Exercícios resolvidos

**R19.** Calcular a soma dos termos da PG infinita $(-8, 4, -2, 1, \ldots)$.

**Resolução**

Primeiro, calculamos a razão $q$ da PG:

$$q = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Como $-1 < q < 1$ e $a_1 = -8$, utilizamos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-8}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-8}{\frac{2+1}{2}} =$$

$$= -\frac{8}{\frac{3}{2}} = -8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{3}$$

Assim, a soma dos infinitos termos dessa PG é $-\frac{16}{3}$.

**R20.** Determinar o valor de:

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \ldots$$

**Resolução**

Os termos somados formam uma PG infinita, na qual $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 10$.

Como $-1 < q < 1$, aplicamos a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 10 \cdot 2 = 20$$

Logo: $10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \ldots = 20$

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**64.** Calcule a soma dos infinitos termos de cada PG.

a) $\left(15, 10, \frac{20}{3}, \ldots\right)$ 45

b) $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \ldots\right)$ $-2\pi$

**65.** Calcule o valor de:

a) $2 - 1 + \frac{1}{2} - \ldots$ $\frac{4}{3}$

b) $12 - 4 + \frac{4}{3} - \ldots$ 9

**66.** Imagine que um atleta corra 20 km no primeiro dia de treinamento, 10 km no segundo, 5 km no terceiro, e assim sucessivamente, até parar de correr. Nessa sequência de treinamentos, o atleta conseguiria totalizar 40 km de corrida?

**66.** Não, pois o atleta teria que prolongar indefinidamente o seu treinamento.

**67.** Uma bola é solta da altura de 100 m, atinge o solo e sobe a uma altura igual à metade da anterior. Esse movimento ocorre sucessivamente até ela parar. Qual é a distância total percorrida pela bola? 300 m

**68.** Considere um quadrado de lado $a$. Unindo-se os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se um novo quadrado. Unindo-se os pontos médios dos lados do novo quadrado, obtém-se um terceiro quadrado, e assim por diante. Qual é o limite da soma das áreas determinadas por esses quadrados? $2a^2$

# 4 Problemas que envolvem PA e PG

Depois de estudar progressões aritméticas e progressões geométricas, vamos resolver alguns problemas que envolvem essas sequências simultaneamente.

Nesse tópico, os alunos colocam em prática conhecimentos construídos a respeito de PG e PA ao resolver problemas que envolvem grandezas que podem ser relacionadas por funções afim ou exponencial de domínios discretos, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508** da BNCC.

**1.** Determinar os valores de $x$ e $y$ de modo que a sequência $(x, 7, y)$ seja uma PA e que $(y, 15, 75)$ seja uma PG.

- Se $x$, 7 e $y$ estão em PA, então:
  $7 - x = y - 7 \Rightarrow x + y = 14$
- Se $y$, 15 e 75 estão em PG, então:
  $\frac{15}{y} = \frac{75}{15} \Rightarrow y = 3$

Substituindo $y$ por 3 na equação $x + y = 14$, obtemos: $x + 3 = 14 \Rightarrow x = 11$
Logo, os valores de $x$ e $y$ são, respectivamente, 11 e 3.



JOHN LINNELL. THOMAS ROBERT MALTHUS – BIBLIOTECA WELLCOME, LONDRES

O economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834), retratado em 1834 por John Linnell em meia-tinta no tamanho de 35,5 cm × 29 cm, tentou prever o crescimento da população mundial. Com dados relativos à população de anos anteriores, ele estabeleceu um modelo no qual a população crescia em PG, enquanto a produção de alimentos crescia em PA. Hoje, sabe-se que esse modelo tem algumas falhas, por exemplo, não considerar a disponibilidade de recursos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

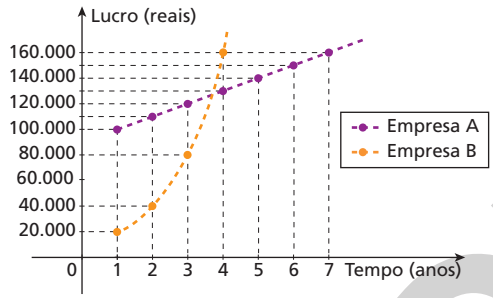
MODERNA

**2.** As empresas A e B foram inauguradas na mesma data. Nos últimos anos, a empresa A manteve-se em crescimento: no primeiro ano, obteve lucro de R$ 100.000,00; após dois anos, obteve lucro de R$ 110.000,00; após três anos, R$ 120.000,00; e assim por diante. A empresa B também se manteve em crescimento: no primeiro ano, obteve lucro de R$ 20.000,00; após dois anos, obteve lucro de R$ 40.000,00; após 3 anos, R$ 80.000,00; e assim por diante.

**a)** Verificar graficamente o crescimento anual do lucro das duas empresas.

A sequência dos lucros da empresa A forma uma PA:
(100.000, 110.000, 120.000, ...), em que $a_1 = 100.000$ e $r = 10.000$
A lei de formação dessa PA é:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = 100.000 + 10.000 \cdot (n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$
Já a sequência dos lucros da empresa B forma uma PG:
(20.000, 40.000, 80.000, ...), em que $a_1 = 20.000$ e $q = 2$
A lei de formação dessa PG é:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_n = 20.000 \cdot 2^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Construindo os gráficos da PA e da PG, temos:




ADILSON SECCO

**b)** Qual dos lucros cresce mais rapidamente: o da empresa A ou o da empresa B?

Comparando os gráficos, percebemos que o lucro da empresa B cresce mais rapidamente que o da empresa A.

Podemos verificar que, após quatro anos de funcionamento, a empresa B atingiu um lucro de R$ 160.000,00 (8 vezes o lucro inicial); já a empresa A, após esse mesmo período, atingiu um lucro de R$ 130.000,00 (1,3 vez o lucro inicial).

**Observações**

- Um gráfico pode ter eixos em escalas diferentes, pois isso não impede uma análise qualitativa da informação.
- O tempo é uma grandeza contínua, mas estamos avaliando apenas valores discretos, considerando que os lucros das empresas são contabilizados apenas uma vez ao ano.

**Observação**

Para identificar qual é o crescimento mais rápido, podemos comparar a variação do lucro de cada empresa ao longo de um mesmo intervalo.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**69.** Sendo $\left(10, x, \frac{19}{2}\right)$ uma PA e $(1, x - 8, y)$ uma PG, determine $x$ e $y$. $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$

**70.** A sequência $\left(20, a, 5, \frac{5}{2}\right)$ é uma PG de razão $q$. A sequência $(5q, 3, b, c)$ é uma PA de razão $r$. Calcule os valores de $a$, $b$, $c$, $q$ e $r$. $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$

**71.** (Fuvest-SP) Sejam $a$ e $b$ números reais tais que:
**(I)** $a$, $b$ e $a + b$ formam, nessa ordem, uma PA;
**(II)** $2^a$, 16 e $2^b$ formam, nessa ordem, uma PG.
Então, o valor de $a$ é: alternativa e
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

**72.** Descubra três números positivos em PA sabendo que sua soma é igual a 90 e que, se acrescentarmos 10 ao segundo termo e 40 ao último termo, eles formarão uma PG. 20, 30, 40

**73.** Uma PA e uma PG têm, ambas, o primeiro termo igual a 2. Sabe-se também que seus terceiros termos são maiores que zero e iguais e que o segundo termo da PA excede o segundo termo da PG em 1. Qual é o terceiro termo das progressões? 8

**74.** Sabe-se que a sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é uma PA de razão $r = 4$ e que a sequência $(d_1, d_2, d_3, ...)$ é uma PG de razão $q$. Sabe-se, ainda, que $q = r - 1$, $d_1 = a_1 + 3$, $d_2 = a_2 + 5$ e $d_3 = a_3 + 19$.
Determine:
**a)** os valores de $a_1$, $a_2$, $a_3$, $d_1$, $d_2$ e $d_3$. $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$
**b)** a soma dos 10 primeiros termos da PA. $S_{10} = 180$
**c)** a soma dos 5 primeiros termos da PG. $S_5 = 363$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

## Aplicação

**1.** Descubra o termo geral da sequência:
$\left(\frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{9}{6}, \frac{12}{7}, \frac{15}{8}, \ldots\right)$ $a_n = \frac{3n}{3+n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**2.** (Enem) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado? alternativa d

**a)** 38.000 **c)** 41.000 **e)** 48.000
**b)** 40.500 **d)** 42.000

**3.** Os Jogos Olímpicos acontecem a cada 4 anos. Embora tenham sido cancelados em alguns anos, o calendário continuou sendo obedecido como se tivessem ocorrido normalmente. Em sua 1ª edição da Era moderna, os Jogos ocorreram em 1896, em Atenas (Grécia), e, em sua 28ª edição, em 2016, no Rio de Janeiro. Quantas vezes os Jogos Olímpicos deixaram de acontecer nesse período? três vezes



© RIO 2016

**4.** A soma dos dez primeiros elementos de uma PA é o quadrado de 10, e a soma dos vinte primeiros elementos dessa mesma PA é o quadrado de 20. A soma de seus trinta primeiros elementos é o quadrado de 30? sim

**5.** Entre 3 e 3.000 há $n$ números na forma $2^k$, em que $k$ é um número natural. Determine $n$. 10

**6.** Considere uma progressão geométrica de cinco termos e de razão positiva, em que a soma do primeiro termo com o terceiro é $\frac{9}{2}$ e o produto dos termos é 1.024. Encontre o produto dos três primeiros termos da PG. $2\sqrt{2}$

**7.** Resolva a equação: $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \ldots = 9$ $S = \{6\}$

**8.** Um aluno, depois de formar uma progressão aritmética com oito termos começando pelo 3 e composta apenas de números naturais, percebe que o segundo, o quarto e o oitavo termos dessa PA formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Calcule a soma dos elementos dessa PG. 9 ou 42

**9.** Se a sequência $\left(\frac{1}{3}, a, 27\right)$, com $a > 0$, é uma progressão geométrica, e a sequência $(x, y, z)$, em que $x + y + z = 18$, é uma progressão aritmética, determine $x$, sabendo que ambas as sequências têm a mesma razão. $-3$

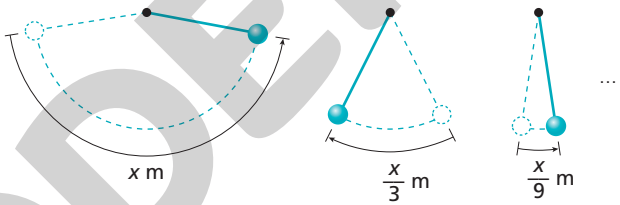
**10.** Se $(40, x, y, 5, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão $q$ e $\left(q, 8 - a, \frac{7}{2}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética, encontre o valor de $a$. 6

**11.** (Mackenzie-SP) Se a sequência $\left(2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, 6, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ é formada por termos de uma progressão aritmética alternados com os termos de uma progressão geométrica, então o produto do vigésimo pelo trigésimo primeiro termo dessa sequência é: alternativa e

**a)** $2^{10}$ **b)** $\frac{1}{2^8}$ **c)** $2^{15}$ **d)** $\frac{1}{2^{20}}$ **e)** $\frac{1}{2^5}$

## Aprofundamento

**12.** Observe a seguir a trajetória de um pêndulo.

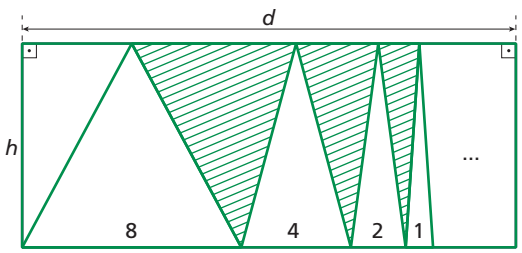



Sabendo que a cada oscilação o pêndulo percorre $\frac{1}{3}$ da distância percorrida na oscilação anterior, quanto ele percorrerá até parar? $1{,}5x$ m

**13.** Sabendo que os números 20, 56 e 83 são termos de uma progressão aritmética crescente, encontre os possíveis valores naturais da razão dessa PA. 1, 3 ou 9

## Desafio

**14.** (FGV) A figura indica infinitos triângulos isósceles, cujas bases medem, em centímetro, 8, 4, 2, 1, ...




Sabendo que a soma das áreas dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados $h$ e $d$ é igual a:

**a)** 68 **b)** 102 **c)** 136 **d)** 153 **e)** 192

alternativa c

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** As [redacted] (2, 5, 8, 11, ...) e (3, 12, 48, 192, ...) são determinadas, respectivamente, pelas leis de formação $a_n = 3n - 1$ e $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, com $n$ natural não nulo. alternativa b

**a)** inequações
**b)** sequências
**c)** progressões geométricas
**d)** progressões aritméticas

**2.** A sequência (2, 4, 8, 16, ...) é uma: alternativa c

**a)** função constante.
**b)** progressão aritmética.
**c)** progressão geométrica.
**d)** função afim.

**3.** O termo geral da PA (7, 5, 3, ...) é: alternativa d

**a)** $a_n = 5n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$
**b)** $a_n = 7n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
**c)** $a_n = 8n - 7$, com $n \in \mathbb{N}^*$
**d)** $a_n = 9 - 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**4.** Os pontos do gráfico de uma PA pertencem ao gráfico de uma função: alternativa a

**a)** afim.
**b)** quadrática.
**c)** exponencial.
**d)** logarítmica.

**5.** Calculando a soma dos vinte primeiros termos da PA (1, 2, 3, ..., 20), obtemos: alternativa c

**a)** 110 **b)** 20 **c)** 210 **d)** 300

**6.** Um termo geral da PG (−2, −6, −18, ...) é: alternativa b

**a)** $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
**b)** $a_n = (-2) \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
**c)** $a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
**d)** $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**7.** A população de uma cidade é de 20.000 habitantes. Sabendo que essa população cresce à taxa de 2% ao ano, daqui a 10 anos ela será de aproximadamente: alternativa b

**a)** 22.200 habitantes.
**b)** 24.380 habitantes.
**c)** 27.300 habitantes.
**d)** 26.430 habitantes.

**8.** Os pontos do gráfico de uma PG pertencem ao gráfico de uma função do tipo: alternativa c

**a)** afim.
**b)** quadrática.
**c)** exponencial.
**d)** logarítmica.

**9.** Calculando a soma dos quatro primeiros termos da PG (3, 24, 192, ...), obtemos: alternativa d

**a)** 1.500
**b)** 200
**c)** 27
**d)** 1.755

**10.** O valor de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ é: alternativa a

**a)** 2 **b)** 5 **c)** 10 **d)** 7

**11.** Três números positivos estão em PA. Sua soma é igual a 30. Se acrescentarmos a eles, respectivamente, 1, 2 e 9, obteremos uma PG. Então, o menor deles é: alternativa b

**a)** 2
**b)** 5
**c)** 10
**d)** 7

## Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

| | Número da questão | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Objetivos do capítulo** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Identificar padrões numéricos e sequências. | X | X | | | | | | | | | |
| Resolver problemas que envolvam sequências. | | | X | | X | X | X | | X | X | X |
| Interpretar graficamente progressões aritméticas e progressões geométricas. | | | | X | | | | X | | | |
| **Páginas do livro referentes ao conceito** | 106 a 108 | 109 a 112 | 110 a 112 | 112 e 113 | 114 e 115 | 115 a 118 | 115 a 118 | 118 e 119 | 119 a 121 | 121 e 122 | 122 e 123 |

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT104**, **EM13MAT203**, **EM13MAT303**, **EM13MAT304**, **EM13MAT305**, **EM13MAT507** e **EM13MAT508**.

CAPÍTULO

# 6 Matemática financeira

Se julgar necessário, explicar aos alunos que a população economicamente ativa é composta de pessoas de 10 a 65 anos de idade que foram classificadas como ocupadas ou desocupadas na semana de referência da pesquisa.

Este infográfico permite um trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se possível, tratar sobre o tema em conjunto com um professor dessa área. Podem ser discutidos, entre outras coisas, os incentivos fiscais ambientais previstos em lei, como a de nº 5.106, que prevê o abatimento na declaração de rendimentos de pessoa física ou jurídica de 20% do valor investido em projetos de florestamento ou reflorestamento. Orientar os alunos a pesquisar outros mecanismos de incentivo fiscal a ações de foco socioambiental, como redução ou isenção de taxas ou impostos sobre produtos, bens ou serviços. A discussão de aspectos como os impactos socioambientais decorrentes de práticas de instituições governamentais, de empresas e de indivíduos, selecionando, incorporando e promovendo aquelas que promovam a consciência e a ética socioambiental, pode favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS305**, bem como da competência específica **3** dessa área. Este infográfico trabalha os temas contemporâneos **educação financeira** e **educação fiscal**.

## A ARRECADAÇÃO TRIBUTÁRIA NO BRASIL

*Há mais de 90 tributos em vigor no Brasil, entre impostos, taxas e contribuições. Em 2017, o país ultrapassou os R$ 2 trilhões em arrecadação tributária. Segundo um levantamento anual do Instituto Brasileiro de Planejamento e Tributação (IBPT), 41,80% de toda a renda da população economicamente ativa foi usada para pagar tributos naquele ano. O imposto sobre consumo é o que mais pesa no bolso do contribuinte, e nem todos os consumidores sabem que parte do valor pago na compra de um produto é tributo.*

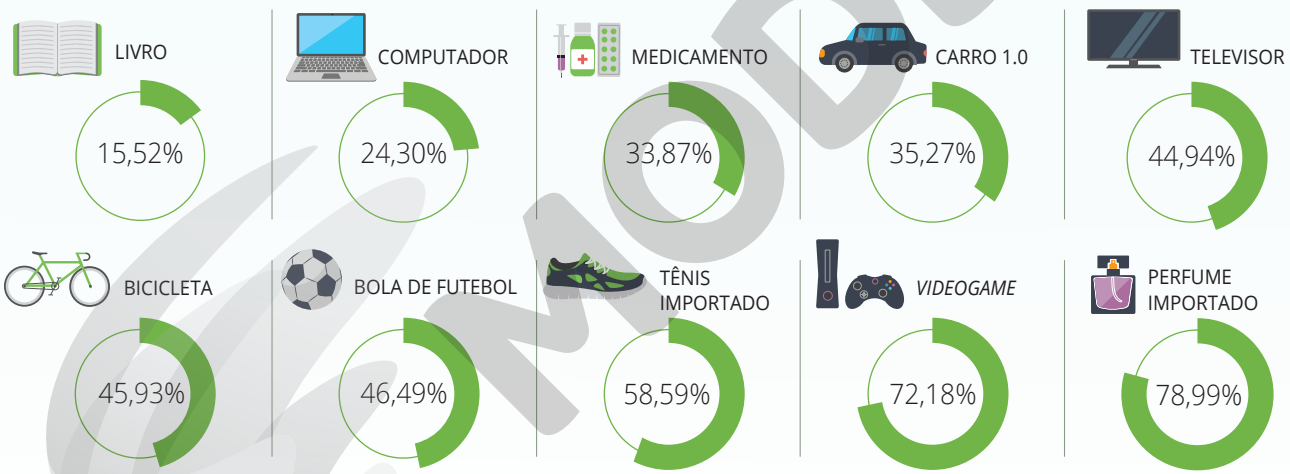
### PARA QUE SERVEM OS TRIBUTOS

No Brasil, existem três tipos de tributo:

- **impostos**, cuja arrecadação serve para financiar serviços públicos, embora não exista uma destinação específica;
- **taxas**, que são cobradas para custear serviços específicos, como coleta de lixo;
- **contribuições**, que também têm destinação específica, como o Programa de Integração Social (PIS) – um fundo para trabalhadores de baixa renda.

### IMPOSTO SOBRE CONSUMO

A taxa de tributos embutidos no valor de cada produto varia. Os itens considerados supérfluos, como perfumes importados, ou prejudiciais à saúde, como bebidas alcoólicas e cigarros, por exemplo, têm taxas maiores. Todos os produtos devem trazer na nota fiscal a porcentagem de impostos embutidos no preço ou o valor aproximado dos tributos.




ILUSTRAÇÕES: MAISA SHIGEMATSU

### EVOLUÇÃO DOS TRIBUTOS

Observe, no gráfico abaixo, a evolução dos tributos de 2007 a 2017.










ILUSTRAÇÃO: P. MANZIERI

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

## O QUE PAGAMOS

Em 2017, a cada R$ 100,00 que o brasileiro recebeu trabalhando, R$ 41,80 foram gastos com tributos. Mais da metade dessa parcela (ou 23,52% do total de rendimentos) foi destinada a tributos sobre o consumo.

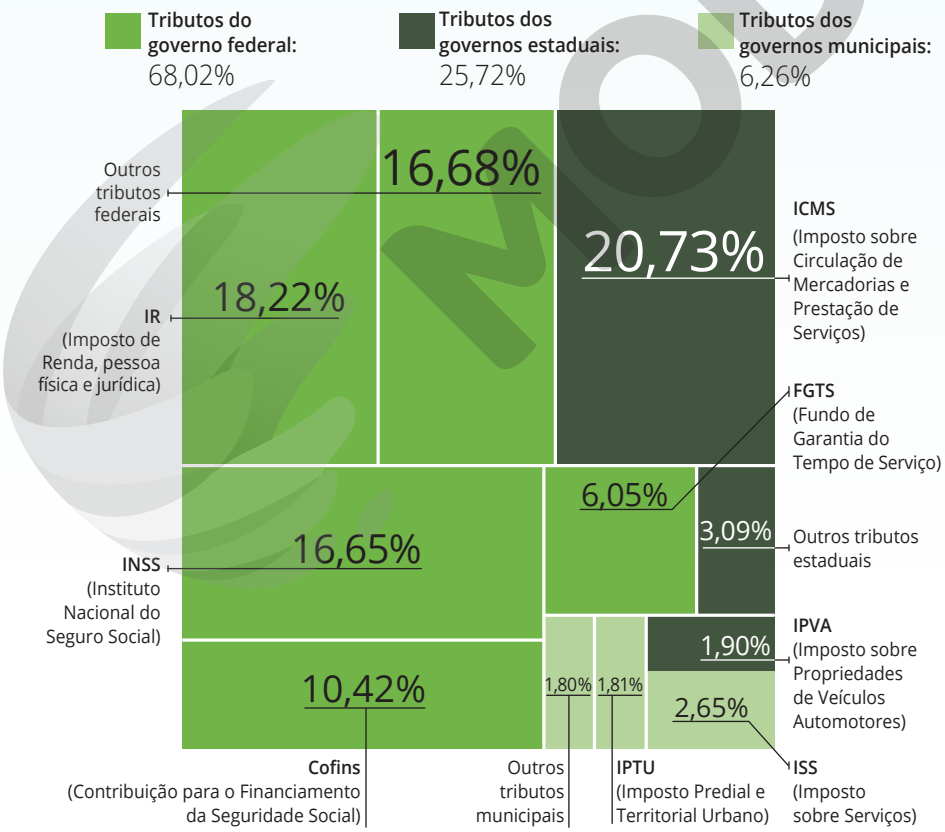



Se achar necessário, comentar com os alunos que as notas e as moedas apresentadas nesta página não estão em tamanho real nem são proporcionais entre si.

FOTOS: BANCO CENTRAL DO BRASIL

## DE ONDE VEM O DINHEIRO ARRECADADO*

Entre os tributos em vigor no país, alguns são cobrados pelo governo federal, outros pelos estados e uma parte é arrecadada pelos municípios.




* Dados relativos a 2017.

**Dados obtidos em:** Impostômetro. Disponível em: <https://impostometro.com.br/home> (acesso em: 23 jul. 2020.); Instituto Brasileiro de Planejamento e Tributação (IBPT). *Estudo sobre os dias trabalhados para pagar tributos – 2020*; Receita Federal. *Carga tributária no Brasil 2007*: análise por tributos e bases de incidência, dez. 2008; Receita Federal. *Carga tributária no Brasil 2017*: análise por tributos e bases de incidência, nov. 2018; IBGE. *População residente enviada ao Tribunal de Contas da União*: Brasil, Grandes Regiões e Unidades da Federação – 2001-2018; Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social (Ipardes). *Evolução do salário mínimo no Brasil*: de maio de 1955 a janeiro de 2019.

### Objetivos do capítulo

- Resolver problemas que envolvam taxa percentual.
- Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto.

ILUSTRAÇÃO: P. MANZIERI

MODERNA

# 1 Introdução

Esse capítulo favorece o desenvolvimento da competência específica **1** e da habilidade **EM13MAT101** da BNCC, na medida em que os alunos vão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar questões socioeconômicas.

Como vimos, é importante tomar consciência dos tributos que compõem os preços das mercadorias, dos serviços públicos ou privados e das contribuições a que estamos sujeitos a prestar. Isso é um direito de todo cidadão e só possível em um governo que tenha como princípio de sua gestão a transparência administrativa.

Além de saber o quanto pagamos em tributos, conhecer operações financeiras simples é de grande importância para o exercício da cidadania.

Acompanhe o seguinte problema, que envolve cálculo de juro.

Hoje, as dívidas de Marcelo somam R$ 5.226,00. Daqui a 3 meses, ele receberá uma indenização cujo valor permitirá quitar sua dívida acrescida de juro. Segundo seus cálculos, quando receber a indenização, sua dívida, em decorrência de juro, passará a R$ 5.670,21. O que Marcelo deve fazer: pedir um empréstimo (a ser pago após 3 meses, com juro simples de 2,6% ao mês) para quitar as dívidas hoje, ou esperar os 3 meses e quitá-las com o dinheiro da indenização?

Esse problema apresenta uma situação do cotidiano em que o conhecimento de operações financeiras auxilia na tomada da melhor decisão. Neste capítulo, vamos estudar a teoria matemática que pode ser empregada para resolver problemas desse tipo, como cálculo de empréstimos, financiamentos, descontos, taxas de juro e rendimento de investimentos.

# 2 Taxa percentual

Caso os alunos não encontrem no comércio promoções na razão 5 para 3, convém orientar para que trabalhem com outras razões encontradas, por exemplo, "leve 3 e pague 2". Essa atividade trata do tema contemporâneo **educação para o consumo**.

É comum encontrarmos no comércio promoções como "Leve 5 e pague 3". Esse tipo de promoção equivale a um desconto para o consumidor, que pode ser determinado da seguinte forma: nessa promoção, não se paga por 2 das 5 unidades compradas, isto é, há um desconto de $\frac{2}{5}$. Essa fração é equivalente a $\frac{40}{100}$; por isso, dizemos que o desconto nessa promoção é de $\frac{40}{100}$ ou de 40%.

Observe que o desconto foi representado de duas formas distintas: na forma fracionária e na forma percentual. No exemplo dado, 40% corresponde à representação na forma de **taxa percentual**.

**Taxa percentual**, ou **porcentagem**, é a representação da razão entre um número real $p$ e o número 100, que indicamos por: $p\%$.

### Explore

- Pesquise em um supermercado alguns produtos que estejam em promoção, como descrito na situação ao lado ("Leve 5 e pague 3"). Anote o valor do produto da promoção e o valor do produto unitário, fora da promoção. Vale a pena comprar o produto da promoção? Qual é o valor do desconto oferecido?
- Agora, reúna-se com um colega e pesquisem no *Código de defesa do consumidor* alguns dos direitos básicos do consumidor. Façam uma apresentação para a turma.

respostas pessoais

### Observações

- A expressão "por cento" vem do latim *per centum*, que significa "por cem".
- A porcentagem é um conceito relativo, ou seja, só podemos falar em "porcentagem de alguma coisa".

### Exemplos

**a)** 25% de 200 $= \frac{25}{100} \cdot 200 = 0{,}25 \cdot 200 = 50$

**b)** 120% de 60 $= \frac{120}{100} \cdot 60 = 1{,}2 \cdot 60 = 72$

**c)** 30% de 40% de 75 $= \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 75 = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 75 = 9$

Algumas das aplicações mais importantes sobre taxa percentual são as transações mercantis (compra e venda), que envolvem, por exemplo, descontos, lucros ou prejuízos.

Acompanhe a resolução de um problema.

O preço de uma mercadoria era R$ 100,00 e sofreu acréscimo de 20%. Vamos determinar o novo valor da mercadoria.

### Reflita

- Por quanto devemos multiplicar um número se quisermos 500% desse número?
- E se quisermos calcular 0,15% desse número?

- 500% de $x = \frac{500}{100} \cdot x = 5 \cdot x$
- 0,15% de $x = \frac{0{,}15}{100} \cdot x = 0{,}0015 \cdot x$

Portanto, devemos multiplicar um número por 5 se quisermos 500% desse número e por 0,0015 se quisermos 0,15% desse número.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Primeiro, calculamos: 20% de 100 $= \frac{20}{100} \cdot 100 = 0{,}2 \cdot 100 = 20$ (acréscimo)

Depois, adicionamos o acréscimo ao valor inicial:

R$ 100,00 + R$ 20,00 = R$ 120,00 (novo valor)

Outro modo de determinar o valor da mercadoria, após sofrer o acréscimo de 20%, é efetuando o cálculo:

$V = 100 + 0{,}2 \cdot 100 = 100 \cdot (1 + 0{,}2) = 100 \cdot (1{,}2) = 120$

Portanto, o novo valor é R$ 120,00.

Observe que o segundo modo apresenta o cálculo com apenas uma etapa. Esse modo pode ser assim generalizado:

Sendo $V_f$ o valor final da mercadoria, que é obtido pelo acréscimo ou pelo desconto de uma taxa percentual (representada por $i$), aplicada sobre o valor inicial (representado por $V_0$), temos:

$$V_f = V_0 \cdot (1 \pm i)$$

**Observações**

- $i$ representa a taxa percentual e deve ser utilizada na forma de número decimal. Por exemplo, 25% corresponde a 0,25.
- Se a variação é de aumento (valorização/acréscimo), usamos $\mathbf{1 + i}$ na fórmula.
- Se a variação é de desconto (depreciação/decréscimo), usamos $\mathbf{1 - i}$ na fórmula.

## 2.1 Aumentos e descontos sucessivos

São comuns as situações em que o valor de uma mercadoria altera-se mediante aumentos ou descontos sucessivos. Vamos acompanhar a situação a seguir para entender como isso funciona.

Uma mercadoria cujo valor inicial $V_0$ é R$ 100,00 passa por dois aumentos sucessivos, um de 5% e outro de 12%; depois, sofre um desconto de 10%. Vamos determinar o novo valor $V_f$ da mercadoria.

Inicialmente, calculamos o valor após o primeiro aumento:

$V_1 = 100 \cdot (1 + 0{,}05) = 100 \cdot 1{,}05 = 105{,}00$

O segundo aumento incide sobre R$ 105,00, não mais sobre R$ 100,00. Então:

$V_2 = 105 \cdot (1 + 0{,}12)$

$V_2 = 105 \cdot 1{,}12 = 117{,}60$ (valor após o segundo acréscimo)

Finalmente, o desconto é calculado sobre R$ 117,60:

$V_f = 117{,}60 \cdot (1 - 0{,}10)$

$V_f = 117{,}60 \cdot 0{,}90 = 105{,}84$ (valor após todas as variações)

Portanto, o novo valor $V_f$ é R$ 105,84.

Podemos calcular $V_f$ de outro modo. Observe.

$V_f = 100 \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}12) \cdot (1 - 0{,}10)$

$V_f = 100 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}90 = 105{,}84$

Aqui, novamente, o segundo modo apresenta o cálculo em apenas uma etapa.

Logo, podemos dizer que, quando o valor inicial sofre variações sucessivas de taxas $i_1$, $i_2$, $i_3$, ..., $i_n$, o valor final é assim determinado:

$$V_f = V_0 \cdot (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n)$$

Chamando de $V_0$ o valor inicial da mercadoria e de $V_f$ o valor final, após um aumento e um desconto, ambos à mesma taxa percentual $i$, temos:
$V_f = V_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 - i) = V_0 \cdot (1 - i^2)$
Como $0 < i^2$, temos: $1 - i^2 < 1$
Se multiplicarmos o valor $V_0$ por um número menor que 1, o novo valor será menor que $V_0$. Portanto, o valor final da mercadoria será menor que o valor inicial.

**Reflita**

A mercadoria que sofre um aumento e um desconto à mesma taxa percentual apresenta um valor final maior, menor ou igual ao valor inicial? Explique sua resposta.

Note, na situação anterior, que os dois aumentos e o desconto elevam o preço da mercadoria para R$ 105,84, o que equivale a um aumento de 5,84% sobre o valor inicial. A taxa de 5,84% é o que denominamos **taxa acumulada**.

De modo geral, a taxa acumulada é dada por:

$i_{\text{acumulada}} = (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n) - 1$

Assim:

$$1 + i_{\text{acumulada}} = (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n)$$

**Observações**

- Quando ocorre um acréscimo no valor inicial, temos: $i_{\text{acumulada}} > 0$
- Quando ocorre um decréscimo no valor inicial, temos: $i_{\text{acumulada}} < 0$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**Observações**

- No caso de $n$ aumentos iguais à taxa $i$, temos: $V_f = V_0 \cdot (1 + i)^n$
- No caso de $n$ descontos iguais à taxa $i$, temos: $V_f = V_0 \cdot (1 - i)^n$

## Exercícios resolvidos

**R1.** Entre os especialistas do mercado automobilístico, é consenso que um automóvel zero-quilômetro sofre uma depreciação de 15% ao ano nos 3 primeiros anos, estabilizando-se em um patamar inferior a esse nos anos seguintes. Se hoje um veículo zero-quilômetro custa R$ 34.000,00, qual será seu valor daqui a 3 anos, segundo a opinião desses especialistas?

▸ **Resolução**

Como a taxa de depreciação é constante nos 3 anos, temos:

$V_f = 34.000 \cdot (1 - 0{,}15)^3 = 34.000 \cdot (0{,}85)^3 = 20.880{,}25$

Portanto, o valor do veículo será R$ 20.880,25 daqui a 3 anos.

**R2.** O preço de um produto teve aumento total de 61% por causa de dois aumentos sucessivos. Se o primeiro aumento foi de 15%, qual foi a taxa percentual do segundo aumento?

▸ **Resolução**

61% é a taxa acumulada que corrigiu o preço do produto. Então:

$(1 + i_{acumulada}) = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2)$

$(1 + 0{,}61) = (1 + 0{,}15) \cdot (1 + i_2) \Rightarrow i_2 = 0{,}4$

Portanto, a taxa percentual do segundo aumento foi 40%.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Se em um ônibus de 40 lugares há 24 passageiros sentados, qual é a porcentagem de lugares vazios? 40%

**2.** (UFSCar-SP) A companhia de eletricidade informou que, para cada hora de um mês de 30 dias, um bairro ficou, em média, 0,2 hora sem energia elétrica em algumas ruas. No mesmo período, uma residência localizada nesse bairro totalizou 18 horas sem energia elétrica. Em relação ao total de horas que alguma parte do bairro ficou sem eletricidade, o número de horas que essa residência ficou sem energia elétrica representa: alternativa d

a) 3,6%  c) 12%  e) 33,3%
b) 9%  d) 12,5%

**3.** Se o consumo mensal de energia elétrica de uma residência passou de 120 kWh para 156 kWh, qual foi a taxa percentual de aumento? 30%

**4.** Dos produtos de uma farmácia, 10% são de uso contínuo e, destes, 50% exigem receita médica. Qual é a taxa percentual dos produtos da farmácia que são de uso contínuo e exigem receita médica? 5%

**5.** No primeiro dia de sua liquidação anual, uma loja de eletrodomésticos vendeu 40% do estoque de determinado produto; no segundo dia, vendeu 25% do restante. Que porcentagem do estoque do produto não foi vendida? 45%

**6.** A valorização de uma ação foi de 38% em dois meses. Qual foi a sua valorização no segundo mês se, no primeiro mês, a valorização foi de 15%? 20%

**7.** Em países de economia instável, observa-se o fenômeno da inflação, que basicamente é a perda do valor de compra de sua moeda.

a) Se em um país a inflação mensal é de 5%, qual é a taxa de inflação trimestral? ≃ 15,8%

b) Uma inflação de 44%, acumulada em 2 anos, corresponde a que inflação média ao ano? 20%

**8.** O setor de vigilância sanitária de determinado município registrou as seguintes informações quanto ao número de casos positivos de dengue:

- em fevereiro, relativamente a janeiro, houve aumento de 10%;
- em março, relativamente a fevereiro, houve redução de 10%.

Discuta com um colega e respondam: Esses dados indicam que, nesse município, houve aumento ou diminuição nos casos positivos da doença no período considerado? De quanto? diminuição; de 1%

**9.** Reúna-se com um colega e respondam à questão.

(UFRJ) Das 100 pessoas que estão em uma sala, 99% são homens. Quantos homens devem sair para que a porcentagem de homens na sala passe a ser 98%? 50 homens

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

## 2.2 Lucro e prejuízo

De maneira geral, podemos entender **lucro** como o ganho obtido em uma operação comercial, que é gerado pela diferença entre o preço de venda de determinada mercadoria e seu preço de custo (compra). Caso uma mercadoria seja vendida por um preço menor que seu custo, diz-se que a operação comercial gerou **prejuízo**, o que também pode ser entendido como **lucro negativo**.

Sendo $P_v$ o preço de venda, $P_c$ o preço de custo e $L$ o lucro, podemos representar:

$$L = P_v - P_c$$

### Exercícios resolvidos

**R3.** Um produto tem preço de custo de R$ 160,00 e é vendido por R$ 200,00. Qual é a porcentagem do lucro sobre o preço de custo? E sobre o preço de venda?

▸ **Resolução**

Sendo $L = P_v - P_c$, temos:

$L = 200 - 160 \Rightarrow L = 40$

Portanto, o lucro é R$ 40,00.

A porcentagem do lucro sobre o preço de custo é:

$$\frac{L}{P_c} = \frac{40}{160} = 0{,}25 = 25\%$$

A porcentagem do lucro sobre o preço de venda é:

$$\frac{L}{P_v} = \frac{40}{200} = 0{,}20 = 20\%$$

**R4.** Um objeto, ao ser renegociado, foi vendido por R$ 10.000,00, com prejuízo de 20% sobre o preço de compra original. Determinar por quanto o objeto havia sido comprado.

▸ **Resolução**

Do enunciado, temos:

$P_v = P_c - P_c \cdot 0{,}2 = (1 - 0{,}2) \cdot P_c \Rightarrow P_v = 0{,}8 \cdot P_c$

Como $P_v = 10.000$, então:

$10.000 = 0{,}8 \cdot P_c \Rightarrow P_c = 12.500$

Portanto, o objeto havia sido comprado por R$ 12.500,00.

### Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**10.** Um automóvel custou R$ 20.000,00. Por quanto deve ser vendido para que haja um lucro de 6% sobre o preço de custo? R$ 21.200,00

**11.** Comprei um terreno pelo valor de R$ 34.500,00 e vendi-o por R$ 38.640,00. Qual foi a taxa de lucro que obtive em relação ao valor de compra do terreno? 12%

**12.** Arrependida da compra de uma esteira ergométrica, Débora vendeu-a para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja. Em seguida, Ana Paula vendeu-a para Fernando por R$ 1.955,00, obtendo lucro de 15% sobre o preço que pagou. Quantos reais Fernando pagaria a mais se tivesse comprado na mesma loja em que Débora comprou? R$ 45,00

**13.** Um comerciante compra um produto por R$ 28,00 a unidade e revende-o com lucro igual a 20% do preço de venda. Qual é o preço de venda do produto? E se o lucro fosse de 20% do preço de custo? R$ 35,00; R$ 33,60

**Observação**

Em uma operação comercial, o lucro pode ser calculado como uma porcentagem tanto do preço de custo quanto do preço de venda. Quando, no enunciado de um problema, não é mencionado se o lucro refere-se ao custo ou ao preço de venda, admitimos que deve ser calculado sobre o preço de custo.

**a)** Da resolução do exercício **12**, temos $P_c = 2.000,00$. As informações "Débora vendeu-a para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja" e "Ana Paula pagou R$ 1.700,00 a Débora" são equivalentes, pois $(1 - 0{,}15) \cdot 2.000,00 = 1.700,00$. Portanto, a inclusão da informação não traria nenhuma consequência para a resolução.

**b)** A inclusão "Ana Paula pagou R$ 1.600,00 a Débora" conflita com o dado "Débora vendeu-a para Ana Paula com prejuízo de 15% em relação ao preço pago na loja". Consequentemente, o problema não teria solução.

**c)** Neste caso, há troca de um dado por outro equivalente e teríamos:

$(1 + 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot P_C = P_C - 45{,}00$

$P_C = \frac{45{,}00}{(1 - 0{,}9775)} = 2.000,00$

**d)** Não seria possível determinar o valor da esteira.

**Reflita**

Considere que, no enunciado do exercício **12**, houvesse uma das alterações a seguir.

**a)** Inclusão da informação "Ana Paula pagou R$ 1.700,00 a Débora".

**b)** Inclusão da informação "Ana Paula pagou R$ 1.600,00 a Débora".

**c)** Substituição da informação "Ana Paula vendeu-a para Fernando por R$ 1.955,00, obtendo lucro de 15% sobre o preço que pagou" por "Fernando comprou-a de Ana Paula, que obteve lucro de 15%. Ele pagou R$ 45,00 a menos do que o preço da loja." e alterar a pergunta para "Qual é o preço dessa esteira na loja?".

**d)** Omissão do valor de venda para Fernando (R$ 1.955,00).

Que consequências essas alterações trariam para a resolução do exercício?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**14.** Um vendedor repassa seus produtos ao consumidor com lucro de 60% em relação ao preço de venda. Qual é a taxa de lucro do comerciante em relação ao preço de custo? 150%

**15.** (Fuvest-SP) Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Mas prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter algum desconto no momento da compra. Qual é o maior desconto que pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo que não tenha prejuízo? alternativa c

**a)** 10% **c)** 20% **e)** 36%
**b)** 15% **d)** 25%

Este tópico favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** da BNCC, uma vez que os estudantes vão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em questões socioeconômicas e analisar resultados, de modo a construir uma argumentação consistente.

# 3 Juro simples e juro composto

Em aplicações feitas em instituições financeiras, ou empréstimos tomados delas, recebemos ou pagamos **juro**, respectivamente. Quando fazemos uma aplicação, basicamente estamos emprestando dinheiro à instituição financeira; como "recompensa" por esse empréstimo, recebemos um valor a mais, além daquele aplicado. Esse valor é denominado juro. Da mesma maneira, quando uma instituição financeira nos concede um empréstimo, devemos pagar juro por esse dinheiro que foi disponibilizado.

Neste capítulo, trataremos de dois regimes de juro: o **simples** e o **composto**.

## 3.1 Juro simples

No regime de juro simples, o juro incide apenas sobre o capital investido, e o **montante** (soma do capital investido mais o juro relativo ao período de investimento) resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro. Para melhor compreensão, acompanhe a resolução do problema de Marcelo, apresentado na introdução deste capítulo.

De acordo com a situação, Marcelo deve optar entre pedir um empréstimo de R$ 5.226,00 (a ser pago após 3 meses, com juro simples de 2,6% ao mês) para quitar as dívidas hoje, ou esperar para pagar a dívida no valor de R$ 5.670,21 após os 3 meses, com o dinheiro da indenização que vai receber.

No empréstimo, o juro cobrado após 1 mês é dado por: $J = 5.226 \cdot 0{,}026 \simeq 135{,}88$

No sistema de juro simples, para calcular o juro cobrado após 3 meses, basta multiplicar por 3 o juro cobrado após 1 mês: $J = 5.226 \cdot 0{,}026 \cdot 3 \simeq 407{,}63$

O montante que deverá ser pago, após 3 meses do empréstimo, será:

$M \simeq$ R$ 5.226,00 + R$ 407,63 = R$ 5.633,63

Logo, a melhor opção é pedir o empréstimo e pagá-lo com o valor da indenização, economizando aproximadamente R$ 36,58 (5.670,21 – 5.633,63).

De modo geral, sendo $C$ o capital, $i$ a taxa percentual de juro, $t$ o tempo de investimento, $J$ o juro após $t$ períodos e $M$ o montante, temos:

- juro obtido ao fim de um período: $C \cdot i$
- juro obtido ao fim de $t$ períodos: $C \cdot i \cdot t$

Assim, podemos escrever:

$$J = C \cdot i \cdot t \qquad M = C + J$$

Dessas igualdades, concluímos que: $M = C + C \cdot i \cdot t$

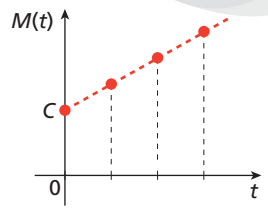
$$M = C(1 + i \cdot t)$$

Para o cálculo do juro, o tempo e a taxa devem sempre estar na mesma unidade. Por exemplo, se a taxa é mensal, o tempo deve ser contado em mês. Em cálculos contábeis, aplica-se o **ano comercial** com 360 dias, sendo 12 meses de 30 dias cada um.

A progressão aritmética formada é $(C, C + j, C + 2j, C + 3j, ...)$, em que $C$ é o capital aplicado inicialmente e $j$ é o juro ao fim de um período. A razão é dada por: $(C + j) - C = j$ Portanto, a razão dessa PA é o valor do juro ao fim de um período.

**Reflita**

Para valores de $t$ naturais, a aplicação em regime de juro simples cresce, em cada período, a uma razão aditiva constante. O capital aplicado e os montantes nos períodos seguintes ao da aplicação formam uma **progressão aritmética**, mostrada no gráfico abaixo.




ADILSON SECCO

Qual é a razão dessa progressão?

O boxe **Reflita** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT507** da BNCC, pois os alunos devem interpretar uma situação pela análise do gráfico da função representada e da taxa de variação, identificar e associar PA à função afim de domínio discreto.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

## Exercício resolvido

**R5.** Um investidor aplica R$ 1.000,00 a juro simples de 2% ao mês. Determinar a taxa equivalente ao ano, o juro recebido após 1 mês, o juro recebido após 2 anos e o montante após 8 meses.

▸ **Resolução**

- A taxa equivalente ao ano, no regime de juro simples, é:
  $i_{a.a.} = 12 \cdot i_{a.m.} \Rightarrow i_{a.a.} = 12 \cdot 2\% = 24\%$
- O juro recebido após 1 mês pode ser calculado por meio da taxa equivalente ao mês:
  $J = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 \Rightarrow J = 20{,}00$
  Portanto, após 1 mês o juro é de R$ 20,00.
- O juro recebido após 2 anos da aplicação pode ser calculado por meio da taxa equivalente ao ano:
  $J = C \cdot i \cdot t = 1.000 \cdot 0{,}24 \cdot 2 \Rightarrow J = 480{,}00$
  Portanto, após 1 ano o juro é de R$ 480,00.
- Para obter o montante após 8 meses de aplicação, podemos calcular primeiro o juro no período:
  $J = 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 8 \Rightarrow J = 160{,}00$
  E, depois, adicioná-lo ao capital:
  $M = C + J \Rightarrow M = \text{R\$ } 1.000 + \text{R\$ } 160 \Rightarrow M = \text{R\$ } 1.160{,}00$

**Observação**

Abrevia-se "ao ano" por a.a., "ao mês" por a.m. e "ao dia" por a.d.
Considerando o ano comercial, temos:
$i_{a.a.} = 12 \cdot i_{a.m.} = 360 \cdot i_{a.d.}$

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**16.** Uma aplicação de R$ 2.000,00 é feita a juro simples de 24% a.a.

a) Qual será o montante após 3 anos de aplicação? R$ 3.440,00

b) Escreva uma expressão que forneça o montante da aplicação em função do número $n$ de anos decorridos após a aplicação. $M = 2.000 + 480n$

c) Faça o gráfico do montante em função do prazo $n$ da aplicação, expresso em anos. Ver resolução no Guia do professor.

**17.** Durante quanto tempo um capital aplicado a juro simples de 15% a.a., com rendimento ao fim de cada mês, deve permanecer investido para que renda juro igual a 50% de seu valor? 3 anos e 4 meses

**18.** Um investidor aplicou na mesma data, por 3 meses e a juro simples, os capitais de R$ 110.000,00 e de R$ 80.000,00 em instituições financeiras diferentes. O maior capital foi aplicado à taxa de 6% a.m. e rendeu, de juro, R$ 10.200,00 a mais que o menor. Qual foi a taxa de juro da aplicação do menor capital? 4% a.m.

**19.** Carina aplicou, no início do ano, 25% de suas economias em um fundo de investimentos (FI) e o restante em um fundo de ações. Após 1 ano, a rentabilidade do fundo de investimentos foi 16%, e a do fundo de ações, 26%.

a) Se o saldo do FI, após 1 ano da data de aplicação, foi R$ 29.000,00, qual foi o valor aplicado nesse FI? R$ 25.000,00

b) Qual foi a rentabilidade global dessas aplicações? 23,5%

**20.** Carlos adquiriu uma moto nas seguintes condições: entrada de R$ 2.000,00 mais uma parcela única de R$ 4.500,00, paga 2 meses após a compra. Sabendo que o preço à vista da moto é R$ 6.000,00, responda às questões.


OVUONG/SHUTTERSTOCK

a) Qual é a taxa mensal de juro simples do financiamento? 6,25%

b) Após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de R$ 4.500,00 para que a taxa de juro simples do financiamento fosse de 2,5% ao mês? 5 meses

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

## 3.2 Juro composto

**Observação**

Regime de capitalização é o método pelo qual o capital é remunerado.
Destacam-se o regime de capitalização simples e o regime de capitalização composto.

No regime de **juro composto**, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem ao montante. Dessa forma, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior, o que chamamos de "juro sobre juro". Essa é a modalidade de remuneração mais empregada pelas instituições financeiras.

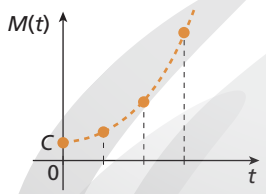
Os cálculos envolvidos na resolução de problemas de juro composto em geral são trabalhosos; por isso, recomenda-se usar uma calculadora.

Acompanhe, no quadro abaixo, a evolução do montante gerado pelo investimento de R$ 1.000,00 à taxa de 2% ao mês sob os dois regimes de capitalização estudados.

| Período | Juro simples | Juro composto |
|---|---|---|
| início | $M_0 = 1.000$ | $M_0 = 1.000$ |
| após 1 mês | $M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 1 \Rightarrow M_1 = 1.020$ | $M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_1 = 1.020$ |
| após 2 meses | $M_2 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 2 \Rightarrow M_2 = 1.040$ | $M_2 = 1.020 + 1.020 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_2 = 1.040{,}40$ |
| após 3 meses | $M_3 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 3 \Rightarrow M_3 = 1.060$ | $M_3 = 1.040{,}40 + 1.040{,}40 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_3 \simeq 1.061{,}21$ |
| após 4 meses | $M_4 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 4 \Rightarrow M_4 = 1.080$ | $M_4 \simeq 1.061{,}21 + 1.061{,}21 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_4 \simeq 1.082{,}43$ |
| após 5 meses | $M_5 = 1.000 + 1.000 \cdot 0{,}02 \cdot 5 \Rightarrow M_5 = 1.100$ | $M_5 \simeq 1.082{,}43 + 1.082{,}43 \cdot 0{,}02 \Rightarrow M_5 \simeq 1.104{,}08$ |
| após $t$ meses | $M_t = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02 \cdot t)$ | $M_t = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02)^t$ |

**Reflita**

Para valores de $t$ naturais, a aplicação em regime de juro composto cresce, em cada período, a uma razão multiplicativa constante. O capital aplicado e os montantes nos períodos seguintes ao da aplicação formam uma **progressão geométrica**, mostrada no gráfico abaixo.




ADILSON SECCO

Qual é a razão dessa progressão?

A progressão geométrica formada é $[C, C(1 + i), C(1 + i)^2, C(1 + i)^3, ...]$, em que $C$ é o capital aplicado inicialmente e $i$ é a taxa de juro ao fim de cada período.

A razão é dada por: $\frac{C(1 + i)}{C} = 1 + i$

Portanto, a razão dessa PG é $1 + i$.

O boxe **Reflita** favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT508** da BNCC, pois os alunos devem interpretar uma situação pela análise do gráfico da função representada e da taxa de variação, identificar e associar PG à função exponencial de domínio discreto.

Vamos detalhar os cálculos feitos na coluna do juro composto ao final de cada mês. Para isso, considere o capital investido $C$, a taxa de juro composto $i$ e o período de aplicação $t$.

- Após 1 mês: $M_1 = C + C \cdot i \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$
- Após 2 meses: $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) \Rightarrow M_2 = C(1 + i) \cdot (1 + i) = C(1 + i)^2$
- Após 3 meses: $M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) \Rightarrow M_3 = C(1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^3$

⋮

- Após $t$ meses: $M_t = M_{t-1} + M_{t-1} \cdot i = M_{t-1}(1 + i) \Rightarrow$
$\Rightarrow M_t = C(1 + i)^{t-1} \cdot (1 + i) = C(1 + i)^t$

Então, podemos calcular o montante resultante dessa aplicação da seguinte forma:

$$M = C(1 + i)^t$$

### Exercícios resolvidos

**R6.** Com um capital de R$ 1.500,00 foi feita uma aplicação que rende juro composto de 1,2% ao mês. Qual será o saldo (montante) dessa aplicação após 6 meses se, durante esse período, não houver nenhuma outra movimentação na conta?

▸ **Resolução**

Aplicando a fórmula do juro composto, temos:

$$M = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{1{,}2}{100}\right)^6 \Rightarrow M = 1.500 \cdot (1{,}012)^6$$

Utilizando uma calculadora, obtemos $M \simeq$ R$ 1.611,29.

**R7.** Uma dívida contraída a juro composto, captalizado mensalmente, aumenta 69% em 2 meses. Determinar a taxa mensal de juro.

▸ **Resolução**

É importante perceber que 69% é a taxa acumulada em 2 meses para essa dívida.

$(1 + 0{,}69) = (1 + i_{a.m.})^2 \Rightarrow 1 + i_{a.m.} = \sqrt{1{,}69} \Rightarrow i_{a.m.} = 30\%$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**R8.** Uma loja oferece as seguintes alternativas para o pagamento de uma mercadoria:

- à vista, com 3% de desconto sobre o preço de tabela;
- com cheque pré-datado para 30 dias, no valor de tabela da mercadoria.

Considerando que um consumidor tenha dinheiro para comprar a mercadoria à vista e que esse dinheiro possa ser aplicado em uma instituição financeira à taxa de 0,8% a.m., qual é a opção mais vantajosa para comprar nessa loja? Explicar.

▸ **Resolução**

Sendo $P_t$ o preço de tabela da mercadoria e $P_v$ seu preço à vista, temos: $P_v = 0{,}97 \cdot P_t$ (desconto de 3% sobre o preço de tabela).

O valor à vista da mercadoria pode ser aplicado e produzir um montante, após 1 mês, de:

$M = 0{,}97 \cdot P_t \cdot (1 + 0{,}008) \Rightarrow M = 0{,}97776 \cdot P_t$

Logo, o valor do resgate seria insuficiente para saldar o cheque pré-datado, pois: $0{,}97776 \cdot P_t < P_t$

Portanto, é mais vantajoso para o consumidor pagar a mercadoria à vista.

**R9.** O valor de uma máquina sofre depreciação anual de 25%. Se ela custa hoje R$ 2.000,00, daqui a quantos anos valerá metade do valor atual? (*Adotar*: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$)

▸ **Resolução**

Como o valor da máquina a cada ano é multiplicado pelo mesmo fator, podemos aplicar a fórmula do juro composto. Usando também a definição e as propriedades operatórias dos logaritmos, temos:

$$1.000 = 2.000 \cdot (1 - 0{,}25)^t \Rightarrow (0{,}75)^t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \log_{0{,}75}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0{,}75)} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - \log 2^2} = \frac{\log 1 - \log 2}{\log 3 - 2 \cdot \log 2}$$

Adotando $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, temos:

$$t = \frac{0 - 0{,}30}{0{,}48 - 2 \cdot 0{,}30} = \frac{-0{,}30}{-0{,}12} = 2{,}5$$

Logo, a máquina terá seu valor reduzido à metade em 2 anos e meio, contados a partir de hoje.

**Reflita**

Considerando a situação dada no exercício resolvido **R8**, qual é o menor valor da taxa de juro que a aplicação deveria ter para que a decisão de pagar em 30 dias não fosse desvantajosa?

Vamos representar por $i$ o valor da taxa de juro da aplicação.
O valor à vista da mercadoria pode ser aplicado e produzir um montante, após 1 mês, de:
$M = 0{,}97 \cdot P_t \cdot (1 + i)$
Para que o consumidor não tenha desvantagem em aplicar o valor à vista, devemos ter:
$0{,}97 \cdot P_t \cdot (1 + i) \geq P_t$

$$1 + i \geq \frac{1}{0{,}97} \Rightarrow i \geq \frac{0{,}03}{0{,}97} \simeq 3{,}1\%$$

Portanto, a taxa procurada deve ser no mínimo de $\frac{0{,}03}{0{,}97}$, aproximadamente 3,1%.

Esse tipo de questão é recorrente no cotidiano. Em uma economia como a brasileira, geralmente é mais vantajoso o pagamento à vista. Esse tipo de situação-problema leva os alunos a refletir sobre as decisões de sua economia e a exercer sua cidadania, e trata de temas contemporâneos como **educação financeira** e **educação para o consumo**.

**Observação**

Satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, são válidas as seguintes propriedades:

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

O exercício resolvido **R9** e alguns exercícios propostos favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT305** da BNCC, pois envolvem a resolução de problemas com funções logarítmicas no contexto da Matemática financeira.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**21.** Quanto Mariana deveria aplicar hoje em um investimento que rende juro composto à taxa de 10% a.a. para ter um montante de R$ 13.310,00 daqui a 3 anos? R$ 10.000,00

**22.** (UEL-PR) Um empresário comprou um apartamento com intenção de investir seu dinheiro. Sabendo-se que esse imóvel valorizou 12% ao ano, é correto afirmar que seu valor duplicou em, aproximadamente: alternativa e

(*Dados*: $\log_{10} 2 \simeq 0{,}30$ e $\log_{10} 7 \simeq 0{,}84$)

a) 3 anos.
b) 4 anos e 3 meses.
c) 5 anos.
d) 6 anos e 7 meses.
e) 7 anos e 6 meses.

**23.** Um capital de R$ 1.500,00 foi aplicado a juro composto à taxa de 2% ao mês. Ao completar 2 meses de aplicação, o montante foi retirado e aplicado a juro simples à taxa de 5% ao mês. Se, após certo prazo, o montante final era R$ 1.950,75, qual foi o prazo da segunda aplicação? 5 meses

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**24.** Certo capital duplica em 2 meses de aplicação no regime de juro composto. Qual é, aproximadamente, a taxa mensal de juro desse investimento? 41%

**25.** Em 3 anos, o crescimento do setor agroindustrial de certa região foi 700%. Qual foi a taxa de crescimento média por ano? Se a taxa de crescimento no primeiro ano foi 25% e a do segundo foi 100%, qual foi a taxa de crescimento no terceiro ano? 100%; 220%

**26.** Em uma loja, as vendas de 2019 foram 40% superiores em relação às de 2018. Em relação a 2019, as vendas de 2018 foram inferiores em que porcentagem, aproximadamente? $\simeq$ 29%

**27.** Um investidor aplicou R$ 4.000,00 em um fundo de ações que lhe causou um prejuízo, no primeiro mês, de 40% sobre o total do investimento. Na tentativa de recuperar o dinheiro perdido, aplicou o montante da primeira aplicação por um prazo de 60 dias a uma taxa de 20% a.m. Esse investidor conseguiu recuperar o dinheiro investido? Após a segunda aplicação, qual foi a taxa percentual do montante em relação aos R$ 4.000,00 aplicados? não; 86,4%

**28.** Exercícios de Matemática financeira que envolvem depreciação ou valorização de bens com questões como "daqui a quanto tempo o bem valerá a metade do que vale hoje?" ou "daqui a quanto tempo o capital duplicará de valor?" podem ser resolvidos com o auxílio de função logarítmica.

Com base nas questões que você trabalhou neste tópico, elabore um exercício em que, para determinar uma previsão de valorização ou depreciação, deve-se, necessariamente, utilizar a ideia de logaritmo. resposta pessoal

## 3.3 Atualização financeira

Já vimos que certo capital, aplicado por um período $t$, a juro composto, tem seu valor final calculado pela fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$. Agora, acompanhe a situação.

Um capital de R$ 500,00, aplicado, rende juro composto de 2% a.m. e produz os montantes a seguir.

- Após 1 mês: $M_1 = 500 \cdot (1 + 0{,}02) \Rightarrow M_1 = 510{,}00$
- Após 2 meses: $M_2 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^2 \Rightarrow M_2 = 520{,}20$
- Após 3 meses: $M_3 = 500 \cdot (1 + 0{,}02)^3 \Rightarrow M_3 \simeq 530{,}60$

⋮

- Após $t$ meses: $M_t = 500 \cdot (1 + i)^t$

Observe que, ao projetarmos o valor de uma aplicação ou de uma dívida, devemos multiplicar o valor presente pelo fator $(1 + i)^t$.

Vamos analisar agora o que ocorre na situação inversa, ou seja, a de uma dívida cujo valor já está calculado com juro composto embutido, que vence daqui a um tempo, mas tem seu pagamento antecipado.

Uma loja vende um aparelho de som por R$ 1.011,24 para pagamento com cheque pré-datado para 60 dias. Se a loja está cobrando juro de 6% ao mês no crediário, qual é o preço à vista do aparelho?

Para saber o preço à vista, devemos calcular o valor presente do aparelho. Para isso, devemos "tirar" o juro embutido no preço final da mercadoria.

Utilizando $M = C \cdot (1 + i)^t$, temos:

$$1.011{,}24 = C \cdot (1 + 0{,}06)^2 \Rightarrow C = \frac{1.011{,}24}{(1{,}06)^2} \Rightarrow C = 900$$

Portanto, o preço à vista do aparelho é R$ 900,00.

Observe que, para trazer o valor da mercadoria para o presente (preço à vista), dividimos o valor no futuro pelo fator $(1 + i)^t$. Normalmente, nesta etapa do estudo, alteramos a classificação de montante ($M$) para dívida ($D$) e de capital ($C$) para valor presente ($VP$). Assim, temos: $D = VP \cdot (1 + i)^t$

Logo, o valor presente é dado por:

$$VP = \frac{D}{(1 + i)^t}$$

**Reflita**

A taxa de juro de 6% ao mês equivale a uma taxa de juro composto de, aproximadamente, quantos por cento ao ano? Compare-a com a taxa de inflação dos últimos doze meses.

$(1 + 0{,}6)^{12} \simeq 2{,}012 = 100\% + 101{,}2\%$
A taxa de juro anual é aproximadamente igual a 101,2%.
A comparação depende da taxa de inflação da época.

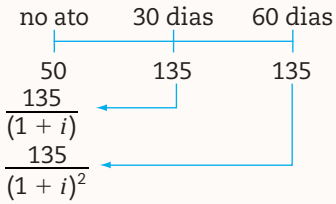
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

## Exercícios resolvidos

**R10.** Uma loja vende uma bicicleta por R$ 300,00 à vista, ou por R$ 50,00 de entrada e mais 2 pagamentos mensais de R$ 135,00. Qual é a taxa mensal de juro no plano a prazo? (*Usar*: $\sqrt{6.129} = 78$)

▸ **Resolução**

Calculamos o valor presente de todas as parcelas:




Nesse caso, temos:

$$50 + \frac{135}{(1+i)} + \frac{135}{(1+i)^2} = 300$$

Fazendo $(1 + i) = k$, temos:

$$50 + \frac{135}{k} + \frac{135}{k^2} = 300$$

$$50k^2 - 27k - 27 = 0 \Rightarrow k = \frac{-(-27) \pm \sqrt{6.129}}{2 \cdot 50}$$

Logo, $k \simeq 1{,}05$ ou $k \simeq -0{,}51$ (não serve).

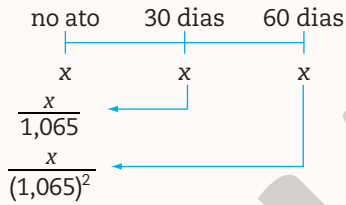
Logo, $1 + i \simeq 1{,}05$, ou seja, $i \simeq 0{,}05$.

Portanto, a taxa de juro no plano a prazo é de, aproximadamente, 5% a.m.

**R11.** Uma compra de R$ 600,00 vai ser paga em 3 parcelas mensais e iguais, sendo a primeira à vista. Determinar o valor de cada parcela sabendo que a loja cobra juro de 6,5% a.m.

▸ **Resolução**

Observe o esquema a seguir.




A soma da entrada com o valor presente das demais parcelas (descontado o juro) fornece o valor da compra à vista:

$$x + \frac{x}{1{,}065} + \frac{x}{(1{,}065)^2} = 600$$

$$(1{,}065)^2x + 1{,}065x + x = (1{,}065)^2 \cdot 600$$

$$3{,}199225x = 680{,}535$$

$$x \simeq 212{,}72$$

Logo, cada parcela do financiamento é de, aproximadamente, R$ 212,72.

## Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**29.** Um imóvel, no valor total de R$ 364.000,00, vai ser pago em 3 parcelas anuais iguais, sendo a primeira no ato da compra. Qual é o valor de cada parcela, se está sendo cobrado juro de 20% ao ano na segunda e na terceira parcelas? R$ 144.000,00

**30.** Um ventilador que custa R$ 100,00 à vista é vendido em uma loja em 2 parcelas iguais de R$ 60,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda a vencer em 30 dias. Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja? 50%

**31.** Um aparelho de TV custa R$ 800,00 à vista, ou zero de entrada e mais 2 parcelas iguais de R$ 430,00, com vencimentos em 30 e 60 dias após a compra.

Qual é a taxa mensal de juro cobrada pela loja nesse plano de pagamento?

(*Use*: $\sqrt{15.609} = 125$) 5%

**32.** No dia 15 de julho, João contraiu uma dívida, com a promessa de quitá-la em 15 de julho do ano seguinte, mediante um único pagamento de R$ 208.080,00. Nessa quantia, já está incluso o juro composto correspondente aos 12 meses, à taxa mensal de 2%. Hoje, João entrou em contato com o credor, mostrando interesse em liquidar sua dívida no dia 15 de maio, desde que a dívida seja recalculada com a retirada do juro correspondente aos 2 meses de antecipação. Supondo que o credor concorde com João, quanto ele terá de pagar? R$ 200.000,00

**33.** Em um comercial de televisão, é feito o anúncio:

"AMANHÃ É O DIA DO REFRIGERADOR.
LEVE SEU REFRIGERADOR POR R$ 400,00 AGORA
E MAIS R$ 600,00 DAQUI A 2 MESES, OU TRAGA SUA
PROPOSTA PARA ANÁLISE!"

Um consumidor, ouvindo a propaganda, foi até a loja e propôs pagar R$ 400,00 de entrada e mais 2 prestações mensais e iguais. Sabendo que a loja opera com taxa de juro composto de 5% ao mês, qual deve ser o valor de cada prestação para que os dois planos sejam equivalentes? ≃ R$ 292,68

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **5**, das competências específicas **2**, **3** e **4** e das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT203**, **EM13MAT303** e **EM13MAT304** da BNCC, pois os estudantes vão compreender e utilizar tecnologias digitais de informação, como planilhas eletrônicas, de forma crítica, significativa e reflexiva para resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

# 4 O uso de planilhas eletrônicas nos cálculos financeiros

Além da calculadora, as planilhas eletrônicas são muito usadas para auxiliar nos cálculos relacionados a operações financeiras. Vamos acompanhar dois exemplos de problemas resolvidos empregando planilhas.

**a)** Lorena tem R$ 50.000,00 e duas opções para investir esse dinheiro:

- aplicação A: rendimento à taxa de 1% a.m. em regime de juro simples.
- aplicação B: rendimento à taxa de 0,9% a.m. em regime de juro composto.

Qual das aplicações é mais vantajosa para Lorena?

Vamos analisar, com o auxílio de uma planilha eletrônica, o que acontece com o montante no decorrer do tempo em cada uma das aplicações.

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

Comentar com os alunos que, na planilha, os resultados aparecem arredondados para a segunda casa decimal.

Campo que mostra a célula selecionada. B3 é a célula que está na coluna B e na linha 3.

Campo que mostra a fórmula associada à célula.

| B3 | *Fórmula* | =50000*(1+0,01*A3) | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| 1 | **Período (mês)** | **Montante (R$) na aplicação A** | **Montante (R$) na aplicação B** | |
| 2 | 0 | 50.000,00 | 50.000,00 | |
| 3 | 1 | 50.500,00 | | |
| 4 | 2 | | | |
| 5 | 3 | | | |
| 6 | 4 | | | |
| 7 | 5 | | | |
| 8 | 6 | | | |
| 9 | 7 | | | |
| 10 | 8 | | | |

Números que indicam as linhas da planilha.

Letras que indicam as colunas da planilha.

Para preencher a coluna A, digitamos 0, 1 e 2, identificando, assim, os primeiros meses. Selecionamos essas três células e, com o cursor na quina da seleção e com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastamos a seleção para preencher os meses seguintes.

Para calcular o montante da aplicação **A** (regime de juro simples) ao fim do 1º mês, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:

=50000*(1+0,01*A3)

valor da célula A3
taxa mensal
capital inicial

[Calcula o valor de: 50.000 • (1 + 0,01 • 1)]

Para preencher a coluna B com os montantes ao fim de cada mês, basta selecionar a célula B3 e arrastar a seleção para baixo, como foi feito na coluna A. Esse procedimento copia a fórmula da célula B3 para as células B4, B5, B6, B7, …, substituindo A3, respectivamente, por A4, A5, A6, A7, …

| C3 | *Fórmula* | =50000*(1+0,009^A3) | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| 1 | **Período (mês)** | **Montante (R$) na aplicação A** | **Montante (R$) na aplicação B** | |
| 2 | 0 | 50.000,00 | 50.000,00 | |
| 3 | 1 | 50.500,00 | 50.450,00 | |
| 4 | 2 | 51.000,00 | | |
| 5 | 3 | 51.500,00 | | |
| 6 | 4 | 52.000,00 | | |
| 7 | 5 | 52.500,00 | | |
| 8 | 6 | 53.000,00 | | |
| 9 | 7 | 53.500,00 | | |
| 10 | 8 | 54.000,00 | | |

Para calcular o montante da aplicação **B** (regime de juro composto) ao fim do 1º mês, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:

=50000*(1 + 0,009)^A3

valor da célula A3
taxa mensal
capital inicial

[Calcula o valor de: 50.000 • $(1 + 0{,}009)^1$]

Assim como fizemos para a coluna B, arrastamos a seleção da célula C3 para as outras células da coluna.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Com os dados da planilha preenchidos, é possível comparar os montantes no decorrer do tempo para as duas aplicações. Preenchendo apenas o começo da planilha, acharemos, erroneamente, que a aplicação A é sempre mais vantajosa.

Mas, arrastando a seleção das fórmulas para um número maior de meses, veremos que a partir do 25º mês a aplicação B passa a ser mais vantajosa que a aplicação A.

Portanto, deve-se considerar o tempo em que Lorena deixará esse capital aplicado. Caso esse tempo seja inferior a 25 meses, a aplicação A será mais vantajosa; caso seja superior ou igual a 25 meses, a aplicação B será mais vantajosa.

| | Fórmula | | | |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| 1 | **Período (mês)** | **Montante (R$) na aplicação A** | **Montante (R$) na aplicação B** | |
| 2 | 0 | 50.000,00 | 50.000,00 | |
| 3 | 1 | 50.500,00 | 50.450,00 | |
| 4 | 2 | 51.000,00 | 50.904,05 | |
| 5 | 3 | 51.500,00 | 51.362,19 | |
| ⋮ | | | | |
| 25 | 23 | 61.500,00 | 61.442,21 | |
| 26 | 24 | 62.000,00 | 61.995,19 | |
| 27 | 25 | 62.500,00 | 62.553,15 | |
| 28 | 26 | 63.000,00 | 63.116,12 | |

**b)** Para comprar uma casa, Juliana deu uma entrada correspondente a 10% do valor do imóvel e fez um financiamento para o restante da dívida, a uma taxa fixa de 0,97% ao mês, a ser pago em 10 anos, com prestações mensais fixas de R$ 2.700,00. Qual é o valor do imóvel à vista?

Vamos usar uma planilha eletrônica para calcular o valor presente de cada uma das 120 parcelas mensais (equivalentes a 10 anos de pagamento). Em seguida, basta adicionar esses valores para calcular o valor presente da dívida e, então, calcular o valor do imóvel considerando que a dívida equivale a 90% de seu valor.

Comentar com os alunos que, na planilha, os resultados aparecem arredondados para a segunda casa decimal.

Para calcular o valor presente das parcelas ao fim de cada período, digitamos, em B2, a fórmula: =2700/(1+0,0097)^A2

[Calcula o valor de: $\frac{2.700}{(1+0,0097)^1}$]

Em seguida, selecionamos essa célula e arrastamos a seleção até B121.

Inicialmente, preenchemos a coluna com os períodos até o 120º mês.

| B2 | *Fórmula* | =2700/(1+0,0097)^A2 |
|---|---|---|
| | A | B |
| 1 | **Período (mês)** | **Valor presente da parcela (R$)** |
| 2 | 1 | 2.674,06 |
| 3 | 2 | |
| 4 | 3 | |
| 5 | 4 | |
| ⋮ | | |
| 118 | 117 | |
| 119 | 118 | |
| 120 | 119 | |
| 121 | 120 | |
| 122 | | |

Assim, calculados os valores presentes de todas as parcelas, digitamos em uma célula da planilha, na célula C2, por exemplo, a fórmula: =SOMA(B2:B121)

[Adiciona os valores das células B2 a B121]

Essa soma representa o valor total da dívida no presente.

| C2 | *Fórmula* | =SOMA(B2:B121) | | |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D |
| 1 | **Período (mês)** | **Valor presente da parcela (R$)** | **Valor presente total da dívida (R$)** | **Valor total do imóvel (R$)** |
| 2 | 1 | 2.674,06 | 190.950,95 | 212.167,72 |
| 3 | 2 | 2.648,37 | | |
| 4 | 3 | 2.622,93 | | |
| 5 | 4 | 2.597,73 | | |
| ⋮ | | | | |
| 118 | 117 | 872,09 | | |
| 119 | 118 | 864,30 | | |
| 120 | 119 | 856,00 | | |
| 121 | 120 | 847,78 | | |
| 122 | | | | |

Para calcular o valor total do imóvel à vista, digitamos, em outra célula, a fórmula: = C2/0,90

[Calcula a razão entre o valor da célula C2 e 0,90]

Essa razão fornece o valor à vista do imóvel.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Portanto, o valor do imóvel de Juliana à vista é R$ 212.167,72.

Ao apresentar os exemplos, discutir as dificuldades e refletir até que ponto seria trabalhoso resolver ambos os problemas fazendo os cálculos um a um, sem o auxílio da planilha eletrônica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

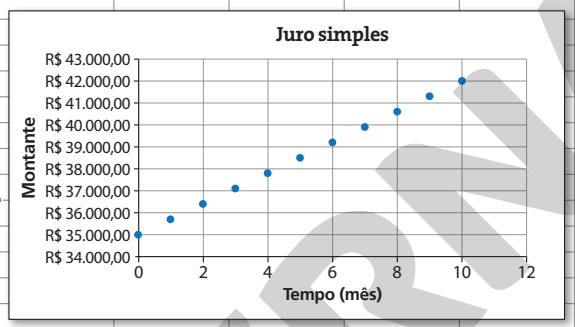
MODERNA

## 4.1 Construção de gráficos com dados da planilha eletrônica

Podemos construir um gráfico com os dados em uma planilha. Observe.

Selecionamos as células relativas aos dados que queremos no gráfico e clicamos em "Inserir gráficos". Há várias opções de gráficos; no exemplo, construímos o gráfico só com os pontos, uma vez que o montante é obtido ao final de cada mês.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Período (meses) | Juro simples 2% |
| 2 | 0 | R$ 35.000,00 |
| 3 | 1 | R$ 35.700,00 |
| 4 | 2 | R$ 36.400,00 |
| 5 | 3 | R$ 37.100,00 |
| 6 | 4 | R$ 37.800,00 |
| 7 | 5 | R$ 38.500,00 |
| 8 | 6 | R$ 39.200,00 |
| 9 | 7 | R$ 39.900,00 |
| 10 | 8 | R$ 40.600,00 |
| 11 | 9 | R$ 41.300,00 |
| 12 | 10 | R$ 42.000,00 |




NELSON MATSUDA

Com o gráfico construído, pode-se compor ou alterar o título do gráfico, o título do eixo, mudar a cor do gráfico, mudar a escala, compor linhas auxiliares etc.

### Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

**34.** Luana está juntando dinheiro para fazer uma viagem, que custará R$ 4.200,00. Ela vai aplicar seu dinheiro em uma poupança, com rendimento de 0,6% ao mês. Sabendo que hoje aplicou R$ 1.000,00 e que ao fim de cada mês ela depositará na poupança R$ 200,00, após quanto tempo, no mínimo, Luana conseguirá juntar a quantia necessária para fazer a viagem? (Resolva o problema usando uma planilha eletrônica.) 15 meses

**35.** Everton fez um empréstimo de R$ 50.000,00 em uma instituição financeira, a juro de 8% ao mês sobre o saldo devedor. Ao fim de cada mês após o empréstimo, ele pagou R$ 3.000,00 à instituição, a fim de diminuir a dívida. Porém, devido ao crescimento acelerado da dívida, contatou a instituição, após 38 meses, para renegociar a dívida. Calcule, usando uma planilha eletrônica, quanto era a dívida de Everton nessa data. R$ 270.315,95

**36.** O gerente de uma instituição financeira ofereceu a Cláudia dois tipos de investimento: um, no regime de juro simples, com taxa de 20% ao ano; outro, a juro composto, com taxa anual de 15%. Cláudia pretende investir os R$ 150.000,00 que recebeu na venda de um apartamento por 10 anos.

a) Use uma planilha eletrônica para simular os montantes anuais para cada tipo de investimento. Ver resolução no Guia do professor.

b) Em 10 anos, apesar de ter uma taxa de juro menor, o rendimento da aplicação no sistema de juro composto supera o rendimento da aplicação em juro simples? Se sim, qual é o tempo para que isso aconteça? sim; cinco anos

c) Qual é a diferença entre os montantes ao final do 10º ano de aplicação? R$ 156.833,66

d) Qual é a melhor aplicação a ser feita no período de 10 anos? a do regime de juro composto

e) Use a aplicação de construção de gráficos da planilha eletrônica para construir o gráfico do montante da aplicação em função do tempo nos dois investimentos. Ver resolução no Guia do professor.

**37.** Elabore um problema em que seja necessário analisar e comparar um gráfico com crescimento exponencial com outro que tenha crescimento linear. Os dois gráficos devem ser relacionados a montantes de dois tipos de investimento. Ao final, resolva o problema elaborado por um colega e peça a ele que resolva o problema elaborado por você. resposta pessoal

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

# Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** e das habilidades **EM13MAT303**, **EM13MAT304** e **EM13MAT305** da BNCC.

## Aplicação

**1.** (Mackenzie-SP) O setor de recursos humanos de uma empresa entrevistou candidatos a empregos, sendo $\frac{2}{3}$ a razão entre o número de aprovados e o de reprovados. Dos entrevistados, foram aprovados: alternativa d

**a)** 30% **c)** 36% **e)** 45%
**b)** 32% **d)** 40%

**2.** Antes de colocar certo produto à venda, um comerciante aumentou seu preço em 20%. Se o desconto no ato da venda também for de 20%, que porcentagem do preço inicial o comprador pagará pelo produto? 96%

**3.** O preço original de um objeto de R$ 260,00 sofreu dois aumentos sucessivos: um de 20% e outro de 30%.

**a)** O novo valor do objeto é 50% maior que o original? não

**b)** Qual é o novo valor? Qual é a taxa acumulada pelos dois aumentos? R$ 405,60; 56%

**4.** Em uma aula de ginástica de uma academia, 25% dos presentes são do sexo feminino. Se 3 mulheres se retirarem, a porcentagem passará a ser 20%. Quantas mulheres continuarão na aula de ginástica? 9 mulheres

**5.** (Fuvest-SP) Um reservatório com 40 $\ell$ de capacidade já contém 30 $\ell$ de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de: alternativa d

**a)** 20% **c)** 24% **e)** 28%
**b)** 22% **d)** 26%

**6.** (PUC) Em uma indústria é fabricado certo produto ao custo de R$ 9,00 a unidade. O proprietário anuncia a venda desse produto ao preço unitário de $x$ reais, para que possa, ainda que dando ao comprador um desconto de 10% sobre o preço anunciado, obter um lucro de 40% sobre o preço unitário de custo. Nessas condições, o valor $x$ é: alternativa d

**a)** 24 **b)** 18 **c)** 16 **d)** 14 **e)** 12

**7.** Em um período em que a inflação é 25%, qual será a perda do poder aquisitivo da moeda? 20%

**8.** Um contrato estabelece a aplicação, a juro simples, de $\frac{2}{3}$ de um capital à taxa de 6% a.m., durante 2 meses; o restante à taxa de 4,5% a.m., também a juro simples, durante 3 meses. Para que todo o capital em uma mesma aplicação tivesse em 3 meses a mesma rentabilidade, qual deveria ser a taxa anual? 50%

**9.** (Faap-SP) Um investimento de R$ 24.000,00 foi aplicado parte a juro simples de 1,8% ao mês e parte a 3% ao mês. Se o juro mensal é igual a R$ 480,00, quais são as partes correspondentes do investimento? R$ 20.000,00; R$ 4.000,00

**10.** (UFC-CE) Uma pessoa, dispondo de 60.000 reais, aplica parte dessa quantia no banco A, a uma taxa de juro simples de 5% ao ano. O restante é aplicado no banco B, a uma taxa de juro simples de 7% ao ano. Depois de 1 ano verificou-se que as quantias aplicadas tiveram o mesmo rendimento. Pode-se afirmar, corretamente, que a quantia aplicada no banco A, em reais, foi: alternativa e

**a)** 19.000 **c)** 27.000 **e)** 35.000
**b)** 20.000 **d)** 30.000

**11.** Em 1º de abril de determinado ano, um artigo que custava R$ 250,00 teve seu preço diminuído em $p$% de seu valor. Em 1º de maio do mesmo ano, o novo preço foi diminuído em $p$% do seu valor, passando, então, a R$ 211,60. Utilizando uma calculadora, determine o valor de $p$. 8

**12.** Quanto uma pessoa deve aplicar hoje, a juro composto com taxa de 1,4% ao mês, para pagar uma dívida de R$ 3.600,00 daqui a 3 meses? E uma dívida de R$ 8.700,00 daqui a 5 meses? ≃ R$ 3.452,94; ≃ R$ 8.115,77

**13.** (FGV) No regime de juro composto, a taxa de juro anual que produz um montante 44% superior ao capital inicial, no prazo de aplicação de 2 anos, é: alternativa a

**a)** 20% **c)** 21% **e)** 22%
**b)** 21,5% **d)** 20,5%

**14.** (FGV) Uma aplicação financeira rende juro de 10% ao ano, compostos anualmente.

| $x$ | 2 | 5 | 11 |
|---|---|---|---|
| $\log x$ | 0,30 | 0,70 | 1,04 |

Utilizando para os cálculos as aproximações fornecidas na tabela, pode-se afirmar que uma aplicação de R$ 1.000,00 seria resgatada no montante de R$ 1.000.000,00 após: alternativa e

**a)** mais de 1 século.
**b)** 1 século.
**c)** $\frac{4}{5}$ de século.
**d)** $\frac{2}{3}$ de século.
**e)** $\frac{3}{4}$ de século.

**15.** Uma mercadoria é vendida em três parcelas iguais de R$ 320,00, sem entrada. Se a taxa de juro do financiamento for 5% ao mês, qual será o valor aproximado dessa mercadoria para pagamento à vista? ≃ R$ 871,44

## Aprofundamento

**16.** (Vunesp) Uma loja vende um produto no valor de R$ 200,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista, com 10% de desconto, ou em 2 prestações mensais de mesmo valor, sem desconto, a primeira sendo paga no momento da compra. A taxa mensal de juro embutida na venda a prazo é: alternativa d

**a)** 5% **b)** 10% **c)** 20% **d)** 25% **e)** 90%

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

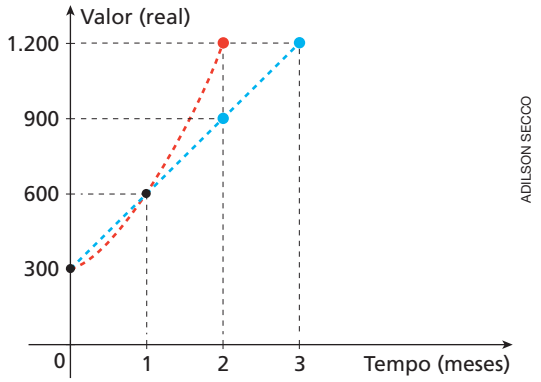
MODERNA

## Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Para resolver o exercício **17** o aluno deve reconhecer o comportamento da relação entre as variáveis envolvidas no juro composto e no juro simples, distinguindo as aplicações. Dessa maneira, é possível, além de identificar o gráfico correspondente, descobrir a taxa das aplicações a fim de determinar o montante após três meses no regime de juro composto. O exercício, portanto, contribui para o desenvolvimento do pilar **reconhecimento de padrões**, do *pensamento computacional*.

**17.** Observe os gráficos abaixo. Um deles representa a aplicação de R$ 300,00 a juro composto, e o outro, a aplicação desse mesmo valor a juro simples.




a) No regime de juro composto, qual será o montante após 3 meses? R$ 2.400,00

b) Após que mês é menos vantajoso o regime de juro simples? após o 1º mês

**18.** Em determinado ano, nos meses de janeiro, fevereiro e março, as taxas de inflação foram, respectivamente, de 1,2%, 0,8% e 1,3%. Qual foi a taxa de inflação acumulada nesse primeiro trimestre? E qual deve ser a taxa máxima de inflação de abril para que a taxa acumulada no quadrimestre seja de, no máximo, 4%? $\simeq 3{,}34\%$; $\simeq 0{,}64\%$

**19.** (Enem) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esse investimento, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

| $n$ | $1{,}03^n$ |
|---|---|
| 3 | 1,093 |
| 6 | 1,194 |
| 9 | 1,305 |
| 12 | 1,426 |

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá: alternativa c

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

**20.** (Enem) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55.000,00.
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30.000,00, e mais uma prestação de R$ 26.000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20.000,00, mais uma prestação de R$ 20.000,00 para dali a 6 meses e outra de R$ 18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39.000,00.
- Opção 5: Pagar a prazo, dali a 1 ano, o valor de R$ 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção: alternativa d

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

## Desafio

**21.** Um supermercado negocia com seus fornecedores 150.000 unidades de determinado produto. Na primeira semana de vendas, o público consumiu $\frac{2}{3}$ das unidades, com lucro unitário de 30% sobre o custo para o supermercado; na semana seguinte, consumiu todas as restantes, com lucro unitário de 15% sobre o custo. Qual foi a taxa percentual média do lucro do supermercado nessas vendas? 25%

**22.** (Ibmec-SP) Se $x$ reais forem investidos em determinada aplicação, então o rendimento gerado por essa aplicação e o imposto que irá incidir sobre esse rendimento serão ambos iguais a $x$%. O maior valor de $x$ para o qual essa aplicação não gera prejuízo é: alternativa c

a) R$ 50,00

b) R$ 83,33

c) R$ 100,00

d) R$ 125,80

e) R$ 161,80

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

# Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Em uma sala de aula, a razão entre o número de meninos e o número de meninas é $\frac{3}{5}$. Em relação ao total de alunos na sala, a porcentagem de meninas é: alternativa c

**a)** 37,5%
**b)** 60%
**c)** 62,5%
**d)** 40%

**2.** Na composição do feijão, 22% são proteínas. A massa de proteínas, em grama, existente em 300 g de feijão é: alternativa a

**a)** 66
**b)** 132
**c)** 156
**d)** 660

**3.** Ao comprar uma bicicleta de R$ 950,00 com desconto de 18%, o cliente pagará: alternativa c

**a)** R$ 932,00
**b)** R$ 968,00
**c)** R$ 779,00
**d)** R$ 171,00

**4.** Após um aumento de 15%, um produto passou a ser vendido por R$ 48,30. O preço desse produto, antes do aumento, era: alternativa b

**a)** R$ 33,30
**b)** R$ 42,00
**c)** R$ 43,30
**d)** R$ 32,00

**5.** Um aparelho de TV cujo preço original é R$ 1.000,00 está sendo vendido por R$ 885,00. Assim, a loja está oferecendo um: alternativa d

**a)** aumento de 88,5%.
**b)** desconto de 88,5%.
**c)** aumento de 11,5%.
**d)** desconto de 11,5%.

**6.** Ao ser aplicado, um capital $C$ aumentou em 4% no primeiro mês. No segundo mês, houve um desconto de 4% sobre o novo valor, obtendo o montante $M$. Podemos dizer que: alternativa b

**a)** houve lucro.
**b)** houve prejuízo.
**c)** $C$ é igual a $M$.
**d)** $M$ é maior que $C$.

**7.** No regime de [redacted], o juro incide apenas sobre o capital investido, e o montante resgatado nesse regime depende do capital, do tempo de aplicação e da taxa de juro. alternativa c

**a)** juro composto
**b)** aplicações sucessivas
**c)** juro simples
**d)** descontos sucessivos

**8.** [redacted] o rendimento obtido ao fim de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem a um novo montante; a partir daí, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior. alternativa a

**a)** No regime de juro composto
**b)** No regime de juro simples
**c)** Em qualquer regime de capitalização
**d)** Não há regime de capitalização no qual

**9.** Uma loja vende um produto no valor de R$ 150,00 e oferece duas opções de pagamento aos clientes: à vista com 10% de desconto ou, sem desconto, em 2 parcelas iguais, sendo uma no ato da compra e outra 30 dias depois. A taxa de juro cobrada na compra parcelada é: alternativa d

**a)** 10%
**b)** 15%
**c)** 18%
**d)** 25%

**10.** O salário líquido mensal de uma pessoa é R$ 3.000,00. Todo mês ela poupa 10% de seu salário líquido e aplica esse valor em um fundo que rende juro composto à taxa de 2% ao mês. O saldo dessa aplicação logo depois de ela fazer o terceiro depósito é: alternativa a

**a)** R$ 918,12
**b)** R$ 906,00
**c)** R$ 903,00
**d)** R$ 618,12

## Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

| | Número da questão | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Objetivos do capítulo** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Resolver problemas que envolvam taxa percentual. | X | X | X | X | X | X | | | X | X |
| Analisar e aplicar os regimes de juro simples e de juro composto. | | | | | | X | X | X | X | X |
| **Páginas do livro referentes ao conceito** | 128 e 129 | 128 e 129 | 128 a 132 | 128 a 132 | 128 a 132 | 132 e 133 | 132 a 135 | 132 a 135 | 132 a 137 | 132 a 137 |

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Essa seção favorece o desenvolvimento da competência específica **1** e da habilidade **EM13MAT104** da BNCC, uma vez que os alunos devem utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações no contexto socioeconômico, tratando da taxa de inflação e outros índices relacionados. Além disso, a seção trata dos temas contemporâneos **educação financeira** e **educação fiscal**.

## Compreensão de texto




EDNEI MARX

### *O que é inflação*

Inflação é o nome dado ao aumento dos preços de produtos e serviços. Ela é calculada pelos índices de preços, comumente chamados de índices de inflação.

O IBGE produz dois dos mais importantes índices de preços: o IPCA, considerado o oficial pelo governo federal, e o INPC.

#### *Para que servem o IPCA e o INPC?*

O propósito de ambos é o mesmo: medir a variação de preços de uma cesta de produtos e serviços consumida pela população. O resultado mostra se os preços aumentaram ou diminuíram de um mês para o outro.

A cesta é definida pela Pesquisa de Orçamentos Familiares – POF, do IBGE, que, entre outras questões, verifica o que a população consome e quanto do rendimento familiar é gasto em cada produto: arroz, feijão, passagem de ônibus, material escolar, médico, cinema, entre outros.

Os índices, portanto, levam em conta não apenas a variação de preço de cada item, mas também o peso que ele tem no orçamento das famílias.

[...]

#### *Qual é a diferença entre eles?*

A sigla INPC corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor. A sigla IPCA corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo.

A diferença entre eles está no uso do termo "amplo".

O IPCA engloba uma parcela maior da população. Ele aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 e 40 salários mínimos.

O INPC verifica a variação do custo de vida médio apenas de famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos. Esses grupos são mais sensíveis às variações de preços, pois tendem a gastar todo o seu rendimento em itens básicos, como alimentação, medicamentos, transporte etc.

[...]

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

### *Por que se fala tanto em IPCA?*

O governo federal usa o IPCA como o índice oficial de inflação do Brasil. Portanto, ele serve de referência para as metas de inflação e para as alterações na taxa de juros.

### *Como ele é calculado?*

O IBGE faz um levantamento mensal, em 13 áreas urbanas do País, de, aproximadamente, 430 mil preços em 30 mil locais. Todos esses preços são comparados com os preços do mês anterior, resultando num único valor que reflete a variação geral de preços ao consumidor no período.

### *Índice pessoal de inflação*

Sua cesta de compras, ou seja, os produtos e serviços que você consome regularmente pode ser bem diferente da cesta média da população brasileira. Com isso, o seu índice pessoal de inflação pode ser maior ou menor do que o IPCA.

Por exemplo, uma família que não consome carne vermelha e não tem filhos em idade escolar terá, com certeza, um índice de inflação pessoal diferente do oficial, cujo cálculo coloca peso considerável na variação do preço da carne e da mensalidade escolar.

### *Poder de compra*

Se a variação do seu salário, de um ano para o outro, for menor do que o IPCA, você perde seu poder de compra, pois os preços sobem mais do que a sua renda. Se a inflação e o seu salário têm a mesma variação, seu poder de compra se mantém. Se você, porém, receber um aumento acima do IPCA, seu poder de compra aumentará.

### *Curiosidades do IPCA*

O IBGE produz e divulga o IPCA, sistematicamente, desde 1980. Entre 1980 e 1994, ano de implantação do Plano Real, o índice acumulado foi de 13.342.346.717.671,70%!

A maior variação mensal do IPCA foi em março de 1990 (82,39%), enquanto a menor variação, em agosto de 1998 (–0,51%).

[...]

Fonte: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística: Inflação. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php>. Acesso em: 31 jul. 2020.

## Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

**1.** Escreva, com suas palavras, o que você acha sobre o modo como é concebido o índice mensal de inflação. resposta pessoal

**2.** Pergunte a um familiar adulto se acha que o índice oficial mensal de inflação corresponde aproximadamente à alta de preços de produtos e serviços que ele consome. resposta pessoal

**3.** Explique a diferença entre os índices INPC e IPCA.

**4.** Segundo o texto, entre 1980 e 1994, ano de implantação do Plano Real, o índice acumulado do IPCA foi de 13.342.346.717.671,70%.

Considerando o que foi trabalhado no capítulo, explique como foi calculada essa porcentagem.

3. A sigla INPC corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor. A sigla IPCA corresponde ao Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo. A diferença entre eles está no uso do termo "amplo". O IPCA engloba uma parcela maior da população. Ele aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 e 40 salários mínimos.
O INPC verifica a variação do custo de vida médio apenas de famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos.

4. Foi calculada da mesma maneira como se calcula juro composto. Suponha que, em um mês qualquer, tenhamos tido um IPCA de 5%, ou seja, os preços sofreram um reajuste médio de 5%; no mês posterior, tivemos um IPCA de 3%. Assim, um preço $P$ terá como preço final $P_1 = P \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}03 = P \cdot 1{,}0815$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# Educação financeira

## Projeto de vida

Explicar aos alunos que a foto não é mais um item obrigatório no currículo; aliás, muitas empresas preferem que os candidatos não a coloquem, para que a aparência física não seja um critério considerado no processo seletivo.

## Para começar e pensar

Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Sabrina acaba de completar 18 anos e está ansiosa para conquistar sua independência financeira. Ela pesquisou oportunidades de emprego na internet e descobriu que precisa elaborar um currículo para se candidatar às vagas disponíveis no mercado.

Veja o currículo de Sabrina:



NELSON MATSUDA

### Sabrina Gomes Oliveira

Data de nascimento:
15 de março de 2002
Endereço:
Telefone:
*E-mail*:

**Objetivo**

Fazer parte da equipe da empresa, com dedicação ao trabalho e comprometimento com as atribuições sob minha responsabilidade.

**Formação**

• Ensino Médio:

2017-2019

✓ Participação na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2017.

✓ Participação na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica em 2018.

✓ Participação na Olimpíada Nacional de História do Brasil em 2018.

**Perfil profissional**

• Criativa.
• Comunicativa.
• Com disponibilidade para viagens.

1. Sobre o currículo da Sabrina, responda às questões.
   a) Em sua opinião, todas as informações presentes são relevantes? Justifique.
   b) Que tipo de informação Sabrina pode ter esquecido de inserir no currículo?
   c) Você faria alguma modificação nesse currículo? Explique.
2. Faça uma autoavaliação e descreva suas habilidades mais notórias.
3. Crie seu currículo levando em consideração o ramo no qual deseja trabalhar (objetivo) e suas principais habilidades relacionadas a esse ramo (perfil profissional).

## Para discutir

Propor aos alunos uma pesquisa sobre o salário do presidente da República e o efeito cascata nos salários dos demais cargos eletivos, o que influencia, inclusive, os salários das esferas estaduais e municipais.

Sabrina enviou seu currículo para vagas de telefonista, vendedora, recepcionista e estoquista. Ela foi convidada para trabalhar em uma loja de roupas como estoquista. A empresa ofereceu um salário inicial de R$ 1.110,00 mais benefícios (vale-transporte e vale-refeição), com carga horária de 44 horas semanais.

**Objetivos**

Apresentar as informações básicas de um currículo e de um contracheque; incentivar o planejamento financeiro para o futuro a curto, médio e longo prazos; promover reflexões sobre o estilo de vida profissional desejado pelos alunos.

As atividades e as discussões propostas nesta seção dizem respeito aos temas contemporâneos **trabalho**, **educação financeira** e **educação fiscal**. Ao construir um projeto de vida, levando em consideração as necessidades financeiras e os desejos e anseios em relação ao mundo do trabalho, os alunos devem refletir a respeito de si, buscando conhecer-se e reconhecer-se no mundo, e avaliar as emoções que emergem ao planejar e vislumbrar o próprio futuro de maneira crítica, responsável e flexível. Nessas situações, é sempre enriquecedor conversar com pessoas mais experientes, respeitando e valorizando a diversidade de saberes e a vivência dessas pessoas para criar suas próprias visões de mundo e relações com o trabalho. Dessa maneira, é favorecido o desenvolvimento das competências gerais **6**, **8** e **10** da BNCC e da habilidade **EM13MAT203**, articulada com a competência específica **2**, uma vez que os alunos são incentivados a aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações na tomada de decisões.

**Observações**

- Piso salarial: o valor mínimo do salário que pode ser pago a um empregado, dentro de uma categoria específica, em determinada região.
- Média salarial: o valor médio do salário de uma categoria de trabalhadores. Pode ser calculada a média salarial dos trabalhadores de um bairro ou de uma cidade ou, ainda, a média salarial de uma ocupação específica.
- Teto salarial: o valor máximo do salário que pode ser pago a um servidor público, não podendo receber salário superior ao do presidente da República.
- Salário mínimo: o valor mínimo do salário pago a um trabalhador.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

A seção favorece o trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, com o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS404** da BNCC, ao identificar e discutir aspectos do trabalho em diferentes circunstâncias e contextos históricos e/ou geográficos e seus efeitos sobre as gerações, em especial os jovens, considerando as transformações técnicas, tecnológicas e informacionais. Se julgar pertinente, conversar com o professor da área para elaborarem uma proposta que utilize o currículo dos alunos e as respostas das atividades **7**, **8** e **9**.

Ao final do primeiro mês de trabalho, Sabrina recebeu seu salário acompanhado do contracheque reproduzido ao lado.

Empresa: Algodãozinho Comércio de Roupas — CNPJ: 000.000.0000/0000-00
Funcionária: Sabrina Gomes Oliveira — Referência: Maio/2020
Função: Estoquista

| Código | Descrição | Vencimentos | Descontos |
|---|---|---|---|
| 001 | Salário-base | R$ 1.110,00 | |
| 002 | Vale-transporte | R$ 195,00 | |
| 003 | Vale-refeição | R$ 220,00 | |
| 004 | Horas extras | R$ 90,00 | |
| 005 | INSS | | R$ 93,03 |
| 006 | Vale-transporte descontado | | R$ 72,00 |
| 007 | Imposto de renda retido na fonte | | isento nesta faixa |
| | | Total de vencimentos | R$ 1.615,00 |
| | | Total de descontos | R$ 165,03 |
| | | Salário líquido ⇨ | R$ 1.449,97 |
| 008 | FGTS | | R$ 96,00 |

Declaro ter recebido a importância líquida discriminada neste recibo
Assinatura do funcionário
Data / /

NELSON MATSUDA

Todo trabalhador vinculado oficialmente a uma empresa ou a um órgão público (seja por concurso, seja por contrato ou carteira de trabalho) tem valores descontados na folha de pagamento antes de receber seu salário. Assim, o salário recebido, chamado de **líquido**, é calculado após os devidos descontos.

No Brasil, o Instituto Nacional do Seguro Social (INSS) é responsável pelo pagamento da aposentadoria e demais benefícios (licença-maternidade, acidentes de trabalho, auxílio-doença, entre outros) aos trabalhadores. Para usufruir esse direito, o trabalhador contribui mensalmente com um percentual de seu salário.

O Fundo de Garantia do Tempo de Serviço (FGTS) refere-se a um percentual do salário, recolhido mensalmente, com o objetivo de proteger o trabalhador e de ajudá-lo a formar um patrimônio. O valor recolhido pode ser resgatado em algumas situações, como aquisição de imóvel, demissão sem justa causa ou aposentadoria.

O FGTS é recolhido diretamente pela empresa, sem desconto do funcionário. Existem muitas regras referentes ao pagamento e aos benefícios provenientes do INSS e do FGTS, mas não caberia explicar todos os seus detalhes nesta seção. Mais informações estão disponíveis em: <http://www.caixa.gov.br/beneficios-trabalhador/inss/Paginas/default.aspx> e <http://www.fgts.gov.br/Pages/default.aspx>. Acessos em: 19 ago. 2020.

**4.** Com base no contracheque de Sabrina, responda às perguntas.
- **a)** O valor do FGTS equivale a qual valor percentual do salário-base adicionado das horas extras?
- **b)** O desconto referente ao vale-transporte equivale a qual valor percentual do salário-base adicionado das horas extras?

**5.** Considerando que Sabrina trabalha 8 horas diárias, de segunda-feira a sexta-feira, e 4 horas aos sábados, responda ao que se pede.
- **a)** Quanto ela recebe, de acordo com o vale-refeição destacado no contracheque, para fazer suas refeições diariamente?
- **b)** Quanto ela recebe, de acordo com o vale-transporte destacado no contracheque, para pagar suas passagens por dia de trabalho?

**6.** No Brasil, a Consolidação das Leis do Trabalho (CLT) regulamenta os direitos trabalhistas. Pesquise a legislação em vigor sobre os direitos a seguir:

– férias;
– *home office*;
– seguro-desemprego;
– licença-maternidade e paternidade;

Em seguida, reúnam-se em grupos para discutir as informações pesquisadas.

## Para finalizar

**7.** Pensando no estilo de vida que você gostaria de usufruir no futuro, quais profissões são condizentes com suas habilidades e necessidades financeiras?

**8.** Você aceitaria trabalhar em um emprego do qual não gosta para ganhar um bom salário e conquistar um estilo de vida abastado?

**9.** Quais são seus planos para o futuro? Descreva um projeto a curto prazo, um projeto a médio prazo e outro a longo prazo. Faça uma estimativa do investimento necessário para concretizar cada um de seus projetos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Na etapa 1 desta seção, os alunos devem pesquisar e refletir a respeito da **educação para o trânsito** e sobre como a **ciência e a tecnologia** podem contribuir para diminuir os riscos e a gravidade de eventuais acidentes com veículos, sendo esses dois temas contemporâneos. A tarefa visa exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, promovendo a investigação, a reflexão e uma análise crítica a respeito das informações obtidas, o que pode favorecer o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC. Ainda nessa etapa, os alunos devem identificar e escolher fontes confiáveis para as informações e dados coletados na internet a fim de criar, no final da atividade, um videodocumentário sobre o que pesquisaram, o que pode contribuir para o desenvolvimento da competência geral **7**.

# Pesquisa e ação

## Videodocumentário

**Objetivos**

Pesquisar sobre educação para o trânsito; pesquisar sobre a contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito; criar um videodocumentário; apresentar o videodocumentário à comunidade escolar com o intuito de conscientizá-la sobre a importância da educação para o trânsito.

Você sabia que um dos principais causadores de acidentes no trânsito é o próprio ser humano, seja ele pedestre, seja condutor? O consumo de bebidas alcoólicas, a pressa de chegar ao destino, o desconhecimento e o descumprimento das leis de trânsito e o uso de celular ao volante são algumas das causas de acidentes.

As leis são medidas indispensáveis para tornar o trânsito seguro. O Código de Trânsito Brasileiro (CTB), documento que reúne as leis de trânsito vigentes no Brasil, determina que a preferência é do menor veículo, e sempre do pedestre em relação aos veículos. Além das leis, a ciência e a tecnologia também contribuem para um trânsito mais seguro, como os cálculos realizados para determinar a velocidade máxima nas vias de circulação de automóveis e os testes de segurança realizados em veículos.



EDNEI MARX

Segundo o parágrafo 2º do art. 29 da Lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997 (que instituiu o CTB), o trânsito de veículos nas vias terrestres que forem abertas à circulação deverá obedecer às seguintes normas: "§ 2º respeitadas as normas de circulação e conduta estabelecidas neste artigo, em ordem decrescente, os veículos de maior porte serão sempre responsáveis pela segurança dos menores, os motorizados pelos não motorizados e, juntos, pela incolumidade dos pedestres".

Esses recursos, entretanto, não são suficientes. Para promover um convívio mais saudável, que valorize a integridade física de condutores, ciclistas e pedestres, é importante que adultos e crianças sejam educados para o trânsito, tenham atitudes de respeito com o próximo, além de responsabilidade e cooperação; é preciso que a vida seja valorizada.

Nesse contexto, os videodocumentários são uma forma interessante de conscientização; por isso, nesta atividade, vocês vão pesquisar informações e dados estatísticos sobre trânsito e educação para o trânsito. Depois, vão elaborar, por meio de entrevistas, encenação, músicas e textos, videodocumentários para apresentar esses dados à comunidade escolar com o objetivo de estimular a reflexão sobre ações no trânsito.

Nessa seção, os alunos se deparam com uma tarefa complexa e que deve ser dividida em etapas para poder ser concretizada com maior chance de sucesso (decomposição). Em cada etapa há uma lista de tarefas a ser realizada na ordem em que são indicadas (algoritmo). Além disso, em muitos momentos os alunos precisarão refletir a respeito do que é relevante em uma etapa ou em um questionamento, como na atividade **2** da **etapa 1**, em que devem realizar uma pesquisa sobre um tema e refletir a respeito das questões propostas (abstração). Na **etapa 2**, os alunos verificarão como costumam ser divididas as funções das pessoas que trabalham na criação de videodocumentários, e conhecer técnicas e métodos desse tipo de produção, reaproveitando um conhecimento previamente construído por produtores de conteúdo (reconhecimento de padrões). As várias tarefas e etapas da seção dialogam com os quatro pilares do *pensamento computacional*.

### Etapa 1: Educação para o trânsito e contribuição da ciência e da tecnologia para a segurança no trânsito

**1.** Reflita e discuta com o professor e os colegas sobre as questões a seguir.

**a)** Qual é a importância da educação para o trânsito?

**b)** Como é o trânsito na cidade em que vivemos?

**c)** Em nossa cidade, as vias são seguras para os pedestres? E para os ciclistas? E para os condutores de motocicletas, carros e veículos maiores (caminhões, por exemplo)?

**d)** Por que existe uma hierarquia de responsabilidade no trânsito?

**e)** Você já teve uma experiência negativa no trânsito? E positiva? Como foi?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**2.** Reúnam-se em grupos de, no máximo, sete integrantes. Leiam atentamente os temas e as questões propostas a seguir para que cada grupo escolha um dos temas.

**Tema 1:** Acidentes de trânsito no Brasil

- Quais são as principais causas de acidentes de trânsito no Brasil? Quantos acidentes ocorreram no Brasil neste ano? Com relação ao mesmo período do ano passado, houve um aumento ou uma diminuição no número de acidentes?
- Existe uma época do ano em que o número de acidentes aumenta? Se sim, qual?
- Qual é a faixa etária da população que mais sofre com os acidentes de trânsito? Por qual motivo isso acontece?
- Como interpretar e apresentar os dados estatísticos e as informações coletadas de maneira que consigamos estimular a reflexão da população sobre a diminuição no número de acidentes?

**Tema 2:** Leis de trânsito brasileiras

- No Brasil, quais são as principais leis de trânsito para pedestres, ciclistas e condutores?
- Quais são as leis mais desrespeitadas que geram um número maior de infrações? Com relação ao mesmo período do ano passado, houve aumento ou diminuição na quantidade de infrações?
- Qual é o perfil da população que mais desrespeita as leis de trânsito? Qual ação pode ser tomada para reverter essa situação?
- Como interpretar e apresentar os dados estatísticos e as informações coletadas de maneira que consigamos estimular a reflexão acerca do cumprimento das leis de trânsito?

**Tema 3:** Velocidade × tempo de frenagem dos veículos e velocidades nas vias

- O que é tempo de frenagem de um veículo?
- Qual é a relação entre o tempo de frenagem e a velocidade dos veículos?
- Como são determinadas as velocidades nas vias?
- Como podemos apresentar essas informações para que consigamos estimular a reflexão da população sobre o respeito das velocidades na via?

**Tema 4:** Tecnologias para testar a segurança dos veículos

- Como a segurança automotiva evoluiu? Qual foi o resultado na saúde do trânsito após a evolução dos itens de segurança?
- Quais são os testes obrigatórios que o fabricante deve realizar antes de comercializar um automóvel? Como esses testes funcionam?
- Em motos e bicicletas, quais são os itens de segurança necessários? Quais são as tecnologias utilizadas para testar esses itens?
- Como podemos apresentar essas informações para que consigamos estimular a reflexão da população sobre o uso de itens de segurança?

**3.** Realizem as pesquisas em *sites* confiáveis, como os de instituições educativas e órgãos governamentais. As informações pesquisadas serão usadas na criação do videodocumentário da próxima etapa.

**4.** Compartilhem as informações e os dados obtidos com os colegas, em um momento definido pelo professor, apresentando os resultados de suas pesquisas. Conversem sobre as informações encontradas e sobre como elas vão auxiliar na construção da mensagem do videodocumentário.

Para criar o videodocumentário, os estudantes devem pesquisar e aprender como utilizar tecnologias e recursos digitais para a captura do áudio, do vídeo e como realizar a edição desse material, o que pode contribuir para o desenvolvimento da competência geral **5** e da competência específica **7** de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC. Ao compor o documentário, os estudantes devem utilizar diferentes abordagens e linguagens para atrair a atenção dos telespectadores e transmitir a mensagem de maneira clara e objetiva, o que contribui para o desenvolvimento da competência geral **4**. Uma vez que os registros devem apresentar porcentagens, envolver a criação de gráficos e tabelas para apresentar dados, também é favorecido o desenvolvimento das competências específicas **1**, **2** e **4** articuladas com as habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT102** e **EM13MAT104**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

As etapas **3** e **4** dessa seção favorecem o desenvolvimento das competências gerais **9** e **10** da BNCC, pois os alunos são convidados a assistirem aos videodocumentários dos colegas, refletindo sobre o conteúdo apresentado e como podem contribuir de maneira construtiva para melhorar cada documentário apresentado, exercitando a empatia, o diálogo, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro. Além disso, devem discutir e refletir sobre como a ciência e a tecnologia contribuem para um trânsito mais seguro e sobre a importância da educação para o trânsito. Ao produzir os documentários, os alunos agem coletivamente com autonomia, responsabilidade, sendo flexíveis às ideias e propostas, trabalhando com resiliência e determinação para a conclusão da atividade, tendo como base as leis de trânsito e o bem-estar dos cidadãos.

**Registre as respostas em seu caderno.**

## Pesquisa e ação

### Etapa 2: Videodocumentário

**5.** A criação de um videodocumentário envolve diferentes fases. É importante ter organização para definir a função que cada integrante deseja desempenhar. Veja a seguir as funções envolvidas na produção do vídeo.

- **Roteiristas:** responsáveis por criar o roteiro, descrevendo cada cena e a ordem em que aparecerão. A organização das cenas deve ser definida com todo o grupo e registrada pelos roteiristas.
- **Redatores:** responsáveis por escrever os textos que farão parte do vídeo – por exemplo, o texto que poderá ser lido pelo narrador. Lembrem-se de que as informações pesquisadas na etapa 1 deverão ser utilizadas neste momento. Também são responsáveis por definir e pesquisar quem serão os entrevistados, como um ciclista ou um agente de trânsito, caso a técnica seja escolhida pelo grupo.
- **Diretores:** responsáveis pela organização geral do trabalho. Devem acompanhar todas as fases, organizando-as para que o grupo alcance o objetivo do videodocumentário dentro do cronograma previsto.
- **Produtores:** responsáveis por organizar os espaços que serão filmados – por exemplo, onde ocorrerão as entrevistas.
- **Técnicos de som e imagem:** responsáveis por gravar as entrevistas e outras cenas relacionadas ao tema.
- **Entrevistadores:** responsáveis por elaborar as perguntas e realizar as entrevistas. Para criar as perguntas, pensem em quem será entrevistado e como essa pessoa pode contribuir falando sobre suas experiências. É importante que o entrevistado esteja confortável no momento da gravação; por isso, entreguem as perguntas antes do dia da entrevista, expliquem que a conversa será gravada, combinem o dia, o horário e o local em que a entrevista ocorrerá.
- **Editores:** responsáveis por editar as cenas produzidas, utilizando, para isso, programas específicos de edição (de texto e de imagem).
- **Atores:** responsáveis por recriar cenas no documentário, se desejarem utilizar essa técnica.
- **Narradores:** responsáveis por narrar o texto que ligará as partes do documentário. O narrador tem o papel de deixar o texto coerente e inteligível a quem vê o vídeo. Lembre-se de que o narrador deve ser objetivo e transmitir as mensagens de maneira interessante e compreensível.
- **Divulgadores:** responsáveis por divulgar o evento de lançamento do videodocumentário. Para isso, podem criar cartazes informando dia, horário, tema do trabalho com imagens e informações que despertem a curiosidade das pessoas para assistir ao vídeo.

**6.** O grupo deve definir as técnicas que serão utilizadas no documentário – por exemplo, entrevistas, dramatização, ilustrações, filmagem de cenas.

**7.** Para organizar o trabalho de produção e divulgação do vídeo, definam, com o professor, um cronograma, determinando as datas para a entrega das entrevistas, das filmagens, do vídeo editado, do vídeo finalizado. Além disso, determinem a data, o horário e o local do evento para a divulgação dos vídeos.

### Etapa 3: Exibição do videodocumentário

**8.** Após a edição, a turma deverá assistir aos vídeos para analisar se o tema foi abordado da forma desejada e se há algo que precisa ser alterado, para a elaboração da versão final dos vídeos. Não se esqueçam de criar um título para o documentário.

**9.** Organizem o evento para a exibição do videodocumentário, conforme orientação do professor. Não se esqueçam de testar os aparelhos para verificar se estão funcionando corretamente.

### Etapa 4: Análise e síntese do trabalho realizado

**10.** Em sala de aula, conversem com o professor e os colegas sobre a atividade realizada: as etapas do processo, do que mais gostaram, o que poderia ter sido melhor e se acham que o videodocumentário mostrou de modo claro o ponto de vista da turma sobre educação para o trânsito.

**11.** Nesse momento, você fará uma autoavaliação. Para isso, escreva um relatório respondendo às questões a seguir e acrescente outras informações que julgar importantes sobre a sua autoavaliação. Em seguida, entregue o relatório ao professor.

- Ouvi com atenção as orientações do professor durante a atividade?
- Participei dos momentos de pesquisa, de conversa, de produção e exibição do videodocumentário?
- Como as pesquisas mostraram que a educação para o trânsito é uma ferramenta importante para conscientizar a população?
- Ajudei meu grupo apresentando sugestões e propondo mudanças durante a criação do videodocumentário?
- Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
- Houve dificuldades durante o trabalho? Quais? Como busquei resolvê-las?
- Compreendi como a ciência e a tecnologia podem contribuir para tornar o trânsito mais seguro?
- Entendi a importância da educação para o trânsito? Qual é essa importância?
- O que aprendi durante a criação do videodocumentário?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

## Livros

REPRODUÇÃO



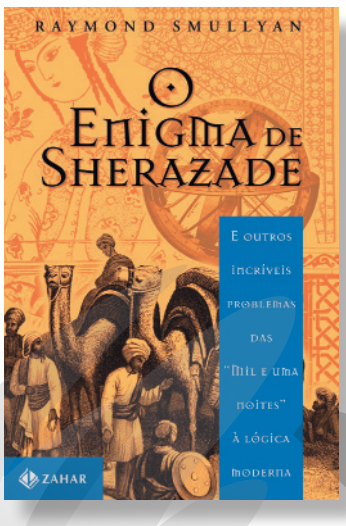

### O diabo dos números: um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de Matemática

**Hans Magnus Enzensberger**

**São Paulo: Cia. das Letras, 1997.**

A Matemática se resume a uma montanha de números? E os cálculos, para que servem? O autor, um dos maiores poetas da língua alemã, escreveu esse livro pensando em quem tem medo de Matemática e não gosta de estudá-la. Robert, personagem que conduz a história, também pensava que os números eram monstruosos, absurdos e inúteis. Mas, um dia, ele começou a sonhar com Teplotaxl, um senhor do tamanho de um gafanhoto com aparência de diabo, que brinca com os números e surpreende com seus conhecimentos matemáticos. As situações sonhadas pelo menino apresentam vários assuntos vistos na escola, como a relação de Euler e a sequência de Fibonacci, de maneira curiosa e divertida. A leitura amplia o universo de conhecimentos de todos os leitores.

REPRODUÇÃO




### O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna

**Raymond Smullyan**

**Rio de Janeiro: Zahar, 1998.**

Nessa obra, o autor coloca Sherazade, famosa personagem que narra os contos das *Mil e uma noites*, no centro de narrativas que relatam enigmas, quebra-cabeças e problemas de lógica que envolvem o leitor. O livro propõe charadas matemáticas, adivinhações, enigmas e exercícios de verdade e de mentira, cuja solução exige raciocínio lógico e estratégias que surpreendem o leitor desde a primeira página. Uma leitura original e cativante para todos os leitores.

REPRODUÇÃO




### O universo e a xícara de chá: a Matemática da verdade e da beleza

**K. C. Cole**

**Rio de Janeiro: Record, 2006.**

Nesse livro, a autora, jornalista especializada em Ciências, percorre uma vasta gama de áreas do conhecimento e de situações (científicas ou cotidianas) para mostrar como a ideia geral de que a Matemática é incompreensível à maioria dos mortais pode ser desmistificada quando nos propomos a examinar criticamente o significado dos números com que convivemos no dia a dia. Com uma linguagem objetiva e simples e uma abordagem perspicaz e bem-humorada, ela consegue esclarecer fatos numéricos aparentemente obscuros ou muito complexos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Apesar de a visita a uma exposição da Matemateca não ser acessível a todos os alunos, pois depende do local em que este livro estiver sendo usado, é interessante que eles conheçam a existência desse tipo de exposição e explorem seu *site* para conhecer o acervo de materiais que esse órgão possui. Pesquisar a existência de museus e de espaços de visitação relacionados à Matemática em sua cidade e, se possível, levar os alunos para conhecer um ambiente como esse.

## Exposição

### Matemateca



VALÉRIA GUIMARÃES/MATEMATECA/USP

Matemateca – IME-USP, 2020.

O Centro de Difusão e Ensino Matemateca, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), é um órgão cujo objetivo é prestar serviços referentes à divulgação da Matemática para o público em geral e, em particular, para estudantes de todos os níveis de ensino. A Matemateca realiza exposições dentro e fora da USP e possui um acervo com diversos objetos, jogos e experimentos matemáticos, entre eles, uma régua de cálculo (cujo princípio se baseia em uma propriedade dos logaritmos) e uma máquina de somar que usa potências de base 2.

Mais informações podem ser encontradas em: <http://matemateca.ime.usp.br/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

## *Softwares*

### Desmos

Desmos é uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line* e que permite aos usuários traçar, de forma simples e intuitiva, gráficos de diferentes tipos de função.

Disponível em: <https://www.desmos.com/calculator>. Acesso em: 31 jul. 2020.

### GeoGebra

O GeoGebra é um *software* que combina Geometria e Álgebra e possui uma versão que pode ser usada *on-line*. Entre suas diversas funcionalidades estão a realização de atividades de Geometria dinâmica e a construção e a manipulação de gráficos de funções diversas.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 31 jul. 2020.

### Mathway

A Mathway possui uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line*. Com esse recurso, os usuários podem traçar, de forma simples e rápida, gráficos de diferentes tipos de função.

Disponível em: <https://www.mathway.com/pt/Graph>. Acesso em: 31 jul. 2020.

## Vídeo

### Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista dois profissionais, das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da Matemática em seu trabalho.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3>. Acesso em: 31 jul. 2020.

## *Podcasts*

### Estudão

O Estudão é um *podcast* em seis episódios do jornal *O Estado de S. Paulo* que aborda temas relacionados à Matemática financeira e à economia. Os temas são explicados por professores de cursinhos, como uma aula em formato de *podcast*.

Disponível em: <https://infograficos.estadao.com.br/focas/por-minha-conta/materia/estudao-seu-podcast-de-revisao-para-se-dar-bem-no-enem>. Acesso em: 31 jul. 2020.

### Fronteiras da Ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a Ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que trata do $\pi$ (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

### Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas no formato de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

### Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a Matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

NÃO OFERTA

## CAPÍTULO 1

**1.** a) $a = 2$ e $b = 4$
b) Não é função afim.
c) $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$
d) $a = -13$ e $b = 0$

**2.** a) 7 c) $-3\sqrt{2} + 1$
b) $\frac{1}{3}$ d) $-6$

**3.** $\frac{5}{2}$

**4.** $p = \pm\sqrt{2}$; $q = 3$

**5.** a) R$ 34,50; R$ 50,50
b) 330 minutos
c) $f(x) = \begin{cases} 34{,}50, \text{ se } 0 < x \leq 100 \\ 34{,}50 + 0{,}08(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$
d) R$ 103,50

**6.** a) 3 b) 3 c) 3 d) 3

**7.** a) $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -x + 2$
d) uma reta

**9.** $f(x) = x + 3$; $g(x) = -x + 1$; $P(-1, 2)$

**10.** $A(-2, 0)$; $B\left(\frac{14}{5}, -\frac{6}{5}\right)$; $C(0, 3)$

**11.** a) Não; a torneira A tem a maior vazão.
b) A: 40 e B: 20
c) A: 360 e B: 420
d) As quantidades de litros que há em cada caixa antes da abertura das torneiras.
e) $A(x) = 360 + 40x$ e $B(x) = 420 + 20x$
f) A: 16 minutos; B: 29 minutos
g) $D(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 16\}$
$D(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 29\}$
h) $\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid 360 \leq y \leq 1.000\}$
$\text{Im}(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid 420 \leq y \leq 1.000\}$

**12.** a) $\frac{27}{50} = 0{,}54$
b) Significa a constante de velocidade com que o $NO_2$ se decompõe.
c) $[NO_2] = 0{,}01$ mol/ℓ
d) $y = 0{,}54x + 100$

**13.** alternativa e

**15.** a) decrescente
b) crescente
c) crescente
d) decrescente

**16.** a) $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{4}$;
$f(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{4}$;
$f(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{4}$
b) $g(x) = 0$ para $x = 2$;
$g(x) > 0$ para $x < 2$;
$g(x) < 0$ para $x > 2$

**17.** A função é crescente para $m > \frac{1}{2}$ e decrescente para $m < \frac{1}{2}$.

**18.** a) $g$: 1; $h$: $\frac{1}{3}$
b) $g$: $-1$; $h$: 1
c) (3, 2)
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

**19.** a) R$ 1.160,00; R$ 1.040,00
b) $s_A(x) = 900 + 0{,}02x$; $s_B(x) = 0{,}08x$
c) loja A: R$ 35.000,00;
loja B: R$ 20.000,00
d) a partir de valores acima de R$ 15.000,00

**20.** $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1 \text{ ou } y = 2\}$

**21.** $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$

**22.** a) 80 km/h
b) $s(t) = 10 + 80t$
c) $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $\text{Im}(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 10\}$
d) 330 quilômetros
e) 3 horas

**23.** a) $s(t) = \begin{cases} 5t, \text{ se } 0 \leq t < 10 \\ 50, \text{ se } 10 \leq t < 20 \\ 100 - 2{,}5t, \text{ se } 20 \leq t \leq 40 \end{cases}$
b) 25 m; 12,5 m
c) • Uma velocidade constante de 5 m/s.
• Nesse intervalo a taxa de variação é zero, isso significa que o corpo permanece em repouso.
• A taxa de variação é negativa, $-2, 5$. Nesse caso significa que o movimento é retrógrado, isto é, o corpo está se deslocando no sentido contrário da trajetória.

**24.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\right\}$

**26.** a) $x = -5$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$

**27.** a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 2\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -\frac{3}{4}\right\}$

**28.** alternativa b

**29.** alternativa a

**30.** a) $-1$; $-\frac{1}{3}$
b) $f$ é crescente e $g$ é decrescente.
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$
d) Resposta possível: $\frac{x + 1}{-3x - 1} \leq 0$

**31.** a) $S = \varnothing$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leq x \leq 0\right\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

**32.** a) $140 + 50x$
b) $220 + 40x$
c) 8 consultas
d) Plano Laranja
e) Plano Azul

**33.** a) $V_s(x) = 2x - 10.000$
b) $V_f(x) = 3x - 12.000$
c) 2.000 quilogramas
d) $S = \varnothing$
e) cultura de feijão
f) 2.001 quilogramas

**34.** a) $D(j) = \mathbb{R}$
b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\}$
c) $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
d) $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$
e) $D(i) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

### Exercícios complementares

**1.** a) $a = 1$ e $b = 7$
b) Não é função afim.
c) Não é função afim.
d) $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{3}{4}$

**2.** $-\frac{2}{3}$

**3.** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

**4.** alternativa e

**5.** a) reta oblíqua aos eixos $x$ e $y$
b) decrescente
c) $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$; (0, 3)
d) $x = \frac{3}{5}$
e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
f) $P(1, -2)$

**6.** $y = 3x + \frac{13}{3}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**7.** a) $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(6, 3)$
c) $f$ é decrescente, $g$ é crescente e $h$ é constante.

**8.** a) $y = 50 \cdot x$
b) 100 pagantes
c) 400 frequentadores
d) R$ 4.000,00

**9.** $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 < y \leq 7\}$

**11.** $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$; sim; $P(6, 12)$

**12.** a) $v(m) = \frac{5}{4}m$
b) 24 g

**13.** $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 12\}$

**14.** a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < \frac{3}{2}\right\}$

**15.** alternativa d

**16.** alternativa c

**17.** $f$ é positiva para $x > 0$, se $p > -\frac{3}{2}$ e
$f$ é positiva para $x < 0$, se $p < -\frac{3}{2}$

**18.** $P\left(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$

**19.** alternativa c

## Autoavaliação

**1.** alternativa b
**2.** alternativa b
**3.** alternativa a
**4.** alternativa c
**5.** alternativa d
**6.** alternativa a
**7.** alternativa b
**8.** alternativa c
**9.** alternativa d
**10.** alternativa a

## CAPÍTULO 2

**1.** a) $a = 1, b = -1$ e $c = 0$
b) $a = 1, b = 0$ e $c = \sqrt{7}$
c) Não é lei de uma função quadrática.
d) Não é lei de uma função quadrática.

**2.** a) 0
b) $4 + 5\sqrt{2}$
c) $\frac{34}{25}$
d) $x = -1$ ou $x = 6$
e) $\frac{5}{2}$
f) Não existe $x$ real que satisfaça $f(x) = 20$.

**3.** $\frac{64}{5}$

**4.** a) $p \neq \frac{3}{2}$
b) $p \neq -\frac{5}{3}$ e $p \neq -7$

**5.** a) 2; 6; 12; 90
c) Sendo $n$ o número de pessoas, o número de *e-mails* é $n(n - 1)$.
d) 12 integrantes

**6.** a) $A(x) = 4x^2 + 64x$
b) $A = 228\text{m}^2$

**8.** a) concavidade voltada para cima
b) concavidade voltada para baixo

**9.** a) • se $k > 0$, a concavidade é voltada para cima;
• se $k < 0$, a concavidade é voltada para baixo.
b) • se $k < -1$ ou $k > 5$, a concavidade é voltada para cima;
• se $-1 < k < 5$, a concavidade é voltada para baixo.

**10.** a) respostas pessoais
c) O vértice seria o ponto $(0, 0)$ e a concavidade seria voltada para baixo.
d) $g(x) = -x^2$

**12.** a) $(0, -1)$
b) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
c) $(0, 0)$

**13.** a) $-2$ e $-1$
b) Não existem zeros reais.
c) $\frac{1}{3}$

**14.** a) $k > \frac{1}{100}$
b) $k > \frac{25}{8}$

**15.** a) $a = 1$ e $b = -4$
b) $a = 1$ e $b = 4$

**16.** a) $f(x) = x^2 + 8x + 15$
b) $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 6$

**17.** 2

**18.** $m = 3$; $\left(\sqrt{6}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$

**19.** II. $x = 0$
III. $f(0) = c$

**20.** a) Para qualquer valor real de x.
b) Não há valor real de x.
c) $-3 < x < 3$
d) $-2 < x < -1$
e) Para qualquer valor real de x.

**21.** a) $g(x) > 0$ para qualquer valor de $x$ real
b) $\begin{cases} h(x) > 0 \text{ para nenhum valor de } x \\ h(x) = 0 \text{ para } x = 1 \\ h(x) < 0 \text{ para } x \neq 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} i(x) > 0 \text{ para } -3 < x < 3 \\ i(x) = 0 \text{ para } x = -3 \text{ ou } x = 3 \\ i(x) < 0 \text{ para } x < -3 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

**22.** a) $0 < x < 2$
b) $x \neq 1$

**25.** a) $(-1, 9)$
b) $(1, -9)$
c) $(-1, -4)$
d) $(2, 0)$

**27.** a) 0 e 8
b) $h(x) = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x$

**28.** $m = \frac{3}{2}$ e $n = 3$

**29.** a) $x_v = 0$

**30.** a) valor mínimo: $-\frac{81}{8}$
b) valor máximo: $\frac{5\sqrt{5} + 4}{4}$
c) valor mínimo: $\frac{7}{18}$

**31.** a) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{21}{4}\right\}$
b) $\text{Im}(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{65}{8}\right\}$
c) $\text{Im}(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 8\}$

**32.** a) valor máximo
b) para baixo
c) $-4$
d) $(1, 16)$

**33.** Não existe $m$ real tal que $\frac{4}{3}$ seja valor mínimo de $f$.

**34.** 12 unidades de área

**35.** a) $h(t) = -5t^2 + 10t$
b) 0 m
d) O tempo de subida é igual ao de descida.

**36.** a) R$ 21,00
b) R$ 14,00
c) A afirmação é falsa.
d) 500 toneladas
e) R$ 5,00

**37.** alternativa c

**38.** 20 m²

**39.** alternativa c

**40.** R$ 6,00

**41.** resposta pessoal

**43.** a) $60.000 - 400x$
b) $75 + x$
c) $y = 4.500.000 + 30.000x - 400x^2$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) R$ 37,50
e) R$ 5.062.500,00
f) 45.000

**44.** subida: 0 s a 2,5 s
descida: 2,5 s a 5,37 s (aproximadamente)

**45.** O móvel *A* fica na frente do móvel *B* no intervalo $]0, 10[$.

**46.** alternativa d

**47.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
b) $S = \varnothing$
c) $S = \{1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$
e) $S = \mathbb{R}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

**49.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1$ ou $\frac{7}{3} \leq x \leq 4\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -7 \text{ ou } 0 \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{5}{3}$ ou $-\frac{1}{2} < x < 4\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4 \text{ ou } 6 < x < 8\}$
f) $S = \varnothing$

**50.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2$ ou $-1 \leq x \leq 1$ ou $x > 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

**51.** 2

**52.** a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$
b) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right)$ e $(2, 0)$
c) $x \geq -1$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

**53.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$
c) $S = \varnothing$
d) $S = \{0,5\}$

**54.** a) $A(x) = 16\pi x - \pi x^2$
b) $2 < x < 8$

**55.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1$ ou $2 < x < 4\}$
d) $S = \varnothing$

**56.** a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 4\}$
b) $D = \{7\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ e } x > 1\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6$ ou $-2 \leq x < 0$ ou $x \geq 4\}$

**57.** $x = 0$

**58.** a) $\mathbb{R} - \{0, 2, 5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \text{ e } x \neq 3\}$
c) $\mathbb{R} - \{0\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

**59.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } -3 \leq x \leq 2\}$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x < 4\}$
b) $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

## Exercícios complementares

**1.** a) Não é função quadrática.
b) É função quadrática.
c) É função quadrática; $y = x^2 + x - 6$.
d) Não é função quadrática.
e) É função quadrática.
f) É função quadrática; $y = x^2 - 3x$.

**2.** 8 times

**3.** $d = \frac{n(n-1)}{2} - n$ ou $d = \frac{n(n-3)}{2}$

**4.** a) R$ 475,00
b) 40 dias depois

**5.** a) A parábola não intercepta o eixo *x*, pois $\Delta = -11 < 0$.
b) A parábola intercepta o eixo *x* em dois pontos, pois $\Delta = 49 > 0$.
c) A parábola intercepta o eixo *x* em dois pontos, pois $\Delta = 5 > 0$.
d) A parábola intercepta o eixo *x* em um único ponto, pois $\Delta = 0$.

**6.** a) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$
b) $(0, 5)$

**7.** a) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{2}\right\}$
b) $\text{Im}(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 5\}$

**8.** $m = 1$ e $n = -\frac{7}{3}$; $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{4}\right)$

**9.** $y = 2x^2 + 6x + 4$

**10.** $k = -3$; $y_v = 14$

**11.** $t = 2$; $y_v = -4$

**12.** 144 cm²

**15.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ ou } x = 2\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{4} \text{ e } x \neq -1$ ou $x > 1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $x > -1$ e $x \neq 1\}$

## Autoavaliação

**1.** alternativa c
**2.** alternativa b
**3.** alternativa c
**4.** alternativa d
**5.** alternativa c
**6.** alternativa b
**7.** alternativa d
**8.** alternativa a
**9.** alternativa a
**10.** alternativa b

## CAPÍTULO 3

**1.** a) 16
b) $-\frac{1}{125}$
c) 0
d) $\frac{81}{64}$
e) 1
f) $\pi$

**2.** a) 100.000
b) 169
c) $-125$
d) $\frac{1}{8}$
e) 4.900
f) $-\frac{27}{125}$
g) 64
h) 1

**3.** alternativa b

**4.** a) 1,3
b) $-1,2$
c) 9
d) $2\sqrt[3]{2}$

**5.** a) 11
b) 0,027
c) $\sqrt[3]{3}$
d) 2

**6.** a) $3\sqrt{2}$
b) $10\sqrt{5}$

**7.** a) $\frac{-\sqrt{3} - 3}{3}$
b) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

**8.** entre 5 e 25

**10.** a) III
b) I
c) IV
d) II

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**11.** $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$

**12.** a) crescente
b) decrescente
c) crescente

**13.** $a = -1$ e $b = 1$

**14.** a) 5
b) 5
c) 5
d) 5

**15.** a) Diminuindo, pois:
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
b) Não, porque a curva não corta o eixo x.
c) $\{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$

**16.** R$ 28.098,56

**17.** a) 180 °C
b) $\simeq$ 28 °C

**18.** a) 5.000 bactérias
b) 15.000 bactérias
c) $a = \sqrt[6]{3}$ e $k = 5.000$
d) $D(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 6\}$;
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 5.000 \leqslant y \leqslant 15.000\}$
e) $\simeq$ 8.650 bactérias

**19.** a) $S = \{3\}$
b) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
c) $S = \{-1\}$
d) $S = \{1\}$

**20.** a) $S = \{6\}$
b) $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$
c) $S = \{14\}$
d) $S = \{-4, 4\}$
e) $S = \{-1, 0\}$
f) $S = \{0\}$

**21.** a) $3 < x < 4$
b) $3 < x < 4$
c) $1 < x < 2$
d) $7 < x < 8$

**22.** alternativa e

**23.** a) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$
b) $S = \left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\}$

**24.** a) $k = 2.048$
b) 4 minutos

**25.** a) $a = 1.024$ e $b = \frac{1}{10}$
b) 30 anos

**26.** alternativa b

**27.** $\left(\frac{1}{3}, 3\sqrt[3]{3}\right)$

**28.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -12\}$

**29.** a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$
b) $D(g) = \mathbb{R}$

**30.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

**31.** a) $S = \{3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

**32.** a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$; $g(x) = 3^x$
b) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 3^x$
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geqslant 3^x$

## Exercícios complementares

**1.** a) $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$
b) $D(g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g) = \mathbb{R}_+^*$

**2.** $\frac{1}{2}$

**3.** $-3$

**4.** a) R$ 66.550,00
b) R$ 88.578,05
c) $\simeq$ R$ 156.921,42

**5.** R$ 13.122,00

**6.** $\simeq 5{,}9\ m^3$

**7.** $\simeq$ 240.000 indivíduos

**8.** $\frac{1}{3}$

**9.** 60 dias

**10.** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

**11.** 5

**12.** a) 5 anos
b) $\simeq$ 21,28

**13.** alternativa e

**14.** $0 < m < 2$ e $m \neq 1$

**15.** $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$

**16.** 2

**17.** resposta pessoal

## Autoavaliação

**1.** alternativa a
**2.** alternativa c
**3.** alternativa c
**4.** alternativa c
**5.** alternativa d
**6.** alternativa d
**7.** alternativa b
**8.** alternativa b
**9.** alternativa b
**10.** alternativa a

## CAPÍTULO 4

**1.** a) 3
b) 0
c) 4
d) $-4$
e) 3
f) $-2$

**2.** a) entre 2 e 3
b) entre 0 e 1

**3.** a) 2
b) $-1$
c) $-2$
d) $\frac{7}{2}$
e) 4
f) 2

**4.** 6

**5.** a) 502,5
b) 9,01
c) 4
d) 10

**6.** a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{3}\right\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

**7.** a) 1
b) 0
c) 7
d) 2
e) 16
f) 2

**8.** a) 7
b) $\frac{2}{3}$
c) 2
d) 3 ou $-3$
e) $-2$
f) $\frac{1}{3}$

**9.** a) 1
b) 1
c) 1
d) $-4$
e) 0
f) 4

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**10.** ácida

**11.** $10^{-9}$

**12.** resposta pessoal

**13.** a) $6 + \log_2 13$
b) $2 + \log_{\sqrt{2}} 3$
c) $\log_3 13 + 1$
d) 18
e) $-19$
f) $\log_{\frac{1}{2}} 13 + 4$

**14.** a) 1
b) 2

**15.** a) $\log_a b + \log_a c + \log_a d$
b) $\log_a 2 + \log_a k - \log_a d$
c) $-n$
d) $-\log_a y$

**16.** a) $\simeq -0{,}116$
b) $\simeq 0{,}721$

**17.** a) 1,176
b) 1,653
c) 0,222
d) $-0{,}222$
e) 4,322
f) 4,644

**18.** $\simeq 4{,}42$

**19.** $\simeq 7{,}197$

**20.** a) $\simeq 1{,}5051$
b) $\simeq 2{,}0587$

**21.** a) 0,78
b) 1,48
c) 0,625
d) 0,7
e) 2,16
f) 0,4933...

**22.** a) $\frac{1}{\log 3}$
b) $\frac{1}{\log_5 2}$
c) $\frac{1}{\log_3 10}$
d) $\frac{2}{\log_{11} 7}$

**23.** a) $\frac{1}{\log_b a}$
b) O logaritmo de $b$ na base $a$ é igual ao inverso do logaritmo de $a$ na base $b$.
c) O resultado será 1.

**24.** 6

**25.** $A = 1$ e $B = 2$

**26.** 1

**27.** a) 1
b) 0
c) 4
d) 5

**28.** $\frac{1}{n} \cdot \log_a b$

**29.** a) $\simeq$ R$ 1,558,91
b) 46 meses

**30.** a) R$ 1.800,00 e R$ 2.160,00, respectivamente
b) $d = 1.500 \cdot (1{,}2)^n$
c) 1 ano
d) $n = \log_{1,2}\left(\frac{d}{1.500}\right)$

**31.** resposta pessoal

**32.** a) 3
b) 0
c) $-1$
d) $\frac{1}{2}$

**33.** a) 31
b) $\sqrt{3} + 4$

**34.** a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2}\right\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq -1\}$
c) $D(g) = \mathbb{R}$

**35.** alternativa b

**36.** a) crescente
b) decrescente

**37.** a) decrescente
b) crescente

**38.** a) $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$
b) $\left\{k \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right\}$

**39.** a) $f(x) = \log_3 x$
b) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

**41.** alternativa a

**44.** a) $S = \{8\}$
b) $S = \{15\}$
c) $S = \{0, 2\}$
d) $S = \{1\}$
e) $S = \{4\}$
f) $S = \left\{\frac{1}{10}, \sqrt{10}\right\}$

**45.** $S = \{(8, 2)\}$

**46.** 25 horas

**47.** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -8\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 64\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 1{,}075\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 11\}$

## Exercícios complementares

**1.** a) 5
b) $\frac{3}{8}$

**2.** alternativa b

**3.** alternativa e

**4.** alternativa b

**5.** alternativa d

**6.** alternativa e

**7.** 20 decibéis

**8.** alternativa d

**9.** a) $A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
b) $\simeq 70$

**10.** aproximadamente 35 anos

**11.** alternativa d

**12.** alternativa a

**13.** alternativa d

**14.** alternativa e

**15.** a) $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{1}{2}\right)$
b) Resposta possível: $-\log x \geqslant \log x + 1$

**16.** $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$

**17.** $S = \{1\}$

**18.** $-3$

## Autoavaliação

**1.** alternativa a

**2.** alternativa c

**3.** alternativa c

**4.** alternativa b

**5.** alternativa b

**6.** alternativa a

**7.** alternativa d

**8.** alternativa c

**9.** alternativa b

**10.** alternativa d

**11.** alternativa d

## CAPÍTULO 5

**1.** a) $-4$, 0, 4, 8 e 12
b) $-3$, $-3$, $-3$, $-3$ e $-3$
c) $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{9}{2}$, 8 e $\frac{25}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

**2.** a) 4, 40, 600 e 12.000
b) $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{243}{2}$ e $-\frac{19.683}{2}$
c) $-2, \frac{1}{4}$, 16 e $\frac{1}{256}$

**3.** Respostas possíveis:
a) $a_n = 2(n-1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$ ou $a_n = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$
b) $a_n = 17$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = a_{n-1} + 7, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
d) $\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{8}, \text{ com } n \geqslant 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$
e) $a_n = 5 \cdot (-1)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**4.** $(-4, 12, -36, 108, \ldots)$ ou $(3, 12, 48, 192, \ldots)$

**5.** a) 2, 6, 12, 20. Para cada $n$, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.
b) $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) 91 pontos
d) não; sim

**6.** a) 4; 4; 4; 4; 4; 4
b) 4
c) 23

**7.** b) $a_8 = 21$; $a_9 = 34$; $a_{10} = 55$
c) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{cases}$
d) resposta pessoal

**8.** alternativas a, d

**9.** a) 12, 19, 26, 33 e 40
b) 12, 5, −2, −9 e −16
c) $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ e 0
d) 12; 11,75; 11,5; 11,25 e 11

**10.** a) decrescente; $r = -3$; $a_n = 1 - 3n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) constante; $r = 0$; $a_n = \sqrt{3}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) crescente; $r = 10$; $a_n = -20 + 10n$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) crescente; $r = \frac{1}{1.000}$; $a_n = \frac{n}{1.000}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**11.** 45 bolinhas

**12.** 22

**13.** a) −0,80
b) R$ 70,00
c) R$ 44,80

**14.** 10,4 km

**15.** a) −103
b) 10

**16.** resposta pessoal

**17.** $a_1 = \frac{85}{4}$; $r = -\frac{15}{4}$

**18.** $p = 1$ ou $p = 4$

**19.** 66 unidades de comprimento

**20.** (−12, 0, 12, 24, 36, 48)

**21.** 725

**22.** 482

**23.** 28

**24.** a) R$ 330,00; R$ 360,00
b) R$ 990,00; R$ 990,00
c) R$ 9.440,00

**25.** (−15, −4, 7) ou (7, −4, −15)

**27.** alternativa d

**28.** $\left(-2, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 3, \frac{14}{3}\right)$

**29.** a) 6.912
b) 568
c) 168
d) 57

**30.** R$ 137.880,00

**31.** a) R$ 84,00
b) R$ 1.152,00
c) R$ 96,00

**32.** 8 termos

**33.** $\frac{8}{3}$

**34.** 30.870

**35.** $S = \{60\}$

**36.** 16

**37.** alternativa e

**38.** $r = \frac{50}{3}$ e $S = -\frac{70}{3}$ ou $r = \frac{2}{3}$ e $S = -\frac{190}{3}$

**39.** a) PG
b) PA
c) PG
d) PA

**40.** a) crescente
b) oscilante
c) decrescente
d) constante

**41.** a) $q = \frac{4}{5}$; $a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
b) $q = \sqrt{3}$; $a_n = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
c) $q = \frac{2}{\pi}$; $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
d) $q = -2$; $a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$
• Para representar graficamente, para cada valor $n$, marcamos o valor $a_n$ correspondente, obtendo os pontos $(n, a_n)$ no plano cartesiano.

**42.** a) 4, 24, 144, 864 e 5.184
b) $x^2, \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^4}, \frac{y^3}{x^7}, \frac{y^4}{x^{10}}$ e $\frac{y^5}{x^{13}}$

**43.** resposta pessoal

**44.** 512 bactérias

**45.** $\frac{729}{125}$

**46.** $\frac{1}{7}$

**47.** 6 termos

**48.** a) 26.400 m
b) 825 m

**49.** 4

**50.** $\frac{6}{5}$

**51.** (6, 12, 24, 48, 96, 192)

**52.** 15, 30 e 60

**53.** $\sqrt{2}$; 2; 8

**54.** a) $C_2 = C_0(1 + i)^2$; $C_3 = C_0(1 + i)^3$
b) $q = (1 + i)$
c) $C_n = C_0(1 + i)^n$, com $n \in \mathbb{N}$

**56.** a) $f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$
b) $\frac{1}{4^9}$
c) não

**57.** alternativa e

**58.** 8

**59.** 2

**60.** aproximadamente 3.949.147 passageiros

**61.** aproximadamente 725.042 unidades

**62.** 9.840 pessoas

**63.** a) 1,875 ou $\frac{15}{8}$
b) $\simeq 1{,}998$; $\simeq 1{,}999$
c) Sim, aproxima-se do número 2.

**64.** a) 45
b) $-2\pi$

**65.** a) $\frac{4}{3}$
b) 9

**66.** Não, pois o atleta teria que prolongar indefinidamente o seu treinamento.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

**67.** 300 m

**68.** $2a^2$

**69.** $x = \frac{39}{4}$ e $y = \frac{49}{16}$

**70.** $a = 10$, $b = \frac{7}{2}$, $c = 4$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$

**71.** alternativa e

**72.** 20, 30, 40

**73.** 8

**74.** a) $a_1 = 0$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $d_1 = 3$; $d_2 = 9$; $d_3 = 27$
b) $S_{10} = 180$
c) $S_5 = 363$

## Exercícios complementares

**1.** $a_n = \frac{3n}{3 + n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

**2.** alternativa d

**3.** três vezes

**4.** sim

**5.** 10

**6.** $2\sqrt{2}$

**7.** $S = \{6\}$

**8.** 9 ou 42

**9.** $-3$

**10.** 6

**11.** alternativa e

**12.** 1,5x m

**13.** 1, 3 ou 9

**14.** alternativa c

## Autoavaliação

**1.** alternativa b
**2.** alternativa c
**3.** alternativa d
**4.** alternativa a
**5.** alternativa c
**6.** alternativa b
**7.** alternativa b
**8.** alternativa c
**9.** alternativa d
**10.** alternativa a
**11.** alternativa b

# CAPÍTULO 6

**1.** 40%

**2.** alternativa d

**3.** 30%

**4.** 5%

**5.** 45%

**6.** 20%

**7.** a) $\simeq$ 15,8%
b) 20%

**8.** diminuição; de 1%

**9.** 50 homens

**10.** R$ 21.200,00

**11.** 12%

**12.** R$ 45,00

**13.** R$ 35,00; R$ 33,60

**14.** 150%

**15.** alternativa c

**16.** a) R$ 3.440,00
b) $M = 2.000 + 480n$

**17.** 3 anos e 4 meses

**18.** 4% a.m.

**19.** a) R$ 25.000,00
b) 23,5%

**20.** a) 6,25%
b) 5 meses

**21.** R$ 10.000,00

**22.** alternativa e

**23.** 5 meses

**24.** 41%

**25.** 100%; 220%

**26.** $\simeq$ 29%

**27.** não; 86,4%

**28.** resposta pessoal

**29.** R$ 144.000,00

**30.** 50%

**31.** 5%

**32.** R$ 200.000,00

**33.** $\simeq$ R$ 292,68

**34.** 15 meses

**35.** R$ 270.315,95

**36.** b) sim; cinco anos
c) R$ 156.833,66
d) a do regime de juro composto

**37.** resposta pessoal

## Exercícios complementares

**1.** alternativa d

**2.** 96%

**3.** a) não
b) R$ 405,60; 56%

**4.** 9 mulheres

**5.** alternativa d

**6.** alternativa d

**7.** 20%

**8.** 50%

**9.** R$ 20.000,00; R$ 4.000,00

**10.** alternativa e

**11.** 8

**12.** $\simeq$ R$ 3.452,94; $\simeq$ R$ 8.115,77

**13.** alternativa a

**14.** alternativa e

**15.** $\simeq$ R$ 871,44

**16.** alternativa d

**17.** a) R$ 2.400,00
b) após o 1º mês

**18.** $\simeq$ 3,34%; $\simeq$ 0,64%

**19.** alternativa c

**20.** alternativa d

**21.** 25%

**22.** alternativa c

## Autoavaliação

**1.** alternativa c

**2.** alternativa a

**3.** alternativa c

**4.** alternativa b

**5.** alternativa d

**6.** alternativa b

**7.** alternativa c

**8.** alternativa a

**9.** alternativa d

**10.** alternativa a

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

# Referências bibliográficas


BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

Livro conceituado, referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e um caderno complementar). Os livros apresentam diversos conceitos da educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os estudantes transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/>. Acesso em: 31 jul. 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Esses materiais foram elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livro conceituado, referência em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro apresenta tópicos como teoria dos conjuntos e funções (afins, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e trigonométricas).

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro contempla o estudo de progressões aritméticas e geométricas, Matemática financeira, análise combinatória, probabilidade, Geometria espacial, pontos, retas e planos, medição de distâncias e de ângulos, poliedros, volumes e áreas, entre outros.

LIMA, Elon Lages *et al*. *Temas e problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, nesse livro as teorias são apresentadas de forma simples e acompanhadas de problemas contextuais que permitem mostrar as variadas aplicações de temas como funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, aplicações de Trigonometria, cálculo de volumes, combinatória e Matemática financeira.

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

Destinado a pessoas que se interessam em ter alguma informação sucinta, embora geral, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.


EDITORIA

MODERNA

ISBN 978-65-5779-034-2




MODERNA