ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202135

CONEXÕES
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Estatística e probabilidade

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Estatística e probabilidade

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Érico da Silva Candido, Fernando Barriento, Gisele Lemos, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Paula Felippe, Frederico Hartje, Inaya Oliveira, Juliana A. Nasser, Leila dos Santos, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Sandra G. Cortés, Simone S. Garcia

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Guia para o professor

PARTE GERAL

Pressupostos teórico-metodológicos IV
- A Base Nacional Comum Curricular IV
- As mudanças no Ensino Médio VIII
- As metodologias ativas IX
- A importância da Matemática XI
- A língua materna e a Matemática XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade XIV
- A gestão da sala de aula XV
- Um olhar inclusivo XV
- Avaliação XV

Organização e estrutura da obra XVII
- Organização dos volumes XVII
- Sugestão de cronograma XVIII

Sugestões de consulta para o professor XIX
- Livros e artigos XIX

Referências bibliográficas XXI

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume XXIV

Sugestões de ampliação XXVII

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados ... XXVII

Capítulo 2 Análise de dados XXVIII

Capítulo 3 Medidas estatísticas XXVIII

Capítulo 4 Análise combinatória XXIX

Capítulo 5 Probabilidade XXIX

Sugestões de avaliação XXX

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados XXX

Capítulo 2 Análise de dados XXXIII

Capítulo 3 Medidas estatísticas XXXVI

Capítulo 4 Análise combinatória XXXIX

Capítulo 5 Probabilidade XLI

Resoluções e comentários XLIV

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados XLIV

Capítulo 2 Análise de dados LI

Capítulo 3 Medidas estatísticas LIX

Capítulo 4 Análise combinatória LXIX

Capítulo 5 Probabilidade LXXV

Educação financeira Metas e projetos LXXXVI

Pesquisa e ação Pesquisa estatística LXXXVII

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

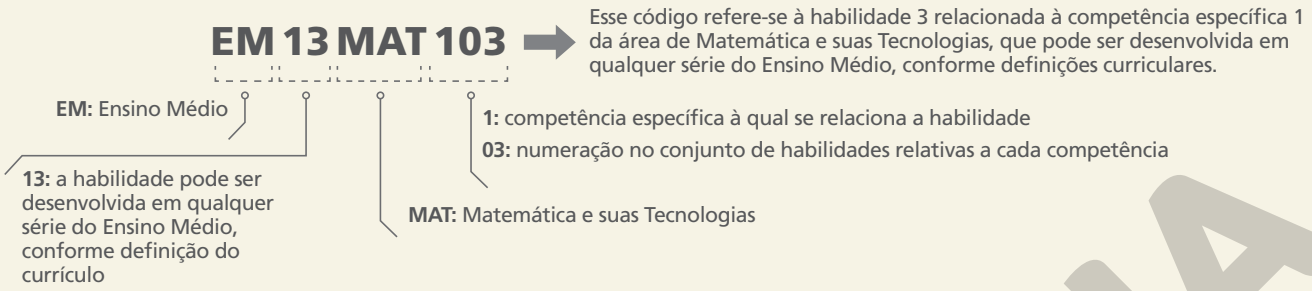
MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

EM OBRA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

EM MODERNA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

REPRODUÇÃO

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

EM OFERTA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o Scratch trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que "cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora" e destaca quinze temas.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu esses temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

CÓPIA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre *pensamento computacional*.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

EM MODELO

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria Espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria Analítica
		Transformações geométricas

MODERNA

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.
  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.
- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.
  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.
- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.
  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).
  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.
  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.
- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.
  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.
- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).
  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.
  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.
- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).
  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?
- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.
  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.
- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.
  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).
  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.
- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.
  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4 ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.
  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.
- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo.* São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM.* Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. *Os princípios das metodologias ativas de ensino*: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 Para entender a realidade atual e participar do futuro da sociedade na qual se insere, é essencial ao estudante ter como base os conhecimentos historicamente construídos pela humanidade. O infográfico das páginas 104 e 105 valoriza os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e digital, assim como a seção *Compreensão de texto* das páginas 146 e 147, contribuindo para o desenvolvimento dessa competência.
Competência geral 2 A mobilização dessa competência pode ser observada na aplicação da abordagem própria das ciências para a interpretação, análise e reflexão sobre os infográficos das páginas 104 e 105, 124 e 125, e 146 e 147; e no uso da investigação e reflexão para elaborar hipóteses na resolução do boxe *Pensamento computacional* da página 107.
Competência geral 3 Essa competência é favorecida com a valorização de manifestações artísticas e culturais, como é o caso do exercício 13 da página 110, em que é apresentado um livro de sonetos do escritor francês Raymond Queneau e a sugestão para que o professor peça aos estudantes que produzam materiais artístico-culturais.
Competência geral 4 Essa competência é favorecida em diferentes momentos do volume em que os estudantes realizam campanhas, apresentam trabalhos e partilham informações, como no caso do *Reflita* da página 15, em que os estudantes devem fazer uma companha para conscientizar a comunidade sobre a dengue; da atividade 7 da seção *Compreensão de texto* da página 39, em que devem apresentar dados pesquisados sobre direitos das crianças e dos adolescentes; do *Explore* da página 45, em que os estudantes devem apresentar dados de uma pesquisa sobre poluição sonora; e da seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), em que poderão usar a linguagem oral ou escrita para fazer a pesquisa e usar linguagem digital para organizar e divulgar os dados. A competência também é favorecida na seção *Educação financeira* (páginas 148 a 150), em que os estudantes usarão da linguagem matemática e digital para a elaboração de orçamentos.
Competência geral 5 Essa competência é favorecida em momentos em que os estudantes compreendem, usam e criam tecnologias para disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas ou exercer o protagonismo na vida pessoal. Isso acontece na atividade 7 da seção *Compreensão de texto* da página 39, em que devem pesquisar sobre direitos das crianças e dos adolescentes e, para apresentar a pesquisa, poderão utilizar tecnologias digitais; nas páginas 42 a 50, em que os estudantes constroem tabelas e gráficos usando tecnologias digitais para resolver problemas; na seção *Educação financeira* (páginas 148 a 150), em que os estudantes podem compreender e criar uma planilha eletrônica para fazer planejamentos financeiros e tomar decisões, não só em uma situação fictícia, mas para exercer o protagonismo na sua vida; e na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), em que os estudantes podem usar tecnologias digitais para organizar e divulgar dados de uma pesquisa estatística realizada por eles.
Competência geral 6 Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira* (páginas 148 a 150), em que os estudantes devem apropriar-se de conhecimentos e experiências para refletir sobre seus projetos pessoais e realizar escolhas alinhadas ao seu projeto de vida, com autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
Competência geral 7 Essa competência é favorecida em diversos momentos do volume em que se propõem discussões promovendo os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável. No *Reflita* da página 46, os estudantes devem calcular a quantidade de água necessária para abastecer a sua residência e as pessoas do seu município, e é proposto que o professor converse com eles sobre o consumo consciente de água, promovendo a consciência socioambiental; na situação do item c das páginas 52 e 53, sobre violência contra a mulher, há a possibilidade de defesa de ideias e pontos de vista que respeitem e promovam os direitos humanos; no exercício 12 da página 82, sugere-se que o professor proponha aos estudantes pesquisar sobre o tempo de banho entre os colegas e pessoas que moram com eles para investigar se há desperdício; e na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), os estudantes podem tomar decisões que promovam o cuidado de si e dos outros a partir de informações coletadas na pesquisa estatística realizada. Todas essas ocorrências contribuem para o desenvolvimento da competência.
Competência geral 8 Essa competência é favorecida em alguns momentos em que os estudantes refletem sobre sua saúde física e emocional, aprendendo a lidar com suas emoções e as dos outros, como é o caso do *Reflita* da página 15, em que os estudantes devem pesquisar os sintomas da dengue; do exercício 2 da página 35, em que devem refletir e conversar com um colega sobre o que podem fazer para evitar situações que os incomodam na internet; do exercício 3 da página 35, em que os estudantes devem pesquisar os impactos negativos do uso de aparelhos eletrônicos antes de dormir, talvez até levando-os a mudar de hábitos; e da seção *Pesquisa e* (páginas 151 a 153), que envolve o tema saúde dos adolescentes.
Competência geral 9 Essa competência é favorecida em diversos momentos em que os estudantes devem trabalhar em grupos, resolvendo conflitos, cooperando com os colegas, exercitando o respeito e a empatia, como é o caso na atividade 7 da seção *Compreensão de texto* da página 39, em que os estudantes devem fazer uma pesquisa sobre direitos das crianças e dos adolescentes; e das seções *Educação financeira* (páginas 148 a 150) e *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153). A competência também é favorecida em situações em que os estudantes devem expor oralmente opiniões, como no *Reflita* da página 23, sobre preferências musicais; no exercício 2 da página 35, em que devem falar sobre o que os incomoda na internet e sobre *fake news*; no exercício 14 das páginas 58 e 59, em que devem relatar situações vivenciadas sobre preconceito; e no exercício 18 das páginas 60 e 61, em que devem opinar sobre a educação em língua indígena. A competência é favorecida, ainda, em situações que façam os estudantes refletirem e terem empatia, como na situação do item c das páginas 52 e 53, sobre violência contra a mulher.
Competência geral 10 Essa competência envolve ações individuais e coletivas para a tomada de decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários, como no caso do *Reflita* da página 15, em que os estudantes devem fazer uma companha para conscientizar a população a respeito de ações que podem tomar para combater os focos do mosquito *Aedes aegypti*; e na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), em que os estudantes podem tomar decisões, individuais ou coletivas, a partir de informações coletadas na pesquisa estatística realizada.

REPRODUÇÃO

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência específica 1
Essa competência é favorecida em diversos momentos do volume, por exemplo, no uso de conceitos matemáticos para interpretar situações das Ciências da Natureza, como no exercício 2 da página 62 e nos infográficos das páginas 124 e 125; no uso de conceitos matemáticos para interpretar situações das Ciências Humanas, como no infográfico das páginas 72 e 73; e para interpretar situações cotidianas, como, por exemplo, em situações das páginas 42 a 50, e nas seções *Educação financeira* (páginas 148 a 150) e *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153).
Habilidade EM13MAT102 Ao longo das páginas 14 a 37 e das páginas 42 a 61, são analisados, em diversos momentos, dados em tabelas e em gráficos e amostras de pesquisas estatísticas, divulgados por diferentes meios de comunicação, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade. Especificamente no exercício 4 da página 20 os estudantes devem refletir e discutir com os colegas sobre a amostra de uma pesquisa estatística que pode não representar a realidade da população e induzir a uma generalização equivocada; no exercício 11 da página 32 analisam um gráfico que pode induzir o leitor a um equívoco; e na seção *Compreensão de texto* das páginas 68 a 71 os estudantes aprendem como identificar diversas inadequações gráficas que podem induzir a erros de interpretação. Todas essas ocorrências contribuem para o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13MAT106 Com o infográfico das páginas 124 e 125, o *Reflita* da página 128 e o exercício 22 da página 144, os estudantes podem identificar e analisar situações nas quais é necessário fazer escolhas levando em conta os riscos probabilísticos, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade.
Competência específica 2
Essa competência é favorecida em situações ao longo da obra em que os estudantes devem propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneos e tomar decisões éticas e responsáveis, como no *Reflita* da página 15, no *Reflita* da página 46, no infográfico das páginas 72 e 73 e nas seções *Educação financeira* (páginas 148 a 150) e *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153).
Habilidade EM13MAT201 O *Reflita* da página 46 incentiva que os estudantes façam cálculos de volumes levando em conta as demandas de seu município e de sua residência, contribuindo para desenvolver a habilidade.
Habilidade EM13MAT202 O exercício 4 da página 35 solicita que os estudantes façam uma pequena pesquisa, escolhendo uma amostra da população, decidindo como os dados serão coletados e organizando-os em um gráfico; dessa forma, o exercício contribui para o desenvolvimento de parte dessa habilidade, que é desenvolvida integralmente na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), em que são apresentadas todas as etapas de uma pesquisa estatística e os estudantes realizam uma pesquisa completa.
Habilidade EM13MAT203 A seção *Educação financeira* (páginas 148 a 150) apresenta uma situação envolvendo planilhas eletrônicas para a criação de um orçamento familiar e um orçamento para a realização de um projeto, além de fazer com que os estudantes reflitam sobre seus projetos pessoais e como poderiam colocar algum deles em prática. Dessa forma, a seção contribui para o desenvolvimento da habilidade.
Competência específica 3
A competência específica é favorecida ao longo de todo o volume, uma vez que os estudantes deverão, constantemente, utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos. É o caso de aberturas de capítulos, exercícios e situações contextualizados, infográficos, boxes *Pensamento computacional* e seções como *Compreensão de texto*, *Educação financeira* e *Pesquisa e ação*.
Habilidade EM13MAT310 O texto conceitual, os exemplos e os exercícios resolvidos apresentados ao longo de todo o capítulo 4 (páginas 104 a 123), darão subsídio para os estudantes resolverem e elaborarem problemas de contagem recorrendo a diferentes estratégias e contribuindo para o desenvolvimento da habilidade citada anteriormente.
Habilidade EM13MAT311 Nas páginas 126 a 128, os estudantes veem como identificar e descrever espaços amostrais e eventos e como calcular o número de elementos de cada um desses conjuntos, realizando contagem de possibilidades; nas páginas 128 a 138, usam esses conhecimentos para resolver e elaborar problemas envolvendo o cálculo de probabilidades, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13MAT312 Ao longo das páginas 135 a 141, são propostos diversos problemas que envolvem o cálculo de probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13MAT315 O boxe *Pensamento computacional* da página 75 explica aos estudantes o que é um algoritmo e como registrar um algoritmo por meio de um fluxograma; já o da página 80, solicita aos estudantes que escrevam um algoritmo para calcular a média aritmética de um conjunto de dados em linguagem corrente e em um fluxograma; o infográfico das páginas 104 e 105 possibilita que os estudantes analisem um fluxograma que resolve o problema de verificar se suas senhas são seguras; o *Pensamento computacional* das páginas 111 e 112 mostra um algoritmo em linguagem corrente e expresso por um fluxograma; e o exercício 22 da página 135 solicita que os estudantes escrevam um algoritmo para verificar se uma aposta deve ser realizada. Todas essas ocorrências contribuem para o desenvolvimento da habilidade.
Habilidade EM13MAT316 Ao longo das páginas 74 a 89, os estudantes resolvem e elaboram diversos problemas envolvendo cálculo e interpretação de medidas de tendência central e de dispersão, favorecendo, desse modo, o desenvolvimento da habilidade.
Competência específica 4
Essa competência, de extrema importância no estudo da Matemática, pressupõe que os estudantes compreendam e utilizem diferentes registros de representação matemáticos. Ela é favorecida em diversos momentos ao longo do volume, como nas páginas 21 a 34, nas páginas 42 a 50, na *Observação* da página 80, nas atividades e boxes *Pensamento computacional* das páginas 75, 80, 111, 112 e 135, e na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153).

MODERNA

Habilidade EM13MAT406
Ao longo das páginas 14 a 37, 42 a 61, explica-se como construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, e solicita-se que os estudantes façam e analisem esses tipos construções, também com o uso de *softwares*, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT407
Em diversos momentos ao longo das páginas 14 a 37, 47 a 61 e 90 a 94, os estudantes interpretarão dados em diferentes tipos de representação gráfica e reconhecerão qual o tipo mais eficiente para cada caso, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.
Alguns exemplos de exercícios em que essa interpretação e comparação são explícitas: 10 da página 32, 14 da página 34, 4 da página 35, *Explore* da página 34, 11 da página 50, 26 das páginas 93 e 94 e 28 da página 94.

Competência específica 5

Essa competência é favorecida no *Reflita* da página 107, que envolve investigação e reflexão para estabelecer conjecturas usando a observação de padrões.

Habilidade EM13MAT510
No desenvolvimento do conteúdo e dos exercícios das páginas 94 a 98, os estudantes aprendem a investigar conjuntos de dados relacionados ao comportamento de duas variáveis quantitativas, usando planilhas eletrônicas para construir diagramas de dispersão e traçar as respectivas retas para descrever as relações observadas, favorecendo, dessa forma, o desenvolvimento da habilidade.

Habilidade EM13MAT511
A *Observação* da página 126, favorece que os estudantes reconheçam a existência de espaços amostrais discretos e não discretos. Os conteúdos e os exercícios propostos das páginas 128 a 135 apresentam eventos equiprováveis ou não, mais especificamente, com o último *Reflita* da página 129 e o exercício 14 da página 131, os estudantes podem perceber que existem eventos não equiprováveis e sua implicação no cálculo de probabilidades.
Dessa forma, as páginas citadas contribuem para o desenvolvimento da habilidade.

Como as competências específicas e as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1: *Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.*
Essa competência é favorecida por meio da proposta de trabalho interdisciplinar para o favorecimento da habilidade a ela vinculada, na página 64.

EM13CNT102: *Realizar previsões, avaliar intervenções e/ou construir protótipos de sistemas térmicos que visem à sustentabilidade, considerando sua composição e os efeitos das variáveis termodinâmicas sobre seu funcionamento, considerando também o uso de tecnologias digitais que auxiliem no cálculo de estimativas e no apoio à construção dos protótipos.*
A partir do exercício 6 da página 64, sobre o potencial de geração de energia eólica no Brasil, é proposto ao professor fazer um trabalho interdisciplinar com um professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para que o desenvolvimento da habilidade possa ser favorecido.

Competência específica 2: *Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.*
Essa competência é favorecida por meio das propostas de trabalho interdisciplinar e da seção *Pesquisa e ação*, que podem favorecer o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, nas páginas 124 e 125, 146 e 147 e 151 a 153.

EM13CNT205: *Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências.*
O infográfico das páginas 124 e 125 apresenta informações sobre a anemia falciforme e a probabilidade de um casal ter um filho com essa doença genética. É proposto ao professor promover um trabalho interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para auxiliar o desenvolvimento da habilidade.

EM13CNT207: *Identificar, analisar e discutir vulnerabilidades vinculadas às vivências e aos desafios contemporâneos aos quais as juventudes estão expostas, considerando os aspectos físico, psicoemocional e social, a fim de desenvolver e divulgar ações de prevenção e de promoção da saúde e do bem-estar.*
Na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), os estudantes farão uma pesquisa sobre saúde dos adolescentes, e para a elaboração do relatório de pesquisa, deverão analisar os dados e discutir questões como as propostas na habilidade, favorecendo o seu desenvolvimento.

EM13CNT208: *Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana.*
O trabalho interdisciplinar proposto ao professor no infográfico das páginas 146 e 147, relacionado aos tipos sanguíneos, pode favorecer o desenvolvimento da habilidade.

Competência específica 3: *Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).*
Essa competência é favorecida por meio das propostas que favorecem o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, nas páginas 18 e 19, 45, 110, 124 e 125, 146 e 147, e 151 a 153.

EM13CNT301: *Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.*
Na seção *Pesquisa e ação* (páginas 151 a 153), os estudantes farão uma pesquisa estatística sobre saúde dos adolescentes, e para isso construirão questões, levantarão hipóteses, interpretarão dados e resultados, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.

EM13CNT302: *Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.*
No *Explore* da página 45 os estudantes devem fazer uma pesquisa sobre poluição sonora e nível de ruído em diferentes ambientes, e comunicar os resultados da pesquisa por meio de cartazes com gráficos e tabelas, contribuindo, dessa forma, para desenvolver a habilidade.

EM13CNT303: *Interpretar textos de divulgação científica que tratem de temáticas das Ciências da Natureza, disponíveis em diferentes mídias, considerando a apresentação dos dados, tanto na forma de textos como em equações, gráficos e/ou tabelas, a consistência dos argumentos e a coerência das conclusões, visando construir estratégias de seleção de fontes confiáveis de informações.*
Os infográficos das páginas 124 e 125 e 146 e 147 apresentam textos de divulgação científica que tratam de temáticas das Ciências da Natureza, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.

MODERNA

EM13CNT304: *Analisar e debater situações controversas sobre a aplicação de conhecimentos da área de Ciências da Natureza (tais como tecnologias do DNA, tratamentos com células-tronco, neurotecnologias, produção de tecnologias de defesa, estratégias de controle de pragas, entre outros), com base em argumentos consistentes, legais, éticos e responsáveis, distinguindo diferentes pontos de vista.*
No exercício 14 da página 110, sobre sintetização de um fragmento de DNA, é proposto que o professor faça um trabalho interdisciplinar com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, de modo a favorecer o desenvolvimento da habilidade.

EM13CNT310: *Investigar e analisar os efeitos de programas de infraestrutura e demais serviços básicos (saneamento, energia elétrica, transporte, telecomunicações, cobertura vacinal, atendimento primário à saúde e produção de alimentos, entre outros) e identificar necessidades locais e/ou regionais em relação a esses serviços, a fim de avaliar e/ou promover ações que contribuam para a melhoria na qualidade de vida e nas condições de saúde da população.*
A leitura do infográfico e o trabalho com o *Explore* das páginas 18 e 19 fazem com que os estudantes reflitam sobre como resultados de pesquisas como o censo demográfico e a PNAD contínua podem ajudar na formulação de políticas públicas para promover ações que contribuam na melhoria da qualidade de vida dos brasileiros, podendo favorecer o desenvolvimento da habilidade.

Como as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume

EM13CHS103: *Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros).*
Nas situações apresentadas, por meio de gráficos e tabelas, nas páginas 51 a 61, é proposto que seja feito um trabalho interdisciplinar com o professor de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para favorecer o desenvolvimento da habilidade.

EM13CHS104: *Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.*
No exercício 18 das páginas 60 e 61, sobre escolas indígenas que ministram as aulas utilizando a língua indígena, é proposto ao professor uma discussão mais profunda sobre o tema e um trabalho interdisciplinar com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para favorecer o desenvolvimento da habilidade.

EM13CHS502: *Analisar situações da vida cotidiana, estilos de vida, valores, condutas etc., desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificar ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.*
O exercício 14 das páginas 58 e 59, em que os estudantes devem analisar dados de uma pesquisa e relatar situações vivenciadas por eles sobre preconceito, favorece o desenvolvimento dessa habilidade.

Como a habilidade de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foi mobilizada no volume

EM13LGG601: *Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.*
O exercício 13 da página 110 apresenta um livro de sonetos do escritor francês Raymond Queneau e com a sugestão para que o professor faça um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias, que pode favorecer o desenvolvimento da habilidade.

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados

Esta atividade permite o desenvolvimento da competência geral **5** e da habilidade **EM13CHS103**.

O infográfico "O censo demográfico e a coleta de dados por amostragem" permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, especificamente com Geografia, cujo objetivo é estudar a importância das pesquisas realizadas pelo IBGE para a formulação de políticas públicas.

O imenso volume de dados gerados pelo IBGE, por meio de mecanismos como a PNAD Contínua, oferece um retrato multidimensional da sociedade brasileira, utilizando a amostragem estatística. É possível conhecer algumas condições socioeconômicas da população em temas como o acesso ao emprego, condições de rendimento, moradia, educação, acesso a bens e serviços ou condições em função de sexo e cor, por exemplo.

A estratégia inicial envolve conhecer de maneira mais detalhada a PNAD. Para isso, inicie a atividade explicando aos estudantes os principais tipos de dado coletados nessa pesquisa, de acordo com a periodicidade, por exemplo, em divulgações anuais: educação, acesso à internet e trabalho infantil; nas divulgações trimestrais: pessoas desocupadas e rendimento, por sexo; e assim por diante. Destaque o papel da amostragem para a geração de percentuais e de números absolutos usando a inferência estatística. Uma opção é sugerir aos estudantes que conheçam a PNAD Contínua acessando o *site* do IBGE, disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/9173-pesquisa-nacionalpor-amostra-de-domicilios-continua-trimestral.html?=&t=o-que-e> (acesso em: 30 jun. 2020).

Com base no repertório apresentado e pesquisado, organize a turma em grupos e oriente cada um a produzir um painel visual (*dashboard*), que reúna informações sobre temas previamente selecionados. Peça aos estudantes que pesquisem sobre os *dashboards*, seu uso e como elaborar um painel visual ao compilar dados estatísticos. É importante que, além de gráficos, o *dashboard* possua números absolutos que ajudem a visualizar as informações sobre o tema trabalhado.

Os grupos podem escolher um tema de interesse comum ou você pode sugeri-lo a cada um. Algumas opções são: renda, mercado de trabalho, escolaridade, acesso a tecnologias, saneamento básico, desigualdade de gênero, desigualdade por cor ou raça etc. No *site* da PNAD Contínua, podem-se obter dados para diversos assuntos.

Finalizada a atividade, solicite aos grupos que apresentem o painel elaborado, de modo que os demais possam manipulá-lo para a obtenção de dados. Os grupos também devem apresentar os resultados da pesquisa, para, em seguida, debatê-los. Incentive-os a refletir sobre alguns fenômenos da estrutura socioeconômica da população brasileira, como os desequilíbrios regionais, as diferenças de salário ou a concentração de renda, por exemplo.

MODERNA

Capítulo 2 – Análise de dados

Esta atividade permite o desenvolvimento da competência geral **5**, da competência específica **1** e da habilidade **EM13CHS104**.

O exercício **18**, da seção *Exercícios propostos*, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, especificamente com Geografia, no qual se discute a população indígena.

Embora a maior parte da população considerada indígena esteja presente em áreas não urbanas, como terras indígenas demarcadas, áreas de proteção ambiental e áreas rurais, o percentual de pessoas desse grupo em áreas urbanas tem apresentado crescimento contínuo. Em 2010, o Censo do IBGE apontou variações em relação à edição de 2000. As cidades do Norte e do Nordeste, por exemplo, possuem os maiores percentuais de pessoas autodeclaradas indígenas comparadas às cidades de outras regiões brasileiras e têm sido o lar de grupos das mais diversas etnias.

Os problemas socioeconômicos existentes nos espaços urbanos brasileiros atingem em cheio as comunidades indígenas que buscaram as cidades para viver. Dificuldades como o desemprego e a falta de moradia somam-se a questões de ordem cultural, que vão desde a adaptação ao idioma português até a entrada no sistema de educação formal, passando pela perda progressiva da identidade cultural.

O crescente número de autodeclarados indígenas em áreas urbanas e os desafios no acesso à educação podem servir de pauta para refletir sobre as dificuldades enfrentadas por essas pessoas no cotidiano. Sobre esse aspecto, podem ser discutidas questões como o respeito às identidades culturais, as línguas nativas e os processos de aprendizagem próprios. Os resultados dessa reflexão podem servir para a confecção de painéis que incluam dados gráficos sobre a situação de vida desses grupos em cidades, bem como depoimentos, imagens, vídeos, frases ou nuvem de palavras que ajudem a sintetizar as conclusões dos estudantes. Os *sites* do IBGE e da FUNAI possuem informações a respeito dos censos demográficos e estudos especiais sobre a situação dos povos indígenas no Brasil.

Ao propor esse trabalho aos estudantes:

- solicite a eles que se organizem em grupos para realizar o levantamento de informações sobre alguns temas ligados à educação indígena: alfabetização, escolaridade média (anos de estudo), presença de crianças em idade escolar, ensino nas línguas nativas, materiais didáticos ou livros e atividades praticadas nas escolas no dia a dia;
- incentive-os a explorar outras possibilidades de exposição dos painéis para complementar dados, quando houver, com outras linguagens. Se algum grupo tiver dificuldade para obter dados, explique que podem ser utilizados outros recursos descritos anteriormente para a produção do painel;
- oriente-os no sentido de perceber que os painéis são recursos úteis para expor resultados de uma pesquisa.

Ao final, organize os grupos no espaço da sala de aula, de modo que possam expor seus painéis. Incentive os estudantes a circular por todos os grupos para conhecer os resultados. É importante que você faça a mediação e os apontamentos necessários e observe se os estudantes estão participando da exposição.

Capítulo 3 – Medidas estatísticas

Esta atividade permite o desenvolvimento da competência geral **3**, da competência específica **1** e da habilidade **EM13CHS104**.

O infográfico da abertura deste capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, ao discutir sobre a estrutura etária da população brasileira.

A estrutura etária da população brasileira, que atualmente encontra-se em fase de transição demográfica, deve passar por mudanças significativas nas próximas décadas, rumo ao envelhecimento da população. Se o país possui, em dados mais recentes, uma pirâmide demográfica na qual os percentuais de pessoas relativamente jovens (entre 20 e 39 anos) estão mais elevados em relação ao total dos grupos de idade no histograma, o futuro indica um Brasil com menor crescimento demográfico e mais idosos. A partir de 2048, por exemplo, a taxa de crescimento vegetativo se tornará negativa (−0,02%) e os grupos etários com mais relevância estarão em pessoas a partir de 45 anos.

Considerando que, nesse cenário, haverá mais pessoas em idade mais avançada na sociedade brasileira, essa é a oportunidade para que os jovens de hoje pensem sobre como será o futuro. Pode ser organizado um congresso com o intuito de reunir informações, estudos e reflexões para serem discutidos, confrontados e debatidos, a fim de chegar a alguns resultados sobre o que pode ser feito diante dos possíveis cenários nos próximos anos. Para isso, seguem algumas orientações.

- Selecione algum tema central para definir o objetivo geral do congresso, por exemplo: "Quais políticas públicas precisam ser realizadas para que o Brasil esteja preparado para o envelhecimento da população?".
- Apresente aos estudantes alguns tópicos que podem ser expostos e debatidos como objetivos específicos do congresso, de modo que representem dimensões da vida futura dos idosos: mobilidade urbana, assistência médica/sistema de saúde, assistência social, moradia, trabalho, renda, educação etc.
- Os estudantes podem se organizar em grupos para desenvolver cada tópico ou, individualmente, escolher um dos tópicos para participar das exposições.
- Mediante a escolha de um tópico, os estudantes podem desenvolvê-lo levando em conta alguns aspectos, como: por que é um tema importante; problemas encontrados diante da temática (por exemplo, falta de moradia ou de acesso à saúde); qual é a situação atual, utilizando, se possível, dados de órgãos de pesquisa ou de instituições públicas; quais são os possíveis problemas futuros, considerando a situação atual e as projeções; e a proposição de uma ou mais soluções para o tema levantado.
- Após a fase de pesquisa, peça aos estudantes que preparem algum material que se relacione ao momento em que vão expor o tópicos para debate: relatórios, painéis ou artigos, entre outros.
- A organização do congresso com a sala precisa mesclar momentos de exposição do problema com instantes de debate entre os participantes sobre as informações. Para isso, é interessante escolher uma banca mediadora, com participação do professor e/ou um ou dois alunos responsáveis por ordenar momentos de fala, controle de tempo para exposição e debate ou contagem para a votação de moções e resoluções.

Durante o congresso, também é possível propor aos alunos que votem a respeito de um ou mais temas relevantes, na forma de resolução ou moção decidida por maioria simples de votos; por exemplo, uma moção para incluir na rotina da escola, anualmente, um dia dedicado às políticas de inclusão para idosos. O processo de preparação até o final do congresso pode ser acompanhado de registros como uma revista, *blog*, vídeo ou artigo contendo os temas trabalhados e a necessidade de conscientização sobre o que foi discutido.

MODERNA

Capítulo 4 - Análise combinatória

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2** e **7**, da competência específica **3** e das habilidades, **EM13CNT301**, **EM13CNT303** e **EM13CNT304**.

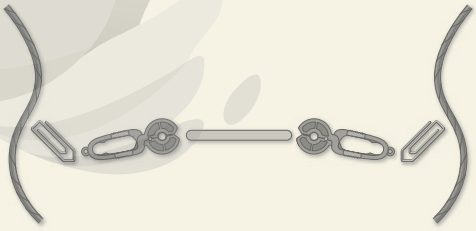
O exercício **14** da seção *Exercícios propostos* permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é explorar a estrutura do DNA, explicar o funcionamento básico do sistema CRISP-Cas9 e debater as vantagens e as desvantagens da edição genética.

A atividade sugerida será feita em duas partes. Para a primeira parte, organize a turma em grupos de três ou quatro estudantes e forneça, para cada grupo, os materiais a seguir.

- fita adesiva;
- 2 pedaços de varal de roupas de 1 metro cada;
- 20 clipes grandes;
- 20 pregadores de plástico de quatro cores diferentes (sugerem-se 6 azuis, 6 verdes, 4 brancos, 4 amarelos; sugerem-se também pregadores que não tenham molas, e sim outra estrutura de mobilidade, como argolas etc.);
- 1 pacote de palitos de sorvete.

Antes de iniciar a atividade, converse com os estudantes sobre as possíveis associações dos materiais fornecidos com as estruturas presentes nos nucleotídeos do DNA: grupo fosfato, pentose e base nitrogenada. Diga-lhes que as bases nitrogenadas adenina, timina, citosina e guanina devem ser representadas pelos pregadores coloridos, de forma que cada cor desempenhe o papel de uma base, e associadas da maneira correta A-T e C-G. Os pedaços de varal devem ser utilizados para representar os grupos fosfato e a estrutura de dupla-hélice. Com fita adesiva, os alunos devem prender os clipes no varal e, simultaneamente, no pregador.

Em seguida, é o momento de planejar as posições sequenciais dos pregadores e suas cores para que haja compatibilidade entre as duas fitas, ou seja, se houver um "pregador timina" em uma fita, é imprescindível que na outra exista o "pregador adenina" na mesma posição. Com as duas fitas já montadas, os estudantes devem uni-las, pelos pregadores, utilizando os palitos de sorvete (figura 1). Discuta com os estudantes que os palitos representam as ligações do tipo ponte de hidrogênio e mostre que entre A-T formam-se duas ligações (podem-se colocar dois palitos presos), enquanto entre C-G formam-se três (três palitos). Ao final da montagem, peça-lhes que prendam as pontas superiores e inferiores dos variais e testem, manual e delicadamente, a torção da fita, formando a dupla-hélice retorcida do DNA.



ADILSON SECCO

Figura 1: representação da montagem.

Finalize a atividade pedindo aos grupos que apresentem os modelos criados. Faça as correções necessárias e discuta com os alunos as diferentes sequências criadas pelos grupos e outras tantas que poderiam ser feitas. Enfatize que essas sequências representam os genes e extrapole as possíveis combinações para genoma humano real, que possui 3 bilhões de pares de bases nitrogenadas.

Depois de criadas as representações, inicie a segunda parte da atividade. Peça aos estudantes que assistam ao vídeo *CRISP-Cas9: como funciona a edição genética*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=r_FDObNgw_I> (acesso em: 30 jun. 2020), e explique, utilizando os modelos tridimensionais criados pela turma, o funcionamento da edição genética. É importante providenciar uma representação de um RNA-guia criado com os mesmos materiais utilizados para montar o DNA.

Estimule a participação dos alunos durante a explicação. Levante questionamentos como: "O que significa CRISP? O que é a Cas9? O que essa técnica possibilita? Em que organismos ela foi descoberta?".

Como o modelo é de fácil montagem, retire os pregadores que representam a sequência de DNA e troque por outros, mostrando a substituição da sequência na manipulação genética. Retome que a Cas9 poderá não só "cortar" e eliminar o trecho do DNA como também adicionar outras sequências, apesar de o DNA ter mecanismos automáticos que realizam a reparação.

Se houver disponibilidade, peça aos estudantes que pesquisem sobre o assunto e, divididos em dois grupos, um a favor e outro contra a manipulação genética, realizem um debate sobre a edição genética. Sugere-se que cada grupo apresente notícias e artigos, de fontes fidedignas, para definir os argumentos prós e contras.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Revista *Pesquisa Fapesp***
  <https://revistapesquisa.fapesp.br/chines-e-suspenso-porter-criado-bebes-com-gene-alterado/>
- **Vídeo: *A engenharia genética mudará tudo para sempre***
  <https://www.youtube.com/watch?v=jAhjPd4uNFY&t=581s>
- **Vídeo: *Genome Editing with CRISPR-Cas9***
  <https://www.youtube.com/watch?v=2pp17E4E-O8>

(Acessos em: 30 jun. 2020.)

Capítulo 5 - Probabilidade

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1** e **7**, da competência específica **3** e das habilidades **EM13CNT303**, **EM13CNT304** e **EM13CNT305**.

O infográfico da abertura deste capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é discutir sobre o perigo das *fake news* em reportagens de cunho científico.

Apresente aos estudantes a seguinte situação: assistindo a uma reportagem sobre a incidência e origem da anemia falciforme no Brasil, uma pessoa iniciou o compartilhamento de um texto em um aplicativo de mensagens. O texto aborda a criação de restrições de turistas e imigrantes vindos de países africanos. Nas mensagens alarmistas, está caracterizado o alto risco da transmissão da anemia falciforme.

PERIGO: NOVA DOENÇA PODE SE ESPALHAR NO BRASIL POR CONTA DOS IMIGRANTES AFRICANOS.

Que fechem nossas fronteiras para os imigrantes africanos. A ciência já comprovou: essas nações apresentam grande parte da sua população contaminada com a anemia falciforme. Para proteger toda a nossa nação brasileira, devemos restringir o turismo e as imigrações. Não podemos permitir que essa doença seja transmitida em larga escala no território nacional. Nossas crianças e idosos serão os mais afetados. Já conhecemos pessoas aqui no Brasil com essa doença. VAMOS FICAR ATENTOS.

MODERNA

Feita a leitura, levante questões sobre a divulgação da mensagem e a indicação de que os imigrantes africanos podem disseminar a doença. Pergunte: "Caso recebesse essa mensagem, como você a analisaria do ponto de vista crítico e científico?". Permita a discussão entre os estudantes, enfatizando a importância do diálogo e que deem ouvidos às opiniões alheias e promovendo o respeito ao outro.

Peça-lhes que, em grupos, discutam os dois tópicos a seguir:

1. Como identificar uma *fake news*?

Os alunos deverão identificar fatores que indicam que a notícia é falsa, por exemplo, tom alarmista, ausência de fontes científicas/jornalísticas, uso excessivo de letras maiúsculas, nacionalismo exacerbado e traços claros de xenofobia.

2. Veracidade das informações sobre a anemia falciforme.

Os alunos deverão se informar sobre a doença em questão, verificando que é de origem genética/hereditária e não é transmissível entre indivíduos. A incidência do gene que causa a anemia falciforme é maior no continente africano e, por consequência da nossa colonização, já está presente na população brasileira.

Permita que os grupos exponham o que foi discutido. Finalize a atividade conversando sobre os riscos e as ameaças que mensagens falsas podem gerar na sociedade.

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Reconhecer população, amostras e variáveis.	1
Organizar dados em representações tabular e gráfica.	2, 3, 4 e 5
Obter conclusões com base na análise dos dados coletados.	6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – Uma agência publicitária realizou uma pesquisa com adolescentes com idade entre 13 e 16 anos. Para realizar essa pesquisa, 500 adolescentes de cada uma das 27 unidades federativas brasileiras forneceram informações pessoais, como: sexo, idade e preferências em relação a gênero musical, esportes, filmes e programas de televisão.

a) Qual é a população da pesquisa?

b) Qual é o tamanho da amostra considerada?

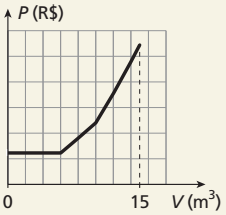
c) Identifique as variáveis dessa pesquisa e classifique-as em qualitativa ou quantitativa.

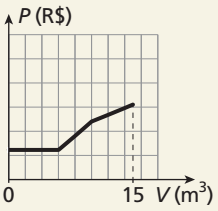
Q2 – (Enem) Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

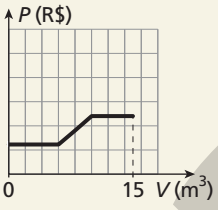
- Faixa 1: para consumo de até 6 m^3, valor fixo de R$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 m^3 e até 10 m^3, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m^3;
- Faixa 3: para consumo superior a 10 m^3, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m^3.

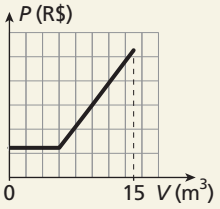
Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m^3 por mês.

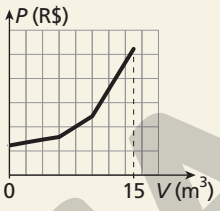
O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é

a)


b)


c)


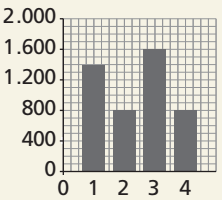
d)


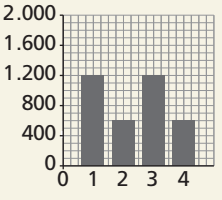
e)


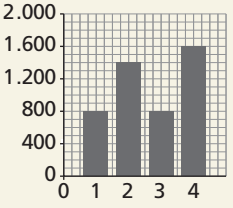
Q3 – (Insper) Em um torneio de apostas, cada participante recebe 50 fichas. Ao longo do torneio, eles podem apostar qualquer quantidade de fichas com qualquer outro participante. Em toda aposta, um ganha e outro perde as fichas apostadas. Cem pessoas entraram nesse torneio e, ao final, foram identificados os 30 que tinham acabado com mais fichas (Grupo G) e os 30 que tinham acabado com menos fichas (Grupo P). A organização registrou o total de fichas de todos os participantes em 4 momentos do torneio. A tabela abaixo mostra as somas das fichas das pessoas dos Grupos G e P nas 4 contagens feitas.

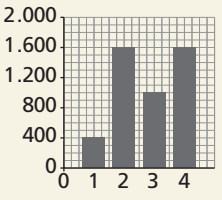
Contagem	1	2	3	4
Grupo G	1.200	3.200	1.800	3.600
Grupo P	2.400	1.000	1.600	600

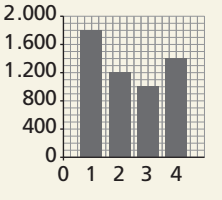
O gráfico que melhor expressa a soma das fichas daqueles que não estão no grupo G nem no grupo P é

a)


b)


c)


d)


e)


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Q4– A tabela abaixo representa o resultado de uma pesquisa feita por Carlos com os alunos de sua classe.

Tempo médio de permanência em redes sociais				
Intervalo (horas)	Número de alunos	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
Até 1				7,5%
Mais de 1, até 2	𝍸 IIII	9	0,225	22,5%
Mais de 2, até 3	𝍸 𝍸 𝍸			
Mais de 3, até 4	𝍸 III			
Mais de 4		5		
Total				

Dados obtidos por Carlos.

a) Complete a tabela com os dados que faltam, sabendo que foram entrevistados 40 alunos.

b) Faça um gráfico de colunas relacionando o número de alunos com o tempo de permanência, em hora, em redes sociais.

Q5– A tabela a seguir representa um estudo sobre estimativa de acidentes nas principais rodovias brasileiras. Com base nos dados apresentados, elabore:

a) um gráfico de setores que represente a estimativa de acidentes ocorridos nas rodovias federais, estaduais e municipais.

b) um gráfico de barras horizontais que represente a estimativa do número de mortos e feridos nas rodovias.

c) um gráfico de barras verticais evidenciando a estimativa do número de acidentes e de vítimas nas rodovias.

Estimativa dos acidentes e de vítimas nas estradas brasileiras pavimentadas				
Rodovias	Acidentes	Mortos	Feridos	Vítimas
Federais (1)	104.863	5.780	60.326	66.106
Estaduais (2)	134.240	6.156	77.744	83.900
Municipais (3)	24.960	1.200	14.400	16.600

Dados fictícios.

Q6– (Mackenzie) Um pesquisador fez um conjunto de medidas em um laboratório e construiu uma tabela com as frequências relativas (em porcentagem) de cada medida, conforme se vê a seguir:

Valor medido	Frequência relativa (%)
1,0	30
1,2	7,5
1,3	45
1,7	12,5
1,8	5
	Total = 100

Assim, por exemplo, o valor 1,0 foi obtido em 30% das medidas realizadas. A menor quantidade possível de vezes que o pesquisador obteve o valor medido maior que 1,5 é

a) 6 **c)** 8 **e)** 10

b) 7 **d)** 9

Q7– (Enem) Um casal planejou uma viagem e definiu como teto para o gasto diário um valor de até R$ 1.000,00. Antes de decidir o destino da viagem, fizeram uma pesquisa sobre a taxa de câmbio vigente para as moedas de cinco países que desejavam visitar e também sobre as estimativas de gasto diário em cada um, com o objetivo de escolher o destino que apresentasse o menor custo diário em real. O quadro mostra os resultados obtidos com a pesquisa realizada.

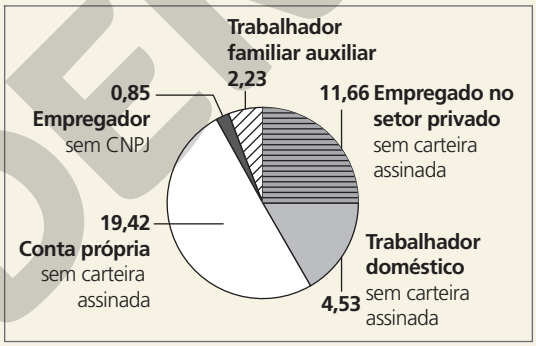
País de destino	Moeda local	Taxa de câmbio	Gasto diário
França	Euro (€)	R$ 3,14	€ 315,00
EUA	Dólar (US$)	R$ 2,78	US$ 390,00
Austrália	Dólar australiano (A$)	R$ 2,14	A$ 400,00
Canadá	Dólar canadense (C$)	R$ 2,10	C$ 410,00
Reino Unido	Libra esterlina (£)	R$ 4,24	£ 290,00

Nessas condições, qual será o destino escolhido para a viagem?

a) Austrália **c)** EUA **e)** Reino Unido

b) Canadá **d)** França

Q8– (Fatec) Leia o gráfico que apresenta a distribuição do trabalho informal no Brasil, em milhões de trabalhadores, referente ao segundo trimestre de 2019.



Segundo o gráfico, a porcentagem aproximada de trabalhadores empregados no setor privado sem carteira assinada, em relação ao total de trabalhadores informais, é

a) 10% **c)** 30% **e)** 50%

b) 20% **d)** 40%

Q9– (Enem) Dois reservatórios A e B são alimentados por bombas distintas por um período de 20 horas. A quantidade de água contida em cada reservatório nesse período pode ser visualizada na figura.

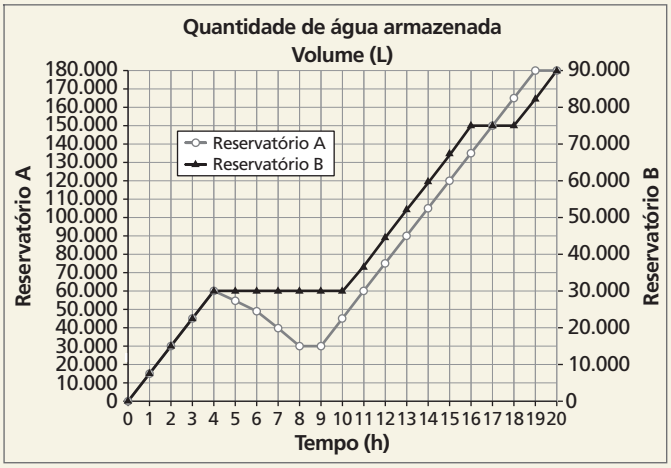


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO

MODERNA

O número de horas em que os dois reservatórios contêm a mesma quantidade de água é

a) 1 **c)** 4 **e)** 6
b) 2 **d)** 5

Q10 – (Enem) O índice de eficiência utilizado por um produtor de leite para qualificar suas vacas é dado pelo produto do tempo de lactação (em dias) pela produção média diária de leite (em kg), dividido pelo intervalo entre partos (em meses). Para esse produtor, a vaca é qualificada como eficiente quando esse índice é, no mínimo, 281 quilogramas por mês, mantendo sempre as mesmas condições de manejo (alimentação, vacinação e outros). Na comparação de duas ou mais vacas, a mais eficiente é a que tem maior índice. A tabela apresenta os dados coletados de cinco vacas:

Vaca	Tempo de lactação (em dias)	Produção média diária de leite (em kg)	Intervalo entre partos (em meses)
Malhada	360	12,0	15
Mamona	310	11,0	12
Maravilha	260	14,0	12
Mateira	310	13,0	13
Mimosa	270	12,0	11

Após a análise dos dados, o produtor avaliou que a vaca mais eficiente é a

a) Malhada. **c)** Maravilha. **e)** Mimosa.
b) Mamona. **d)** Mateira.

Resoluções da avaliação

Q1 – a) A população da pesquisa são os adolescentes entre 13 e 16 anos de idade de todos os estados brasileiros e do Distrito Federal.

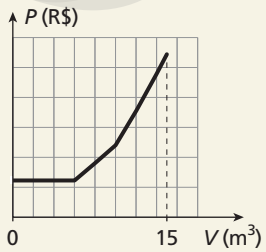
b) $500 \cdot 27 = 13.500$
A amostra considerada tem 13.500 adolescentes.

c) Sexo, gênero musical, esportes, filmes e programas de televisão: variável qualitativa; idade: variável quantitativa.

Q2 – Sendo V o volume de água consumido em metro cúbico, temos:

- na faixa 1, o valor é fixo igual a 12;
- na faixa 2, o valor é dado por $P = 12 + 3\,(V - 6) = 3V - 6$ com $6 \leq V \leq 10$;
- na faixa 3, o valor é dado por $P = 24 + 6\,(V - 10) = 6V - 36$ com $V \geq 10$.

Assim, o gráfico que descreve o valor P em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumida, em metros cúbicos, é



alternativa a

Q3 – Seja o "grupo M" o grupo dos participantes que não estão no "grupo G" nem no "grupo P" e sejam S_{M1}, S_{M2}, S_{M3} e S_{M4} a soma dos números de fichas desse grupo nos instantes 1, 2, 3 e 4 considerados. Como o total de fichas envolvidas no torneio é $50 \cdot 100 = 5.000$, temos:

$S_{M1} + 1.200 + 2.400 = 5.000 \Leftrightarrow S_{M1} = 1.400$
$S_{M2} + 3.200 + 1.000 = 5.000 \Leftrightarrow S_{M2} = 800$
$S_{M3} + 1.800 + 1.600 = 5.000 \Leftrightarrow S_{M3} = 1.600$
$S_{M4} + 3.600 + 600 = 5.000 \Leftrightarrow S_{M4} = 800$

O gráfico que representa estes quatro valores é o primeiro.

alternativa a

Q4 – a)

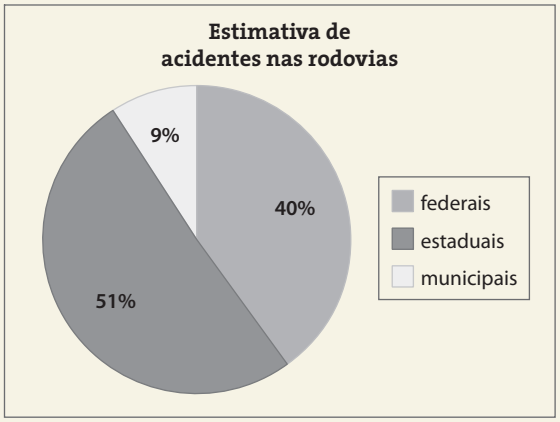
Tempo médio de permanência em redes sociais				
Intervalo (horas)	Número de alunos	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
Até 1	III	3	0,075	7,5%
Mais de 1, até 2	𝍸 IIII	9	0,225	22,5%
Mais de 2, até 3	𝍸 𝍸 𝍸	15	0,375	37,5%
Mais de 3, até 4	𝍸 III	8	0,200	20%
Mais de 4	𝍸	5	0,125	12,5%
Total		40	1,000	100%

Dados obtidos por Carlos.

b)

Dados obtidos por Carlos.

Q5 – a)

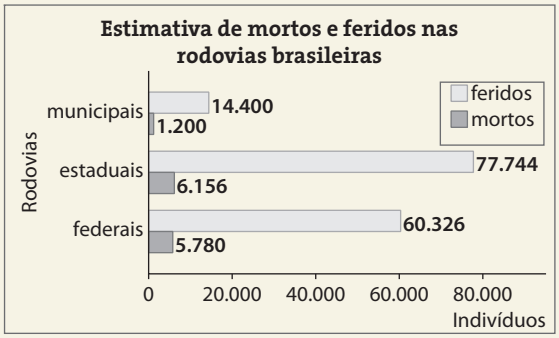


Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

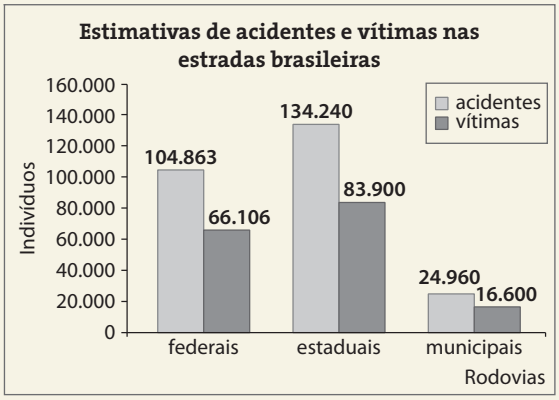
MODERNA

b)



Dados fictícios.

c)



Dados fictícios.

Q6– Seja n o número total de medidas.
A soma das frequências relativas das medidas maiores do que 1,5 é 12,5 + 5 = 17,5%.
Segue que n deve ser o menor inteiro positivo para o qual $\frac{175}{1000}\,n = \frac{7}{40}$ é um inteiro, isto é, $n = 40$. Portanto, o resultado pedido é 7.

alternativa b

Q7– O quadro mostra os resultados obtidos com a pesquisa realizada.

País de destino	Moeda local	Taxa de câmbio	Gasto diário	Gasto em reais
França	Euro (€)	R$ 3,14	€ 315,00	989,10
EUA	Dólar (US$)	R$ 2,78	US$ 390,00	1084,20
Austrália	Dólar australiano (A$)	R$ 2,14	A$ 400,00	856,00
Canadá	Dólar canadense (C$)	R$ 2,10	C$ 410,00	861,00
Reino Unido	Libra esterlina (£)	R$ 4,24	£ 290,00	1229,60

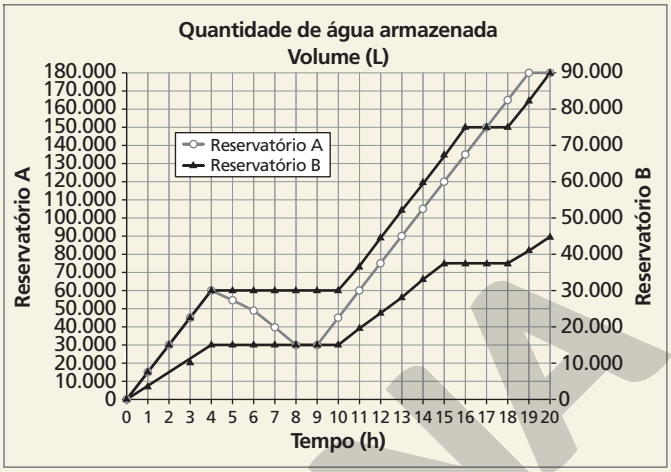
Assim, o de menor custo diário é Austrália (R$ 856,00).

alternativa a

Q8– O número total de trabalhadores informais, em milhões, é: 11,66 + 4,53 + 19,42 + 0,85 + 2,23 = 38,76.
O número de trabalhadores empregados no setor privado, em milhões, é 11,66.
Assim: $\frac{11,66}{38,76} \simeq 0,30 = 30\%$.

alternativa c

Q9– Redesenhando o gráfico do reservatório B sobre o gráfico dado, de forma que volumes iguais fiquem na mesma altura do gráfico, observamos que apenas entre 8 e 9 horas, os volumes são iguais.



alternativa a

Q10– De acordo com o enunciado, temos:

Vaca	Índice de Eficiência
Malhada	$\frac{360 \cdot 12}{15} = 288$
Mamona	$\frac{310 \cdot 11}{12} \simeq 284,2$
Maravilha	$\frac{260 \cdot 14}{12} \simeq 303,3$
Mateira	$\frac{310 \cdot 13}{13} = 310$
Mimosa	$\frac{270 \cdot 12}{11} \simeq 294,5$

Assim, a vaca mais eficiente é a Mateira.
alternativa d

Capítulo 2 - Análise de dados

Avaliação

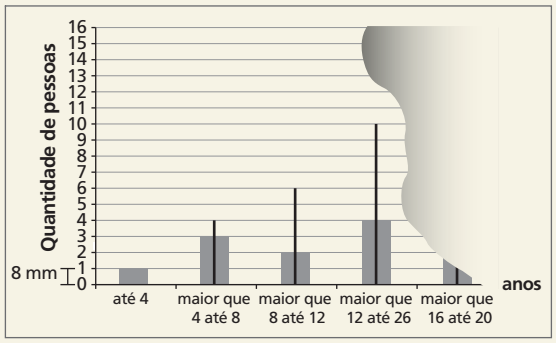
Objetivos do capítulo	Questões
Organizar dados e construir tabelas de distribuições de frequência.	1
Interpretar e construir histogramas e diagramas de ramo e folhas.	2
Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10

Q1– (FGV 2013) O gráfico de barras indica como informação principal o número de pessoas atendidas em um pronto-socorro, por faixa etária, em um determinado dia. Outra informação apresentada no gráfico, por meio das linhas verticais, é a frequência acumulada. Em virtude de um rasgo na folha em que o gráfico estava desenhado, as

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

informações referentes à última barra, e apenas elas, foram perdidas, como se vê na figura.



A média de idade do total de pessoas de 0 a 20 anos que frequentou o pronto-socorro nesse dia foi 12,4 anos. Nessas condições, na folha intacta do gráfico original, o comprimento da linha vertical posicionada na última barra, que indica a frequência acumulada até 20 anos de idade, em centímetros, era igual a

a) 8,8 **c)** 10,4 **e)** 12,0
b) 9,6 **d)** 11,2

Q2– O diagrama de ramo e folhas a seguir corresponde às idades dos funcionários de uma empresa em determinada data.

1	8 9 9
2	0 1 1 2 5 5 7 8 8 9
3	1 2 2 3 3 4 4 4 5 6 7 8 8 8
4	0 1 2 2 3 4 5 5
5	1 5 6
6	2 5

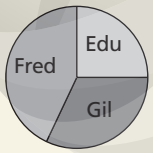
Legenda: 1/8 = 18 anos

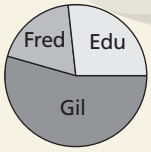
a) Quantos funcionários há nessa empresa?
b) Qual é a poncentagem de funcionários que têm mais de 50 anos de idade?

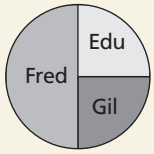
Q3– (Insper) Para estimular sua equipe comercial, uma empresa define metas de negócios de acordo com a região que cada vendedor atende. Na tabela, estão apresentadas as metas mensais dos vendedores de três regiões e, respectivamente, o valor que falta para cada um vender na última semana de determinado mês para atingir a meta.

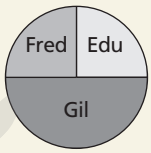
Vendedor	Meta mensal	Valor que falta para atingir a meta
Edu	R$ 12.000,00	R$ 3.000,00
Fred	R$ 20.000,00	R$ 2.000,00
Gil	R$ 15.000,00	R$ 6.000,00

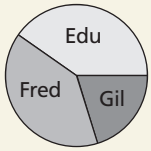
Comparando os totais já vendidos nas três regiões, o gráfico que melhor compara os três vendedores é

a)


b)


c)


d)


e)


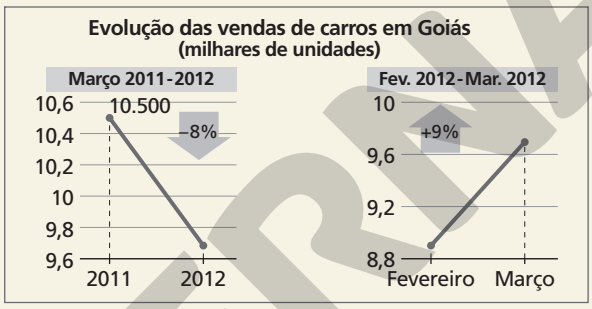
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Q4– (UFPR) Em 2010, uma loja de carros vendeu 270 carros a mais que em 2009. Abaixo temos um gráfico ilustrando as vendas nesses dois anos.

Nessas condições, pode-se concluir que a média das vendas efetuadas por essa loja durante os dois anos foi:

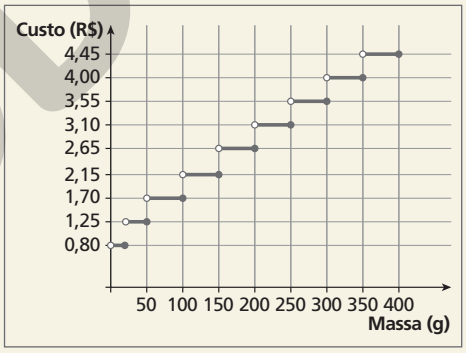
a) 540 carros. **c)** 405 carros. **e)** 135 carros.
b) 530 carros. **d)** 270 carros.

Q5– (UFG) Os gráficos a seguir comparam as vendas de carros em Goiás, em março de 2012, com as vendas do mês anterior e com as vendas em março de 2011.



Considerando-se os dados acima, determine a quantidade de carros vendidos em fevereiro de 2012.

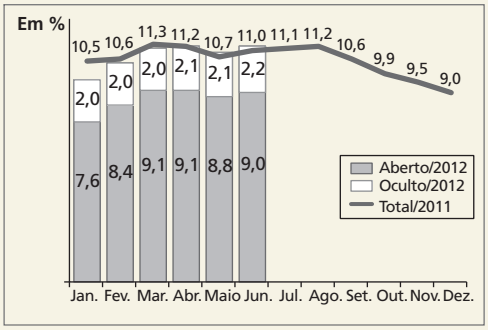
Q6– (Enem) Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de

a) 8,35 **c)** 14,40 **e)** 18,05
b) 12,50 **d)** 15,35

Q7– (Enem) O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.

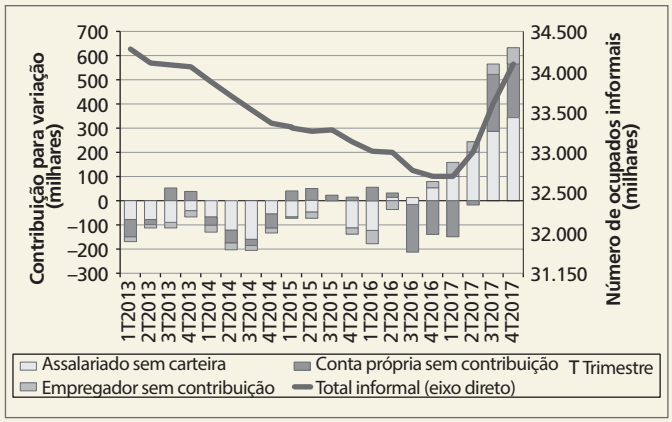


MODERNA

Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.
Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de

a) 1,1 **c)** 4,5 **e)** 7,9
b) 3,5 **d)** 6,8

Q8– (Famerp) Analise o gráfico.

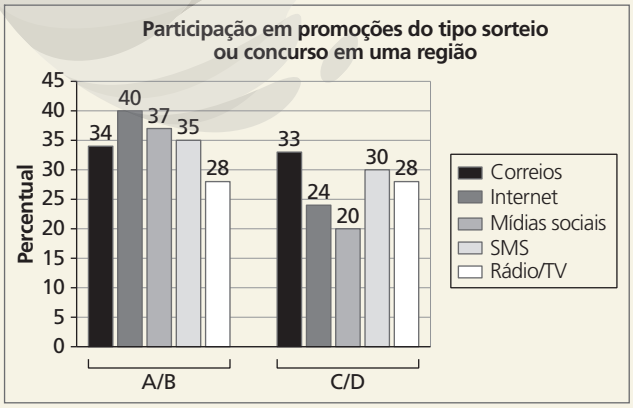


(Pedro Rossi e Guilherme Mello. *Le monde diplomatique Brasil*, junho de 2018.)

A partir da análise do gráfico, pode-se afirmar que, no cenário brasileiro,

a) o aumento da informalidade total no ano de 2017 é reflexo da estagnação da economia.
b) a redução dos empregados sem contribuição no ano de 2014 é resultado do crescimento da economia.
c) a redução dos assalariados sem carteira no ano de 2017 é consequência da retração da economia.
d) o aumento dos trabalhadores por conta própria no ano de 2017 tem como causa o crescimento da indústria.
e) a redução dos assalariados sem carteira no ano de 2014 reflete o aumento da qualificação profissional.

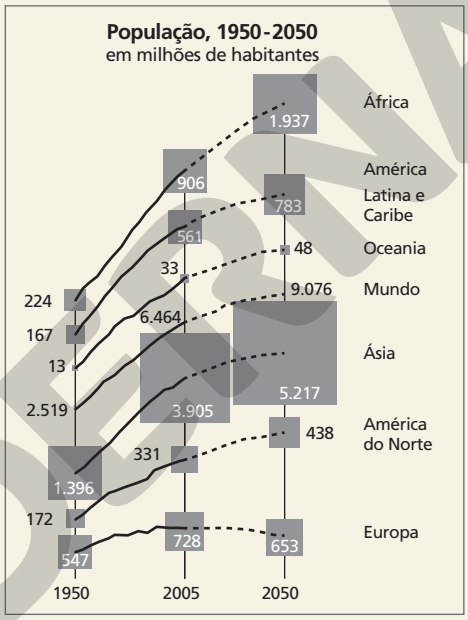
Q9– (Enem) Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no *site* da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D). De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

a) Correios e SMS.
b) internet e Correios.
c) internet e internet.
d) internet e mídias sociais.
e) rádio/TV e rádio/TV.

Q10– (Unesp) Analise o gráfico sobre a evolução ocorrida e a perspectiva de crescimento da população mundial no período de 1950 a 2050.



(Marie-Françoise Durand et al. *Atlas da Mundialização*: compreender o espaço mundial contemporâneo, 2009. Adaptado.)

A partir da análise do gráfico, pode-se afirmar que

a) a população da América do Norte apresenta um expressivo crescimento populacional no período de 1950 a 2050, superando a taxa de crescimento da África.
b) a Ásia apresenta o maior total absoluto da população mundial, mas perde para a Oceania no ritmo do crescimento populacional em termos relativos, em todo o período analisado.
c) a Europa, no período de 2005 a 2050, projeta um crescimento negativo, com índices que mostram uma redução populacional.
d) a África apresenta o menor crescimento em termos absolutos no período de 1950 a 2050, perdendo sua posição de segunda colocada entre as regiões mais populosas do mundo.
e) a América do Norte apresenta o maior crescimento populacional em termos absolutos no período de 1950 a 2050 e é mais populosa do que a América Latina e o Caribe.

Resoluções da avaliação

Q1– Seja x o número de pessoas com idade de 16 a 20 anos, atendidas neste pronto-socorro. Como a média de idade do total de pessoas de 0 a 20 anos que frequentou o

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

pronto-socorro neste dia foi 12,4 anos, temos:

$\overline{x} = 12{,}4 \rightarrow \frac{2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 14 \cdot 4 + 18 \cdot x}{1 + 2 + 3 + 4 + x} =$

$= 12{,}4$. Portanto, $x = 5$.

Construindo a tabela de frequência, temos:

	F_i	F_i
$0 \vdash 4$	1	1
$4 \vdash 8$	3	$1 + 3 = 4$
$8 \vdash 12$	2	$4 + 2 = 6$
$12 \vdash 16$	4	$6 + 4 = 10$
$16 \vdash 20$	5	$10 + 5 = 15$

Logo, o comprimento da linha vertical posicionada na última barra, que indica a frequência acumulada até 20 anos de idade, será igual a $(10 + 5) \cdot 8$ mm = 120 mm = 12,0 cm.

alternativa e

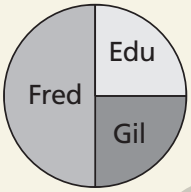
Q2 – a) Há 40 funcionários nessa empresa.

b) Como há 5 funcionários com mais de 50 anos, temos que: $\frac{5}{40} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Q3 – Totais já vendidos:

Vendedor	Total já vendido
Edu	R$ 9.000,00
Fred	R$ 18.000,00
Gil	R$ 9.000,00

Edu e Gil já venderam a mesma quantia, e Fred vendeu o dobro dos dois. Assim, o setor de Edu tem de ser igual ao de Gil, e o de Fred o dobro deles. Ou seja, o gráfico que melhor representa a situação é:



ADILSON SECCO

alternativa c

Q4 – Analisando os dados do pictograma, concluímos que cada carro representa 135 carros (270 : 2).

Assim, a venda em 2009 foi de 405 carros e, em 2010, foi 675 carros.

Portanto, a média pedida é dada por: $\frac{405 + 675}{2} = 540$.

alternativa a

Q5 – Vendas em março de 2012: 10.500 − 8% de 10.500 = 9.660

Vendas em fevereiro de 2012: y, em que $y + 0{,}09y = 9.660 \Leftrightarrow y = 8.662$

Portanto, em fevereiro de 2012 foram vendidos 8.662 carros.

Q6 – Analisando o gráfico dado, concluímos que os preços da postagem de uma carta de 100 g é R$ 1,70, de uma carta de 200 g é R$ 2,65 e de uma carta de 350 g é R$ 4,00. Então, para postar duas cartas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g, o valor gasto, em reais, é $2 \cdot 1{,}70 + 3 \cdot 2{,}65 + 1 \cdot 4 = 3{,}40 + 7{,}95 + 4 = 15{,}35$.

alternativa d

Q7 – TDO: Taxa de Desemprego Oculto

TDT: Taxa de Desemprego Total

$TDO_{dez2012} = \frac{TDO_{jun\,2012}}{2} = \frac{2{,}2}{2} = 1{,}1$

$TDT_{dez2012} = TDT_{dez2011} = 9$

$TDA_{dez2012} = TDT_{dez2012} - TDO_{dez2012} = 9 - 1{,}1 = 7{,}9$

alternativa e

Q8 – Pela análise do gráfico, é possível perceber o expressivo crescimento do trabalho assalariado realizado sem carteira ou por conta própria sem contribuição, o que leva ao aumento da informalidade, a partir do primeiro trimestre de 2017. No Brasil, o trabalho informal representa parcela significativa da População Economicamente Ativa.

alternativa a

Q9 – De acordo com o gráfico, o maior número de consumidores das classes A/B que participa de promoções utiliza a internet, e o maior número de consumidores das classes C/D que participa de promoções utiliza os Correios.

alternativa b

Q10 – O crescimento populacional mais acelerado e expressivo é o da África. A Europa apresenta redução no crescimento populacional. A evolução do crescimento demográfico do mundo é constante e positiva.

alternativa c

Capítulo 3 - Medidas estatísticas

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam média, moda e mediana de uma distribuição.	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.	7 e 8
Ler e interpretar *blox-plots* e analisar a conveniência de seu uso	9
Ler e interpretar diagramas de dispersão	10

Q1 – Os dados a seguir referem-se às quantidades mensais de CDs de certo cantor, vendidas durante um ano.

3.000	4.000	3.500
5.200	6.700	5.000
8.500	7.600	6.500
6.400	7.000	5.400

Em quantos meses as vendas mensais superaram a média de CDs vendidos?

Q2 – (FGV) A média da altura dos 6 jogadores em quadra de um time de vôlei é 1,92 m. Após substituir 3 jogadores por outros, a média das alturas do time passou para 1,90 m. Nessas condições, a média, em metro, das alturas dos jogadores que saíram supera a dos que entraram em:

a) 0,03 **c)** 0,06 **e)** 0,12

b) 0,04 **d)** 0,09

Q3 – (Enem) Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente. O mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado é

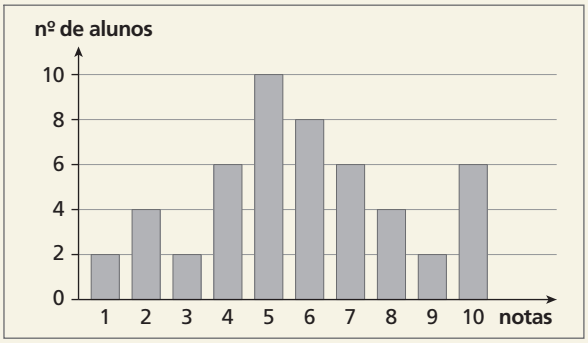
a) 29,8 **c)** 74,5 **e)** 84,0

b) 71,0 **d)** 75,5

Q4 – (Ibmec) Chama-se mediana de um conjunto de 50 dados ordenados em ordem crescente o número x dado

MODERNA

pela média aritmética entre os 25º e o 26º dados. Observe no gráfico a seguir uma representação para as notas de 50 alunos do primeiro semestre de Ciências Econômicas numa determinada prova.



A mediana das notas dos 50 alunos de Ciências Econômicas nessa prova é igual a:

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7

Q5– (FGV) A média aritmética das notas de cinco provas de estatística é 6,4. Retirando-se a prova com a menor nota, a nova média aritmética sobe para 7,0. Agora, retirando-se a prova com a maior nota, a nova média aritmética das três provas remanescentes abaixa para 6,5. Se a moda das notas das cinco provas é 6,0, então, necessariamente, a nota de uma das cinco provas é

a) 6,8 **b)** 7,2 **c)** 7,4 **d)** 7,5 **e)** 8,0

Q6– (Fuvest) Em uma classe com 14 alunos, 8 são mulheres e 6 são homens. A média das notas das mulheres no final do semestre ficou 1 ponto acima da média da classe. A soma das notas dos homens foi metade da soma das notas das mulheres. Então, a média das notas dos homens ficou mais próxima de

a) 4,3 **b)** 4,5 **c)** 4,7 **d)** 4,9 **e)** 5,1

Q7– (Enem) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas.

Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

Equipes	Média	Moda	Desvio-padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe

a) I **b)** II **c)** III **d)** IV **e)** V

Q8– (UnB)

Bacia hidrográfica	Precipitação (em 1.000 m³/s)
Amazônica	*
São Francisco	18
Paraná	40
Paraguai	16
Uruguai	10

A tabela acima contém informações relativas à precipitação em algumas bacias hidrográficas do Brasil. Considerando essas informações, julgue como verdadeiro ou falso os itens seguintes.

I) Considere que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sejam os valores assumidos por uma variável quantitativa discreta de variância igual a $V(x)$ e que, subtraindo-se 3 unidades de cada uma dessas variáveis, obtêm-se os valores y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, assumidos por uma nova variável quantitativa discreta de variância igual a $V(y)$. Nessa situação, tem-se que $V(y) = V(x) - 9$.

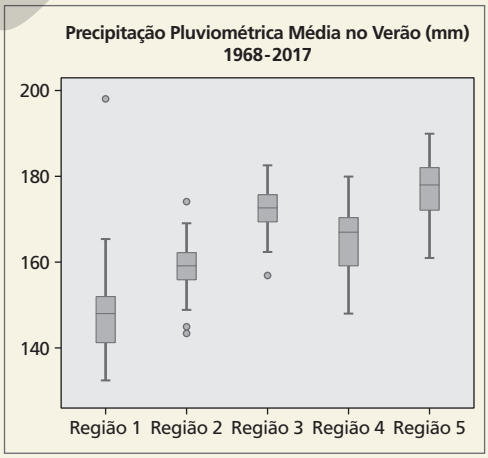
II) Considere que a média aritmética das precipitações nas bacias incluídas na tabela seja igual a 115.000 m³/s. Nessa situação, a precipitação na bacia amazônica é inferior a 350.000 m³/s.

III) O desvio padrão das 4 precipitações apresentadas na tabela é superior a 10.000 m³/s.

Q9– (Cesgranrio) Dados sobre Precipitação Pluviométrica em cinco regiões do estado do Rio de Janeiro foram coletados para os meses de verão (janeiro a março) entre 1968 e 2017. Os resultados permitiram os cálculos das estatísticas e a elaboração do *box-plot* apresentados a seguir.

Estatísticas

	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4	Região 5
Média	149	159	170	165	177
Mediana	148	159	172	167	178
Desvio padrão	6,5	10,2	5,7	5,9	7,0
Mínimo	138	142	157	148	161
Máximo	195	175	178	180	190
Quartil 1	142	158	170	159	170
Quartil 3	152	162	174	170	180



De acordo com os resultados apresentados, observe as afirmações a seguir.

I – A média das precipitações pluviométricas é uma medida representativa da quantidade de chuva média mensal no verão em cada região, devido à baixa variabilidade das medidas.

II – A variação das médias das precipitações dentro de cada região é inferior à variação das médias das precipitações entre as regiões.

III – Em pelo menos um ano, a precipitação média no verão ficou abaixo do índice de 1,5 desvio quartílico da distribuição em duas regiões.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

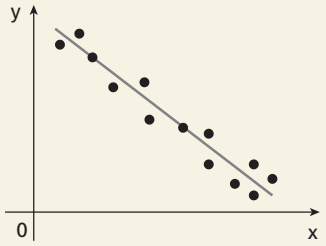
MODERNA

Está correto APENAS o que se afirma em

a) I **c)** III **e)** I e III

b) II **d)** I e II

Q10– Observe o diagrama de dispersão abaixo.



ADILSON SECCO

Agora, com relação ao diagrama acima, indique a alternativa correta.

a) A correlação é negativa pois os valores crescentes de x estão associados a valores decrescentes de y.

b) A correlação é negativa pois os valores decrescentes de x estão associados a valores decrescentes de y.

c) A correlação é positiva pois os valores crescentes de x estão associados a valores decrescentes de y.

d) A correlação é positiva pois os valores crescentes de x estão associados a valores crescentes de y.

e) A correlação é nula pois as variações de x e y ocorrem de maneira independente.

Resoluções da avaliação

Q1– A média de CDs vendida é:

$$\overline{x} = \frac{3.000 + 4.000 + 3.500 + 5.200 + 6.700 + 5.000}{12} +$$

$$+ \frac{8.500 + 7.600 + 6.500 + 6.400 + 7.000 + 5.400}{12}$$

$$\overline{x} = \frac{68.800}{12} \simeq 5.733$$

Logo, a média de CDs vendida é de aproximadamente 5.733 CDs.

Essa média foi superada em 6 meses do ano.

Q2– Sejam a, b e c, respectivamente, a média da altura dos 3 jogadores que permaneceram na quadra, a dos 3 jogadores que foram substituídos e a dos 3 jogadores que entraram. Assim, temos:

$$\frac{a+b}{2} = 1{,}92 \Rightarrow a = 3{,}84 - b$$

$$\frac{a+c}{2} = 1{,}90 \Rightarrow \frac{3{,}84 - b + c}{2} = 1{,}90$$

$b - c = 0{,}04$

alternativa b

Q3– Sendo N_4 a nota na quarta avaliação, temos:

$$\frac{46 \cdot 20\% + 60 \cdot 10\% + 50 \cdot 30\% + N_4 \cdot 40\%}{100} \geqslant 60$$

Portanto, $N_4 \geqslant 74{,}5$.

alternativa c

Q4– Colocando as notas em ordem, temos:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6...

Ou seja, a 25ª e a 26ª notas são 6. Portanto, a mediana será $\frac{2 \cdot 6}{2} = 6$.

alternativa d

Q5– Sejam N_1, N_2, N_3, N_4 e N_5 as notas de cinco provas, em que N_1 é a menor nota e N_5 a maior nota. De acordo com o enunciado, temos:

$$\frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}{5} = 6{,}4 \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 32$$

$$\frac{N_2 + N_3 + N_4 + N_5}{4} = 7 \Rightarrow N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 28$$

Logo, $N_1 + 28 = 32$, ou seja, $N_1 = 4$.

$$\frac{N_2 + N_3 + N_4}{3} = 6{,}5 \Rightarrow N_2 + N_3 + N_4 = 19{,}5$$

Logo, $4 + 19{,}5 + N_5 = 32$, ou seja, $N_5 = 8{,}5$.

Como a moda das cinco notas é 6, existe, pelo menos, duas notas 6 entre as três remanescentes. Chamando de x a terceira nota, resulta: $x + 6 + 6 = 19{,}5$, ou seja, $x = 7{,}5$.

alternativa d

Q6– Seja H a soma das notas dos 6 homens e M a soma das notas das 8 mulheres. Assim, a média das notas dos homens é $\frac{H}{6}$; das mulheres, $\frac{M}{8}$; e, da sala, $\frac{H+M}{14}$.

Do enunciado, tem-se a média das notas das mulheres foi 1 ponto acima da média da classe, ou seja:

$$\frac{M}{8} = \frac{H+M}{14} + 1 \therefore 3M + 4H = 56 \quad \text{(I)}$$

a soma das notas dos homens foi metade da soma das notas das mulheres, ou seja:

$$H = \frac{1}{2} \cdot M \therefore M = 2H \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), tem-se que H = 28 e, portanto, a média das notas dos homens foi igual a:

$$\frac{28}{6} \simeq 4{,}7$$

alternativa c

Q7– Pelo enunciado, temos que selecionar a equipe que mais se aproxima do tempo médio de 45 minutos, ou seja, a equipe com o menor desvio padrão. Portanto a equipe III.

alternativa c

Q8– I) $V(x) \Rightarrow \overline{y} = \overline{x} - 3$ e $V(y) \Rightarrow V(x) = V(y)$.

Portanto, a afirmação é falsa.

II) $\overline{m} = 150.000 = \frac{P_{AM} + 18.000 + 40.000 + 16.000 + 10.000}{5}$

$P_{AM} = 491.000$

Portanto, a afirmação é falsa.

III) $d = \sqrt{V} \Rightarrow d = \sqrt{8.965.000.000} \Rightarrow d = 94.680$.

Portanto, a afirmação é verdadeira.

Q9– I – Incorreta, pois a média sozinha não representa unicamente um conjunto de dados.

II – Incorreta, pois a variação das médias em cada região é 0,044; 0,064; 0,034; 0,036 e 0,040; enquanto a variação entre as regiões é dada pela razão entre o desvio padrão entre as regiões e a média entre regiões, que é: $\frac{9{,}5}{164} = 0{,}058$, que não é maior que todas as variações médias.

III – Correta, pois o limite inferior da Região 1 é 127 (inferior a 138); o da Região 2 é 152 (superior a 142); o da

MODERNA

Região 3 é 164 (superior a 157); o da Região 4 é 142,5 (inferior a 148); e o da Região 5 é 155 (inferior a 161).
alternativa c

Q10– É possível observar que os valores crescentes de x estão relacionados a valores decrescentes de y. Portanto, a correlação é negativa.
alternativa a

Capítulo 4 - Análise combinatória

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.	1, 2 e 4
Aplicar as noções de fatorial.	3
Identificar a natureza dos problemas de contagem.	5
Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.	6, 7, 8, 9 e 10

Q1– Uma escola vai disponibilizar na internet as notas das avaliações dos alunos. Para ter acesso às suas notas, cada aluno receberá uma senha diferente. Considerando que a escola tem 1.200 alunos no total, resolva os itens a seguir.

a) Se a senha for composta de 3 algarismos, será possível elaborar uma senha diferente para cada aluno?

b) Se a resposta ao item **a** foi não, elabore uma estratégia para resolver esse problema.

Q2– (Enem) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.
A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.
A opção que mais se adequa às condições da empresa é
a) I. **b)** II. **c)** III. **d)** IV. **e)** V.

Q3– Simplifique as expressões abaixo.

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!\,(n-1)}$ **b)** $\dfrac{(n+1)!\,(n+2)}{(n+3)!}$

Q4– (Fatec) João vai criar uma senha para o seu roteador. Para ter mais segurança.

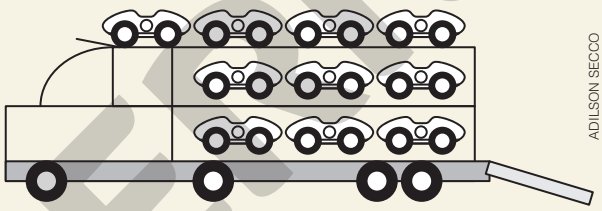
- a senha terá nove caracteres que não se repetem, sendo 4 algarismos, 3 letras e 2 caracteres não alfanuméricos;
- a senha ou começará ou terminará por um caractere não alfanumérico;
- as três letras serão seguidas por um único caractere não alfanumérico seguido por quatro algarismos;
- há distinção entre letra maiúscula e letra minúscula;
- as letras serão escolhidas entre **a**, **i**, **p**, **g**, **k** e **v**, apenas;
- os caracteres não alfanuméricos serão escolhidos entre **!**, **%**, **&** e **>**, apenas.

Observe dois exemplos de senhas nas condições dadas:

!pGk&8460 ou AiV%3841>

Assim sendo, a quantidade de senhas distintas que João pode formar é
a) $12^3 \cdot 10^4 \cdot 4^2$
b) $12^2 \cdot 11 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2$
c) $12^2 \cdot 11 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3$
d) $12^2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4$
e) $12^2 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2$

Q5– (Enem) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.


ADILSON SECCO

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?
a) $C_{6,4}$ **c)** $C_{10,4}$ **e)** 4^6
b) $C_{9,3}$ **d)** 6^4

Q6– (UFPA) É do grande poeta português Fernando Pessoa a belíssima frase "Tudo vale a pena se a alma não é pequena". Tomados pelo espírito dessa frase, queremos formar novas sequências de palavras, permutando-se as palavras do verso, indiferentemente de constituir ou não frases. Por exemplo: "A pena não vale tudo se pequena é a alma" ou "A a é pena não se vale pequena tudo alma". É correto afirmar que o número de sequências distintas de palavras que se pode construir, utilizando-se todas as dez palavras, é igual a
a) 453.600 **c)** 1.814.400 **e)** 7.257.600
b) 907.200 **d)** 3.628.800

Q7– Com a palavra CADERNO:

a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos começam com C e terminam com O?
c) quantos começam com consoante?
d) quantos terminam com vogal?
e) quantos contêm as letras D e E, juntas, nessa ordem?
f) quantos contêm as letras D e E juntas?

MODERNA

Q8 – Em uma festa de confraternização entre amigos, todos se cumprimentaram com um abraço. Quantas pessoas compareceram, sabendo que o número de abraços foi 105?

Q9 – (Mackenzie) Diz-se que um inteiro positivo com 2 ou mais algarismos é "crescente", se cada um desses algarismos, a partir do segundo, for maior que o algarismo que o precede. Por exemplo, o número 134.789 é "crescente" enquanto o número 2.435 não é "crescente". Portanto, o número de inteiros positivos "crescentes" com 5 algarismos é igual a

a) 122 **c)** 126 **e)** 130
b) 124 **d)** 128

Q10 – (Santa Casa) Três amigos decidiram ir ao teatro. No momento de escolherem os assentos, depararam-se com a seguinte disponibilidade:

ADILSON SECCO

Dado que os amigos querem sentar-se um ao lado do outro, sem cadeiras vagas ou ocupadas entre eles, o número de diferentes maneiras que podem ocupar seus assentos, considerando a troca de posições entre eles, é igual a

a) 4 **c)** 7 **e)** 42
b) 16 **d)** 24

Resoluções da avaliação

Q1 – a) Como pode haver repetição de algarismos, pelo princípio multiplicativo, temos: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$
Portanto, poderão ser elaboradas 1.000 senhas distintas. Como a escola tem 1.200 alunos, não será possível dar uma senha distinta para cada aluno.

b) Resposta possível: a senha pode ser composta de três letras; assim, considerando o alfabeto com 26 letras, pelo princípio multiplicativo, temos:
$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17.576$
Assim, poderão ser elaboradas 17.576 senhas.

Q2 – O número de senhas de acordo com a opção pode ser representado na tabela abaixo.

Opção	Formato	Número de senhas
I	LDDDDD	$26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26 \cdot 10^5 = 2{,}6 \cdot 10^6$
II	DDDDDD	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$
III	LLDDDD	$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^4 = 6{,}76 \cdot 10^6$
IV	DDDDD	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$
V	LLLDD	$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^2 = 1{,}7576 \cdot 10^6$

Como o número de senhas distintas precisa estar entre 1 e 2 milhões, a opção que mais se adequa é a V.
alternativa e

Q3 – a) $\dfrac{n!}{(n-1)!\,(n-1)} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!\,(n-1)} = \dfrac{n}{n-1}$

b) $\dfrac{(n+1)!\,(n+2)}{(n+3)!} = \dfrac{(n+1)!\,(n+2)}{(n+3)(n+2)(n+1)!} = \dfrac{1}{n+3}$

Q4 – Senhas do tipo % p k A α 3571:
A quantidade de senhas do tipo % p k A α 3571 é: $4 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.
A quantidade de senhas do tipo a V k > 2578% é a mesma.
Então, o total de senhas é: $2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 12^2 \cdot 11 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2$.
alternativa b

Q5 – Pintamos 4 carrinhos, um de cada cor. O total de maneiras distintas de pintar os 6 carrinhos que sobraram com as quatro cores à disposição é dado pela combinação com repetição:
$C^*_{4,6} = C_{4+6-1,6} = C_{9,6} = C_{9,3}$
alternativa b

Q6 – $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$
alternativa d

Q7 – a) $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$
Logo, podemos formar 5.040 anagramas.

b) $C\ \underset{5}{\underline{\quad}}\ \underset{4}{\underline{\quad}}\ \underset{3}{\underline{\quad}}\ \underset{2}{\underline{\quad}}\ \underset{1}{\underline{\quad}}\ O$

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Logo, podemos formar 120 anagramas.

c) $\underbrace{\underline{\quad}}_{\text{4 opções: C, D, R, N}}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$4 \cdot P_6 = 4 \cdot 6! = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.880$
Logo, podemos formar 2.880 anagramas.

d) $\underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{\text{3 opções: A, E, O}}$

$3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.160$
Logo, são 2.160 anagramas.

e) $\underline{DE}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$P_6 = 6! = 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
Logo, podemos formar 720 anagramas.

f) $\underline{DE}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$\underline{ED}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$P_2 \cdot P_6 = 2! \cdot 6! = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1.440$
Logo, podemos formar 1.440 anagramas.

Q8 – $C_{n,\,2} = 105 \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 105$

$n(n-1) = 210 \Rightarrow n^2 - n = 210 \Rightarrow n^2 - n - 210 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:
$n = 15$ ou $n = -14$ (não convém)
Logo, compareceram 15 pessoas.

Q9 – A quantidade de números inteiros positivos "crescentes" com 5 algarismos é: $C_{9,5} = \dfrac{9!}{5!4!} = 126$
alternativa c

Q10 – Na primeira fileira são possíveis $2 \cdot P_3 = 12$ formas de eles se sentarem.
Na sexta fileira existem $P_3 = 6$ formas.
Na nona fileira existem $P_3 + 3 \cdot P_3 = 24$ formas.
Ao todo são $12 + 6 + 24 = 42$ formas de eles ocuparem os assentos.
alternativa e

MODERNA

Capítulo 5 - Probabilidade

Avaliação

Objetivos do capítulo	Questões
Determinar o espaço amostral, os eventos desse espaço e calcular o número de elementos desses conjuntos.	1 e 2
Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento.	3 e 4
Trabalhar com situações-problema que envolvam a teoria da probabilidade.	5, 6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – Uma caixa tem fichas numeradas de 0 a 20. Retirando-se uma delas ao acaso, determine o espaço amostral e os eventos definidos pelas condições abaixo, classificando-os, quando possível, em evento certo, evento simples ou evento impossível.

a) Sair uma ficha com número par.
b) Sair uma ficha com número múltiplo de 21.
c) Sair uma ficha com número maior que 20.
d) Sair uma ficha com um número múltiplo de 3 e de 2.
e) Sair uma ficha com um número menor que 40.

Q2 – Determine o espaço amostral de:

a) lançamento de dois dados: o primeiro em forma de tetraedro e o outro em forma de hexaedro.
b) giro do ponteiro de uma roleta cujas casas têm as letras do alfabeto latino e de uma ficha com um lado vermelho (v) e outro preto (p).

Q3 – (Enem) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna. Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

- Opção 1 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 2 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
- Opção 3 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 4 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
- Opção 5 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

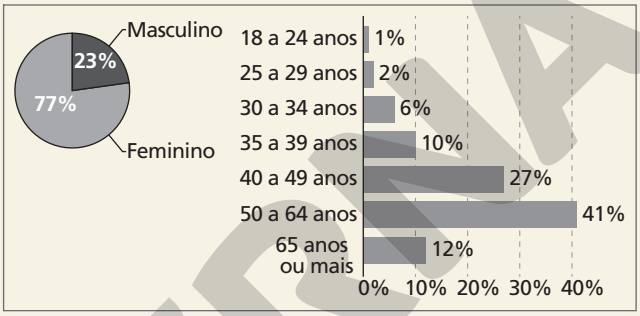
a) 1 **c)** 3 **e)** 5
b) 2 **d)** 4

Q4 – (Fuvest) De um baralho de 28 cartas, sete de cada naipe, Luís recebe cinco cartas: duas de ouros, uma de espadas, uma de copas e uma de paus. Ele mantém consigo as duas cartas de ouros e troca as demais por três cartas escolhidas ao acaso dentre as 23 cartas que tinham ficado no baralho. A probabilidade de, ao final, Luís conseguir cinco cartas de ouros é:

a) $\frac{1}{130}$ **c)** $\frac{10}{1.771}$ **e)** $\frac{52}{8.117}$

b) $\frac{1}{420}$ **d)** $\frac{25}{7.117}$

Q5 – (Fatec) O artesão brasileiro é um agente de produção nas áreas cultural e econômica do país, gerando empregos e contribuindo para a identidade regional. Observe os gráficos e admita distribuição homogênea de dados.

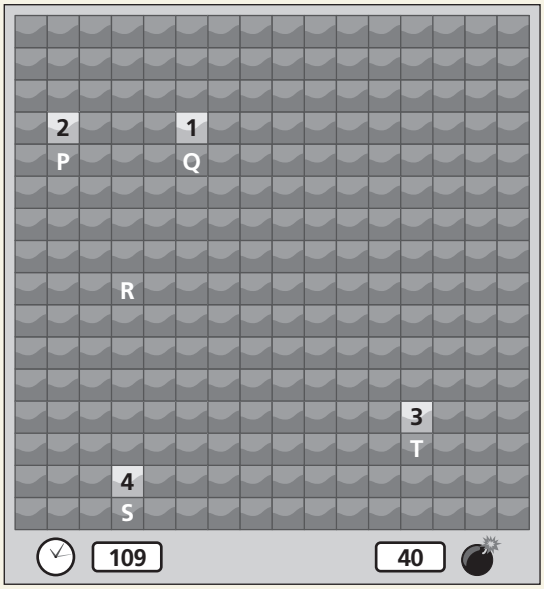


Fonte de dados: <https://datasebrae.com.br/artesanato/>. Acesso em: 29 maio 2020. Adaptado.

Suponha que uma viagem será sorteada entre todos os artesãos brasileiros, a probabilidade de que o ganhador da viagem seja uma mulher de 65 anos ou mais é de

a) 31,57% **c)** 12,43% **e)** 4,85%
b) 20,79% **d)** 9,24%

Q6 – (Enem) A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16×16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODELO

Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina. O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

a) P **c)** R **e)** T
b) Q **d)** S

Q7 – Um dado é lançado 5 vezes. Determine a probabilidade de ele cair 3 vezes com a face 3 voltada para cima.

Q8 – (Enem) Em um determinado ano, os computadores da receita federal de um país identificaram como inconsistentes 20% das declarações de imposto de renda que lhe foram encaminhadas. Uma declaração é classificada como inconsistente quando apresenta algum tipo de erro ou conflito nas informações prestadas. Essas declarações consideradas inconsistentes foram analisadas pelos auditores, que constataram que 25% delas eram fraudulentas. Constatou-se ainda que, dentre as declarações que não apresentaram inconsistências, 6,25% eram fraudulentas. Qual é a probabilidade de, nesse ano, a declaração de um contribuinte ser considerada inconsistente, dado que ela era fraudulenta?

a) 0,0500 **c)** 0,1125 **e)** 0,5000
b) 0,1000 **d)** 0,3125

Q9 – (PUC) As tabelas abaixo indicam o número de homens (*H*) e mulheres (*M*) que receberam um certo tratamento (*T*), ou não receberam o tratamento ($\neg T$), cruzado com a observação da recuperação (R) ou não recuperação ($\neg R$) desses indivíduos.

Homens (H)		
	R	$\neg R$
T	36	24
$\neg T$	14	6

Mulheres (M)		
	R	$\neg R$
T	4	16
$\neg T$	18	42

Analise as afirmativas a seguir, relativas a esse grupo de indivíduos, considerando *Pr(A)* a probabilidade de ocorrência do evento *A*; $Pr(A \cap B)$ a probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos *A* e *B*; e $Pr(A \mid B)$ a probabilidade condicional de ocorrência do evento *A* dada a ocorrência do evento *B*.

I. $Pr(R \mid T \cap H) > Pr(R \mid \neg T \cap H)$
II. $Pr(R \mid T \cap M) > Pr(R \mid \neg T \cap M)$
III. $Pr(R \mid T) > Pr(R \mid \neg T)$
IV. $Pr(R \mid T) < Pr(R \mid \neg T)$

Está/Estão correta(s) apenas a(s) afirmativa(s)

a) III. **c)** I e II.
b) IV. **d)** I, II e IV.

Q10 – (Ufam) Em uma determinada cidade, existe um hotel que possui 100 apartamentos, cuja numeração vai de 1 a 100. A probabilidade de um hóspede desse hotel (suponha que o hotel esteja lotado), escolhido ao acaso, esteja alojado em um apartamento cujo número seja um múltiplo de 5 ou de 7, é

a) 32% **c)** 25% **e)** 28%
b) 30% **d)** 40%

Resoluções da avaliação

Q1 – Para todos os itens, temos:
$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

a) $E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
b) $E = \{0\} \rightarrow$ evento simples
c) $E = \{\ \} \rightarrow$ evento impossível
d) $E = \{0, 6, 12, 18\}$
e) $E = S \rightarrow$ evento certo

Q2 – a) $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$

b) $\{(a, v), (a, p), (b, v), (b, p), (c, v), (c, p), (d, v), (d, p), \ldots, (w, v), (w, p), (x, v), (x, p), (y, v), (y, p), (z, v), (z, p)\}$

Q3 –

Urna A	Urna B	Urna C	Urna D
3 brancas	6 brancas		
2 pretas	3 pretas	2 pretas	3 brancas
1 verde	1 verde	2 verdes	3 pretas
6 bolas	10 bolas	4 bolas	6 bolas

A probabilidade de retirar duas bolas pretas sucessivamente e sem reposição em cada uma das opções são as que se seguem.

$$P_1 = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \simeq 0{,}067$$

$$P_2 = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \simeq 0{,}067$$

$$P_3 = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{16}{168} \simeq 0{,}095$$

$$P_4 = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{24}{120} \simeq 0{,}200$$

$$P_5 = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{36}{168} \simeq 0{,}214$$

Como $P_1 = P_2 < P_3 < P_4 < P_5$, a maior probabilidade de ganhar o prêmio está na opção 5.

alternativa e

Q4 – Nas 23 cartas restantes, existem 5 de ouros, 6 de espadas, 6 de copas e 6 de paus. Para conseguir a primeira carta de ouros entre as 23 cartas é $\frac{5}{23}$.

Nas 22 cartas restantes, 4 são de ouros. Então a probabilidade de, entre elas, escolher uma de ouros é $\frac{4}{22}$.

Nas 21 cartas restantes, 3 são de ouros. Então a probabilidade de, entre elas, escolher uma de ouros é $\frac{3}{21}$.

Logo, a probabilidade de Luís conseguir 3 cartas de ouros é: $\frac{5}{23} \cdot \frac{4}{22} \cdot \frac{3}{21} = \frac{5}{23} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{7} = \frac{10}{1.771}$

alternativa c

Q5 – A probabilidade de ser mulher e ter 65 anos ou mais é dada por: $77\% \cdot 12\% = 9{,}24\%$

alternativa d

Q6 – Cada um dos 8 quadrados em torno do quadrado que contém o número 2 tem probabilidade $\frac{2}{8}$ de conter uma bomba.
Assim, a probabilidade de P ter uma bomba é $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

De modo análogo, as probabilidades de Q, S e T conterem bombas são, respectivamente, $\frac{1}{8} = 0{,}125$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$ e $\frac{4}{8} = 0{,}5$.

MODERNA

Excluídos os quadrados abertos e os seus vizinhos, restam $16 \cdot 16 - 4 \cdot 9 = 220$ quadrados e
$40 - (2 + 1 + 3 + 4) = 30$ bombas.

A probabilidade de R conter uma bomba é $\frac{30}{220} \simeq 0{,}136$.

Assim, dos cinco quadrados, P, Q, R, S e T, o que tem menor probabilidade de conter uma bomba é Q.

alternativa b

Q7– E_1: sair uma face 3 $\Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{6}$

E_2: não sair uma face 3 $\Rightarrow P(E_2) = \frac{5}{6}$

E: obter três vezes a face 3 em 5 jogadas

$$P(E) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$P(E) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{216}\right) \cdot \left(\frac{25}{36}\right)$$

$$P(E) = 10 \cdot \left(\frac{1}{216}\right) \cdot \left(\frac{25}{36}\right) = \frac{250}{7.776} =$$

$$= \frac{125}{3.888} \simeq 0{,}032 = 3{,}2\%$$

Logo, a probabilidade é aproximadamente 3,2%.

Q8– Sendo 20% das declarações inconsistentes, temos que 80% são consistentes. Dentre as inconsistentes, temos $0{,}25 \cdot 20\% = 5\%$ fraudulentas. Já entre as consistentes, temos $0{,}0625 \cdot 80\% = 5\%$ fraudulentas. Com essas informações, temos:

	Fraudulentas	Não fraudulentas	Total
Inconsistentes	5%	15%	20%
Consistentes	5%	75%	80%
Total	10%	90%	100%

Logo, a probabilidade pedida é

$P(\text{inconsistente} \mid \text{fraudulenta}) = \frac{5\%}{10\%} = 0{,}5000$

alternativa e

Q9– A afirmativa I é incorreta. A probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que é um homem que recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid T \cap H)$, é igual a $\frac{36}{36 + 24} = \frac{36}{60} = 0{,}6$, sendo menor do que a probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que é um homem que não recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid \neg T \cap H)$ é igual a: $\frac{14}{14 + 6} = \frac{14}{20} = 0{,}7$

A afirmativa II é incorreta. A probabilidade de um indivíduo se recupera dado que é uma mulher que recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid T \cap M)$, é igual a $\frac{4}{4 + 16} = \frac{4}{20} = 0{,}2$, sendo menor do que a probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que é uma mulher que não recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid \neg T \cap M)$ é igual a: $\frac{18}{18 + 42} = \frac{18}{60} = 0{,}3$

A afirmativa III é correta. A probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid T)$, é igual a $\frac{36 + 4}{36 + 24 + 4 + 16} = \frac{40}{80} = 0{,}5$, sendo maior do que a probabilidade de um indivíduo se recuperar dado que não recebeu tratamento, indicada por $Pr(R \mid \neg T)$ e igual a: $\frac{14 + 18}{14 + 6 + 18 + 42} = \frac{32}{80} = 0{,}4$

A afirmativa IV é incorreta, pois afirma exatamente o contrário do que foi verificado na afirmativa III.

alternativa a

Q10– Múltiplos de 5, de 5 a 100: 20 números

Múltiplos de 7, de 7 a 98: 14 números

Múltiplos de 5 e de 7, nesse intervalo: 2 números, o 35 e o 70

Então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{20 + 14 - 2}{100} = \frac{32}{100} = 32\%$

alternativa a

MODERNA

Resoluções e comentários

Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados

Exercícios propostos

1. **a)** 125.000 **b)** 800 **c)** Resposta pessoal.

2. **a)** quantitativa discreta
b) qualitativa nominal
c) qualitativa ordinal
d) qualitativa ordinal
e) quantitativa contínua
f) qualitativa nominal
g) qualitativa ordinal

3. **a)** Resposta possível: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.
b) Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistados todos os idosos.

4. **a)** A população em investigação na pesquisa são os jovens latino-americanos.
b) A amostra da pesquisa é formada por mais de 15 mil jovens entre 15 e 24 anos de nove países: Brasil, Chile, Colômbia, El Salvador, Haiti, México, Paraguai, Peru e Uruguai.
c) A pesquisa foi realizada no Brasil entre abril e maio de 2018.
d) A amostra foi composta de 1.488 jovens de Recife.
e) Espera-se que os alunos percebam que, como a amostra foi composta apenas de jovens de Recife, os resultados podem não refletir a realidade do Brasil. Pode-se questioná-los sobre como eles acham que a amostra deveria ser selecionada.

5. **a)** Cor dos veículos que transitam na rua de Pedro:

Cor	Frequência absoluta		
	Manhã	Tarde	Dia
Branca	1	1	2
Prata	9	8	17
Azul	4	4	8
Vermelha	4	4	8
Amarela	1	0	1
Preta	6	4	10
Verde	2	2	4
Total	27	23	50

Cor	Frequência relativa		
	Manhã	Tarde	Dia
Branca	0,02	0,02	0,04
Prata	0,18	0,16	0,34
Azul	0,08	0,08	0,16
Vermelha	0,08	0,08	0,16
Amarela	0,02	0	0,02
Preta	0,12	0,08	0,20
Verde	0,04	0,04	0,08
Total	0,54	0,46	1,00

Cor	Frequência percentual		
	Manhã	Tarde	Dia
Branca	2%	2%	4%
Prata	18%	16%	34%
Azul	8%	8%	16%
Vermelha	8%	8%	16%
Amarela	2%	0%	2%
Preta	12%	8%	20%
Verde	4%	4%	8%
Total	54%	46%	100%

Fonte: Anotações de Pedro.

b) A cor que apresentou maior frequência percentual de manhã, à tarde e no dia foi prata, 18%, 16% e 34%, respectivamente. As que apresentaram menor frequência percentual de manhã foram as cores branca e amarela, 2%; à tarde foi a amarela, 0%; e no dia foi a amarela, 2%.

Comentário: Com base no exemplo apresentado no tópico "Distribuição de frequências", essa atividade permite que os alunos façam uso de planilha eletrônica.

6. **a)**

Posse de computador segundo o sexo			
Sexo \ Tem computador	Sim	Não	Total
Masculino	36%	10%	46%
Feminino	40%	14%	54%
Total	76%	24%	100%

Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

b) Percentual masculino:

$\frac{18}{23} \simeq 0{,}7826 = 78{,}26\%$

O percentual de meninos que têm computador em relação a todos os meninos é, aproximadamente, 78,26%.

Percentual feminino:

$\frac{20}{27} \simeq 0{,}7407 = 74{,}07\%$

O percentual de meninas que têm computador em relação a todas as meninas é, aproximadamente, 74,07%.

Logo, quem tem mais computadores, percentualmente, em relação a seu grupo, são os meninos.

7. Resposta pessoal.

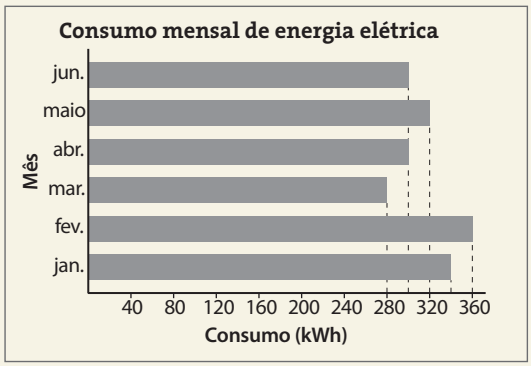
8. **a)** Ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta.
b) Espera-se que os alunos percebam que o critério utilizado não facilita esse tipo de análise. Para essa análise, seria melhor que a tabela estivesse ordenada de acordo com os valores das vendas em 2020, em ordem crescente ou decrescente.
c) Pela análise da tabela, podemos afirmar que a empresa Extrações obteve maior crescimento nas vendas de 2019 para 2020:

$\frac{34{,}5}{30{,}3} \simeq 1{,}1390$

Assim, a empresa Extrações obteve um crescimento de, aproximadamente, 13,9%.

MODERNA

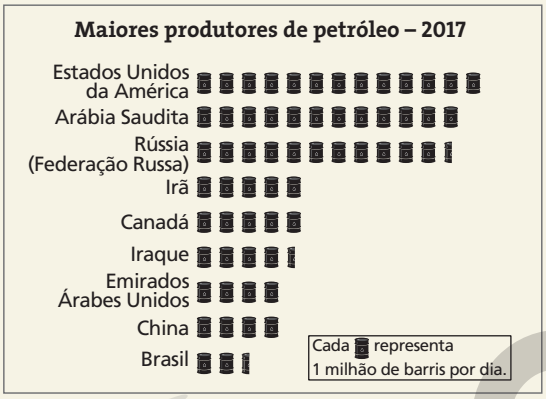
9. Resposta possível:



Dados obtidos por Mariana.

Comentário: Pode-se pedir aos alunos que observem a conta de energia elétrica de suas residências para comparar com os valores do exercício. Há empresas de energia elétrica cuja conta traz a informação de consumo dos últimos 12 meses com um gráfico de barras horizontais.
Essa é também uma boa oportunidade para discussão sobre o uso racional da energia elétrica.

10. **a)** Resposta possível:

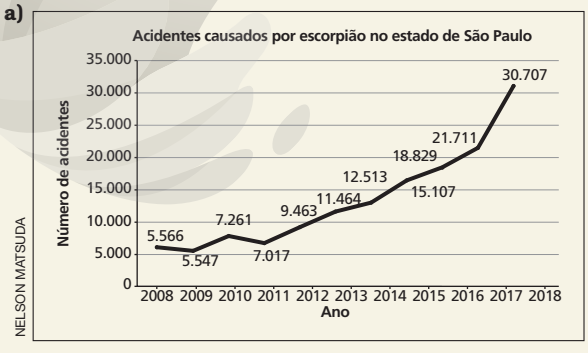


Dados obtidos em: <https://paises.ibge.gov.br/#/>. Acesso em: 19 mar. 2019.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos escolham o pictograma que apresenta a melhor relação entre o elemento usado e a quantidade de ocorrências que ele representa.

c) Em um gráfico de colunas, pois o gráfico de linha é indicado para representar a variação de uma variável ao longo de um período, o que não é o caso.

11. **a)**



Dados obtidos em: <http://www.saude.sp.gov.br/cve-centro-de-vigilancia-epidemiologica-prof.-alexandre-vranjac/areas-de-vigilancia/doencas-de-transmissao-por-vetores-e-zoonoses/agravos/animais-peconhentos/dados-estatisticos>. Acesso em: 14 abr. 2020.

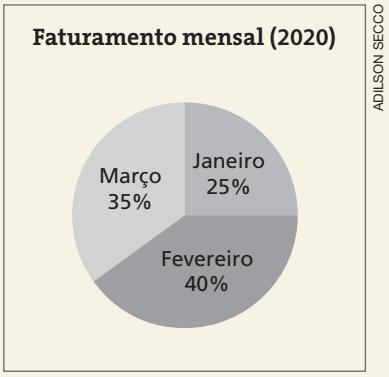
Dados obtidos em: <http://www.saude.sp.gov.br/cve-centro-de-vigilancia-epidemiologica-prof.-alexandre-vranjac/areas-de-vigilancia/doencas-de-transmissao-por-vetores-e-zoonoses/agravos/animais-peconhentos/dados-estatisticos>. Acesso em: 14 abr. 2020.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que não seria conveniente construir um único gráfico com os acidentes e os óbitos, pois, como os números de acidentes são da ordem das unidades e das dezenas de milhar e os óbitos são da ordem das unidades, a construção do gráfico seria ou inviável ou não representaria a variação no número de óbitos.

Comentário: No item **a**, na construção do gráfico de acidentes causados por escorpião, oriente os alunos a realizar aproximações para determinar a altura de cada ponto.

12. Vamos construir uma tabela com os valores do gráfico e calcular a porcentagem que cada mês representa em relação ao faturamento total. Em seguida, determinamos a medida do ângulo central de cada setor para construir o gráfico de setores.

Mês	Faturamento (em milhão de reais)	Porcentagem	Ângulo central de cada setor
Jan.	0,5	(0,5 : 2) = 0,25 = 25%	0,25 · 360° = 90°
Fev.	0,8	(0,8 : 2) = 0,40 = 40%	0,40 · 360° = 144°
Mar.	0,7	(0,7 : 2) = 0,35 = 35%	0,35 · 360° = 126°
Total	2,0	100%	360°



Fonte: Empresa A.

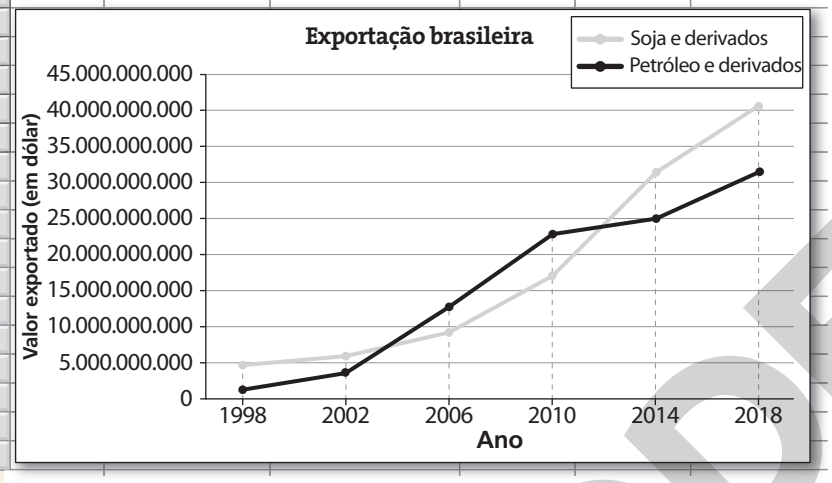
MODERNA

13. a) Para construir o gráfico em uma planilha eletrônica, inicialmente é necessário copiar a tabela na planilha. Em seguida, basta selecionar as células com os dados que serão inseridos no gráfico e escolher a opção para inserir gráfico de linha.

Depois que o gráfico estiver construído, é necessário arrumar os rótulos do eixo que exibe os anos. Além disso, é possível inserir nomes nos eixos, título no gráfico, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

B3 | *Fórmula* | 4757554572

	A	B	C	D	E
1	**Exportação brasileira (em dólar)**				
2	**Ano**	**Soja e derivados**	**Petróleo e derivados**		
3	1998	4.757.554.572	860.253.355		
4	2002	6.006.046.456	3.867.948.792		
5	2006	9.292.080.042	13.004.650.195		
6	2010	17.113.962.266	23.031.430.017		
7	2014	31.407.502.542	25.172.685.937		
8	2018	40.704.436.117	31.637.157.599		
9					
10					



b) Resposta possível: Considerando os anos apresentados, o valor em exportação de petróleo e derivados superou o valor em exportação de soja e derivados apenas em 2006 e em 2010.

Comentário: Verifique se os alunos percebem que, em um gráfico de linha, os pontos representam os dados e as linhas são apenas auxiliares; portanto, não se pode afirmar nada a respeito do período entre dois anos representados no gráfico. Por exemplo, pode-se afirmar que em 2006 e em 2010 o valor em exportação de petróleo e derivados superou o valor em exportação de soja e derivados, mas não se sabe se isso aconteceu também em 2007, 2008 e 2009.

14. a) Para organizar os dados em uma tabela de frequências, inicialmente preenchemos a coluna das frequências absolutas:

Fórmula

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3		
3	5,0	8		
4	6,0	6		
5	7,0	6		
6	8,0	7		
7	9,0	3		
8	10,0	3		
9	**Total**	36		
10				

Para preencher a coluna das frequências relativas, basta digitar, na célula C2, a fórmula:
=B2/$B$9

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Em seguida, é preciso selecionar a célula C2 e arrastar a seleção até a célula C8:

C2	*Fórmula*	=B2/$B$9	
	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	
3	5,0	8	0,2222	
4	6,0	6	0,1667	
5	7,0	6	0,1667	
6	8,0	7	0,1944	
7	9,0	3	0,0833	
8	10,0	3	0,0833	
9	**Total**	36		
10				

O total pode ser calculado digitando-se na célula C9 a fórmula:
=SOMA(C2:C8)

C9	*Fórmula*	=SOMA(C2:C8)	
	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	
3	5,0	8	0,2222	
4	6,0	6	0,1667	
5	7,0	6	0,1667	
6	8,0	7	0,1944	
7	9,0	3	0,0833	
8	10,0	3	0,0833	
9	**Total**	36	1,0000	
10				

Para preencher a coluna das frequências percentuais, basta digitar, na célula D2, a fórmula:
=C2

Em seguida, deve-se formatar a célula para exibir o valor em porcentagem, depois selecionar a célula D2 e arrastar a seleção até a célula D8:

D2	*Fórmula*	=C2	
	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	
10				

O total pode ser calculado digitando-se na célula D9 a fórmula:
=SOMA(D2:D8)

D9	*Fórmula*	=SOMA(D2:D8)	
	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%
10				

b) Para calcular a porcentagem de notas iguais ou acima de 6 e a porcentagem de notas abaixo de 6, também é possível usar a planilha eletrônica. Basta digitar, em duas células quaisquer da planilha (que ainda não estejam sendo usadas), as fórmulas:

=SOMA(D4:D8) ⟶ para a porcentagem de notas iguais ou acima de 6

=SOMA(D2:D3) ⟶ para a porcentagem de notas abaixo de 6

H2	*Fórmula*	=SOMA(D2:D3)					
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**			**Notas iguais ou acima de 6**	**Notas abaixo de 6**
2	4,0	3	0,0833	8,33%			69,44%	30,56%
3	5,0	8	0,2222	22,22%				
4	6,0	6	0,1667	16,67%				
5	7,0	6	0,1667	16,67%				
6	8,0	7	0,1944	19,44%				
7	9,0	3	0,0833	8,33%				
8	10,0	3	0,0833	8,33%				
9	**Total**	36	1,0000	100,00%				
10								

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

MODERNA

Portanto, a porcentagem de notas iguais ou acima de 6 é de 69,44%, e a porcentagem de notas abaixo de 6 é de 30,56%.

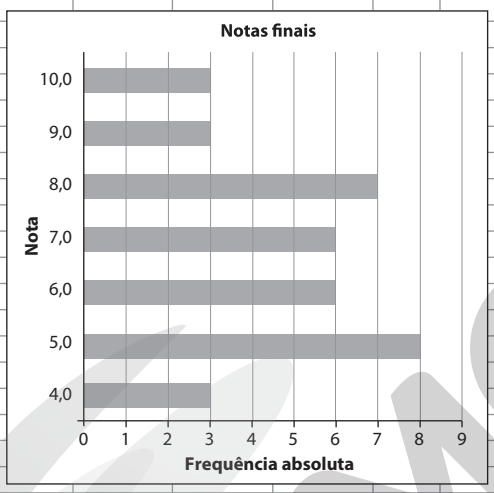
c) Vamos construir os dois tipos de gráfico aproveitando a tabela já construída no item **a**.

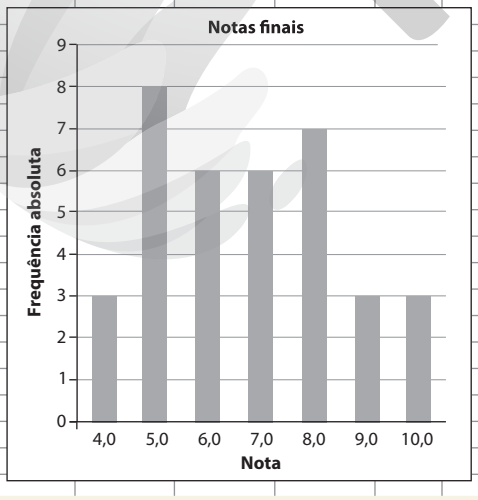
- Para construir o gráfico de barras, basta selecionar os dados da coluna de frequências absolutas e selecionar a opção para inserir gráfico de barras. Há várias opções de estilo para os gráficos de barras (horizontais, verticais, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar dos retângulos).

  Depois que o gráfico estiver construído, é possível personalizar os rótulos do eixo que exibe as notas. Também é possível inserir nomes nos eixos, título no gráfico, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

B2 | *Fórmula* | 3

	A	B	C	D	E	F
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**		
2	4,0	3	0,0833	8,33%		
3	5,0	8	0,2222	22,22%		
4	6,0	6	0,1667	16,67%		
5	7,0	6	0,1667	16,67%		
6	8,0	7	0,1944	19,44%		
7	9,0	3	0,0833	8,33%		
8	10,0	3	0,0833	8,33%		
9	**Total**	36	1,0000	100,00%		



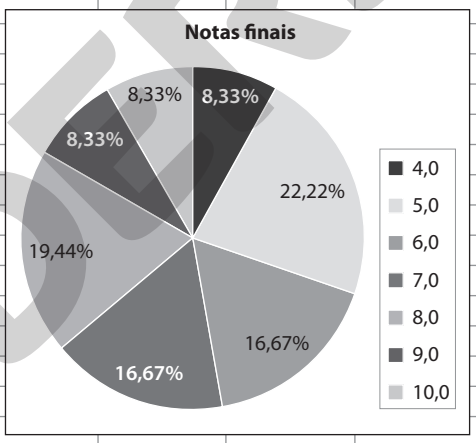


- Para construir o gráfico de setores, pode-se selecionar os dados da coluna de frequências absolutas ou da de frequências percentuais e escolher a opção para inserir gráfico de setores; nesse caso, também há várias opções de estilo para o gráfico.

  Depois que o gráfico estiver construído, é possível personalizar a legenda com as notas finais dos alunos. Também é possível inserir título no gráfico, alterar cores, tamanho, estilo das bordas etc.

D2 | *Fórmula* | =C2

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%



d) Espera-se que os alunos percebam que o tipo de gráfico mais recomendado depende do que se pretende analisar. O gráfico de setores é melhor para representar os dados quando se quer analisar a distribuição de cada nota em relação ao total; o gráfico de barras, por sua vez, é mais indicado quando se deseja deixar evidente o número de alunos que tirou cada uma das notas.

Comentário: Essa questão leva os alunos a refletir sobre a melhor maneira de comunicar uma situação apresentada: a representação tabular ou a gráfica. Na representação gráfica, a opção por diferentes tipos de gráfico depende do objetivo da análise da situação. Por exemplo, quando se quer comparar um dado com o conjunto de dados, isto é, com o todo, convém o uso do gráfico de setores. No caso de comparar um dado com outro dado, o gráfico de barras é mais adequado. O mesmo é válido para os exercícios complementares **3** e **5**.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

Exercícios complementares

1. (I) Falsa.

O pai participa em:

35% + 45% + 7% = 87% → 870 famílias

(II) Verdadeira.

O pai e a mãe participam em:

45% + 7% = 52% → 520 famílias

alternativa c

2. **a)** A população são os internautas brasileiros.

b) A amostra foi composta de 2.000 internautas das classes A, B, C e D de todas as regiões do Brasil.

c) A pesquisa foi realizada pelo IBOPE Conecta, de 21 a 26 de junho de 2018.

d) O fator mais citado foram as *fake news*, citado por 46% das pessoas.

e) Das pessoas pesquisadas, 4,5% responderam se incomodar mais com a exposição exagerada das pessoas. Isso corresponde a:

$$4{,}5\% \text{ de } 2.000 = \frac{4{,}5}{100} \cdot 2.000 = 90$$

E, das pessoas pesquisadas, 46% responderam se incomodar mais com *fake news*. Isso corresponde a:

$$46\% \text{ de } 2.000 = \frac{46}{100} \cdot 2.000 = 920$$

Portanto, 90 pessoas responderam se incomodar mais com a exposição exagerada das pessoas e 920 pessoas com *fake news*.

f) Respostas pessoais.

Comentário: Aproveite a atividade para conversar com os alunos sobre as consequências negativas da internet, como o perigo da exposição exagerada, a ilusão de que a vida dos outros é maravilhosa e muito melhor que a sua, a exposição a notícias falsas, a intolerância, pessoas mal intencionadas etc. Deixe que os alunos exponham suas ideias e experiências sobre o assunto.

3. **a)** A amostra do estudo foram 6.616 jovens com idade média de 12 anos, usuários de todos os tipos de tela.

b) 71% de 6.616 jovens = 0,71 · 6.616 jovens =

= 4.697,36 jovens ≃ 4.697 jovens

Logo, aproximadamente 4.697 jovens pesquisados usam algum dispositivo eletrônico antes de dormir.

c)

Aparelhos preferidos pelos jovens que usam algum dispositivo antes de dormir		
Aparelho	**Cálculo da frequência absoluta**	**Frequência absoluta aproximada**
Smartphone	54% de 4.697 = 2.536,38	2.536
Tablet	44% de 4.697 = 2.066,68	2.067
Televisão	43% de 4.697 = 2.019,71	2.020
Laptop	34% de 4.697 = 1.596,98	1.597
Videogame	28% de 4.697 = 1.315,16	1.315
Media player	21% de 4.697 = 986,37	986
Videogame portátil	21% de 4.697 = 986,37	986
E-book	13% de 4.697 = 610,61	611

d) Espera-se que os alunos percebam que não seria coerente construir um gráfico de setores, pois nesse caso a soma das frequências percentuais é maior que 100%, porque provavelmente os entrevistados puderam escolher mais de um aparelho preferido.

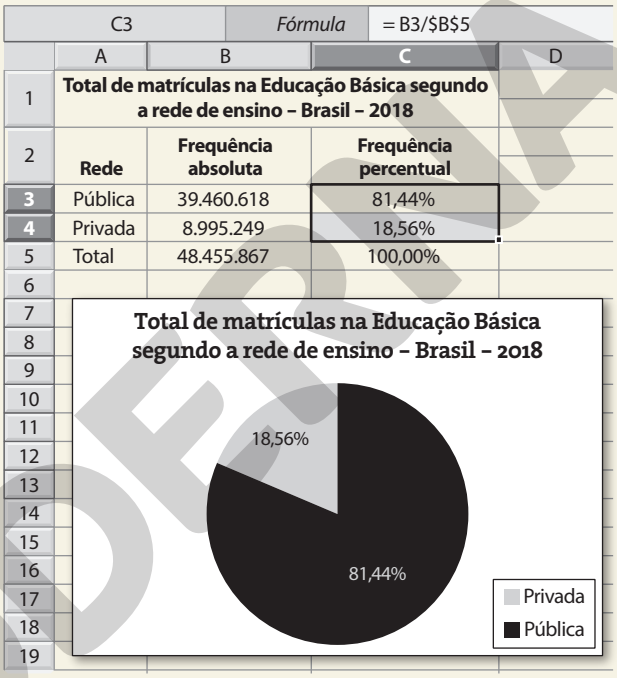
e) Resposta pessoal.

4. Respostas pessoais.

5. **a)** O Censo Escolar é uma pesquisa censitária, pois é realizada em todas as escolas públicas e privadas do país.

b) Em 2018, houve um total de 48.455.867 matrículas na Educação Básica. Desse total, 39.460.618 pertenciam à rede pública e 8.995.249, à rede privada.

c)



NELSON MATSUDA

d) Em 2018 havia 181.939 escolas e, dessas, 22,3% eram privadas:

22,3% de 181.939 escolas = 40.572 escolas

Portanto, em 2018 havia aproximadamente 40.572 escolas privadas no Brasil.

e) Espera-se que os alunos percebam que não é coerente construir um gráfico de setores com as informações do gráfico de barras. Se somarmos o número de escolas que oferece cada segmento de ensino, veremos que essa soma será maior que o total de escolas do país. Isso ocorre já que uma escola pode oferecer mais de um segmento de ensino. Nesse caso, não faz sentido construir um gráfico de setores.

f) Resposta pessoal.

Comentário: Esse exercício é interessante, pois para resolvê-lo os alunos terão de buscar informações específicas entre várias informações fornecidas em diferentes gráficos e textos. Além disso, como as respostas não são imediatas, os alunos precisam saber encontrá-las.

Autoavaliação

1. sexo: qualitativa

tempo de residência: quantitativa

satisfação: qualitativa

frequência: quantitativa

alternativa c

PROIBIDA

2. Nos sábados:

- Homens:
  $35 + 32 + 37 + 39 = 143$
- Mulheres:
  $28 + 30 + 25 + 37 = 120$
- Total de espectadores:
  $143 + 120 = 263$

$\frac{263}{100} = \frac{143}{x} \Rightarrow 263 \cdot x = 14.300 \Rightarrow x \simeq 54$

$y \simeq 100 - 54 \Rightarrow y \simeq 46$

Portanto, o percentual de homens é de aproximadamente 54%, e o percentual de mulheres é de aproximadamente 46%.

Nos domingos:

- Homens:
  $40 + 28 + 28 + 27 = 123$
- Mulheres:
  $30 + 31 + 35 + 33 = 129$
- Total de espectadores:
  $123 + 129 = 252$

$\frac{252}{100} = \frac{123}{x} \Rightarrow 252 \cdot x = 12.300 \Rightarrow x \simeq 49$

$y \simeq 100 - 49 \Rightarrow y \simeq 51$

Portanto, o percentual de homens é de aproximadamente 49%, e o percentual de mulheres é de aproximadamente 51%.

alternativa b

3. $\frac{25}{100} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 100 \cdot x = 25 \cdot 360° \Rightarrow x = 90°$

Portanto, a região 2 representa 25%.

alternativa c

4.

Nota	Número de alunos	Soma das notas
4	2	$4 \cdot 2 = 8$
5	10	$5 \cdot 10 = 50$
6	12	$6 \cdot 12 = 72$
7	8	$7 \cdot 8 = 56$
8	3	$8 \cdot 3 = 24$
10	5	$10 \cdot 5 = 50$
Total	40	260

Fonte: Professor de Matemática.

Razão da soma das notas pelo número de alunos:
$260 : 40 = 6,5$
alternativa d

5. **a)** Das 12 pessoas com 31 anos ou mais, 9 pessoas (a maioria) atribuíram nota acima de 5; portanto, consideram a educação de qualidade acima da média. (correta)

b) Nenhum entrevistado até 25 anos atribuiu nota máxima. (errada)

c) Pela tabela, podemos calcular a soma das notas dadas pelos 32 entrevistados:

$1 \cdot 3 + (2 + 2) \cdot 4 + (2 + 1 + 3) \cdot 5 +$
$+ (4 + 4 + 1 + 1) \cdot 6 + (3 + 1 + 1 + 1) \cdot 7 +$
$+ (1 + 1 + 1) \cdot 8 + (1 + 1) \cdot 9 =$
$= 3 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 =$
$= 3 + 16 + 30 + 60 + 42 + 24 + 18 = 193$

A nota média da pesquisa é dada pelo quociente entre a soma das notas e o total de pessoas entrevistadas na pesquisa.
$193 : 32 \simeq 6$
Como a nota 5 determina qualidade média, então a nota 6 está acima da média. (errada)

d) Pelo que foi descrito nas alternativas anteriores, pode-se perceber que existe relação entre as duas variáveis. (errada)

alternativa a

Compreensão de texto

Aproveite o tema do texto para conversar com os alunos sobre os direitos de toda criança e adolescente, que muitas vezes não são respeitados.

Na atividade final dessa seção, os alunos pesquisarão sobre esses direitos. Após esse trabalho, caso julgue adequado, pode-se pedir a eles que pesquisem notícias divulgadas na mídia sobre os direitos de crianças e adolescentes que não estão sendo respeitados.

1. O assunto principal do texto são os avanços e os desafios na garantia dos direitos da criança e do adolescente.
alternativa c

2. O Fundo das Nações Unidas para a Infância (Unicef) é um órgão da Organização das Nações Unidas (ONU) que tem o mandato de defender e proteger os direitos de crianças e adolescentes, além de ajudar a atender às suas necessidades básicas e de criar oportunidades para que alcancem seu pleno potencial. O Unicef é guiado pela Convenção sobre os Direitos da Criança e é o principal defensor global de meninas e meninos.

3. Resposta pessoal. Provavelmente, a autora quis dizer que apesar de haver uma melhora, comparando os anos de 1990 e 2017, no ano de 2017 houve piora em relação a 2016.

4. A saúde mental, aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

5. Os registros de suicídio de crianças e adolescentes no país passaram de 714, em 2007, para 1.047, em 2017. Então, a porcentagem de aumento foi de:

$\frac{1.047 - 714}{714} = \frac{333}{714} \Rightarrow 0,4664 = 46,64\%$

Comentário: Nas atividades **4** e **5**, volta-se a alguns desafios recentes citados no texto e que merecem um trabalho mais detalhado, como a saúde mental, o aumento no número de suicídios e o *bullying* e *cyberbullying*.
Seria interessante promover com os alunos uma discussão a respeito desses problemas, de como podem agir para combatê-los, ou ajudar alguém que precise de amparo.
O tema suicídio é bem delicado. Caso identifique possíveis sinais de alerta e sinta a necessidade de abordar o tema com mais detalhes, sugerimos que procure um especialista para orientar a forma mais adequada de tratar o assunto em cada caso.

Veja alguns materiais de referência sobre o assunto para a sua leitura, que podem ajudar nas discussões:

- Cartilha *Vamos conversar sobre prevenção ao suicídio*, CPI dos Maus-Tratos Contra Crianças e Adolescentes
  Disponível em: <http://www.crianca.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/04/Vamos-Conversar-sobre-prevencao-ao-Suicidio2.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2020.

MODERNA

- Cartilha *Vamos conversar sobre prevenção da automutilação*, CPI dos Maus-Tratos Contra Crianças e Adolescentes
  Disponível em: <http://www.crianca.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/04/Vamos-Conversar-sobre-prevencao-da-automutilacao2.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2020.

- Cartilha *Vamos conversar sobre* bullying *e* cyberbullying, CPI dos Maus-Tratos Contra Crianças e Adolescentes
  Disponível em: <http://legis.senado.leg.br/sdleggetter/documento/download/62d74dec-0532-48f3-b390-8e9bf1c9f798>. Acesso em: 30 jun. 2020.

- *Guia para pais e educadores*, Centro de Valorização da Vida (CVV)
  Disponível em: <https://www.cvv.org.br/wp-content/uploads/2017/05/guia_CVV_pais_educadores_DIGITAL.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2020.

- *Site* do Centro de Valorização da Vida (CVV) com outros materiais (inclusive vídeos curtos) para jovens, pais, educadores e público em geral
  Disponível em: <https://www.cvv.org.br/conheca-mais/>. Acesso em: 30 jun. 2020.

6. Resposta pessoal.
Comentário: Essa reflexão é de extrema importância, pois as taxas de cobertura vacinal vêm caindo no Brasil; um dos motivos é a desinformação e as informações falsas (as *fake news*) que circulam nas redes sociais e nos grupos de mensagens pela internet. É importante que os alunos desenvolvam um espírito crítico e que aprendam que devem sempre desconfiar e buscar informações em fontes confiáveis, como nesse caso, o Ministério da Saúde. Estimule discussões e reflexões desse tipo.

7. Deixe os alunos escolherem a forma que acharem mais adequada para expor esse trabalho, apenas oriente-os, caso ache necessário.

Capítulo 2 – Análise de dados

Exercícios propostos

1. a)

Conceito	f_i	f_r	F_i	F_r
A	6	18,75%	6	18,75%
B	8	25,00%	14	43,75%
C	10	31,25%	24	75,00%
D	4	12,50%	28	87,50%
E	4	12,50%	32	100,0%
Total	32	100%	—	—

b) 6 alunos obtiveram conceito A (quantidade correspondente à frequência absoluta do conceito A).
c) 8 alunos estão reprovados (quantidade correspondente à soma das frequências absolutas dos conceitos D e E).
d) 31,25% dos alunos obtiveram conceito C (porcentagem correspondente à frequência relativa do conceito C).
e) 25% dos alunos obtiveram conceitos D ou E (porcentagem correspondente à soma das frequências relativas dos conceitos D e E).
f) 43,75% dos alunos obtiveram conceitos A ou B (porcentagem correspondente à frequência relativa acumulada do conceito B).
Comentário: Para esse exercício pode-se utilizar a própria nota da turma em determinada atividade ou avaliação de Matemática, em que os alunos farão a anotação dos valores para posteriormente responder aos quesitos solicitados. Pode-se, ainda, empregar o mesmo padrão de exercício adotando outras grandezas, como idade, altura ou massa dos alunos da sala.

2.

Distância (km)	Frequência absoluta (f_i)
[0, 100[	4
[100, 200[	2
[200, 300[	7
[300, 400[	11
[400, 500[	6

- O uso desse procedimento facilita o estudo da variável quando temos de analisar um grande número de valores diferentes, já que, se fizessemos uma tabela com os valores não agrupados, teríamos uma tabela com 30 dados, cada um com frequência 1. Assim, agrupá-los em intervalos permite uma análise mais imediata da distribuição de frequência da variável.

Comentário: Essa questão, por meio de uma situação particular e contextualizada, conduz o aluno a antecipar a ideia do próximo tópico, "Distribuição de frequência para dados agrupados em intervalos".

3.

Diária (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[100, 130[	73	73	36,5%	36,5%
[130, 160[	48	121	24,0%	60,5%
[160, 190[	40	161	20,0%	80,5%
[190, 220[	24	185	12,0%	92,5%
[220, 250[	15	200	7,5%	100%
Total	200	—	100%	—

a) O extremo inferior da 1ª classe é R$ 100,00.
b) O intervalo que apresenta as diárias mais comuns é o que vai de R$ 100,00 a R$ 130,00, com 73 quartos.
c) 60,5% dos quartos têm diárias inferiores a R$ 160,00.
d) 161 quartos têm diárias menores que R$ 190,00.
e) 39 quartos (24 + 15) têm diárias a partir de R$ 190,00.

4.

Ganho por ação (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[4, 6[	a	4	i	8%
[6, 8[	b	8	j	n
[8, 10[	c	f	22%	o
[10, 12[	8	27	k	p
[12, 14[	d	37	l	74%
[14, 16[	e	g	16%	q
[16, 18[	5	h	m	100%

MODERNA

- Como os intervalos têm amplitude 2 reais, podemos completar os campos dos intervalos.
- Para o intervalo [4, 6[, temos: $a = 4$ e $i = 8\%$
- Para o intervalo [6, 8[, temos: $a + b = 8 \Rightarrow b = 4$
  Como 4 analistas representam 8% do total, então:
  $j = 8\%$
  $n = 8\% + 8\% = 16\%$
- Para o intervalo [8, 10[, temos:
  Como 4 analistas representam 8% do total, então 22% do total de analistas são 11 analistas. Então: $c = 11$
  $8 + c = f \Rightarrow f = 19$
  $n + 22\% = o \Rightarrow o = 38\%$
- Para o intervalo [10, 12[, temos:
  8 analistas correspondem a 16% do total, então:
  $k = 16\%$
  $o + k = p \Rightarrow p = 54\%$
- Para o intervalo [12, 14[, temos: $27 + d = 37 \Rightarrow d = 10$
  10 analistas correspondem a 20% do total, então:
  $l = 20\%$
- Para o intervalo [14, 16[, temos:
  16% dos analistas são 8 analistas, então: $e = 8$
  $37 + e = g \Rightarrow g = 45$
  $74\% + 16\% = q \Rightarrow q = 90\%$
- Para o intervalo [16, 18[, temos: $g + 5 = h \Rightarrow h = 50$
  5 analistas representam 10% do total, então: $m = 10\%$

Logo, a tabela completa fica assim:

Ganho por ação (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[4, 6[	4	4	8%	8%
[6, 8[	4	8	8%	16%
[8, 10[	11	19	22%	38%
[10, 12[	8	27	16%	54%
[12, 14[	10	37	20%	74%
[14, 16[	8	45	16%	90%
[16, 18[	5	50	10%	100%

5. a) Elaborando a tabela em uma planilha eletrônica, teremos:

NELSON MATSUDA

B8	*Fórmula*	= SOMA(B2:B7)		
	A	B	C	D	E
1	**Número de focos de queimadas**	**Número de Unidades Federativas (f_i)**	F_i	f_r	F_r
2	[0, 50.000[	16	16	59,3%	59,3%
3	[50.000, 100.000[	4	20	14,8%	74,1%
4	[100.000, 150.000[	4	24	14,8%	88,9%
5	[150.000, 200.000[	0	24	0,0%	88,9%
6	[200.000, 250.000[	1	25	3,7%	92,6%
7	[250.000, 300.000[	2	27	7,4%	100,0%
8	**Total**	27		100,0%	
9					

Comentário: As colunas de frequências relativas mostram valores aproximados com uma casa decimal. Comentar com os alunos que na planilha é possível configurar as células para mostrar os valores com mais casas decimais.

b) 20 Unidades Federativas (frequência absoluta acumulada até 100.000).

c) Aproximadamente 11,1% das Unidades Federativas (3,7% + 7,4%) tiveram 200.000 focos ou mais.

6. a) 150, 200, 208, 468, 624, 624, 676, 728, 780, 832, 988, 988, 1.040, 1.092, 1.196, 1.248, 1.404, 1.710, 1.716, 1.976, 2.028, 2.132, 2.132, 2.132, 2.132, 2.236, 2.392, 2.704, 2.948, 3.172, 3.174, 3.208, 3.728, 3.926, 3.959, 4.040, 4.108, 4.404, 4.472, 5.132, 5.928

b) Resposta possível: Escolhendo a amplitude de 900 reais para cada intervalo, temos a distribuição apresentada na tabela abaixo:

Contribuição fiscal (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[150, 1.050[	13	13	32,5%	32,5%
[1.050, 1.950[	6	19	15,0%	47,5%
[1.950, 2.850[	8	27	20,0%	67,5%
[2.850, 3.750[	5	32	12,5%	80,0%
[3.750, 4.650[	6	38	15,0%	95,0%
[4.650, 5.550[	1	39	2,5%	97,5%
[5.550, 6.450[	1	40	2,5%	100%
Total	40	—	100%	—

c) Resposta possível: O intervalo de contribuições fiscais de maior ocorrência nessa distribuição é o primeiro intervalo: de 150 reais a 1.050 reais.

7. Resposta pessoal.

Comentário: Caso os alunos tenham dificuldades em escolher a variável a investigar, pode-se sugerir algumas opções, como: número de pessoas que moram em sua casa, número de irmãos, quantidade de livros lidos no último ano, número do calçado, tempo de deslocamento de casa até a escola, altura, massa, tempo diário de estudo fora do horário de aula etc.

Verificar se os alunos percebem quando é coerente ou não organizar os dados em intervalos. Se necessário, após construírem as tabelas, escolha alguns casos para compartilhar com a turma para que eles avaliem essa questão. Mostre que, quando não há grande variedade de dados diferentes, a organização dos dados em intervalos não é conveniente (por exemplo, caso a variável observada seja o número de irmãos, e na turma os números variem entre 0, 1, 2, 3 e 4, não seria coerente organizar esses dados em intervalos).

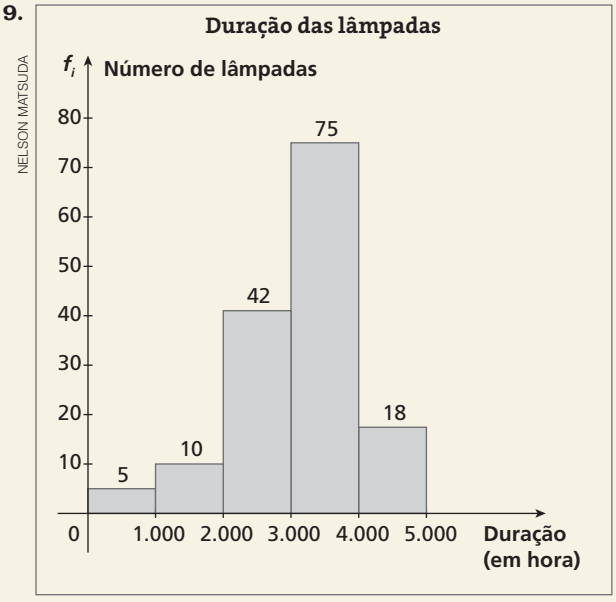
8.

Número de ligações	Número de setores (f_i)	F_i	f_r	F_r
0 ⊢ 10	15	15	15%	15%
10 ⊢ 20	35	50	35%	50%
20 ⊢ 30	15	65	15%	65%
30 ⊢ 40	15	80	15%	80%
40 ⊢ 50	5	85	5%	85%
50 ⊢ 60	5	90	5%	90%
60 ⊢ 70	5	95	5%	95%
70 ⊢ 80	5	100	5%	100%
Total	100	—	100%	—

Fonte: Empresa MBA.

MODERNA

9.



NELSON MATSUDA

Fonte: Fábrica de lâmpadas Ilumine.

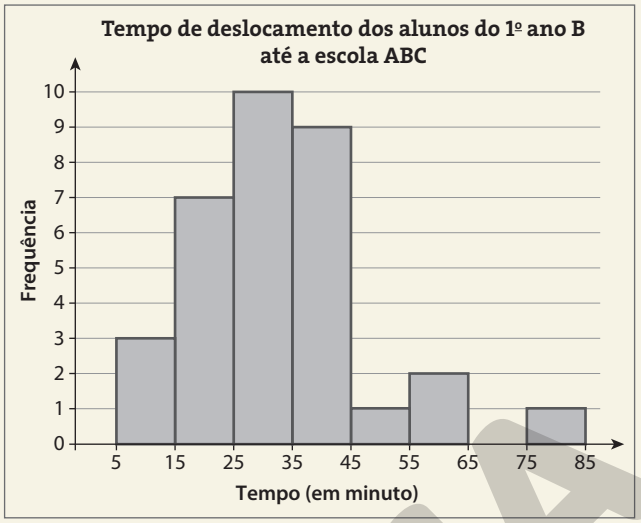
Para construir um diagrama de ramo e folhas seria necessário conhecer cada um dos dados, e não somente sua distribuição nos intervalos; portanto, não seria possível construir um diagrama de ramo e folhas nesse caso.

10. **a)** Para determinar a quantidade de alunos da turma, basta contar o número de folhas do diagrama (cada folha corresponde a um aluno). Assim, há 33 alunos na turma.

b) Resposta possível:

Tempo de deslocamento dos alunos do 1º ano B até a escola ABC	
Tempo (em minuto)	**Frequência (f_i)**
5 ⊢ 15	3
15 ⊢ 25	7
25 ⊢ 35	10
35 ⊢ 45	9
45 ⊢ 55	1
55 ⊢ 65	2
65 ⊢ 75	0
75 ⊢ 85	1

Dados obtidos pelos alunos do 1º ano B.



NELSON MATSUDA

Dados obtidos pelos alunos do 1º ano B.

c) Os alunos poderão responder que, de acordo com o diagrama, os deslocamentos estão mais concentrados entre 20 e 40 minutos ou dar outra resposta de acordo com a escala adotada no item **b** (no nosso caso, entre 25 e 45 minutos).

d) Há um valor bem maior que os demais na distribuição, o valor 84 minutos.

11. **a)** Na representação 1 há menos perda de informações sobre os dados, já que cada um deles está expresso no diagrama.

b) A representação 3 resumiu mais os dados, pois distribuiu os dados em intervalos com maior amplitude, porém, pelo mesmo motivo, apresentou maior perda de informações.

c) 27 apartamentos gastaram menos de R$ 150,00 em energia elétrica nesse mês.
Esse valor pode ser obtido da contagem de todas as folhas dos ramos de 8 a 14 (valores que vão de 82 a 149 reais) na representação 1, ou da adição das frequências dos intervalos de [80, 90[até [140, 150[na representação 2.

d) Sim, 3 apartamentos gastaram mais de R$ 200,00 em energia elétrica.
Não é possível responder a essa questão somente observando a representação 3, pois nesse histograma o último intervalo é [192, 214[, cuja frequência é 4. Assim, desse gráfico concluímos que, 4 apartamentos gastaram de 192 (inclusive) a 214 reais, mas não sabemos como é a distribuição dos valores nesse intervalo, poderiam ser todos valores menores que 200.

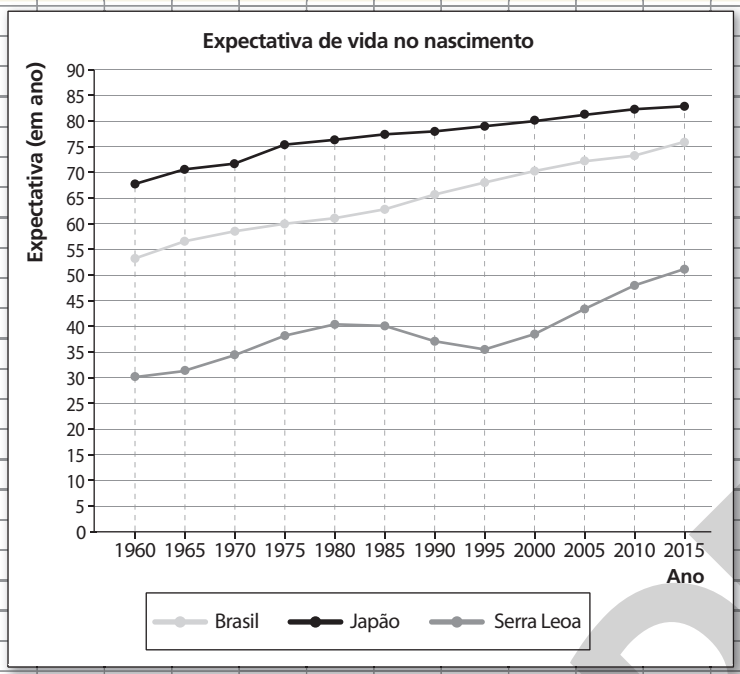
e) Sim, 1 dos apartamentos do condomínio gastou R$ 130,00 em energia elétrica. Para responder a essa questão é necessário consultar a representação 1, a única que preservou os valores dos dados.

MODERNA

12. • Resposta possível:

B3 | Fórmula | 54,241

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Expectativa de vida no nascimento**												
2	**País / Ano**	**1960**	**1965**	**1970**	**1975**	**1980**	**1985**	**1990**	**1995**	**2000**	**2005**	**2010**	**2015**
3	Brasil	54,241	56,794	59,154	60,782	61,983	63,514	65,300	67,600	70,055	72,040	73,838	75,284
4	Japão	67,666	70,202	71,950	75,057	76,092	77,650	78,837	79,536	81,076	81,925	82,843	83,794
5	Serra Leoa	30,371	31,572	34,601	38,468	40,641	40,312	37,348	35,729	38,702	43,624	48,224	51,423



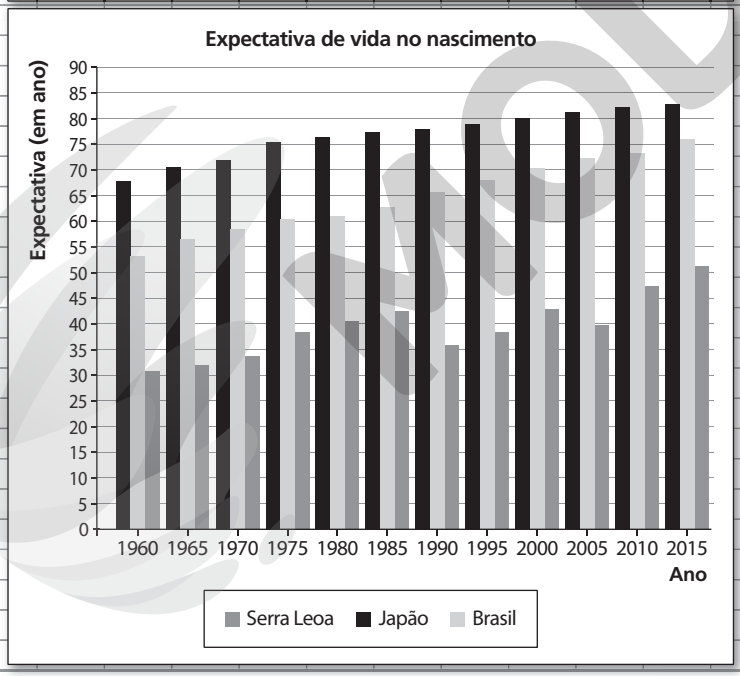


ILUSTRAÇÃO: NELSON MATSUDA

- Espera-se que os alunos percebam que não seria coerente construir um ou mais gráficos de setores para representar esses dados, pois o gráfico de setores é usado para comparar as partes com o todo, e nesse caso não faria nenhum sentido construir um gráfico desse tipo. O mais coerente seria o gráfico de linhas múltiplas, que permite uma comparação da variável ao longo de intervalos uniformes de tempo, ou um gráfico de barras múltiplas horizontais ou verticais.

MODERNA

13. a) Espera-se que os alunos percebam que não seria coerente, pois, se cada símbolo representasse 1.000.000 de habitantes, teríamos de arredondar todos os valores da tabela para 500.000 (e representá-los por meio símbolo) ou para zero; em ambos os casos, isso seria incoerente e provocaria falsas interpretações.

b) Resposta possível:

Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=22367&t=resultados>. Acesso em: 25 maio 2020.

c) Resposta pessoal.

Comentário: Em geral, o IBGE publica anualmente estimativas populacionais para todos os municípios do Brasil. Caso os alunos não encontrem a população atualizada do município, oriente-os a fazer a busca no *site* do IBGE.

14. a) Verdadeira. A porcentagem de entrevistados que já sofreu preconceito por cada um dos motivos aumentou de 2007 para 2018.

b) Verdadeira. Em 2018, 26% dos 2.077 entrevistados sofreram preconceito por causa da sua religião: 26% de $2.077 = 0{,}26 \cdot 2.077 \simeq 540$

c) Falsa. Não é possível afirmar nada sobre o número absoluto de pessoas que já havia sofrido preconceito por cada um dos motivos em 2007, pois não sabemos quantas pessoas foram entrevistadas nessa data.

d) Verdadeira. O motivo de preconceito mais frequente entre os entrevistados foi a classe social, com 21% em 2007 e 30% em 2018.

e) Verdadeira. A população em investigação da pesquisa foram todos os brasileiros com 16 anos ou mais.

- Resposta pessoal.

15. a) 76 de cada 100 alunos conclui o Ensino Fundamental 2, ou seja: $\frac{76}{100}$ ou 76%

b) 64 de cada 100 alunos conclui o Ensino Médio, ou seja: $\frac{64}{100}$ ou 64%

c) 90 de cada 100 alunos conclui o Ensino Fundamental 1, ou seja: $\frac{90}{100}$ ou 90%

Desses 90% dos alunos, 60,7% conclui com conhecimento adequado em Português:
60,7% de 90% = $0{,}607 \cdot 0{,}90 = 0{,}5463 = 54{,}63\%$
Portanto, 54,63% dos alunos concluem o Ensino Fundamental 1 com o conhecimento adequado em Português.

d) 64% dos alunos conclui o Ensino Médio.
Desses 64% dos alunos, 9,1% conclui com conhecimento adequado em Matemática:
9,1% de 64% = $0{,}091 \cdot 0{,}64 = 0{,}05824 = 5{,}824\%$
Portanto, 5,824% dos alunos que entram na escola concluem o Ensino Médio com o conhecimento adequado em Matemática.

16. alternativa b

a) Correta. Da observação das alturas das barras totais é possível concluir que o número total de automóveis vem crescendo de janeiro de 2004 a janeiro de 2019.

b) Incorreta. Em janeiro de 2007 havia menos de 5 milhões de automóveis na região Nordeste (no gráfico, a altura da barrinha amarela é menor que o intervalo entre duas linhas auxiliares, que representa 5 milhões de automóveis).

c) Correta. Observando todas as datas apresentadas no gráfico, é possível verificar claramente que as alturas das barras roxas são menores que as das demais barrinhas da mesma data e as das barras laranjas são maiores que as das demais; ou seja, em todas as datas, a região Norte era a que tinha menos automóveis e a região Sudeste era a que tinha mais automóveis.

d) Correta. A altura da barra total correspondente a janeiro de 2016 está muito próxima da linha de 50 milhões de automóveis, e a altura da barra laranja ultrapassa a linha de 25 milhões; ou seja, a região Sudeste tinha mais da metade do total de automóveis.

e) Correta. Em janeiro de 2019, a região Sudeste tinha aproximadamente 30 milhões de automóveis, mais que o total de automóveis do Brasil em janeiro de 2007.

17. a) Verdadeira. Em 2013 o número de inscritos no Enem foi de 7,1 milhões.

b) Verdadeira. No gráfico de barras é possível verificar que o número total de inscritos no Enem 2019 foi exatamente 5.095.308.

c) Verdadeira. Pelo gráfico de linha, é possível concluir que o ponto mais alto (8,7 milhões) corresponde ao número de inscritos em 2014.

d) Verdadeira. Pelo gráfico de inscritos em 2019 por região, é possível ver que a região Sudeste foi a região que teve maior porcentagem do total de inscritos (35,2%) e, como consequência, o maior número de inscritos.

e) Verdadeira. Em 2019, dos 5.095.308 inscritos, 0,62% eram indígenas:
0,62% de $5.095.308 = 0{,}0062 \cdot 5.095.308 \simeq 31.591 \simeq$
$\simeq 31{,}6$ mil

f) Falsa. No período de 1998 a 2014 houve queda no número de inscritos de 2003 a 2004, de 2006 a 2007, e de 2008 a 2009.

g) Verdadeira. A porcentagem x de inscritos no Enem 2019 do sexo feminino é dada por:
$x \cdot 5.095.308 = 3.031.798 \Rightarrow x \simeq 59{,}5\%$

h) Verdadeira. Pela observação do gráfico de linha, de 2016 a 2019 o número de inscritos no Enem caiu a cada ano.

i) Falsa. Na primeira edição do exame (1998) houve 0,1 milhão de inscritos, que é o mesmo que 100.000 inscritos.

18. a) Verdadeira. Pela observação do gráfico que mostra o número de estabelecimentos, podemos identificar que a região Norte tinha 1.516 escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena.

b) Falsa. A região que tinha mais escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena era a região Norte (parte rosa no gráfico que mostra o número de estabelecimentos).

MODERNA

c) Falsa. No Brasil havia 2.242 escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena. Essas escolas representavam 69,9% de todas as escolas indígenas. Assim, o número x de escolas indígenas no Brasil era:

$$0{,}699 \cdot x = 2.242 \Rightarrow x = \frac{2.242}{0{,}699} \simeq 3.207$$

d) Falsa. Na região Sudeste havia 41 escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena. Essas escolas representavam 56,2% de todas as escolas indígenas da região Sudeste. Assim, o número y de escolas indígenas na região Sudeste era:

$$0{,}562 \cdot y = 41 \Rightarrow x = \frac{41}{0{,}562} \simeq 73$$

e) Falsa. 69,9% das escolas indígenas brasileiras ofereciam aulas utilizando a língua indígena, mas não sabemos que porcentagem essas escolas representavam do total de escolas do Brasil.

- Resposta pessoal.

19. a) De acordo com os gráficos a escola que obteve a maior pontuação no quesito alegoria foi a Samba Nascente, com 30 pontos.

b) De acordo com os gráficos a escola que obteve o menor número de quesitos com pontuação máxima (30 pontos) foi a Samba Nascente, com 6 quesitos.

c) Apenas com as informações do enunciado e dos gráficos não é possível responder à pergunta.

20. Resposta pessoal.

Exercícios complementares

1. A porcentagem de usuários dessa faixa etária que usa a internet uma vez por semana ou mais é dada pela soma das porcentagens de usuários que usam a internet mais de uma vez por dia, pelo menos uma vez por dia e pelo menos uma vez por semana: 71% + 17% + 6% = 94%

2. a) Da contagem das ocorrências no diagrama de ramo e folhas, temos o seguinte número de regiões em cada uma das classificações:
Boa (índice de 0 a 40): 8
Moderada (índice de 41 a 80): 14
Ruim (índice de 81 a 120): 1
Muito ruim (índice de 121 a 200): 1
Péssima (índice acima de 200): 0

b) São consideradas de grupos sensíveis crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas.

c) Quando a qualidade do ar está ruim, toda a população pode apresentar sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta. Pessoas de grupos sensíveis podem apresentar efeitos mais graves à saúde.

3. a) O gráfico fornece os 10 parques mais visitados do Brasil, suas áreas e quantidade de visitantes em 2018.

b) O parque que recebeu mais visitantes em 2018 foi o Parque Nacional da Tijuca, no Rio de Janeiro, que recebeu 2,6 milhões de visitantes.

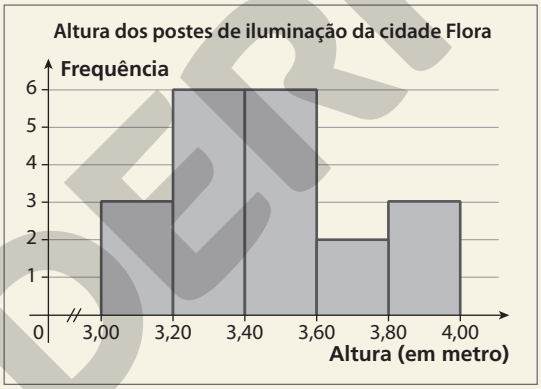
c) O parque citado com maior área é o Parque Nacional do Iguaçu, no Paraná, com 185.262 hectares. Vamos converter essa área em quilômetro quadrado.
Sabemos que:
1 hectare = 10.000 m² = 0,01 km²
Então:
185.262 hectares = 185.262 · 0,01 km² = 1.852,62 km²
Portanto, o parque citado com maior área é o Parque Nacional do Iguaçu, no Paraná, com 1.852,62 km².

d) O Parque Nacional marinho de Fernando de Noronha, no Pernambuco, recebeu 526 mil visitantes em 2018.

e) Resposta pessoal.
Se possível, promova com a turma uma discussão sobre os Parques Nacionais, suas belezas naturais e a importância de conservar esses locais.

4. Resposta possível:

Altura (em metro)	f_i	F_i	f_r	F_r
3,00 ⊢— 3,20	3	3	15%	15%
3,20 ⊢— 3,40	6	9	30%	45%
3,40 ⊢— 3,60	6	15	30%	75%
3,60 ⊢— 3,80	2	17	10%	85%
3,80 ⊢— 4,00	3	20	15%	100%
Total	20	—	100%	—



Fonte: Cidade Flora.

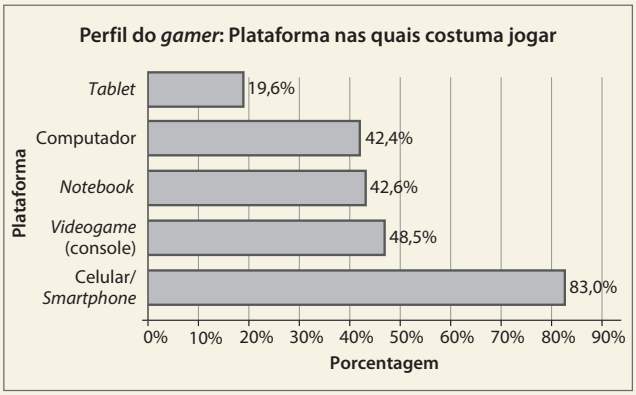
5. a) Foram considerados *gamers* aqueles que tinham o hábito de jogar jogos eletrônicos, que, de acordo com o primeiro gráfico, eram 66% dos entrevistados.

b) De acordo com o gráfico do perfil do *gamer* por gênero, podemos concluir que a maioria é do gênero feminino (53% dos *gamers*).

c) A faixa etária mais frequente entre os *gamers* é de 25 a 34 anos (37,7% dos *gamers*).

d) A plataforma mais usada é o celular/*smartphone* (usada por 83,0% dos *gamers*).

e) Resposta possível:



Dados obtidos em: <https://www.pesquisagamebrasil.com.br/pt/pesquisa-game-brasil-2020/>. Acesso em: 30 jun. 2020.

ILUSTRAÇÕES NELSON MATSUDA

MODERNA

Comentário: Neste item, os alunos devem ficar atentos ao tipo de gráfico que vão utilizar, pois nem todo gráfico é adequado para representar os dados. Não faria nenhum sentido, por exemplo, construir um gráfico de setores (pois nesse caso provavelmente os entrevistados puderam escolher mais de uma plataforma), ou gráficos usados para variáveis quantitativas, como o gráfico de linha, histograma, diagrama de ramo e folhas etc.

f) Resposta pessoal.

6. a) Watt é uma unidade derivada do SI possuidora de nome e símbolo especial, usada para medir potência ou fluxo radiante. (Dados obtidos em: <http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/si_versao_final.pdf>. Acesso em: 25 maio 2020.)

b) O potencial de geração de energia eólica no Brasil era estimado em cerca de 500 gigawatts (GW).

c) Em 2018, a potência instalada de energia eólica era de 14.418 MW.
Para saber a porcentagem que essa potência instalada representava do potencial de geração brasileiro, é necessário que ambas as medidas estejam na mesma unidade.
Os prefixos mega (M) e giga (G) correspondem a uma multiplicação da unidade pelos fatores 10^6 e 10^9, respectivamente.
Assim, 1 MW = 10^6 W e 1GW = 10^9 W, ou ainda:
1GW = 10^3 MW
Logo, o potencial de geração de energia eólica no Brasil era estimado em cerca de 500 GW ou 500.000 MW.
Assim, a porcentagem solicitada é:

$$\frac{14.418}{500.000} = 0,028836 = 2,8836\%$$

7. a) Falsa. O saldo de lojas abertas no 3º trimestre de 2017 foi próximo de zero. Isso não significa que não foram abertas ou fechadas lojas, mas que o número de lojas abertas foi muito próximo do número de lojas fechadas.

b) Falsa. A diferença entre o número de lojas abertas e o número de lojas fechadas foi de –39.

c) Verdadeira. O 4º trimestre de 2018 foi o que teve o maior saldo de lojas abertas do período apresentado.

d) Falsa. Pode-se afirmar que no 1º trimestre de 2017 houve o menor saldo de lojas abertas, com 8.844 mais lojas fechadas do que abertas, porém não se sabe se o número de lojas fechadas foi menor que em outros períodos.

e) Falsa. Do gráfico, pode-se concluir que, no 1º trimestre de 2019, o saldo foi 645 hipermercados e supermercados abertos, mas não se sabe o número de supermercados abertos e fechados nesse período.

f) Verdadeira. Para o segmento de livrarias e papelarias no 1º trimestre de 2019, o saldo, diferença entre o número de lojas abertas e o de lojas fechadas, foi negativo, então o segmento teve mais lojas fechadas do que abertas nesse período.

8. a) O gráfico apresenta, para a região metropolitana de Salvador, as taxas de desemprego aberto e oculto em cada um dos meses de 2018 e as taxas de desemprego total em cada mês de 2017.

b) Em dezembro de 2018, na região metropolitana de Salvador, a taxa de desemprego aberto foi 16,7% e a de desemprego oculto foi 8,7%.

c) No gráfico podemos encontrar a informação de que a taxa de desemprego total em cada mês é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto, então, em cada mês temos:
Janeiro/2018: 18,3% + 6,7% = 25%
Fevereiro/2018: 18,8% + 6,7% = 25,5%
Março/2018: 18,7% + 7,0% = 25,7%
Abril/2018: 18,1% + 7,1% = 25,2%
Maio/2018: 17,9% + 7,2% = 25,1%
Junho/2018: 17,7% + 7,3% = 25%
Julho/2018: 18,1% + 7,5% = 25,6%
Agosto/2018: 17,7% + 7,6% = 25,3%
Setembro/2018: 18,2% + 8,4% = 26,6%
Outubro/2018: 17,5% + 9,2% = 26,7%
Novembro/2018: 17,0% + 9,3% = 26,3%
Dezembro/2018: 16,7% + 8,7% = 25,4%

d) Comparando cada mês de 2018 com o mesmo mês de 2017, temos que a taxa de desemprego total na região foi maior em 2018 nos meses de fevereiro a dezembro.

9. a) Verdadeira. Da observação do gráfico, podemos concluir que o percentual da população brasileira com até 39 anos é dada por:
12,9% + 15,1% + 14,9% + 15,9% = 58,8%

b) Verdadeira. A região Centro-Oeste tinha 15.963.500 pessoas e, dessas, 13,1% tinham 60 anos ou mais:
13,1% de 15.963.500 = 0,131 · 15.963.500 ≃ ≃ 2.091.219
Logo, a população da região com 60 anos ou mais era de aproximadamente 2,1 milhões.

c) Falsa. Apesar de a região Norte ter o maior percentual (15,9%) de pessoas com até 9 anos, o número de pessoas com essa faixa etária nessa região não é maior que em todas as outras regiões.
Número de pessoas com até 9 anos em cada região:
Norte: 15,9% de 17.870.875 = 0,159 · 17.870.875 ≃ ≃ 2.841.469
Nordeste: 13,9% de 56.617.671 = 0,139 · 56.617.671 ≃ ≃ 7.869.856
Sudeste: 11,8% de 87.690.926 = 0,118 · 87.690.926 ≃ ≃ 10.347.529
Sul: 12,1% de 29.710.321 = 0,121 · 29.710.321 ≃ ≃ 3.594.949
Centro-Oeste: 13,4% de 15.963.500 = 0,134 · · 15.963.500 = 2.139.109

d) Verdadeira. O percentual de pessoas com 60 anos ou mais no Brasil era de 15,4%, enquanto o de pessoas com até 9 anos era de 12,9%, então o número absoluto de pessoas com 60 anos ou mais era maior que o número de pessoas com até 9 anos.

e) Verdadeira. Da observação do gráfico, podemos concluir que as regiões Sul e Sudeste eram as que tinham as maiores porcentagens de pessoas de 60 anos ou mais (16,9% e 17,1%, respectivamente).

10. Resposta pessoal.

Autoavaliação

1. A distribuição de frequências é uma tabela com dados agrupados por intervalo ou não, que mostra a relação entre a variável e a frequência.
alternativa d

MODERNA

2. $A = 90 + 210 + 180 + 120 = 600$

$B = \frac{210}{600} = 35\%$

$C = \frac{120}{600} = 20\%$

alternativa d

3. Em um histograma, no eixo das abscissas representamos a amplitude de cada classe e, no eixo das ordenadas, a frequência (absoluta ou relativa) de cada classe.
alternativa a

4. Em um diagrama de ramo e folhas, uma linha vertical separa os ramos e as folhas.
alternativa c

5. De acordo com o gráfico, no 3º bimestre a empresa vendeu: $10 \cdot 50$ mil unidades = 500 mil unidades
alternativa b

6. Da observação do gráfico, dos alunos do 2º ano A, 12,5% tiveram nota A, 50% tiveram nota B, 27,5% tiveram nota C e 10% tiveram nota D. Como a turma tem 40 alunos, temos:

Nota A: 12,5% de 40 alunos = 5 alunos

Nota B: 50% de 40 alunos = 20 alunos

Nota C: 27,5% de 40 alunos = 11 alunos

Nota D: 10% de 40 alunos = 4 alunos

alternativa c

7. O gráfico de linha, o diagrama de ramo e folhas e o histograma não são coerentes para representar uma variável qualitativa, já o gráfico de barras é coerente tanto para variáveis quantitativas como qualitativas.
alternativa b

Compreensão de texto

1. A intenção do texto é mostrar que alguns gráficos podem ser construídos de modo que levem a uma interpretação errada.
alternativa c

2. Resposta pessoal.

3. A razão da altura da coluna B pela coluna A em cada gráfico é:

gráfico 1: $\frac{30}{70} = \frac{3}{7}$

gráfico 2: $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

Então, a diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é:

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{5} = \frac{15 - 7}{35} = \frac{8}{35}$$

alternativa e

4. **a)** Para mostrar a oferta de ações do tipo *follow-on* em 2010 foi quebrada a escala na representação da barra correspondente.

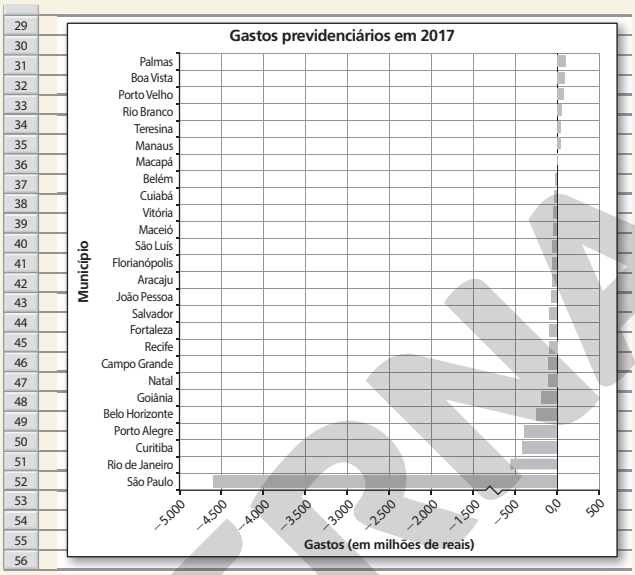
b) Com a quebra na escala, não fica evidente a real dimensão do valor destoante dos demais.

5. **a)** O gráfico é um gráfico de barras horizontais.

b) O comprimento das barras não é proporcional aos valores que elas representam, em especial a barra que representa os gastos previdenciários de São Paulo não é proporcional às outras barras.

c) Para representar os gastos de São Paulo, a barra foi "dobrada", não mostrando a real dimensão dos dados. A barra que representa esses gastos deveria ter comprimento aproximadamente igual a dez vezes o comprimento da barra que representa os gastos de Porto Alegre.

d) Resposta possível:



NELSON MATSUDA

6. **a)** Esse é um gráfico de linha.

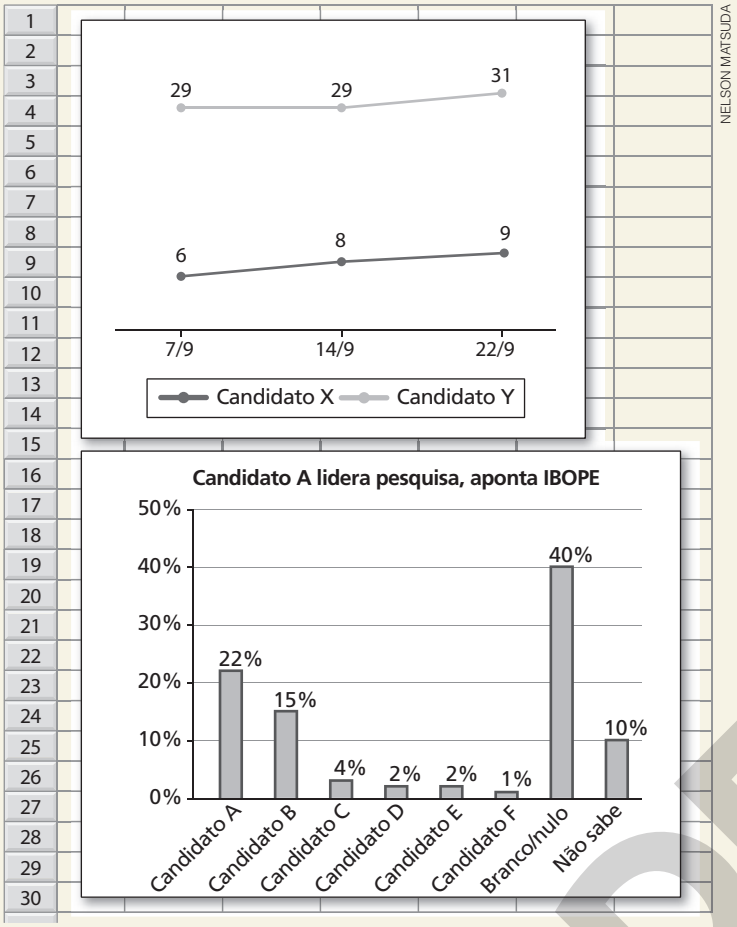
b) Espera-se que os alunos percebam que o tipo de gráfico escolhido não é adequado, pois o gráfico de linha é indicado para mostrar a variação dos valores de uma variável ao longo do tempo. Nesse caso, seria mais indicado construir, por exemplo, um gráfico de barras.

c) Possivelmente no primeiro valor do eixo horizontal a faixa etária seria "< 5 anos", para que as faixas etárias apresentadas cobrissem toda a população, qualquer que fosse a idade.

7. **a)** Espera-se que os alunos percebam que esses gráficos não foram bem construídos, e que por eles um leitor desatento poderia ser levado a uma interpretação equivocada dos fatos.
No primeiro gráfico, por exemplo, a ascensão do candidato X nas datas apresentadas é desproporcional aos valores exibidos, dando a impressão de que as intenções de voto no candidato X cresceram muito mais do que as do candidato Y (observe que a variação total do candidato X foi de 3%, enquanto a do candidato Y foi de 2%), fazendo com que, em 22/09, a altura do ponto correspondente às intenções de voto do candidato X (9%) fosse mais que a metade da altura do ponto correspondente do candidato Y (31%).
No segundo gráfico, a barra do candidato A é muito mais alta que as outras, dando a impressão de que a vantagem do candidato A é bem superior à que realmente é. Essa barra se aproxima da linha dos 90%, porém, corresponde a 22%. Todas as outras barras não respeitam a proporção, algumas de forma bem clara, por exemplo, o candidato B tem 15% e sua barra ultrapassa a linha dos 20%, assim como a barra do candidato C, que representa 4% e ultrapassa a linha dos 10%, a de intenções de votos brancos e nulos, que ultrapassa a linha dos 40%, e a dos leitores indecisos, que representa 10%, mas que está bem abaixo da linha dos 10%, inclusive mais baixa que a barra do candidato D, que tem 3% das intenções de voto.

MODERNA

b) Resposta possível:



NELSON MATSUDA

Capítulo 3 – Medidas estatísticas

Exercícios propostos

1. a) $\bar{x} = \frac{12 + 13 + 14 + 1 + 2 + 3 + 12 + 11 + 11 + 11}{10}$

$\bar{x} = \frac{90}{10}$

$\bar{x} = 9$

Agora, vamos colocar os dados em ordem crescente:

1, 2, 3, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 14

Como temos 10 valores, a mediana será a média aritmética dos dois termos centrais, que ocupam a 5ª e a 6ª posições. Assim: $Me = \frac{11 + 11}{2} = 11$

Para esses valores, a moda é $Mo = 11$.

b) $\bar{x} = \frac{51 + 4 + 34 + 78 + 65 + 90 + 106}{7} = \frac{428}{7}$

$\bar{x} \simeq 61{,}14$

Colocando os valores em ordem crescente, temos:

4, 34, 51, 65, 78, 90, 106

Como temos 7 valores, a mediana será o termo central, que ocupa a 4ª posição. Assim: $Me = 65$

Como todos os valores aparecem com a mesma frequência, não existe moda.

c) $\bar{x} = \frac{4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{15} = \frac{47}{15}$

$\bar{x} \simeq 3{,}13$

Como temos 15 valores, a mediana é o termo central, que ocupa a 8ª posição. Assim: $Me = 4$

Esse conjunto de valores é trimodal, pois apresenta três modas: 1, 4 e 5.

d) $\bar{x} = \frac{7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7}{7} = \frac{49}{7}$

$\bar{x} = 7$

Como temos 7 valores, a mediana é o termo central, que ocupa a 4ª posição. Assim: $Me = 7$

Para esses valores, a moda é $Mo = 7$.

e) $\bar{x} = \frac{-10 - 6 - 6 - 4 - 1 - 3}{6} = \frac{-30}{6}$

$\bar{x} = -5$

MODERNA

Colocando os dados em ordem crescente, temos:

$-10, -6, -6, -4, -3, -1$

Como temos 6 valores, a mediana será a média aritmética dos dois termos centrais, que ocupam a 3ª e a 4ª posições. Assim: $Me = \frac{-6 - 4}{2} = -5$

Para esses valores, a moda é $Mo = -6$.

Comentário: Avaliar a conveniência de pedir aos alunos que estimem os resultados mentalmente, com aproximações, e que, depois, façam os cálculos no caderno e comparem esses resultados com as estimativas.

2. a) Vamos calcular o consumo médio do período de 12 meses.

$\bar{x} = \frac{y}{z}$, em que y é a soma dos valores mensais referentes ao consumo de energia elétrica e z é a quantidade de valores.

$y = 50 + 294 + 267 + 272 + 279 + 297 + 262 + 257 + 226 + 244 + 298 + 50 = 2.796$

$z = 12$

Assim:

$\bar{x} = \frac{2.796}{12} = 233$

O consumo médio do período foi 233 quilowatt-hora.

b) Ordenando os dados, temos:

$50, 50, 226, 244, 257, \underbrace{262, 267}_{\text{termos centrais}}, 272, 279, 294, 297, 298$

$Me = \frac{262 + 267}{2} = \frac{529}{2} = 264,5$

O consumo mediano foi 264,5 quilowatt-hora.

c) Nesse caso, o valor mediano representa melhor o consumo de energia elétrica da casa, pois ele não é afetado por consumos com valores muito baixos, diferentemente do valor médio.

3. a) $\bar{x} = \frac{3.270 + 3.649 + 3.381 + 3.541 + 3.258 + 3.533}{6}$

$\bar{x} = \frac{20.632}{6}$

$\bar{x} \simeq 3.438,67$

Logo, o lucro médio do período foi de aproximadamente R$ 3.438,67.

b) Colocando os valores em ordem crescente, temos:

3.258, 3.270, 3.381, 3.533, 3.541, 3.649

Como há 6 valores, a mediana é a média aritmética dos termos centrais, que ocupam a 3ª e a 4ª posições.

Assim: $Me = \frac{3.381 + 3.533}{2} = 3.457$

Logo, o lucro mediano nesse semestre foi R$ 3.457,00.

c) Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

4. a) $\bar{x} = \frac{2 + 1 + 0 + 3 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1}{12}$

$\bar{x} = \frac{11}{12} \Rightarrow \bar{x} \simeq 0,917$

Logo, a média mensal de acidentes nesse período foi de aproximadamente 0,917 acidente.

b) O número mensal de acidentes mais frequente nesse ano é 1, com frequência 6.

c) Colocando os dados em ordem crescente, temos:

0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3

Como há 12 valores, a mediana é a média aritmética dos termos centrais, que ocupam a 6ª e a 7ª posições.

Assim: $Me = \frac{1 + 1}{2} = 1$

Logo, o número mediano de acidentes é 1.

5. $\bar{x} = \frac{12 \cdot 154 + 8 \cdot 157 + 10 \cdot 160}{12 + 8 + 10} = \frac{4.704}{30} = 156,8$

Portanto, o número médio de refeições servidas por dia nesse mês foi aproximadamente 156,8.

6. Como em 2016 a marca A superou em 360 unidades as vendas de 2015, temos que, no gráfico, 3 ícones representam 360 unidades, ou seja, cada ícone representa 120 unidades vendidas.

Assim, o número de carros vendidos pela marca A em cada ano foi:

2014: 120 unidades

2015: 240 unidades

2016: 600 unidades

A média anual é, então, dada por:

$$\bar{x} = \frac{120 + 240 + 600}{3} = \frac{960}{3} = 320$$

alternativa d

7. a) Para determinar a moda, basta verificar o grau de instrução que corresponde à maior frequência, que é aquele representado pela maior porcentagem (44%). Assim, a moda do grau de instrução é o Ensino Superior.

b) e **c)** Espera-se que os alunos percebam que não é possível calcular a média e a mediana da distribuição, pois essas medidas só fazem sentido para variáveis quantitativas; não fazem sentido para variáveis qualitativas.

8. Chamando de x o número de gols marcados até a 8ª rodada do campeonato de 2020, temos:

$\frac{x}{80} = 2,525 \Rightarrow x = 2,525 \cdot 80 \Rightarrow x = 202$

Chamando de y o número de gols que deveriam ser marcados em 10 partidas para que, na 9ª rodada (90 jogos: 80 até a 8ª rodada mais 10), se atingisse a média de 2,9 gols por jogo (como em 2019), temos:

$\frac{y + 202}{90} = 2,9$

$y + 202 = 2,9 \cdot 90 \Rightarrow y = 261 - 202 \Rightarrow y = 59$

Portanto, deveriam ser marcados 59 gols em 10 partidas.

9. Resposta pessoal.

10. Resposta pessoal. Exemplo de conjunto de dados: 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 10

11. Para facilitar os cálculos, construímos a tabela a seguir:

Tempo gasto na realização de um *pit stop*				
Tempo (em segundo)	Quantidade de pilotos (f_i)	F_i	PM_i	$PM_i \cdot f_i$
[0, 4[	2	2	2	4
[4, 8[	5	7	6	30
[8, 12[	9	16	10	90
[12, 16[	3	19	14	42
[16, 20[	1	20	18	18
	$\sum f_i = 20$			$\sum(PM_i \cdot f_i) = 184$

Dados fictícios.

a) $\bar{x} = \frac{184}{20} = 9,2$

Logo, o tempo médio que os pilotos gastaram no *pit stop* foi 9,2 segundos.

MODELO

b) Como os valores estão agrupados, vamos primeiro encontrar a classe mediana.

Note que: $\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{20}{2} = 10$

A frequência acumulada imediatamente superior a 10 é 16 e corresponde à classe [8, 12[, que é a classe mediana.

Então: $\frac{12 - 8}{9} = \frac{Me - 8}{10 - 7} \Rightarrow Me \simeq 9{,}3$

Logo, o tempo mediano de *pit stop* foi aproximadamente 9,3 segundos.

12. Vamos construir a seguinte tabela:

Tempo gasto no banho				
Tempo (em minuto)	**Quantidade de pessoa (f_i)**	F_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
[0, 5[	20	20	2,5	50
[5, 10[	30	50	7,5	225
[10, 15[	10	60	12,5	125
[15, 20[	40	100	17,5	700
	$\sum f_i = 100$			$\sum f_i \cdot PM_i = 1.100$

Dados fornecidos pelo condomínio Vila Rica.

a) $\overline{x} = \frac{1.100}{100} = 11$

Logo, o tempo médio que as pessoas do condomínio Vila Rica gastam para tomar banho é 11 minutos.

b) A classe modal é [15, 20[, pois apresenta a maior frequência.
Portanto, a moda é 17,5 minutos.

c) Espera-se que os alunos percebam que não é possível responder a essa questão por falta de informações. Sabemos que 50 pessoas gastam menos de 10 minutos, mas não é possível saber, somente com as informações fornecidas, quantas pessoas gastam menos de 12 minutos no banho.

Comentário: Pode-se propor aos alunos que façam uma pesquisa como essa com os colegas da classe e com as pessoas que moram com eles. Os entrevistados deverão responder quanto tempo levam no banho. Após calcular as medidas de tendência central dessa pesquisa, eles deverão observar se está havendo desperdício de água (considerando que o ideal é um banho de cerca de 5 minutos). Esse tipo de trabalho favorece o desenvolvimento da competência geral **7** da BNCC.

13. a) $\overline{x} = \frac{1.460 \cdot 6 + 2.260 \cdot 5 + 3.060 \cdot 5 + 3.860 \cdot 3}{25} +$

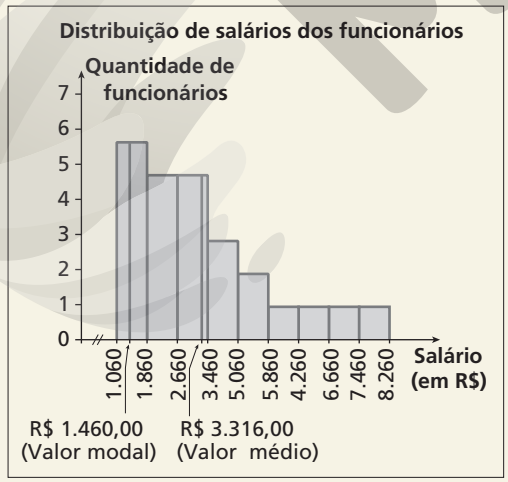
$+ \frac{4.660 \cdot 2 + 5.460 \cdot 1 + 6.260 \cdot 1 + 7.060 \cdot 1 + 7.860 \cdot 1}{25}$

$\overline{x} = \frac{82.900}{25} = 3.316$

Logo, o salário médio é R$ 3.316,00.

b) Podemos observar que a classe com maior frequência é a que vai de R$ 1.060,00 a R$ 1.860,00.
Logo, a moda dos salários é R$ 1.460,00.

c)



NELSON MATSUDA

Dados fornecidos pela empresa Bacana.

14. Resposta pessoal.

15. As médias das pontuações de Marco e Paulo são iguais, porém as pontuações de Marco possuem o menor desvio padrão, o que significa dizer que suas pontuações estão mais próximas da média do que as de Paulo.

MODERNA

Assim, as pontuações obtidas por Marco no concurso são mais regulares, logo Marco foi mais bem classificado.
alternativa b

16. A amostra que possui o maior desvio padrão é aquela cujos dados estão mais dispersos, o que claramente ocorre na amostra 4.

Para confirmar, vamos calcular o desvio padrão para cada uma das amostras.

- Amostra 1:

$\overline{x}_1 = \frac{0 + 1 + 2}{3} = 1$

$Var_1 = \frac{(0 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (2 - 1)^2}{3} = \frac{2}{3}$

$Dp_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

- Amostra 2:

$\overline{x}_2 = \frac{26 + 27 + 28}{3} = 27$

$Var_2 = \frac{(26 - 27)^2 + (27 - 27)^2 + (28 - 27)^2}{3} = \frac{2}{3}$

$Dp_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$

- Amostra 3:

$\overline{x}_3 = \frac{1.002 + 1.005 + 1.003}{3} \simeq 1.003{,}33$

$Var_3 \simeq \frac{(1.002 - 1.003{,}33)^2 + (1.003 - 1.003{,}33)^2}{3} +$

$+ \frac{(1.005 - 1.003{,}33)^2}{3} \simeq \frac{4{,}6667}{3}$

$Dp_3 \simeq \sqrt{\frac{4{,}6667}{3}}$

- Amostra 4:

$\overline{x}_4 = \frac{-5 + 10 + 25}{3} = 10$

$Var_4 = \frac{(-5 - 10)^2 + (10 - 10)^2 + (25 - 10)^2}{3} =$

$= \frac{430}{3} = 150$

$Dp_4 = \sqrt{\frac{450}{3}}$

Como $\sqrt{\frac{2}{3}} < \sqrt{\frac{4{,}6667}{3}} < \sqrt{\frac{450}{3}}$, a amostra com maior desvio padrão é a amostra 4.

alternativa d

17. **a)** Primeiro, determinamos a média:

$\overline{x} = \frac{10 \cdot 120 + 15 \cdot 400 + 20 \cdot 150}{670} = \frac{10.200}{670} \simeq 15$

Assim:

$Var \simeq \frac{120 \cdot (10 - 15)^2 + 400 \cdot (15 - 15)^2}{670} +$

$+ \frac{150 \cdot (20 - 15)^2}{670}$

$Var \simeq \frac{6.750}{670} \simeq 10{,}07$

$Dp \simeq \sqrt{10{,}07} \simeq 3{,}17$

b) Os valores observados distanciam-se cerca de 3,17 viagens do valor médio (aproximadamente 15 viagens).

18. **a)** Média da promoção A:

$\overline{x}_A = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 5}{20} = \frac{85}{20} = 4{,}25$

Média da promoção B:

$\overline{x}_B = \frac{3 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{20} = \frac{46}{20} = 2{,}3$

b) Para calcular o desvio padrão, precisamos calcular primeiro a variância.

Para a promoção A, temos:

$Var_A = \frac{1 \cdot (1 - 4{,}25)^2 + 1 \cdot (3 - 4{,}25)^2 + 9 \cdot (4 - 4{,}25)^2 + 9 \cdot (5 - 4{,}25)^2}{20}$

$Var_A = \frac{17{,}75}{20} = 0{,}8875$

Assim: $Dp_A = \sqrt{0{,}8875} \simeq 0{,}94$

Para a promoção B, temos:

$Var_B = \frac{3 \cdot (1 - 2{,}3)^2 + 10 \cdot (2 - 2{,}3)^2 + 5 \cdot (3 - 2{,}3)^2 + 2 \cdot (4 - 2{,}3)^2}{20}$

$Var_B = \frac{14{,}2}{20} = 0{,}71$

Assim: $Dp_B = \sqrt{0{,}71} \simeq 0{,}84$

- Como o desvio padrão das notas da promoção B é menor que o desvio padrão das notas da promoção A, podemos dizer que as notas atribuídas à promoção B apresentam maior homogeneidade que as da promoção A, ou seja, os valores observados na promoção A estão mais dispersos em relação à sua média que na promoção B.

19. Colocando os dados em ordem crescente, temos:
21, 22, 23, 23, 25, 25, 25, 25, 26, 28, 28, 30, 31, 32, 40

a) $\overline{x} = \frac{404}{15} \Rightarrow \overline{x} \simeq 27$

Logo, a média de veículos alugados nessa locadora é, aproximadamente, 27 veículos por dia.

b) Como temos 15 valores observados, a mediana será o valor central, que ocupa a 8ª posição. Assim: $Me = 25$

Logo, o número mediano de veículos alugados nessa locadora é 25.

c) O número de veículos alugados com maior frequência (por 4 dias) é 25.

d) $At = 40 - 21 = 19$

Portanto, a amplitude desse grupo de dados é 19 veículos.

Para facilitar os cálculos dos itens **e** e **f**, construímos a tabela a seguir:

Veículos alugados durante 15 dias			
x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
25	−2	2	4
32	5	5	25
25	−2	2	4
28	1	1	1
30	3	3	9
21	−6	6	36
23	−4	4	16
40	13	13	169
25	−2	2	4
26	−1	1	1
22	−5	5	25
23	−4	4	16
25	−2	2	4
28	1	1	1
31	4	4	16
		$\sum \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 55$	$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 331$

Dados fornecidos pela Locadora de veículos Alugue Já.

Observação: Os valores de $(x_i - \overline{x})$, $\lvert x_i - \overline{x} \rvert$ e $(x_i - \overline{x})^2$ são aproximados, já que $\overline{x} \simeq 27$.

MODERNA

e) $Dm \simeq \frac{55}{15} \Rightarrow Dm \simeq 3{,}67$

f) $Var \simeq \frac{331}{15} \Rightarrow Var \simeq 22{,}07$

$Dp = \sqrt{22{,}07} \Rightarrow Dp \simeq 4{,}7$

g) Os valores desse grupo se distanciam do valor médio cerca de 4,7 veículos.

20. a) Ao observar os diagramas, espera-se que os alunos percebam que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior (os dados estão menos concentrados em torno de alguns valores).

b) Nesse caso, os alunos podem usar qualquer uma das medidas de dispersão estudadas.

Calculando cada uma das medidas para os dados do 1º dia e do 2º dia, temos:

$At_1 = 15{,}30 - 3{,}80 = 11{,}50$

$At_2 = 9{,}75 - 5{,}20 = 4{,}55$

Para calcular as outras medidas, primeiro é necessário calcular as médias:

$$\bar{x}_1 = \frac{174{,}10}{20} = 8{,}705$$

$$\bar{x}_2 = \frac{138{,}10}{20} = 6{,}905$$

Construímos as tabelas para facilitar os cálculos:

1º dia			
x_i	$x_i - \bar{x}_1$	$\lvert x_i - \bar{x}_1 \rvert$	$(x_i - \bar{x}_1)^2$
3,80	−4,905	4,905	24,059
4,50	−4,205	4,205	17,682
5,20	−3,505	3,505	12,285
5,40	−3,305	3,305	10,923
5,60	−3,105	3,105	9,641
6,50	−2,205	2,205	4,862
7,30	−1,405	1,405	1,974
7,45	−1,255	1,255	1,575
7,80	−0,905	0,905	0,819
8,10	−0,605	0,605	0,366
9,50	0,795	0,795	0,632
9,70	0,995	0,995	0,990
9,75	1,045	1,045	1,092
9,80	1,095	1,095	1,199
10,25	1,545	1,545	2,387
11,60	2,895	2,895	8,381
11,75	3,045	3,045	9,272
11,80	3,095	3,095	9,579
13,00	4,295	4,295	18,447
15,30	6,595	6,595	43,494
		$\sum \lvert x_i - \bar{x}_1 \rvert = 50{,}800$	$\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 = 179{,}660$

Dados fictícios.

2º dia			
x_i	$x_i - \bar{x}_2$	$\lvert x_i - \bar{x}_2 \rvert$	$(x_i - \bar{x}_2)^2$
5,20	−1,705	1,705	2,907
5,45	−1,455	1,455	2,117
5,50	−1,405	1,405	1,974
5,55	−1,355	1,355	1,836
5,60	−1,305	1,305	1,703
5,75	−1,155	1,155	1,334
5,80	−1,105	1,105	1,221
5,95	−0,955	0,955	0,912
6,50	−0,405	0,405	0,164
6,60	−0,305	0,305	0,093
6,85	−0,055	0,055	0,003
6,90	−0,005	0,005	0,000
7,50	0,595	0,595	0,354
7,65	0,745	0,745	0,555
7,70	0,795	0,795	0,632
7,80	0,895	0,895	0,801
7,90	0,995	0,995	0,990
8,55	1,645	1,645	2,706
9,60	2,695	2,695	7,263
9,75	2,845	2,845	8,094
		$\sum \lvert x_i - \bar{x}_2 \rvert = 22{,}420$	$\sum (x_i - \bar{x}_2)^2 = 35{,}660$

Dados fictícios.

Assim:

$$Dm_1 = \frac{50{,}800}{20} = 2{,}54$$

$$Var_1 \simeq \frac{179{,}660}{20} = 8{,}983$$

$$Dp_1 \simeq \sqrt{8{,}983} \simeq 3{,}00$$

$$Dm_2 = \frac{22{,}420}{20} \simeq 1{,}12$$

$$Var_2 \simeq \frac{35{,}660}{20} = 1{,}783$$

$$Dp_2 \simeq \sqrt{1{,}783} \simeq 1{,}34$$

Com o cálculo de qualquer uma das medidas é possível verificar que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior.

21. Resposta pessoal.

22. Primeiro, determinamos o ponto médio de cada intervalo e, em seguida, calculamos a média.

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 600 + 40 \cdot 800 + 80 \cdot 1.000 + 50 \cdot 1.200 + 20 \cdot 1.400}{200}$$

$$\bar{x} = \frac{206.000}{200} = 1.030$$

MODERNA

Agora, vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos.

Aluguel pago por moradores da zona urbana da cidade					
Aluguel (em real)	f_i	PM_i	$(PM_i - \overline{x})$	$(PM_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2$
[500, 700[	10	600	−430	184.900	1.849.000
[700, 900[	40	800	−230	52.900	2.116.000
[900, 1.100[	80	1.000	−30	900	72.000
[1.100, 1.300[	50	1.200	170	28.900	1.445.000
[1.300, 1.500[	20	1.400	370	136.900	2.738.000
	$\sum f_i = 200$				$\sum[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2] = 8.220.000$

Dados fictícios.

Com base nos dados da tabela, temos:

$Var = \frac{8.220.000}{200} = 41.100$

$Dp = \sqrt{41.100} \simeq 202{,}73$

Os valores do grupo distanciam-se cerca de R$ 202,73 do valor médio (R$ 1.030,00).

23. Vamos inicialmente considerar o ponto médio de cada intervalo e calcular a média.

$\overline{x} = \frac{3 \cdot 7 + 8 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 15}{3 + 8 + 5 + 2 + 2}$

$\overline{x} = \frac{204}{20} = 10{,}2$

Agora, vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos.

Comparação entre automóveis de mesma marca e modelo			
PM_i	f_i	$PM_i - \overline{x}$	$f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert$
7	3	−3,2	9,6
9	8	−1,2	9,6
11	5	0,8	4
13	2	2,8	5,6
15	2	4,8	9,6
	$\sum f_i = 20$		$\sum\left(f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert\right) = 38{,}4$

Dados fictícios.

Assim:

$Dm = \frac{38{,}4}{20} = 1{,}92$

Logo, os valores do grupo distanciam-se cerca de 1,92 km/ℓ do valor médio (10,2 km/ℓ).

24. **a)** O retângulo do *box-plot* é limitado pelo primeiro e pelo terceiro quartil, então $Q1 = 5$ e $Q3 = 7$.

b) Como $Q1 = 5$ e $Q3 = 7$, entre 5 e 7 estão 50% das notas dos alunos, que corresponde a 40 notas. Portanto, 40 alunos tiveram notas entre 5 e 7.

c) A menor nota é dada pelo valor extremo no gráfico, logo a menor nota foi 1.

d) Como $Q3 = 7$ e 10 é o valor máximo da distribuição, entre 7 e 10 estão 25% das notas. Assim, 25% dos alunos tiveram notas entre 7 e 10.

e) Espera-se que os alunos percebam que somente com o *box-plot* não é possível saber quantos alunos tiveram nota 10. É possível saber que 25% de 80 alunos (ou seja, 20 alunos) tiveram notas entre 7 e 10, mas não é possível saber como foi a distribuição das notas dentro desse intervalo.

25. A maior massa entre as mulheres é 106 kg (um dos valores extremos).

alternativa d

26. **a)** Espera-se que os alunos percebam que a representação mais adequada depende dos fatores que se pretendem analisar.

De modo geral, não existe uma representação melhor que outra, e sim uma mais adequada que outra para o conjunto de dados ou para o que se pretende avaliar.

b) A representação que apresentou menor perda de informações dos dados em si foi o diagrama de ramo e folhas. A partir desse diagrama é possível saber o valor de cada dado. Observe:

8,27	10,47	10,95	11,16	11,54	11,79
12,30	13,85	14,08			
16,51	17,29	8,94	19,18	19,38	19,88
21,28	21,53	22,20			
22,59	24,08	25,11	25,38	26,80	27,68
27,70	28,83	29,30			
33,22	33,43	34,72	35,44	37,38	37,97
39,45	40,91	52,61			

c) A partir do *box-plot* não é possível saber quantos participantes havia nessa rodada do campeonato. É possível extrair essa informação do diagrama de ramo e folhas (contando-se todos os elementos) ou a partir do histograma (adicionando-se as frequências de cada classe). Nessa rodada do campeonato havia 36 participantes.

d) Espera-se que os alunos percebam que a representação mais adequada nesse caso seria o *box-plot*.

e) Observando o *box-plot*, temos:
$Me = 22{,}395$
$Q_1 = 15{,}295$
$Q_3 = 31{,}260$

f) Para identificar o valor do menor e do maior dados desse grupo seria mais adequado consultar o diagrama de ramo e folhas ou o *box-plot*.
Menor valor: 8,27
Maior valor: 52,61

g) 15 participantes tiveram melhor tempo abaixo de 20 segundos e 1 participante teve melhor tempo entre 40 e 50 segundos. Para responder a essas questões é necessário consultar o diagrama de ramo e folhas.

h) Resposta pessoal.

i) Resposta pessoal.

27. Resposta pessoal.

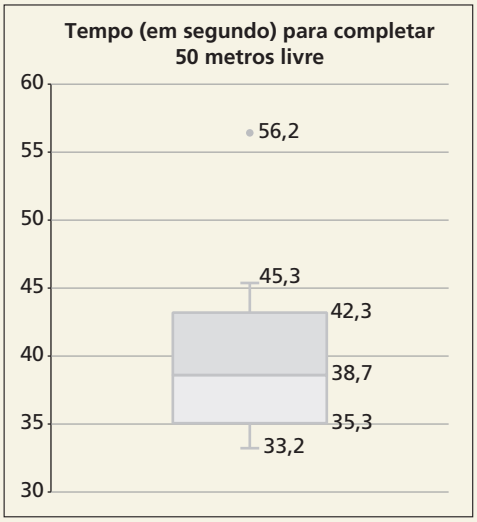
28. **a)** Resposta pessoal.
Algumas representações possíveis:

Tempo (em segundo) para completar 50 metros livre

3*	32 33 42
3•	53 55 75 84 87
4*	01 03 23 32
4•	53
5*	
5•	62

Legenda:
3* | 32 = 33,2 segundos
3• | 53 = 35,3 segundos

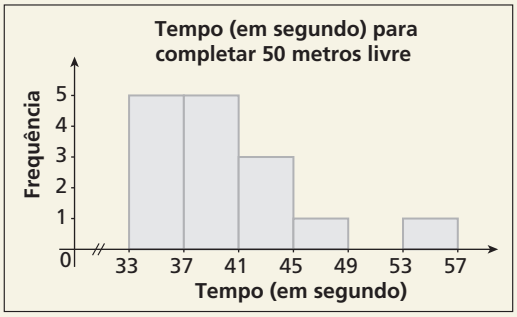
Dados obtidos por Mara.



Dados obtidos por Mara.

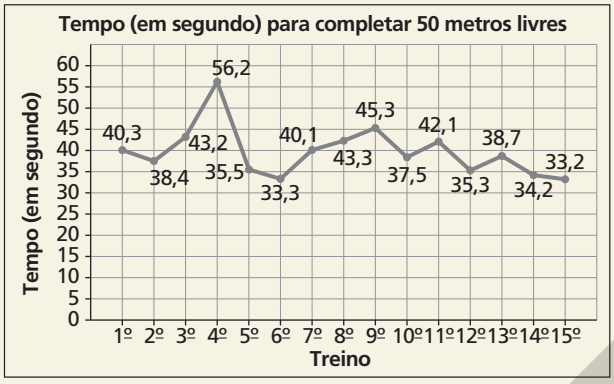
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODENA



Dados obtidos por Mara.

b) Espera-se que os alunos percebam que para perceber a evolução dos tempos ao longo dos treinos, um diagrama de ramo e folhas, um histograma ou um *box-plot* não são adequados. Para esse tipo de análise, um gráfico de linha, por exemplo, seria mais adequado. Observe:



Dados obtidos por Mara.

29. Resposta pessoal.

30. **a)** Há uma correlação positiva entre a média de Matemática no Pisa 2015 e o Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural (ESCS), pois valores crescentes do ESCS estão associados a valores crescentes da média de Matemática no Pisa 2015.

b) Dos países representados no diagrama, o Brasil é o que teve a menor média de Matemática no Pisa 2015 e o menor Índice Pisa de *status* econômico.

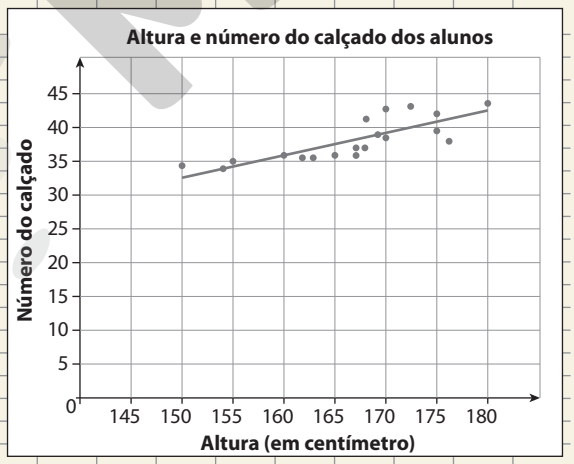
31. Observando o gráfico, é possível perceber que há uma correlação positiva entre as variáveis (confirmada pelo coeficiente de correlação 0,948), portanto, os municípios representados no diagrama (que é uma amostra dos municípios da região Nordeste) com maior população tendem a ter uma maior coleta diária de resíduos sólidos urbanos por habitante.
alternativa c

32. Pelo gráfico é possível perceber que a correlação entre as variáveis é nula, ou seja, as variações de idade e massa ocorrem independentemente.

33.

D22 | *Fórmula* | =CORREL(A2:A21; B2:B21)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Altura (em centímetro)	Número do calçado										
2	150	34										
3	154	34										
4	155	35										
5	160	36										
6	162	36										
7	163	36										
8	165	36										
9	167	36										
10	167	37										
11	167	37										
12	168	37										
13	168	41										
14	169	39										
15	170	42										
16	170	38										
17	172	43										
18	175	40										
19	175	42										
20	176	39										
21	180	44	r_{xy}									
22			0,840322									
23												



NELSON MATSUDA

De modo geral, quanto maior a altura, maior o número do calçado. As variáveis estão relacionadas e a correlação é linear positiva.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Exercícios complementares

1. **a)** O gráfico mostra a idade mediana da população indígena por localização do domicílio, segundo o sexo.

b) A idade mediana da população indígena total é 22,1 anos.

c) A idade mediana da população indígena é maior entre os residentes fora de terras indígenas, tanto no total quanto para homens ou mulheres.

d) No total, a população masculina é mais nova que a população feminina (idade mediana 21,8 anos, contra 22,3 anos das mulheres).
Nas terras indígenas a população masculina é mais velha (idade mediana 17,7 anos, contra 17,0 anos das mulheres). Já fora de terras indígenas, a população masculina é mais nova (idade mediana 28,3 anos, contra 30,2 anos das mulheres).

2. **a)** Como a pesquisa foi realizada com 100 famílias, a mediana será a média aritmética entre o número de filhos das famílias que ocupam a 50ª e a 51ª posições. Como essas famílias têm, cada uma delas, 2 filhos, fazemos:

$$Me = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

Logo, a mediana é 2 filhos.
A maior frequência (28) é de famílias que têm 2 filhos. Então, a moda é 2 filhos.

b) $\overline{x} = \frac{17 \cdot 0 + 25 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 19 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{100}$

$\overline{x} = \frac{186}{100} = 1{,}86$

Logo, o número médio de filhos por família é 1,86.

3. O novo grupo formado tem $25 + n$ pessoas.
O total das massas dos integrantes desse novo grupo é: $(25 \cdot 84 + 90 \cdot n)$ kg
Como a média das massas é 85, temos:

$\frac{25 \cdot 84 + 90 \cdot n}{25 + n} = 85$

$2.100 + 90n = 85(25 + n)$
$2.100 + 90n = 85 \cdot 25 + 85n$
$90n - 85n = 2.125 - 2.100$
$5n = 25$
$n = 5$

4. $\overline{x} = \frac{1.000 \cdot 250 + 1.500 \cdot 300}{1.000 + 1.500}$

$\overline{x} = \frac{700.000}{2.500}$

$\overline{x} = 280$

Portanto, o consumo médio mensal de energia elétrica por residência, considerando os dois bairros, A e B, é 280 kWh.
alternativa b

5. $\overline{x}_1 = \frac{18+16+17+13+14+1+19+14+16+12}{10}$

$\overline{x}_1 = \frac{140}{10} = 14$

Descartando a maior e a menor notas, a nova média será:

$\overline{x}_2 = \frac{18+16+17+13+14+14+16+12}{8}$

$\overline{x}_2 = \frac{120}{8} = 15$

Portanto, a nova média é 1 ponto maior em relação à média anterior.
alternativa b

6. Organizando os dados em um quadro, temos:

Diária (R$)	f_i	F_i
200	50	50
300	50	100
400	80	180
600	20	200

Como foram observados 200 hotéis, a mediana é a média aritmética dos valores centrais, que ocupam a 100ª e a 101ª posições. Assim:

$Me = \frac{300 + 400}{2} = 350$

Portanto, o valor mediano da diária é R$ 350,00.
alternativa c

7. $\overline{x} = \frac{5 + 3 + 1 + 4 + 0 + 2}{6}$

$\overline{x} = \frac{15}{6} = 2{,}5$

Portanto, o número médio de gols da primeira rodada é 2,5 gols.
Sendo n o total de gols da segunda rodada, temos:

$2{,}5 + 20\%\text{ de }2{,}5 = \frac{15 + n}{11}$

$2{,}5 + 0{,}5 = \frac{15 + n}{11}$

$15 + n = 11 \cdot 3$

$n = 18$

Logo, deverão ser marcados 18 gols nos 5 jogos da segunda rodada.

8. De acordo com a tabela, temos:

- Média:

$\overline{x} = \frac{5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 7}{5+3+4+3+2+2+1} =$

$= \frac{45}{20} = 2{,}25$

- Mediana:
Organizando os dados de forma crescente, obtemos: 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7.
Calculando a média aritmética entre os dois termos centrais, chegamos a: $Y = 2$

- Moda:
Valor de maior frequência, ou seja, $Z = 0$.
Portanto, $Z < Y <$ X.
alternativa e

9. Vamos organizar as temperaturas em ordem crescente: 13,5; 13,5; 13,5; 13,5; 14; 15,5; 16; 18; 18; 18,5; 19,5; 20; 20; 20; 21,5
Assim:

$\overline{x} = \frac{4 \cdot 13{,}5 + 14 + 15{,}5 + 16 + 2 \cdot 18 + 18{,}5 + 19{,}5 + 3 \cdot 20 + 21{,}5}{15}$

$\overline{x} = \frac{255}{15} = 17$

$Me = 18$

$Mo = 13{,}5$

Portanto, a média é 17 °C, a mediana é 18 °C e a moda é 13,5 °C.
alternativa b

10. Utilizando n para o número de alunos que obtiveram nota 5, temos que $(60 - n)$ alunos obtiveram nota 10.

Assim: $\frac{n \cdot 5 + (60 - n) \cdot 10}{60} = 6$

$5n - 10n + 600 = 6 \cdot 60$

$n = 48$

Portanto, 48 alunos obtiveram nota 5.

MODERNA

11. Usando a letra a para a frequência entre 3 e 5 e a letra b para a frequência entre 5 e 7, temos:
$a + b + 72\% = 100\% \Rightarrow a + b = 28\%$ (I)
Sabendo que a média é 2,8, temos:

$$\frac{72\% \cdot 2 + a \cdot 4 + b \cdot 6}{100\%} = 2{,}8 \Rightarrow 4a + 6b = 136\% \text{ (II)}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} a + b = 28\% \\ 4a + 6b = 136\% \end{cases} \Rightarrow a = 16\% \text{ e } b = 12\%$$

Logo, a frequência entre 3 e 5 é 16% e entre 5 e 7 é 12%.

12. $\overline{x} = \frac{2 + 3 + 5 + 4 + 6}{5} = 4$

$$Dm = \frac{|2 - 4| + |3 - 4| + |5 - 4| + |4 - 4| + |6 - 4|}{5}$$

$$Dm = \frac{2 + 1 + 1 + 0 + 2}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

13. $\overline{x} = \frac{30 \cdot 50 + 60 \cdot 100 + 10 \cdot 150}{100} = \frac{9.000}{100} = 90$

Para calcular o desvio padrão, devemos calcular primeiro a variância:

$$Var = \frac{30 \cdot (50 - 90)^2 + 60 \cdot (100 - 90)^2 + 10 \cdot (150 - 90)^2}{100}$$

$$Var = \frac{90.000}{100} = 900$$

Então: $Dp = \sqrt{900} = 30$

Logo, a média é 90 e o desvio padrão é 30.

14. Para que $\overline{x}_A$ não ultrapasse 4, devemos ter $\overline{x}_A \leqslant 4$.

Então: $\frac{x + 6 + 3 + 4 + 5}{5} \leqslant 4$

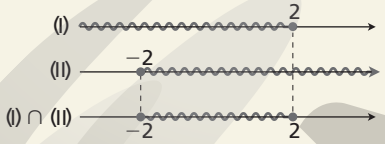
$x + 18 \leqslant 20 \Rightarrow x \leqslant 2$ (I)

Para que $\overline{x}_B$ seja, no mínimo, igual a 5, devemos ter $\overline{x}_B \geqslant 5$.

Então:

$$\frac{9 + 1 + 4 + 8 + x + 6 + 11 + 3}{8} \geqslant 5$$

$x + 42 \geqslant 40 \Rightarrow x \geqslant -2$ (II)



ADILSON SECCO

Os valores inteiros de x que estão no intervalo $[-2, 2]$ são -2, -1, 0, 1 e 2.

15. **a)** Errado. O menor valor da turma A é 2, já a turma B tem um valor extremo, indicado pelo asterisco, que é menor que 2. Logo, a nota mínima na turma A é maior que a nota mínima na turma B.

b) Errado. Observando o gráfico é possível perceber que o desvio interquartílico, ou intervalo interquartil, das notas da turma A é maior que 2 (já que a altura da respectiva "caixa" do *box-plot* é maior que o intervalo entre dois tracinhos no eixo vertical), e que das notas da turma B é menor que 2 (pois a altura da respectiva "caixa" do *box-plot* é menor que o intervalo entre dois tracinhos no eixo vertical). Logo, o desvio interquartílico das notas da turma A é maior que o desvio interquartílico das notas da turma B.

16. **a)** Certo. A amplitude das alturas de cada turma é dada por:
Turma 1: 180 − 120 = 60
Turma 2: 180 − 110 = 70
Turma 3: 190 − 110 = 80
Portanto, a turma 3 tem a maior amplitude das alturas.

b) Errado. Na distribuição das alturas da turma 1, 160 é o terceiro quartil, ou seja, 25% das alturas são iguais ou superiores a 160 cm. Na turma 3, 160 é a mediana, então metade dos estudantes da turma 3 tem altura igual ou inferior a 160 cm.

17. Observando os gráficos é possível perceber que diversas empresas tiveram menor variabilidade entre os salários que a empresa 1, como as empresas 0, 2 e 3. Portanto, a empresa 1 não está entre as duas que tiveram menor variabilidade de salário.
alternativa a

18. Organizando os dados do diagrama de ramo e folhas em ordem crescente, temos:

21, 22, 23, 26, 33, 34, 35, 37, 38, 41, 42, 46, 46, 49, 50, 52, 54, 55

A mediana é dada por: $Me = \frac{38 + 41}{2} = 39{,}5$

O primeiro e terceiro quartil são: $Q_1 = 33$ e $Q_3 = 49$

a) Errado. **b)** Certo.

Comentário: Ressaltar com os alunos que para calcular as medidas é necessário organizar os dados em ordem crescente. Caso considerem os dados na ordem em que eles aparecem, julgarão, incorretamente, o item a como certo.

19. **a)** A média dos valores é dada por:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} = 100$$

Assim, a média dos novos valores é dada por:

$$\frac{x_1 + 5 + x_2 + 5 + \ldots + x_{10} + 5}{10} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} + 5 \cdot 10}{10} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} + \frac{5 \cdot 10}{10} = 100 + 5 = 105$$

b) Note que $(x_i + 5 - 105)^2 = (x_i - 100)^2$; portanto, a variância não se alterará e seu novo valor continuará sendo 20.
Comentário: Antes da resolução, convém pedir aos alunos que façam uma estimativa dos resultados para, depois, confrontá-las com os resultados calculados. Eles devem perceber que acréscimos iguais a todos os elementos de uma distribuição acarretam igual acréscimo na média aritmética e nenhuma modificação na variância, pois não interferem na dispersão dos dados.

20. Como a moda das numerações dos sapatos com defeito é 38, essa é a numeração com maior número de reclamações. A média da distribuição de cores é 0,45; logo, na distribuição de zeros e uns, existe mais zeros que uns, ou seja, mais sapatos de cor branca que sapatos de cor preta. Assim, a loja não deve encomendar mais sapatos brancos e de número 38.

alternativa a

21. **a)** $\overline{x}_A = \frac{90\% + 92\% + 95\% + 88\% + 91\%}{5}$

$$\overline{x}_A = \frac{456\%}{5}$$

$$\overline{x}_A = 91{,}2\%$$

$$\overline{x}_B = \frac{97\% + 88\% + 98\% + 86\% + 90\%}{5}$$

$$\overline{x}_B = \frac{459\%}{5}$$

$$\overline{x}_B = 91{,}8\%$$

Logo, a companhia que teve o percentual médio mais alto foi a companhia B.

MODERNA

b) Para facilitar os cálculos, construímos as tabelas a seguir:

Companhia A			
x_i	$x_i - x_A$	$\lvert x_i - x_A \rvert$	$(x_i - x_A)^2$
90	−1,2	1,2	1,44
92	0,8	0,8	0,64
95	3,8	3,8	14,44
88	−3,2	3,2	10,24
91	−0,2	0,2	0,04
		$\Sigma \lvert x_i - x_A \rvert = 9,2$	$\Sigma (x_i - x_A)^2 = 26,8$

Fonte: Departamento de Aviação Civil.

Companhia B			
x_i	$x_i - x_B$	$\lvert x_i - x_B \rvert$	$(x_i - x_B)^2$
97	5,2	5,2	27,04
88	−3,8	3,8	14,44
98	6,2	6,2	38,44
86	−5,8	5,8	33,64
90	−1,8	1,8	3,24
		$\Sigma \lvert x_i - x_B \rvert = 22,8$	$\Sigma (x_i - x_B)^2 = 116,8$

Fonte: Departamento de Aviação Civil.

Com base nas tabelas, temos:

$Dm_A = \frac{9,2}{5} = 1,84$

$Var_A = \frac{26,8}{5} = 5,36$

$Dp_A = \sqrt{5,36} \simeq 2,32$

$Dm_B = \frac{22,8}{5} = 4,56$

$Var_B = \frac{116,8}{5} = 23,36$

$Dp_B = \sqrt{23,36} \simeq 4,83$

Temos que: $Dm_A < Dm_B$, $Var_A < Var_B$ e $Dp_A < Dp_B$

Logo, a companhia que teve desempenho mais regular foi a companhia A.

22. $\bar{x} = \frac{4,8 + 5,1 + 5,3 + 4,7 + 3,8}{5} = 4,74$

Com base no gráfico e no cálculo de $\bar{x}$, podemos construir a tabela a seguir:

Estrangeiros que visitaram a cidade			
Ano	Número de turistas em milhão (x_i)	$x_i - x$	$(x_i - x)^2$
2004	4,8	0,06	0,0036
2005	5,1	0,36	0,1296
2006	5,3	0,56	0,3136
2007	4,7	−0,04	0,0016
2008	3,8	−0,94	0,8836
			$\Sigma (x_i - x)^2 = 1,332$

Dados fictícios.

Assim:

$Var = \frac{1,332}{5} = 0,2664$

$Dp = \sqrt{0,2664} \simeq 0,516$

Logo, o desvio padrão é aproximadamente 0,516 milhão de turistas.

Autoavaliação

1. $\bar{x} = \frac{7 + 11 + 8 + 14 + 10}{5} = \frac{50}{5} = 10$

Como os valores têm a mesma frequência, podemos dizer que não existe moda.
Organizando os dados em ordem crescente, temos:
7, 8, 10, 11, 14
Portanto: $Me = 10$
alternativa c

2. $\bar{x} = \frac{16 + 15 + 17 + 14 + 15}{5} = \frac{77}{5} = 15,4$

Portanto, o gasto médio de Samanta com almoço foi de R$ 15,40.
alternativa d

3. A idade mais frequente, ou idade modal, é 12 anos.
alternativa b

4. Quando todos os valores observados são iguais, o desvio padrão é nulo, ou seja, é zero.
alternativa b

5. $\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$

$Dm = \frac{\lvert 1 - 3 \rvert + \lvert 2 - 3 \rvert + \lvert 3 - 3 \rvert + \lvert 4 - 3 \rvert + \lvert 5 - 3 \rvert}{5}$

$Dm = \frac{2 + 1 + 0 + 1 + 2}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$

$Var = \frac{(1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (5 - 3)^2}{5}$

$Var = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$

alternativa d

6. $\bar{x} = \frac{9 + 5 + 8 + 10 + 4 + 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

$Var = \frac{(9 - 7)^2 + (5 - 7)^2 + (8 - 7)^2 + (10 - 7)^2 + (4 - 7)^2 + (6 - 7)^2}{6}$

$Var = \frac{4 + 4 + 1 + 9 + 9 + 1}{6} = \frac{28}{6} \simeq 4,7$

$Dp \simeq \sqrt{4,7} \simeq 2,2$

alternativa d

7. Observando o *box-plot*, temos que o primeiro quartil é 4, a mediana é 5, o terceiro quartil é 7 e a amplitude é 8 (10 − 2).
alternativa a

8. Para verificar a associação entre duas variáveis numéricas, o tipo de gráfico mais adequado é o diagrama de dispersão.
alternativa c

MODERNA

Exercícios propostos

1. • E_1 (escolha de um tipo de macarrão): 3 possibilidades
• E_2 (escolha de um tipo de molho): 2 possibilidades
Pelo princípio multiplicativo: $3 \cdot 2 = 6$
Logo, podem ser preparadas 6 opções de pratos diferentes de macarronada.

2. Para formar a senha temos 26 letras, cada uma podendo ser maiúscula ou minúscula e mais 10 algarismos.
Logo, são 62 (26 + 26 + 10) caracteres para formar a senha.
Como a senha sugerida deve ter 8 caracteres, fazemos o seguinte cálculo:
$62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 = 62^8$
Portanto, temos 62^8 senhas.

3. 12 corredores podem ganhar o 1º prêmio e 11 corredores (todos os corredores, menos o que ganhar o 1º prêmio) podem ganhar o 2º prêmio.
Pelo princípio multiplicativo: $12 \cdot 11 = 132$
Logo, o 1º e o 2º prêmios podem ser distribuídos de 132 maneiras.

4. ____ ____ ____ ____
10 possibilidades
10 possibilidades
10 possibilidades
9 possibilidades: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9)

Pelo princípio multiplicativo: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9.000$
Logo, há 9.000 números com 4 algarismos.

Comentário: Nessa questão, é importante que os alunos percebam que o zero não pode ser usado no primeiro algarismo, pois o número ficaria apenas com três algarismos. É também importante que percebam que, pela grande quantidade de possibilidades, não convém fazer a árvore de possibilidades, e sim aplicar o princípio multiplicativo.

5. ____ ____ ____ ____ ____
5 4 3 2 1
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Logo, 5 livros podem ser colocados lado a lado em uma prateleira de 120 maneiras distintas.

6. letras ____ ____ ____ algarismos ____ ____ ____
8 possibilidades
9 possibilidades
9 possibilidades: (não pode ser zero)
23 possibilidades
24 possibilidades
25 possibilidades
25 possibilidades: (não pode ser *z*)

Pelo princípio multiplicativo:
$25 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 223.560.000$
Podem ser criadas, portanto, 223.560.000 diferentes senhas de acesso ao *site*.

Comentário: Ao resolver essa questão, os alunos devem perceber que a escolha de uma senha depende da quantidade de caracteres alfanuméricos usados. O número de caracteres de uma senha pode dificultar as chances de ela ser descoberta.

7. a) ____ ____ ____
6 possibilidades
6 possibilidades
5 possibilidades: (não pode começar por zero)

Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$
Logo, podem ser formados 180 números de 3 dígitos.

b) ____ ____ ____
4 possibilidades
5 possibilidades
5 possibilidades: (não pode começar por zero)

Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$
Logo, podem ser formados 100 números de 3 dígitos sem repetir os algarismos.

8. ____ ____ ____ ____
2 possibilidades
3 possibilidades
4 possibilidades
4 possibilidades: (1, 3, 5 e 7)

Pelo princípio multiplicativo: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$
Logo, podemos formar 96 números.

9. • E_1 (escolha da resposta para a 1ª questão): 3 possibilidades
• E_2 (escolha da resposta para a 2ª questão): 3 possibilidades
• E_3 (escolha da resposta para a 3ª questão): 3 possibilidades
• E_4 (escolha da resposta para a 4ª questão): 3 possibilidades
• E_5 (escolha da resposta para a 5ª questão): 3 possibilidades
• E_6 (escolha da resposta para a 6ª questão): 3 possibilidades
Pelo princípio multiplicativo:
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$
Logo, o cartão pode ser preenchido de 729 maneiras diferentes.

10. Como há 729 maneiras de preencher o cartão de resposta, pode-se garantir que pelo menos 2 cartões serão preenchidos com as mesmas respostas com um mínimo de 730 pessoas prestando o concurso.

11. 1ª equipe: ____ ____ ____ melhor
6 5 4 1
2ª equipe: ____ ____ ____ melhor
3 2 1 1
Pelo princípio multiplicativo: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
Logo, o técnico pode formar os times de 720 maneiras distintas.

MODERNA

12. 1 bandeira hasteada: $\underline{\ 5\ }$

2 bandeiras hasteadas: $\underline{\ 5\ }\ \underline{\ 4\ }$

3 bandeiras hasteadas: $\underline{\ 5\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 3\ }$

4 bandeiras hasteadas: $\underline{\ 5\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 2\ }$

5 bandeiras hasteadas: $\underline{\ 5\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 2\ }\ \underline{\ 1\ }$

Total = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325

Portanto, podem ser enviadas 325 mensagens distintas.

13. Para formar um soneto, podemos escolher um entre os 10 versos para a primeira linha, um entre os 10 versos para a segunda linha, e assim por diante. Ou seja, a quantidade de sonetos possíveis é

$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\text{14 vezes}} = 10^{14}$

14. Para o primeiro par, temos 4 possibilidades: (AT, TA, CG ou GC)

Para o segundo par, temos 2 possibilidades.

Para o terceiro par, temos 2 possibilidades.

Para o quarto par, temos 2 possibilidades.

Para o quinto par, temos 2 possibilidades.

Para o sexto par, temos 2 possibilidades.

Para o sétimo par, temos 2 possibilidades.

Para o oitavo par, temos 2 possibilidades.

Para o nono par, temos 2 possibilidades.

Então: $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{11}$

Portanto, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é 2^{11}.

alternativa a

15.
- Com 1 sinal: 2
- Com 2 sinais: $2 \cdot 2 = 4$
- Com 3 sinais: $2^3 = 8$
- Com 4 sinais: $2^4 = 16$

Logo, podemos representar 30 letras distintas (2 + 4 + 8 + 16).

16. Números de 5.000 a 5.999:

$\underline{5}\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 10\ } \Rightarrow$ total = 1.000

Números de 6.000 a 6.999:

$\underline{6}\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 10\ } \Rightarrow$ total = 1.000

Números de 5.000 a 5.999 que não contêm o algarismo 3:

$\underline{5}\ \underline{\ 9\ }\ \underline{\ 9\ }\ \underline{\ 9\ } \Rightarrow$ total = 729

Números de 6.000 a 6.999 que não contêm o algarismo 3:

$\underline{6}\ \underline{\ 9\ }\ \underline{\ 9\ }\ \underline{\ 9\ } \Rightarrow$ total = 729

Total de números que contêm o algarismo 3:

1.000 + 1.000 − 729 − 729 = 542

Logo, 542 números de 5.000 a 6.999 contêm pelo menos um algarismo 3.

Comentário: É interessante reforçar a estratégia usada nesta resolução, ou seja, para encontrar a quantidade de números que contêm o algarismo 3, basta subtrair do total a quantidade de números que não contêm nenhum 3.

17. Considerando as duas primeiras letras de um nome:

$\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$ — 26 possibilidades; 26 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades para as duas primeiras letras de um nome é: $26 \cdot 26 = 676$

Como a escola tem 677 alunos, pelo menos 2 alunos têm as mesmas duas letras iniciais de seus nomes.

Comentário: Avalie a conveniência de dar uma dica aos alunos: se essa escola tivesse 367 alunos, então, necessariamente, pelo menos dois alunos aniversariariam na mesma data.

18. código de área | prefixo | linha

$\underbrace{\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }}_{\text{código de área}}\ \underbrace{\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }}_{\text{prefixo}}\ \underbrace{\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }}_{\text{linha}}$

não pode ser 0 ou 1

a) $\underline{\ 8\ }\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 10\ }$

Pelo princípio multiplicativo: $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$

Logo, existem 800 diferentes códigos de área.

b) $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \ \underline{\ 8\ }\ \underline{\ 8\ }\ \underline{\ 10\ }$

$8 \cdot 8 \cdot 10 = 640$

Logo, existem 640 prefixos para esse código de área.

c) $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underbrace{\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }}_{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 9.999}$

Logo, são possíveis 9.999 números de linha.

d) $\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{\ 8\ }\ \underline{\ 8\ }\ \underline{\ 10\ }\ \underbrace{\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }}_{9.999}$

$8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9.999 = 6.399.360$

Logo, são possíveis 6.399.360 diferentes números de telefone de 7 dígitos dentro desse código de área.

e) $\underline{\ 8\ }\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 8\ }\ \underline{\ 8\ }\ \underline{\ 10\ }\ \underbrace{\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }}_{9.999}$

$8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9.999 = 5.119.488.000$

Logo, são possíveis 5.119.488.000 números de telefone de 10 dígitos nesse país.

19. Resposta pessoal.

20. **a)** $\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

b) $\frac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!} = \frac{\cancel{3!} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4 \cdot \cancel{3!} \cdot \cancel{6!}} = \frac{7}{4}$

21. **a)** $\frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4!$

b) $\frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4!}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} \cdot 4!$

c) $\frac{7! - 5!}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! - 5 \cdot 4!}{4} = \frac{5 \cdot 4!(42 - 1)}{4} =$

$= \frac{205}{4} \cdot 4!$

22. **a)** $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$

$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30$

$n \cdot (n-1) = 30$

$n^2 - n - 30 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos:

$n = 6$ ou $n = -5$ (não convém)

Logo, $n = 6$.

MODERNA

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$

$\frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 72$

$(n+1) \cdot n = 72$

$n^2 + n - 72 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:

$n = 8$ ou $n = -9$ (não convém)

Logo, $n = 8$.

23. $\underline{\quad}_6 \ \underline{\quad}_5 \ \underline{\quad}_4 \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Logo, as 6 letras podem ser escritas de 720 maneiras diferentes.

24. Espera-se que os alunos percebam que não é possível resolver o problema, pois não é possível pintar cinco portões com cores distintas sendo que há apenas quatro cores disponíveis.

25. Começando com 4:

$\underline{4}_{\quad} \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1 \ \underline{2 \text{ ou } 6}_{\quad 2}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Começando com 5:

$\underline{5}_{\quad} \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1 \ \underline{2, 4 \text{ ou } 6}_{\quad 3}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

Começando com 6:

$\underline{6}_{\quad} \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1 \ \underline{2 \text{ ou } 4}_{\quad 2}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$

Total $= 12 + 18 + 12 = 42$

Logo, podem ser formados 42 números pares.

26. Espera-se que os alunos percebam que falta uma cor no enunciado do exercício 24. Assim, eles podem reescrever o enunciado com mais uma cor, diferente das que já constam no enunciado. Depois, o exercício pode ser resolvido e haverá 120 maneiras de pintar os portões, como segue:

$\underline{\quad}_5 \ \underline{\quad}_4 \ \underline{\quad}_3 \ \underline{\quad}_2 \ \underline{\quad}_1$

$5! = 120$

Logo, os portões podem ser pintados de 120 maneiras.

27. Como a palavra SABER é formada por 5 letras diferentes, temos:

$P_5 = 5! = 120$

Logo, a palavra SABER possui 120 anagramas.

28. Temos 2 possibilidades de escolher uma vogal. Tendo escolhido essa vogal, sobram 4 letras para serem permutadas.

Então, o número de anagramas que começam por vogal é:

$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$

Temos 3 possibilidades de escolher uma consoante que comece o anagrama e 2 possibilidades de escolher uma consoante que termine o anagrama. Tendo escolhido essas consoantes, sobram 3 letras para serem permutadas.

Então, o número de anagramas que começam e terminam por consoante é:

$3 \cdot P_3 \cdot 2 = 3 \cdot 3! \cdot 2 = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$

Portanto, temos 48 anagramas que começam por vogal e 36 anagramas que começam e terminam por consoante.

29. Vamos permutar 8 letras com a repetição de 3 letras R e 2 letras A.

$P_8^{3,2} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{40.320}{6 \cdot 2} = 3.360$

Logo, a palavra CARREIRA tem 3.360 anagramas.

30. Como as mulheres devem ficar juntas, vamos considerar que há um grupo com três mulheres e que essas três mulheres podem se posicionar de P_3 maneiras.

Tendo escolhido a posição do grupo de mulheres, sobram 5 homens que irão permutar com esse grupo, ou seja, será uma permutação de 6 elementos (5 homens e 1 grupo de mulheres).

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$P_3 \cdot P_6 = 3! \cdot 6! = 6 \cdot 720 = 4.320$

Portanto, as pessoas dessa fila podem se posicionar de 4.320 maneiras diferentes, de modo que as mulheres fiquem juntas.

31. Devemos permutar 6 bandeiras, sendo 2 vermelhas e 3 azuis. Então:

$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{720}{2 \cdot 6} = 60$

Podemos emitir 60 sinais diferentes.

32. **a)** $P_{12} = 12! = 479.001.600$

b) $P_4 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3! = 103.680$

Portanto, se não houver restrições, os livros poderão ser arrumados de 479.001.600 maneiras, mas se os livros de uma mesma matéria tiverem de ficar juntos, haverá 103.680 maneiras de arrumá-los.

33. **a)** A sequência pode ser representada assim:

A	B			

$1 \cdot 1 \cdot P_3 = 1 \cdot 1 \cdot 3! = 6$

Logo, teremos 6 sequências de etapas.

b) A e B devem ficar juntas; isso pode ocorrer de 2 maneiras.

E também é necessário permutar o conjunto AB e as demais etapas, ou seja, permutar 4 elementos.

Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:

$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$

Portanto, temos 48 sequências de etapas.

34. A soma procurada (S) tem P_5 parcelas: $P_5 = 5! = 120$

Na ordem das unidades simples (U), cada algarismo aparece 24 vezes (número de permutações dos algarismos nas outras ordens).

DM	UM	C	D	U
1	2	3	4	5
2	1	3	4	5
1	3	2	4	5
2	3	1	4	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	2	3	4	1
2	5	3	4	1

MODERNA

Ocorre o mesmo com as outras ordens. Então, a soma dos valores absolutos, em cada ordem, é:

$\underbrace{(5 + 5 + ... + 5)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(4 + 4 + ... + 4)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(3 + 3 + ... + 3)}_{24 \text{ vezes}} +$

$+ \underbrace{(2 + 2 + ... + 2)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(1 + 1 + ... + 1)}_{24 \text{ vezes}} =$

$= 24 \cdot 5 + 24 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 24 \cdot 2 + 24 \cdot 1 = 360$

Assim:

$S = 360$ U + 360 D + 360 C + 360 UM + 360 DM

$S = 360 + 3.600 + 36.000 + 360.000 + 3.600.000$

$S = 3.999.960$

Portanto, a soma é 3.999.960.

35. Como temos 10 objetos e 5 deles serão guardados na primeira caixa, 3 na segunda e 2 na terceira, fazemos o seguinte cálculo:

$$\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{30.240}{12} = 2.520$$

Portanto, podemos guardar os 10 objetos nas 3 caixas de 2.520 modos diferentes.

36. Para se locomover de A para B, a pessoa deverá deslocar-se 4 vezes para a direita (D) e 2 vezes para baixo (B), em qualquer ordem; assim, a quantidade de caminhos diferentes possíveis pode ser dada pela permutação de 6 letras em que 4 são D e 2 são B:

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Para se locomover de B para C, a pessoa deverá deslocar-se 2 vezes para a direita e 4 vezes para baixo, assim: $P_6^{4,2} = 15$

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de possíveis caminhos diferentes para ir de A para C é: $15 \cdot 15 = 225$

Portanto, são possíveis 225 caminhos diferentes.

37. Resposta pessoal.

38. $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

Logo, 3 pessoas podem sentar em um sofá de 5 lugares de 60 modos diferentes.

39. $A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$

Logo, há 90 possíveis resultados da eleição.

40. $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$

Logo, há 60 possíveis resultados para as 3 primeiras colocações.

41. $A_{20,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380$

Logo, há 380 possibilidades de classificação para os dois primeiros lugares.

42. $A_{x,2} = 156$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 156 \Rightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}} = 156 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - x - 156 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:

$x = 13$ ou $x = -12$ (não convém, pois $x \geq 2$)

Logo, $x = 13$.

43. $A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30$

Logo, uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de 30 maneiras diferentes.

44. $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Então, há 720 possíveis segredos.

Se uma pessoa levar 10 segundos em cada um dos possíveis segredos, vai gastar 7.200 segundos (720 · 10), ou seja, 2 horas para testar todos os possíveis segredos.

Comentário: Uma variação desse exercício pode ser feita considerando que o disco do cofre tem, no lugar dos algarismos, as 26 letras de nosso alfabeto. Espera-se que os alunos concluam que seriam necessárias 43 horas e 20 minutos.

45. $A_{5,3} \cdot A_{3,2} = \frac{5!}{(5-3)!} \cdot \frac{3!}{(3-2)!} = 60 \cdot 6 = 360$

Logo, o número de sequências numéricas será 360.

46. Resposta pessoal.

47. $C_{15,10} = \frac{15!}{10! \cdot (15-10)!} = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = 3.003$

Logo, ele poderá escolher as 10 questões de 3.003 formas.

48. Diagonal de um polígono é o segmento de reta que une dois de seus vértices não consecutivos.

Sendo d o número de diagonais de um polígono de n lados e n vértices, temos:

$C_{n,2}$ = nº de diagonais + nº de lados

$d = C_{n,2} - n$

$$d = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n \Rightarrow d = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Comentário: Essa questão permite um trabalho intradisciplinar com Geometria plana.

49. $C_{7,3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{4!}} = 35$

Podem ser formadas 35 comissões diferentes.

50. $C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} = 45$

Foram trocados 45 apertos de mão.

51. $C_{6,2} \cdot C_{6,3} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 15 \cdot 20 = 300$

Portanto, há 300 possibilidades de comissão.

52. $C_{5,2} \cdot C_{10,3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = 10 \cdot 120 = 1.200$

Podemos formar 1.200 conjuntos diferentes de 5 elementos com 2 letras diferentes e 3 algarismos distintos.

53. S U C E SS O

Como queremos grupos de 3 letras distintas, devemos considerar as combinações formadas com as letras S, U, C, E e O:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 10$$

Logo, podem ser constituídos 10 grupos de 3 letras distintas.

Em cada grupo há 2 consoantes e 3 vogais. Portanto, não há grupos sem vogal.

54. 1, 2, 3, 4, ..., 15

Temos nesse grupo 8 números ímpares e 7 números pares.

$$C_{8,5} \cdot C_{7,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 56 \cdot 35 = 1.960$$

MODERNA

Logo, podem ser escolhidos 1.960 diferentes grupos de 8 números.

55. Em um baralho de 52 cartas, há 13 cartas de espadas.

$$C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{10!}} = 286$$

Logo, podem ser selecionados 286 grupos de 3 cartas de espadas.

56. Vamos combinar 8 bolas tomadas 3 a 3 e retirar o número de combinações das 3 bolas vermelhas, tomadas 3 a 3.

$$C_{8,3} - C_{3,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} - \frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 0!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{5!}} - 1 = 56 - 1 = 55$$

Logo, o número de maneiras diferentes de retirar 3 bolas, de modo que não saiam somente bolas vermelhas, é 55.

57. Para formar os triângulos, devemos escolher 2 pontos dos 7 de uma reta e 1 ponto dos 4 da outra, ou 1 ponto dos 7 de uma reta e 2 pontos dos 4 da outra.

$$C_{7,2} \cdot C_{4,1} + C_{7,1} \cdot C_{4,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 4 + 7 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$$

$$= 21 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 84 + 42 = 126$$

Portanto, podem ser formados 126 triângulos.

58. $C_{53,6} = \frac{53!}{47! \cdot 6!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot \overset{17}{\cancel{51}} \cdot \overset{10}{\cancel{50}} \cdot 49 \cdot \cancel{48}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} =$

$= 22.957.480$

O jogador pode escolher 6 números de 22.957.480 maneiras.

59. Resposta pessoal.

Comentário: Seria interessante propor uma pesquisa sobre os tipos de loterias existentes. Pode-se sortear um tipo de loteria para cada grupo e pedir aos alunos que calculem a chance que uma aposta simples tem de ser a vencedora no respectivo jogo. Provavelmente haverá surpresa entre os alunos ao verificarem que a chance de sucesso em loterias é bastante remota.

Exercícios complementares

1. • E_1 (escolha da entrada): 3 possibilidades
- E_2 (escolha do prato principal): 2 possibilidades
- E_3 (escolha da sobremesa): 4 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo: $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

Logo, são 24 opções.

2. Estação de partida: 11 possibilidades

Estação de chegada: 10 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo: $11 \cdot 10 = 110$

Logo, são necessários 110 tipos de bilhete.

3. $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

Logo, o pódio pode ser formado com 3 pilotos de 720 maneiras diferentes.

4. $P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60$

Logo, podem ser formados 60 números inteiros distintos.

5. $C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Portanto, são 10 as possíveis escolhas.

Comentário: Essa questão permite uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. O cálculo matemático indica que as escolhas possíveis dos ternos são 10, porém convém consultar o professor de Química para saber quais das escolhas levam realmente a um novo produto químico.

6. $C_{7,3} \cdot C_{5,2} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} =$

$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 35 \cdot 10 = 350$

Podem ser formados 350 grupos.

7. $C_{8,5} \cdot C_{9,7} = \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} \cdot \frac{9!}{7! \cdot (9-7)!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} = 56 \cdot 36 = 2.016$

A seleção pode ser feita de 2.016 maneiras.

8. $P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$

Se as bolas forem colocadas em fila, há 56 resultados possíveis.

9. $C_{n,2} = 28 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 28 \Rightarrow n \cdot (n-1) = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow n = 8$ ou $n = -7$ (não convém)

Logo, $n = 8$.

Estavam na festa 8 amigos.

10. O professor pode ministrar as aulas das seguintes maneiras:
- 8, 8 e 4 aulas → 3 maneiras
- 6, 6 e 8 aulas → 3 maneiras

Então: $3 + 3 = 6$

alternativa b

11.

Centena	Dezena	Unidade

2 possibilidades: (2 ou 4)
4 possibilidades
3 possibilidades

Então: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$

Logo, poderemos formar 24 números pares com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 sem repetição.

12. Se um número é par, termina com 2.

___ ___ 2

6 possibilidades
6 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, temos: $6 \cdot 6 = 36$

São 36 possibilidades de números pares com 3 algarismos entre 1, 2, 3, 5, 7 e 9.

Precisamos excluir desse conjunto os números que têm 3 algarismos iguais e os que têm todos os algarismos distintos, para que tenhamos a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais. Assim:
- o único que tem os 3 algarismos iguais é 222. Portanto, 1 número.
- os números com os 3 algarismos distintos e pares totalizam: $5 \cdot 4 = 20$

Logo, a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais é dada por: $36 - 1 - 20 = 15$.

alternativa c

MODERNA

13. Para João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila sem que haja um corredor entre eles, devemos ter:

- os dois sentados nas poltronas da esquerda: 2 possibilidades (P_2);
- ou os dois sentados nas poltronas do meio: 6 possibilidades (P_3);
- ou os dois sentados nas poltronas da direita: 2 possibilidades (P_2).

Logo, eles podem ocupar duas poltronas dessa fila, sem que haja um corredor entre eles, de 10 modos.

alternativa d

14. Para cada caixinha, vamos precisar de dois papéis com cores diferentes, um para envolver a caixinha e outro para a fita. Note, por exemplo, que uma embalagem com papel de cor A e fita de cor B é diferente de outra embalagem com papel de cor B e fita de cor A. Assim, a ordem é importante nos agrupamentos. Chamando de n a quantidade total de cores, e tomando de 2 em 2 cores para compor as 30 caixinhas, temos o seguinte arranjo:

$A_{n,2} = 30$

$\frac{n!}{(n-2)!} = 30$

$n \cdot (n-1) = 30$

$n^2 - n - 30 = 0$

$n = 6$ ou $n = -5$ (não convém)

Logo, $n = 6$.

O número de cores diferentes é 6.

alternativa c

15. Descartando as ordens simétricas, temos:

$\boxed{A}\ \underbrace{BCDEF}_{P_5}\ \boxed{A}$

$\frac{P_5}{2} = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$

O tempo gasto em cada sequência é 1 min 30 s = 90 s.

Assim, o tempo mínimo necessário será:

(60 · 90) s = 5.400 s = 90 min

alternativa b

16. Podemos iluminar essa sala com:

- 1 lâmpada acesa: 5 possibilidades (P_5^4);
- ou 2 lâmpadas acesas: 10 possibilidades ($P_5^{2,3}$);
- ou 3 lâmpadas acesas: 10 possibilidades ($P_5^{2,3}$);
- ou 4 lâmpadas acesas: 5 possibilidades (P_5^4);
- ou 5 lâmpadas acesas: 1 possibilidade (P_5^5).

Logo, o total de modos para iluminar essa sala é 31.

17. Inicialmente, devemos considerar a quantidade possível de escolhas de 2 homens e 2 mulheres entre os 5 homens e as 4 mulheres disponíveis:

$C_{5,2} \cdot C_{4,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 60$

Para cada um desses 60 grupos de 2 homens e 2 mulheres, as duplas mistas podem ser escolhidas de 2 formas diferentes; logo: 2 · 60 = 120.

Portanto, as equipes podem ser selecionadas de 120 maneiras.

18. A quantidade de sucos diferentes que a fábrica produz é dada por:

$2 \cdot (5 + C_{5,2}) = 30$

duplo

simples

açúcar ou adoçante

alternativa a

19. **a)** $P_6 = 6! = 720$

$1 \cdot P_5 = 1 \cdot 5! = 120$

É possível formar 720 números, e 120 iniciam com o algarismo 1.

b) A quantidade de números que começam com os algarismos 1, 2, 3 ou 4 é $4 \cdot P_5 = 480$. Como o número 512.346 é o primeiro que inicia com o algarismo 5, sua posição é 481ª.

A quantidade de números que iniciam com o algarismo 1 é $1 \cdot P_5 = 120$; a quantidade que começa com o algarismo 2 é $1 \cdot P_5 = 120$; logo, o número 312.456 ocupa a posição 241, e o número que ocupa a posição 242 é 312.465.

20. Temos de permutar os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 e contar quantas senhas são menores que a de número 75.913.

- Números que começam com os algarismos 1, 3 ou 5:

$\underbrace{\boxed{1,\ 3\text{ ou }5}}_{3}\ \underbrace{\square\ \square\ \square\ \square}_{P_4}$

$3 \cdot 4! = 3 \cdot 24 = 72$

- Números cujo primeiro algarismo é 7 e o segundo é 1 ou 3:

$\boxed{7}\ \underbrace{\boxed{1\text{ ou }3}}_{2}\ \underbrace{\square\ \square\ \square}_{P_3}$

$2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$

- Números cujo primeiro algarismo é 7, o segundo é 5 e o terceiro é 1 ou 3:

$\boxed{7}\ \boxed{5}\ \underbrace{\boxed{1\text{ ou }3}}_{2}\ \underbrace{\square\ \square}_{P_2}$

$2 \cdot 2! = 2 \cdot 2 = 4$

Assim, a quantidade de números menores que 75.913 é dada por:

72 + 12 + 4 = 88

Portanto, a ordem de chamada do candidato de número 75.913 é 89.

alternativa e

21. $(\log_3 n)! = 24 \Rightarrow (\log_3 n)! = 4! \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 n = 4 \Rightarrow n = 3^4 \Rightarrow n = 81$

Logo, $S = \{81\}$.

Comentário: Essa questão requer uma abordagem intradisciplinar com logaritmo. Convém verificar se há necessidade prévia de revisar o conceito.

22. $\underbrace{12}_{\text{presidente}} \cdot \underbrace{11}_{\text{vice-presidente}} \cdot \underbrace{C_{10,3}}_{\text{supervisores}} = 132 \cdot 120 = 15.840$

Logo, há 15.840 maneiras de compor uma comissão.

23. Como 2 das 5 atividades estão vinculadas a determinados horários fixos (13 h e 17 h), o aposentado deve sempre realizar a atividade das 13 h (levar o neto para a escola) antes da atividade das 17 h (pegar o neto na escola). Assim, considerando a realização da atividade das 13 h, temos o seguinte esquema para a ordem das atividades:

$\boxed{13\text{ h}}\ \underline{\quad}_{4}\ \underline{\quad}_{3}\ \underline{\quad}_{2}\ \underline{\quad}_{1} \rightarrow$ 24 maneiras

Não pode ser a atividade das 17 h.

$\underline{\quad}_{3}\ \boxed{13\text{ h}}\ \underline{\quad}_{3}\ \underline{\quad}_{2}\ \underline{\quad}_{1} \rightarrow$ 18 maneiras

MODERNA

Não pode ser a atividade das 17 h.

3	2	13 h	2	1	→ 12 maneiras

3	2	1	13 h	17 h	→ 6 maneiras

Adicionando os resultados, temos:
$24 + 18 + 12 + 6 = 60$
Logo, o aposentado pode realizar as atividades em ordem diferente de 60 maneiras.
alternativa b

24. Como todas as empresas devem ser contratadas, uma delas receberá 2 trabalhos. Podemos escolher o conjunto de 2 trabalhos dados a uma mesma empresa de $C_{4,2}$ modos distintos. Esse conjunto de 2 trabalhos com os outros 2 trabalhos restantes podem ser distribuídos para as 3 empresas de P_3 modos. Assim:

$$C_{4,2} \cdot P_3 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$$

Portanto, os trabalhos podem ser distribuídos de 36 maneiras distintas.
alternativa c

25. A quantidade de maneiras de escolher 2 letras entre a, b e c é dada por: $C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

Para escolher, entre as 7 letras restantes, as outras 2 letras para formar o anagrama, temos:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

Assim, a quantidade de maneiras de formar um conjunto de 4 letras escolhidas entre as 10 primeiras letras do alfabeto com 2 das letras a, b e c é: $3 \cdot 21 = 63$
Como no anagrama leva-se em consideração a ordem, para cada um desses conjuntos de 4 letras teremos P_4 anagramas. Logo: $P_4 \cdot 63 = 4! \cdot 63 = 1.512$.
Portanto, podemos formar 1.512 anagramas.
alternativa d

Autoavaliação

1. A — B ⇉ C

$3 \cdot 4 = 12$

Logo, existem 12 maneiras de ir da cidade A até a cidade C passando por B.
alternativa c

2. — — — —

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 9^2 \cdot 56$

Portanto, existem $9^2 \cdot 56$ números naturais de 4 algarismos que não têm algarismos repetidos.
alternativa b

3. $6! = 6 \cdot 5!$
alternativa d

4. $P_4 = 4! = 24$

Logo, são possíveis 24 classificações nessa prova.
alternativa d

5. PAPAGAIO

$$P_8^{2,3} = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 3.360$$

Portanto, há 3.360 anagramas da palavra PAPAGAIO.
alternativa d

6. Uma reta passará por 2 pontos desses 15. O número de retas será $C_{15,2}$.
alternativa c

7. $C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

Logo, há 10 possibilidades de escolha da dupla.
alternativa b

8. Combinações são problemas de contagem que envolvem situações nas quais a ordem não é importante.
alternativa c

Capítulo 5 - Probabilidade

Exercícios propostos

1. Dos números de 1 a 90, os múltiplos de 5 são:
5, 10, 15, 20, 25, ..., 85 e 90
Logo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 89, 90\}$ e
$E = \{5, 10, 15, 20, 25, ..., 85, 90\}$

2. O evento "sair um número maior que 3" é $E = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 89, 90\}$, que tem 87 elementos.
O espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 89, 90\}$, que tem 90 elementos.

Comentário: O objetivo desse exercício, assim como o do exercício 3, é trabalhar de maneira adequada expressões como "muito provável" e "pouco provável", que não expressam o rigor característico da linguagem matemática, mas fazem parte da linguagem do dia a dia.

3. Sim, o número de elementos do evento "vai sair um rei de ouros" é muito menor que o número de elementos do espaço amostral, pois $n(E) = 1$ e $n(S) = 52$.

4. O espaço amostral é o conjunto dos pares ordenados (x, y) tal que x seja o número que poderá ocorrer no lançamento do dado azul e y seja o número que poderá ocorrer no lançamento do dado vermelho. Então:

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

a) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

b) {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}

c) ∅, pois a menor soma é igual a 2.

d) {(6, 6)}

e) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)}

f) S (todos os elementos do espaço amostral)

g) {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)}

h) {(6, 3), (3, 6), (6, 6)}

MODERNA

5. $C_{500,3} = \frac{500!}{3! \cdot 497!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498}{3 \cdot 2} = 20.708.500$

$n(S) = 20.708.500$

6. Resposta pessoal.

7. Temos: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $n(S) = 12$

a) E_1: sair um número par

$E_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e $n(E_1) = 6$

$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) E_2: sair um número maior que 4

$E_2 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $n(E_2) = 8$

$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

c) E_3: sair um número divisível por 3

$E_3 = \{3, 6, 9, 12\}$ e $n(E_3) = 4$

$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

d) E_4: sair um número múltiplo de 5

$E_4 = \{5, 10\}$ e $n(E_4) = 2$

$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

e) E_5: sair um número menor que 1

$E_5 = \varnothing$ e $n(E_5) = 0$

$P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S)} = \frac{0}{12} = 0$

8. Temos: S = {5 bolas brancas, 3 bolas pretas, 7 bolas vermelhas} e $n(S) = 15$

a) E_1: a bola ser branca $\Rightarrow n(E_1) = 5$

$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

b) E_2: a bola ser preta $\Rightarrow n(E_2) = 3$

$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

c) E_3: a bola ser branca ou preta $\Rightarrow n(E_3) = 8$

$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{8}{15}$

d) E_4: a bola ser vermelha e branca $\Rightarrow n(E_4) = 0$

$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{0}{15} = 0$

Comentário: Nos itens **c** e **d** é interessante comentar com os alunos o significado dos conectivos *ou* (que define a união de conjuntos) e *e* (que define a intersecção de conjuntos).

9. Considerando um grupo de 15 balas, do qual serão retiradas 3, não importando a ordem, o número de elementos do espaço amostral corresponde ao número de combinações de 15, tomadas 3 a 3.

$n(S) = C_{15,3} = \frac{15!}{3! \cdot (15 - 3)!} = 455$

Temos E: 3 balas sabor morango, de um total de 5. Então:

$n(E) = C_{5,3} = 10$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$

Comentário: Convém comentar com os alunos a respeito da importância do cálculo combinatório no estudo da Probabilidade, que será empregado em várias atividades.

10. O número de agrupamentos com as letras R, O, M e A que podem ser formados por ordem de saída, retirando-se uma a uma as cartelas do saco, é:

$n(S) = P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

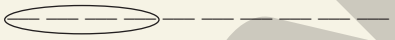
E: a palavra formada é AMOR $\Rightarrow n(E) = 1$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{24}$

11. O espaço amostral S é formado por todas as possibilidades de fila, sem restrição de lugar.

Assim: $n(S) = P_{10} = 10!$

Para as 4 pessoas ficarem juntas, consideramos como se fossem 1 pessoa e permutamos com as outras 6 pessoas da fila:



$P_7 = 7!$

As pessoas da mesma família podem, ainda, ser permutadas entre si: $P_4 = 4!$

Então: $n(E) = P_7 \cdot P_4$

$P(E) = \frac{P_7 \cdot P_4}{P_{10}} = \frac{7! \cdot 4!}{10!} = \frac{7! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} = \frac{1}{30}$

Logo, a probalidade de que as 4 pessoas da mesma família fiquem juntas é de $\frac{1}{30}$.

12. O espaço amostral S é formado por todas as combinações das 6 crianças, tomadas 5 a 5. Então:

$n(S) = C_{6,5} = 6$

Se 5 crianças são selecionadas e os 2 meninos devem estar no grupo, devemos escolher 3 das 4 meninas:

$n(E) = C_{4,3} = 4$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

A probabilidade de os 2 meninos estarem no grupo é $\frac{2}{3}$.

13. Considerando o grupo de 7 notas, do qual serão retiradas 2, simultaneamente e ao acaso, o número de elementos do espaço amostral corresponde ao número de combinações de 7, tomadas 2 a 2.

$n(S) = C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot (7 - 2)!} = 21$

E: soma dos valores das duas notas retiradas ser maior que R$ 40,00

$n(E) = n(S) - C_{4,2} \Rightarrow n(E) = 21 - 6 = 15$

($C_{4,2}$: combinação das 4 notas de R$ 10,00 tomadas 2 a 2)

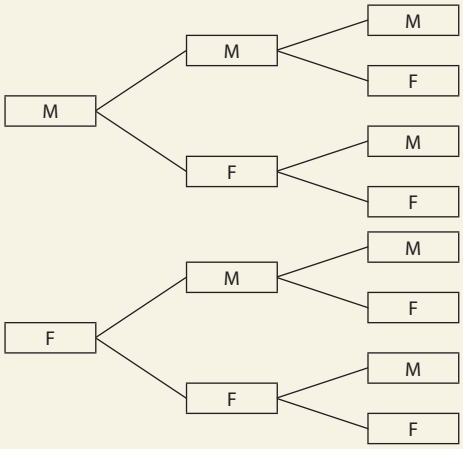
$P(E) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

14. **a)** Não, pois o evento elementar "sair cara" tem probabilidade diferente do evento elementar "sair coroa".

b) O espaço amostral para o lançamento de 3 moedas é S = {ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk}

MODERNA

15. Sendo M para menino e F para menina:



$S = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$ e $n(S) = 8$

a) $E_1 = \{(M, F, F), (F, M, F), (F, F, M)\} \Rightarrow n(E_1) = 3$

$$P(E_1) = \frac{3}{8}$$

b) $E_2 = \{(M, M, M)\} \Rightarrow n(E_2) = 1$

$$P(E_2) = \frac{1}{8}$$

c) $E_3 = S - \{(F, F, F)\} \Rightarrow n(E_3) = 7$

$$P(E_3) = \frac{7}{8}$$

d) $E_4 = \{(M, M, M), (F, F, F)\} \Rightarrow n(E_4) = 2$

$$P(E_4) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Comentário: Como as probabilidades de ocorrência de cada sexo são iguais, é interessante questionar os alunos sobre que alterações teríamos nas respostas caso substituíssemos, em cada item do enunciado da questão, um sexo pelo outro. Espera-se que eles percebam que as respostas seriam as mesmas.

16. Considerando o grupo de 16 bolas, do qual serão retiradas 3, simultaneamente e ao acaso, o número de elementos do espaço amostral corresponde ao número de combinações de 16, tomadas 3 a 3.

$$n(S) = C_{16, 3} = \frac{16!}{3! \cdot (16 - 3)!} = 560$$

a) E_1: as três bolas retiradas serem amarelas

$$n(E_1) = C_{5, 3} = \frac{5!}{3! \cdot (5 - 3)!} = 10$$

$$P(E_1) = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$$

b) E_2: as três bolas retiradas serem azuis

$$n(E_2) = C_{4, 3} = \frac{4!}{3! \cdot (4 - 3)!} = 4$$

$$P(E_2) = \frac{4}{560} = \frac{1}{140}$$

c) E_3: as três bolas retiradas serem vermelhas

$$n(E_3) = C_{7, 3} = \frac{7!}{3! \cdot (7 - 3)!} = 35$$

$$P(E_3) = \frac{35}{560} = \frac{1}{16}$$

d) E_4: as três bolas retiradas serem da mesma cor

$n(E_4) = 10 + 4 + 35$

possibilidades de as 3 bolas serem amarelas. | possibilidades de as 3 bolas serem azuis. | possibilidades de as 3 bolas serem vermelhas.

$n(E_4) = 49$

$$P(E_4) = \frac{49}{560} = \frac{7}{80}$$

17. a) Vamos considerar:

E_1: a carta ser de paus $\Rightarrow n(E_1) = 13$

E_2: a carta ser dama $\Rightarrow n(E_2) = 4$

$E_1 \cap E_2$: a carta ser dama de paus $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 1$

Então:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Logo, a probabilidade de a carta retirada ser de paus ou ser uma dama é $\frac{4}{13}$.

b) Vamos considerar:

E_1: a carta ser de ouros ou de copas $\Rightarrow n(E_1) = 26$

E_2: a carta ser rei $\Rightarrow n(E_2) = 4$

$E_1 \cap E_2$: a carta ser rei de ouros ou de copas

$n(E_1 \cap E_2) = 2$

Então:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

Logo, a probabilidade de a carta retirada ser de ouros ou de copas ou ser um rei é $\frac{7}{13}$.

18. Cores primárias: vermelho, amarelo e azul.

Vamos considerar que:

E_1: a bola pode ser vermelha $\Rightarrow n(E_1) = 4$

E_2: a bola pode ser azul $\Rightarrow n(E_2) = 2$

$E_1 \cap E_2$: a bola pode ser vermelha e azul $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 0$

Os conjuntos E_1 e E_2 são eventos mutuamente exclusivos:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de a bola retirada ter cor primária é $\frac{2}{3}$.

19. Sendo (a, b) um par ordenado em que a representa a face superior no dado vermelho e b, a face superior no dado preto, temos:

$S = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, 6), (3, 1), (3, 2), \ldots, (3, 6), \ldots, (6, 6)\}$

$n(S) = 36$

Vamos considerar:

E_1: sair 3 no dado vermelho $\Rightarrow n(E_1) = 6$

E_2: sair 2 no dado preto $\Rightarrow n(E_2) = 6$

$E_1 \cap E_2$: sair 3 no dado vermelho e 2 no preto

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

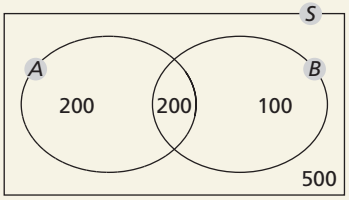
$n(E_1 \cap E_2) = 1$

Então: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

Logo, a probabilidade de sair 3 no dado vermelho ou 2 no preto é $\frac{11}{36}$.

20.



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{400}{1.000} + \frac{300}{1.000} - \frac{200}{1.000}$$

$$P(A \cup B) = \frac{500}{1.000} = \frac{1}{2}$$

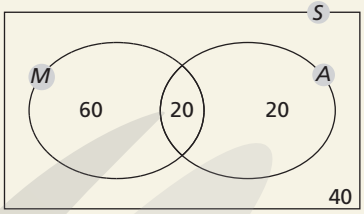
Logo, a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ser sócia do clube A ou do clube B é $\frac{1}{2}$.

Comentário: Seria interessante ressaltar que o emprego de diagramas na resolução de exercícios de probabilidade é um recurso muito útil.

21. Vamos representar a situação por meio de um diagrama de Venn.

A: estudantes de Artes Cênicas

M: estudantes de Música



a) $n(M) = 80$

$$P(M) = \frac{80}{140} = \frac{4}{7}$$

Logo, a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso cursar Música é $\frac{4}{7}$.

b) $n(A) = 40$

$$P(A) = \frac{40}{140} = \frac{2}{7}$$

Logo, a probabilidade de o estudante cursar Artes Cênicas é $\frac{2}{7}$.

c) $n(M \cap A) = 20$

$$P(M \cap A) = \frac{20}{140} = \frac{1}{7}$$

Logo, a probabilidade de o estudante cursar Música e Artes Cênicas é $\frac{1}{7}$.

d) $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A)$

$$P(M \cup A) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

Logo, a probabilidade de o estudante cursar Música ou Artes Cênicas é $\frac{5}{7}$.

22. Considerando os números de 1 a 36, o número de elementos do espaço amostral *S* é: $n(S) = 36$

a) E_1: número par $\Rightarrow n(E_1) = 18$

Então: $P(E_1) = \frac{18}{60} = \frac{1}{2}$

Logo, a probabilidade de sair um número par é $\frac{1}{2}$.

b) E_2: número múltiplo de 3 $\Rightarrow n(E_2) = 12$

Então: $P(E_2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Logo, a probabilidade de sair um múltiplo de 3 é $\frac{1}{3}$.

c) E_3: sair um número par e múltiplo de 3, ou seja, sair um múltiplo de 6 $\Rightarrow n(E_3) = 6$

Então: $P(E_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Logo, a probabilidade de sair um número par e múltiplo de 3 é $\frac{1}{6}$.

d) E_1: sair um número par $\Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{2}$

E_2: sair um múltiplo de 3 $\Rightarrow P(E_2) = \frac{1}{3}$

E_3: sair um número par e múltiplo de 3

$E_3 = E_1 \cap E_2 \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

Então: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de sair um número par ou múltiplo de 3 é $\frac{2}{3}$.

e) Os eventos "par ou múltiplo de 3" e "não par nem múltiplo de 3" são complementares.

Então, considerando E_4: não sair par nem múltiplo de 3, temos:

$$P(E_4) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Logo, a probabilidade de não sair número par nem múltiplo de 3 é $\frac{1}{3}$.

f) E_5: não sair número par

$$P(E_5) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

E_6: não sair um múltiplo de 3

$$P(E_6) = 1 - P(E_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$E_5 \cap E_6 = E_4$

$$P(E_5 \cap E_6) = \frac{1}{3}$$

Então:

$P(E_5 \cup E_6) = P(E_5) + P(E_6) - P(E_5 \cap E_6)$

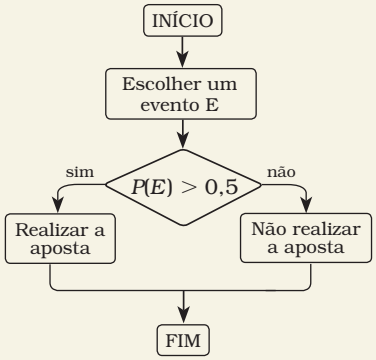
$$P(E_5 \cup E_6) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Logo, a probabilidade de não sair um número par ou não sair um múltiplo de 3 é $\frac{5}{6}$.

• Resposta possível:



NELSON MATSUDA

Oriente os alunos a analisar o algoritmo depois de escrito, seja em linguagem corrente, seja em um fluxograma. Peça a eles que validem as probabilidades já calculadas para os eventos, seguindo o fluxo do algoritmo. Por exemplo, o evento "sair um número par" tem probabilidade maior que 0,5? Não, pois a probabilidade desse evento é igual a 0,5; logo, o fluxo segue para "não realizar a aposta".

23. Organizando os dados, temos:

	Homens	Mulheres	Total
Morenos(as)	16	7	23
Loiros(as)	4	8	12
Total	20	15	35

a) E_1: ser mulher $\Rightarrow n(E_1) = 15$

E_2: ser uma pessoa loira $\Rightarrow n(E_2) = 12$

$E_1 \cap E_2$: ser uma mulher loira $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 8$

Então:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{15}{35} + \frac{12}{35} - \frac{8}{35} = \frac{19}{35}$

Logo, a probabilidade de ser uma mulher ou uma pessoa loira é $\frac{19}{35}$.

b) E_3: ser homem moreno $\Rightarrow n(E_3) = 16$

$P(E_3) = \frac{16}{35}$

Logo, a probabilidade de ser um homem moreno é $\frac{16}{35}$.

c) E_4: ser uma mulher morena $\Rightarrow n(E_4) = 7$

E_5: ser homem $\Rightarrow n(E_5) = 20$

$E_4 \cap E_5 = \varnothing$ (eventos mutuamente exclusivos)

Então:

$P(E_4 \cup E_5) = P(E_4) + P(E_5)$

$P(E_4 \cup E_5) = \frac{7}{35} + \frac{20}{35} = \frac{27}{35}$

Logo, a probabilidade de ser uma mulher morena ou um homem é $\frac{27}{35}$.

24. Vamos considerar os eventos:

E_1: João ganhar a corrida $\Rightarrow P(E_1) = 0{,}25$

E_2: Pedro ganhar a corrida $\Rightarrow P(E_2) = 0{,}20$

$E_1 \cap E_2$: João e Pedro ganharem a corrida

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$ (os eventos são mutuamente exclusivos)

Então:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

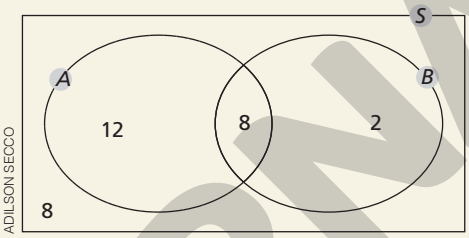
$P(E_1 \cup E_2) = 0{,}25 + 0{,}20 = 0{,}45$

Logo, a probabilidade de João ou Pedro ganhar a corrida é 0,45, isto é, 45%.

25. **a)** Sejam:

A: pessoas que têm cidadania australiana

B: pessoas que têm cidadania brasileira



ADILSON SECCO

b) E_1: a pessoa selecionada não ter nenhuma das duas cidadanias $\Rightarrow n(E_1) = 8$

$P(E_1) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

c) E_2: a pessoa ter apenas uma das cidadanias

$n(E_2) = 12 + 2 = 14$

$P(E_2) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

26. E_1: número divisível por 3

$E_1 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \Rightarrow n(E_1) = 6$

E_2: número divisível por 5

$E_2 = \{5, 10, 15, 20\} \Rightarrow n(E_2) = 4$

$E_1 \cap E_2$: número divisível por 3 e 5

$E_1 \cap E_2 = \{15\} \Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 1$

Então: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$

Portanto, a probabilidade de a ficha apresentar um número divisível por 3 ou divisível por 5 é $\frac{9}{20}$.

27. Sejam c a ocorrência "cara" e k a ocorrência "coroa", o espaço amostral é dado por:

S = {(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), (k, k, k), (k, k, c), (k, c, k), (k, c, c)} $\Rightarrow n(S) = 8$

Considere:

E_1: sair "cara" nas três moedas

$E_1 = \{(c, c, c)\} \Rightarrow n(E_1) = 1$

E_2: sair "coroa" nas três moedas

$E_2 = \{(k, k, k)\} \Rightarrow n(E_2) = 1$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Logo, a probabilidade de que ocorra três caras ou três coroas é $\frac{1}{4}$.

MODERNA

28. Total de atendentes: 8 + 12 + 3 = 23

$n(S) = C_{23,3} = \frac{23!}{3! \cdot 20!} = 1.771$

Considere:

E_1: os três atendentes trabalham no primeiro turno

E_3: os três atendentes trabalham no terceiro turno

$E_1 \cap E_3 = \varnothing \Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 0$ (os eventos são mutuamente exclusivos)

Então:

$n(E_1 \cup E_3) = n(E_1) + n(E_3) = C_{8,3} + C_{3,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} + 1 = 57$

$P(E_1 \cup E_3) = \frac{57}{1.771}$

Portanto, a probabilidade de que os 3 atendentes trabalhem no primeiro ou no terceiro turno é $\frac{57}{1.771}$.

29. Resposta pessoal.

30. **a)** A: ser homem

$n(A) = 210 + 390 = 600$

$P(A) = \frac{600}{1.000} = 0,6 = 60\%$

Logo, a probabilidade de a pessoa escolhida ao acaso ser homem é 60%.

b) B: ser mulher não especializada

$n(B) = 260$

$P(B) = \frac{260}{1.000} = 0,26 = 26\%$

Logo, a probabilidade de ser mulher não especializada é 26%.

c) C: ser não especializado

$n(C) = 390 + 260 = 650$

$P(C) = \frac{650}{1.000} = 0,65 = 65\%$

Logo, a probabilidade de ser não especializado é 65%.

d) D: ser homem especializado

$n(D) = 210$

$P(D) = \frac{210}{1.000} = 0,21 = 21\%$

Logo, a probabilidade de ser homem especializado é 21%.

e) E: ser especializado $\Rightarrow n(E) = 210 + 140 = 350$

F: ser mulher $\Rightarrow n(F) = 140 + 260 = 400$

$E \cap F$: ser mulher especializada $\Rightarrow n(E \cap F) = 140$

$P(F \mid E) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)} = \frac{140}{350} = 0,4 = 40\%$

Logo, a probabilidade de, se for especializado, ser mulher é 40%.

31. $P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$

Como os eventos "sair coroa na 1ª vez", "sair coroa na 2ª vez" e "sair coroa na 3ª vez" são independentes, temos:

$P(\text{coroa 3 vezes}) = P(\text{coroa}) \cdot P(\text{coroa}) \cdot P(\text{coroa})$

$P(\text{coroa 3 vezes}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Logo, a probabilidade de sair coroa nas três vezes é $\frac{1}{8}$.

32. Como o experimento é feito com reposição, os eventos são independentes.

a) $P(1^a \text{ ser branca}) = \frac{7}{12}$

$P(2^a \text{ ser verde}) = \frac{5}{12}$

$P(1^a \text{ ser branca e } 2^a \text{ ser verde}) =$

$= \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$

Logo, a probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda bola ser verde é $\frac{35}{144}$.

b) $P(1^a \text{ e } 2^a \text{ serem brancas}) = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$

Logo, a probabilidade de as duas bolas serem brancas é $\frac{49}{144}$.

33. Considere os eventos:

C: carta é de copas

P: carta é de paus

E: carta é de espadas

a) $P(4 \mid C) = \frac{P(4 \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

$P(4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(4 \mid C) \neq P(4)$

Portanto, os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de copas" não são independentes.

b) $P(4 \mid P) = \frac{P(4 \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$

$P(4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Então: $P(4 \mid P) = P(4)$

$P(P \mid 4) = \frac{P(4 \cap P)}{P(4)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

$P(P) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Assim: $P(P \mid 4) = P(P)$

Como $P(4 \mid P) = P(4)$ e $P(P \mid 4) = P(P)$, os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de paus" são independentes.

34. Organizando os dados, temos:

	Meninos (M)	Meninas (F)	Total
Ensino Médio (EM)	400	200	600
Ensino Fundamental (EF)	300	400	700
Total	700	600	1.300

a) $P(M \mid EM) = \frac{P(M \cap EM)}{P(EM)} = \frac{\frac{400}{1.300}}{\frac{600}{1.300}} = \frac{2}{3}$

Logo, a probabilidade de o aluno sorteado ser menino, sabendo que é aluno do Ensino Médio, é $\frac{2}{3}$.

MODERNA

b) $P(EM|M) = \dfrac{P(EM \cap M)}{P(M)} = \dfrac{\frac{400}{1.300}}{\frac{700}{1.300}} = \dfrac{4}{7}$

Logo, a probabilidade de ser aluno do Ensino Médio, sabendo que é menino, é $\frac{4}{7}$.

35. Usando a letra V para representar a retirada de uma bola verde, a letra A, de uma bola azul, e a letra B, de uma bola branca, temos:

$P(V) = \frac{1}{3} \qquad P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{1}{3}$

$P(3 \text{ de cores distintas}) = P(V) \cdot P(A) \cdot P(B) \cdot P_3$ ← permutação das 3 cores

$P(3 \text{ de cores distintas}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{2}{9}$

Logo, a probabilidade de serem retiradas três bolas de cores distintas é $\frac{2}{9}$.

36. O enunciado está incompleto. Falta a informação se há reposição da bola após a primeira retirada.

Resposta com reposição de bola:

P (preta e vermelha) $= \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{9}$

Resposta sem a reposição de bola:

P (preta e vermelha) $= \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{33}$

37. Resposta pessoal.

38. $\begin{cases} P(\text{coroa}) = \frac{1}{2} \\ P(\text{cara}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

E: 3 dos 7 lançamentos são coroas

$P(E) = P_7^{3,4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3}$

$P(E) = \frac{35}{128} \simeq 27{,}3\%$

Logo, a probabilidade de sair coroa 3 vezes é, aproximadamente, 27,3%.

39. $\begin{cases} P(\text{peso abaixo do limite}) = 0{,}1\% = 0{,}001 \\ P(\text{peso legal}) = 99{,}9\% = 0{,}999 \end{cases}$

E: comprar nenhum pacote com o peso abaixo do limite

$P(E) = \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot (0{,}001)^0 \cdot (0{,}999)^{3-0} \Rightarrow P(E) \simeq 0{,}997$

Logo, a probabilidade aproximada de um consumidor comprar 3 pacotes e nenhum ter o peso abaixo do limite é 99,7%.

40. $\begin{cases} P(\text{menino}) = \frac{1}{2} \\ P(\text{menina}) = \frac{1}{2} \end{cases}$

a) $P(4 \text{ meninos}) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} = \frac{1}{16}$

b) $P(2 \text{ meninas e } 2 \text{ meninos}) =$

$= \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{3}{8}$

c) $P(1 \text{ menino e } 3 \text{ meninas}) =$

$= \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$

41. $\begin{cases} P(\text{letra}) = \frac{26}{36} \\ P(\text{algarismo}) = \frac{10}{36} \end{cases}$

a) $P(6 \text{ letras}) = \frac{6!}{6! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^6 \cdot \left(\frac{10}{36}\right)^{6-6} \simeq 0{,}142$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter apenas letras é 14,2%.

b) $P(6 \text{ números}) = \frac{6!}{0! \cdot 6!} \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^0 \cdot \left(\frac{10}{36}\right)^{6-0} \simeq 0{,}0005$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter apenas números é 0,05%.

c) $P(4 \text{ letras e } 2 \text{ números}) =$

$= \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^4 \cdot \left(\frac{10}{36}\right)^{6-4} \simeq 0{,}315$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter 4 letras e 2 números é 31,5%.

d) $P(2 \text{ letras e } 4 \text{ números}) =$

$= \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{36}\right)^{6-2} \simeq 0{,}047$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter 2 letras e 4 números é 4,7%.

e) $P(\text{pelo menos uma letra}) = 1 - P(6 \text{ números})$

$P(\text{pelo menos uma letra}) \simeq 1 - 0{,}0005$

$P(\text{pelo menos uma letra}) \simeq 0{,}9995$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter pelo menos uma letra é 99,9%.

f) $P(\text{pelo menos um número}) = 1 - P(6 \text{ letras})$

$P(\text{pelo menos um número}) \simeq 1 - 0{,}142$

$P(\text{pelo menos um número}) \simeq 0{,}858$

Logo, a probabilidade aproximada de a senha ter pelo menos um número é 85,8%.

42. $\begin{cases} P(\text{preto}) = \frac{3}{4} \\ P(\text{branco}) = \frac{1}{4} \end{cases}$

a) $P(3 \text{ brancos e } 2 \text{ pretos}) =$

$= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-2} = \frac{45}{512}$

b) $P(2 \text{ brancos e } 3 \text{ pretos}) =$

$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-3} = \frac{135}{512}$

c) $P(1 \text{ branco e } 4 \text{ pretos}) =$

$= \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-4} = \frac{405}{1.024}$

d) $P(5 \text{ pretos}) =$

$= \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-5} = \frac{243}{1.024}$

MODERNA

43. a)

Face	f_i	f_r
1	150	15,0%
2	175	17,5%
3	163	16,3%
4	166	16,6%
5	174	17,4%
6	172	17,2%
Total	1.000	100,0%

b) Supondo que o dado seja "honesto", a probabilidade de sair qualquer uma das seis faces é a mesma e igual a $\frac{1}{6}$, ou seja, 16,7% aproximadamente.

Observando a tabela de frequências, em especial a coluna correspondente a f_r, podemos perceber que todos os valores estão próximos de 16,7%. Logo, com essa quantidade de lançamentos do dado podemos considerar a frequência relativa a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado.

Comentário: Diga aos alunos que, quanto maior o número de lançamentos do dado (honesto) — poderíamos, por exemplo, ter 2.000 lançamentos em vez de 1.000 —, mais próximos do número $\frac{1}{6}$ estariam os resultados da coluna f_r.

44. a)

Cor de camiseta	f_i	f_r
branca	4.200	35%
preta	3.600	30%
azul	1.200	10%
vermelha	1.800	15%
rosa	600	5%
amarela	600	5%
Total	12.000	100%

b) Foram vendidas 7.800 camisetas brancas ou pretas, sendo 4.200 brancas e 3.600 pretas.

c) De acordo com a tabela, a venda de camisetas pretas representa 30% do total de itens vendidos pela loja.

d) A probabilidade de uma camiseta amarela ser vendida nessa loja é de 5%, de acordo com a tabela construída.

45. De acordo com a tabela, nesse bairro 15% das pessoas apresentam 3 sintomas e 5% apresentam 4 sintomas, ou seja, 20% das pessoas (15% + 5%) necessitam de acompanhamento médico.

46. De acordo com a tabela, temos:

- modelo A: 380 carros roubados num total de 10.000 carros segurados.

  A probabilidade de um carro do modelo A ser roubado é:

  $$\frac{380}{10.000} = 0{,}0380 = 3{,}80\%$$

- modelo B: 289 carros roubados num total de 10.000 carros segurados.

  A probabilidade de um carro do modelo B ser roubado é:

  $$\frac{289}{10.000} = 0{,}0289 = 2{,}89\%$$

- modelo C: 254 carros roubados num total de 10.000 carros segurados.

  A probabilidade de um carro do modelo C ser roubado é:

  $$\frac{254}{10.000} = 0{,}0254 = 2{,}54\%$$

Comentário: Discuta com os alunos sobre a importância desse tipo de pesquisa. Pergunte se eles acham que probabilidades como essas influenciam o valor do seguro dos automóveis dos modelos A, B e C. Eles deverão concluir que, quanto maior a probabilidade de um carro de determinado modelo ser roubado, maior o valor do seguro desse carro.

Exercícios complementares

1. Sejam A, B meninos e C, D, E meninas.
Para escolher 2 alunos do grupo, temos:
$S = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$

a) E_1: escolher duas meninas

$E_1 = \{(C, D), (C, E), (D, E)\}$

b) E_2: escolher uma menina e um menino

$E_2 = \{(A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E)\}$

c) E_3: escolher dois meninos

$E_3 = \{(A, B)\}$

2. a) E_1: a carta retirada é de espadas

$E_1 = \{A_E, 2_E, 3_E, 4_E, 5_E, 6_E, 7_E, 8_E, 9_E, 10_E, J_E, Q_E, K_E\}$

b) E_2: a carta retirada é menor que 5 e maior que 2

$E_2 = \{3_E, 4_E, 3_C, 4_C, 3_O, 4_O, 3_P, 4_P\}$

c) E_3: a carta retirada é um ás

$E_3 = \{A_E, A_O, A_C, A_P\}$

3. a) E_1: cliente ter ficado no restaurante de 11 a 20 minutos

$n(E_1) = 8$

$$P(E_1) = \frac{8}{50} = 0{,}16 = 16\%$$

b) E_2: cliente ter ficado no restaurante 40 minutos ou menos

$n(E_2) = 11 + 8 + 9 + 7 = 35$

$$P(E_2) = \frac{35}{50} = 0{,}7 = 70\%$$

4. $P(\text{acertar 10 questões}) = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{5^{10}}$

5. O espaço amostral nessa situação é formado por todas as combinações de 8 sabores escolhidos 2 a 2. Assim:

$$n(S) = C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

a) E_1: os dois sorvetes são à base de fruta

$$n(E_1) = C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3$$

$$P(E_1) = \frac{3}{28}$$

Logo, a probabilidade de que os dois sorvetes escolhidos sejam à base de fruta é $\frac{3}{28}$.

b) E_2: nenhum dos sorvetes é à base de fruta

$$n(E_2) = C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$P(E_2) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

MODERNA

Logo, a probabilidade de que nenhum dos dois sorvetes escolhidos seja à base de fruta é $\frac{5}{14}$.

c) E_3: somente um dos sorvetes é à base de fruta

$P(E_3) = 1 - P(E_1) - P(E_2) = 1 - \frac{3}{28} - \frac{5}{14} =$

$= \frac{28 - 3 - 10}{28} = \frac{15}{28}$

Logo, a probabilidade de que somente um dos sorvetes escolhidos seja à base de fruta é $\frac{15}{28}$.

6. n(*S*) = 36

A: sair 5 em um dos dados

A = {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)}

n(*A*) = 11

B: produto entre os resultados ser 12

B = {(3, 4), (4, 3), (6, 2), (2, 6)}

n(*B*) = 4

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{11}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{12}$

Logo, a probabilidade de sair 5 em um dos dados ou o produto entre os resultados ser igual a 12 é $\frac{5}{12}$.

7. $P(\text{branca}) = \frac{10}{30}$

$P(\text{primo}) = \frac{10}{30}$

$P(\text{branca e primo}) = \frac{4}{30}$

$P(\text{branca ou primo}) =$

$= P(\text{branca}) + P(\text{primo}) - P(\text{branca e primo})$

$P(\text{branca ou primo}) = \frac{10}{30} + \frac{10}{30} - \frac{4}{30} = \frac{16}{30}$

$P(\text{branca ou primo}) = \frac{8}{15}$

alternativa c

8. O espaço amostral desse experimento é formado por todas as combinações dos 20 números tomados 5 a 5. Logo:

$n(S) = C_{20,5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{120} = 15.504$

A: acertar 4 números entre os 5 números sorteados.

Dos 20 números, 5 são sorteados e 15 não são sorteados; portanto, para acertar 4 números, é necessário escolher 4 entre os 5 números sorteados e 1 entre os 15 números não sorteados. Assim:

$n(A) = C_{5,4} \cdot C_{15,1} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{15!}{1! \cdot 14!} = 5 \cdot 15 = 75$

$P(A) = \frac{75}{15.504}$

alternativa c

9. Para cada um dos trajetos, vamos calcular a probabilidade de não pegar engarrafamento em nenhuma das duas vias:

- E1 · E3: (1 − 0,8) · (1 − 0,5) = (0,2) · (0,5) = 0,10
- E1 · E4: (1 − 0,8) · (1 − 0,3) = (0,2) · (0,7) = 0,14
- E2 · E5: (1 − 0,7) · (1 − 0,4) = (0,3) · (0,6) = 0,18
- E2 · E6: (1 − 0,7) · (1 − 0,6) = (0,3) · (0,4) = 0,12

Logo, a probabilidade de Paula pegar engarrafamento em pelo menos uma das vias, para cada trajeto, é:

- E1E3: 1 − 0,10 = 0,90
- E1E4: 1 − 0,14 = 0,86
- E2E5: 1 − 0,18 = 0,82
- E2E6: 1 − 0,12 = 0,88

Portanto, o trajeto com menor probabilidade de engarrafamento é E2E5.

alternativa d

10. De acordo com o quadro, 14 funcionárias têm calçado maior que 36, entre as quais 10 calçam 38; logo:

$P = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

alternativa d

11. n(múltiplos de 4) = 25

$P(\text{44 ser premiado}) = \frac{1}{25} = 0,04 = 4\%$

Logo, a probabilidade de Marcos ser premiado é 4%.

12. $\begin{cases} P(\text{ter carro da marca A}) = 20\% = 0,2 \\ P(\text{não ter carro da marca A}) = 80\% = 0,8 \end{cases}$

$P(\text{3 terem carro da marca A}) = P_8^{3,5} \cdot (0,2)^3 \cdot (0,8)^{8-3}$

$P(\text{3 terem carro da marca A}) \simeq 0,1468$

Logo, a probabilidade aproximada de 3 deles terem carro da marca A é 14,68%.

13. $\begin{cases} P(\text{fazer um gol}) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \\ P(\text{não fazer gol}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$

$P(\text{acertar 4 de 5 pênaltis}) =$

$= P_5^{4,1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{405}{1.024} \simeq 40\%$

Logo, a probabilidade de que Paulo acerte 4 de 5 pênaltis é aproximadamente 40%.

14. Número de peças defeituosas que cada máquina produziu:

n(X) = 0,35 · 0,02 · 20.000 = 140

n(Y) = 0,40 · 0,015 · 20.000 = 120

n(Z) = 0,25 · 0,008 · 20.000 = 40

O total de peças defeituosas das três máquinas é 300.

Então:

$P(\text{peça defeituosa ser da máquina X}) = \frac{140}{300} = \frac{7}{15}$

15. Seja *d* o total de declarações. Assim, temos: n(*S*) = *d*

Consideremos os eventos:

E_1: a declaração é fraudulenta;

E_2: a declaração é suspeita.

a) $n(E_1 \cap E_2)$ = 15% de 8% de *d* = 0,012*d*

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{0,012d}{d} = 0,012 = 1,2\%$

Portanto, a probabilidade de uma declaração separada ao acaso ser suspeita e fraudulenta é de 1,2%.

b) $P(E_2 | E_1) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)}$

$n(E_1)$ = 15% de 8% de *d* + 5% de 92% de *d* =

$= (0,012 + 0,046)d = 0,058d$

Logo:

$P(E_2 | E_1) = \frac{0,012d}{0,058d} = \frac{6}{29} \simeq 20,7\%$

Portanto, a probabilidade de uma declaração ser suspeita, dado que ela é fraudulenta, é de aproximadamente 20,7%.

16. Total de códigos = 10^6 = 1.000.000

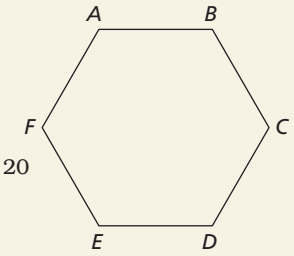
Total de tentativas = 1.000

$P(\text{acertar}) = \frac{1.000}{1.000.000} = 0,001$

Logo, a probabilidade de acertar o código do cartão em um total de 1.000 tentativas é 0,1%.

MODERNA

17. Considerando o hexágono regular ao lado, o número de triângulos formados com a escolha de 3 desses vértices é:



$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$$

Os triângulos equiláteros que podemos formar são $\triangle ACE$ e $\triangle BDF$.

Logo, a probabilidade de formar triângulos equiláteros é $\frac{2}{20}$, ou seja, $\frac{1}{10}$.

18. O número de modos de escolher 2 vértices do cubo (que tem 8 vértices) é dado por:

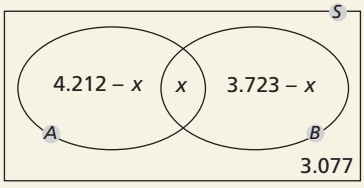
$$n(S) = C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Seja A o evento "escolher 2 vértices que não pertencem a uma mesma face". Sabemos que 2 vértices de um cubo que não estão em uma mesma face são extremidades de uma de suas diagonais. Como o cubo tem 4 diagonais, $n(A) = 4$.

Assim: $P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

Portanto, a probabilidade de os dois vértices não estarem na mesma face é $\frac{1}{7}$.

19. Podemos fazer um diagrama para representar essa situação:



Como $n(S) = 10.000$, temos:

$4.212 - x + x + 3.723 - x + 3.077 = 10.000$

$x = 11.012 - 10.000 = 1.012$

Assim:

$$P(A \cap B) = \frac{1.012}{10.000} = 0{,}1012 = 10{,}12\%$$

Logo, a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ter os dois antígenos é de 10,12%.

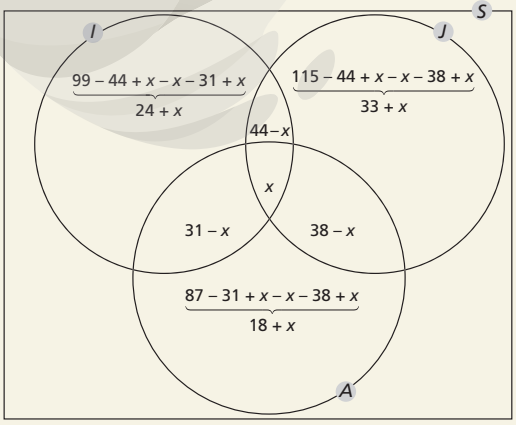
20. a) Sejam os conjuntos:

I: alunos que estudam italiano;

J: alunos que estudam japonês;

A: alunos que estudam alemão.

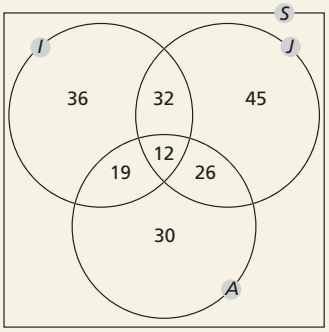
Temos:



Assim:

$24 + x + 44 - x + x + 31 - x + 33 + x + 38 - x + 18 + x = 200 \Rightarrow 188 + x = 200 \Rightarrow x = 12$

Então, temos:



b) $P(A \cap I \cap J) = \frac{12}{200} = \frac{3}{50}$

c) $P(\text{2 línguas}) = \frac{32 + 19 + 26}{200} = \frac{77}{200}$

d) $P(I \mid J) = \frac{n(I \cap J)}{n(J)} = \frac{44}{115}$

e) $P(A \mid J) = \frac{n(A \cap J)}{n(J)} = \frac{38}{115}$

Comentário: Caso julgue necessário, rever conceitos de operações com conjuntos para determinar as probabilidades pedidas.

21. a) Seja k o número de bombons de passas na caixa e $k + 2$ o número de bombons de nozes. Assim, o total de bombons na caixa é $2k + 2$.

O número de elementos do espaço amostral do experimento "retirar, ao acaso, 2 bombons da caixa" é dado pelo número de combinações de $2k + 2$, tomados 2 a 2:

$$n(S) = C_{2k+2,2} = \frac{(2k+2)!}{2! \cdot (2k)!} = \frac{(2k+2) \cdot (2k+1)}{2}$$

Seja E_1 o evento "ambos os bombons são de nozes", temos:

$$n(E_1) = C_{k+2,2} = \frac{(k+2)!}{2! \cdot (k)!} = \frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2}$$

Como $P(E_1) = \frac{2}{7}$, temos:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{\frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2}}{\frac{(2k+2) \cdot (2k+1)}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2(k+1) \cdot (2k+1)} \Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{(k+2)}{2 \cdot (2k+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8k + 4 = 7k + 14 \Rightarrow k = 10$$

Assim, há 10 bombons de passas e 12 bombons de nozes, ou seja, há 22 bombons na caixa.

b) $P = \frac{10 \cdot 12}{C_{22,2}} = \frac{\frac{120}{22!}}{2! \cdot 20!} = \frac{120}{231} = \frac{40}{77}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

22. Sejam $P(A)$ a probabilidade de o paciente não sofrer um efeito colateral e $P(B)$, a probabilidade de o paciente sofrer efeito colateral.

$P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - P(A)$

Probabilidade de B acontecer para 3 doses:

$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}729 \Rightarrow P(B) = 1 - 0{,}729 =$

$= 0{,}271 \simeq 0{,}27 = 27\%$

Probabilidade de B acontecer para 4 doses:

$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}6561 \Rightarrow P(B) = 1 -$

$- 0{,}6561 = 0{,}3439 \simeq 0{,}34 = 34\%$

Probabilidade de B acontecer para 6 doses:

$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}531441 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B) = 1 - 0{,}531441 = 0{,}468559 \simeq 0{,}47 = 47\%$

Portanto, o maior número de doses admissível para o paciente é 4.

alternativa b

Autoavaliação

1. espaço amostral; evento

alternativa c

2. $S = \{A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3, V_4\}$

$n(S) = 7$

alternativa a

3. $E = \{A_c, 1_c, 2_c, 3_c, \ldots, Q_c, K_c\}$

$n(E) = 13$

$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

alternativa b

4. Os números da Mega-Sena são pares ou ímpares; logo, o evento A é um evento certo e o evento B é um evento impossível, pois não existem números negativos na Mega-Sena.

alternativa d

5. $P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

alternativa b

6. Para obter o número de elementos do espaço amostral, devemos fazer uma combinação de 20 elementos, tomados 5 a 5: $C_{20,5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15.504$

alternativa c

7. $n(S) = 100$

$M10 = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$

$n(M10) = 10$

$M15 = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$

$n(M15) = 6$

$M10 \cap M15 = \{30, 60, 90\}$

$n(M10 \cap M15) = 3$

$P(M10 \cup M15) = P(M10) + P(M15) - P(M10 \cap M15) =$

$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{3}{100} = \frac{13}{100}$

alternativa d

8. $P(\text{nenhuma usar o sabonete X}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

alternativa b

9. S: soma 7

$S = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

$n(S) = 6$

E: ocorrer face 4 em um deles

$E = \{(3, 4), (4, 3)\}$

$n(E) = 2$

$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

alternativa a

10. Se 8 em cada 10 recomendam a marca X, 2 em cada 10 não a recomendam.

$P(\text{recomendar}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$P(\text{não recomendar}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Para calcular a probabilidade de que, dos 3 solicitados, nenhum recomende a marca X, temos:

$P(3 \text{ não recomendarem}) = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0$

$P(3 \text{ não recomendarem}) = \frac{1}{125}$

alternativa b

Compreensão de texto

1. Landsteiner encontrou, em suas pesquisas, duas proteínas nas hemácias. O sangue com apenas uma dessas proteínas é do tipo A ou B. O sangue com as duas proteínas é do tipo AB. O sangue do tipo O não apresenta nenhuma das proteínas. Quando o sistema imunológico receptor não reconhece uma proteína do sangue doado, ocorre a coagulação. Assim, quem não tem nenhuma das proteínas rejeita o sangue de quem as tem. Quem tem os dois tipos de proteínas não produz anticorpos, podendo receber qualquer tipo de doação de sangue.

2.

Doação de sangue								
Receptores \ Doadores	AB+	AB−	A+	A−	B+	B−	O+	O−
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB−		X		X		X		X
A+			X	X			X	X
A−				X				X
B+					X	X	X	X
B−						X		X
O+							X	X
O−								X

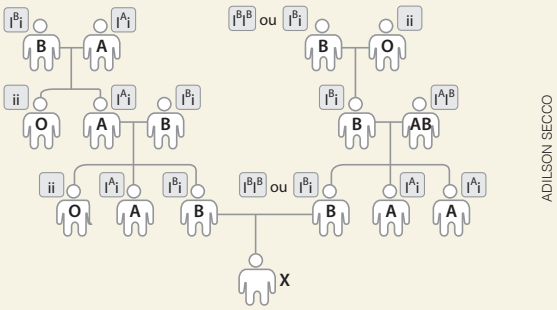
MODERNA

3. Resposta pessoal.

4. Essa questão pode ser trabalhada com a ajuda do professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Os alunos terão de pesquisar e escrever sobre a relação entre os **genótipos** e os **fenótipos** no sistema ABO. Veja a tabela a seguir:

Relação entre genótipos e fenótipos no sistema ABO	
Fenótipos	**Genótipos**
Grupo A	I^AI^A ou I^Ai
Grupo B	I^BI^B ou I^Bi
Grupo AB	I^AI^B
Grupo O	ii

Então, para os indivíduos dessa família, considerando os tipos sanguíneos de pais e filhos, temos os genótipos:



ADILSON SECCO

Assim, o casal (pais do indivíduo X) são do tipo I^Bi e $I^B\underline{?}$. Para que esse casal tenha um filho com sangue tipo O, o indivíduo $I^B\underline{?}$ precisa ser I^Bi, cuja probabilidade é $\frac{1}{2}$, já que seus pais têm a chance de gerar filhos I^AI^B, I^BI^B, I^Ai e I^Bi. Nesse caso, portanto, a chance de o indivíduo X ser ii é de $\frac{1}{8}$, valor que corresponde à multiplicação: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

Probabilidade de o indivíduo $I^B\underline{?}$ ser I^Bi.

Probabilidade de o casal, ambos com genótipo I^Bi, ter um filho ii.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Metas e projetos

Considerando a BNCC, esta seção visa desenvolver as competências gerais **4**, **5**, **6** e **9**, as competências específicas de Matemática **1**, **2** e **3** e a habilidade **EM13MAT203**. Além disso, ela favorecerá o desenvolvimento dos temas contemporâneos **educação financeira** e **educação para o consumo**.

As atividades desta seção devem ser um convite à reflexão e à ação, levando os alunos a pensar como as atitudes, as escolhas, o uso das informações e a cultura financeira (pessoal e familiar) podem impactar na construção de objetivos e em sua realização (a curto, a médio e a longo prazo). A seção também trabalha com os processos de organização para alcançar metas e realizar projetos.

Em cada atividade são sugeridas algumas discussões, a fim de oferecer subsídios para o trabalho em sala de aula, e um conjunto de caminhos possíveis a serem percorridos.

Para começar e pensar:

A situação apresentada é uma oportunidade de discutir os conceitos iniciais que serão trabalhados na seção, buscando compreender as etapas de execução de um projeto, iniciando pela discussão de sua viabilidade financeira no tempo desejado, que pode ser estudado com base em um controle de gastos mensais e um orçamento dos custos do projeto, e finalizando com a possível realização do projeto seguindo um planejamento financeiro.

1. Fazer um orçamento pode ser entendido como estimar o custo de uma compra ou da contratação de um serviço.

2. Nessa questão, os alunos vão estudar os passos iniciais para a realização de um projeto, levantando os itens necessários e fazendo um orçamento inicial. Esse exercício é muito importante e pode ser adaptado para outros projetos. Para estimar o gasto total de um projeto, por exemplo, é preciso ponderar cada necessidade, analisar cada detalhe e considerar todas as despesas, por menores que pareçam. Muitas vezes pequenos gastos acumulam-se e tornam-se grandes.

a) A lista com os itens necessários para realizar uma festa de aniversário pode variar bastante. Vai depender do perfil do aniversariante, do grupo de convidados e do valor destinado para a festa. Alguns alunos podem considerar festa um encontro entre amigos para comer lanches ou um espaço com pouca iluminação e música alta; outros podem desejar decoração, música ao vivo e um serviço de *buffet*. Assim, as listas elaboradas pelos alunos podem ser muito semelhantes e ter alguns itens em comum ou nenhum item em comum.

b) Oriente os alunos na utilização de uma planilha eletrônica e de fórmulas para realizar os cálculos necessários nos orçamentos elaborados por eles. Para somar valores das células B2, B3, B4 e B5, por exemplo, pode-se utilizar a fórmula =SOMA(B2:B5).

c) Para saber o orçamento total de uma festa, não basta somar os orçamentos de produtos e serviços escolhidos; é importante considerar outros fatores, como a quantidade de pessoas que cada um dos itens escolhidos atenderá. Alguns exemplos: um *buffet* pode oferecer o orçamento por pessoa ou a cada 100 pessoas; o valor das bebidas dependerá da quantidade de litros desejada, que depende de uma estimativa do consumo médio dos convidados, entre outros fatores que precisam ser avaliados. Fazer o orçamento de uma festa é considerar todas as despesas (produtos e serviços) necessárias para a realização dela, além de pesquisar e estimar os custos de cada despesa, comparando os valores cobrados por diferentes fornecedores e considerando o custo/benefício de cada produto ou serviço.

Para discutir:

3. Se achar conveniente, anote no quadro as escolhas dos alunos, apurando a quantidade de cada item em comum escolhido. Depois, pergunte-lhes: "Quais desses itens são realmente necessários para a realização de uma festa?". Estimule-os a classificar os itens em categorias de acordo com sua relevância para a realização da festa. Uma possibilidade é categorizar os itens em "Essencial", "Importante" e "Dispensável".

Após a apresentação da descrição das despesas mensais da família de Joana, peça aos alunos que identifiquem as fórmulas que podem ser utilizadas para calcular o valor das células B15 e B17. Como resposta, eles podem chegar às fórmulas =SOMA(B7:B14) e =(B4-B15) para encontrar os valores das células B15 e B17, respectivamente.

MODELO

Aprofundando a discussão sobre a possibilidade de Joana comemorar seu aniversário com uma festa e pensando em alternativas que possam ser mais interessantes nesse caso, os alunos precisarão tomar algumas decisões. É importante incentivar e respeitar a argumentação dos grupos em cada questionamento, buscando estimular o desenvolvimento da autonomia dos alunos.

Se julgar conveniente, antes de os alunos responderem à questão **4**, promova um debate sobre a participação ativa dos adolescentes no orçamento e no planejamento financeiro da família. Observe que Joana assume um papel ativo, tanto na organização financeira da família quanto na organização da festa, quando toma iniciativa de listar os convidados, fazer um orçamento prévio e levantar os gastos mensais da família.

4. Somando todos os gastos estimados e considerando apenas o salário de Mônica como receita da família, restam R$ 75,30 no final do mês. Com esse valor, de acordo com o orçamento elaborado por Joana, não é possível realizar uma festa honrando todas as despesas já definidas para o mês.

5. Essa questão tem por objetivo estimular o debate das opções possíveis para o caso de Joana: tomar um empréstimo, parcelar as compras ou outras possibilidades levantadas. Encoraje os alunos a refletir sobre o orçamento do próximo mês: "A família de Joana terá condições de pagar todas as despesas do próximo mês se optar por um parcelamento? Vocês acham que se endividar para realizar um sonho é válido?".

Existem, contudo, algumas alternativas: parcelar algumas despesas da festa, tomar empréstimos com familiares ou instituições financeiras e deixar de pagar algumas contas do mês para sobrar mais dinheiro para a festa. De acordo com as respostas dos alunos, será possível ter uma ideia das prioridades estabelecidas por cada grupo de discussão.

6. Joana tem uma decisão financeira a tomar: ela deseja comemorar seu aniversário, mas dispõe de pouco mais de R$ 70,00 para isso. Estimule os alunos a perceber que existem outras formas de comemorar um aniversário, além de dar uma festa. Algumas das possíveis alternativas podem ser: ir ao cinema com os amigos, fazer um piquenique em um parque, sair para lanchar, promover uma festa colaborativa (cada pessoa contribui com uma comida ou uma bebida). Note que todas essas possibilidades envolvem o comprometimento financeiro dos amigos de Joana. Também é possível pensar em alternativas para reduzir o custo da festa, por exemplo, diminuir o uso de materiais descartáveis, dando preferência a materiais reutilizáveis – atitude essa que pode refletir um consumo consciente, atendendo às questões de educação ambiental. Também é possível preparar algumas comidas e a decoração, o que pode resultar na diminuição desses custos.

7. Planejamento financeiro é o conjunto de ações e atitudes que visam organizar a vida financeira com base em objetivos bem definidos.

8. A resposta a essa questão dependerá dos desejos e das necessidades dos alunos. O planejamento financeiro pode ser uma ferramenta importante para buscar a realização de um sonho ou de um grande projeto.

9. Algumas estratégias já foram mencionadas nos diálogos entre Joana e Maria, como economizar nas despesas mensais e poupar a longo prazo, mas outras opções podem ser sugeridas.

Para finalizar:

Esta parte da seção busca sintetizar a situação apresentada, dando aos alunos a oportunidade de relacioná-la com seus projetos pessoais.

Promova uma roda de conversa com base nas seguintes questões: "Vocês têm algum sonho que envolva uma organização financeira?"; "Com organização e dedicação é possível alcançar nossos objetivos?"; "Que fatores podem interferir nessa busca?". A intenção dessa roda de conversa é conhecer mais de perto a realidade financeira e a visão de mundo dos alunos, propiciando o debate de questões, como desigualdade social, democracia, igualdade, justiça e liberdade.

10. Os alunos podem listar coisas como a compra de um carro, de um imóvel ou de um *videogame* ou ainda morar em outra cidade, fazer uma viagem, ingressar em uma universidade, entre muitas outras possibilidades. É interessante que o objetivo escolhido exija um planejamento financeiro contínuo, de modo que estimule o desenvolvimento de estratégias de médio ou longo prazo.

11. Essa questão busca evidenciar as prioridades do aluno no que tange às despesas de sua família, encorajando-o a fazer mudanças em seu comportamento financeiro em vista de alcançar um objetivo. Algumas estratégias discutidas podem ser utilizadas simultaneamente: fazer um planejamento financeiro, realizar investimentos, cortar despesas e harmonizar desejos e necessidades.

12. Estimule os alunos a estabelecer uma meta para seu futuro, ainda que seja em um prazo muito longo. Essa atividade pode ser feita em uma folha à parte ou em um pequeno cartaz para que os alunos levem para casa e fixem em um local que vejam com frequência, de modo que as estratégias propostas sejam reforçadas diariamente.

PESQUISA E AÇÃO

Pesquisa estatística

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **5**, **7**, **8**, **9** e **10**, das competências específicas **1**, **2**, **3** e **4** e da habilidade **EM13MAT202** da BNCC.

A seção também permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Se possível, trabalhe o tema em conjunto com o professor dessa área. Os professores podem aproveitar a pesquisa para identificar, analisar e discutir vulnerabilidades às quais os adolescentes estão expostos, a fim de desenvolver ações de prevenção e de promoção de saúde. É possível também elaborar hipóteses e construir conclusões no enfrentamento de situações-problema detectadas na pesquisa. Essas discussões podem favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT207** e **EM13CNT301** da BNCC de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, as quais fazem parte das competências específicas **2** e **3**, respectivamente. Além disso, a seção trabalha com temas contemporâneos relacionados à **saúde**, focando na saúde dos adolescentes e podendo ser ampliada com as discussões sobre **educação alimentar e nutricional**, já que está diretamente relacionada à saúde.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a atividade desta seção é proposta em etapas, que poderão ser realizadas no decorrer do semestre escolar. Mesmo que algumas etapas, como a coleta de dados e a elaboração do relatório, sejam

MODELO

realizadas fora da sala de aula, é importante orientar os alunos com relação ao planejamento, ao prazo, ao tipo de questões que deverão ser propostas e a outros aspectos necessários para a realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações e o acompanhamento do trabalho.

O objetivo desta seção é orientar os alunos na realização de uma pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes. Eles serão mobilizados a planejar e a realizar a pesquisa estatística, organizar os dados obtidos, elaborar relatório com análise e conclusões da pesquisa e, posteriormente, divulgar os resultados para a comunidade escolar, com o objetivo de conscientizar, principalmente os adolescentes, sobre a importância de desenvolver hábitos de vida saudáveis, que devem ser preservados ao longo de toda a vida.

Etapa 1:

1. Oriente os alunos na definição dos objetivos da pesquisa, estimulando-os a problematizar cada uma das propostas, pensar sobre como elas podem ser abordadas e quais hipóteses podem ser levantadas acerca delas. Você pode, por exemplo, propor a eles que falem sobre a relação entre os tópicos sugeridos e a saúde dos adolescentes. A problematização é uma etapa imprescindível da pesquisa. A partir dela são definidas quais perguntas devem ser respondidas sobre o tema em questão. Pode-se problematizar, por exemplo, os hábitos de sono dos adolescentes: "Os adolescentes dormem uma quantidade suficiente de horas diariamente?". Nesse caso, podem ser feitas perguntas como: "Quantas horas você costuma dormir durante a noite?"; "Você sente necessidade de dormir mais horas?".

2. Explique aos alunos que, na pesquisa amostral, a definição da amostra é crucial para a qualidade da pesquisa. Caso desejem observar, por exemplo, os hábitos de sono de adolescentes estudantes, pode-se definir como população adolescentes que estudem na mesma escola que os alunos e também em outras escolas, possibilitando contemplar pessoas que vivem em distintos contextos, com diferentes fatores que podem influenciar os hábitos de sono, por exemplo: se moram longe da escola, se estudam no período da manhã, da tarde ou da noite, entre outros aspectos.

Etapa 2:

3. Nesse momento, oriente os alunos a realizar uma leitura de todas as etapas desta seção. Esclareça possíveis dúvidas para que eles estejam conscientes das atividades que serão realizadas e como serão organizadas.

4. Peça aos alunos que citem exemplos de variáveis quantitativas e qualitativas que podem ser aplicadas na pesquisa. Estimule-os a refletir sobre quais dados são importantes para a pesquisa e quais seriam os mais adequados, considerando o tema e o tempo disponível. Se achar conveniente, alerte-os que a escolha de perguntas abertas pode tornar a organização dos dados uma atividade mais complexa. Pode ser interessante que o questionário tenha uma ou duas questões para que os alunos percebam a dificuldade.

Pode-se indicar ou acessar com os alunos a Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar (PeNSE), disponível em: <https://saude.gov.br/saude-de-a-z/pense> (acesso em: 30 jun. 2020), realizada com o objetivo de contribuir para o monitoramento de fatores de risco e de proteção à saúde dos adolescentes escolares. A pesquisa é desenvolvida com o apoio do Ministério da Educação (MEC) em parceria com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). No *site* do IBGE, é possível acessar os relatórios completos da pesquisa, além dos temas dos questionários e outras informações.

Etapa 3:

5. Oriente os alunos a respeito do planejamento da execução da pesquisa amostral, desde o entendimento de todas as perguntas até a postura e a imparcialidade durante as entrevistas.

Etapa 4:

6. Explique aos alunos que a categorização das respostas é importante para que possam ser organizadas e analisadas. Por exemplo, caso tenham perguntado sobre a quantidade de horas de sono dos entrevistados, podem agrupar esses dados da seguinte forma: pessoas que dormem de 1 a 2 horas, de 2 a 4 horas e assim por diante.

7. Os grupos deverão organizar os dados e realizar cálculos. Auxilie-os no que for necessário. Se for preciso, retome com eles os conceitos de média, mediana, moda, amplitude e desvio padrão, além de outros conceitos que considerarem pertinentes. É importante que essa etapa seja realizada de forma organizada e colaborativa para evitar cálculos incorretos que possam prejudicar as conclusões da pesquisa. O uso de fórmulas em uma planilha eletrônica pode facilitar a realização dos cálculos.

Oriente os alunos para que possam mobilizar os conhecimentos construídos até o momento, a fim de analisar os dados coletados de acordo com o objetivo da pesquisa.

Explique a eles que, com base na análise dos resultados, é possível encaminhar soluções para o problema detectado, verificar se as hipóteses levantadas anteriormente foram confirmadas, entre outras ações, dependendo do objetivo da pesquisa. Auxilie-os na análise dos resultados, orientando para que não façam generalizações ou tirem conclusões equivocadas.

Etapa 5:

A elaboração do relatório pode ser bastante trabalhosa. A tarefa deve ser dividida entre os componentes do grupo para que todos participem de todas as etapas, não esquecendo que o texto final seja uniforme e coeso.

Etapa 7:

14. Oriente os alunos na realização da autoavaliação. Eles devem se basear nas perguntas propostas e nas experiências que tiveram no decorrer da realização da pesquisa e do relatório (etapa **5**) e nas discussões da atividade anterior. A proposta é que avaliem se alcançaram os objetivos propostos, se sentiram dificuldades durante as etapas e, em caso afirmativo, como lidaram com elas e de que modo a atividade contribuiu para sua formação.

MANUAL DO PROFESSOR

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Estatística e probabilidade

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Cecilia O. Setsuko, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Vânia Bruno

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto, Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, essas dez competências, todas trabalhadas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

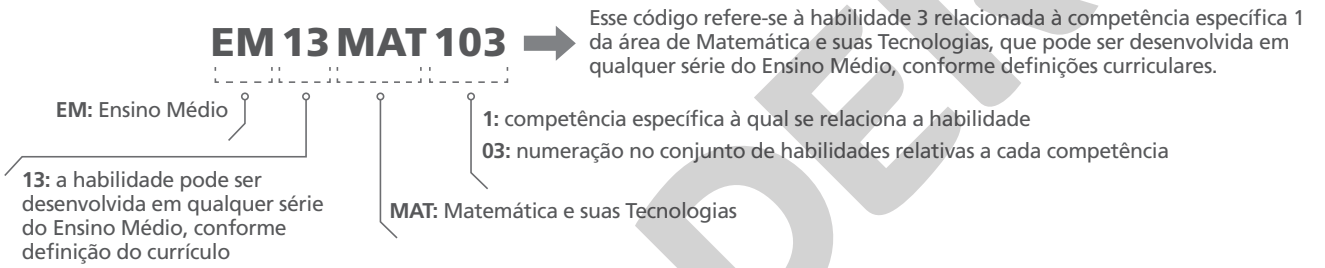
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(**EM13MAT202**) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(**EM13MAT203**) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13MAT310**) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(**EM13MAT311**) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(**EM13MAT312**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(**EM13MAT316**) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(**EM13MAT406**) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(**EM13MAT407**) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(**EM13MAT510**) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(**EM13MAT511**) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CNT102**) Realizar previsões, avaliar intervenções e/ou construir protótipos de sistemas térmicos que visem à sustentabilidade, considerando sua composição e os efeitos das variáveis termodinâmicas sobre seu funcionamento, considerando também o uso de tecnologias digitais que auxiliem no cálculo de estimativas e no apoio à construção dos protótipos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13CNT205**) Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências.
(**EM13CNT207**) Identificar, analisar e discutir vulnerabilidades vinculadas às vivências e aos desafios contemporâneos aos quais as juventudes estão expostas, considerando os aspectos físico, psicoemocional e social, a fim de desenvolver e divulgar ações de prevenção e de promoção da saúde e do bem-estar.
(**EM13CNT208**) Aplicar os princípios da evolução biológica para analisar a história humana, considerando sua origem, diversificação, dispersão pelo planeta e diferentes formas de interação com a natureza, valorizando e respeitando a diversidade étnica e cultural humana.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT301**) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.
(**EM13CNT302**) Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT303**) Interpretar textos de divulgação científica que tratem de temáticas das Ciências da Natureza, disponíveis em diferentes mídias, considerando a apresentação dos dados, tanto na forma de textos como em equações, gráficos e/ou tabelas, a consistência dos argumentos e a coerência das conclusões, visando construir estratégias de seleção de fontes confiáveis de informações.
(**EM13CNT304**) Analisar e debater situações controversas sobre a aplicação de conhecimentos da área de Ciências da Natureza (tais como tecnologias do DNA, tratamentos com células-tronco, neurotecnologias, produção de tecnologias de defesa, estratégias de controle de pragas, entre outros), com base em argumentos consistentes, legais, éticos e responsáveis, distinguindo diferentes pontos de vista.
(**EM13CNT310**) Investigar e analisar os efeitos de programas de infraestrutura e demais serviços básicos (saneamento, energia elétrica, transporte, telecomunicações, cobertura vacinal, atendimento primário à saúde e produção de alimentos, entre outros) e identificar necessidades locais e/ou regionais em relação a esses serviços, a fim de avaliar e/ou promover ações que contribuam para a melhoria na qualidade de vida e nas condições de saúde da população.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 1 E 5
(**EM13CHS103**) Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros).
(**EM13CHS104**) Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.
(**EM13CHS502**) Analisar situações da vida cotidiana, estilos de vida, valores, condutas etc., desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificar ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.

Linguagens e suas Tecnologias

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6
(**EM13LGG601**) Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

CAPÍTULO 1 – Organização e apresentação de dados	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é que você seja capaz de reconhecer população, amostra e variáveis, além de organizar dados em tabelas e gráficos e tirar conclusões com base em dados coletados.	Com o advento da tecnologia, dispomos de uma facilidade crescente para a obtenção de dados sobre assuntos diversos. Porém, para que isso seja proveitoso, é necessário saber lidar com essa avalanche de dados, organizando-os de maneira adequada para que se transformem em informações significativas.
CAPÍTULO 2 – Análise de dados	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é mostrar como organizar dados em intervalos e construir tabelas de distribuições de frequências nesse caso, além de como construir histogramas e diagramas de ramo e folhas, e interpretar esses e outros tipos de gráficos.	Ao organizar dados, em tabelas ou graficamente, muitas vezes é necessário usar intervalos para que as informações sejam mais bem transmitidas, e é importante que você saiba identificar a melhor forma de representação, além de analisar as representações de forma crítica e percebendo eventuais artifícios usados para manipular a informação.
CAPÍTULO 3 – Medidas estatísticas	
Objetivo	**Justificativa**
Esse capítulo tem como objetivo trabalhar com medidas de tendência central (média, moda e mediana) e medidas de dispersão (amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão) de um conjunto de valores observados, além da construção e interpretação de *box-plots* e diagramas de dispersão.	Na realização de pesquisas estatísticas, pode ser necessário escolher uma medida que resuma e represente os dados levantados ou ainda empregar uma medida para indicar o quanto os dados estão dispersos. Para isso, é importante que você conheça as medidas estatísticas e quando é conveniente usar cada uma delas, além de conhecer outras representações gráficas.
CAPÍTULO 4 – Análise combinatória	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é compreender e aplicar o princípio multiplicativo, identificar a natureza dos problemas de contagem e empregar, na resolução desses problemas, os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação.	Os métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de conjuntos, com e sem o uso de fórmulas, é o objeto de estudo desse capítulo. Esse estudo é uma ferramenta para o cálculo de probabilidades, assunto que será estudado no capítulo 5.
CAPÍTULO 5 – Probabilidade	
Objetivo	**Justificativa**
O capítulo tem por objetivo determinar o espaço amostral e seus eventos, calcular o número de elementos dos conjuntos que os representam, calcular a probabilidade de ocorrência de um evento, além de trabalhar com problemas que envolvam a teoria das probabilidades.	O cálculo da probabilidade de ocorrência de determinado evento constitui um poderoso instrumento de antecipação de resultados. Esse estudo tem aplicações em diversas áreas e aspectos da vida social e da pesquisa científica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras, e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pilares do *pensamento computacional*.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara, para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par, ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ -2 & 13 \\ \hline 06 & \\ -\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

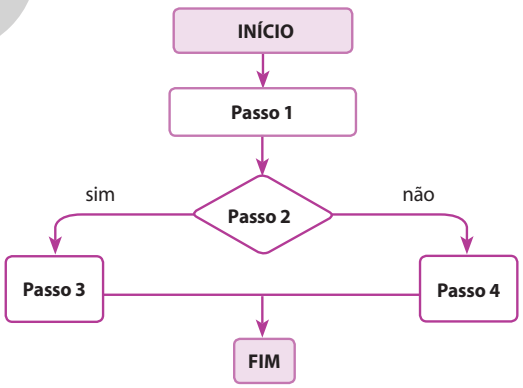
Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.

Símbolos terminais | Símbolo de processo | Símbolo de estrutura de decisão

O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

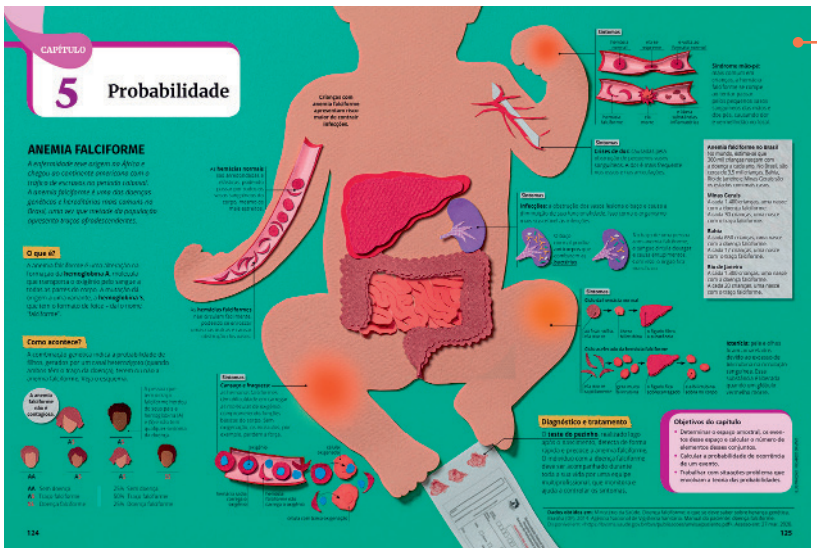
Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

Nesta obra você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Organização da obra

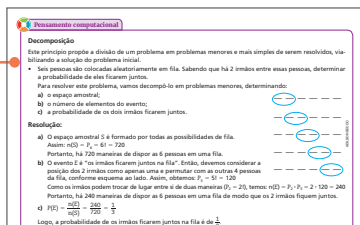


Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

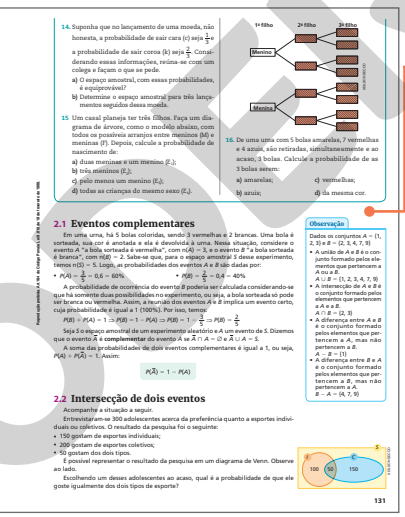
Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:



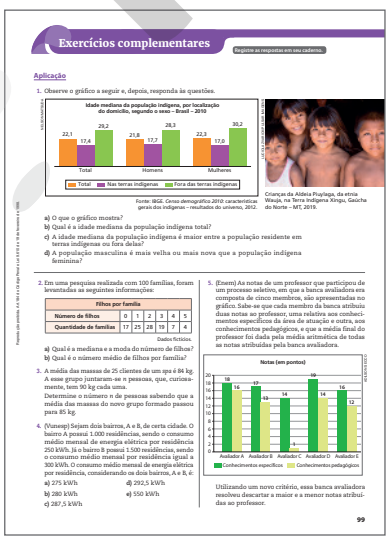
Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.



Exercícios complementares

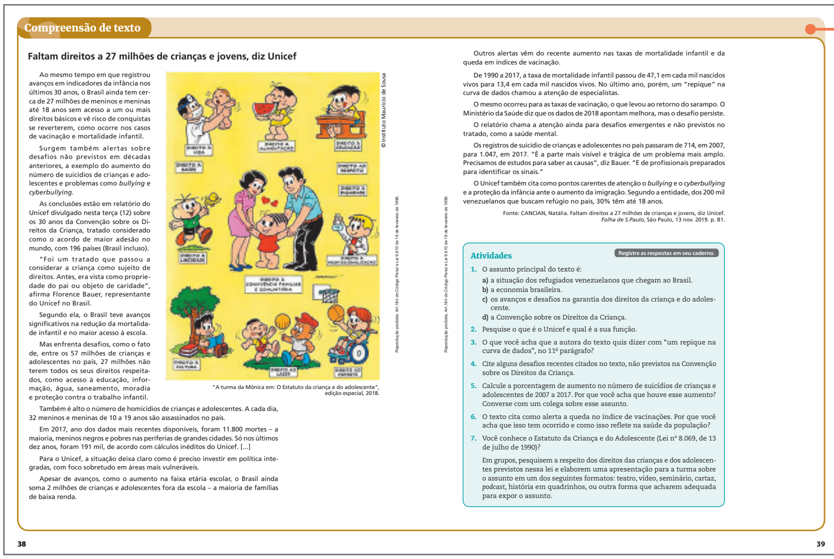
- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.



Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.


Compreensão de texto

Faltam direitos a 27 milhões de crianças e jovens, diz Unicef

Ao mesmo tempo em que registrou avanços em indicadores da infância nos últimos 30 anos, o Brasil ainda tem cerca de 27 milhões de meninos e meninas até 18 anos sem acesso a um ou mais direitos básicos e vê risco de conquistas se reverterem, como ocorre nos casos de vacinação e mortalidade infantil.

Surgem também alertas sobre desafios não previstos em décadas anteriores, a exemplo do aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

As conclusões estão em relatório do Unicef divulgado nesta terça (12) sobre os 30 anos da Convenção sobre os Direitos da Criança, tratado considerado como o acordo de maior adesão no mundo, com 196 países (Brasil incluso).

"Foi um tratado que passou a considerar a criança como sujeito de direitos. Antes, era vista como propriedade do pai ou objeto de caridade", afirma Florence Bauer, representante do Unicef no Brasil.

Segundo ela, o Brasil teve avanços significativos na redução da mortalidade infantil e no maior acesso à escola.

Mas enfrenta desafios, como o fato de, entre os 57 milhões de crianças e adolescentes no país, 27 milhões não terem todos os seus direitos respeitados, como acesso à educação, informação, água, saneamento, moradia e proteção contra o trabalho infantil.

Também é alto o número de homicídios de crianças e adolescentes. A cada dia, 32 meninos e meninas de 10 a 19 anos são assassinados no país.

Em 2017, ano dos dados mais recentes disponíveis, foram 11.800 mortes – a maioria, meninos negros e pobres nas periferias de grandes cidades. Só nos últimos dez anos, foram 191 mil, de acordo com cálculos inéditos do Unicef. [...]

Para o Unicef, a situação deixa claro como é preciso investir em política integradas, com foco sobretudo em áreas mais vulneráveis.

Apesar de avanços, como o aumento na faixa etária escolar, o Brasil ainda soma 2 milhões de crianças e adolescentes fora da escola – a maioria de famílias de baixa renda.

© Instituto Maurício de Sousa

"A turma da Mônica em: O Estatuto da criança e do adolescente", edição especial, 2018.

Outros alertas vêm do recente aumento nas taxas de mortalidade infantil e da queda em índices de vacinação.

De 1990 a 2017, a taxa de mortalidade infantil passou de 47,1 em cada mil nascidos vivos para 13,4 em cada mil nascidos vivos. No último ano, porém, um "repique" na curva de dados chamou a atenção de especialistas.

O mesmo ocorreu para as taxas de vacinação, o que levou ao retorno do sarampo. O Ministério da Saúde diz que os dados de 2018 apontam melhora, mas o desafio persiste.

O relatório chama a atenção ainda para desafios emergentes e não previstos no tratado, como a saúde mental.

Os registros de suicídio de crianças e adolescentes no país passaram de 714, em 2007, para 1.047, em 2017. "É a parte mais visível e trágica de um problema mais amplo. Precisamos de estudos para saber as causas", diz Bauer. "E de profissionais preparados para identificar os sinais."

O Unicef também cita como pontos carentes de atenção o *bullying* e o *cyberbullying* e a proteção da infância ante o aumento da imigração. Segundo a entidade, dos 200 mil venezuelanos que buscam refúgio no país, 30% têm até 18 anos.

Fonte: CANCIAN, Natália. Faltam direitos a 27 milhões de crianças e jovens, diz Unicef. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 13 nov. 2019. p. B1.

Atividades Registre as respostas em seu caderno.

1. O assunto principal do texto é:
   a) a situação dos refugiados venezuelanos que chegam ao Brasil.
   b) a economia brasileira.
   c) os avanços e desafios na garantia dos direitos da criança e do adolescente.
   d) a Convenção sobre os Direitos da Criança.
2. Pesquise o que é o Unicef e qual é a sua função.
3. O que você acha que a autora do texto quis dizer com "um repique na curva de dados", no 11º parágrafo?
4. Cite alguns desafios recentes citados no texto, não previstos na Convenção sobre os Direitos da Criança.
5. Calcule a porcentagem de aumento no número de suicídios de crianças e adolescentes de 2007 a 2017. Por que você acha que houve esse aumento? Converse com um colega sobre esse assunto.
6. O texto cita como alerta a queda no índice de vacinações. Por que você acha que isso tem ocorrido e como isso reflete na saúde da população?
7. Você conhece o Estatuto da Criança e do Adolescente (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990)?

   Em grupos, pesquisem a respeito dos direitos das crianças e dos adolescentes previstos nessa lei e elaborem uma apresentação para a turma sobre o assunto em um dos seguintes formatos: teatro, vídeo, seminário, cartaz, *podcast*, história em quadrinhos, ou outra forma que acharem adequada para expor o assunto.

38 39

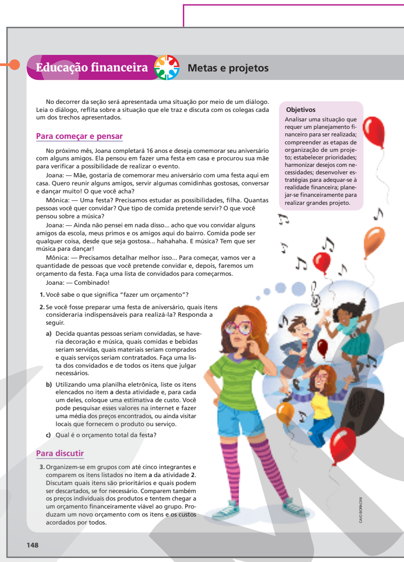
Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.

Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.


Educação financeira — Metas e projetos

No decorrer da seção será apresentada uma situação por meio de um diálogo. Leia o diálogo, reflita sobre a situação que ele traz e discuta com os colegas cada um dos trechos apresentados.

Objetivos
Analisar uma situação que requer um planejamento financeiro para ser realizada; compreender as etapas de organização de um projeto; estabelecer prioridades; harmonizar desejos com necessidades; desenvolver estratégias para adequar-se à realidade financeira; planejar-se financeiramente para realizar grandes projeto.

Para começar e pensar

No próximo mês, Joana completará 16 anos e deseja comemorar seu aniversário com alguns amigos. Ela pensou em fazer uma festa em casa e procurou sua mãe para verificar a possibilidade de realizar o evento.

Joana: — Mãe, gostaria de comemorar meu aniversário com uma festa aqui em casa. Quero reunir alguns amigos, servir algumas comidinhas gostosas, conversar e dançar muito! O que você acha?

Mônica: — Uma festa? Precisamos estudar as possibilidades, filha. Quantas pessoas você quer convidar? Que tipo de comida pretende servir? O que você pensou sobre a música?

Joana: — Ainda não pensei em nada disso... acho que vou convidar alguns amigos da escola, meus primos e os amigos aqui do bairro. Comida pode ser qualquer coisa, desde que seja gostosa... hahahaha. E música? Tem que ser música para dançar!

Mônica: — Precisamos detalhar melhor isso... Para começar, vamos ver a quantidade de pessoas que você pretende convidar e, depois, faremos um orçamento da festa. Faça uma lista de convidados para começarmos.

Joana: — Combinado!

1. Você sabe o que significa "fazer um orçamento"?
2. Se você fosse preparar uma festa de aniversário, quais itens consideraria indispensáveis para realizá-la? Responda a seguir.
   a) Decida quantas pessoas seriam convidadas, se haveria decoração e música, quais comidas e bebidas seriam servidas, quais materiais seriam comprados e quais serviços seriam contratados. Faça uma lista dos convidados e de todos os itens que julgar necessários.
   b) Utilizando uma planilha eletrônica, liste os itens elencados no item **a** desta atividade e, para cada um deles, coloque uma estimativa de custo. Você pode pesquisar esses valores na internet e fazer uma média dos preços encontrados, ou ainda visitar locais que fornecem o produto ou serviço.
   c) Qual é o orçamento total da festa?

Para discutir

3. Organizem-se em grupos com até cinco integrantes e comparem os itens listados no item **a** da atividade **2**. Discutam quais itens são prioritários e quais podem ser descartados, se for necessário. Comparem também os preços individuais dos produtos e tentem chegar a um orçamento financeiramente viável ao grupo. Produzam um novo orçamento com os itens e os custos acordados por todos.

CAIO BORACINI

148

Registre as respostas em seu caderno.

Pesquisa e ação — Pesquisa estatística

Você já leu ou ouviu falar sobre os cuidados da saúde na adolescência? Será que os adolescentes brasileiros têm hábitos de vida saudáveis?

Durante o período da adolescência, o corpo sofre diversas transformações importantes e essenciais para a vida adulta, por isso desenvolver hábitos saudáveis pode auxiliar na obtenção e na manutenção de uma boa saúde física e mental. Além disso, hábitos consolidados na adolescência tendem a continuar ao longo de toda a vida do indivíduo, e muitos deles influenciam diretamente na saúde.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), "saúde é um estado de completo bem-estar físico, mental e social, e não apenas a mera ausência de doença ou enfermidade". A OMS declara também que "saúde mental é um estado de bem-estar no qual um indivíduo realiza suas próprias habilidades, pode lidar com as tensões normais da vida, pode trabalhar de forma produtiva e é capaz de fazer contribuições à sua comunidade". A boa saúde mental, entre outros fatores, depende da boa saúde física. Podemos dizer que ambas estão diretamente relacionadas. Entre os principais comportamentos que causam risco à saúde física estão ausência ou diminuição de atividades físicas, alimentação inadequada e rotina de sono desequilibrada. Esses comportamentos podem ser observados em pessoas de todas as faixas etárias; porém, nesta seção, vamos refletir sobre a presença deles entre os adolescentes.

Por diversas razões, muitos adolescentes deixam de fazer atividade física, seja na escola, durante as aulas de Educação Física ou fora dela. Além disso, há outros comportamentos de risco à saúde que muitas vezes fazem parte da rotina de alguns adolescentes: uso excessivo de celulares e computadores, rotina de sono inadequada e consumo exagerado de alimentos ricos em açúcares e gorduras. Esses comportamentos podem desencadear o desenvolvimento de doenças como hipertensão arterial, obesidade, entre outras.

Diante da importância desse tema, vamos realizar, nesta seção, uma pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes. Os dados da pesquisa serão analisados e apresentados em um relatório que poderá ser disponibilizado para toda a comunidade escolar, como forma de conscientizar sobre a importância de desenvolver um estilo de vida saudável nessa fase da vida.

Objetivos
Realizar pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes; elaborar relatório com os resultados da pesquisa estatística realizada; divulgar pesquisa para a comunidade escolar.

A prática de atividades físicas é um dos principais hábitos que contribuem para a manutenção da saúde física e mental.

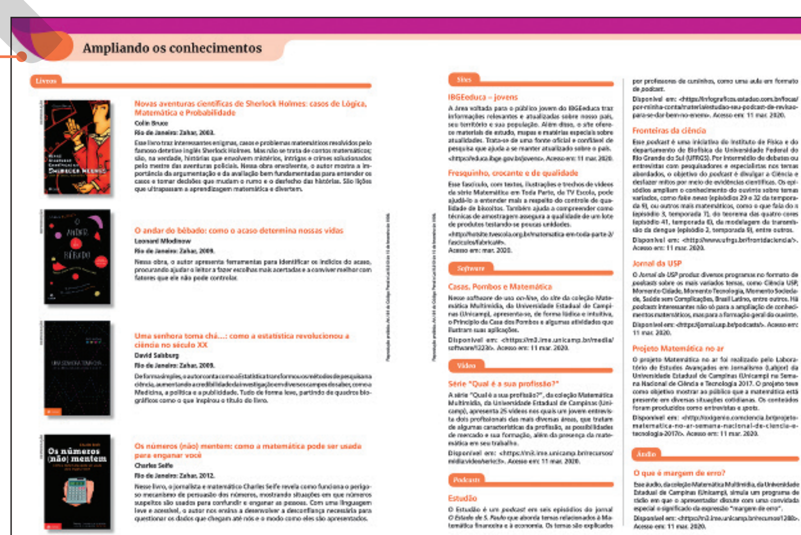
151

Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.


Ampliando os conhecimentos

Livros

Novas aventuras científicas de Sherlock Holmes: casos de Lógica, Matemática e Probabilidade
Colin Bruce
Rio de Janeiro: Zahar, 2003.

O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas
Leonard Mlodinow
Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX
David Salsburg
Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Os números (não) mentem: como a matemática pode ser usada para enganar você
Charles Seife
Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Sites

IBGEeduca – jovens

Fresquinho, crocante e de qualidade

Software

Casas, Pombos e Matemática

Vídeo

Série "Qual é a sua profissão?"

Podcasts

Estudão

Fronteiras da ciência

Jornal da USP

Projeto Matemática no ar

Áudio

O que é margem de erro?

154 155

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.

Sumário

CAPÍTULO 1 Organização e apresentação de dados **14**

1. A importância de dados para compreender melhor uma situação 14
2. Coleta de dados 15
2.1. Alguns conceitos estatísticos 15
2.2. O censo demográfico e a coleta de dados por amostragem 18
3. Organização e apresentação de dados 21
3.1. A necessidade da organização de dados 21
3.2. Organizando e apresentando dados em tabelas 23
3.3. Organizando e apresentando dados em gráficos 27
Exercícios complementares 35
Autoavaliação 37
Compreensão de texto 38

CAPÍTULO 2 Análise de dados **40**

1. Distribuição e frequências 42
1.1. Frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas 42
1.2. Distribuição de frequências para dados agrupados em intervalos 44
2. Histograma e diagrama de ramo e folhas 47
3. Outras representações gráficas 51
Exercícios complementares 62
Autoavaliação 67
Compreensão de texto 68

CAPÍTULO 3 Medidas estatísticas **72**

1. Medidas de tendência central 74
1.1. Média aritmética 74
1.2. Moda 76
1.3. Mediana 76
1.4. Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos 79
2. Medidas de dispersão 83
2.1. Amplitude 83
2.2. Desvio médio 83
2.3. Variância e desvio padrão 84
2.4. Medidas de dispersão para dados agrupados em intervalos 88
3. *Box-plot* 90
4. Diagrama de dispersão 94
Exercícios complementares 99
Autoavaliação 103

CAPÍTULO 4 Análise combinatória **104**

1. Contagem 106
1.1. Situações envolvendo problemas de contagem 106
1.2. Princípio multiplicativo 108
2. Fatorial de um número natural 111
3. Permutações 113
3.1. Permutação simples 113
3.2. Permutação com elementos repetidos 114
4. Arranjo simples 116
5. Combinação simples 118
Exercícios complementares 121
Autoavaliação 123

CAPÍTULO 5 Probabilidade **124**

1. Experimento aleatório, espaço amostral e evento 126
1.1. Evento simples, evento certo e evento impossível 126
2. Probabilidade 128
2.1. Eventos complementares 131
2.2. Intersecção de dois eventos 131
2.3. União de dois eventos 132
3. Probabilidade condicional 135
3.1. Eventos independentes 136
4. Método binomial 139
5. Frequência relativa e probabilidade 141
Exercícios complementares 143
Autoavaliação 145
Compreensão de texto 146

Educação financeira 148
Pesquisa e ação 151
Ampliando os conhecimentos 154
Respostas 156
Referências bibliográficas 160

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT202**, **EM13MAT406** e **EM13MAT407**.

CAPÍTULO

1 Organização e apresentação de dados

Objetivos do capítulo

- Reconhecer população, amostra e variáveis.
- Organizar dados em representações tabular e gráfica.
- Obter conclusões com base na análise dos dados coletados.

LUCAS LACAZ RUIZ/FUTURA PRESS

Agente da prefeitura faz aplicação de veneno contra o mosquito *Aedes aegypti*, na região central da cidade de São Paulo, SP, em 22 de janeiro de 2016.

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

Aedes aegypti é o mosquito transmissor das doenças dengue, febre amarela urbana, zika e chikungunya. Menor que os mosquitos comuns, é preto com listras brancas no tronco, na cabeça e nas pernas.

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

1 A importância de dados para compreender melhor uma situação

Leia o texto a seguir, trecho de uma notícia publicada no *site* do Ministério da Saúde em 26 de fevereiro de 2019.

O Ministério da Saúde informa que o número de casos prováveis de dengue no Brasil, em janeiro deste ano [2019], mais que dobrou em comparação ao mesmo período de 2018. Até o dia 2 de fevereiro, registrou-se aumento de 149%, passando de 21.992 para 54.777 casos prováveis da doença.

Quando verificado a incidência, em 2019, os casos chegam a 26,3 por 100 mil habitantes. Em relação ao número de óbitos, o país registrou, até o momento, cinco mortes, sendo: Tocantins (1), São Paulo (1), Goiás (2) e Distrito Federal (1). [...]

Os dados epidemiológicos alertam para a necessidade de intensificação das ações de eliminação dos focos do *Aedes aegypti* em todas as regiões. São ações que envolvem gestores estaduais, municipais e Governo Federal, e a população. [...]

Fonte: <https://www.saude.gov.br/noticias/agencia-saude/45257-ministerio-da-saude-alerta-para-aumento-de-149-dos-casos-de-dengue-no-pais>. Acesso em: 15 abr. 2020.

O trecho da notícia é um exemplo em que dados coletados sobre determinado fato podem auxiliar na tomada de decisões: os dados sobre os casos prováveis de dengue, a organização desses dados por localidade e o cálculo da incidência (que considera a relação do número de casos com o número de habitantes) podem auxiliar no planejamento de ações mais efetivas para combater a doença.

Considere agora outra situação.

Rosa foi contratada recentemente como coordenadora pedagógica da Escola Aprender. Para analisar e aprimorar o desempenho das turmas, ela quer conhecer o perfil dos alunos do Ensino Médio com os quais trabalhará. Ela sabe que, no total, são 500 alunos matriculados. Como Rosa poderá traçar esse perfil?

Frequentemente, lidamos com situações que exigem estudo para que possam ser mais bem compreendidas ou para que possamos planejar decisões. E para estabelecer conclusões adequadas, realizar previsões confiáveis ou tomar decisões acertadas, é preciso que os dados coletados se transformem em informações significativas.

A Estatística, cujo objetivo principal é auxiliar na tomada de decisões em situações de incerteza, é uma metodologia científica para obtenção, organização e análise de dados originados nas mais diversas áreas do conhecimento e em fatos cotidianos.

Os resultados de uma investigação estatística podem provocar transformações importantes, como a mudança de conceitos ou procedimentos de *marketing*, a reformulação ou mesmo a retirada de produtos do mercado, assim como levar à criação de novas estratégias de ação industrial e mercadológica.

Em uma pesquisa de aceitação de um produto por um grupo de pessoas, por exemplo, os resultados podem fornecer informações para ampliar a venda desse produto. Já no caso de Rosa, a pesquisa sobre o perfil dos alunos pode auxiliar a adaptar o planejamento escolar aos interesses e às necessidades dos alunos em questão.

Neste capítulo, aplicando conceitos matemáticos e estatísticos, estudaremos algumas formas de obter, organizar e apresentar dados de maneira a facilitar a análise de uma situação.

2 Coleta de dados

2.1 Alguns conceitos estatísticos

Uma empresa fabricante de uma conhecida marca de eletrodomésticos faz um controle de qualidade dos produtos antes de colocá-los no mercado. Por exemplo, no caso dos liquidificadores, entre as diversas características avaliadas estão: tempo de bom funcionamento do motor, encaixe do copo, capacidade de corte das lâminas, quantidade de vezes que os botões funcionam e consumo de energia por hora. Em geral, para cada modelo, a empresa testa uma **amostra**, isto é, uma parte dos liquidificadores fabricados, uma vez que testar todos eles levaria muito tempo e seria bastante dispendioso. Os dados colhidos, devidamente analisados, possibilitam fazer previsões para a totalidade da produção do aparelho.

Para a análise de um conjunto de dados de naturezas diversas, após a definição do problema a ser estudado, o primeiro passo é a coleta de dados, na qual são utilizados conceitos estatísticos. A aplicação desses conceitos costuma ser muito útil na tomada de decisão em várias situações.

Explore

Você sabe quais são os sintomas da dengue e quais medidas você, sua família e sua comunidade podem tomar para combater os focos do mosquito *Aedes aegypti*? Junte-se a três colegas e pesquisem a respeito desse tema. Depois, elaborem um cartaz com textos e imagens para promover uma campanha de conscientização da população.

Se possível, expor os cartazes em um local apropriado na escola para que todos os alunos e funcionários possam vê-los. Conversar com a turma sobre a importância de pequenas atitudes dentro de casa para contribuir com a diminuição dos casos de dengue, bem como sobre a importância de cada um fazer sua parte. No *site* do Ministério da Saúde há mais informações sobre o combate ao mosquito transmissor, os sintomas da dengue e outros dados sobre número de casos da doença.
Essa atividade favorece o desenvolvimento da competência específica **2** da BNCC, já que os alunos estarão diante de uma situação na qual precisam investigar uma questão de impacto social e tomar medidas para conscientizar a população a respeito do problema, o que favorece também o desenvolvimento da competência geral **10**. A pesquisa sobre os sintomas da doença envolve a questão do cuidado com a saúde, que favorece o desenvolvimento da competência geral **8**, e a apresentação das informações pesquisadas favorece o desenvolvimento da competência geral **4** da BNCC.
Todo o trabalho e a discussão a respeito da dengue envolve os temas contemporâneos **saúde** e **vida familiar e social**.

Reflita respostas pessoais

Reúna-se em grupo de três alunos e pensem em seis questões que considerem importantes para figurar em um possível questionário da coordenadora Rosa. Em seguida, comparem as questões feitas com as dos colegas. Existem questões parecidas? E diferentes? Quais questões vocês acham que são mais interessantes para o caso da coordenadora pedagógica? Justifiquem.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

População

População é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação em uma pesquisa.

No estudo sobre uma população, o interesse do pesquisador é direcionado à verificação de um aspecto que seja comum a todos os "indivíduos", ou seja, a cada um dos dados pertencentes à população. Esse aspecto, chamado de variável, é a característica ou a propriedade a ser estudada na população.

Amostra

Reflita

Se quisermos pesquisar a eficiência de uma marca de palito de fósforo, convém testar uma amostra ou a população toda?

SHUTTERB/SHUTTERSTOCK

Convém testar uma amostra, porque o teste destrói o palito de fósforo.

Amostra é um subconjunto finito formado por elementos da população.

Para obter resultados confiáveis, é necessário que a amostra seja:

- representativa, isto é, tenha as características essenciais da população;
- imparcial, ou seja, que cada elemento da população tenha a mesma chance de ser escolhido para compor a amostra.

Quando a amostra é representativa e imparcial, os resultados obtidos com a observação dos elementos de uma amostra são considerados válidos para toda a população.

Algumas situações exigem que seja consultada toda a população sob investigação. Esse tipo de pesquisa é chamado de **recenseamento**, ou pesquisa censitária. Entretanto, o recenseamento nem sempre é viável, pois, embora seus resultados sejam de alta confiabilidade, a pesquisa de uma população grande, além de demorada e custosa, pode se desatualizar rapidamente.

A necessidade de recorrer a uma amostra muitas vezes ocorre em função de o processo de teste de dados ser destrutivo. Por exemplo, para testar o bom funcionamento de um lote de buzinas de automóvel, podemos acionar cada uma delas, sem que isso afete o seu desempenho futuro. Porém, se acionarmos todos os extintores de incêndio de um lote cuja carga queremos testar, não sobrarão extintores carregados para serem utilizados ou comercializados.

Variável

Variável é uma característica (atributo) estudada em todos os elementos de uma população ou de uma amostra.

As variáveis podem ser classificadas em qualitativas ou quantitativas.

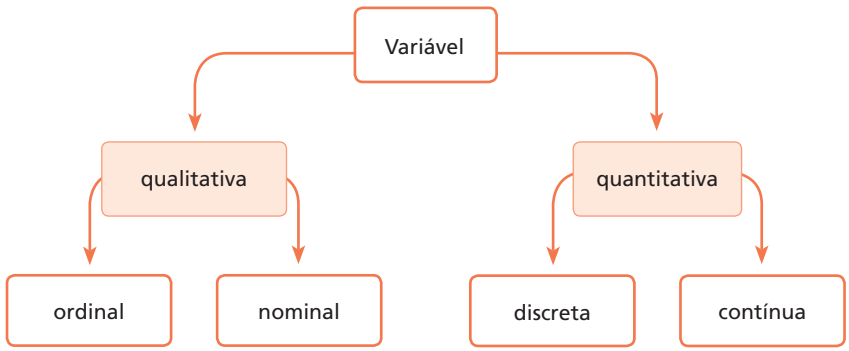
- **Variável qualitativa**: seus valores são expressos por atributos não numéricos (qualidade do elemento pesquisado). Por exemplo, no caso de indivíduos: cor dos olhos, grau de escolaridade, time de futebol preferido, classe social.
  Uma variável qualitativa pode ser **ordinal** ou **nominal**.

  Variável qualitativa ordinal: quando seus valores podem ser ordenados. Por exemplo: grau de escolaridade, classe social, classificação do grau de dificuldade das questões de uma prova em fácil, médio ou difícil.
  Variável qualitativa nominal: quando seus valores não podem ser ordenados. Por exemplo: cor dos olhos, gênero, time de futebol preferido.
- **Variável quantitativa**: seus valores são expressos por números. Por exemplo: altura, massa, idade, número de irmãos.
  Uma variável quantitativa pode ser **discreta** ou **contínua**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Variável quantitativa discreta: quando é proveniente de contagem, ou seja, é expressa por número inteiro. Por exemplo: número de irmãos, quantidade de computadores, número de animais.

Variável quantitativa contínua: quando é proveniente de medida, ou seja, é expressa por número real (inteiro ou não). Por exemplo: massa, idade, altura, temperatura, volume.



ADILSON SECCO

resposta pessoal

Reflita

Os alunos podem citar, por exemplo: memória e tempo de duração da bateria como variáveis quantitativas, e sistema operacional e marca como variáveis qualitativas.

Que variáveis você consideraria para escolher entre diversos modelos de *smartphone*? Cite pelo menos duas variáveis quantitativas e duas qualitativas. Compare sua resposta com a de um colega.

Questionamentos envolvendo assuntos como esse, que fazem parte do universo dos jovens, são importantes para que os alunos se identifiquem e gere interesse pelo conteúdo.

Exercício resolvido

R1. Rosa, que foi contratada como coordenadora pedagógica da Escola Aprender, elaborou um questionário para conhecer o perfil dos alunos do Ensino Médio com os quais trabalhará. O questionário, apresentado ao lado, tem como objetivo pesquisar as variáveis que considera mais relevantes nesse caso. A coordenadora decidiu fazer sua pesquisa com uma amostra de 50 alunos, escolhidos aleatoriamente entre os 500 alunos da escola. Determinar a população, a amostra e as variáveis dessa pesquisa, classificando-as.

Questionário – perfil dos alunos

1. Ano/Turma:
2. Sexo:
3. Quantos anos você tem?
4. Quantos irmãos você tem?
5. Você tem celular com acesso à internet?
6. Tem computador em casa?
7. De que tipo de música você gosta?
8. Quanto tempo, em média, navega na internet por dia?

▸ **Resolução**

A população é constituída por todos os 500 alunos da escola, e a amostra é formada pelos 50 alunos escolhidos aleatoriamente.

No questionário, o item "ano/turma" é uma característica pesquisada e representa uma variável que qualifica o entrevistado segundo uma ordem; logo, é uma variável qualitativa ordinal. Outras variáveis, como "posse de celular com acesso à internet", "posse de computador", "sexo" e "preferência musical" apenas nomeiam, não podendo ser ordenadas: são variáveis qualitativas nominais.

Há variáveis que podem ser quantificadas, isto é, representadas por números. No caso "número de irmãos", indicado por um número inteiro, é uma variável quantitativa discreta. Já a "idade" e o "tempo médio de navegação na internet" são medidos continuamente por um número real, por isso são variáveis quantitativas contínuas.

Reflita

Pesquise no dicionário o significado do termo "aleatório".

incerto, dependente do acaso

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2.2 O censo demográfico e a coleta de dados por amostragem

A cada 10 anos, o IBGE realiza o censo demográfico no Brasil. Agentes credenciados visitam todas as residências para colher informações sobre os habitantes. Continuamente, o IBGE também realiza a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua), cujo objetivo é visitar determinado número de domicílios para investigar informações sobre a força de trabalho e sobre temas relevantes para a compreensão da realidade brasileira. A PNAD Contínua divulga informações conjunturais (mensais e trimestrais) e estruturais (anuais e em períodos variáveis).

CENSO
Realizado pelo IBGE desde 1940.

Quase todos

A proposta do censo é coletar informações precisas, baseadas em entrevistas feitas em todos os domicílios.
Em alguns casos, os recenseadores encontram casas fechadas e precisam fazer uma estimativa do número de pessoas que vivem ali. Em 2010, 1,3% de domicílios particulares (ou 899.152 residências) visitados estavam fechados.

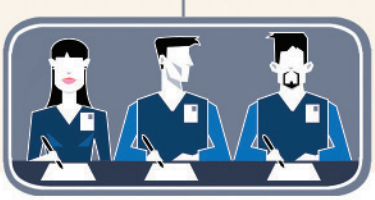
Anos de trabalho

Uma operação como a do censo movimenta milhares de pessoas.
A linha do tempo a seguir é baseada no tempo gasto na organização e na realização do Censo Demográfico 2010.

Planejamento

O censo começa a ser planejado dois anos antes, com reuniões que visam discutir a metodologia, os conceitos e os valores que vão guiar a pesquisa. Ao todo, 228 mil pessoas foram contratadas e treinadas para vagas temporárias entre 2008 e 2010.

janeiro de 2008 – julho de 2009



Preparação

Antes de partir para as ruas de todo o país, o IBGE realiza testes em cidades pequenas para verificar possíveis erros na metodologia. Em seguida, passa por todas as ruas de todas as cidades para atualizar e corrigir o banco de dados do instituto. Essa etapa é essencial para a atualização dos mapas do Brasil.

julho de 2009 – agosto de 2010

Coleta

Na maior parte dos domicílios, o agente do IBGE aplica o questionário básico. Em cerca de 10%, ele aplica um questionário mais específico e detalhado. Em seguida, todas as informações registradas pelos recenseadores são transmitidas para os postos de coleta implantados em todos os municípios.

agosto a outubro de 2010

ILUSTRAÇÕES: LUIZ AUGUSTO BARBOZA

PNAD Contínua

Foi implantada em janeiro de 2012.
A PNAD Contínua substituiu a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), de periodicidade anual, que era realizada desde 1967.

PNAD Contínua – 4º trimestre de 2018

Municípios visitados: 3.500

Unidades domiciliares visitadas: 211.344

População (estimativa): 209,152 milhões

IBGE

Pesquisa completa

O principal objetivo da PNAD Contínua é produzir informações contínuas sobre a inserção da população no mercado de trabalho e de características como idade, sexo e nível de instrução, bem como permitir o estudo do desenvolvimento socioeconômico do país por meio da produção de dados anuais sobre outras formas de trabalho, trabalho infantil, migração, entre outros temas. Os resultados podem ajudar na formulação de políticas públicas ou mostrar tendências econômicas, culturais e sociais.

Dados obtidos em: IBGE. *Censo demográfico 2010*. Rio de Janeiro: IBGE, 2011; IBGE. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua*: Quarto Trimestre de 2018. Rio de Janeiro: IBGE, 2019.

Apuração

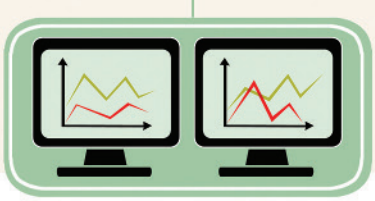
Dos postos de coleta, a informação chega aos bancos de dados do IBGE, onde começa a ser apurada. Nessa etapa, é hora de cruzar dados, avaliar erros e fazer todos os cálculos que vão dar origem aos resultados.
É preciso muito rigor nessa etapa.

outubro de 2010 — abril de 2011

Divulgação

Nos meses seguintes, o IBGE começa a divulgar tabelas com os resultados do censo. As análises e os relatórios são publicados aos poucos, de acordo com os temas pesquisados. O retrato completo do país só fica pronto anos depois.

abril de 2011 — dezembro de 2013



Amostragem

A PNAD Contínua é realizada por meio de uma amostra de domicílios, de forma a garantir a representatividade dos resultados para os níveis geográficos em que é produzida.
A pesquisa foi planejada para ter periodicidade de coleta trimestral, ou seja, a amostra total de domicílios é coletada em um período de 3 meses.
A amostra é planejada de tal forma que haja rotação dos domicílios selecionados no esquema 1-2(5). Nesse esquema, o domicílio é entrevistado 1 mês e sai da amostra por 2 meses seguidos, sendo essa sequência repetida por 5 vezes.

Esse infográfico permite um trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se possível, promova um trabalho interdisciplinar com um professor dessa área. Podem ser discutidos, entre outros aspectos, o contexto histórico dessas pesquisas e a importância de pesquisas como essas para a formulação de políticas públicas.

Explore

- Pesquise em que ano foi realizado o último censo demográfico no Brasil.
- Indique três variáveis pesquisadas no censo demográfico brasileiro.
- Pesquise como o resultado da PNAD Contínua pode ajudar na formulação de políticas públicas de modo a promover ações que contribuam na melhoria da qualidade de vida dos brasileiros.

- Provavelmente, no ano em que o livro estiver sendo utilizado, será o Censo Demográfico 2020.
- Respostas possíveis: número de pessoas que residem no domicílio, escolaridade, sexo, ocupação, número de filhos, tipo de domicílio etc.
- Exemplo de resposta: A PNAD contínua divulga, de forma periódica, informações importantes sobre diversos setores como: educação, moradia, mobilidade urbana, entre outros, permitindo que sejam adotadas políticas públicas para cada um deles.

As respostas obtidas nesse boxe podem favorecer o desenvolvimento da seguinte habilidade de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC: EM13CNT310.

MODELO

2. a) quantitativa discreta
b) qualitativa nominal
c) qualitativa ordinal
d) qualitativa ordinal
e) quantitativa contínua
f) qualitativa nominal
g) qualitativa ordinal

3. a) Resposta possível: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.
b) Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistados todos os idosos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma empresa de confecções planeja abrir uma filial em uma cidade com 125.000 habitantes. Para fazer uma pesquisa sobre a viabilidade do projeto, contratou uma agência de publicidade. A agência informou que consultará 800 pessoas da região.

a) Qual é o tamanho da população da pesquisa? 125.000

b) Qual é o tamanho da amostra? 800

c) Cite quatro possíveis variáveis que podem ser objetos dessa pesquisa. resposta pessoal

2. Classifique as variáveis listadas a seguir em qualitativa (ordinal ou nominal) ou quantitativa (discreta ou contínua).

a) Número de respostas certas em uma prova.

b) Procedência dos estudantes de uma universidade.

c) Opinião das pessoas sobre o serviço público (ruim, regular, bom).

d) Níveis de poluição do ar na cidade (ruim, regular, bom).

e) Temperatura medida durante uma reação química.

f) Raça dos cachorros de um canil.

g) Classe social (baixa, média, alta).

3. Para verificar a abrangência, entre os idosos, de uma campanha de vacinação contra a gripe realizada em 2020 em determinado município, pretende-se entrevistar um grupo de idosos ali residentes.

a) Escreva algumas características que você acha importante serem levadas em conta para que esse grupo possa ser usado como uma amostra representativa, ou seja, para que os resultados obtidos na pesquisa com esse grupo possam ser considerados válidos para toda a população de idosos do município.

b) Se a prefeitura desse município precisa saber exatamente o número de idosos que tomaram a vacina em 2020, independentemente do tempo necessário para realizar a pesquisa, o método escolhido é o ideal? Justifique.

4. Leia o texto a seguir, reproduzido de um *site* de notícias.

Ipea: 23% dos jovens brasileiros não trabalham nem estudam

Uma pesquisa do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea) revela que 23% dos jovens brasileiros não trabalham e nem estudam (jovens nem-nem), na maioria mulheres e de baixa renda, um dos maiores percentuais de jovens nessa situação entre nove países da América Latina e Caribe. Enquanto isso, 49% se dedicam exclusivamente ao estudo ou capacitação, 13% só trabalham e 15% trabalham e estudam ao mesmo tempo. [...]

O estudo *Millennials na América e no Caribe: trabalhar ou estudar?*, sobre jovens latino-americanos, foi lançado hoje [3/12/2018] durante um seminário no Ipea, em Brasília. Os dados envolvem mais de 15 mil jovens entre 15 e 24 anos de nove países: Brasil, Chile, Colômbia, El Salvador, Haiti, México, Paraguai, Peru e Uruguai.

Fonte: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2018-12/ipea-23-dos-jovens-brasileiros-nao-trabalham-e-nem-estudam>. Acesso em: 14 abr. 2020.

No relatório da pesquisa, há um detalhamento da amostra, indicando o número de jovens pesquisados em cada um dos países, local e período de coleta de dados. No Brasil, a pesquisa foi realizada entre abril e maio de 2018 com uma amostra de 1.488 jovens de Recife.

De acordo com as informações fornecidas, responda:

a) Qual é a população em investigação na pesquisa?

b) Qual é a amostra da pesquisa?

c) Qual foi o período de realização da pesquisa no Brasil?

d) Como foi composta a amostra dos jovens brasileiros?

e) Converse com um colega sobre a seguinte questão: Vocês acham que os dados da pesquisa obtidos para o Brasil podem ser generalizados para todos os jovens brasileiros? Por quê?

Pensamento computacional

Abstração

Este pilar trata a seleção das informações que são relevantes para modelar e solucionar o problema.

Para exemplificar, antes de resolver o item **a** do exercício **3**, liste todas as características que podem ser objeto de estudo da pesquisa.

Espera-se que os alunos percebam que os dados a serem coletados devem ser condizentes à pesquisa em questão para obter o resultado esperado.

4. a) os jovens latino-americanos
b) mais de 15 mil jovens entre 15 e 24 anos de nove países: Brasil, Chile, Colômbia, El Salvador, Haiti, México, Paraguai, Peru e Uruguai
c) entre abril e maio de 2018
d) A amostra foi composta de 1.488 jovens de Recife.
e) Espera-se que os alunos percebam que, como a amostra foi composta apenas de jovens de Recife, os resultados podem não refletir a realidade do Brasil. Pode-se questionar os alunos sobre como eles acham que a amostra deveria ser selecionada.

Esse exercício favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102** da BNCC, na medida em que se apresenta ao aluno um caso que pode induzir a uma generalização equivocada com base em uma amostra não apropriada.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 Organização e apresentação de dados

O tópico **3** favorece o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC, já que os alunos aprenderão como o mesmo conjunto de dados pode ser organizado em diferentes registros de representação e como passar de um registro a outro.

3.1 A necessidade da organização de dados

Você é capaz de ler este texto?

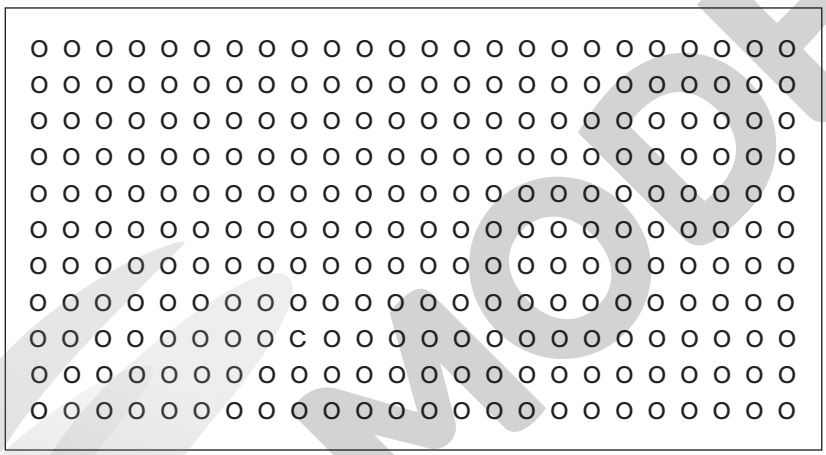
De aorcdo com uma pqsieusa de uma uinrvesriddae ignlsea, não ipomtra em qual odrem as lrteas de uma plravaa etãso, a úncia csioa iprotmatne é que a piremria e a útmlia lrteas etejasm no lgaur crteo. O rseto pdoe ser uma ttaol bçguana que vcoê cnosguee anida ler sem pobrlmea. Itso é poqrue nós não lmeos cdaa ltrea szoinha, mas a plravaa cmoo um tdoo. Lgeal, não é msemo?

Autor desconhecido

LIGIA DUQUE

A leitura do texto é possível por causa da familiaridade com o todo (a palavra). Nesse caso, a organização das letras, nos parâmetros convencionados para a linguagem, é feita inconscientemente, de modo que conseguimos entender as palavras e, em consequência, ler o texto. Mas isso não acontece com dados numéricos e outras modalidades de informação que nos são menos familiares.

A tendência de ver o todo pode ser útil em casos como o do texto anterior, mas pode criar dificuldade se for para descobrir um elemento diferente em meio a um padrão. Observe.



ADILSON SECCO

Em meio ao padrão (O), encontrar uma irregularidade (C) é uma tarefa que exige concentração, ou tal irregularidade passa despercebida.

Na primeira situação apresentada, verificamos que a forma de organização e apresentação das letras, embora não impeça a leitura do texto, pode dificultá-la. Na segunda situação, os símbolos poderiam ser dispostos de tal modo que a irregularidade (C) fosse identificada com mais facilidade.

Em situações que trabalham com dados obtidos como resultado de uma pesquisa, como dados numéricos, por exemplo, a forma de organizar e apresentar esses dados também pode dificultar ou facilitar a compreensão do resultado da pesquisa realizada.

Considere a situação a seguir.

A empresa Eu Levo faz serviço de entrega na cidade de São Paulo. Seu departamento de recursos humanos está aplicando um teste para selecionar candidatos a uma vaga no departamento de logística. O teste consiste em apresentar um estudo para adequar a frota de veículos da empresa às regras do rodízio vigentes no município de São Paulo. Para isso, os candidatos devem fazer um levantamento das placas de todos os veículos da empresa, exceto as motos, e verificar o final de cada uma para saber quantos não podem trafegar na região e horário do rodízio em cada dia da semana.

Observação

O sistema de rodízio de veículos, adotado há alguns anos para reduzir o número de automóveis em circulação nos horários de pico no centro expandido de São Paulo, amenizou o problema de trânsito da cidade.
O quadro a seguir relaciona os dias de circulação proibida nos horários de pico (das 7 h às 10 h; e das 17 h às 20 h) com o final da placa do veículo.

Dia da semana	Final da placa
2ª feira	1 ou 2
3ª feira	3 ou 4
4ª feira	5 ou 6
5ª feira	7 ou 8
6ª feira	9 ou 0

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Os candidatos A e B apresentaram as seguintes formas de organização dos finais de placa:

Candidato A

9	1	1	2	8	3	2	0	6	9	2	2
3	2	7	1	1	4	1	5	1	5	7	7
9	0	8	8	8	7	7	3	5	1	7	6
8	2	0	6	7	8	0	4	1	2	4	5
8	5	4	6	1	1	3	4	1	6	9	9
0	2	5	5	2	0	2	5	4	7	5	4
4	5	7	2	3	0	3	8	7	9	3	1
3	3	5	9	4	1	3	1	8	4	7	7
9	9	3	0	0	9	4	1	1	4	6	9
6	2	4	5	8	9	9	6	8	5	0	4

Candidato B

2ª feira:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2									
3ª feira:	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3									
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
4ª feira:	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5							
	6	6	6	6	6	6	6	6												
5ª feira:	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8									
6ª feira:	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0										

Observando a representação de cada um, podemos destacar:

- o candidato A dispôs os dados na ordem em que eles foram encontrados;
- o candidato B usou uma linha para cada um dos dois finais de placa que não poderiam circular em cada dia da semana.

Já os candidatos C e D organizaram os dados das seguintes formas:

Candidato C

Dia da semana	Final da placa	Quantidade
2ª feira	1	16
	2	12
3ª feira	3	11
	4	14
4ª feira	5	13
	6	8
5ª feira	7	12
	8	11
6ª feira	9	13
	0	10

Candidato D

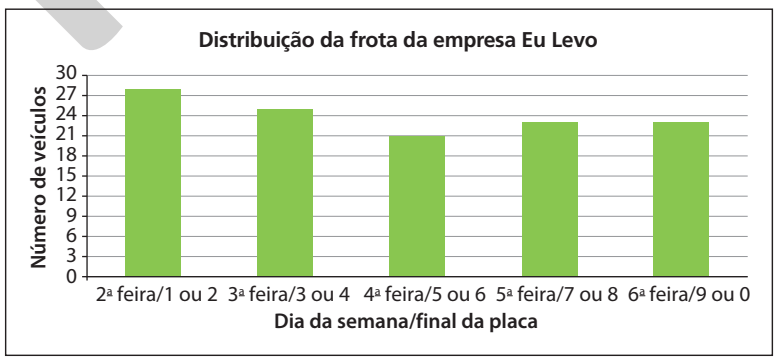
Distribuição da frota segundo o final da placa		
Dia da semana	Final da placa	Quantidade
2ª feira	1 ou 2	28
3ª feira	3 ou 4	25
4ª feira	5 ou 6	21
5ª feira	7 ou 8	23
6ª feira	9 ou 0	23

Notamos que:

- o candidato C separou a quantidade de veículos com os finais de placa dois a dois para cada dia da semana;
- o candidato D fez um levantamento do total de veículos que não podem circular em cada dia da semana.

O candidato E apresentou o gráfico abaixo, contendo o número de veículos indisponíveis em cada dia da semana:

Candidato E



ADILSON SECCO

Algumas das respostas apresentadas pelos candidatos comunicam melhor as informações que outras, isto é, transformam os dados em informações de leitura mais fácil e mais adequada. Por exemplo, com as formas de organização de dados dos candidatos D e E, o departamento de logística percebe mais facilmente que deve programar menos entregas para as segundas-feiras que para as quartas-feiras, conseguindo, assim, um uso mais racional da frota da empresa.

Espera-se que os alunos percebam que foi o candidato A. Pedir a eles que avaliem e comparem procedimentos é fazer que transcendam uma postura passiva de receptor de informações prontas e participem do processo de ensino-aprendizagem.

Reflita

Na sua opinião, qual dos cinco candidatos organizou os dados de uma maneira menos organizada? Por quê?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explore:
a) aproximadamente 147 hab./km²
Segundo o IBGE, a área territorial da China é de 9.596.960 km²; então, sua densidade demográfica em 2018 era dada por: $\frac{1.415.045.928}{9.596.960}$ hab./km² ≃ 147 hab./km²

3.2 Organizando e apresentando dados em tabelas

As tabelas são de grande utilidade tanto na organização de dados quanto na apresentação de resultados. A representação facilita a verificação de informações e a observação do comportamento de variáveis, o que favorece a averiguação de padrões, regularidades ou tendências.

Às vezes, interessa ao pesquisador verificar se existe alguma relação entre duas variáveis. Por exemplo, em sua pesquisa sobre o perfil dos alunos, a coordenadora pedagógica Rosa poderia verificar o estilo musical preferido deles de acordo com o sexo. Uma relação como essa fica evidente em uma **tabela de dupla entrada**, como a exemplificada a seguir.

Preferência musical segundo o sexo								
Estilo musical / Sexo	*Funk*	MPB	*Pop*	*Rap*	*Rock*	Samba	Sertanejo	Total
Masculino	4%	5%	7%	11%	10%	6%	3%	46%
Feminino	9%	10%	6%	12%	8%	5%	4%	54%
Total	13%	15%	13%	23%	18%	11%	7%	100%

Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

A tabela deixa claro, por exemplo, que o estilo preferido por ambos os sexos é o *rap* (23%) ou que, entre as meninas, o estilo menos popular é o sertanejo (4%).

Nesse tipo de tabela, uma variável ocupa a linha e a outra variável ocupa a coluna. A parte central apresenta o percentual de escolhas das duas variáveis; a última linha e a última coluna determinam, respectivamente, o total de cada coluna e de cada linha.

De modo geral, uma tabela estatística deve sempre ter:

- **título**, que indica o tema do qual trata;
- **fonte**, que apresenta a entidade (pessoa física ou jurídica) responsável pelo fornecimento ou pela organização dos dados apresentados, ou que indica o local em que as informações se encontram (artigo, *site*, livro etc.). Geralmente, a fonte aparece logo abaixo da tabela.

Exemplos

a)

Brasil nos Jogos Olímpicos da Juventude				
Ano	Número de medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Total
2010	3	3	1	7
2014	6	8	1	15
2018	2	4	9	15

Fonte: Comitê Olímpico Brasileiro (COB).

O título dessa tabela é "Brasil nos Jogos Olímpicos da Juventude", e sua fonte é "Comitê Olímpico Brasileiro (COB)".

b)

Países mais populosos do mundo – 2018		
Posição	País	Número de habitantes
1º	China	1.415.045.928
2º	Índia	1.354.051.854
3º	Estados Unidos	326.766.748
4º	Indonésia	266.794.980

Dados obtidos em: <https://paises.ibge.gov.br/#/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Nesse exemplo, o título da tabela é "Países mais populosos do mundo – 2018", e sua fonte é o *site* "https://paises.ibge.gov.br/#/".

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT406** da BNCC, na medida em que os alunos construirão e analisarão tabelas com dados obtidos em pesquisas estatísticas.

Reflita resposta pessoal

Qual é o seu estilo musical preferido? Colete dados de todos os colegas de sua turma para essa variável e organize os dados em uma tabela de dupla entrada.

Para essa atividade, você pode perguntar oralmente sobre o estilo musical preferido de cada aluno e anotar os resultados no quadro, sem organizá-los, e pedir aos alunos que façam essa organização.
Como esse é um assunto de interesse dos jovens em geral, reserve um tempinho para que eles conversem entre si sobre o assunto. É importante que os alunos exercitem a empatia e respeitem a diversidade de opiniões, preferências e culturas. Sempre reforce a importância desse respeito, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **9** da BNCC.

MARTIN ROSE/FIFA/GETTY IMAGES

Equipe brasileira de futsal masculino, medalhista de ouro das Olimpíadas da Juventude de Buenos Aires 2018, em outubro de 2018, Buenos Aires, Argentina.

Explore

A **densidade demográfica** de um local é a razão entre o número de habitantes desse local e a sua área territorial. Agora, responda, analisando a tabela do item **b** ao lado.

a) Qual era a densidade demográfica da China em 2018?

b) Você conseguiu responder ao item anterior? Que dados a respeito da China você precisa para calcular sua densidade? Esses dados são fornecidos no livro? Em caso negativo, onde você pode encontrar essas informações? Caso necessário, faça uma pesquisa para responder ao item **a**.

b) Espera-se que os alunos percebam que será necessário a área territorial da China, que não é fornecida no livro, mas pode ser encontrada facilmente em atlas ou *sites* confiáveis na internet (um deles seria o *site* do IBGE).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Distribuição de frequências

Para analisar os dados coletados em uma pesquisa, convém organizá-los, como já ressaltamos. Pode-se, por exemplo, dispor os dados em ordem crescente ou decrescente, no caso de uma variável quantitativa, ou agrupá-los em categorias semelhantes, no caso de uma variável qualitativa.

Retomando as organizações elaboradas pelos candidatos A e B (página 22), verificamos que o candidato A apenas coletou os finais de placas, obtendo um conjunto de dados que precisam ser organizados. Na organização proposta pelo candidato B, é feita uma separação das ocorrências verificadas, de tal modo que elas foram separadas e agrupadas de acordo com os dias da semana. Assim, agrupando as ocorrências de final de placas 1 ou 2, por exemplo, verifica-se que existem 28 ocorrências.

O agrupamento das ocorrências deve ser feito de acordo com o objetivo da pesquisa. A quantidade de vezes que determinada ocorrência aparece em cada grupo é chamada de **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência**.

Há situações em que se deseja comparar a frequência absoluta de um grupo com a soma de todas as frequências absolutas. Para isso, calculamos a razão entre a frequência absoluta de cada grupo e o total de elementos da amostra, obtendo a **frequência relativa**.

Como a frequência relativa é uma razão entre a parte e o todo, ela é expressa por um número racional entre 0 e 1. Multiplicando esse número por 100%, tem-se a **frequência percentual**.

Vamos retomar a forma de representação do candidato D à vaga de emprego da empresa Eu Levo e incluir na tabela as colunas correspondentes a essas frequências, com valores arredondados.

Observação

Em uma distribuição de frequências, como a da tabela a seguir, a soma das frequências relativas é sempre igual a 1, e a soma das frequências percentuais é sempre igual a 100%.

Comentar com os alunos que, algumas vezes, o resultado obtido sem a planilha pode ser diferente do resultado apresentado na planilha eletrônica em razão do modo de arredondar e apresentar os dados de cada planilha. Comentar também que o número de casas decimais com que cada resultado é apresentado pode ser alterado de acordo com a precisão que o usuário deseja, assim como o modo como esse resultado é apresentado (em forma de número, porcentagem, moeda etc.).

Distribuição da frota segundo o final da placa

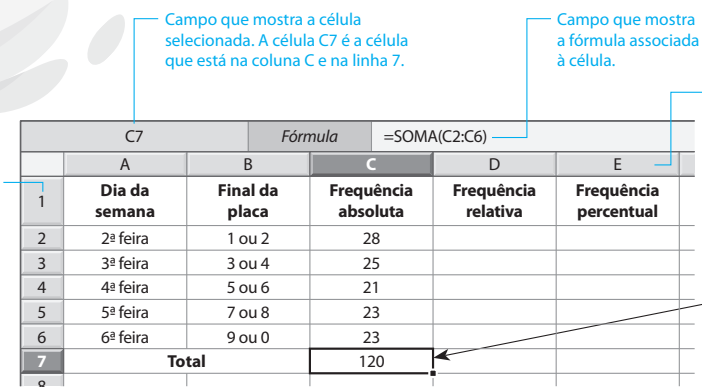
Dia da semana	Final da placa	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
Total		120	1,0000	100,00%

Quando temos de calcular a frequência relativa e a frequência percentual com os dados organizados em muitos grupos, os cálculos podem ser trabalhosos, o que pode acarretar erros que atrapalhariam a interpretação dos resultados. Por isso, podemos usar outros recursos que auxiliam nesses cálculos, como planilhas eletrônicas ou calculadoras. Usando uma planilha eletrônica, observe como poderíamos obter a frequência relativa e a frequência percentual para cada linha da tabela do exemplo anterior.

Se julgar oportuno, explicar aos alunos que algumas planilhas têm opções para fazer os cálculos diretamente, sem precisar digitar a fórmula. Em certas planilhas, por exemplo, basta selecionar as células, clicar em "Soma" e na linha seguinte da coluna já aparece a soma dos valores das células selecionadas.

Para montar a tabela, vamos utilizar cinco colunas da planilha: A, B, C, D e E.

- Preenchemos as colunas A, B e C com os dias da semana, os finais das placas e as frequências absolutas, respectivamente.
- As colunas D e E serão utilizadas, respectivamente, para as frequências relativas e as frequências percentuais.



ADILSON SECCO

Para calcular a frequência absoluta total, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:
=SOMA(C2:C6)
(Adiciona os valores das células C2, C3, C4, C5 e C6.)

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe o procedimento para preencher os dados da coluna D.

D2 | *Fórmula* | =C2/$C$7

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	
3	3ª feira	3 ou 4	25		
4	4ª feira	5 ou 6	21		
5	5ª feira	7 ou 8	23		
6	6ª feira	9 ou 0	23		
7	**Total**		120		

Na célula D2, digitamos a fórmula:
=C2/$C$7
(Calcula a razão entre os valores das células C2 e C7.)
O $ é utilizado na fórmula para fixar a coluna C e a linha 7. Assim, quando a fórmula da célula D2 for copiada para outras células, a célula C7 ficará fixa na fórmula.

D2 | *Fórmula* | =C2/$C$7

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	
7	**Total**		120		

Não é necessário repetir a fórmula para cada célula da coluna. Basta selecionar a primeira célula, levar o cursor até a quina da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção até a célula D6.
Esse procedimento copia a fórmula da célula D2 para as células D3 a D6, substituindo C2, respectivamente, por C3, C4, C5 e C6.

Agora, veja como preencher os dados da coluna E.

E2 | *Fórmula* | =D2

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	
7	**Total**		120		

Inicialmente, digitamos na célula E2 a fórmula:
=D2
(Repete o valor calculado na célula D2.)
Depois, com o botão direito do *mouse*, selecionamos o item de formatação para que a célula mostre o valor em porcentagem (o que é equivalente a multiplicar o valor da célula por 100%).

E2 | *Fórmula* | =D2

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120		

Selecionamos a célula E2 e arrastamos a seleção até a célula E6. As células de E3 a E6 são preenchidas, então, com os valores de D3 a D6 em porcentagem.

Para calcular a frequência relativa total e a frequência percentual total, basta repetirmos o procedimento realizado para calcular a frequência absoluta total.

E7 | *Fórmula* | =SOMA(E2:E6)

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120	1,0000	100,00%

Se for possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

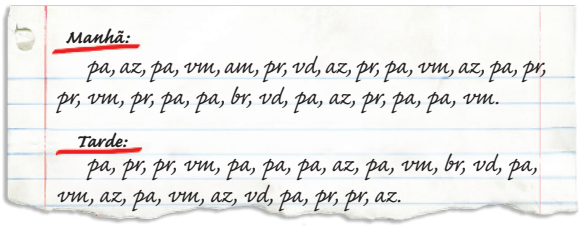
MODELO

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

5. Pedro, interessado em saber qual a cor mais comum dos veículos que transitavam na rua de sua casa, permaneceu por meia hora, em dois períodos do dia, manhã e tarde, anotando as cores de cada veículo. As cores – branca (br), prata (pa), amarela (am), vermelha (vm), azul (az), preta (pr) e verde (vd) – foram anotadas à medida que os veículos passavam.
Veja abaixo as anotações de Pedro em cada período.



LIGIA DUQUE

Ver resolução no Guia do professor.

a) Construa, se possível em uma planilha eletrônica, uma tabela de frequências das cores para cada uma das frequências: absoluta, relativa e percentual.

b) Que cor apresentou maior frequência percentual no período da manhã? E à tarde? E no dia? E qual cor apresentou a menor frequência percentual nesses períodos?

6. A tabela abaixo apresenta a relação entre duas variáveis da pesquisa realizada pela coordenadora Rosa. Ver resolução no Guia do professor.

Posse de computador segundo o sexo			
Tem computador / Sexo	Sim	Não	Total
Masculino	18	5	23
Feminino	20	7	27
Total	38	12	50

Fonte: Alunos do Ensino Médio da Escola Aprender.

a) Reconstrua a tabela substituindo os valores absolutos pelos respectivos valores percentuais em relação ao número de elementos da amostra.

b) Em relação ao total de elementos de cada grupo, quem tem, percentualmente, mais computadores: os meninos ou as meninas? os meninos

7. Pesquise tabelas de dupla entrada em jornais e revistas, indique e classifique suas variáveis. Depois, analise a relação entre elas. resposta pessoal

8. Na tabela a seguir estão apresentados os dados de uma pesquisa sobre os ramos de atividade e os valores, em bilhão de reais, relacionados às vendas efetuadas pelas principais empresas localizadas em um estado.

Vendas das principais empresas estaduais			
Empresa	Ramo de atividade	Vendas (bilhão de reais)	
		2019	2020
Sabor	Alimentos	28,6	25,7
Refrescando	Bebidas	17,5	19,8
Moradias	Construção civil	17,2	16,4
Extrações	Mineração	30,3	34,5
Metálicas	Siderurgia	25,1	20,6
Fale mais	Telefonia	16,7	17,9

Fonte: Agência Pesquisa Efetiva.

Considerando os dados da tabela, faça o que se pede.

a) Identifique e classifique as variáveis apresentadas na tabela.

b) A Agência Pesquisa Efetiva organizou a tabela apresentando os dados coletados em ordem alfabética em relação ao ramo de atividade da empresa. Esse critério facilitará a análise dos dados se for necessário verificar quais empresas apresentam os melhores e os piores resultados em relação às vendas de 2020? Justifique.

c) Qual das empresas obteve maior crescimento, em porcentagem, nas vendas de 2019 para 2020? A empresa Extrações com ≃ 13,9%

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

8. a) ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta

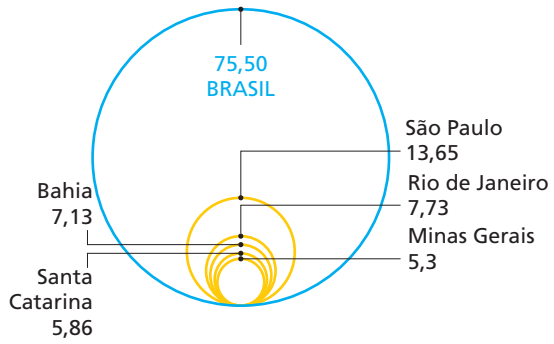
8. b) Espera-se que os alunos percebam que o critério utilizado não facilita esse tipo de análise. Para essa análise, seria melhor que a tabela estivesse organizada em ordem crescente ou decrescente, de acordo com os valores das vendas em 2020.

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT406** e **EM13MAT407** da BNCC, pois trabalha com a construção e a análise de tabelas e gráficos com dados obtidos em pesquisas estatísticas, além da avaliação sobre a melhor forma de representar diferentes tipos de dados.

3.3 Organizando e apresentando dados em gráficos

A representação gráfica é outra forma muito comum de apresentação de dados. Ela é frequentemente usada em jornais, em revistas, na internet ou em outros meios de comunicação. Observe, por exemplo, as representações gráficas a seguir.

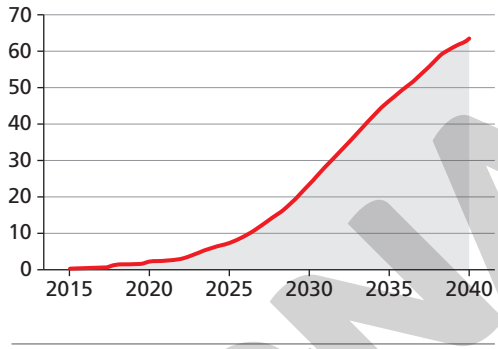
Viagens domésticas na temporada de verão 2018/19, por estado (em milhões)



Fonte: MTur.

Fonte: *Diário Comércio Indústria & Serviços*, 13 dez. 2018. p. A7.

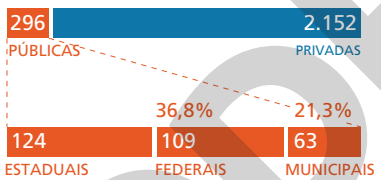
Projeção de venda de carros elétricos no mundo (em milhões de unidades)



Fonte: Bloomberg new energy finance.

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 6 dez. 2018. p. B2.

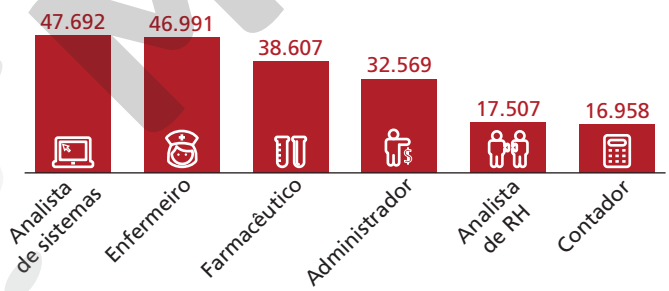
Instituições de ensino superior
Dentre as públicas, prevalecem os estabelecimentos estaduais



Fonte: Censo da Educação Superior, 2017.

Fonte: *Pesquisa Fapesp*, São Paulo, ano 20, n. 277, p. 27, mar. 2019.

Carreiras com nível superior que mais empregaram em 2018 (de janeiro a novembro)



Fonte: Cadastro Geral de Empregados e Desempregados (Caged).

Fonte: *Veja*, São Paulo, ano 52, n. 3, p. 6, jan. 2019.

Quando empregados corretamente, os gráficos podem evidenciar, em uma forma visual eficiente e atraente, os dados e as informações que precisam transmitir.

A escolha do tipo de gráfico mais adequado para representar um conjunto de dados depende de vários fatores, como a natureza e o comportamento da variável ou dos objetivos de quem o apresenta.

A seguir, veremos alguns tipos de gráfico e a conveniência do uso de cada um.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Gráfico de barras (verticais ou horizontais)

Talvez pela facilidade de construção ou pela simplicidade para a observação das relações apresentadas, os gráficos de barras são representações muito usuais e aplicam-se para as variáveis tanto qualitativas quanto quantitativas.

No **gráfico de barras verticais**, também chamado de **gráfico de colunas**, o eixo horizontal apresenta a variável em estudo, e no eixo vertical, são representados os valores das respectivas frequências (absoluta, relativa ou percentual, conforme a variável), ou os valores de uma variável quantitativa. As colunas (retângulos) têm larguras iguais, e a altura de cada uma é proporcional à respectiva frequência ou ao respectivo valor numérico.

As considerações referentes ao gráfico de colunas aplicam-se ao **gráfico de barras horizontais**, apenas com os eixos invertidos.

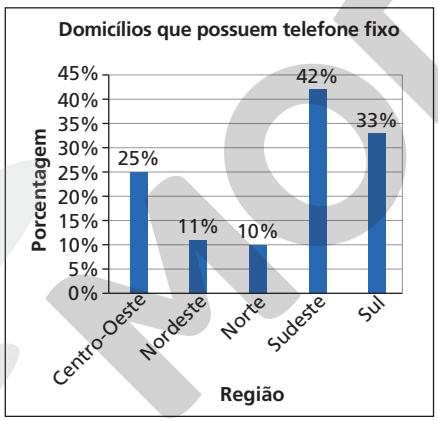
Exemplo

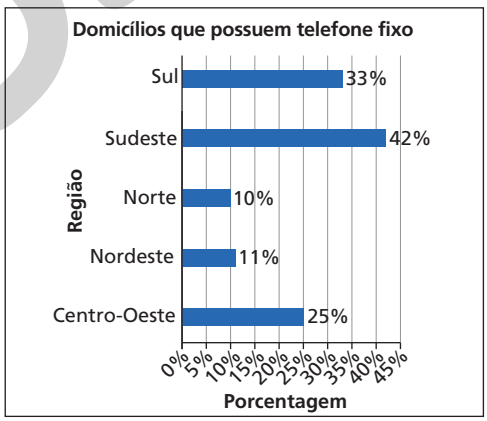
Veja a tabela a seguir, com dados da pesquisa *TIC domicílios* – 2017. Note como os dados dessa tabela podem ser expressos em um gráfico de barras verticais e um gráfico de barras horizontais.

Se julgar oportuno, pedir aos alunos que consultem os resultados da pesquisa *TIC domicílios* - 2017 sobre a porcentagem de domicílios que possuía telefone celular em cada região na ocasião da pesquisa. Seria interessante pedir a eles que comparassem os dados pesquisados com os dados apresentados (porcentagem de domicílios com telefone celular × telefone fixo).
Eles podem encontrar a informação no *site*: <https://www.cetic.br/tics/domicilios/2017/domicilios/A/expandido>, acesso em: 14 abr. 2020.

Domicílios que possuem telefone fixo	
Região	**Porcentagem**
Centro-Oeste	25%
Nordeste	11%
Norte	10%
Sudeste	42%
Sul	33%

Dados obtidos em: <https://www.cetic.br/tics/domicilios/2017/domicilios/A/expandido>. Acesso em: 14 abr. 2020.





ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: <https://www.cetic.br/tics/domicilios/2017/domicilios/A/expandido>. Acesso em: 14 abr. 2020.

Reflita

Reúna-se com um colega e discutam as questões a seguir.

a) A soma das porcentagens indicadas em cada gráfico ao lado representa a porcentagem de domicílios que possuem telefone fixo no Brasil?

b) Com as informações fornecidas, é possível dizer que há mais domicílios com telefone fixo no Centro-Oeste que no Nordeste?

a) Não. As porcentagens indicadas em cada gráfico são porcentagens do total de domicílios de cada região; logo, não faz sentido somá-las. Para calcular a porcentagem de domicílios com telefone fixo no Brasil seria necessário saber o total de domicílios com telefone fixo (de todas as regiões) em relação ao total de domicílios do Brasil.

b) Não é possível chegar a essa conclusão, pois o gráfico apresenta porcentagens de quantidades de domicílios que não necessariamente são iguais. Poderíamos comparar porcentagens, mas, para comparar os valores absolutos (número de domicílios com telefone fixo) de cada região, seria necessário conhecer o número de domicílios de cada região na ocasião da pesquisa. Por exemplo: 25% de 1.000 = 250 é menor que 11% de 2.500 = 275.

Gráfico de setores

Os **gráficos de setores** apresentam os dados em um círculo, no qual cada setor ou "fatia" indica a frequência (absoluta ou relativa) de um valor observado.

A medida do ângulo central de cada setor é proporcional à frequência correspondente.

No caso da frequência absoluta, a medida do ângulo central de cada fatia é obtida por meio da igualdade:

$$\frac{\text{frequência absoluta}}{\text{total das frequências absolutas}} = \frac{\text{medida do ângulo central}}{360°}$$

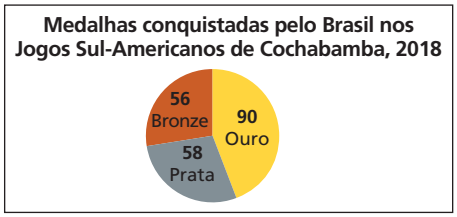
Para a frequência percentual, a medida é obtida pela aplicação da taxa percentual de cada frequência em relação a 360°.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Veja como os dados da tabela a seguir podem ser representados em um gráfico de setores.

Medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Sul-Americanos de Cochabamba, 2018	
Tipo de medalha	Quantidade
Ouro	90
Prata	58
Bronze	56



ADILSON SECCO

Dados obtidos em: <http://www.rededoesporte.gov.br//pt-br/noticias/brasil-conquista-62-vagas-em-oito-modalidades-para-o-pan-de-2019>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Nesse caso, o número total de medalhas é dado por: $90 + 58 + 56 = 204$.
Então, para determinar, por exemplo, a medida x do ângulo central do setor que representa as medalhas de ouro, fazemos:

$$\frac{90}{204} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 360°}{204} \simeq 158{,}8°$$

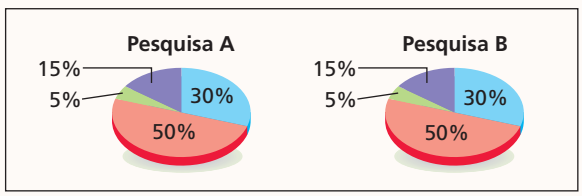
As medidas dos outros ângulos centrais são determinadas de modo análogo.

Observação

O gráfico de setores é recomendado quando se deseja comparar o valor de cada categoria com o total. Porém, seu uso não é adequado quando uma dessas categorias apresenta frequência igual a zero (já que, nesse caso, essa "fatia" não aparece), ou quando a soma das frequências percentuais é maior que 100% (caso que ocorre quando os entrevistados podem dar mais de uma resposta a uma pergunta).

Exercício resolvido

R2. Duas instituições coletaram dados envolvendo uma mesma variável quantitativa discreta, conforme mostram os gráficos abaixo.



ADILSON SECCO

Fonte: Dados fictícios.

Em ambas as pesquisas, o índice 50% representa a mesma quantidade de objetos? E 5%? E 15%? E 30%? Justificar.

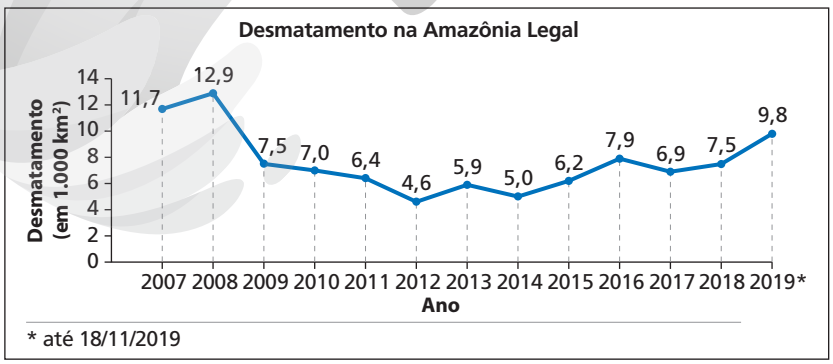
Resolução

Não podemos afirmar que esses índices representam a mesma quantidade de objetos em ambas as pesquisas, pois o enunciado do problema não indica o número de objetos que constituiu cada amostra; uma mesma taxa percentual aplicada a totais diferentes resulta em valores diferentes.

Gráfico de linha

Um **gráfico de linha**, ou **gráfico de segmentos**, mostra o comportamento de um conjunto de dados em intervalos geralmente uniformes. **Os valores associados a cada intervalo são representados por um conjunto de pontos** conectados por uma linha de segmentos consecutivos. Cada ponto tem a sua altura representada no eixo vertical, e o respectivo intervalo é exibido no eixo horizontal. Esse tipo de gráfico é muito usado quando se deseja comparar valores ao longo de um período.

Exemplo



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: <http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Observando esse gráfico é possível perceber a variação do desmatamento anual na Amazônia Legal no período de 2007 a 2019. Note que a maior taxa de desmatamento desse período ocorreu em 2008 e a menor, em 2012.

Observação

De acordo com o Instituto de Pesquisa Ambiental da Amazônia (Ipam), Amazônia Legal é uma área que engloba nove estados brasileiros (Acre, Amapá, Amazonas, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins e parte do estado do Maranhão) pertencentes à Bacia Amazônica e que, consequentemente, possui em seu território trechos da Floresta Amazônica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

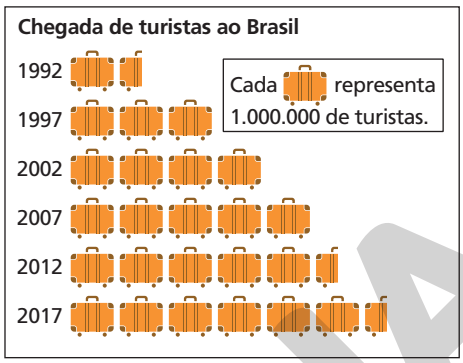
Pictograma

O **pictograma**, tipo de gráfico muito usado pela mídia em razão do forte apelo visual, é constituído por imagens relacionadas ao tema em estudo.

Exemplo

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Chegada de turistas ao Brasil	
Ano	**Número de turistas**
1992	1.474.858
1997	2.849.749
2002	3.784.898
2007	5.025.834
2012	5.676.843
2017	6.588.770



Dados obtidos em: <http://basededados.turismo.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Observe que o gráfico foi elaborado com valores aproximados, o que é bastante comum na construção de pictogramas. Nesse pictograma, como cada símbolo representa 1.000.000 de turistas; logo, (metade de um símbolo) representa 500.000 turistas.

Para 2017, por exemplo, foram usados seis símbolos inteiros mais metade de um símbolo, o que indica o valor aproximado de 6.500.000 turistas nesse ano.

Para construir um pictograma, é fundamental que:

- todos os símbolos tenham o mesmo tamanho e valor;
- os espaços entre eles sejam sempre iguais;
- o critério de arredondamento não induza a uma falsa interpretação dos dados.

Exercício resolvido

R3. Cinco amigos estão disputando um jogo de *videogame*. A tabela ao lado mostra a quantidade de pontos feita por cada um deles ao final de uma partida. Construir um pictograma para representar os dados da tabela.

Pontuação dos jogadores na partida de *videogame*	
Jogador	**Quantidade de pontos**
Felipe	1.640
Lara	1.800
Mariana	1.370
Eduardo	1.000
Rafael	1.200

Dados fictícios.

▸ Resolução

Para construir o pictograma, temos de definir o símbolo que será usado e também a quantidade de pontos que cada símbolo representará.

Analisando os dados da tabela, verificamos que os valores estão entre 1.000 e 1.800 e são próximos de um múltiplo de 200. Desse modo, podemos estabelecer que cada símbolo representará 200 pontos. Para determinar quantos símbolos serão usados para cada jogador, precisaremos arredondar alguns valores: 1.640 será arredondado para 1.600 e 1.370 para 1.400. Assim, temos:

TEOART/SHUTTERSTOCK

Dados fictícios.

Reflita

Nesse caso, estabeleceu-se que cada símbolo representaria 200 pontos, mas poderiam ter sido feitas outras escolhas; por exemplo, poderíamos estabelecer que cada símbolo representaria 100 pontos e, nesse caso, o valor 1.640 poderia ser arredondado para 1.650 e representado por 16 símbolos mais metade de um símbolo. Faça um pictograma com os dados do exercício **R3** adotando outro valor para cada símbolo. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

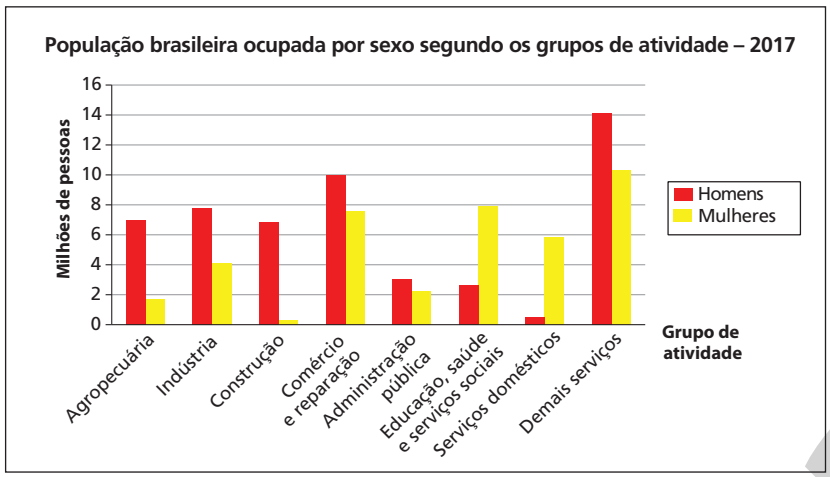
MODERNA

Gráfico múltiplo

Em algumas situações, é necessário representar simultaneamente duas ou mais características da amostra. Para facilitar a comparação entre características distintas, podemos construir um **gráfico múltiplo.**

Exemplos

a) Considere o gráfico abaixo.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: IBGE. *Síntese de indicadores sociais:* uma análise das condições de vida da população brasileira, 2018.

Esse gráfico de colunas múltiplas possui duas colunas para cada grupo de atividade: as colunas em vermelho indicam a quantidade de homens ocupados em cada grupo; as colunas em amarelo indicam a quantidade de mulheres ocupadas em cada grupo.

Observe que, mesmo sem saber o valor exato de pessoas que cada barra representa, é possível comparar a população de homens e mulheres ocupados em cada grupo de atividade, bem como comparar a distribuição dos homens ou das mulheres entre os grupos. Por exemplo, podemos concluir que, em 2017, havia mais mulheres que homens trabalhando em "educação, saúde e serviços sociais" e em "serviços domésticos". Também podemos concluir que, mesmo havendo mais homens que mulheres trabalhando em "comércio e reparação", o número de mulheres ocupadas nesse grupo de atividade era maior que o número de mulheres ocupadas em "serviços domésticos".

Se achar conveniente, perguntar aos alunos o que eles acham da distribuição de homens e mulheres entre os grupos de atividades. Questionar qual seria o motivo de ter mais homens em determinados grupos e mais mulheres em outros.

resposta pessoal

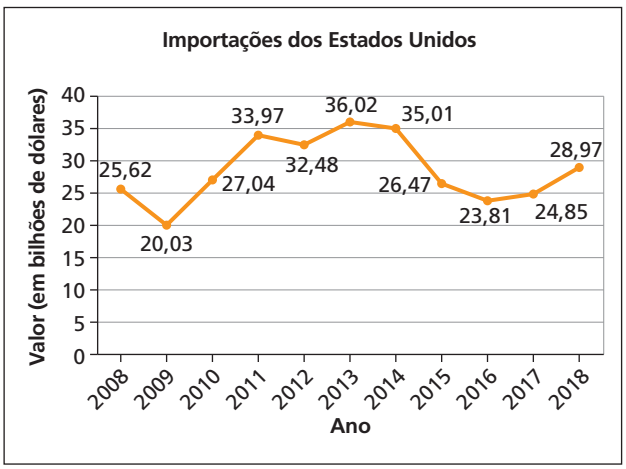
Algumas conclusões possíveis: havia aproximadamente 10 milhões de homens ocupados em "comércio e reparação"; havia aproximadamente 4 milhões de mulheres ocupadas na "indústria"; o número de homens ocupados em "serviços domésticos" era maior que o número de mulheres ocupadas em "construção"; menos de 8 milhões de mulheres estavam ocupadas em "educação, saúde e serviços sociais".

Reflita

Escreva em seu caderno mais três conclusões que podem ser tiradas com base na análise do gráfico anterior. Compare suas conclusões com as de mais dois colegas.

b) Em 2018, os Estados Unidos ficaram em 2º lugar no *ranking* de importações e no de exportações para o Brasil.

Observe os gráficos a seguir, que apresentam os valores do comércio exterior entre Brasil e Estados Unidos de 2008 a 2018.

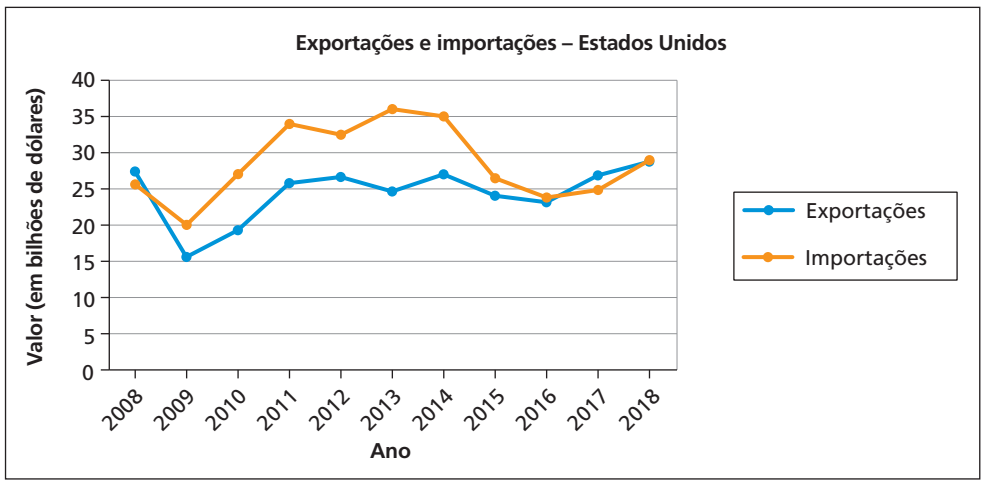


Dados obtidos em: <http://comexstat.mdic.gov.br/pt/comex-vis>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A análise isolada de cada gráfico mostra a evolução do valor de exportações e do valor de importações no decorrer dos anos, mas não favorece uma comparação entre esses valores em um mesmo ano. Essa comparação pode ser favorecida com a organização conjunta de todos os dados em um único gráfico. Veja:



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: <http://comexstat.mdic.gov.br/pt/comex-vis>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Com esse gráfico é possível perceber, por exemplo, que nos anos 2008 e 2017 o valor de exportações superou o de importações, ao contrário de todos os outros anos apresentados no gráfico.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

9. O consumo mensal de energia elétrica da residência de Mariana, em quilowatt-hora (kWh), durante o primeiro semestre do ano passado, foi: 340, 361, 280, 299, 320 e 302.
Considerando os arredondamentos que julgar convenientes, construa um gráfico de barras horizontais. Ver resolução no Guia do professor.

10. Observe a tabela a seguir, na qual estão apresentadas as produções dos maiores produtores de petróleo em 2017.

Maiores produtores de petróleo – 2017	
País	Produção (em barris por dia)
Estados Unidos da América	13.057.000
Arábia Saudita	11.951.000
Rússia (Federação Russa)	11.257.000
Irã	4.982.000
Canadá	4.831.000
Iraque	4.520.000
Emirados Árabes Unidos	3.935.000
China	3.846.000
Brasil	2.734.000

Dados obtidos em: <https://paises.ibge.gov.br/#/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

a) Elabore um pictograma para representar os dados da tabela. Ver resolução no Guia do professor.

b) Compare o seu pictograma com os elaborados por cinco colegas. Escolham o pictograma que vocês acham que melhor representa os dados da tabela. Justifiquem a escolha. resposta pessoal

c) Para comparar a produção dos países, os dados da tabela poderiam ser mais bem representados em um gráfico de linha ou em um gráfico de colunas? Justifique.

11. Observe a tabela a seguir, que apresenta o número de acidentes e óbitos causados por escorpião no estado de São Paulo de 2008 a 2018.

Acidentes e óbitos causados por escorpião no estado de São Paulo		
Ano	Número de acidentes	Número de óbitos
2008	5.566	4
2009	5.547	3
2010	7.261	1
2011	7.017	0
2012	9.463	3
2013	11.464	3
2014	12.513	2
2015	15.107	7
2016	18.829	5
2017	21.711	7
2018	30.707	13

Dados obtidos em: <http://www.saude.sp.gov.br/cve-centro-de-vigilancia-epidemiologica-prof.-alexandre-vranjac/areas-de-vigilancia/doencas-de-transmissao-por-vetores-e-zoonoses/agravos/animais-peconhentos/dados-estatisticos>. Acesso em: 14 abr. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

10. c) Em um gráfico de colunas, pois o gráfico de linha é indicado para representar a variação dos valores de uma variável no decorrer de um período, o que não é o caso.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

11. b) resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam que não seria conveniente, pois os números de acidentes são da ordem das unidades de milhar e dezenas de milhar, e os números de óbitos são da ordem das unidades; logo, a construção do gráfico seria inviável ou não representaria a variação no número de óbitos.

a) Com base nas informações da tabela, construa em seu caderno dois gráficos de linha, um para representar o número de acidentes e um para representar o número de óbitos causados por escorpião no estado de São Paulo.

Ver resolução no Guia do professor.

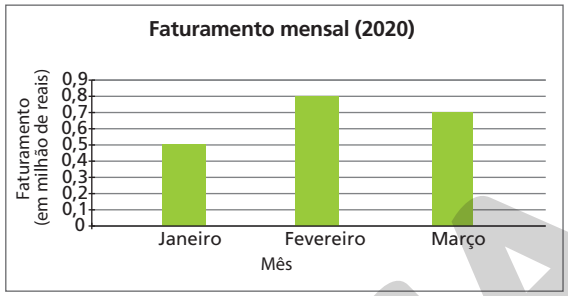
b) Você acha que seria conveniente representar o número de acidentes e de óbitos em um mesmo gráfico de linhas múltiplas? Explique.

Escorpião da espécie *Tityus serrulatus*, conhecido como escorpião-amarelo. Segundo o Ministério da Saúde, é a espécie de maior preocupação em decorrência do alto potencial de gravidade do envenenamento e da expansão em sua distribuição geográfica pelo país.

ISIS MEDRI/SHUTTERSTOCK

12. O gráfico abaixo apresenta o faturamento da empresa A nos três primeiros meses de 2020. Usando régua, compasso e transferidor, represente esses valores em um gráfico de setores considerando a participação, em porcentagem, de cada mês no faturamento trimestral.

Ver resolução no Guia do professor.



NELSON MATSUDA

Fonte: Empresa A.

12. Explore a **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*, no desenvolvimento da atividade **12**. Após a leitura e compreensão da situação, oriente os alunos a estabelecer e ordenar tarefas menores para solucionar o exercício proposto. Por exemplo, organizar os dados em uma tabela de frequência, calcular as porcentagens, calcular o ângulo central de cada setor, e por fim, elaborar o gráfico de setores.

Planilhas eletrônicas na construção de gráficos

As planilhas eletrônicas, além de auxiliar na construção de tabelas de distribuição de frequências, são uma ferramenta muito usada para construir gráficos.

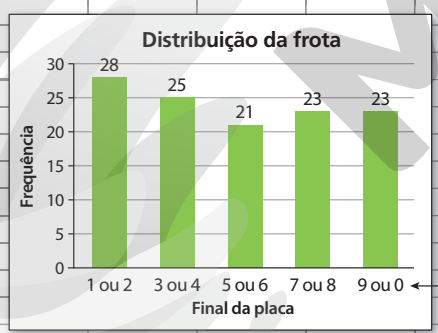
Para construir um gráfico estatístico usando uma planilha eletrônica, inicialmente devemos construir a tabela de frequências na planilha.

Vamos usar como exemplo a tabela construída nas páginas 24 e 25.

C2 | *Fórmula* | 28

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120	1,0000	100,00%

Para construir um gráfico de barras, por exemplo, inicialmente devemos selecionar os valores das frequências que queremos usar e, então, selecionamos a opção para inserir gráficos de barras. Há várias opções de gráficos de barras (horizontais, verticais, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar de retângulos).

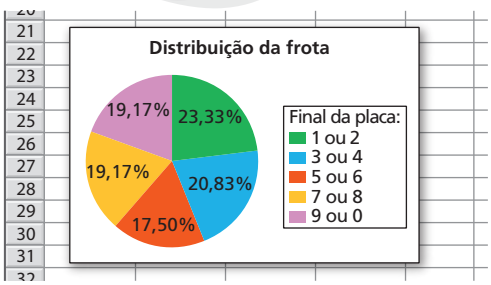


Depois que o gráfico estiver construído, é necessário arrumar os rótulos do eixo que exibe os finais de placas. Isso pode ser feito manualmente ou selecionando-se o intervalo de B2 a B6 na tabela.

É possível, ainda, inserir título no gráfico e nome nos eixos, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

ADILSON SECCO

Se for possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.
Salientar que as planilhas são uma ferramenta muito útil, mas que, ainda assim, é importante que saibam como construir os gráficos com lápis e papel. Além disso, ressaltar que é muito importante saber escolher o tipo de gráfico que melhor representa um conjunto de dados para transmitir uma informação, bem como saber fazer a leitura e a análise crítica das informações apresentadas.



Para construir um gráfico de setores com a frequência percentual, por exemplo, bastaria selecionar na planilha o intervalo de E2 a E6 e, então, selecionar a opção de inserir gráfico de setores.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Seria interessante que os exercícios propostos a seguir fossem realizados em uma planilha eletrônica; porém, se não for possível, eles podem ser feitos da maneira tradicional.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. Considere a tabela a seguir.

Exportação brasileira (em dólar)		
Ano	**Soja e derivados**	**Petróleo e derivados**
1998	4.757.554.572	860.253.355
2002	6.006.046.456	3.867.948.792
2006	9.292.080.042	13.004.650.195
2010	17.113.962.266	23.031.430.017
2014	31.407.502.542	25.172.685.937
2018	40.704.436.117	31.637.157.599

Dados obtidos em: <http://www.mdic.gov.br/comercio-exterior/estatisticas-de-comercio-exterior/series-historicas>. Acesso em: 14 abr. 2020.

a) Usando uma planilha eletrônica, construa um gráfico de linhas múltiplas para representar os dados dessa tabela. Ver resolução no Guia do professor.

b) Observando o gráfico construído, escreva um parágrafo comparando os valores de exportação de soja e seus derivados com os valores de exportação de petróleo e seus derivados.

13. b) Resposta possível: Considerando os anos apresentados, o valor em exportação de petróleo e derivados superou o valor em exportação de soja e derivados apenas em 2006 e 2010.

14. Resolva usando uma planilha eletrônica. Ver resolução no Guia do professor.

As notas finais dos 36 alunos de uma turma foram apresentadas pelo professor em ordem de chamada:

1 – 6,0	10 – 7,0	19 – 4,0	28 – 8,0
2 – 7,0	11 – 5,0	20 – 7,0	29 – 8,0
3 – 5,0	12 – 9,0	21 – 5,0	30 – 7,0
4 – 5,0	13 – 10,0	22 – 6,0	31 – 4,0
5 – 4,0	14 – 6,0	23 – 8,0	32 – 9,0
6 – 6,0	15 – 10,0	24 – 5,0	33 – 7,0
7 – 5,0	16 – 6,0	25 – 8,0	34 – 9,0
8 – 6,0	17 – 7,0	26 – 5,0	35 – 8,0
9 – 8,0	18 – 5,0	27 – 10,0	36 – 8,0

a) Construa uma tabela de frequências (absoluta, relativa e percentual) organizando esses dados para facilitar a observação do comportamento da variável "nota".

b) Qual foi a porcentagem de notas iguais a 6 (nota mínima de aprovação) ou acima dela? E abaixo?

c) Construa um gráfico de barras (horizontais ou verticais) com as frequências absolutas das notas e um gráfico de setores.

d) Qual dos gráficos construídos você considera melhor para apresentar esse conjunto de notas?

Explore

Colete dados de todos os alunos de sua turma para a variável "atividade de lazer preferida" ou escolha outra variável qualitativa para investigar. Usando os dados coletados, construa, em uma planilha eletrônica, uma tabela com as frequências absoluta e percentual. Em seguida, construa pelo menos dois tipos de gráfico para representar seus dados e apresente os resultados para os colegas. Nesse caso, o gráfico de segmentos é adequado? Justifique.

Espera-se que os alunos percebam as diferenças entre os tipos de gráfico de acordo com a informação que querem transmitir e identifiquem que o gráfico de segmentos não é adequado para o caso de uma variável qualitativa.
Deixe os alunos livres para escolher a variável sugerida ou qualquer outra variável qualitativa do universo de interesse deles e dos colegas.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

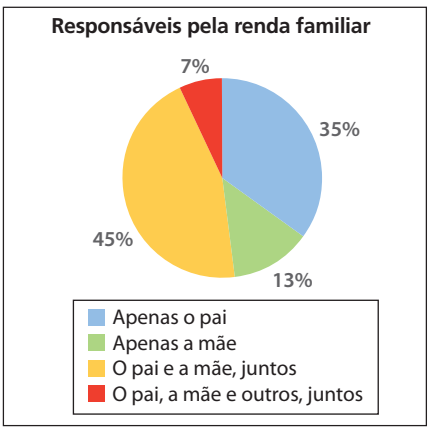
Registre as respostas em seu caderno

Esses exercícios favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT406** e **EM13MAT407** da BNCC, na medida em que, em alguns exercícios, os alunos construirão e analisarão tabelas e gráficos com dados obtidos em pesquisas estatísticas e avaliarão a melhor forma de representação.

Aplicação

1. (UFMG) Este gráfico representa o resultado de uma pesquisa realizada com 1.000 famílias com filhos em idade escolar.

ADILSON SECCO



Considere estas afirmativas referentes às famílias pesquisadas:

(I) O pai participa da renda familiar em menos de 850 dessas famílias.

(II) O pai e a mãe participam, juntos, da renda familiar em mais de 500 dessas famílias.

Então, é correto afirmar que: alternativa c

a) nenhuma das afirmativas é verdadeira.

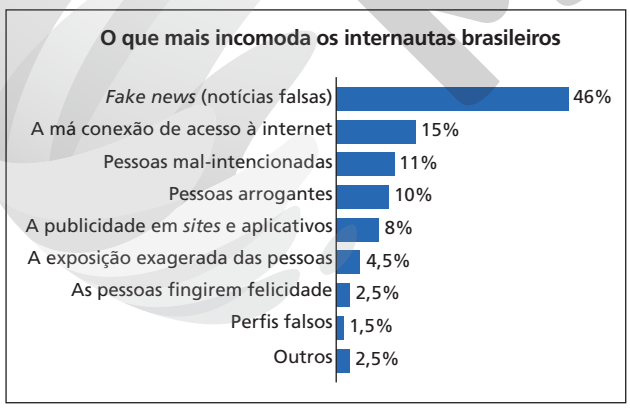
b) apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) apenas a afirmativa II é verdadeira.

d) ambas as afirmativas são verdadeiras.

2. Observe, no gráfico a seguir, alguns resultados de uma pesquisa realizada pelo IBOPE Conecta de 21 a 26 de junho de 2018 com 2.000 internautas das classes A, B, C e D de todas as regiões do Brasil.

ERICSON GUILHERME LUCIANO



Fonte: <https://www.ibopeinteligencia.com/noticias-e-pesquisas/fake-news-e-o-que-mais-incomoda-internauta-brasileiro/>. Acesso em: 14 abr. 2020.

De acordo com as informações, responda às questões.

a) Qual é a população em investigação na pesquisa? os internautas brasileiros

b) Qual foi a amostra? 2.000 internautas das classes A, B, C e D de todas as regiões do Brasil.

c) Quando a pesquisa foi realizada? Por qual órgão? de 21 a 26 de junho de 2018; IBOPE Conecta

d) De acordo com os resultados da pesquisa, qual fator foi o mais citado entre os que mais incomodam os internautas brasileiros? *fake news* (notícias falsas)

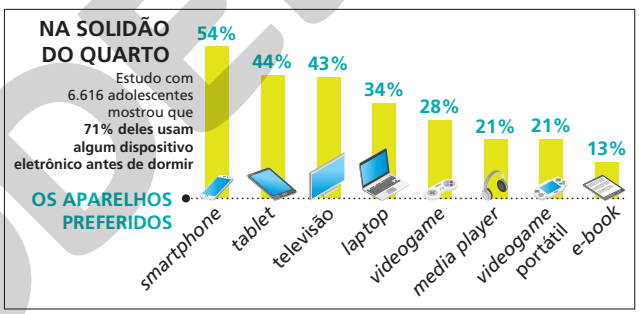
e) Quantas das pessoas pesquisadas responderam se incomodar mais com a exposição exagerada das pessoas? E com *fake news*? 90 pessoas; 920 pessoas

f) Converse com um colega sobre os tópicos a seguir. respostas pessoais

- O que mais os incomoda na internet? Há algo que vocês possam fazer para evitar essa situação de incômodo?
- Vocês sabem o que é *fake news*? Vocês já receberam notícias falsas? Isso os incomoda?

3. O gráfico reproduzido a seguir foi publicado em uma revista brasileira. Trata-se de um estudo conduzido pelo Imperial College London, no Reino Unido, realizado com 6.616 adolescentes com idade média de 12 anos, usuários de todos os tipos de tela e para os mais diversos fins – tanto para estudo como para diversão. A intenção do estudo foi verificar o impacto negativo do uso dos aparelhos eletrônicos antes de dormir.

ADILSON SECCO



Fonte: *Veja*, São Paulo, ano 52, n. 12, p. 86, 20 mar. 2019.

a) Qual foi a amostra do estudo?

b) Quantos dos jovens pesquisados usam algum dispositivo eletrônico antes de dormir?

c) Elabore uma tabela com a quantidade de jovens que utilizam cada um dos aparelhos preferidos por eles, de acordo com a pesquisa realizada pelo Imperial College London.

d) Seria coerente construir um gráfico de setores com as informações desse gráfico de barras? Por quê?

e) Você costuma usar algum aparelho eletrônico antes de dormir?

Pesquise, em livros, na internet, ou em outras fontes, os impactos negativos do uso de aparelhos eletrônicos antes de dormir. Ver resolução no Guia do professor.

Aprofundamento

4. Resolva os itens a seguir considerando a pesquisa e o gráfico do exercício **3**. respostas pessoais

a) Elabore quatro afirmações (verdadeiras ou falsas) sobre o gráfico ou sobre a pesquisa realizada. Dê para um colega verificar se são verdadeiras ou falsas.

No gráfico da atividade **2**, a soma de todas as porcentagens é 101%. Comentar com os alunos que, nos gráficos divulgados pela mídia, algumas vezes a soma das frequências percentuais pode não ser exatamente 100% em razão de pequenos arredondamentos. Em alguns casos, isso também pode acontecer porque os entrevistados podem dar mais de uma resposta à pergunta, o que não foi o caso nesse gráfico.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

IMPRIMA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

As atividades **3** e **4** favorecem o desenvolvimento do tema contemporâneo **saúde** e é um tema do interesse e universo dos jovens. A pesquisa proposta tem a intenção de fazer com que os alunos se conscientizem sobre os efeitos nocivos do uso de telas antes de dormir e, inclusive, pode fazer com que mudem de hábitos, pensando na sua saúde física e mental. Nesse caso, é favorecida a competência geral **8** da BNCC.

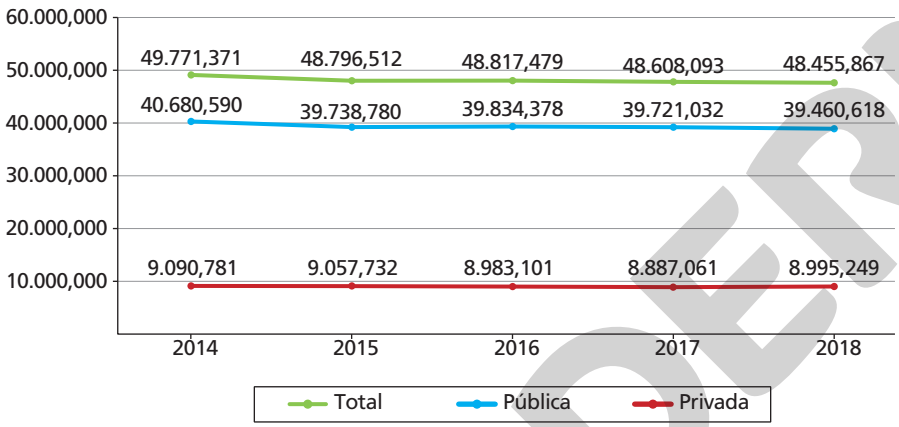
b) Pesquise se os alunos do 1º ano de sua escola fazem o uso de algum aparelho eletrônico antes de dormir. Para isso, escolha uma amostra dos alunos, decida como os dados serão coletados e, depois, organize os dados em um gráfico.

Após realizar a pesquisa, compartilhe com os colegas como a amostra foi escolhida e comparem os gráficos construídos. Decidam qual gráfico representa mais fielmente a população dos alunos do 1º ano da escola e justifiquem a escolha. Ver resoluções no Guia do professor

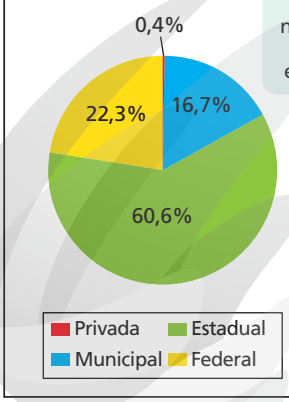
5. O Censo Escolar é a principal pesquisa estatística sobre a educação básica no Brasil. Realizada anualmente, é coordenada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Com a participação de **todas** as escolas públicas e privadas do país, abrange as diferentes etapas e modalidades da educação básica: ensino regular, educação especial, educação de jovens e adultos (EJA) e educação profissional.

Veja alguns resultados do Censo Escolar 2018. Aproveitar a atividade **2** da página anterior para conversar com os alunos sobre *fake news*. Orientar os alunos a sempre verificar a fonte dos dados e quem está divulgando a informação, a fazer uma busca para checar se a mesma notícia é divulgada em fontes confiáveis etc. Essa atividade também apresenta um tema que geralmente faz parte do universo dos alunos.

Total de matrículas na educação básica segundo a rede de ensino – Brasil – 2014 a 2018

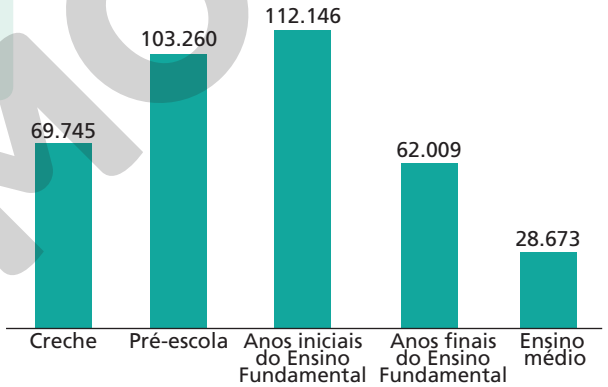


Percentual de escolas por dependência administrativa – Brasil – 2018



Em 2018, havia no Brasil 181.939 escolas de educação básica

Número de escolas por oferta de etapa de ensino – Brasil – 2018



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Inep. *Resumo Técnico*: Censo da Educação Básica 2018. Brasília: Inep, 2019.

Com base nessas informações, resolva os itens a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) O Censo Escolar é uma pesquisa censitária ou amostral? Justifique.

b) Qual era o total de matrículas na educação básica em 2018? Desse total, quantas eram as matrículas na rede pública e quantas eram na rede privada?

c) Usando uma planilha eletrônica, construa uma tabela com as frequências absolutas e percentuais do item **b**. A seguir, construa um gráfico de setores com as frequências percentuais.

d) Calcule o número de escolas privadas que havia no Brasil em 2018.

e) É coerente construir um gráfico de setores com os dados do gráfico de barras acima? Por quê?

f) Elabore duas questões que podem ser respondidas com as informações dadas neste exercício. Dê suas questões para um colega responder e responda as questões elaboradas por ele.

É interessante que eles conversem com os colegas para achar pontos comuns e opiniões divergentes, conheçam-se, respeitem um ao outro e reflitam sobre o que pode ser feito para evitar as situações que os incomodam. Dessa forma, são favorecidas as competências gerais **8** e **9** da BNCC e o tema contemporâneo **vida familiar e social**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma rede de supermercados, interessada em se instalar em certa região, resolveu fazer uma pesquisa com a população local. Foram apresentadas as seguintes variáveis: sexo, tempo de residência na região, satisfação com as redes já instaladas e frequência de compras por mês. As variáveis apresentadas são, respectivamente: alternativa c

a) quantitativa, quantitativa, quantitativa, qualitativa.

b) quantitativa, quantitativa, qualitativa, qualitativa.

c) qualitativa, quantitativa, qualitativa, quantitativa.

d) qualitativa, quantitativa, quantitativa, quantitativa.

2. Para conhecer melhor o seu público, uma companhia de teatro resolveu verificar, aos sábados e domingos, no período de um mês, qual o sexo dos espectadores. Os dados foram organizados em uma tabela, reproduzida a seguir.

	Sexo dos espectadores							
	1ª semana		2ª semana		3ª semana		4ª semana	
	S	D	S	D	S	D	S	D
M	35	40	32	28	37	28	39	27
F	28	30	30	31	25	35	37	33

Dados obtidos pela companhia de teatro.

O percentual aproximado de homens (M) e mulheres (F) em sábados (S) e em domingos (D), respectivamente, é: alternativa b

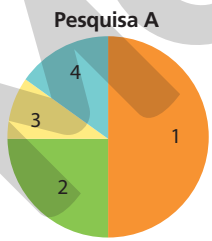
a) 56% e 44%, 49% e 51%

b) 54% e 46%, 49% e 51%

c) 44% e 56%, 51% e 49%

d) 46% e 54%, 51% e 49%

3. O gráfico ao lado apresenta o resultado de uma pesquisa.

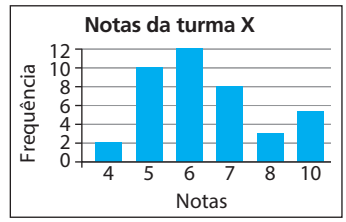


Dados fictícios.

A região que representa 25% para uma das categorias analisadas é: alternativa c

a) 3 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4

4. As notas de Matemática de uma classe foram apresentadas pelo professor no gráfico abaixo.



Fonte: Professor de Matemática.

O número de alunos na classe, a soma das notas da classe e a razão dessa soma pelo número de alunos são, respectivamente: alternativa d

a) 40; 240; 6,0 **c)** 20; 260; 6,5

b) 20; 130; 6,5 **d)** 40; 260; 6,5

5. Em uma pesquisa, os entrevistados de certa cidade deveriam atribuir uma nota, de 1 a 10, à educação pública municipal. O resultado é mostrado na tabela abaixo, na qual se verifica a relação entre as variáveis "nota" e "idade".

Nota dada à educação pública municipal										
Idade \ Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
De 20 a 25	0	0	1	2	2	4	0	1	0	0
De 26 a 30	0	0	0	2	1	4	3	0	0	0
De 31 a 35	0	0	0	0	3	1	0	1	0	0
De 36 a 40	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
De 41 a 45	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
De 46 a 50	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Dados fictícios.

Se tomarmos a nota 5 como um valor que determina qualidade média, a única alternativa correta é: alternativa a

a) A maioria das pessoas com 31 anos ou mais considera a educação pública municipal de qualidade acima da média.

b) Os jovens até 25 anos atribuem nota máxima à educação pública municipal.

c) Segundo a opinião dos entrevistados, a educação pública municipal está muito ruim.

d) Não é possível perceber relação entre as duas variáveis.

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão				
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5
Reconhecer população, amostra e variáveis.	X				
Organizar dados em representações tabular e gráfica.		X	X	X	X
Obter conclusões com base na análise dos dados coletados.					X
Páginas do livro referentes ao conceito	15 a 20	21 a 26	27 a 34	27 a 34	15 a 20

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Essa seção trabalha principalmente com o tema contemporâneo **direitos da criança e do adolescente**, que engloba temas contemporâneos como **saúde**, **vida familiar e social** e **educação em direitos humanos**. A seção também traz à tona questões atuais e do universo dos jovens, que merecem mais discussões, como *bullying* e *cyberbullying*.

Compreensão de texto

Faltam direitos a 27 milhões de crianças e jovens, diz Unicef

Ao mesmo tempo em que registrou avanços em indicadores da infância nos últimos 30 anos, o Brasil ainda tem cerca de 27 milhões de meninos e meninas até 18 anos sem acesso a um ou mais direitos básicos e vê risco de conquistas se reverterem, como ocorre nos casos de vacinação e mortalidade infantil.

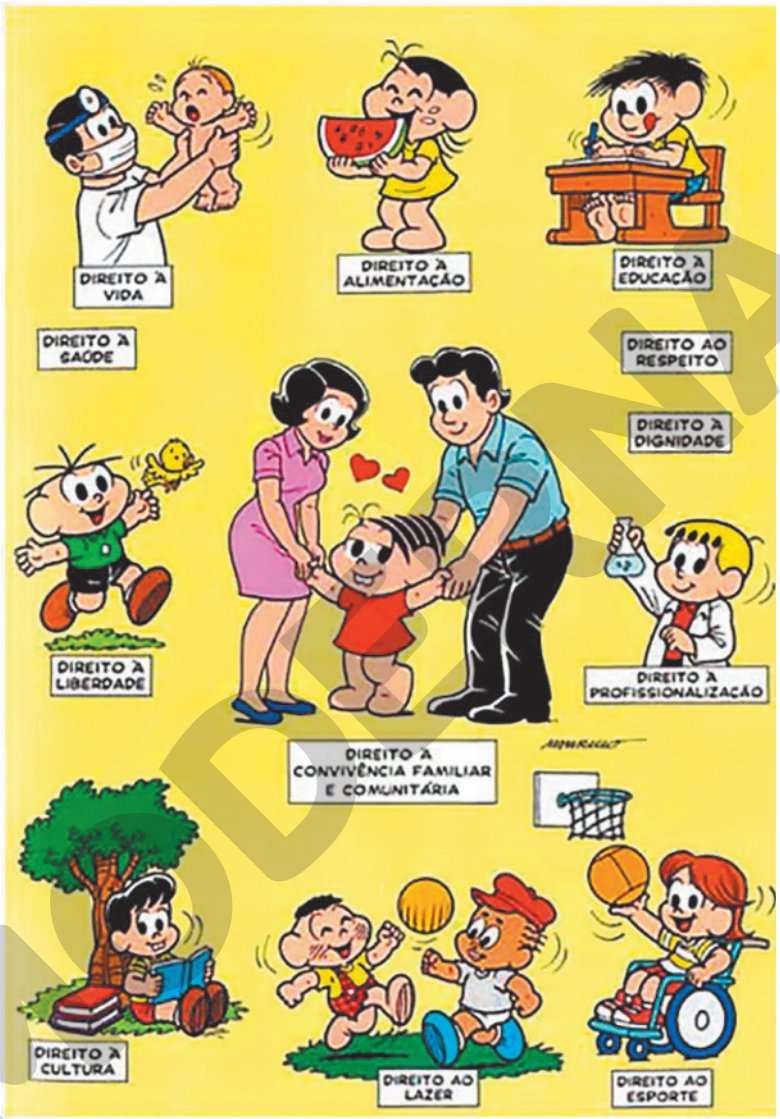
Surgem também alertas sobre desafios não previstos em décadas anteriores, a exemplo do aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

As conclusões estão em relatório do Unicef divulgado nesta terça (12) sobre os 30 anos da Convenção sobre os Direitos da Criança, tratado considerado como o acordo de maior adesão no mundo, com 196 países (Brasil incluso).

"Foi um tratado que passou a considerar a criança como sujeito de direitos. Antes, era vista como propriedade do pai ou objeto de caridade", afirma Florence Bauer, representante do Unicef no Brasil.

Segundo ela, o Brasil teve avanços significativos na redução da mortalidade infantil e no maior acesso à escola.

Mas enfrenta desafios, como o fato de, entre os 57 milhões de crianças e adolescentes no país, 27 milhões não terem todos os seus direitos respeitados, como acesso à educação, informação, água, saneamento, moradia e proteção contra o trabalho infantil.



"A turma da Mônica em: O Estatuto da criança e do adolescente", edição especial, 2018.

© Instituto Mauricio de Sousa

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Também é alto o número de homicídios de crianças e adolescentes. A cada dia, 32 meninos e meninas de 10 a 19 anos são assassinados no país.

Em 2017, ano dos dados mais recentes disponíveis, foram 11.800 mortes – a maioria, meninos negros e pobres nas periferias de grandes cidades. Só nos últimos dez anos, foram 191 mil, de acordo com cálculos inéditos do Unicef. [...]

Para o Unicef, a situação deixa claro como é preciso investir em política integradas, com foco sobretudo em áreas mais vulneráveis.

Apesar de avanços, como o aumento na faixa etária escolar, o Brasil ainda soma 2 milhões de crianças e adolescentes fora da escola – a maioria de famílias de baixa renda.

MODELO

Outros alertas vêm do recente aumento nas taxas de mortalidade infantil e da queda em índices de vacinação.

De 1990 a 2017, a taxa de mortalidade infantil passou de 47,1 em cada mil nascidos vivos para 13,4 em cada mil nascidos vivos. No último ano, porém, um "repique" na curva de dados chamou a atenção de especialistas.

O mesmo ocorreu para as taxas de vacinação, o que levou ao retorno do sarampo. O Ministério da Saúde diz que os dados de 2018 apontam melhora, mas o desafio persiste.

O relatório chama a atenção ainda para desafios emergentes e não previstos no tratado, como a saúde mental.

Os registros de suicídio de crianças e adolescentes no país passaram de 714, em 2007, para 1.047, em 2017. "É a parte mais visível e trágica de um problema mais amplo. Precisamos de estudos para saber as causas", diz Bauer. "E de profissionais preparados para identificar os sinais."

O Unicef também cita como pontos carentes de atenção o *bullying* e o *cyberbullying* e a proteção da infância ante o aumento da imigração. Segundo a entidade, dos 200 mil venezuelanos que buscam refúgio no país, 30% têm até 18 anos.

Fonte: CANCIAN, Natália. Faltam direitos a 27 milhões de crianças e jovens, diz Unicef. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 13 nov. 2019. p. B1.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. O assunto principal do texto é: alternativa c
   a) a situação dos refugiados venezuelanos que chegam ao Brasil.
   b) a economia brasileira.
   c) os avanços e desafios na garantia dos direitos da criança e do adolescente.
   d) a Convenção sobre os Direitos da Criança.
2. Pesquise o que é o Unicef e qual é a sua função.
3. O que você acha que a autora do texto quis dizer com "um repique na curva de dados", no 11º parágrafo?
4. Cite alguns desafios recentes citados no texto, não previstos na Convenção sobre os Direitos da Criança. Ver comentários sobre as atividades **4** e **5** no Guia do professor.
5. Calcule a porcentagem de aumento no número de suicídios de crianças e adolescentes de 2007 a 2017. Por que você acha que houve esse aumento? Converse com um colega sobre esse assunto.
6. O texto cita como alerta a queda no índice de vacinações. Por que você acha que isso tem ocorrido e como isso reflete na saúde da população?
7. Você conhece o Estatuto da Criança e do Adolescente (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990)?

   Em grupos, pesquisem a respeito dos direitos das crianças e dos adolescentes previstos nessa lei e elaborem uma apresentação para a turma sobre o assunto em um dos seguintes formatos: teatro, vídeo, seminário, cartaz, *podcast*, história em quadrinhos, ou outra forma que acharem adequada para expor o assunto.

2. O Fundo das Nações Unidas para a Infância (Unicef) é um órgão da Organização das Nações Unidas (ONU) que tem o mandato de defender e proteger os direitos de crianças e adolescentes, ajudar a atender suas necessidades básicas e criar oportunidades para que alcancem seu pleno potencial. O Unicef é guiado pela Convenção sobre os Direitos da Criança e é o principal defensor global de meninas e meninos.

3. resposta pessoal
Provavelmente, a autora quis dizer que apesar de haver uma melhora, comparando os anos de 1990 e 2017, no ano de 2017 houve piora em relação a 2016.

4. A saúde mental, aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

5. aproximadamente 46,64%
resposta pessoal

6. resposta pessoal
Essa reflexão é de extrema importância, pois as taxas de cobertura vacinal vêm caindo no Brasil; um dos motivos é a desinformação e as informações falsas (as *fake news*) que circulam nas redes sociais e nos grupos de mensagens pela internet. É importante que os alunos desenvolvam um espírito crítico e que aprendam que devem sempre desconfiar e buscar informações em fontes confiáveis, como, nesse caso, o Ministério da Saúde. Estimule discussões e reflexões desse tipo.

7. Deixar os alunos escolherem a forma que acharem mais adequada para expor esse trabalho, apenas oriente-os, caso ache necessário. Como nessa atividade os alunos poderão usar diferentes linguagens (corporal, verbal, visual, sonora, digital etc.) esse trabalho poderá favorecer o desenvolvimento das competências gerais **4** e **5** da BNCC, além da competência geral **9**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explore: • Espera-se que os alunos percebam que o gráfico apresenta porcentagens de valores totais diferentes. Então, somente com as informações apresentadas, não é possível chegar a conclusões sobre o número absoluto de pessoas que cada porcentagem representa. É possível concluir que a razão de usuários de internet entre os moradores da área rural é o dobro da razão entre os moradores da área urbana.
• De acordo com o IBGE, em 2017 a população do Brasil era de 207.833.825 pessoas, 13,7% (o que equivale a aproximadamente 28.473.234 pessoas) residentes na área rural e 86,3% (aproximadamente 179.360.591 pessoas) residentes na área urbana. (Dados obtidos em: <https://paises.ibge.gov.br/#/>. Acesso em: 24 abr. 2020
Assim: 46% de 28.473.234 = 13.097.688; 23% de 179.360.591 = 41.252.936. Portanto, na área rural, aproximadamente 13,1 milhões de indivíduos nunca acessaram a internet e, na área urbana, aproximadamente 41,3 milhões de indivíduos nunca acessaram a internet.
Percebe-se, então, que a afirmação "em 2017, o número de indivíduos da área rural que nunca havia acessado a internet era o dobro do número de indivíduos da área urbana que nunca havia acessado a internet" não é verdadeira.

CAPÍTULO

2 Análise de dados

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT201**, **EM13MAT406** e **EM13MAT407**.

Uso da internet no Brasil
A pesquisa TIC Domicílios é uma pesquisa amostral realizada anualmente desde 2005. Seu objetivo é mapear o acesso à infraestrutura de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) nos domicílios particulares do país, bem como as formas de uso dessas tecnologias pela população com 10 anos de idade ou mais.
Segundo resultados da pesquisa TIC Domicílios 2017, no decorrer dos últimos 10 anos, a proporção de usuários* de internet no Brasil quase dobrou, passando de 34% em 2008 para 67% em 2017, o que representava 120,7 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais.

Entre indivíduos residentes em áreas urbanas, 65% eram usuários de internet. Na área rural, esse percentual era de apenas 34%.

Em função do uso cada vez mais frequente do telefone celular para se conectar, o acesso à internet durante deslocamentos – por exemplo, na rua, no ônibus, no metrô ou no carro – também tem sido cada vez mais frequente: em 2009, apenas 3% dos usuários utilizavam a rede dessa maneira; em 2017, essa proporção chegou a 48%.

Objetivos do capítulo
- Organizar dados e construir tabelas de distribuições de frequências.
- Interpretar e construir histogramas e diagramas de ramo e folhas.
- Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.

* Considera-se usuário aquele que utilizou a internet há menos de três meses do momento da entrevista.

Explore
- Podemos afirmar que, em 2017, o número de indivíduos da área rural que nunca havia acessado a internet era o dobro do número de indivíduos da área urbana que nunca havia acessado a internet? Converse com um colega a respeito.
- Pesquisem qual era a população urbana e a população rural do Brasil em 2017. Depois, usando uma calculadora, calculem o número aproximado de indivíduos de cada uma dessas áreas que nunca usaram a internet. Verifiquem se os resultados obtidos refletem a sua resposta ao item anterior.

Observe os dados apresentados acima sobre a pesquisa *TIC Domicílios 2017*. Vamos identificar, nessa pesquisa estatística, alguns conceitos vistos no capítulo anterior.

As **populações** em investigação na pesquisa são todos os domicílios particulares do país e todas as pessoas com 10 anos de idade ou mais; e a pesquisa é **amostral**, ou seja, é realizada com apenas uma parcela da população.

Foram explicitadas algumas **variáveis qualitativas** – como acesso à internet no domicílio, motivo do não acesso, dispositivos mais usados para se conectar à internet, área de residência (urbana ou rural), região do país, classe social – e a **variável quantitativa** idade.

Analisando o gráfico da página ao lado podemos concluir, por exemplo, que:

• 26% de toda a população brasileira nunca acessou a internet;

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

MODERNA

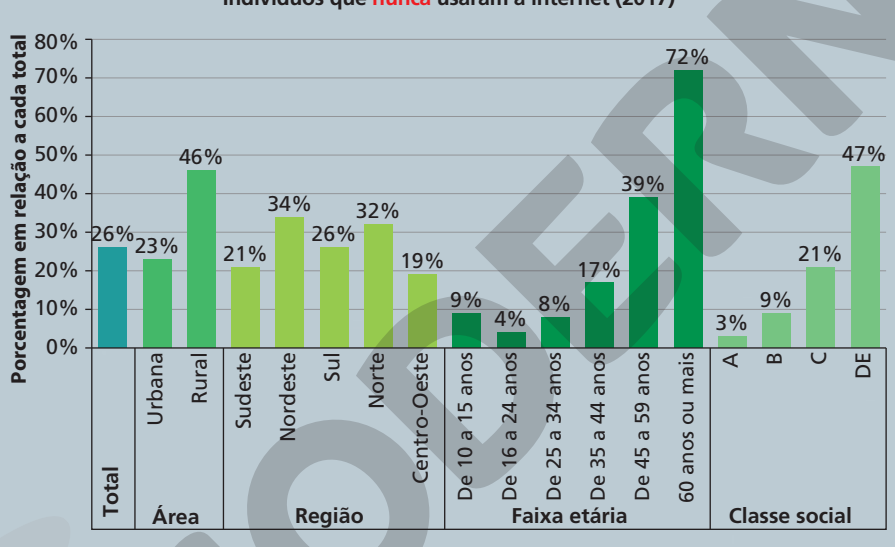
Essa abertura trata de um tema que geralmente faz parte do universo dos alunos jovens. Alguns especialistas consideram jovens as pessoas dos 19 aos 29 anos, já o IBGE considera jovem as pessoas de 16 a 24 anos. De qualquer forma, podemos observar, pelo gráfico, que a porcentagem de indivíduos dessa faixa etária, que não acessam a internet é muito menor do que nas outras faixas etárias.

Em 2017, 61% dos domicílios brasileiros tinham acesso à internet (uma estimativa de cerca de 42,1 milhões de domicílios). Entre os domicílios que não tinham acesso, o custo elevado foi o motivo mencionado por 59% dos entrevistados, além da falta de interesse (47%) e de necessidade (44%) dos moradores em ter uma conexão à internet no domicílio.

Entre os dispositivos mais usados pelos usuários que acessam a internet estavam o celular (96%), o *notebook* (33%), o computador de mesa (30%), a televisão (22%), o *tablet* (15%) e o *videogame* (9%).

PAULO MANZI

Apesar do crescente número de acessos, muitos brasileiros nunca usaram a internet.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nos domicílios brasileiros. *TIC Domicílios 2017*. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2018.

- a porcentagem de indivíduos de 60 anos ou mais que nunca acessou a internet é bem superior à porcentagem de indivíduos que nunca acessou a internet das outras faixas etárias;
- 4% da população de 16 a 24 anos nunca acessou a internet;
- há uma grande discrepância entre as classes sociais, evidenciada pelos dados: enquanto 3% da população de classe A nunca usou a internet, 47% da população das classes DE nunca usou a rede.

Já vimos no capítulo anterior como dados podem ser organizados em tabelas e gráficos de barras (horizontais e verticais), de setores, de linha, pictogramas e gráficos múltiplos. Neste capítulo, vamos aprofundar esse estudo.

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Alunos da terceira idade durante aula de computação no Centro Cultural Matarazzo, Presidente Prudente (SP), 2019.

Os tópicos **1** e **2** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT406** da BNCC por apresentar e solicitar a construção de tabelas e gráficos de frequências utilizando dados obtidos de amostras estatísticas, fazendo uso, em muitas situações, de planilha eletrônica, conversando com a competência geral **5**, na utilização de tecnologia digital para comunicar e disseminar informações. O desenvolvimento da habilidade **EM13MAT406**, da maneira que foi trabalhada nesses tópicos, vai ao encontro das competências específicas **1** e **4**, já que utiliza procedimentos matemáticos na interpretação de diversas situações e possibilita uma eficiente comunicação de resultados por meio das tabelas de frequências, e de gráficos.

1 Distribuição e frequências

1.1 Frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas

CHARTS AND BG/SHUTTERSTOCK

Apenas conhecer os preços do modelo de *tablet* pesquisado não ajuda a analisar o comportamento da variável preço. Podemos elaborar uma tabela de frequências para inferir, com mais precisão, esse comportamento.

Em uma pesquisa sobre preços de um modelo de *tablet*, em 20 lojas do ramo foram coletados os seguintes valores, em real:

1.000 1.500 1.000 1.600 1.000 1.600 1.600 1.500 1.500 1.000
1.000 1.000 1.500 1.600 1.600 1.600 1.600 1.600 1.600 1.600

Para analisar a variável preço, vamos agrupar esses valores em uma tabela de frequência.

Preço (R$)	Quantidade de lojas
1.000	////////
1.500	////
1.600	//////////
Total	////////////////////

ou

Preço (R$)	Quantidade de lojas
1.000	6
1.500	4
1.600	10
Total	20

Na tabela da direita, os números que aparecem na coluna "Quantidade de lojas" indicam as frequências dos valores observados da variável estudada (Preço).

A quantidade de vezes que cada valor é observado chama-se **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência (f_i)**.

A tabela que mostra a relação entre a variável e a quantidade de vezes que cada valor se repete (frequência) é chamada de **tabela de frequências** ou **distribuição de frequências**.

Preço (R$)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (f_r)
1.000	6	$\frac{6}{20} = 0{,}30$ ou 30%
1.500	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20$ ou 20%
1.600	10	$\frac{10}{20} = 0{,}50$ ou 50%
Total	20	100%

Agora, vamos acrescentar à tabela de frequências uma coluna com valores que indiquem a razão entre cada frequência absoluta e o total pesquisado. Os valores calculados recebem o nome de **frequência relativa (f_r)** ou **frequência percentual** e geralmente são expressos em porcentagem para facilitar a interpretação dos dados.

Reflita

É possível encontrar uma frequência relativa negativa ou maior que 100%? Justifique.

Não, pois a frequência relativa é a razão entre uma parte e o todo, sendo, portanto, sempre um número de 0 a 1 ou de 0% a 100%.

Para saber mais sobre a variável estudada, podemos calcular a soma de cada frequência absoluta com as frequências absolutas anteriores, que chamamos de **frequência absoluta acumulada (F_i)**, e a soma de cada frequência relativa com as frequências relativas anteriores, que chamamos de **frequência relativa acumulada (F_r)**.

Preço (R$)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (f_r)	Frequência absoluta acumulada (F_i)	Frequência relativa acumulada (F_r)
1.000	6	30%	6	30%
1.500	4	20%	$10 = 6 + 4$	$50\% = 30\% + 20\%$
1.600	10	50%	$20 = 6 + 4 + 10$	$100\% = 30\% + 20\% + 50\%$
Total	20	100%	—	—

Observação

Para que o cálculo das frequências acumuladas seja coerente, é necessário que os valores da variável estejam ordenados. Assim, só faz sentido fazer esse cálculo para variáveis quantitativas ou qualitativas ordinais.

As frequências acumuladas são úteis quando o objetivo é saber a quantidade ou a porcentagem até determinada característica.

Observação

Nessa situação, se quisermos saber a porcentagem de *tablets* que custam até R$ 1.500,00, basta encontrarmos, na coluna "frequência relativa acumulada", a porcentagem relativa ao valor R$ 1.500,00; no caso, 50%.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R1. Estas são as notas de Matemática de 20 alunos da classe de Ana:

7,0 5,0 9,0 5,0 8,0 6,0 6,0 7,0 7,0 7,0
5,0 8,0 9,0 10,0 8,0 5,0 5,0 5,0 6,0 6,0

Usando uma planilha eletrônica, construir uma tabela de distribuição de frequências com frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas. Em seguida, com base na tabela, responder às questões.

a) Quantos alunos obtiveram nota 6,0, que é a nota mínima de aprovação?

b) Quantos alunos obtiveram nota menor ou igual a 7,0?

c) Que porcentagem de alunos obtiveram nota menor que 8,0?

d) Qual foi a porcentagem de alunos reprovados em Matemática?

▸ Resolução Se possível, pedir aos alunos que reproduzam os procedimentos a seguir na planilha eletrônica (em sala de aula, na sala de informática se houver ou mesmo em casa).

Para construir a tabela pedida em uma planilha eletrônica, inicialmente preenchemos uma coluna com as notas e uma com as respectivas frequências absolutas, de acordo com os dados apresentados.

C2 | *Fórmula* | =B2/$B$8

	A	B	C	D	E
1	**Nota**	**Frequência absoluta (f_i)**	**Frequência relativa (f_r)**	**Frequência absoluta acumulada (F_i)**	**Frequência relativa acumulada (F_r)**
2	5,0	6	30%		
3	6,0	4	20%		
4	7,0	4	20%		
5	8,0	3	15%		
6	9,0	2	10%		
7	10,0	1	5%		
8	**Total**	20	100%		

Digitamos na célula C2 a fórmula:
=B2/$B$8
(Calcula a razão entre os valores das células B2 e B8.)
O $ é empregado na fórmula para fixar a coluna B e a linha 8. Assim, quando a fórmula da célula C2 for copiada para outras células, a célula B8 ficará fixa na fórmula.
Em seguida, formatamos a célula para mostrar o valor em porcentagem.
Para preencher os outros valores da coluna de frequências relativas, selecionamos a célula C2 e arrastamos a seleção até a célula C7. Copiamos, desse modo, a fórmula para as células C3 a C7, substituindo B2 por B3, B4, B5, B6 e B7, respectivamente.

Na célula C8, digitamos a fórmula:
=SOMA(C2:C7)
(Calcula a soma dos valores das células C2 a C7.)

Preenchemos, agora, as colunas das frequências acumuladas.

E3 | *Fórmula* | =C3+E2

	A	B	C	D	E
1	**Nota**	**Frequência absoluta (f_i)**	**Frequência relativa (f_r)**	**Frequência absoluta acumulada (F_i)**	**Frequência relativa acumulada (F_r)**
2	5,0	6	30%	6	30%
3	6,0	4	20%	10	50%
4	7,0	4	20%	14	70%
5	8,0	3	15%	17	85%
6	9,0	2	10%	19	95%
7	10,0	1	5%	20	100%
8	**Total**	20	100%		

Digitamos na célula E2 a fórmula:
=C2
(Copia o valor da célula C2.)
Na célula E3, digitamos:
=C3+E2
(Adiciona o valor da célula C3 com o valor de E2.)
Selecionamos a célula E3 e arrastamos a seleção até a célula E7. Dessa forma, cada célula terá o valor da célula anterior adicionado ao valor correspondente na coluna C. Preenchemos, assim, a coluna das frequências relativas acumuladas.

Digitamos na célula D2 a fórmula: =B2
(Copia o valor da célula B2.)
Na célula D3, digitamos: =B3+D2
(Adiciona o valor da célula B3 com o valor de D2.)
Selecionamos a célula D3 e arrastamos a seleção até a célula D7. Dessa forma, cada célula terá o valor da célula anterior adicionado ao valor correspondente na coluna B. Preenchemos, assim, a coluna das frequências absolutas acumuladas.

Agora, analisando a tabela, podemos responder às questões.

a) 4 alunos (frequência absoluta da nota 6,0).

b) 14 alunos (frequência absoluta acumulada até a nota 7,0).

c) 70% dos alunos (frequência relativa acumulada até a nota 7,0).

d) 30% dos alunos (frequência relativa acumulada até a nota 5,0).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Os conceitos dos alunos de certa turma de um curso de pós-graduação em Administração de empresas foram os seguintes:

C	A	B	C	A	B	C	A
A	E	D	C	A	C	E	B
B	B	D	E	C	D	B	A
C	E	C	B	D	B	C	C

a) Construa uma tabela com todas as frequências. Ver resolução no Guia do professor.

b) Quantos alunos obtiveram conceito A? 6 alunos

c) Sabendo que os conceitos de aprovação são A, B ou C, quantos alunos estão reprovados? 8 alunos

d) Qual é a porcentagem de alunos que obtiveram conceito C? 31,25%

e) Qual é a porcentagem de alunos que obtiveram conceitos D ou E? 25%

f) Qual é a porcentagem de alunos que obtiveram conceitos A ou B? 43,75%

2. Observe as distâncias diárias percorridas, em quilômetro, pelos taxistas de uma empresa.

90	87	356	70	49	322
317	250	200	236	274	305
360	480	400	150	426	460
278	260	320	346	358	332
357	410	298	314	440	110

Os dados podem ser agrupados por meio de intervalos. Copie e complete a tabela com a frequência correspondente.

Distância (km)	Frequência absoluta (f_i)
[0, 100[	4
[100, 200[	2
[200, 300[	7
[300, 400[	11
[400, 500[	6

MODELO

- Como esse procedimento facilita o estudo da variável? O uso desse procedimento facilita o estudo da variável quando temos de analisar um grande número de valores diferentes, já que, se fizéssemos uma tabela com os valores não agrupados, teríamos uma tabela com 30 dados, cada um com frequência 1. Assim, agrupá-los em intervalos permite uma análise mais imediata da distribuição de frequência da variável.

JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

Grande parte do ruído na cidade de São Paulo provém de seu trânsito intenso. O limite de ruído diurno aconselhado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) em áreas residenciais e comerciais é de 65 dB. O nível de ruído de um tráfego pesado está acima de 70 dB.
(Trânsito no Viaduto Glicério, São Paulo (SP), 2018.)

Esse texto permite uma discussão sobre a poluição sonora, principalmente em grandes centros urbanos, explorando o tema contemporâneo sobre **saúde**.

1.2 Distribuição de frequências para dados agrupados em intervalos

Diariamente, estamos expostos a ruídos de diversas intensidades. Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), a poluição sonora é um dos tipos de poluição mais graves, perdendo apenas para a da água e a do ar. Seus efeitos sobre os seres humanos vão desde uma simples perturbação até alterações da saúde, como a perda parcial ou total da audição, estresse, distúrbios do sono, distúrbios digestivos, alergias e problemas cardíacos.

A seguir, estão registrados os níveis de ruído, em decibel (dB), de algumas áreas residenciais de uma cidade.

73,94	71,52	66,84	64,17	66,16	65,70	64,78	65,81
63,14	62,57	61,89	60,96	60,32	60,14	56,67	55,89
71,46	70,08	64,43	63,29	66,01	65,08	64,71	64,15
62,69	61,92	61,49	60,74	60,22	59,36	56,03	55,77

Como há muitos dados distintos, uma distribuição de frequências como as anteriores pouco facilitaria a organização desses dados. Nesse caso, podemos agrupar os valores em um número de **intervalos** (ou **classes**).

Uma vez que o maior valor coletado é 73,94 e o menor é 55,77, calculando a diferença entre eles, obtemos a **amplitude total** de 18,17 decibéis (73,94 − 55,77).

Para construir a tabela, podemos dividir a amplitude total, por exemplo, por 4 (quatro intervalos). A **amplitude do intervalo** (ou da classe), se for número inteiro, é o quociente obtido. Quando o resultado não for inteiro podemos arredondá-lo para o menor inteiro maior que o quociente.

A escolha do número de classes e de sua amplitude dependerá da natureza dos dados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A atividade do boxe **Explore** permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT302** que faz parte da competência específica **3**, ao se comunicar resultados da pesquisa utilizando gráficos e tabelas. Essa competência se articula com a competência geral **4** no que diz respeito à utilização de diferentes linguagens para partilhar informações.

Na situação anterior, a distribuição dos valores em quatro classes possibilitará uma análise adequada. Veja:

$18{,}17 : 4 = 4{,}5425$

Arredondando 4,5425 para 5, podemos agrupar os valores em classes de amplitude de 5 decibéis. Assim, o primeiro intervalo começaria em 55 decibéis, indo até 60 decibéis (55 + 5).

Para representar esse intervalo, podemos usar duas notações: $55 \vdash 60$ ou $[55, 60[$, que indicam intervalos fechados à esquerda e abertos à direita. Assim, $55 \vdash 60$ significa que são medidas entre 55 e 60 decibéis, com o extremo inferior 55 pertencendo ao intervalo e o extremo superior 60 não pertencendo a ele.

Ruído (em decibel)	f_i	F_i	f_r	F_r
$55 \vdash 60$	5	5	15,625%	15,625%
$60 \vdash 65$	17	22	53,125%	68,750%
$65 \vdash 70$	6	28	18,750%	87,500%
$70 \vdash 75$	4	32	12,500%	100%
Total	32	—	100%	—

Com base nos dados da tabela, podemos concluir, por exemplo, que:

- 4 áreas residenciais da cidade apresentam nível de ruído maior ou igual a 70 e menor que 75 decibéis — esse nível de ruído equivale ao ruído de um tráfego pesado;
- 18,75% das áreas estudadas apresentam ruído maior ou igual a 65 e menor que 70 decibéis;
- 68,75% das áreas estudadas apresentam ruído menor que 65 decibéis.

Reflita

Se escolhêssemos uma amplitude maior para os intervalos, teríamos uma desvantagem. Qual?

Quanto maior a amplitude, menor a quantidade de intervalos, o que implica comprometimento da análise dos dados por perda de informações.

A frequência acumulada até 65 dB é 22. Então, em 22 regiões os níveis dos ruídos estão abaixo do limite recomendado pela ABNT.

Reflita

De acordo com a tabela ao lado, quantas são as áreas que apresentam ruído abaixo do limite recomendado pela ABNT?

Explore

Reúna-se em grupos de quatro alunos e pesquisem mais sobre a poluição sonora e os danos que causa à saúde. Vejam qual é o nível de ruído, em decibel, em ambientes como escritórios, escolas, avenidas, obras da construção civil, *shows*, eventos esportivos etc. Elaborem cartazes utilizando fotos, gráficos e tabelas, indicando resultados e modos de prevenção e redução da poluição sonora. Em seguida, façam uma exposição na escola.

Exercício resolvido

R2. Com a finalidade de conscientizar os usuários sobre a economia de água, uma academia instalou sensores nos chuveiros para registrar o tempo de banho dos frequentadores. O tempo, em minuto, que 30 usuários gastaram no banho em determinado dia foi:

5 15 14 5 10 12 10 6 3 2 8 8 8 5 10
12 13 15 12 5 7 14 5 6 4 3 5 9 12 14

Construir uma tabela de distribuição de frequências com cinco intervalos e resolver os itens a seguir.

a) Determinar a porcentagem de usuários que gastaram 5 minutos ou mais no banho.

b) Considerando que a cada minuto de banho gastam-se aproximadamente 9 litros de água, quantos litros de água foram gastos com banho nessa academia nesse dia?

c) Se todos os usuários tivessem tomado banhos de 5 minutos, quantos litros de água teriam sido economizados nesse dia?

d) Quantas pessoas, aproximadamente, poderiam ser abastecidas, nesse dia, com a água economizada, sabendo que uma pessoa precisa de 110 litros de água por dia?

B-D-S PIOTR MARCINSKI/SHUTTERSTOCK

Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), cada pessoa necessita de 110 litros de água por dia. Se uma pessoa tomar banho de ducha por 15 minutos, gastará aproximadamente 135 litros de água. Um banho de 5 minutos é o suficiente para higienizar.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

Adotando que cada pessoa necessita de 110 litros de água por dia, quanto de água seria necessário para abastecer por 30 dias:
- a sua residência?
- todas as pessoas de seu município?

resposta pessoal
Essa atividade favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT201** da BNCC (competência específica **2**), que se articula também com a competência específica **1** já que faz uso de procedimentos matemáticos para interpretar uma situação do cotidiano ao se avaliar a quantidade de água necessária para abastecimento de uma casa e de um município, realizando cálculos de volumes de água voltados à sua realidade.
Orientar os alunos a pesquisar a população atual do município em que moram em uma fonte confiável. Uma referência para pesquisa é o *site* do IBGE, que possui a população estimada de todos os municípios brasileiros.
Se achar conveniente, pedir aos alunos que tragam contas de água de suas residências e comparem o valor calculado com o volume real de água gasto em um mês (a maioria das contas fornece o valor em metro cúbico; se esse for o caso, os alunos terão que fazer a conversão).
Aproveitar a oportunidade para conversar com os alunos sobre a importância do consumo consciente de água, refletindo sobre situações de abastecimento, nível de rios e de represas, favorecendo a exploração do tema contemporâneo **educação ambiental** e o desenvolvimento da competência geral **7** da BNCC.

▸ **Resolução**

Para facilitar, vamos usar amplitude de classe igual a 3 minutos [(15 − 2) : 5 = 2,6].

Tempo (em minuto)	f_i	F_i	f_r	F_r
2 ⊢ 5	4	4	≃ 13,3%	≃ 13,3%
5 ⊢ 8	9	13	30,0%	≃ 43,3%
8 ⊢ 11	7	20	≃ 23,3%	≃ 66,6%
11 ⊢ 14	5	25	≃ 16,7%	≃ 83,3%
14 ⊢ 17	5	30	≃ 16,7%	100%
Total	30	—	100%	—

a) A porcentagem dos que gastaram 5 minutos ou mais no banho é aproximadamente 86,7% (100% − 13,3%).

b) Para determinar o total de litros de água gastos, inicialmente devemos adicionar todos os tempos registrados:

5 + 15 + 14 + 5 + 10 + 12 + 10 + 6 + 3 + 2 + 8 + 8 + 8 + 5 + + 10 + 12 + 13 + 15 + 12 + 5 + 7 + 14 + 5 + 6 + 4 + 3 + 5 + + 9 + 12 + 14 = 257

Em seguida, multiplicamos o tempo total, em minuto, por 9 litros: 257 · 9 = 2.313

Assim, foram gastos 2.313 litros de água com banho nessa academia nesse dia.

c) Se todos os usuários tivessem levado apenas 5 minutos no banho, teríamos um tempo total de:

30 · 5 = 150

Multiplicando esse tempo por 9 litros:

150 · 9 = 1.350

Em seguida, calculamos a diferença entre os valores:

2.313 − 1.350 = 963

Logo, teriam sido economizados 963 litros de água nesse dia.

d) Dividindo os 963 litros por 110, temos:

963 : 110 ≃ 8,75

Portanto, com 963 litros de água, seria possível abastecer, nesse dia, aproximadamente 8 pessoas.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

3. Observe o valor das diárias dos quartos do Hotel Luxo. Ver tabela no Guia do professor.

Valor da diária no Hotel Luxo	
Diária (em real)	**Quantidade de quartos**
[100, 130[	73
[130, 160[	48
[160, 190[	40
[190, 220[	24
[220, 250[	15
Total	200

Fonte: Hotel Luxo.

Copie a tabela completando-a com as frequências: absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. Em seguida, responda às questões.

a) Qual é o extremo inferior da 1ª classe? R$ 100,00

b) Qual é o intervalo de valores de diárias que corresponde ao maior número de quartos?

c) Qual é a porcentagem de quartos cujas diárias são inferiores a R$ 160,00? 60,5%

d) Quantos quartos correspondem a diárias inferiores a R$ 190,00? 161 quartos

e) Quantos quartos correspondem a diárias a partir de R$ 190,00? 39 quartos

3. b) de R$ 100,00 a R$ 130,00

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Chamar a atenção dos alunos para o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*. Observar que a amplitude dos intervalos dados permite preencher os demais intervalos da tabela. Notar que a frequência acumulada no intervalo [6, 8[é igual a 8 e no intervalo [4, 6[é 4, pois permite calcular a frequência absoluta do primeiro intervalo, no caso 4, e deduzir que a frequência relativa nos dois primeiros intervalos é a mesma, ou seja, 8%.

4. Um grupo de 50 analistas financeiros efetuou uma previsão, por ganho de ações, em real, de uma empresa no próximo ano. Os resultados obtidos estão apresentados na tabela de distribuição de frequências a seguir.

Ganho por ação (em real)	Número de analistas (f_i)	F_i	f_r	F_r
		4		8%
		8		
[8, 10[			22%	
[10, 12[	8	27		
		37		74%
			16%	
	5			100%

MODELO

- Copie a tabela de frequências em seu caderno e complete-a. Ver resolução no Guia do professor.

5. O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe) monitora constantemente os focos de queimadas no Brasil. Os dados a seguir indicam o número de focos de queimadas nas Unidades Federativas do Brasil (26 estados e Distrito Federal) durante todo o ano de 2018.

948	9.504	34.655	133.658
2.222	10.462	41.077	139.202
2.362	11.119	51.139	141.146
3.050	13.021	56.850	201.924
5.212	22.671	63.519	287.328
5.471	30.955	76.264	294.398
9.375	31.089	127.979	

Dados obtidos em: <http://queimadas.dgi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas>. Acesso em: 24 abr. 2020.

a) Organize os dados em uma tabela de distribuição de frequências com intervalos de modo que o primeiro intervalo seja [0, 50.000[. Elabore a tabela, se possível em uma planilha eletrônica, com as frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. Ver resolução no Guia do professor.

b) Quantas Unidades Federativas teve menos de 100.000 focos de queimadas? 20 Unidades Federativas

c) Que porcentagem das Unidades Federativas teve 200.000 focos ou mais? aproximadamente 11,1%

6. Veja as contribuições fiscais, em real, de 40 pessoas sorteadas ao acaso durante um ano.

200	150	780	2.132	1.976
208	624	2.236	4.404	5.132
832	676	3.172	3.208	2.132
988	3.926	1.196	2.132	3.728
728	2.948	1.248	2.704	5.928
988	1.710	1.716	1.404	4.108
468	2.392	2.028	4.472	3.174
624	3.959	4.040	1.092	1.040

Ver resolução no Guia do professor.

a) Organize os dados em ordem crescente.

b) Agrupe os dados em uma tabela de distribuição de frequências com intervalos. Use uma amplitude de intervalo conveniente.

c) Qual é o intervalo de contribuições fiscais de maior ocorrência?

7. Escolha uma variável quantitativa e colete dados de todos os alunos de sua turma para essa variável. Em seguida, se possível, usando uma planilha eletrônica, construa uma tabela de distribuição de frequências (com as frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada) para organizar os dados obtidos. Verifique a conveniência ou não de agrupar os dados em intervalos. resposta pessoal

6. b) Ver resolução no Guia do professor. É importante salientar que a escolha da amplitude da classe depende de bom senso. Se os intervalos forem muito pequenos, haverá um número muito grande deles, e isso poderá significar que os dados não foram resumidos; se forem muito grandes, poderão indicar que houve excessiva perda de informações.

2 Histograma e diagrama de ramo e folhas

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT407** da BNCC ao explorar a construção, interpretação e análise de histogramas e diagramas de ramo e folhas e verificar situações mais adequadas para a utilização de cada representação.

Vimos que quando há muitos valores distintos para uma variável numérica, convém organizar os dados em intervalos (ou classes) com amplitude conveniente. Mas como representar graficamente os dados em situações como essa? Vamos estudar dois tipos de representação que podem ser usadas nesse caso: o histograma e o diagrama de ramo e folhas.

Observe o salário, em real, de 35 funcionários da empresa RBA.

998	2.000	9.600	3.200	998	8.500	1.300
6.700	1.790	2.700	7.000	3.400	4.600	1.140
4.500	1.500	1.200	6.800	8.000	1.250	3.600
1.780	2.500	4.500	5.500	4.600	3.600	1.500
1.000	6.900	1.900	1.000	6.250	8.030	5.000

Podemos organizar esses dados agrupando-os em intervalos e, depois, construir um gráfico chamado histograma. O **histograma** é um gráfico formado por retângulos justapostos, cujas bases são construídas sobre o eixo das abscissas e correspondem às classes, e as alturas são proporcionais à frequência da respectiva classe.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

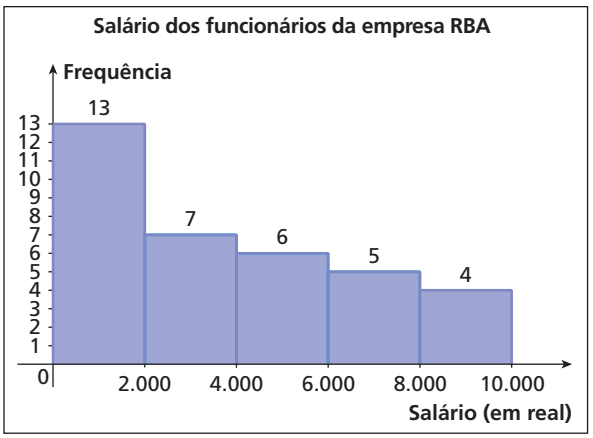
MODERNA

Observe como ficaria a distribuição de frequências e o histograma considerando intervalos de 2.000 reais, começando em zero.

Reflita

O que podemos observar comparando a área de cada retângulo e a frequência absoluta associada a ele?

As áreas dos retângulos são proporcionais às frequências absolutas (f_i) das classes correspondentes.
Admitimos que, para a construção do histograma, as classes têm a mesma amplitude; por isso, as áreas são proporcionais às alturas dos retângulos, ou seja, às frequências.



Fonte: Empresa RBA.

Salário dos funcionários da empresa RBA	
Salário (em real)	Frequência (f_i)
0 ⊢ 2.000	13
2.000 ⊢ 4.000	7
4.000 ⊢ 6.000	6
6.000 ⊢ 8.000	5
8.000 ⊢ 10.000	4

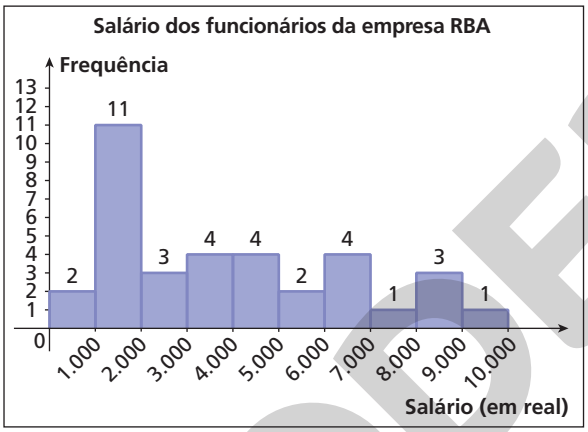
Fonte: Empresa RBA.

Observe, agora, como ficaria a distribuição de frequências e o histograma para representar os mesmos dados considerando intervalos de 1.000 reais, começando em zero.

Reflita

Qual dos histogramas seria melhor caso precisássemos saber a quantidade de pessoas que ganha até R$ 5.000?

O segundo histograma.



Fonte: Empresa RBA.

Salário dos funcionários da empresa RBA	
Salário (em real)	Frequência (f_i)
0 ⊢ 1.000	2
1.000 ⊢ 2.000	11
2.000 ⊢ 3.000	3
3.000 ⊢ 4.000	4
4.000 ⊢ 5.000	4
5.000 ⊢ 6.000	2
6.000 ⊢ 7.000	4
7.000 ⊢ 8.000	1
8.000 ⊢ 9.000	3
9.000 ⊢ 10.000	1

Fonte: Empresa RBA.

Outra maneira de representar esse conjunto de dados é construir um **diagrama de ramo e folhas**. Uma vantagem desse diagrama sobre o histograma é que não perdemos (ou perdemos pouca) informação sobre os dados em si.

A ideia básica do diagrama de ramo e folhas é dividir cada observação em duas partes: a primeira (o ramo) é colocada à esquerda de uma linha vertical, a segunda (a folha) é colocada à direita. A escolha da ordem de grandeza dos valores do ramo e das folhas dependerá da natureza dos dados e deve estar explicitada no diagrama.

Observe como poderíamos construir um diagrama de ramo e folhas para os salários dos funcionários da empresa RBA com os ramos representando unidades de milhar e as folhas representando unidades.

Salário dos funcionários da empresa RBA

0	998	998									
1	000	000	140	200	250	300	500	500	780	790	900
2	000	500	700								
3	200	400	600	600							
4	500	500	600	600							
5	000	500									
6	250	700	800	900							
7	000										
8	000	030	500								
9	600										

Legenda:
3 | 600 = 3.600 reais

Fonte: Empresa RBA.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Vamos acompanhar mais alguns exemplos.

a) Observe a altura, em centímetro, dos alunos da turma de Ana.

156	145	163	165	157	171	167
172	158	165	170	166	162	169
160	167	170	162	164	158	176
168	190	169	175	169	175	160

Uma atividade interessante nesse momento seria coletar os dados referentes à altura de todos os alunos da turma, escrever os valores na lousa e pedir aos alunos que construam um diagrama de ramo e folhas para o conjunto de dados.

Um possível diagrama de ramo e folhas para representar esse conjunto de dados seria:

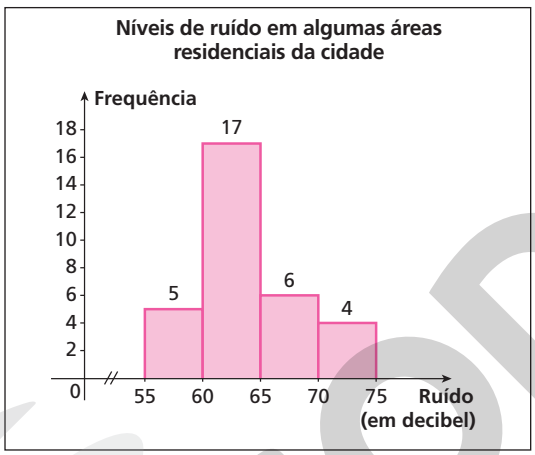
Altura dos alunos

14	5
15	6 7 8 8
16	0 0 2 2 3 4 5 5 6 7 7 8 9 9 9
17	0 0 1 2 5 5 6
18	
19	0

Legenda:
14 | 5 = 145 cm

Dados obtidos por Ana.

b) Consideremos a situação e a tabela apresentadas nas páginas 46 e 47. Poderíamos construir o seguinte histograma com os níveis de ruído registrados:



Fonte: Prefeitura da cidade.

Observação

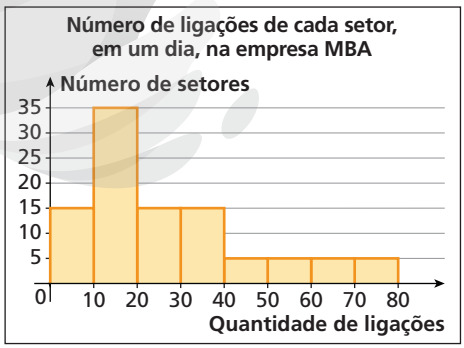
Usamos o símbolo ⫽ para indicar que o intervalo de 0 a 55 não é proporcional aos demais intervalos marcados no eixo horizontal.

Exercícios propostos

Ver resolução dos exercícios **8**, **9**, **10** e **11** no Guia do professor.

Registre as respostas em seu caderno.

8. A empresa MBA, visando saber o número de ramais telefônicos que precisava disponibilizar, registrou em um dia a quantidade de ligações feitas em cada setor. Os dados geraram o histograma a seguir.



Fonte: Empresa MBA.

Com base no histograma, construa uma tabela com as frequências: absoluta, relativa, absoluta acumulada e relativa acumulada.

9. Na fábrica de lâmpadas Ilumine foi feito um teste com uma amostra de 150 lâmpadas. Veja os resultados na tabela abaixo.

Duração das lâmpadas	
Duração (em hora)	Número de lâmpadas (f_i)
0 ⊢ 1.000	5
1.000 ⊢ 2.000	10
2.000 ⊢ 3.000	42
3.000 ⊢ 4.000	75
4.000 ⊢ 5.000	18

Fonte: Fábrica de lâmpadas Ilumine.

Com as informações da tabela, construa um histograma.

Somente com essas informações, seria possível construir um diagrama de ramo e folhas? Justifique.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

MODERNA

10. Para investigar o tempo que os alunos da turma levam para chegar à escola, cada um dos alunos do 1º ano B da escola ABC cronometrou o tempo que levou para ir de sua casa até a escola em determinado dia, arredondado o tempo para minuto. Os valores foram organizados por eles no diagrama a seguir.

Tempo de deslocamento dos alunos do 1º ano B de casa até a escola ABC

0	8
1	0 2 5 7 8
2	2 2 3 3 5 6 7 8 8 9
3	0 1 3 4 5 6 6 7 7 8 9
4	2 4
5	4 7 9
6	
7	
8	4

Legenda: 1 | 2 = 12 min

Dados obtidos pelos alunos do 1º ano B.

a) Quantos alunos há nessa turma? 33 alunos

b) Construa um histograma com os dados do diagrama. Escolha a amplitude que julgar conveniente. Ver resolução no Guia do professor.

c) Observando as representações gráficas, os tempos de deslocamento estão mais concentrados entre quais valores? Ver resolução no Guia do professor.

d) Nesse conjunto de dados, há algum valor bem maior que os demais? Se sim, qual? sim; 84 minutos

11. Observe as representações a seguir, que se referem ao mesmo conjunto de dados: o gasto, em real, com energia elétrica dos 52 apartamentos do Condomínio Morada em dezembro de 2020. Ver resolução no Guia do professor.

• Representação 1

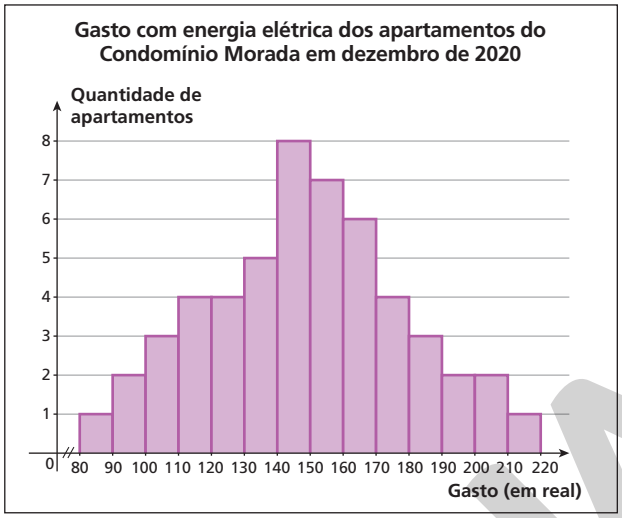
Gasto com energia elétrica dos apartamentos do Condomínio Morada em dezembro de 2020

8	2
9	0 5
10	2 8 9
11	1 4 6 9
12	3 7 8 9
13	0 5 7 9 9
14	1 4 7 7 8 9 9 9
15	0 1 3 4 5 7 8
16	3 5 6 7 7 8
17	1 2 5 8
18	3 5 7
19	1 7
20	2 6
21	3

Legenda: 10 | 2 = 102 reais

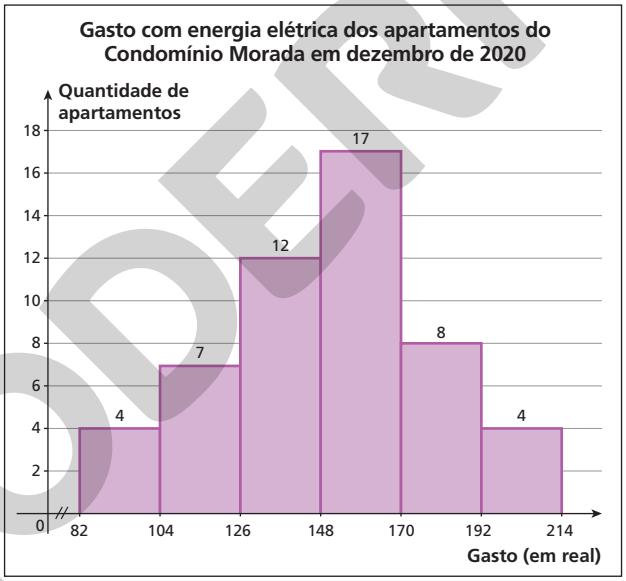
Fonte: Condomínio Morada.

• Representação 2



Fonte: Condomínio Morada.

• Representação 3



Fonte: Condomínio Morada.

Agora, responda às questões.

a) Em qual das representações há menos perda de informação sobre os dados?

b) Qual das representações resumiu mais os dados, porém apresentou maior perda de informações dos dados em si?

c) Quantos apartamentos desse condomínio gastaram menos de R$ 150,00 com energia elétrica nesse mês? Como você determinou esse valor?

d) Algum dos apartamentos gastou mais de R$ 200,00 com energia elétrica? É possível responder a essa questão somente observando a Representação 3? Por quê?

e) Algum dos apartamentos gastou exatamente R$ 130,00 com energia elétrica? Qual representação você consultou para responder a essa questão?

MODERNA

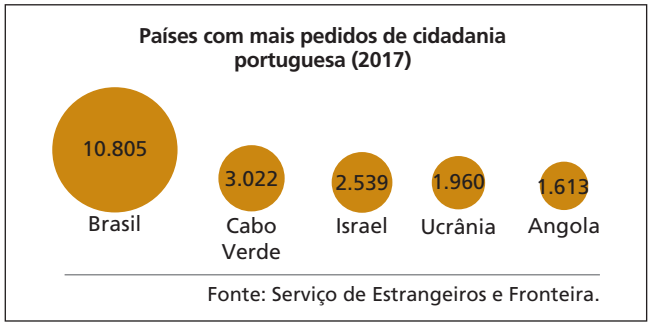
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esse tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT407** da BNCC, já que propõe várias situações que permitem a análise de diversos tipos de gráficos divulgados por diferentes meios de comunicação.

3 Outras representações gráficas

Neste tópico, vamos acompanhar exemplos de leitura e interpretação de gráficos. Alguns desses gráficos são de tipos diferentes dos que já estudamos, mas podem ser lidos com base nos conhecimentos que temos sobre a análise de elementos como título, eixos, legendas, valores expressos, escalas etc.

a) Observe o gráfico a seguir, reproduzido de um jornal.



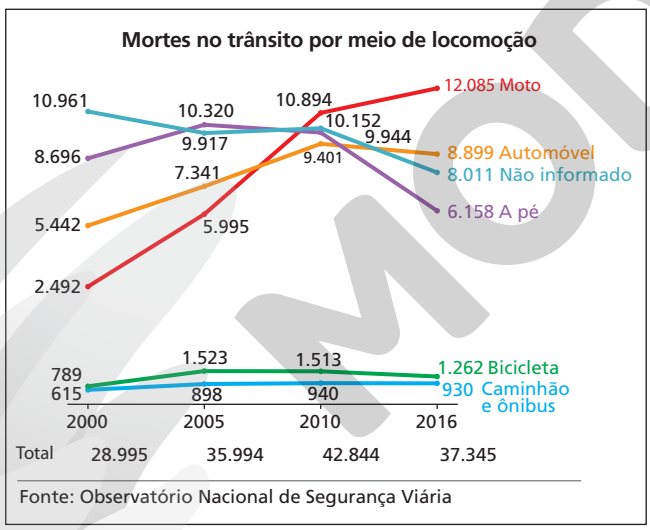
Fonte: *O Globo*, Rio de Janeiro, 28 jun. 2018, p. 25.

Esse gráfico apresenta diversos círculos, cujas áreas são proporcionais aos valores que cada um representa.

Observando o gráfico podemos concluir, por exemplo, que o Brasil foi o país que mais solicitou pedidos de cidadania portuguesa em 2017, com 10.805 pedidos, seguido de Cabo Verde, com 3.022 pedidos, Israel, com 2.539 pedidos, Ucrânia, com 1.960 pedidos, e Angola, com 1.613 pedidos.

b) O gráfico abaixo apresenta dados sobre o número de mortes no trânsito, organizados por meio de locomoção.

No mundo, 1,25 milhão de pessoas morrem anualmente em razão de acidentes de trânsito; em 2016, foram aproximadamente 37,3 mil mortes no Brasil.



Fonte: *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 15 jun. 2018, p. 4.

Esse gráfico possibilita uma análise da evolução no número de mortes considerando cada meio de locomoção, além de possibilitar uma comparação entre esses meios.

Com base no gráfico é possível chegar a algumas conclusões, como:

- houve um aumento considerável no número de mortes por moto no período, passando de 2.492 em 2000 a 12.085 em 2016;
- houve uma queda no número total de mortes no trânsito se compararmos os dados de 2010 e de 2016;
- entre as mortes com meio de locomoção informado, o número de mortes de pedestres foi o único que caiu de 2000 a 2016, passando de 8.696 a 6.158;
- em 2016, o automóvel era o segundo meio de locomoção em número de mortes, superado apenas pelo número de mortes com motos.

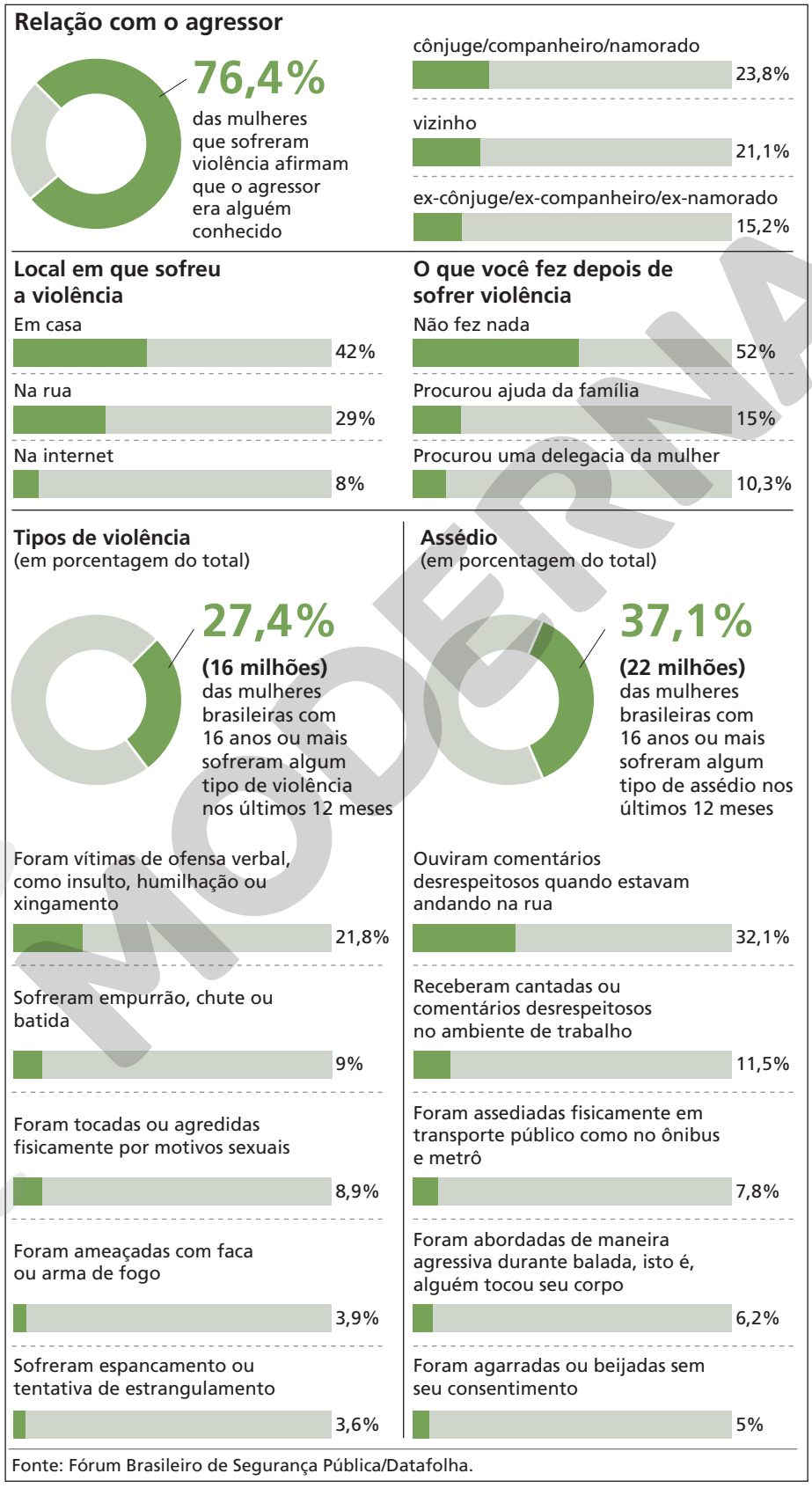
A maioria das situações apresentadas a seguir mostra e analisa situações de contextos econômicos e sociais, que permitem aos alunos um trabalho de posicionamento crítico em relação a eles, possibilitando a análise dos dados fornecidos nas situações, elaboração de hipóteses e argumentação sobre as questões apresentadas. É possível, também, trabalhar com esses e outros contextos em parceria com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, já que as situações favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS103**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

c) Observe os gráficos a seguir, publicados em um jornal, com dados da pesquisa *Visível e Invisível: a vitimização de mulheres no Brasil*, realizada em 4 e 5 de fevereiro de 2019, a respeito de violências vividas pelas entrevistadas nos 12 meses anteriores à pesquisa.

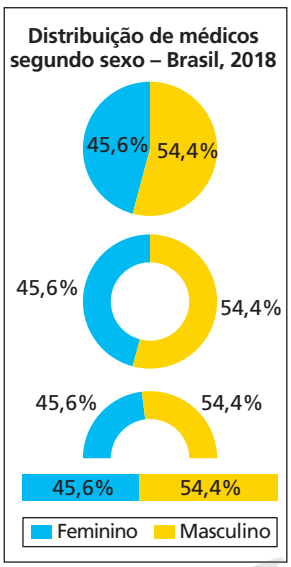


ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 26 fev. 2019, p. A14.

Observação

Vimos, no capítulo anterior, que o gráfico de setores é recomendado quando se deseja comparar o valor de cada categoria com o total. Alguns gráficos também possibilitam essa comparação, apesar de não usarem um círculo completo para representar o todo. Veja alguns gráficos que transmitem a mesma informação:



Dados obtidos em: <http://www.epsjv.fiocruz.br/sites/default/files/files/DemografiaMedica2018%20(3).pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

ACERVO DA PREFEITURA DE SÃO PAULO

Cartaz de Divulgação do Disque 180, Central de Atendimento à mulher vítima de violência. A Central de Atendimento à Mulher "Ligue 180" funciona 24 horas por dia, de segunda a domingo, inclusive feriados. A ligação é gratuita e o atendimento é de âmbito nacional.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Aproveitar a oportunidade para conversar com os alunos sobre esse assunto tão delicado que é a violência contra a mulher. Se possível, falar sobre a Lei Maria da Penha e outros instrumentos de proteção à mulher. O *site* <http://www.institutomariadapenha.org.br/> (acesso em: 24 abr. 2020) fornece diversas informações que podem ser exploradas, como quem foi Maria da Penha, os tipos de violência (física, psicológica, moral, sexual e patrimonial), como denunciar etc.

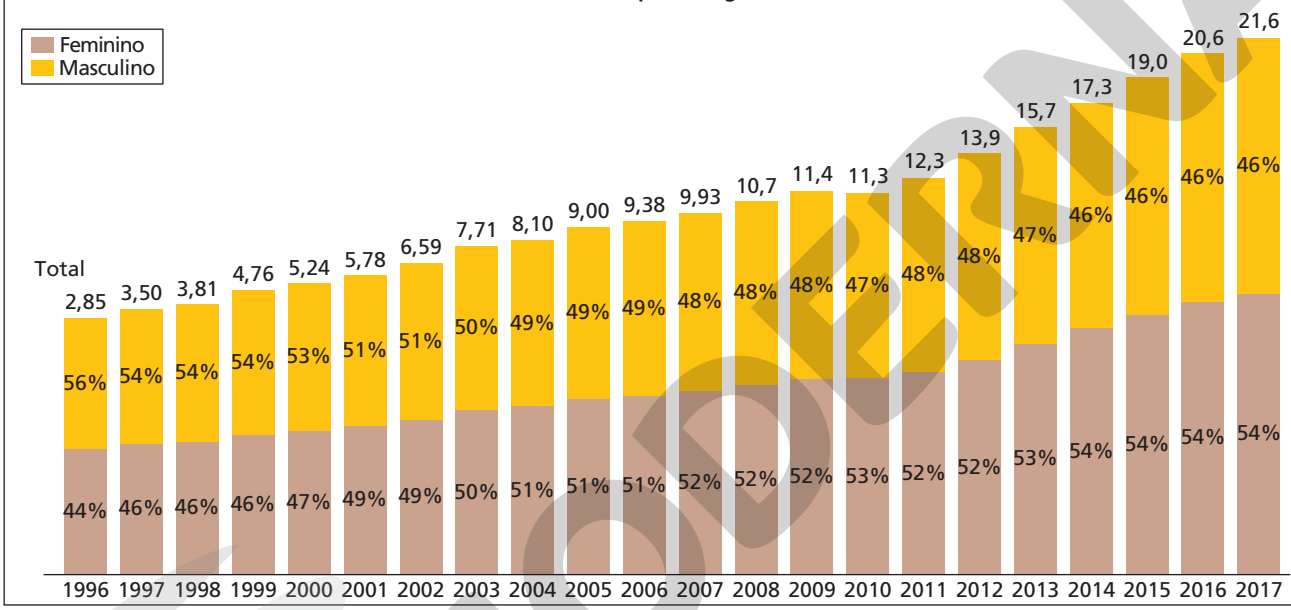
A partir desse conjunto de gráficos, podemos concluir, por exemplo, que:

- a maioria das mulheres que sofreram violência (52%) não fez nada a respeito (apenas 10,3% das vítimas procurou uma delegacia da mulher);
- mais de $\frac{3}{4}$ dos agressores das mulheres são pessoas conhecidas;
- 42% das mulheres agredidas sofreram a violência em casa;
- 37,1% das mulheres foram assediadas e 27,4% sofreram algum tipo de violência nos 12 meses que antecederam a pesquisa;
- 7,8% das mulheres foram assediadas fisicamente no transporte público;
- 21,8% das mulheres foram vítimas de ofensa verbal.

Além do favorecimento da habilidade **EM13CHS103** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, como já mencionado, a situação apresentada no item **c**, articula-se também com as competências gerais **7** e **9** no que diz respeito à possibilidade de defesa de ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, além de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos.

d) Observe o gráfico a seguir, publicado em uma revista de divulgação científica.

Títulos de doutorado por sexo do titulado – Brasil – 1996-2017
(em milhares e porcentagem)



Fonte: Revista *Pesquisa Fapesp*, São Paulo, ano 20, n. 277, p. 11, mar. 2019.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Esse gráfico apresenta, para cada ano (de 1996 a 2017), duas informações: a quantidade total de títulos de doutorado obtidos no Brasil e a porcentagem de títulos por sexo. Para cada ano, há uma barra de altura total proporcional ao número absoluto de títulos, dividida em duas partes de acordo com a porcentagem que representa cada um dos sexos entre o total de títulos daquele ano. Assim, é possível perceber, por exemplo, que, embora o percentual de títulos de doutorado de público feminino tenha se mantido constante de 2014 a 2017 (54%), o número absoluto de títulos desse público aumentou a cada ano (pois o número total de títulos aumentou).

Comentar com os alunos que não é possível afirmar que as quantidades de títulos são exatamente as dadas no gráfico. Por exemplo, o gráfico indica que, em 1996, foram concedidos 2,85 milhares de títulos, mas isto não quer dizer que foram concedidos exatamente 2.850 títulos, já que, claramente, o número de milhares de títulos foi arredondado para a segunda casa decimal.

Com base nesse gráfico, é possível concluir, por exemplo, que:

- em 1996, foram concedidos cerca de 2.850 títulos de doutorado, dos quais 56% (ou cerca de 1.596) foram concedidos a homens e 44% (ou cerca de 1.254) foram concedidos a mulheres;
- de 2010 a 2017, o número de títulos de doutorado cresceu a cada ano;
- as mulheres são maioria entre os titulados desde 2004;
- o número de títulos concedidos a mulheres, entre 2014 e 2017, foi:

  2014: cerca de 9.342 títulos (54% de 17.300 = 9.342)

  2015: cerca de 10.260 títulos (54% de 19.000 = 10.260)

  2016: cerca de 11.124 títulos (54% de 20.600 = 11.124)

  2017: cerca de 11.664 títulos (54% de 21.600 = 11.664)

Reflita resposta pessoal

Que outras conclusões podem ser tiradas do gráfico? Escreva em seu caderno outras três conclusões.

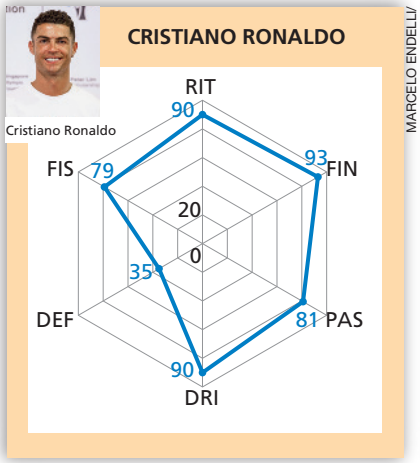
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se achar conveniente, perguntar aos alunos se eles gostam de *videogame*. Se sim, questionar sobre os jogos de que eles gostam, se conhecem jogos que usam gráficos, como funcionam e para que os gráficos são usados etc.

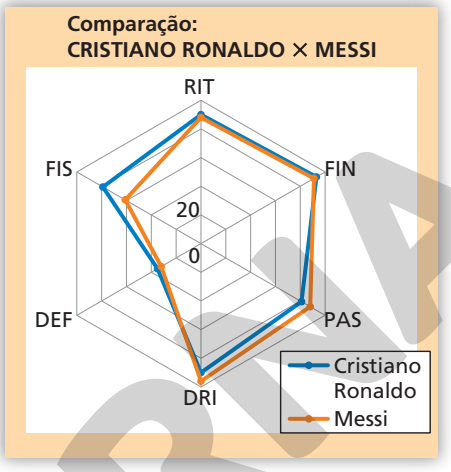
e) Certo jogo de futebol para *videogame* usa gráficos para mostrar e comparar as habilidades dos jogadores segundo seis critérios: ritmo (RIT), finalizações (FIN), passe (PAS), dribles (DRI), defesa (DEF) e físico (FIS). Cada jogador tem uma pontuação, de zero a 100, para cada um dos critérios, de acordo com as estatísticas e o desempenho do jogador na vida real.

Observe os gráficos a seguir, com as pontuações e a comparação dos jogadores Cristiano Ronaldo e Messi nesse jogo.

SUHAIM ABDULLAH/ GETTY IMAGES



MARCELO ENDELLI/ GETTY IMAGES



Fonte: Jogo de *videogame*.

Note que cada um desses gráficos apresenta seis semieixos positivos, um para cada critério, que têm a mesma escala e a mesma origem, e que a pontuação para cada um dos critérios é marcada no eixo correspondente por um ponto; assim, quanto maior for a pontuação, mais distante da origem estará o ponto que a representa.

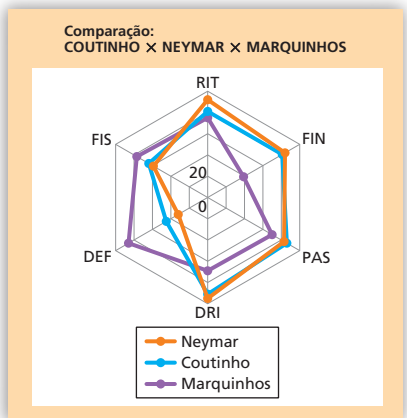
Observando os dois primeiros gráficos, é possível avaliar cada um dos jogadores individualmente. Já o terceiro gráfico, mesmo sem exibir os valores exatos das pontuações, permite uma comparação visual mais rápida entre os dois jogadores. Desse último gráfico é possível concluir, por exemplo, que Cristiano Ronaldo tem uma pontuação melhor que Messi nesse jogo no critério físico, enquanto Messi tem uma pontuação melhor no critério passe.

Esse texto explora o conhecimento matemático em um contexto cujo tema é da cultura juvenil, os jogos de *videogame*.

Reflita

Suponha que você esteja disputando uma partida de futebol no jogo de *videogame* citado e pretenda fazer uma substituição. Você tem três jogadores disponíveis e quer que seu time melhore na defesa.
Observe o gráfico a seguir, comparando os três jogadores, e decida qual deles você escolheria para entrar em jogo. Justifique sua escolha.

Como a intenção é que o time melhore na defesa, espera-se que os alunos escolham o jogador que tem a melhor defesa, ou seja, a pontuação mais alta no critério DEF, expressa pelo ponto mais distante da origem no eixo DEF (ponto roxo). Portanto, espera-se que escolham o jogador Marquinhos.



Fonte: Jogo de *videogame*.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Comentar com os alunos que o símbolo escolhido poderia representar outros valores. Entretanto, é necessário que essa escolha seja adequada para não induzir a falsas interpretações e para que o gráfico fique claro. Por exemplo, não é conveniente que cada símbolo represente 100.000 habitantes, pois, nesse caso, teríamos de fazer um gráfico com muitos símbolos e ele não seria tão claro. Já um gráfico em que cada símbolo representasse 10.000.000 de habitantes poderia induzir a falsas interpretações.

Exercícios resolvidos

R3. Observe, na tabela a seguir, os municípios mais populosos do Brasil em 1º de julho de 2018. Construir um pictograma que represente esses dados.

Municípios mais populosos do Brasil em 1º/7/2018	
Município	**População estimada**
São Paulo (SP)	12.176.866
Rio de Janeiro (RJ)	6.688.927
Brasília (DF)	2.974.703
Salvador (BA)	2.857.329
Fortaleza (CE)	2.643.247

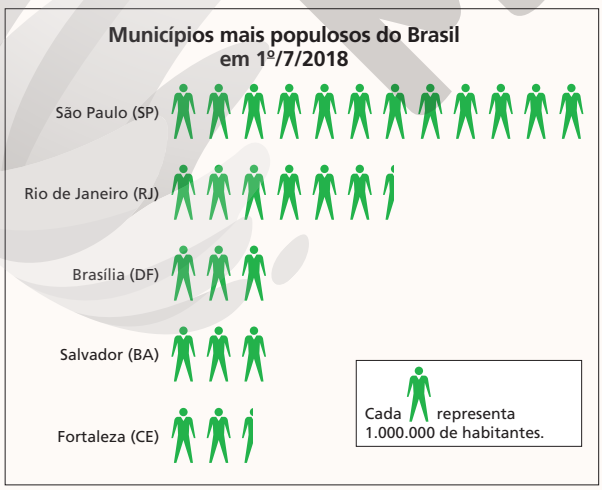
Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=22367&t=resultados>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Resolução

Para fazer um pictograma, temos de escolher um símbolo e definir previamente seu valor. Como os valores da tabela estão entre 2.000.000 e 13.000.000, cada símbolo pode representar 1.000.000 de habitantes e cada metade de um símbolo, 500.000 habitantes. Assim, podemos arredondar:

- 12.176.866 para 12.000.000;
- 6.688.927 para 6.500.000;
- 2.974.703 para 3.000.000;
- 2.857.329 para 3.000.000;
- 2.643.247 para 2.500.000.

Então, teremos:



ADILSON SECCO

Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=22367&t=resultados>. Acesso em: 24 abr. 2020.

R4. A tabela a seguir apresenta a receita cambial turística (gastos de turistas estrangeiros no Brasil) e a despesa cambial turística (gastos de brasileiros no exterior) de 2004 a 2018.

Receita e despesa cambial turística no Brasil (em milhões de dólares)		
Ano	**Receita**	**Despesa**
2004	3.222	2.871
2005	3.861	4.720
2006	4.316	5.764
2007	4.953	8.211
2008	5.785	10.962
2009	5.305	10.898
2010	5.261	15.965
2011	6.095	20.802
2012	6.378	22.039
2013	6.474	25.028
2014	6.843	25.567
2015	5.844	17.357
2016	6.024	14.497
2017	5.809	19.002
2018	5.917	18.263

Dados obtidos em: <http://dadosefatos.turismo.gov.br/estat%C3%ADsticas-e-indicadores/receita-cambial.html>. Acesso em: 24 abr. 2020.

ROBERTO CASIMIRO/FOTOARENA

Movimentação no Aeroporto Internacional de Guarulhos, Guarulhos (SP), 2019.

Construir, usando uma planilha eletrônica, um gráfico de linhas duplas e um gráfico de barras duplas verticais para representar esses dados.

Reflita

Poderíamos determinar que cada símbolo representa outro valor? Dê alguns exemplos.

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

▸ **Resolução**

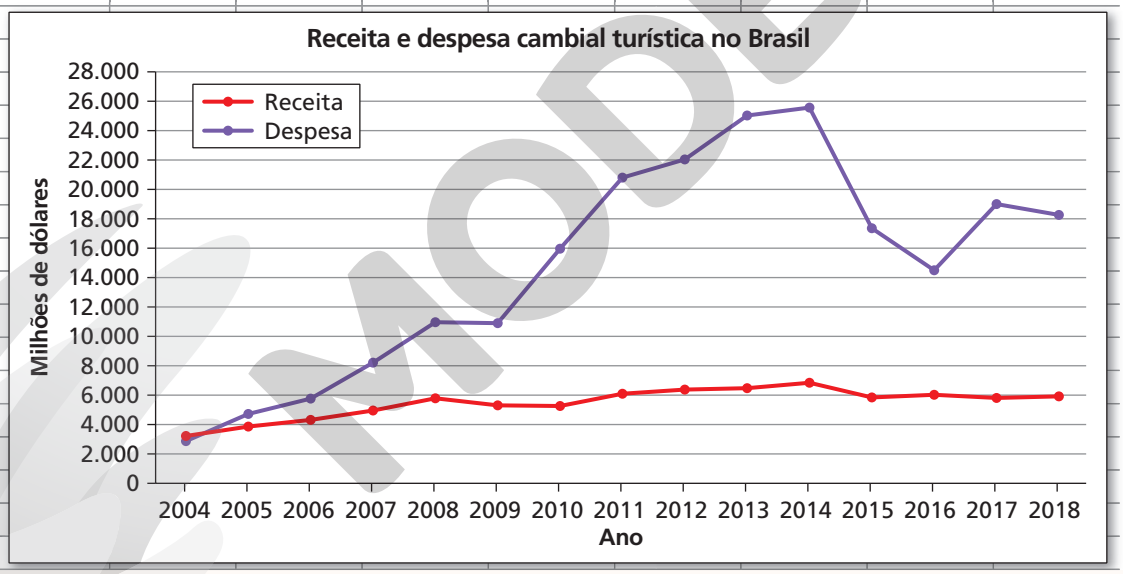
Para construir os gráficos usando uma planilha eletrônica, inicialmente é necessário copiar a tabela na planilha.

B3 | *Fórmula* | 3222

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Receita e despesa cambial turística no Brasil (milhões de dólares)**								
2	**Ano**	**Receita**	**Despesa**						
3	2004	3.222	2.871						
4	2005	3.861	4.720						
5	2006	4.316	5.764						
6	2007	4.953	8.211						
7	2008	5.785	10.962						
8	2009	5.305	10.898						
9	2010	5.261	15.965						
10	2011	6.095	20.802						
11	2012	6.378	22.039						
12	2013	6.474	25.028						
13	2014	6.843	25.567						
14	2015	5.844	17.357						
15	2016	6.024	14.497						
16	2017	5.809	19.002						
17	2018	5.917	18.263						
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									
28									
29									
30									
31									
32									
33									
34									
35									

Para construir o gráfico de linhas duplas, selecionamos os dados da tabela e escolhemos a opção para inserir gráfico de linha. Há diversas opções de estilo para esse tipo de gráfico (com linhas horizontais auxiliares, sem um dos eixos, em duas dimensões, em três dimensões etc.).

Depois que o gráfico estiver construído, é possível inserir nomes nos eixos, título e legenda, alterar cores, escalas e linhas auxiliares, inserir os valores juntos a cada ponto etc.



Para construir o gráfico de barras duplas verticais, o procedimento é semelhante: basta selecionar os dados da tabela e escolher a opção para inserir gráfico de barras. Para esse tipo de gráfico, também há várias opções de estilo (barras verticais, horizontais, com linhas auxiliares, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar dos retângulos etc.).

Reflita

Apenas observando os gráficos, sem realizar contas, responda:

- A balança comercial do turismo (diferença entre receita e despesa cambial turística) foi positiva em qual(is) ano(s) de 2004 a 2018? Em qual(is) ela foi negativa?
- Em qual ano do período apresentado a receita cambial turística foi maior? Você sabe que grande evento internacional ocorreu no Brasil nesse ano?

A balança comercial do turismo foi positiva em 2004 e negativa em todos os outros anos de 2005 a 2018.

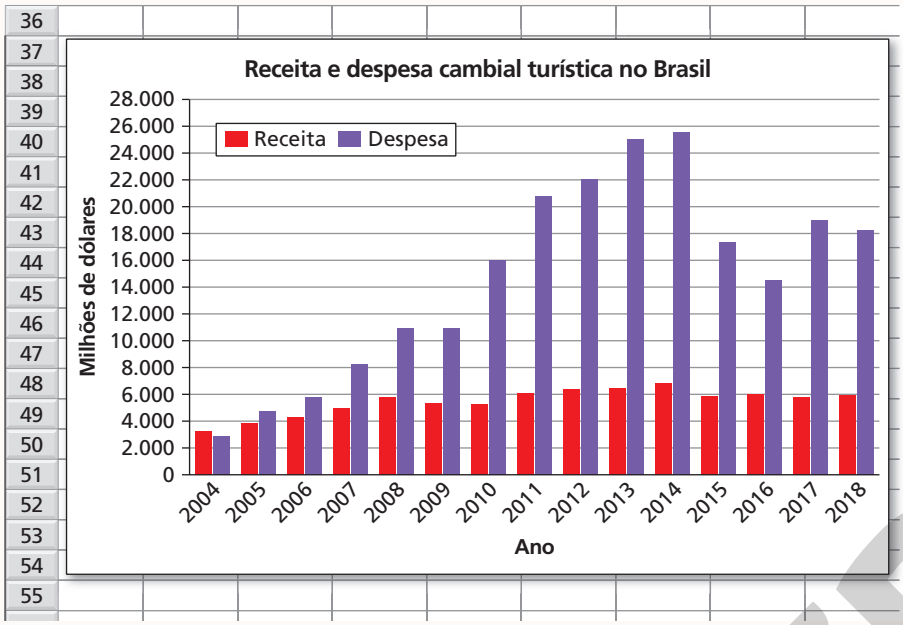
2014; Copa do Mundo de Futebol

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Quando o gráfico estiver construído, também é possível inserir nomes nos eixos, título, legenda, alterar cores, escalas, linhas auxiliares, inserir os valores junto a cada barra etc.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. Segundo o Banco Mundial, a expectativa de vida no nascimento indica o número de anos que um recém-nascido viveria se os padrões predominantes de mortalidade no momento do nascimento permanecessem os mesmos em toda a sua vida.

Em 2017, a expectativa de vida no Brasil era de 75,456 anos. Naquele ano, o país com a menor expectativa de vida era Serra Leoa, com 52,895 anos; entre os países com as maiores expectativas de vida estava o Japão, com expectativa de 84,100 anos.

Observe, na tabela a seguir, a expectativa de vida desses três países de 1960 a 2015. Depois, faça o que se pede.

Expectativa de vida no nascimento												
País \ Ano	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Brasil	54,241	56,794	59,154	60,782	61,983	63,514	65,300	67,600	70,055	72,040	73,838	75,284
Japão	67,666	70,202	71,950	75,057	76,092	77,650	78,837	79,536	81,076	81,925	82,843	83,794
Serra Leoa	30,371	31,572	34,601	38,468	40,641	40,312	37,348	35,729	38,702	43,624	48,224	51,423

Dados obtidos em: <https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.LE00.IN?end=2017&locations=SL-BR-JP&most_recent_value_desc=true&start=1960&view=chart>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Ver resolução no Guia do professor.

- Usando uma planilha eletrônica, construa dois gráficos diferentes para representar os dados da tabela.
- Você acha que seria coerente representar esses dados em um ou mais gráficos de setores? Por quê?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

LEO FONTES/O TEMPO/ESTADÃO CONTEÚDO

Serra da Saudade, localizada a cerca de 250 quilômetros a oeste de Belo Horizonte, é o menor município do país e o menos populoso de Minas Gerais. Minas Gerais, 2010.

13. No exercício resolvido **R3**, vimos quais eram os municípios mais populosos do Brasil em 1º de julho de 2018. Observe, agora, os municípios menos populosos do Brasil na mesma data.

Municípios menos populosos do Brasil em 1º/7/2018	
Município	**População estimada**
Serra da Saudade (MG)	786
Borá (SP)	836
Araguainha (MT)	956
Engenho Velho (RS)	1.088
Oliveira de Fátima (TO)	1.106

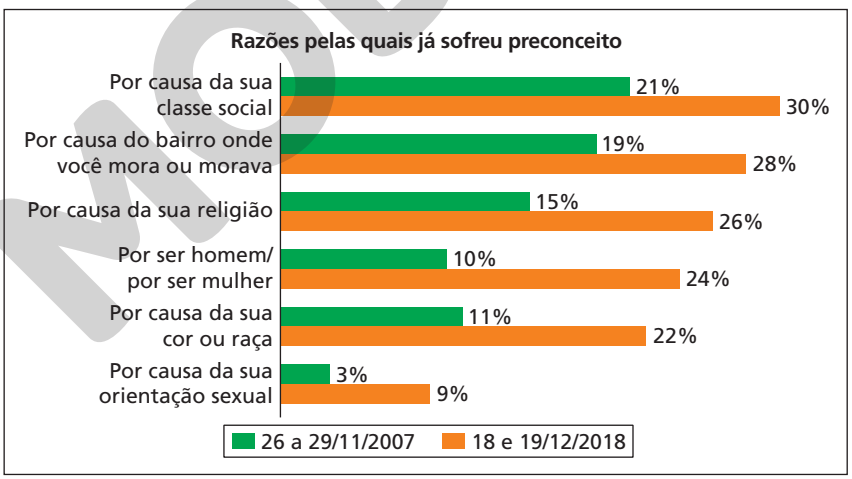
Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?edicao=22367&t=resultados>. Acesso em: 24 abr. 2020.

a) Para esse caso, seria coerente construir um pictograma em que cada símbolo representasse o mesmo número de habitantes que no gráfico do exercício resolvido **R3**? Por quê?

b) Faça um pictograma para representar os dados dessa tabela.

c) Pesquise o número de habitantes do seu município e compare esse número com a população de Serra da Saudade em 2018.

14. Observe o gráfico a seguir, elaborado com base no do resultado da pesquisa *Preconceito*, realizada pelo instituto Datafolha nos dias 18 e 19 de dezembro de 2018. A população investigada na pesquisa foram brasileiros com 16 anos ou mais, tendo sido realizada por meio de 2.077 entrevistas presenciais.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Dados obtidos em: <http://media.folha.uol.com.br/datafolha/2019/01/16/adebadbad191eec6d752f5825b00cb45prc.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

De acordo com as informações fornecidas, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

a) A porcentagem de entrevistados que já sofreu preconceito em razão de um dos motivos aumentou de 2007 para 2018. verdadeira

b) Cerca de 540 pessoas entrevistadas em 2018 já sofreram preconceito por causa da sua religião. verdadeira

c) Cerca de 208 pessoas entrevistadas em 2007 já sofreram preconceito por ser homem ou por ser mulher. falsa

13. a) Espera-se que os alunos percebam que não seria coerente, pois se cada símbolo representasse 1.000.000 de habitantes, teríamos de arredondar todos os valores da tabela para 500.000 (e representá-los por meio símbolo) ou para zero; em ambos os casos, isso seria incoerente e provocaria falsas interpretações.

b) Ver resolução no Guia do professor.

c) resposta pessoal

A atividade **14** possibilita trabalhar com o tema contemporâneo **educação em direitos humanos** da BNCC, favorecendo seu desenvolvimento, já que ela trata de diversas situações de preconceito. É possível, também, fazer uma articulação com a competência geral **9** da BNCC, pensando no acolhimento e na valorização da diversidade de indivíduos e grupos sociais, e trabalhar, de forma interdisciplinar, com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS502** e possibilitando que sejam analisadas situações da vida cotidiana, desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificando ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.

MODERNA

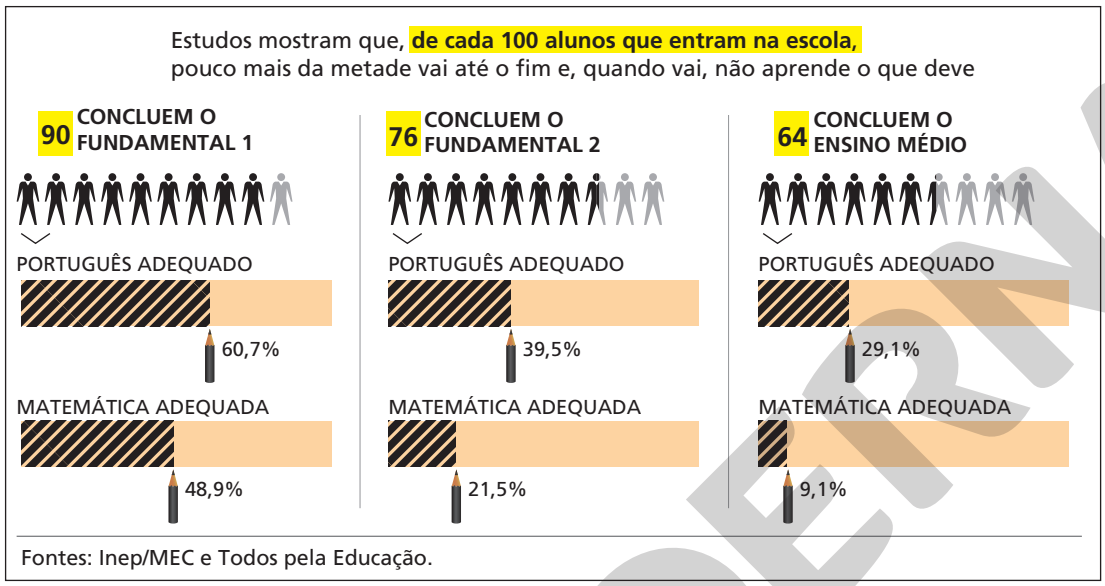
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) Nos dois períodos apresentados no gráfico, o motivo de preconceito mais frequente entre os entrevistados foi a classe social. verdadeira

e) A população em investigação da pesquisa foram os brasileiros com 16 anos ou mais. verdadeira

- Agora, responda: você já foi vítima de preconceito ou já presenciou uma situação preconceituosa? Em caso afirmativo, qual foi o motivo do preconceito e como você se sentiu? Converse com os colegas sobre o assunto. resposta pessoal

15. Observe o gráfico a seguir, que trata sobre a educação no Brasil.



Fonte: Revista *Veja*, São Paulo, ano 52, n. 24, p. 12, 12 jun. 2019.

De acordo com o gráfico, do total de alunos que entram na escola, que porcentagem conclui o:

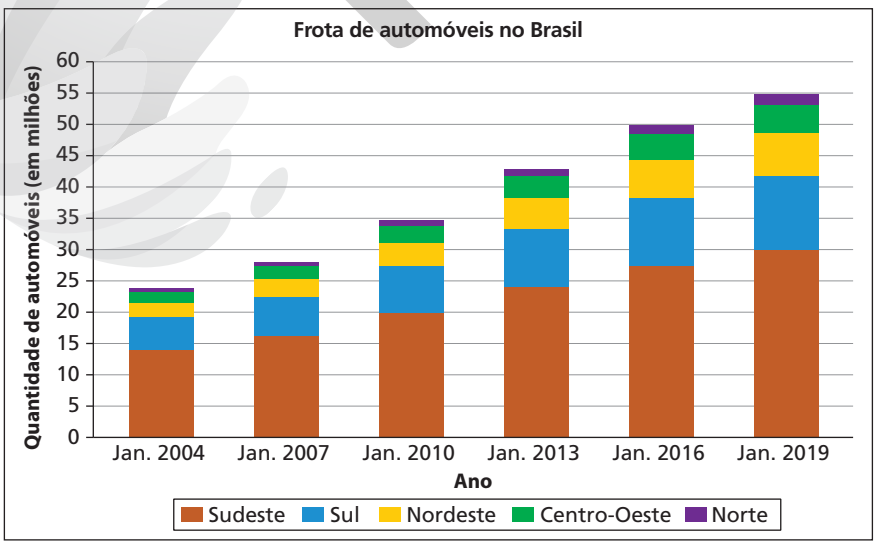
a) Ensino Fundamental 2? 76%

b) Ensino Médio? 64%

c) Ensino Fundamental 1 com o conhecimento adequado em Português? 54,63%

d) Ensino Médio com o conhecimento adequado em Matemática? 5,824%

16. Observe, no gráfico a seguir, a frota de automóveis no Brasil em janeiro de alguns anos.



Dados obtidos em: <https://infraestrutura.gov.br/component/content/article/115-portal-denatran/8552-estat%C3%ADsticas-frota-de-ve%C3%ADculos-denatran.html>. Acesso em: 24 abr. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

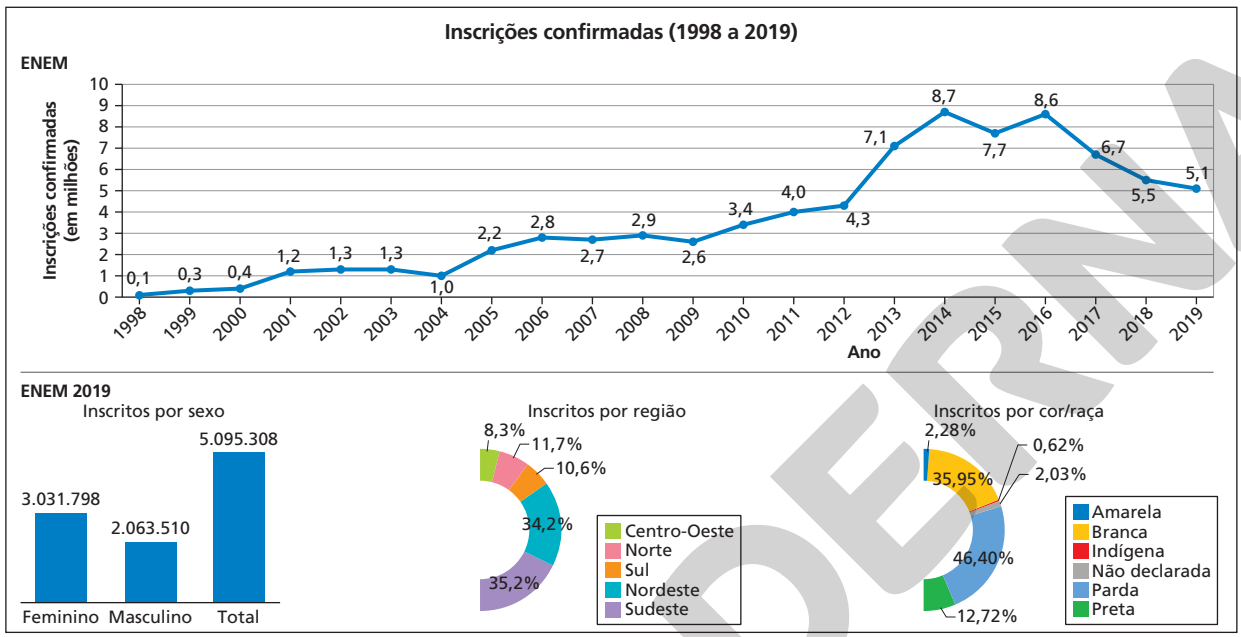
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Com base nesse gráfico, **não** é correto afirmar que: alternativa b

a) o número total de automóveis vem crescendo de janeiro de 2004 a janeiro de 2019.
b) em janeiro de 2007 havia cerca de 25 milhões de automóveis na região Nordeste.
c) em todas as datas apresentadas no gráfico, a região Norte era a que tinha menos automóveis e a região Sudeste era a que tinha mais automóveis.
d) em janeiro de 2016 havia aproximadamente 50 milhões de automóveis no Brasil, dos quais mais da metade era da região Sudeste.
e) o número de automóveis da região Sudeste, em janeiro de 2019, era maior que o número total de automóveis no Brasil em janeiro de 2007.

17. Os gráficos a seguir apresentam dados sobre os inscritos no Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), desde sua primeira edição, em 1998, até 2019.

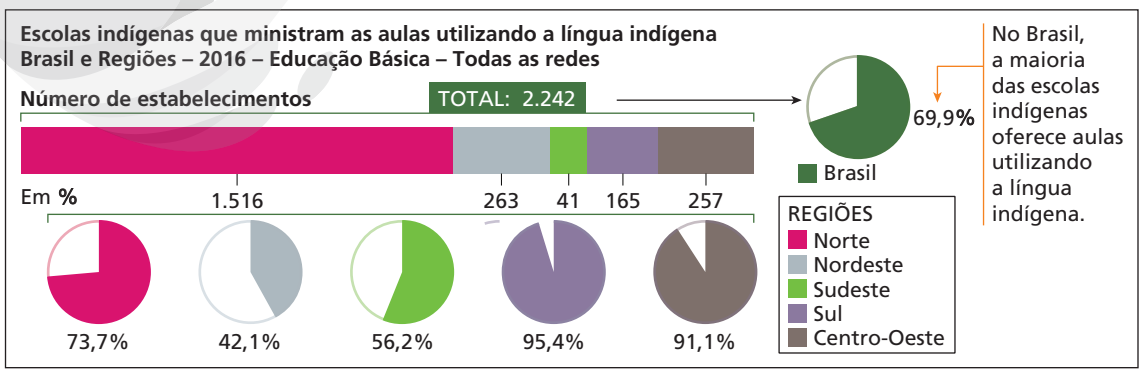


Dados obtidos em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2019/Enem_2019_Balanco_final.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

De acordo com os gráficos, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

a) Em 2013, o número de inscritos no Enem ultrapassou 7 milhões. verdadeira
b) No total, o Enem 2019 teve exatamente 5.095.308 inscritos. verdadeira
c) O Enem 2014 foi o que teve o maior número de inscritos. verdadeira
d) A região Sudeste foi a que teve o maior número de inscritos em 2019. verdadeira
e) Aproximadamente 31,6 mil inscritos no Enem 2019 eram indígenas. verdadeira
f) De 1998 a 2014, o número de inscritos no Enem aumentou a cada ano. falsa
g) Aproximadamente 59,5% dos inscritos no Enem 2019 eram do sexo feminino. verdadeira
h) De 2016 a 2019, o número de inscritos no Enem caiu a cada ano. verdadeira
i) Na primeira edição do exame, houve cerca de 1.000 inscritos. falsa

18. Observe os gráficos a seguir, com dados do *Anuário Brasileiro da Educação Básica 2018*.



Fonte: <https://todospelaeducacao.org.br/_uploads/20180824-Anuario_Educacao_2018_atualizado_WEB.pdf?utm_source=conteudoSite>. Acesso em: 24 abr. 2020.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

De acordo com os gráficos, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa em relação à educação indígena no Brasil em 2016.

a) A região Norte tinha 1.516 escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena. verdadeira

b) A região que tinha mais escolas indígenas que ministravam as aulas utilizando a língua indígena era a região Centro-Oeste. falsa

c) No Brasil havia 2.242 escolas indígenas. falsa

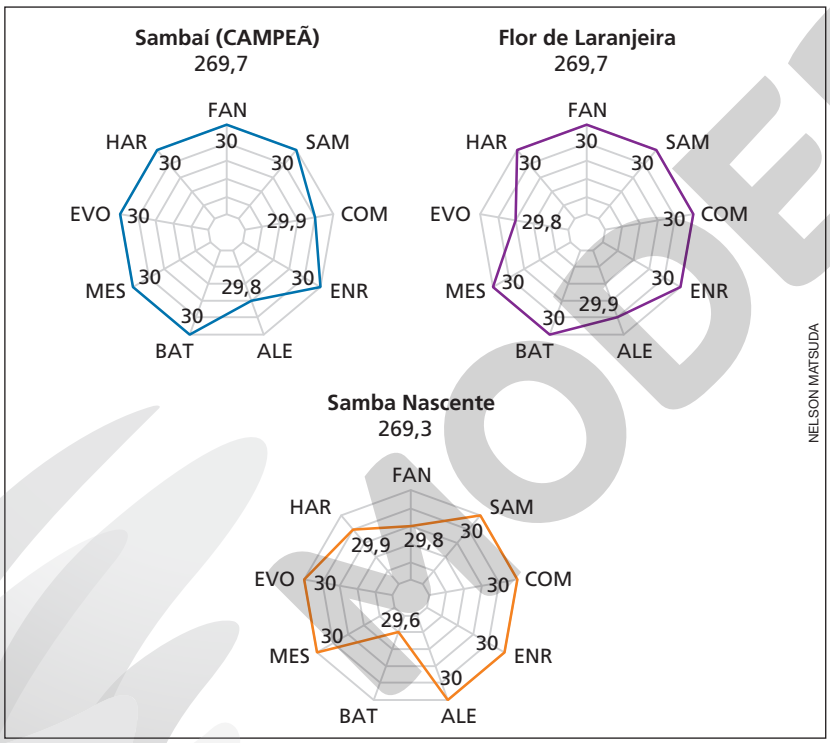
d) Na região Sudeste havia 41 escolas indígenas. falsa

e) 69,9% das escolas brasileiras ofereciam aulas utilizando a língua indígena. falsa

- A seguir, converse com um colega sobre a seguinte questão: vocês acham que é importante que os povos indígenas tenham uma educação ministrada em língua indígena? Por quê?

19. Na cidade Sol Nascente, os desfiles de Carnaval são julgados por uma comissão, levando em consideração os seguintes quesitos: fantasia (FAN), samba-enredo (SAM), comissão de frente (COM), enredo (ENR), alegoria (ALE), bateria (BAT), mestre-sala e porta-bandeira (MES), evolução (EVO) e harmonia (HAR).

Os gráficos a seguir mostram a pontuação, em cada quesito, das três primeiras colocações das escolas de samba do Carnaval da cidade Sol Nascente em 2020.



Dados fictícios.

De acordo com os gráficos acima, responda às questões.

a) Qual foi a escola que obteve a maior pontuação no quesito alegoria? Samba Nascente, com 30 pontos.

b) Qual foi a escola que teve o menor número de quesitos com pontuação máxima (30)? Samba Nascente, com 6 quesitos.

c) Por que a escola Sambaí foi campeã se a pontuação total da Flor de Laranjeira foi a mesma (269,7 pontos)? É possível responder a essa pergunta apenas com as informações do enunciado e dos gráficos?

20. Pesquise em jornais, revistas e na internet gráficos estatísticos de tipos similares aos vistos até então. Escolha dois gráficos e crie um exercício com cada um deles. Dê os exercícios elaborados por você para um colega resolver e resolva os exercícios elaborados por ele. resposta pessoal

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Professor ministrando aula em língua indígena na Escola Municipal na aldeia Moikarakô da etnia Kayapó, São Félix do Xingu (PA), 2016.

• resposta pessoal
Incentivar a discussão, sobre a educação ministrada em língua indígena, ressaltando a importância de se preservar as línguas e culturas indígenas. Aproveitar para conversar sobre o multiculturalismo no Brasil com a presença de diferentes culturas e etnias no território do país. Em 2019 comemorou-se o **Ano Internacional das Línguas Indígenas**, com eventos no mundo todo para a conscientização da necessidade de se preservar e promover as línguas indígenas. Ver alguns textos que podem auxiliá-lo na discussão sobre essa temática: <http://www.funai.gov.br/index.php/comunicacao/noticias/5310-conservacao-de-idiomas-autoctones-norteia-ano-internacional-das-linguas-indigenas-celebrado-pela-unesco?limitstart=0#> (acesso em: 24 abr. 2020) e <https://nacoesunidas.org/preservar-linguas-ancestrais-e-essencial-para-sobrevivencia-de-povos-indigenas/> (acesso em: 24 abr. 2020).
A discussão sobre esse tema favorece o desenvolvimento da competência geral **9** da BNCC, além de possibilitar uma abordagem interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS104** da BNCC, já que a linguagem indígena pode ser vista como objeto da cultura imaterial e, por meio dela, podem ser identificados conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam sua identidade e a diversidade cultural desses povos.

19. c) Apenas com as informações do enunciado e dos gráficos não é possível responder à pergunta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esses exercícios favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT406** da BNCC, já que, em alguns exercícios, os alunos construirão e analisarão tabelas e gráficos com dados obtidos em pesquisas estatísticas e avaliarão a melhor forma de representação.

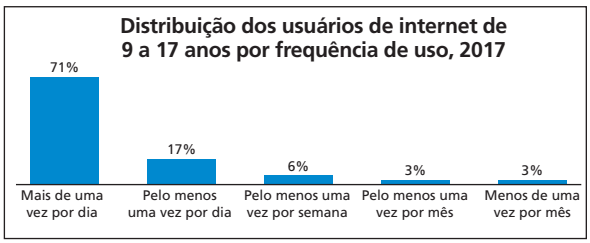
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Analisando o gráfico do exercício **1**, podemos observar que a grande maioria das pessoas dessa faixa etária acessou a internet mais que uma vez por dia, o que era esperado, já que o uso da rede em suas diversas ofertas: redes sociais, músicas, jogos etc, faz parte do cotidiano dessa faixa etária. Aproveitar para perguntar aos alunos da turma com qual frequência eles acessam a internet. Anotar as respostas no quadro e pedir a eles que construam uma tabela de frequências e um gráfico de colunas com as informações registradas. Se achar conveniente, questionar sobre a quantidade de horas de acesso diário e construir o gráfico com essas informações, colocando divisões como: menos de uma hora por dia, entre uma e duas horas por dia, entre duas e 4 quatro horas por dia, mais de quatro horas por dia.

Aplicação

1. Observe o gráfico a seguir.



Dados obtidos em: <https://www.cetic.br/tics/kidsonline/2017/criancas/A4/>. Acesso em: 24 abr. 2020.

De acordo com o gráfico, que porcentagem do total de usuários de internet de 9 a 17 anos usa a internet uma vez por semana ou mais? 94%

2. O **índice de qualidade do ar**, desenvolvido para simplificar o processo de divulgação da qualidade do ar, é baseado em diferentes parâmetros, como partículas inaláveis, fumaça, ozônio, monóxido de carbono, entre outros.

A Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (Cetesb) adota a seguinte classificação para o índice de qualidade do ar:

Qualidade do ar e efeitos à saúde		
Qualidade	**Índice**	**Significado**
Boa	0 – 40	
Moderada	41 – 80	Pessoas de grupos sensíveis (crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas) podem apresentar sintomas como tosse seca e cansaço. A população, em geral, não é afetada.
Ruim	81 – 120	Toda a população pode apresentar sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta. Pessoas de grupos sensíveis (crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas) podem apresentar efeitos mais sérios na saúde.
Muito ruim	121 – 200	Toda a população pode apresentar agravamento dos sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta e ainda falta de ar e respiração ofegante. Efeitos ainda mais graves à saúde de grupos sensíveis (crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas).
Péssima	> 200	Toda a população pode apresentar sérios riscos de manifestações de doenças respiratórias e cardiovasculares. Aumento de mortes prematuras em pessoas de grupos sensíveis.

Fonte: <https://cetesb.sp.gov.br/ar/padroes-de-qualidade-do-ar/>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Em determinado dia, os índices de qualidade do ar de algumas regiões monitoradas de um município foram os representados a seguir.

Índice de qualidade do ar no município

2	1 5 7
3	0 2 6 8 9
4	2 2 5 6 7 8 8
5	1 3 7 7
6	7 8
7	6
8	
9	
10	1
11	
12	
13	7

Legenda: 2 | 1 = 21

Fonte: Centro de monitoramento do município.

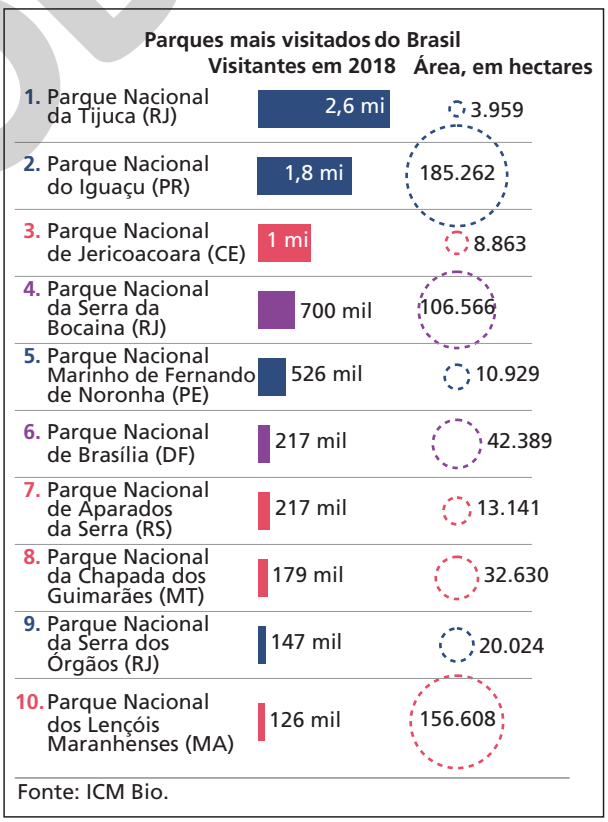
2. c) Quando a qualidade do ar está ruim, toda a população pode apresentar sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta. Pessoas de grupos sensíveis podem apresentar efeitos mais graves à saúde.

a) Adotando a classificação da Cetesb, determine quantas regiões desse município estavam com qualidade do ar boa, moderada, ruim, muito ruim e péssima nesse dia. boa: 8; moderada: 14; ruim: 1; muito ruim: 1, péssima: 0

b) De acordo com a Cetesb, que grupo de pessoas é considerado sensível? crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas

c) Quais são os efeitos à saúde quando a qualidade do ar está classificada como ruim?

3. Observe o gráfico a seguir e, depois, responda às questões.



Fonte: *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 17 jun. 2019, p. B5.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Tendo conhecimento da tabela que indica os efeitos à saúde devido à má qualidade do ar (exercício **2**), é possível mover ações no sentido de reverter ou melhorar essa situação, diminuindo, assim, os efeitos danosos à **saúde**, um dos temas contemporâneos da BNCC. Esse tema pode favorecer também a competência específica **1**, ao utilizarmos, como estratégia, a representação gráfica para interpretar e informar dados. Se possível, pedir aos alunos que pesquisem sobre a qualidade do ar da região em que moram.

a) Quais dados o gráfico fornece? O gráfico fornece os 10 parques mais visitados do Brasil, suas áreas e a quantidade de visitantes em 2018.

b) Qual parque recebeu mais visitantes em 2018? Quantos visitantes esse parque recebeu? Parque Nacional da Tijuca (RJ); 2,6 milhões de visitantes

c) Dos parques citados no gráfico, qual tem a maior área? Calcule essa área, em quilômetro quadrado. (*Dica*: 1 hectare = 10.000 m^2.) Parque Nacional do Iguaçu; 1.852,62 km^2

d) Quantos visitantes o Parque Nacional Marinho de Fernando de Noronha, em Pernambuco, recebeu em 2018? 526 mil visitantes

e) Você já visitou algum dos parques citados no gráfico? Se sim, como foi sua experiência? Converse com os colegas a respeito. resposta pessoal

4. Observe os dados (medidas de comprimento em metro) obtidos em uma pesquisa sobre a altura dos postes de iluminação da cidade Flora.

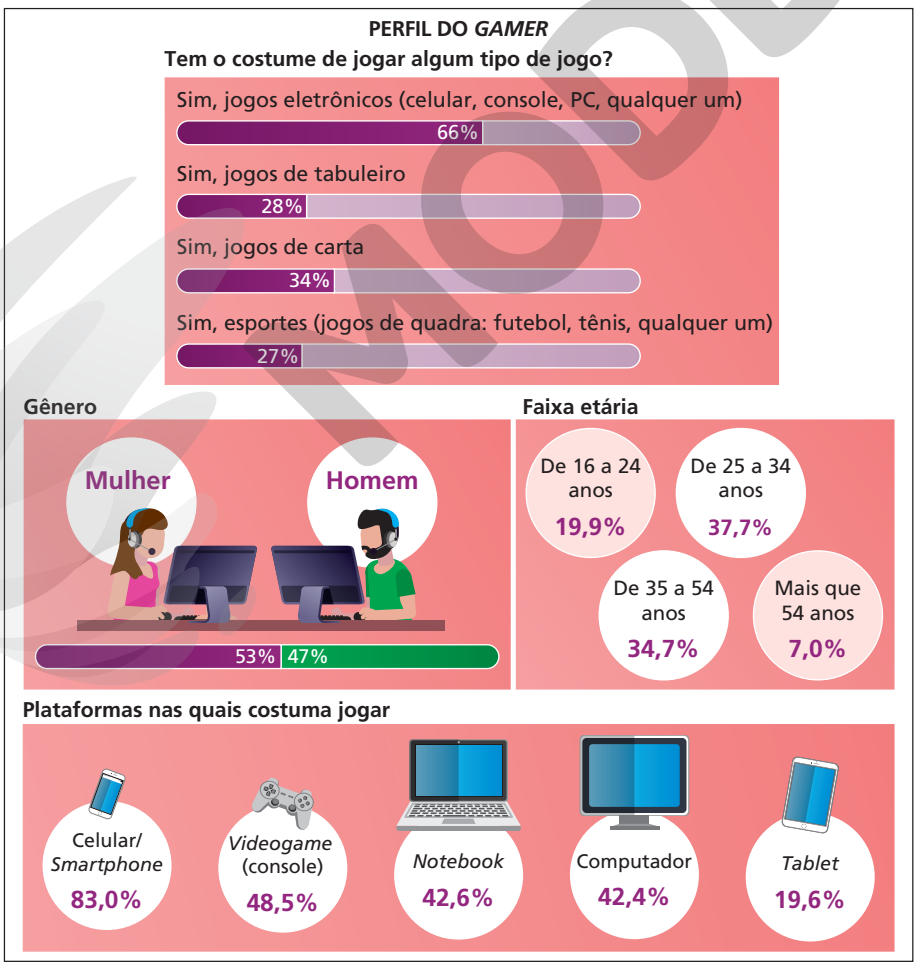
3,20 3,45 3,53 3,22 3,87 3,27 3,56 3,98 3,28 3,02
3,75 3,43 3,73 3,12 3,41 3,24 3,92 3,48 3,32 3,05

Agrupe-os em 5 intervalos e construa uma tabela com as distribuições das frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. Ver resolução no Guia do professor.

A seguir, represente graficamente as alturas dos postes de iluminação da cidade Flora.

5. Observe, a seguir, dados sobre a pesquisa *Game Brasil 2019*, realizada com o público *on-line*, entre 5 e 8 de fevereiro de 2019 por meio de questionários respondidos por 3.251 pessoas em todo o Brasil.

A pesquisa considerou que *gamers* são todos aqueles que afirmaram possuir o hábito de jogar jogos eletrônicos, independente do estilo de jogo, frequência ao longo da semana, duração das partidas e conhecimento sobre jogos.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Embora muitos acreditem que os *gamers* pertencem a um público muito jovem, a pesquisa apresentada na atividade **5** mostra que a maior porcentagem de jogadores pertence à faixa etária de 25 a 34 anos. Observar que os *gamers* que fazem parte da próxima faixa etária, 35 a 54 anos, têm uma porcentagem bastante próxima ao grupo de maior porcentagem, diferentemente dos outros dois grupos (16 a 24 anos e mais que 54 anos).

Fonte: <https://www.pesquisagamebrasil.com.br/pesquisa-game-brasil-2019/>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Registre as respostas em seu caderno.

a) Que percentual dos entrevistados é *gamer*? 66%

b) A maioria dos *gamers* é do gênero feminino ou masculino? feminino

c) Qual é a faixa etária mais frequente entre os *gamers*? de 25 a 34 anos

d) Qual plataforma é a mais usada pelos *gamers* para jogar? celular/*smartphone*

e) Represente por meio de um gráfico as plataformas nas quais os *gamers* costumam jogar. Ver resolução no Guia do professor.

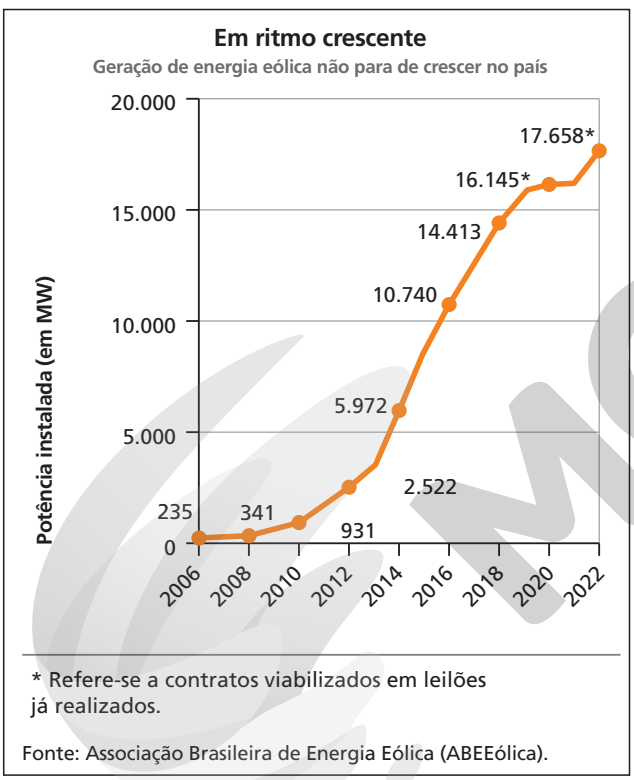
f) Você costuma jogar jogos eletrônicos? Quais plataformas você utiliza e qual é seu estilo de jogo favorito? Converse com um colega sobre esse assunto. resposta pessoal

Aprofundamento

6. Veja a frase e a representação a seguir, publicadas em uma revista de divulgação científica.

O potencial de geração de energia eólica no Brasil é estimado em cerca de 500 gigawatts (GW), de acordo com a Associação Brasileira de Energia Eólica (ABEEólica), energia suficiente para atender o triplo da demanda atual de energia do Brasil.

Com base na atividade **6**, é possível fazer um trabalho de interdisciplinaridade em conjunto com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, visando favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT102** que faz parte da competência específica **1** no que diz respeito à sustentabilidade. É possível fazer uma pesquisa sobre essa e outras formas de produzir energia, suas vantagens e desvantagens, em particular quanto à sustentabilidade.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: Revista *Pesquisa Fapesp*, São Paulo, ano 20, n. 275, p. 79, jan. 2019.

CHICO FERREIRA/PULSAR IMAGENS

Aerogeradores em Caetite (BA), 2019.

De acordo com as informações fornecidas, faça o que se pede.

Comentar com os alunos que no Sistema Internacional de Unidades (SI), watts (W) é a unidade de medida de potência, 1 gigawatt (GW) = 10^9 watts (W).

a) Você já ouviu falar em watt (W)? Se sim, o que essa unidade mede? Caso não saiba, faça uma pequena pesquisa para responder a essa questão. Ver resolução no Guia do professor.

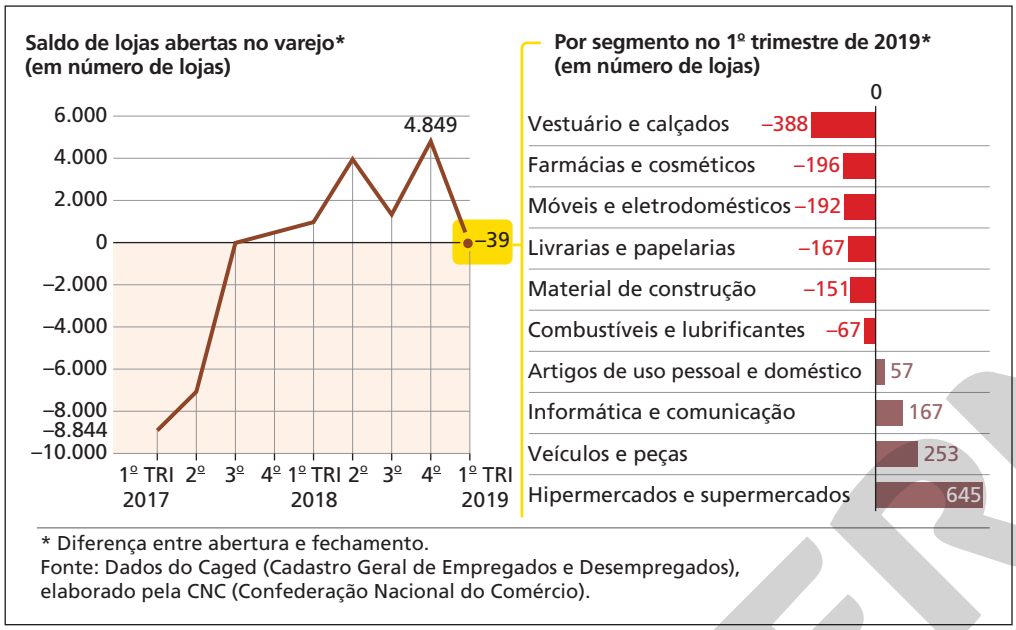
b) Qual era o potencial estimado de geração de energia eólica no Brasil na ocasião da publicação? cerca de 500 gigawatts (GW)

c) Qual era a potência instalada de energia eólica no Brasil em 2018? Que porcentagem essa potência instalada representava do potencial estimado de geração brasileiro? 14.418 MW; aproximadamente 2,88%

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7. Observe o conjunto de gráficos a seguir, a respeito do saldo de lojas abertas no varejo no Brasil em alguns períodos de 2017 a 2019.



* Diferença entre abertura e fechamento.
Fonte: Dados do Caged (Cadastro Geral de Empregados e Desempregados), elaborado pela CNC (Confederação Nacional do Comércio).

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 27 maio 2019, p. B3.

De acordo com as informações apresentadas, classifique cada afirmativa em verdadeira ou falsa.

a) Não foi aberta nem fechada nenhuma loja no 3º trimestre de 2017. falsa

b) No 1º trimestre de 2019 foram fechadas 39 lojas. falsa

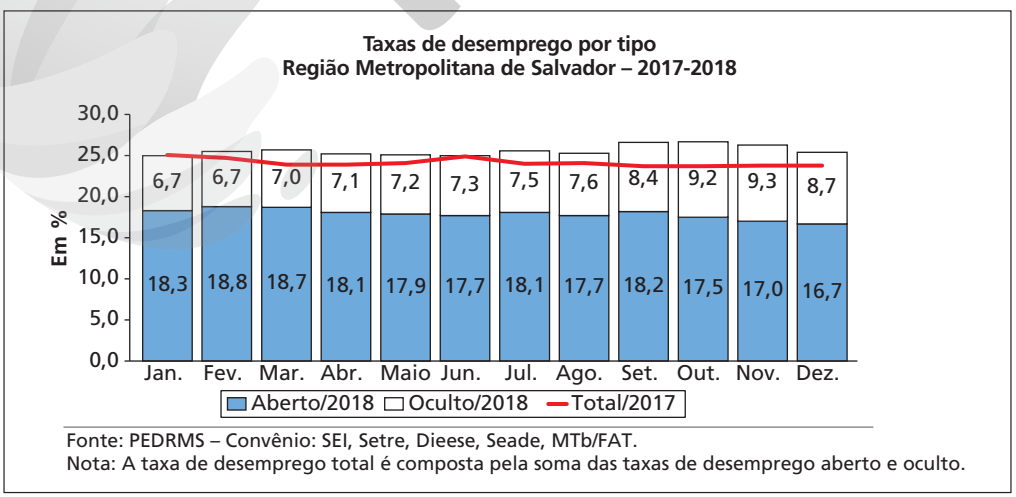
c) O 4º trimestre de 2018 foi o que teve o maior saldo de lojas abertas do período apresentado. verdadeira

d) Pode-se afirmar que o período com mais lojas fechadas foi o 1º trimestre de 2017. falsa

e) No 1º trimestre de 2019 foram abertos 645 hipermercados e supermercados. falsa

f) O segmento de livrarias e papelarias teve mais lojas fechadas do que abertas no 1º trimestre de 2019. verdadeira

8. O gráfico a seguir apresenta as taxas de desemprego durante os meses de 2017 e de 2018 na região metropolitana de Salvador.



Fonte: PEDRMS – Convênio: SEI, Setre, Dieese, Seade, MTb/FAT.
Nota: A taxa de desemprego total é composta pela soma das taxas de desemprego aberto e oculto.

Fonte: <https://www.dieese.org.br/analiseped/2018/201812pedssa.html>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

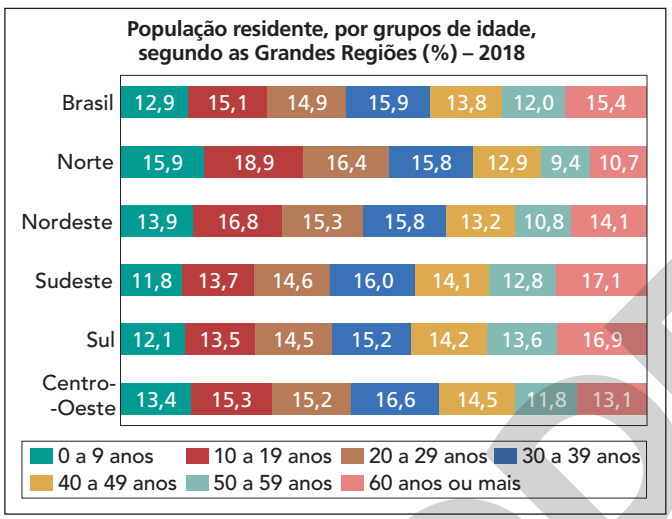
a) Que informações o gráfico apresenta? O gráfico apresenta, para a região metropolitana de Salvador, as taxas de desemprego aberto e oculto em cada um dos meses de 2018 e as taxas de desemprego total em cada mês de 2017.

b) Qual foi a taxa de desemprego oculto e de desemprego aberto em dezembro de 2018 na região metropolitana de Salvador? aberto: 16,7%; oculto: 8,7%

c) Qual foi a taxa de desemprego total na região metropolitana de Salvador em cada mês de 2018? (*Dica*: No rodapé do gráfico há uma nota sobre como é calculada a taxa de desemprego total.) Ver resolução no Guia do professor.

d) Sabendo que, em janeiro de 2017, a taxa total de desemprego nessa região foi de 25,1% e que, em junho de 2017, foi de 24,9%, observe o gráfico e responda: em que meses de 2018 a taxa de desemprego total foi superior ao mesmo mês do ano anterior? nos meses de fevereiro a dezembro

9. Observe o gráfico e a tabela a seguir, que trazem resultados da pesquisa *Pnad Contínua: Características gerais dos domicílios e dos moradores 2018*.



ERICSON GUILHERME LUCIANO

Fonte: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101654_informativo.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

População das regiões do Brasil – 2018	
Região	**População**
Norte	17.870.875
Nordeste	56.617.671
Sudeste	87.690.926
Sul	29.710.321
Centro-Oeste	15.963.500

Dados obtidos em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/17270-pnad-continua.html?edicao=24437&t=resultados>. Acesso em: 24 abr. 2020.

Com base nas informações apresentadas em relação à população em 2018, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

a) Mais de 50% da população brasileira tinha até 39 anos. verdadeira

b) A região Centro-Oeste tinha aproximadamente 2,1 milhões de pessoas com 60 anos ou mais. verdadeira

c) A região Norte é a que tinha maior número de pessoas com até 9 anos. falsa

d) O Brasil tinha mais pessoas com 60 anos ou mais que pessoas com até 9 anos. verdadeira

e) As regiões Sul e Sudeste eram as que tinham as maiores porcentagens de pessoas com 60 anos ou mais. verdadeira

10. Elabore um exercício considerando o gráfico e a tabela do exercício **12**. Dê o exercício que você elaborou para um colega resolver e resolva o exercício criado por ele. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. A distribuição de frequências relaciona: alternativa d

a) intervalo e intervalo.
b) amostra e população.
c) amostra e tabela.
d) variável e frequência.

2. Uma loja de roupas fez um levantamento sobre as quatro cores de camisetas mais vendidas durante um mês. Para organizar as informações, foi elaborada a tabela a seguir.

Cores de camisetas mais vendidas		
Cor	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
branca	90	15%
preta	210	*B*
azul	180	30%
vermelha	120	*C*
Total	*A*	100%

Fonte: Loja de roupas.

Nessa tabela, os valores de *A*, *B* e *C* são: alternativa d

a) 400; 52%; 30%
b) 300; 70%; 40%
c) 510; 40%; 25%
d) 600; 35%; 20%

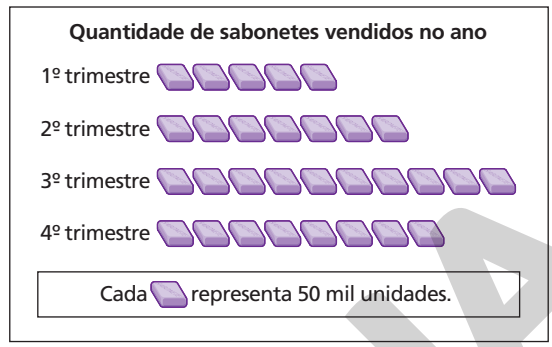
3. Para construir um histograma, marcamos no eixo das ordenadas: alternativa a

a) as frequências absolutas ou relativas.
b) os limites de cada intervalo.
c) o ponto médio de cada intervalo.
d) a amplitude de cada intervalo.

4. Em um diagrama de ramo e folhas, uma linha vertical separa [redacted]. alternativa c

a) o rol de dados e as frequências absolutas
b) os valores da variável e as frequências absolutas
c) os ramos e as folhas
d) os intervalos e as frequências relativas

5. A fábrica de sabonetes Limpinho elaborou o pictograma a seguir para representar a quantidade de sabonetes vendidos no ano passado.



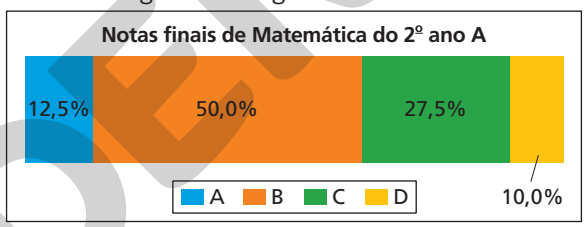
ADILSON SECCO

Fonte: Fábrica de sabonetes Limpinho.

Observando o gráfico, pode-se afirmar que, no 3º trimestre, essa empresa vendeu em torno de [redacted] sabonetes. alternativa b

a) 250 mil **b)** 500 mil **c)** 400 mil **d)** 350 mil

6. Observe o gráfico a seguir.



Fonte: Alunos do 2º ano A.

Sabendo que o 2º ano A tem 40 alunos, [redacted] tiveram, respectivamente, notas finais A, B, C e D. alternativa c

a) 4, 11, 20 e 5 **c)** 5, 20, 11, 4
b) 12, 50, 27 e 10 **d)** 7, 20, 10, 3

7. Para representar dados referentes a uma variável qualitativa, é coerente construir um [redacted]. alternativa b

a) gráfico de linha
b) gráfico de barras
c) diagrama de ramo e folhas
d) histograma

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Organizar dados e construir tabelas de distribuições de frequências.	X	X					
Interpretar e construir histogramas e diagramas de ramo e folhas.			X	X			X
Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.					X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	42 a 47	42 a 47	47 a 50	47 a 50	51 a 61	51 a 61	51 a 61

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ERICSON GUILHERME LUCIANO

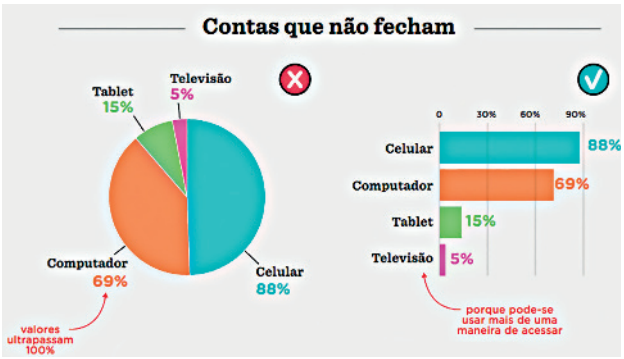
MODERNA

Nessa seção, os alunos vão analisar e identificar inadequações gráficas que podem induzir a erros de interpretação, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102** da BNCC.

Como mentir com gráficos: detalhes que podem te enganar

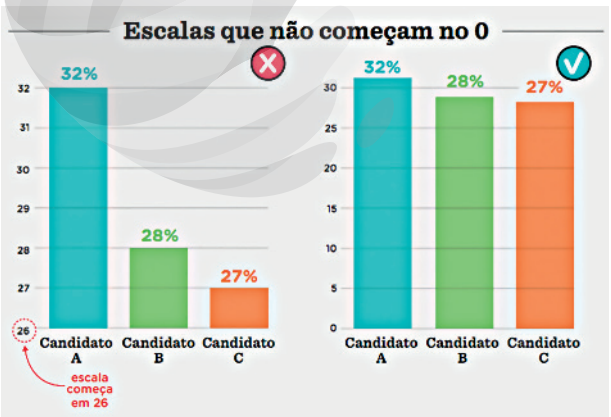
Escalas enganosas, declarações imprecisas e contas que não fecham: existem diversas maneiras de levar a interpretações erradas por meio de gráficos. Conheça algumas.

A visualização de dados pode ser uma ferramenta útil para apresentar um conjunto de dados, e traduzir visualmente informações numéricas. Mas ela também pode ser usada de maneira enganosa (mesmo que bem-intencionada). Veja abaixo alguns detalhes frequentes em gráficos enganosos e como notá-los.



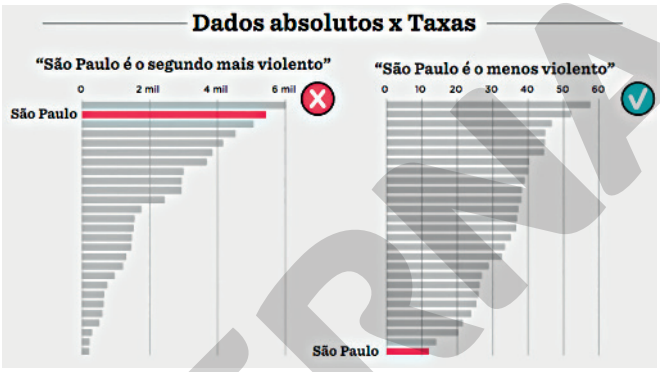
Em gráficos de *pizza*, o tamanho de cada fatia representa a proporção de cada categoria. Como partes de um todo, a soma dos seus valores percentuais deve resultar em 100% (a totalidade do conjunto).

Nesses gráficos, por exemplo, vemos os meios de acesso à internet utilizados pelos brasileiros. Como as pessoas podem utilizar mais de um meio – e, podiam responder mais de uma opção na pesquisa –, a representação em uma *pizza* não é correta, pois os valores ultrapassam o todo de 100% (já que uma pessoa pode ser contada mais [de] uma vez nos dados). Neste caso, é preferível utilizar barras independentes para cada categoria (que não sugerem a ideia de totalidade).



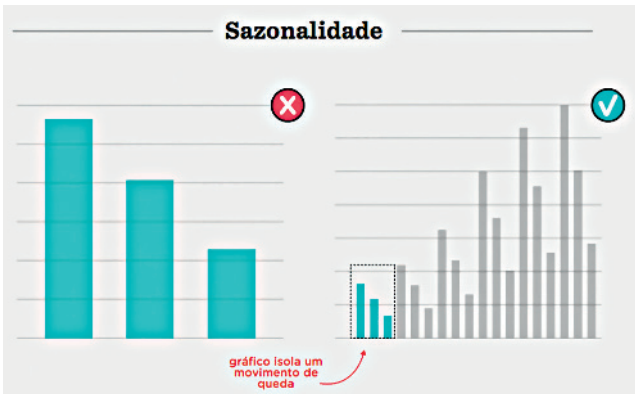
Em uma pesquisa de intenção de votos de uma eleição hipotética, o candidato A tem 32% das intenções de voto, enquanto o candidato B tem 28% e o candidato C tem 27%. A diferença entre os valores é pequena. No entanto, se esses valores forem mostrados em um gráfico de barras cuja escala não começa no 0, essa diferença é dramatizada, dando uma impressão de que é muito maior do que realmente é. No geral, é importante se manter atento para os valores de uma escala.

[...]



Existem alguns dados que são diretamente relacionados a outros e deve-se ter essa relação em mente para fazer comparações. Por exemplo: número de homicídios e tamanho da população. Se quisermos descobrir qual estado brasileiro é o mais violento, e visualizar o número de homicídios em cada estado, teremos o gráfico da esquerda, que indica São Paulo como o segundo estado mais violento (em 2015). Porém, devemos considerar o tamanho de sua população para entender o quão violento ele é proporcionalmente a ela. Isso é visualizado no gráfico à direita, que usa a taxa de "homicídios a cada 100 mil habitantes".

[...]



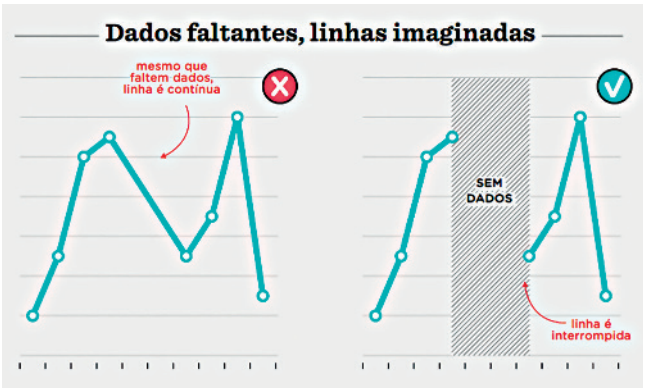
Existem alguns dados que apresentam padrões de variação sazonais. Isso quer dizer que eles repetem alguns padrões em determinadas épocas (por exemplo, desemprego cai em dezembro e janeiro e sobe em outros períodos do ano). É importante perceber isso quando olhamos para gráficos que isolam um determinado período do tempo

ILUSTRAÇÕES: NEXO JORNAL

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

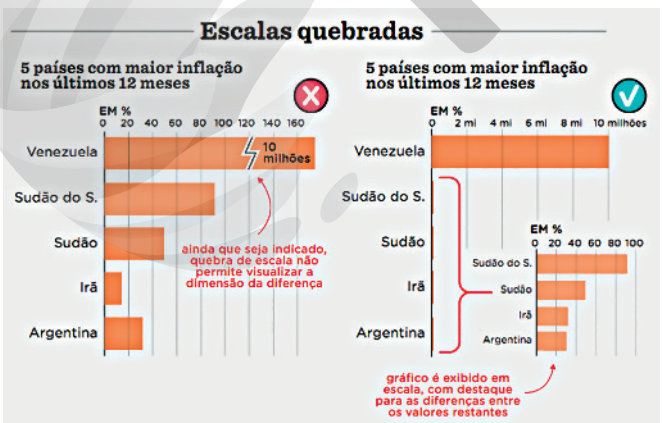
(como o gráfico hipotético à esquerda), levando a crer que um dado está caindo, quando na verdade, se olharmos o panorama geral, ele está subindo dentro da variação sazonal esperada (como mostra o gráfico à direita). Isso é útil também para ter cautela com afirmações que comparam algum dado sazonal, afirmando que aumentou ou diminuiu em relação ao mês anterior — quando o correto é comparar com o mesmo mês, em outro ano.

[...]



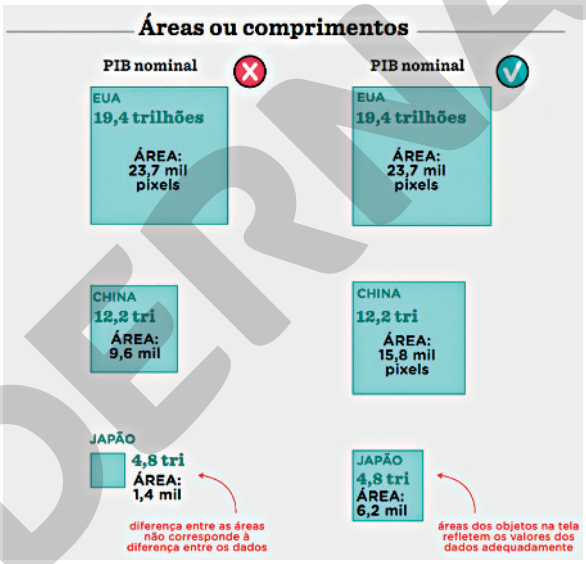
Seja por conta de problemas de coleta de dados, ou pela frequência irregular em que determinados estudos são realizados, é comum encontrar séries históricas interrompidas por dados faltantes. Essa ausência representa uma zona misteriosa: um período sobre o qual não se pode afirmar nada a partir da base de dados. Nesses casos, muitos gráficos de linha representam esse conjunto ligando os pontos disponíveis da série histórica, como no exemplo acima. Essa representação pode ser enganosa por causar a impressão de que os dados seguiram a variação mostrada na linha, o que não é possível saber. A prática indicada, no caso de dados faltantes, é ser transparente sobre os momentos em que existem ou não dados, interrompendo a linha onde não há informação ou até mesmo destacando visualmente o período problemático. [...]

[...]



Em gráficos de barras, é comum que determinado valor seja tão maior do que o restante que ele, sozinho, torne praticamente invisíveis todos os outros. Nessas situações, uma solução que costuma ser adotada é quebrar a escala do valor destoante, o que permitiria observar todas as barras. Entretanto, essa decisão deve considerar que a real dimensão do valor destoante não será contemplada no gráfico. No exemplo acima, o gráfico sem quebra de escala dá uma dimensão mais dramática da crise inflacionária que a Venezuela enfrenta. Para apresentar ao mesmo tempo os valores destoantes e o restante, existem alternativas, como usar destaques dentro do gráfico, mostrar as informações em gráficos separados, entre outros.

[...]



ILUSTRAÇÕES: NEXO JORNAL

Fontes: <https://www.nexojornal.com.br/grafico/2018/03/31/Como-mentir-com-gr%C3%A1ficos-7-detalhes-que-podem-te-enganar> e <https://www.nexojornal.com.br/grafico/2019/04/01/Como-mentir-com-gr%C3%A1ficos-mais-7-detalhes-que-podem-te-enganar>. Acessos em: 24 abr. 2020.

Uma maneira de visualizar dados bastante utilizada é a comparação de tamanhos de diferentes objetos como representação de valores numéricos – círculos ou retângulos costumam ser as formas mais utilizadas nesses gráficos. A pressuposição nesse tipo de visualização é de que quanto maior a área ocupada pela forma geométrica, maior o valor daquele dado. Entretanto, muitos gráficos desse tipo são desenhados utilizando o valor do dado não na área, mas na largura, altura ou diâmetro da forma geométrica, o que na prática distorce proporção entre as formas. No caso de um quadrado, como no exemplo acima, a área é o produto dos lados. E é essa a medida que deve ser proporcional ao dado que se pretende mostrar. Observe que o PIB do Japão é cerca de 25% do PIB americano, mas no exemplo enganoso, ainda que o lado do quadrado do Japão seja 25% do lado do quadrado dos EUA, a área de seu quadrado corresponde a apenas 6% da área do quadrado dos EUA. Já no gráfico corrigido, a proporção entre as áreas dos quadrados reflete a proporção entre os tamanhos dos PIBs.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EDITORA MODERNA

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Qual é a intenção do texto? alternativa c

a) Mostrar que o PIB do Japão é cerca de 25% do PIB dos Estados Unidos.

b) Apresentar gráficos de setores, de barras e de linha.

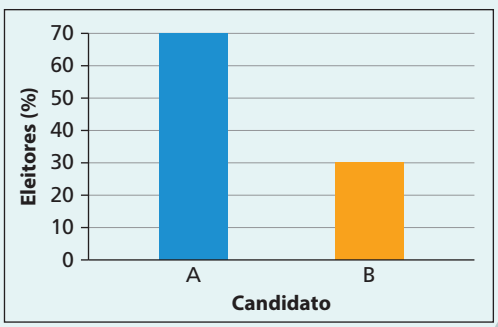
c) Mostrar que alguns gráficos podem ser construídos de modo que levem a uma interpretação errada.

d) Ressaltar que os gráficos enganosos sempre são construídos com más intenções.

2. Você já viu algum gráfico que apresenta qualquer dos problemas citados no texto? resposta pessoal

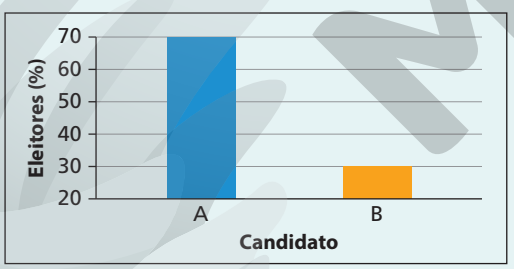
3. (Enem) O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.

Gráfico 1



Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2



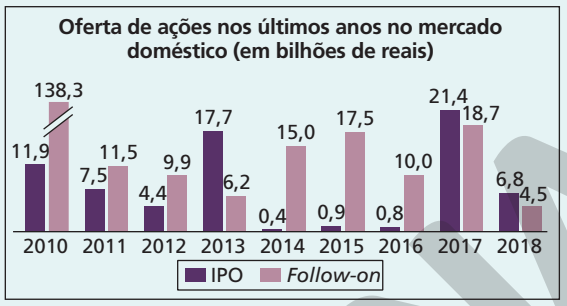
Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é:

alternativa e

a) 0 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{2}{15}$ **e)** $\frac{8}{35}$

4. Observe o gráfico a seguir, reproduzido de um jornal, e responda às questões.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 29 abr. 2019, p. B3.

Tipos de oferta de ações

IPO: Trata-se de uma operação de abertura de capital da empresa. Nesse caso, a empresa faz o lançamento dos papéis na bolsa de valores em um processo chamado de oferta pública de ações.

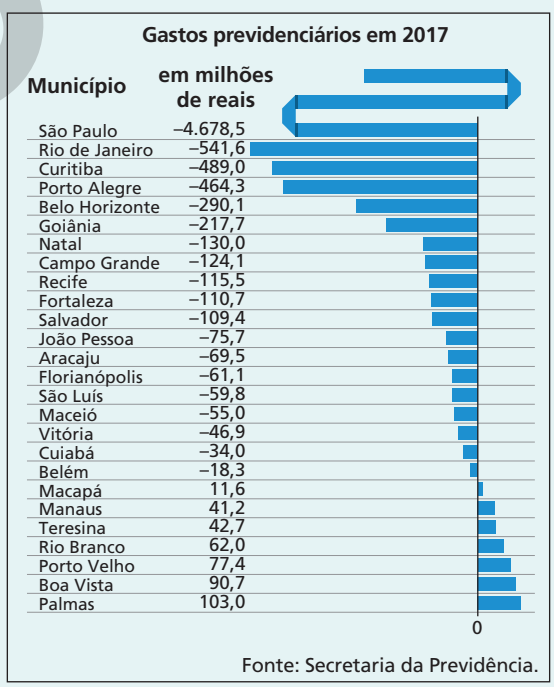
Follow-on: São ofertas de companhias que já têm o capital aberto na bolsa de valores.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Que recurso foi usado nesse gráfico para mostrar a oferta de ações do tipo *follow-on* em 2010?

b) Da maneira como o gráfico foi construído, fica evidente a real dimensão do valor destoante dos demais?

5. Observe o gráfico a seguir, reproduzido de um jornal.



Fonte: Secretaria da Previdência.

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 5 jun. 2019, p. B3.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

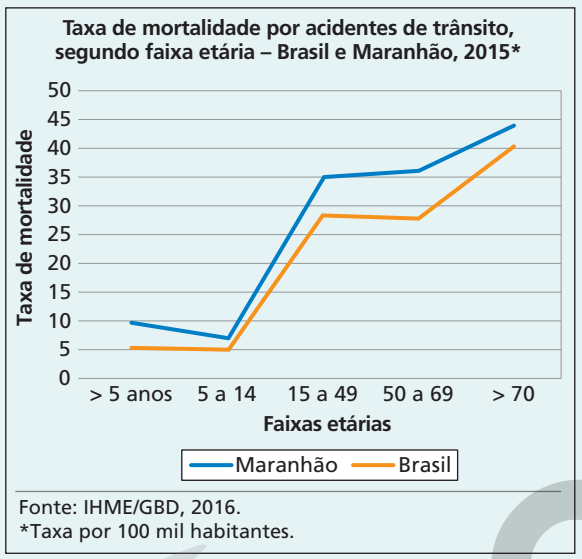
a) Que tipo de gráfico é esse? Ver resolução no Guia do professor.

b) Nesse gráfico, o comprimento das barras é proporcional aos valores que elas representam?

c) Que artifício foi usado para representar os gastos de São Paulo? Você acha que o gráfico mostra a real dimensão dos dados?

d) Usando uma planilha eletrônica, construa um gráfico de barras horizontais que represente os dados.

6. Observe o gráfico a seguir.



Fonte: IHME/GBD, 2016.
*Taxa por 100 mil habitantes.

Fonte: <http://svs.aids.gov.br/dantps/centrais-de-conteudos/publicacoes/saude-brasil/saude-brasil-2018-analise-situacao-saude-segundo-perfil-mortalidade-estados-brasileiros-distrito-federal.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020.

a) Que tipo de gráfico é esse? Ver resolução no Guia do professor.

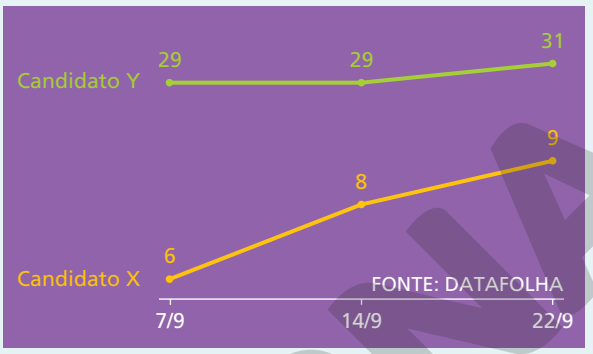
b) Você acha que o tipo de gráfico escolhido foi adequado? Converse com um colega a respeito. Em caso negativo, que tipo de gráfico seria mais adequado para representar esses dados?

c) Em sua opinião, mais algum equívoco foi cometido na construção desse gráfico? Se sim, qual?

7. Durante os meses que antecedem as eleições, é muito comum encontrar na mídia gráficos que mostram as intenções de voto da população. Muitas vezes, esses gráficos são construídos com dados confiáveis, de institutos de pesquisa sérios, mas o modo com que as representações gráficas são construídas pode levar a uma impressão equivocada. Veja os casos apresentados a seguir e faça o que se pede.

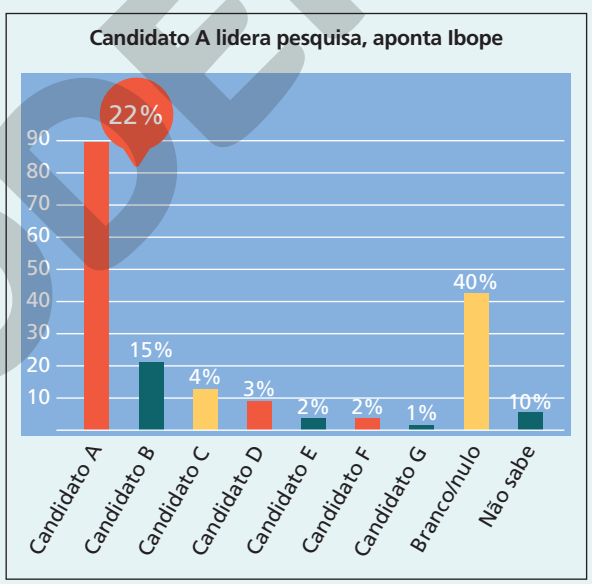
Os gráficos dessa atividade foram reproduzidos como divulgados na ocasião, somente alterando-se os nomes dos candidatos envolvidos.

- No dia 24 de setembro de 2016, o candidato X apresentou, em sua propaganda política na televisão, o gráfico abaixo, com resultados de uma pesquisa do Datafolha.



Fonte: Propaganda política do candidato X na televisão.

- Em 2018, o candidato A publicou, em sua rede social, o gráfico a seguir.



Fonte: Rede social do candidato A.

a) Analise os gráficos e responda: esses gráficos foram bem construídos? Um leitor desatento pode ser levado a uma interpretação equivocada dos fatos pela observação desses gráficos? Aponte detalhes que fundamentem sua resposta. Ver resolução no Guia do professor.

b) Construa, usando uma planilha eletrônica, dois gráficos que poderiam substituir os gráficos anteriores, respeitando as proporções dos valores expressos em cada um.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Para a leitura e a compreensão desse infográfico, os alunos vão usar diversos conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações envolvendo contextos sociais e analisarão implicações desse cenário de envelhecimento da população na área da saúde, no mundo do trabalho, na previdência etc. Tudo isso contribui para o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** da BNCC.
Esse infográfico permite, ainda, uma discussão sobre a situação dos idosos no Brasil, a importância de respeitar os direitos da população dessa faixa etária e a exploração do tema contemporâneo **Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso**.

CAPÍTULO

3 Medidas estatísticas

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT315**, **EM13MAT316**, **EM13MAT407** e **EM13MAT510**.

IDADE MEDIANA DA POPULAÇÃO MUNDIAL

Idade mediana é a idade que separa os 50% mais jovens dos 50% mais velhos de determinado local. A população mundial está ficando mais velha – principalmente nos países desenvolvidos, onde a expectativa de vida é maior e a taxa de fecundidade é cada vez mais baixa.

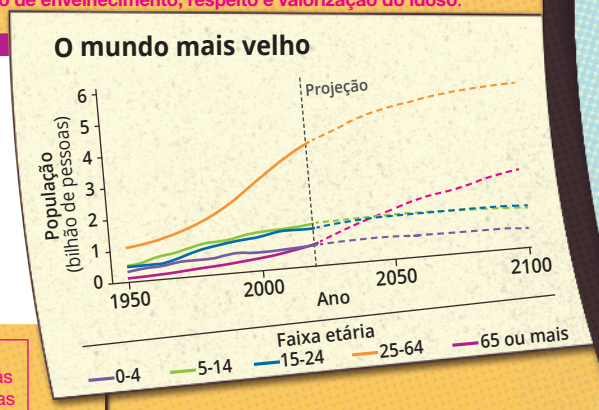
Desafios econômicos

O envelhecimento da população é um fenômeno mundial, e os governos precisam se adaptar ao novo quadro social. Os principais desafios a partir de agora são:

A área da saúde, que precisa atender à demanda de pessoas mais velhas.

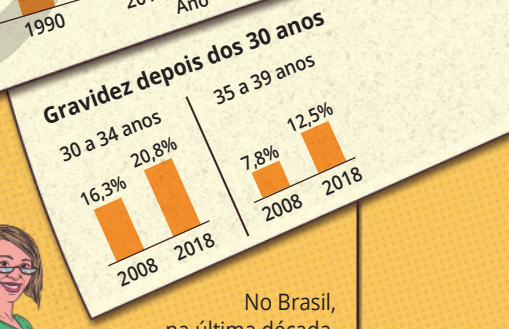
A previdência social, que precisa ter receita para cobrir as despesas com a aposentadoria de um número maior de idosos – mesmo com a redução progressiva da população jovem que trabalha para manter o sistema.

O mercado de trabalho, que precisa criar condições para gerar emprego e contratações para a população mais velha.



Em 2018, pela primeira vez na história, o número de pessoas com 65 anos ou mais superou o número de crianças com menos de 5 anos. E a projeção é de que, até 2050, o número de idosos também ultrapasse o número de jovens e adolescentes entre 15 e 24 anos, somando mais de 1,5 bilhão de pessoas nessa faixa etária.

Nas últimas décadas, todas as regiões do mundo apresentaram queda na taxa de fertilidade – que foi de 3,2 nascidos vivos em 1990 para 2,5 em 2019. Essa redução está ligada a um conjunto de mudanças de comportamento da mulher, desde sua presença cada vez maior no mercado de trabalho até a opção por adiar a maternidade ou não ter filhos.



No Brasil, na última década, houve um aumento na proporção de mulheres que tiveram filhos com mais de 30 anos.

Objetivos do capítulo

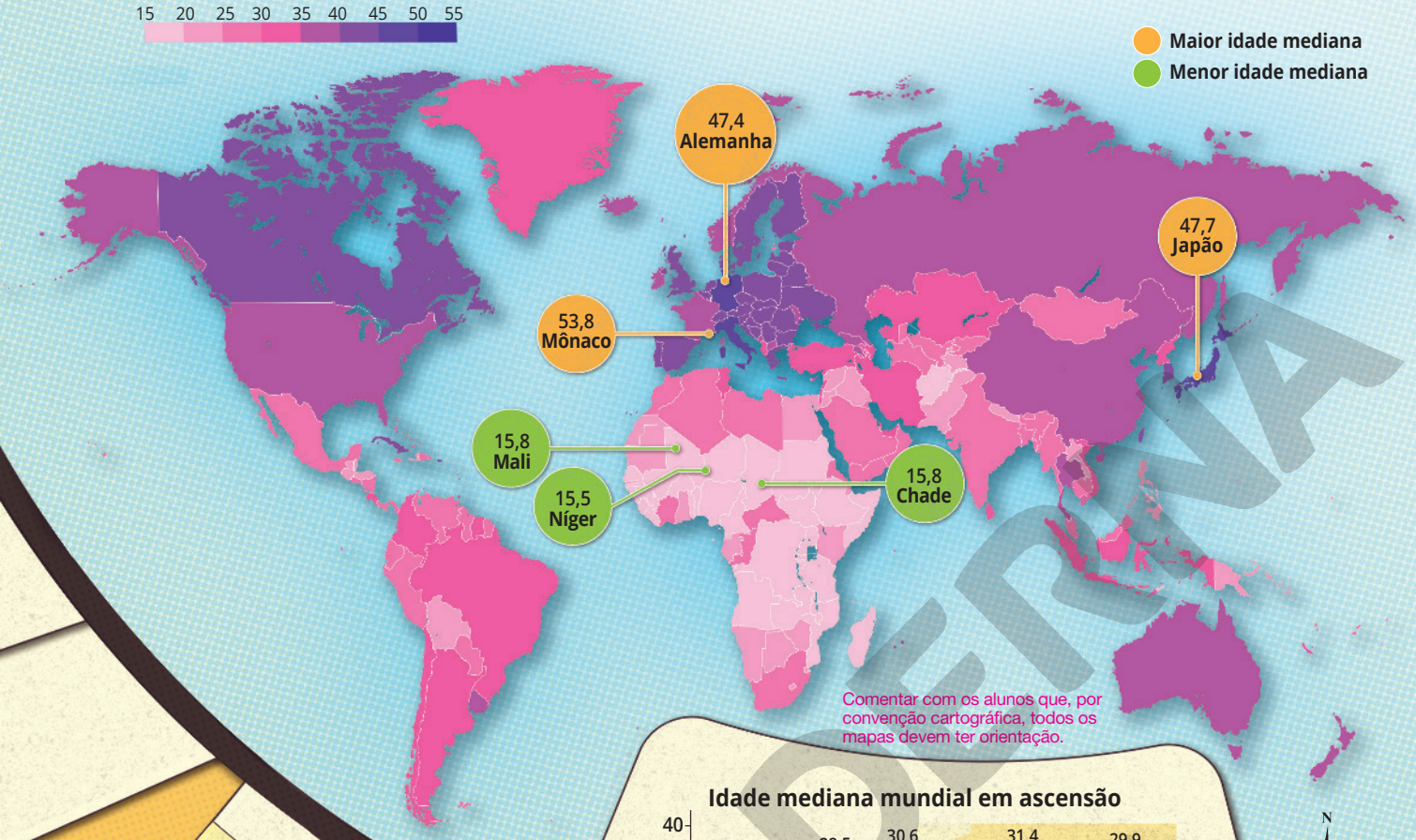
- Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam média, moda e mediana de uma distribuição.
- Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.
- Ler e interpretar *box-plots* e analisar a conveniência de seu uso.
- Ler e interpretar diagramas de dispersão.

Em 1990, a expectativa de vida média mundial era de 64,2 anos. Em 2018, ela saltou para 72,6 anos – quase nove anos a mais. No Brasil, em 2018, a expectativa de vida ao nascer era de 76,3 anos – sendo que as mulheres viviam mais que os homens: 79,9 anos contra 72,8 anos, respectivamente.

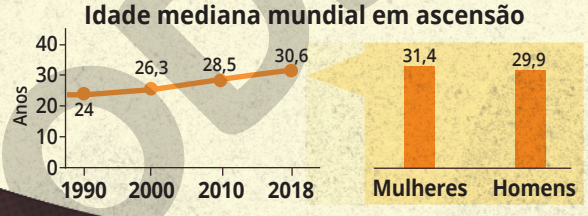
Dados obtidos em: CIA. *The World Factbook*. Disponível em: <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/fields/343rank.html>; United Nations. *World Population Prospects 2019*. Disponível em: <https://population.un.org/wpp/DataQuery/>; IBGE. *Projeção da população do Brasil e das Unidades da Federação*. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acessos em: 18 mar. 2020.

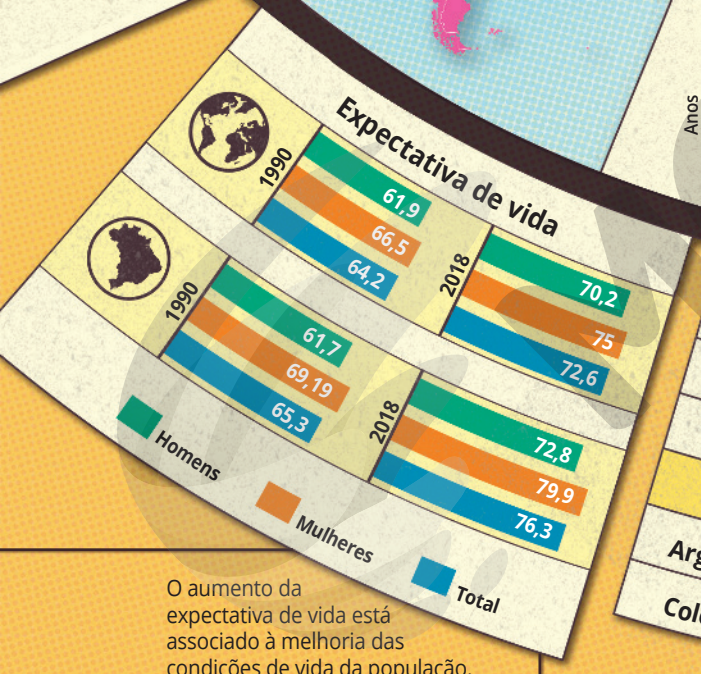
Observe, no mapa, a idade mediana* em algumas regiões do mundo.

*Dados relativos a 2018.



Comentar com os alunos que, por convenção cartográfica, todos os mapas devem ter orientação.





O aumento da expectativa de vida está associado à melhoria das condições de vida da população. Entre os principais fatores estão:

- Acesso a água tratada e esgoto
- Redução do índice de violência
- Melhoria dos serviços de saúde
- Alimentação saudável

Idade mediana na América do Sul

	1990	2000	2010	2018
Uruguai	30,7 anos	31,6 anos	33,9 anos	35,1 anos
Chile	25,7 anos	28,7 anos	32,2 anos	34,8 anos
Brasil	**22,6 anos**	**25,3 anos**	**29,2 anos**	**32,4 anos**
Argentina	27 anos	27,6 anos	29,6 anos	31,9 anos
Colômbia	21,9 anos	24,1 anos	27,5 anos	30,4 anos

Em 2018, o Brasil tinha a terceira maior idade mediana da América do Sul: 32,4 anos. Em 1990, a idade mediana da população brasileira era de 22,6 anos. Segundo o IBGE, até 2060, o percentual de pessoas com mais de 65 anos passará de 9,2% para 25,4%. Isso significa que 1 em cada 4 brasileiros será idoso.

ILUSTRAÇÃO: MARCOS DE LIMA

MODERNA

A competência específica **3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

O mapa da dupla de páginas anterior mostra a idade mediana em diversas regiões do mundo, em 2018, de acordo com a classificação da Agência Central de Inteligência (CIA). Observe que esse mapa tem uma escala de cores para a idade mediana variando de 15 a 55 anos: quanto mais escura é a cor no mapa, maior é a idade mediana da população desse local.

Os países com maior idade mediana em 2018 eram Mônaco (com 53,8 anos), Japão (com 47,7 anos) e Alemanha (com 47,4 anos), e os com menor idade eram Chade, Mali (ambos com 15,8 anos) e Níger (com 15,5 anos). O Brasil ocupava a 102ª posição, com idade mediana de 32,4 anos.

Nesse tópico, os alunos vão resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem as medidas de tendência central, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316** da BNCC.

1 Medidas de tendência central

Para realizar uma pesquisa estatística, é preciso coletar e organizar dados de uma população ou de uma amostra significativa a respeito do tema analisado. Como, em geral, se obtém uma grande quantidade de dados para apresentar o resultado da pesquisa, pode ser necessário escolher uma **medida** que resuma os dados obtidos.

No contexto apresentado, por exemplo, temos a idade **mediana** da população de diversas regiões. Além da mediana, outras medidas podem ser empregadas para representar dados (**medidas de tendência central**) e para indicar quanto os dados estão dispersos em relação a essa medida representativa (**medidas de dispersão**).

As medidas estatísticas que descrevem a tendência que os dados têm de agrupamento em torno de certos valores recebem o nome de **medidas de tendência central**.

Neste capítulo, vamos estudar as medidas de tendência central: média, moda e mediana, e as medidas de dispersão: amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão.

1.1 Média aritmética

Das três medidas de tendência central que estudaremos, a média aritmética, chamada simplesmente de média, é a mais conhecida e utilizada. Ela pode ser facilmente calculada e interpretada:

Média aritmética é o quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações. Indicamos a média por $\overline{x}$.

Assim, temos:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são os valores que a variável assume e n é a quantidade de valores no conjunto de dados.

Observação

A letra grega maiúscula Σ (sigma) é usada para indicar uma soma.

A indicação $\sum_{i=1}^{n} x_i$ significa o **somatório** dos valores x para i variando de 1 a n.

Veja outros exemplos:

- $\sum_{k=2}^{100} k = 2 + 3 + \ldots + 100$
- $\sum_{i=m}^{n} f_i = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + \ldots + f_n$, para $m < n$

Exemplo

Na 1ª rodada da série A do Campeonato Brasileiro de Futebol 2019, foram realizados 10 jogos, cujo número de gols por partida está apresentado na tabela abaixo.

1ª rodada da série A do Campeonato Brasileiro de Futebol 2019										
Partida	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Número de gols	2	3	2	4	3	4	5	5	4	1

Dados obtidos em: <https://conteudo.cbf.com.br/cdn/201908/20190806113927_84.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2020.

Vamos calcular a média de gols por partida dessa rodada, adicionando o número de gols de cada partida e dividindo o total obtido pelo número de partidas.

$$\overline{x} = \frac{2 + 3 + 2 + 4 + 3 + 4 + 5 + 5 + 4 + 1}{10} = \frac{33}{10} = 3{,}3$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nesse boxe será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Logo, a média de gols por partida nessa rodada foi de 3,3.

Observe que o valor obtido para a média não coincidiu com nenhum dos números de gols por partida, pois a média não é necessariamente igual a um dos valores da variável.

A média de gols serve de parâmetro para, por exemplo, avaliar até que ponto os jogos da rodada foram ofensivos.

Média aritmética ponderada

Como vimos, para o cálculo da média aritmética, todos os valores são adicionados um a um. Porém, em uma situação como a apresentada no exemplo a seguir, em que há valores repetidos, não é preciso adicioná-los um a um para calcular a média. Observe o recurso empregado em casos como esse.

Exemplo

Na escola Aprender, foi feita uma pesquisa sobre a idade dos alunos do 2º ano A, que apresentou os seguintes resultados:

Idade dos alunos do 2º ano A			
Idade	15	16	17
Quantidade de alunos	18	20	2

Fonte: Escola Aprender.

Como os valores se repetem (uma mesma idade ocorre mais de uma vez), é possível calcular a média das idades da seguinte maneira:

$$\overline{x} = \frac{18 \cdot 15 + 20 \cdot 16 + 2 \cdot 17}{18 + 20 + 2} = \frac{624}{40} = 15{,}6$$

O número de vezes que um valor se repete recebe o nome de **peso**, e a média aritmética calculada com pesos é chamada de **média aritmética ponderada**.

Assim:

$$\overline{x} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

em que x_i representa os valores da variável e p_i, os respectivos pesos.

Observe que os pesos correspondem às frequências absolutas (f_i) de cada valor.

O peso também pode representar a importância que cada valor tem na composição da média ponderada.

Exemplo

Em 2019, a nota final da 1ª fase do vestibular da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp) poderia ser calculada, caso o candidato assim escolhesse, pela média entre a nota obtida na 1ª fase e a nota da parte objetiva do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Mas não era uma média simples, pois havia pesos para as notas: a nota da prova de conhecimentos gerais do vestibular tinha peso 4 no cálculo da média, e a nota da parte objetiva da prova do Enem, peso 1. A nota final ($\overline{x}$) da 1ª fase era dada por $\overline{x} = \frac{4 \cdot CG + 1 \cdot E}{5}$, em que CG é o percentual de acertos na prova de conhecimentos gerais do vestibular (escala de 0 a 100) e E é a média aritmética simples do percentual de acertos da parte objetiva da prova do Enem (escala de 0 a 100).

FÁBIO MAZZITELLI/ACI UNESP

Alunos fazendo a prova do vestibular da Unesp, São Paulo, 2018.

Pensamento computacional

Algoritmo

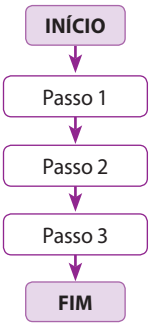
O **algoritmo**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita de passos para resolver um problema ou realizar uma tarefa. Para escrever um algoritmo, com início e fim, é preciso ter clareza e ordenar corretamente os passos para que o objetivo seja atingido.

Veja o exemplo a seguir de um algoritmo, em linguagem corrente e em um fluxograma, para calcular a média aritmética.

Passo 1. Dados x1, x2, ..., x_n, calcula-se o somatório dos valores de x.

Passo 2. Divide-se a soma obtida no passo 1 por n (quantidade de valores no conjunto de dados).

Passo 3. O quociente obtido no passo 2 é a média aritmética e encerra-se o algoritmo.



NELSON MATSUDA

Observe que esse algoritmo pode ser usado para calcular a média aritmética de qualquer conjunto de dados discretos.

Reflita

A soma dos pesos pode ser igual a zero? Justifique.

Não, pois a soma do número de vezes que cada valor se repete é sempre positiva.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1.2 Moda

Usa-se moda quando o objetivo é, por exemplo, identificar a maior preferência em dada situação, definir a faixa etária mais frequente de pessoas em certo local ou saber a numeração de roupas mais vendida de determinada marca. Em contraste com a média e a mediana, a moda pode ser empregada para variáveis qualitativas.

Moda é(são) o(s) valor(es) que aparece(m) com maior frequência no conjunto de valores observados. Indicamos a moda por ***Mo***.

Exemplos

a) O conjunto de valores 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3 e 4 tem moda 1, pois é o valor que aparece o maior número de vezes.

b) Em uma pesquisa sobre tipo sanguíneo com 20 pessoas, os resultados foram:

O, A, O, AB, B, A, O, AB, B, B, AB, O, B, AB, O, A, A, O, O, A

Nessa pesquisa, 7 pessoas têm tipo sanguíneo O; 5 pessoas, tipo A; 4 pessoas, tipo AB; e 4 pessoas, tipo B. Portanto, o tipo sanguíneo O é a moda dessa amostra, pois tem maior frequência.

Quando todos os valores apresentam a mesma frequência, não há moda na distribuição considerada (amostra **amodal**). Existem também conjuntos de dados com duas modas (**bimodais**) ou mais modas (**multimodais**).

Mais exemplos

- O conjunto de valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6 é amodal, ou seja, não tem moda.
- O conjunto de valores 1, 2, 2, 3, 4, 4 e 5 é bimodal, pois tem duas modas: 2 e 4.

1.3 Mediana

Mediana de um grupo de valores previamente ordenados, de modo crescente ou decrescente, é o valor que divide esse grupo em duas partes com o mesmo número de termos. Indicamos a mediana por ***Me***.

A mediana é uma medida usada quando os valores da amostra são discrepantes.

No estudo da mediana, devemos considerar que:

- quando há um grupo de valores em **número ímpar de dados**, a mediana é o termo central da distribuição (nesse caso, ela pertence ao grupo de valores observado);
- quando há um grupo de valores em **número par de dados**, a mediana é a média aritmética dos termos centrais (nesse caso, ela pode não pertencer ao grupo de valores observado).

Observação

Sendo n o número de termos da distribuição, temos:

- se n é ímpar, a posição do termo central é dada por $\left(\frac{n+1}{2}\right)$;
- se n é par, as posições dos dois termos centrais são dadas por $\frac{n}{2}$ e $\left(\frac{n}{2}+1\right)$.

Exemplo

A tabela abaixo mostra os valores pagos em contas de água no primeiro semestre do ano pela pousada Descanse Bem.

Valores pagos em contas de água	
Mês	**Valor (em real)**
Janeiro	562,33
Fevereiro	350,12
Março	56,17
Abril	42,50
Maio	40,43
Junho	46,45

Fonte: Pousada Descanse Bem.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Para calcular a média do valor pago no primeiro semestre, fazemos:

$$\overline{x} = \frac{562{,}33 + 350{,}12 + 56{,}17 + 42{,}50 + 40{,}43 + 46{,}45}{6} = 183{,}00$$

Portanto, em média, o valor da conta de água dessa pousada foi R$ 183,00.
Repare que essa medida não é fiel à realidade, uma vez que, de seis contas, quatro apresentam valor muito menor que a média encontrada. Isso ocorre porque, nos meses de janeiro e fevereiro, o consumo de água na pousada foi muito maior que o dos meses de março a junho.
Em situações como essa, em que existem valores discrepantes, a mediana é melhor que a média para representar o perfil da amostra. Acompanhe o cálculo a seguir.
Primeiro, organizamos os dados em ordem crescente:

40,43 42,50 46,45 56,17 350,12 562,33

Em seguida, identificamos o valor que fica "no meio". Como, no caso, temos um número par de dados, precisamos calcular a média aritmética dos dois termos centrais:

$$Me = \frac{46{,}45 + 56{,}17}{2} = 51{,}31$$

A mediana, então, representa os valores da conta de água dessa pousada no primeiro semestre do ano e traduz melhor a realidade do que a média.

Observação

Note que metade dos valores da amostra está abaixo da mediana e a outra metade está acima.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R1. Os salários, em real, de 18 funcionários de uma empresa estão relacionados abaixo.

1.190	1.190	1.190	1.230	1.230	1.230	1.370	1.370	1.370
1.370	1.370	1.370	2.279	2.279	2.540	2.540	3.020	3.020

a) Qual é o salário mais frequente dessa empresa?
b) Qual é o salário médio desses funcionários?
c) Qual é o salário mediano desses funcionários?

▸ **Resolução**

a) A moda dos salários é R$ 1.370,00, já que 1.370 é o valor que mais se repete na relação de salários apresentada.
b) Para determinar o salário médio, podemos calcular a média ponderada dos salários:

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 1.190 + 3 \cdot 1.230 + 6 \cdot 1.370 + 2 \cdot 2.279 + 2 \cdot 2.540 + 2 \cdot 3.020}{18} = \frac{31.158}{18} = 1.731$$

Logo, o salário médio desses funcionários é R$ 1.731,00.
c) Temos um número par de valores. Então, precisamos encontrar os dois termos centrais da sequência crescente, isto é, o 9º e o 10º termos, e calcular a média entre eles. Como esses termos são ambos iguais a 1.370, sua média é 1.370. Portanto, o salário mediano é R$ 1.370,00.

R2. No primeiro mês de um bimestre, um aluno obteve 4,5 de nota média entre dois trabalhos. No segundo mês, ele conseguiu nota 7 em uma prova e nota 9 em um trabalho. Considerando todas as notas, calcular a média bimestral desse aluno, sabendo que todos os trabalhos e a prova têm o mesmo peso.

▸ **Resolução**

Indicando os dois primeiros trabalhos por t_1 e t_2, podemos escrever:

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = 4{,}5 \Rightarrow t_1 + t_2 = 9$$

Indicando a nota da prova por p e a do terceiro trabalho por t_3, teremos como média bimestral:

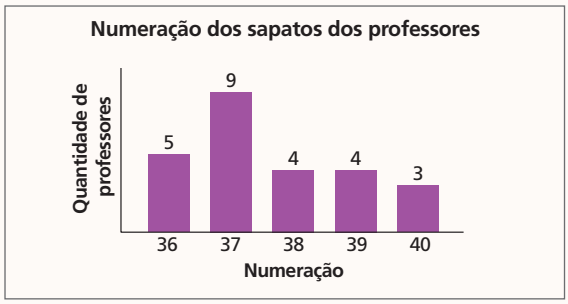
$$\overline{x} = \frac{t_1 + t_2 + p + t_3}{4}$$

$$\overline{x} = \frac{9 + 7 + 9}{4} = 6{,}25$$

Portanto, a média bimestral desse aluno será 6,25.

R3. Observe o gráfico a seguir, referente à numeração dos sapatos usados pelos professores de uma escola.

ADILSON SECCO



Dados fictícios.

Calcular a média, a mediana e a moda da numeração dos sapatos desses professores.

▸ **Resolução**

- Podemos calcular a média da seguinte maneira:

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 36 + 9 \cdot 37 + 4 \cdot 38 + 4 \cdot 39 + 3 \cdot 40}{5 + 9 + 4 + 4 + 3}$$

$$\overline{x} = \frac{941}{25} = 37{,}64$$

- Da observação do gráfico, o valor com maior frequência é a numeração 37, com 9 professores. Portanto, $Mo = 37$.

- Para calcular a mediana, vamos inicialmente construir uma tabela com os dados organizados de modo crescente e com as frequências absoluta e absoluta acumulada.

Numeração dos sapatos dos professores		
Numeração	f_i	F_i
36	5	5
37	9	14
38	4	18
39	4	22
40	3	25
	$\Sigma f_i = 25$	

Dados fictícios.

Observando a coluna das frequências acumuladas, caso organizássemos todos os dados em sequência, a numeração 36 ocuparia as posições de 1 a 5, a numeração 37, as posições de 6 a 14, a numeração 38, de 15 a 18, a numeração 39, de 19 a 22, e a numeração 40, de 23 a 25.

Como há um número ímpar de dados, a mediana é o valor que ocupa a posição central: $\frac{(25 + 1)}{2} = 13$; nesse caso, o valor que ocupa a 13ª posição. Ou seja, $Me = 37$.

2. c) Espera-se que os alunos identifiquem a mediana como a medida mais representativa nessa situação, pois ela não é afetada por valores muito baixos, diferentemente da média.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Determine a média, a mediana e a moda para cada um dos conjuntos de dados abaixo. Ver resolução no Guia do professor.

a) 12, 13, 14, 1, 2, 3, 12, 11, 11, 11
b) 51, 4, 34, 78, 65, 90, 106
c) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5
d) 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7
e) −10, −6, −6, −4, −1, −3

2. A seguir, estão os valores mensais referentes ao consumo de energia elétrica, em quilowatt-hora, medidos em uma residência durante 12 meses.

50 267 279 262 226 298
294 272 297 257 244 50

a) Qual foi o consumo médio do período? 233 quilowatt-hora
b) Qual foi o consumo mediano? 264,5 quilowatt-hora
c) Qual das duas medidas você acha que representa melhor o consumo de energia elétrica dessa residência?

3. Estão relacionados abaixo os lucros, em real, que uma empresa obteve durante os 6 meses do primeiro semestre de certo ano.

3.270 3.649 3.381 3.541 3.258 3.533

a) Calcule o lucro médio desse período. ≃ R$ 3.438,67
b) Qual foi o lucro mediano nesses 6 meses? R$ 3.457,00
c) Observando apenas os resultados obtidos nos itens **a** e **b**, é possível determinar a moda? Justifique sua resposta. Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

4. A seguir, estão os números de acidentes de trabalho que ocorreram em uma metalúrgica nos 12 meses de certo ano.

2 1 0 3 1 1 0 0 0 1 1 1

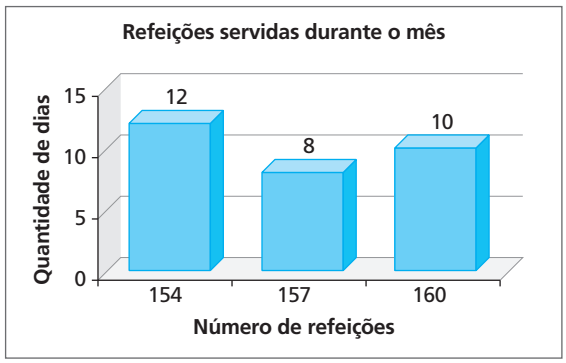
a) Qual é a média mensal de acidentes que ocorreram nessa metalúrgica nesse ano? ≃ 0,917
b) Qual é o número mensal de acidentes mais frequente no período? 1
c) Qual é o número mediano de acidentes? 1

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7. b) e **c)** Espera-se que os alunos percebam que não é possível calcular a média e a mediana da distribuição, pois essas medidas só fazem sentido para variáveis quantitativas, e não para variáveis qualitativas.

5. Durante certo mês, foi computado o número de refeições servidas por dia no restaurante Sabor. Os resultados estão apresentados no gráfico a seguir.

ADILSON SECCO



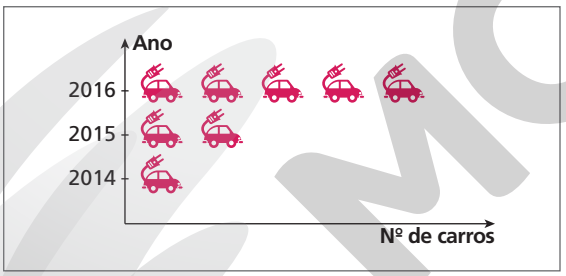
Dados fornecidos pelo restaurante Sabor.

- Qual foi o número médio de refeições servidas por dia nesse mês? 156,8

6. (Enem) De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.

No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca A, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.

NELSON MATSUDA



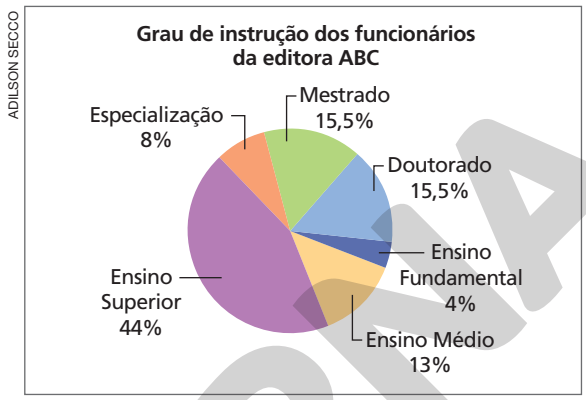
Fonte: TecMundo, 5 dez. 2017.

A média anual do número de carros vendidos pela marca A, nos anos representados no gráfico, foi de:

a) 192
b) 240
c) 252
d) 320 alternativa d
e) 420

7. Observe o gráfico a seguir, que apresenta a distribuição do grau de instrução dos funcionários da editora ABC.

ADILSON SECCO



Dados fornecidos pela editora ABC.

a) Qual é a moda do grau de instrução dos funcionários? Ensino Superior
b) Calcule a média e a mediana dessa distribuição.
c) Você conseguiu resolver o item **b**? Converse com um colega sobre a possibilidade ou não de fazer esse cálculo e anote, no caderno, suas conclusões.

8. Até a 8ª rodada de um campeonato de futebol de 2020, a média, em 80 jogos, foi 2,525 gols por jogo. A média do campeonato de 2019 foi 2,9 gols por jogo. Quantos gols deveriam ter sido marcados, em 10 partidas, para que, na 9ª rodada, fosse atingida a média de gols do campeonato de 2019? 59 gols

9. Elabore um problema em que seja necessário calcular a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados. resposta pessoal

10. Elabore um problema com um conjunto de dez dados que tenha mediana e média iguais a 6.

10. resposta pessoal
Exemplo de conjunto de dados: 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 10

1.4 Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos

Vamos estudar como calcular a média, a moda e a mediana quando os dados estão agrupados em intervalos (ou classes).

Para isso, definimos **ponto médio** (PM_i) de uma classe como a média aritmética entre os valores extremos da classe. Por exemplo, o ponto médio da classe [2, 6[é: $PM = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Nesse cálculo, admitimos que os extremos do intervalo real [2, 6[são 2 e 6, apesar de o intervalo ser aberto em 6.

Para calcular a média com dados agrupados em intervalos, consideramos que a

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

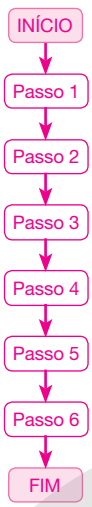
MODERNA

Nesse boxe será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos terão de escrever um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Pensamento computacional

Escreva um algoritmo, em linguagem corrente e em um fluxograma, para calcular a média aritmética de um conjunto de dados agrupados em intervalos.

Passo 1. Dadas as classes de um conjunto de dados, calcula-se o ponto médio de cada classe.
Passo 2. Multiplica-se cada ponto médio obtido pela frequência da classe correspondente.
Passo 3. Adiciona-se todos os produtos obtidos no passo 2.
Passo 4. Calcula-se a soma das frequências.
Passo 5. Divide-se o valor obtido no passo 3 pelo somatório obtido no passo 4.
Passo 6. O quociente obtido no passo 5 é a média aritmética e encerra-se o algoritmo.

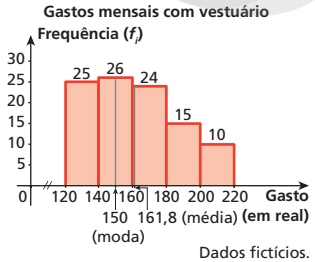


NELSON MATSUDA

É importante os alunos perceberem que, em geral, as diferentes linguagens concorrem harmonicamente para mostrar as diferentes facetas de um mesmo conceito, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

Observação

É possível localizar no gráfico as medidas de tendência central dos valores agrupados por classes. Observe a localização gráfica da moda e da média no caso do exemplo ao lado.



ADILSON SECCO

frequência de cada classe está concentrada no ponto médio dessa classe. Assim, adicionamos os produtos de cada frequência (f_i) pelo ponto médio (PM_i) correspondente e dividimos esse total pela soma das frequências:

$$\overline{x} = \frac{f_1 \cdot PM_1 + f_2 \cdot PM_2 + \ldots + f_n \cdot PM_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i \cdot PM_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

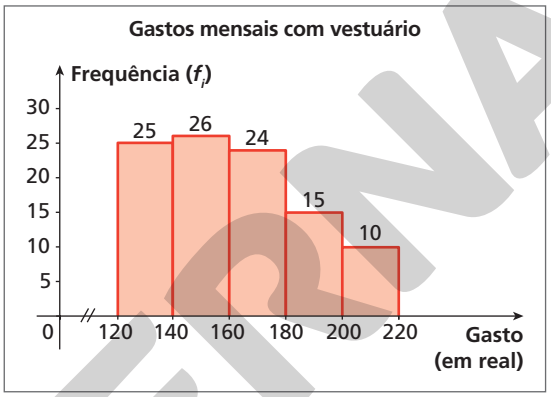
Para calcular a moda, devemos inicialmente identificar o intervalo que apresenta a maior frequência, denominado **classe modal**. Em seguida, calculamos o ponto médio da classe modal, que será a moda da distribuição.

Exemplo

Considere os gastos mensais com vestuário, em real, extraídos de uma pesquisa feita com 100 pessoas a respeito de seus orçamentos familiares.

Gastos mensais com vestuário	
Gasto mensal (em real)	f_i
120 ⊢ 140	25
140 ⊢ 160	26
160 ⊢ 180	24
180 ⊢ 200	15
200 ⊢ 220	10

Dados fictícios.



ADILSON SECCO

Dados fictícios.

Vamos complementar a tabela com o ponto médio de cada classe e o produto desse ponto médio pela frequência correspondente.

Gastos mensais com vestuário			
Gasto mensal (em real)	f_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
120 ⊢ 140	25	130	3.250
140 ⊢ 160	26	150	3.900
160 ⊢ 180	24	170	4.080
180 ⊢ 200	15	190	2.850
200 ⊢ 220	10	210	2.100
	$\Sigma f_i = 100$		$\Sigma(f_i \cdot PM_i) = 16.180$

Dados fictícios.

Podemos obter a média calculando o quociente entre a soma dos produtos de cada frequência pelo ponto médio correspondente e a soma das frequências. Assim:

$$\overline{x} = \frac{16.180}{100} = 161{,}80$$

A classe modal dessa distribuição é 140 ⊢ 160; então, $Mo = 150$.

Logo, a média mensal de gastos com vestuário das pessoas pesquisadas é R$ 161,80, e a moda é R$ 150,00.

Quando os dados apresentados estão agrupados em classes, para calcular a mediana devemos primeiro encontrar a classe a que pertence a mediana, chamada de **classe mediana**.

A classe mediana é aquela que apresenta a frequência acumulada imediatamente maior que o quociente $\frac{\Sigma f_i}{2}$. Assim, uma vez localizada a classe mediana, encontramos o valor mediano Me por meio da igualdade:

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

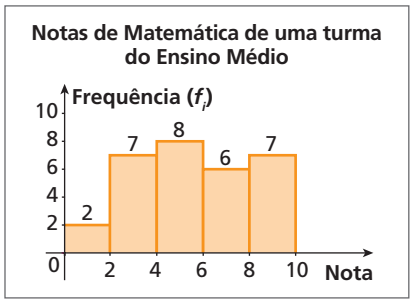
$$\frac{\text{diferença entre os extremos da classe mediana}}{\text{frequência da classe mediana}} = \frac{\text{diferença entre } Me \text{ e o extremo inferior da classe mediana}}{\text{diferença entre } \frac{\Sigma f_i}{2} \text{ e a frequência acumulada da classe anterior à classe mediana}}$$

Exemplo

Considere a seguinte distribuição de frequências das notas de Matemática de uma turma do Ensino Médio:

Notas de Matemática de uma turma do Ensino Médio		
Nota de Matemática	f_i	F_i
[0, 2[	2	2
[2, 4[	7	9
[4, 6[	8	17
[6, 8[	6	23
[8, 10[	7	30
	$\Sigma f_i = 30$	

Dados fictícios.

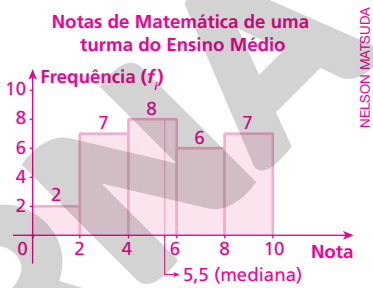


ADILSON SECCO

Dados fictícios.

Reflita

Copie o histograma ao lado no caderno e localize nele a mediana das notas dessa turma.



NELSON MATSUDA

Dados fictícios.

Vamos encontrar a nota mediana dessa turma:

$$\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

A frequência acumulada imediatamente maior que 15 é 17 e corresponde à classe mediana: [4, 6[

Agora, podemos obter o valor da mediana resolvendo a equação:

$$\frac{6-4}{8} = \frac{Me-4}{15-9} \Rightarrow Me = 5{,}5$$

Portanto, a nota mediana dessa turma é 5,5.

Exercício resolvido

R4. No último vestibular para o curso de Jornalismo de uma faculdade, a prova tinha 98 questões objetivas. Compareceram 1.200 candidatos ao exame, e os resultados encontram-se na tabela de distribuição de frequências abaixo.

Resultado dos candidatos ao curso de Jornalismo	
Quantidade de pontos	Quantidade de candidatos (f_i)
[0, 20[	320
[20, 40[	250
[40, 60[	412
[60, 80[	126
[80, 100[	92
Total	1.200

Dados fictícios.

Calcular a média, a moda e a mediana dessa distribuição.

▸ **Resolução**

Para facilitar os cálculos, vamos complementar a tabela:

Resultado dos candidatos ao curso de Jornalismo				
Quantidade de pontos	f_i	F_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
[0, 20[	320	320	10	3.200
[20, 40[	250	570	30	7.500
[40, 60[	412	982	50	20.600
[60, 80[	126	1.108	70	8.820
[80, 100[	92	1.200	90	8.280
	$\Sigma f_i = 1.200$			$\Sigma(f_i \cdot PM_i) = 48.400$

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pelos dados da tabela, podemos calcular a média:

$$\bar{x} = \frac{48.400}{1.200} \simeq 40{,}33$$

A classe modal é [40, 60[; então, $Mo = 50$.

Para calcular a mediana, vamos primeiro encontrar a classe mediana. Temos:

$$\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{1.200}{2} = 600$$

A frequência acumulada imediatamente superior a 600 é 982 e corresponde à classe [40, 60[, que é a classe mediana. Assim:

$$\frac{60 - 40}{412} = \frac{Me - 40}{600 - 570} \Rightarrow Me \simeq 41{,}46$$

Portanto, a média, a moda e a mediana dos resultados desses candidatos são, respectivamente: aproximadamente 40,33; 50; aproximadamente 41,46.

12. Pode-se propor aos alunos que façam uma pesquisa como essa com os colegas da classe e com as pessoas que moram com eles. Os entrevistados deverão responder quanto tempo levam no banho. Após calcular as medidas de tendência central dessa pesquisa, eles deverão observar se há desperdício de água (considerando que o ideal é um banho de cerca de 5 minutos). Esse tipo de trabalho favorece o desenvolvimento da competência geral **7** da BNCC.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

11. Em uma corrida de Fórmula 1, foram computados os tempos, em segundo, que os pilotos gastaram na realização de um *pit stop*.

Tempo gasto na realização de um *pit stop*					
Tempo (em segundo)	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 16[	[16, 20[
Quantidade de pilotos	2	5	9	3	1

Dados fictícios.

a) Calcule o tempo médio que os pilotos gastaram no *pit stop*. 9,2 segundos

b) Determine o tempo mediano de *pit stop*. ≃ 9,3 segundos

12. Com o intuito de economizar água, foi feito um levantamento com 100 pessoas do condomínio Vila Rica sobre o tempo que gastam para tomar banho. Os resultados, em minuto, estão apresentados na tabela a seguir.

Tempo gasto no banho				
Tempo (em minuto)	[0, 5[	[5, 10[	[10, 15[	[15, 20[
Quantidade de pessoas	20	30	10	40

Dados fornecidos pelo condomínio Vila Rica.

a) Calcule o tempo médio que essas pessoas gastam para tomar banho. 11 minutos

b) Qual é a moda dessa distribuição? 17,5 minutos

c) Quantas pessoas pesquisadas gastam menos de 12 minutos no banho?

13. A tabela abaixo apresenta a distribuição de frequências dos salários, em real, de 30 funcionários da empresa Bacana.

Distribuição de salários dos funcionários	
Salário (em real)	**Quantidade de funcionários**
[1.060, 1.860[	6
[1.860, 2.660[	5
[2.660, 3.460[	5
[3.460, 4.260[	3
[4.260, 5.060[	2
[5.060, 5.860[	1
[5.860, 6.660[	1
[6.660, 7.460[	1
[7.460, 8.260[	1

Dados fornecidos pela empresa Bacana.

a) Com base nesses dados, encontre a média dos salários dos funcionários. R$ 3.316,00

b) Qual é a moda dessa distribuição de salários? R$ 1.460,00

c) Construa o histograma referente a esses dados, indicando o valor médio e o valor modal dos salários nessa empresa. Ver resolução no Guia do professor.

14. Escolha uma variável quantitativa e colete os dados de todos os colegas da turma para essa variável. Em seguida, organize os dados coletados e elabore uma atividade com base nessas informações. A atividade deve ter pelo menos um item com uma representação gráfica e um com o cálculo de uma medida de tendência central. resposta pessoal

12. c) Espera-se que os alunos percebam que não é possível responder a essa questão por falta de informações. Sabemos que 50 pessoas gastam menos de 10 minutos, mas não é possível saber, somente com as informações fornecidas, quantas pessoas gastam menos de 12 minutos no banho.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 Medidas de dispersão

Nesse tópico, os alunos vão resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem medidas de dispersão, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316** da BNCC.

Acompanhe a situação a seguir.

O instituto de meteorologia de certa cidade registrou a temperatura local, em grau Celsius, em alguns momentos no decorrer de dois dias de um mês. Os resultados obtidos foram:

1º dia: 7, 9, 9, 9, 10 e 10

2º dia: 6, 7, 8, 10, 11 e 12

A temperatura média em cada um dos dias foi 9 °C, e a temperatura mediana em cada um dos dias foi, também, 9 °C. Podemos, então, perguntar: em qual desses dias a temperatura foi mais estável, ou seja, em qual desses dias a variabilidade de temperatura foi menor?

Recorrer à média ou à mediana não responde à questão, já que, nos dois dias, as temperaturas média e mediana foram iguais. Para casos como esse, precisamos de medidas que permitam descrever o comportamento do grupo de valores em torno das medidas de tendência central.

As medidas estatísticas que descrevem o comportamento de um grupo de valores em torno das medidas de tendência central recebem o nome de **medidas de dispersão** ou **de variabilidade**.

2.1 Amplitude

Para analisar o grau de dispersão ou de variabilidade de um grupo de dados, podemos usar a amplitude.

Amplitude total de um conjunto de dados, ou simplesmente **amplitude**, é a diferença entre o maior e o menor valor desse conjunto. Indicamos a amplitude por ***At***.

Então, na situação anterior, calculando a amplitude para as temperaturas de cada dia, temos:

- 1º dia: $At_1 = 10 - 7 = 3$
- 2º dia: $At_2 = 12 - 6 = 6$

Pelas amplitudes, podemos concluir que no 1º dia as temperaturas variaram menos que no 2º dia (no 2º dia, houve uma variação total de 6 °C, enquanto no 1º dia a variação total foi de 3 °C).

A amplitude é limitada, pois considera apenas os valores extremos do conjunto de dados. Poderíamos ter dois conjuntos de dados com a mesma amplitude, mas com distribuição completamente diferente. Por exemplo: {1, 3, 4, 5, 6} e {4, 4, 4, 4, 9}.

O desvio médio, a variância e o desvio padrão, que estudaremos a seguir, são medidas de dispersão que consideram todos os dados do conjunto e indicam quanto esses dados estão dispersos em relação à média.

2.2 Desvio médio

Para calcular o desvio médio, primeiro calculamos os **desvios em relação à média**, chamados simplesmente de **desvios**, obtidos pela diferença entre cada valor observado e a média desses valores. Em seguida, obtemos o quociente entre a soma dos valores absolutos desses desvios e o número de valores observados.

Desvio médio é a média aritmética dos valores absolutos dos desvios. Indicamos o desvio médio por ***Dm***.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Comentar com os alunos que $|x|$ representa o valor absoluto de x.

Assim, temos:

$$Dm = \frac{|x_1 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

Agora, considerando as temperaturas indicadas na situação anterior, vamos construir duas tabelas.

Reflita

Calcule a soma dos desvios: $(x_1 - \overline{x}) + \ldots + (x_n - \overline{x})$
O que você pode concluir?

$(x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + \ldots + (x_n - \overline{x}) =$
$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \cdot \overline{x} =$
$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \cdot \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} =$
$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0$
Pode-se concluir que a soma dos desvios é nula.

1º dia ($\overline{x} = 9$)		
x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
7	$7 - 9 = -2$	2
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
10	$10 - 9 = 1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
		$\Sigma \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 4$

Dados fictícios.

2º dia ($\overline{y} = 9$)		
y_i	$y_i - \overline{y}$	$\lvert y_i - \overline{y} \rvert$
6	$6 - 9 = -3$	3
7	$7 - 9 = -2$	2
8	$8 - 9 = -1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	2
12	$12 - 9 = 3$	3
		$\Sigma \lvert y_i - \overline{y} \rvert = 12$

Dados fictícios.

Calculando os desvios médios para as temperaturas de cada dia, temos:

- 1º dia: $Dm_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n} = \frac{4}{6} = 1 \simeq 0{,}67$
- 2º dia: $Dm_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y}|}{n} = \frac{12}{6} = 2$

Portanto, houve maior dispersão (ou variabilidade) de temperatura no 2º dia (2 °C), ou seja, a temperatura foi mais estável (teve menor variabilidade) no 1º dia.

Observação

Como os desvios são elevados ao quadrado para o cálculo da variância, não é possível expressá-la na mesma unidade dos valores da variável.

Se julgar conveniente, mostrar aos alunos que, nas planilhas eletrônicas, há fórmulas estatísticas prontas para calcular algumas medidas de tendência central e de dispersão para conjuntos de dados numéricos.
Mencionar que esse recurso pode ser útil quando o número de elementos de uma amostra for muito grande e os dados não estiverem agrupados. Nesse caso, ordenar os dados e calcular cada uma das medidas pode ser bem trabalhoso e acarretar erros que poderiam atrapalhar na interpretação dos resultados.
Para usar essas funções estatísticas, basta digitar os dados na planilha (cada dado em uma célula), escolher a medida que se deseja calcular e selecionar o conjunto de dados.
Em algumas planilhas, temos:
MÉDIA para calcular a média aritmética;
MODO.ÚNICO para determinar a moda, caso ela seja única;
MED para encontrar a mediana;
DESV.MÉDIO para calcular o desvio médio;
VAR.P para calcular a variância;
DESVPAD.P para calcular o desvio padrão.
Não há uma função pronta para o cálculo da amplitude, mas ela pode ser obtida pela diferença entre duas funções: MÁXIMO (que retorna o maior valor de um conjunto de dados) e MÍNIMO (que retorna o menor valor de um conjunto de dados).
Propor aos alunos que, reunidos em dois grupos, escolham uma variável quantitativa (altura, por exemplo) e coletem os dados. Em seguida, pedir que insiram os dados em uma planilha eletrônica, calculem as medidas de tendência central e de dispersão para cada um dos grupos e comparem os resultados obtidos.

2.3 Variância e desvio padrão

Outras medidas que podemos empregar para identificar o grau de dispersão ou de variabilidade de um conjunto de dados são a variância e o desvio padrão.

Variância é a média aritmética dos quadrados dos desvios. Indicamos a variância por ***Var***.

Assim, temos:

$$Var = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Observe que, ao calcular a variância, trabalhamos com os quadrados dos desvios. Para obter uma medida de dispersão expressa na mesma unidade dos dados, usamos o desvio padrão.

Desvio padrão é a raiz quadrada da variância. Indicamos o desvio padrão por ***Dp***.

Assim, temos:

$$Dp = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

Ou, ainda, $Dp = \sqrt{Var}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Agora, vamos retomar o caso das temperaturas da situação anterior e calcular a variância e o desvio padrão relativos a cada dia.

1º dia		
x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
7	$7 - 9 = -2$	4
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
10	$10 - 9 = 1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
		$\Sigma(x_i - \overline{x})^2 = 6$

Dados fictícios.

2º dia		
y_i	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$
6	$6 - 9 = -3$	9
7	$7 - 9 = -2$	4
8	$8 - 9 = -1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	4
12	$12 - 9 = 3$	9
		$\Sigma(y_i - \overline{y})^2 = 28$

Dados fictícios.

- Para o 1º dia:

$$Var_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{6}{6} = 1$$

$$Dp_1 = \sqrt{Var_1} = \sqrt{1} = 1$$

- Para o 2º dia:

$$Var_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n} = \frac{28}{6} \simeq 4{,}67$$

$$Dp_2 = \sqrt{Var_2} \simeq \sqrt{4{,}67} \simeq 2{,}16$$

Com isso, podemos concluir que a maior dispersão (ou variabilidade) ocorreu no 2º dia, ou seja, o 2º dia foi o que apresentou as temperaturas menos homogêneas. Portanto, caracteriza um grupo menos regular.

Observação

Para comparar a dispersão de dois grupos de dados, podemos utilizar qualquer uma das medidas: amplitude, desvio médio, variância ou desvio padrão. Note que as quatro medidas de dispersão conduziram à mesma conclusão.

Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

O **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*, auxilia tanto a resolução de problemas similares quanto a identificação de padrões que geram um problema. Dessa maneira, podemos considerar que uma solução pode ser aplicada em outras situações.

Agora, reflita. Qual é a relação entre o desvio padrão e o grau de homogeneidade do grupo de valores observados?

Observe no exemplo tratado nessa página e nos próximos exercícios que resolverá que, quanto menor o desvio padrão, maior a homogeneidade do grupo, ou seja, quanto mais o desvio padrão se aproxima de zero, mais homogênea é a distribuição dos valores observados.

Exercícios resolvidos

R5. O número de acidentes em um trecho de uma rodovia foi computado, mês a mês, durante o 1º semestre de 2020. Foram obtidos os seguintes dados:

20 14 15 20 27 30

Calcular a amplitude, o desvio médio e o desvio padrão desse grupo de dados.

Resolução

A amplitude desse grupo de dados é dada por: 30 – 14 = 16

Para calcular o desvio médio e o desvio padrão, primeiro calculamos a média aritmética:

$$\overline{x} = \frac{20 + 14 + 15 + 20 + 27 + 30}{6} = \frac{126}{6} = 21$$

Em seguida, encontramos o desvio médio:

$$Dm = \frac{|20 - 21| + |14 - 21| + |15 - 21| + |20 - 21| + |27 - 21| + |30 - 21|}{6}$$

$$Dm = \frac{30}{6} = 5$$

Para obter o desvio padrão, calculamos primeiro a variância.

$$Var = \frac{(20 - 21)^2 + (14 - 21)^2 + (15 - 21)^2 + (20 - 21)^2 + (27 - 21)^2 + (30 - 21)^2}{6}$$

$$Var = \frac{204}{6} = 34$$

Agora, basta calcular a raiz quadrada da variância para obter o desvio padrão: $Dp = \sqrt{34} \simeq 5{,}83$

Portanto, o desvio médio é de 5 acidentes, e o desvio padrão é de aproximadamente 5,83 acidentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R6. Uma indústria produz 5.000 parafusos por dia. Foram coletados para análise 100 parafusos, cujas medidas do diâmetro, em milímetro, estão indicadas na tabela abaixo.

Diâmetro dos parafusos da amostra	
Medida do diâmetro x_i (em milímetro)	**Quantidade de parafusos (f_i)**
5,1	12
5,2	27
5,3	35
5,4	20
5,5	6
Total	100

Dados fictícios.

JIANG HONGYAN/SHUTTERSTOCK

Determinar a média, o desvio médio e o desvio padrão da distribuição dos dados coletados.

▸ **Resolução**

Para obter a média, calculamos a média aritmética ponderada da distribuição:

$$\overline{x} = \frac{12 \cdot 5{,}1 + 27 \cdot 5{,}2 + 35 \cdot 5{,}3 + 20 \cdot 5{,}4 + 6 \cdot 5{,}5}{100} = \frac{528{,}1}{100} = 5{,}281$$

Para o cálculo do desvio médio e da variância, vamos construir uma tabela com os dados disponíveis e completá-la com outras informações.

Diâmetro dos parafusos da amostra				
Medida do diâmetro x_i (em milímetro)	**Quantidade de parafusos (f_i)**	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
5,1	12	−0,181	0,181	0,032761
5,2	27	−0,081	0,081	0,006561
5,3	35	0,019	0,019	0,000361
5,4	20	0,119	0,119	0,014161
5,5	6	0,219	0,219	0,047961
	$\Sigma f_i = 100$			

Dados fictícios.

Como os dados estão organizados em uma tabela de frequências, para calcular as medidas de dispersão é necessário considerar a frequência (f_i) de cada valor.

- Para determinar o desvio médio, calculamos a média aritmética ponderada dos valores absolutos dos desvios:

$$Dm = \frac{12 \cdot 0{,}181 + 27 \cdot 0{,}081 + 35 \cdot 0{,}019 + 20 \cdot 0{,}119 + 6 \cdot 0{,}219}{100}$$

$$Dm = \frac{8{,}718}{100} = 0{,}08718$$

- Para determinar a variância, calculamos a média aritmética ponderada dos quadrados dos desvios:

$$Var = \frac{12 \cdot 0{,}032761 + 27 \cdot 0{,}006561 + 35 \cdot 0{,}000361 + 20 \cdot 0{,}014161 + 6 \cdot 0{,}047961}{100}$$

$$Var = \frac{1{,}1539}{100} = 0{,}011539$$

Como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, temos:

$$Dp = \sqrt{Var} = \sqrt{0{,}011539} \simeq 0{,}10742$$

Logo, a média das medidas do diâmetro dos parafusos da amostra é 5,281 mm, o desvio médio é 0,08718 mm e o desvio padrão é aproximadamente 0,10742 mm.

Reflita

Se tivéssemos uma distribuição de frequências cujos valores observados fossem todos iguais entre si, qual seria sua variância? Justifique sua resposta e dê exemplos.

Se os valores x_i observados em uma distribuição de frequências fossem todos iguais entre si, eles também seriam iguais à média $\overline{x}$; logo, $(x_i - \overline{x}) = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Portanto, a variância seria zero.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

15. (Enem) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso:

	Matemática	Português	Conhecimentos gerais	Média	Mediana	Desvio padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é alternativa b

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.

c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.

d) Paulo, pois obteve maior mediana.

e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

---

16. (FEMM-MG) Dentre as amostras:

Amostra 1	0	1	2
Amostra 2	26	27	28
Amostra 3	1.002	1.005	1.003
Amostra 4	−5	10	25

qual é a amostra que possui maior desvio padrão? alternativa d

a) 1 **c)** 3

b) 2 **d)** 4

17. Computou-se o número de viagens que clientes cadastrados em um programa de fidelidade realizaram durante o ano.

Viagens realizadas durante o ano	
Número de viagens	**Quantidade de clientes**
10	120
15	400
20	150

Dados fictícios.

17. a) *Var* ≃ 10,07 e *Dp* ≃ 3,17

Considerando os dados da tabela:

a) calcule a variância e o desvio padrão;

b) caracterize a dispersão desse conjunto segundo o desvio padrão. Os valores do grupo distanciam-se cerca de 3,17 viagens do valor médio (aproximadamente 15 viagens).

18. Um *site* de locação de filmes deseja saber o grau de satisfação de seus clientes diante de duas promoções (A e B) realizadas em fins de semana alternados. Para isso, 20 clientes, escolhidos ao acaso, deram notas de 1 a 5 conforme o índice de satisfação.

Observe as notas obtidas no quadro a seguir.

Promoção A	Promoção B
5 5 4 4 5 3 4 4 5 5	3 3 2 3 2 2 2 2 2 2
5 1 4 4 5 4 4 5 4 5	1 3 1 1 2 2 4 4 3 2

Para cada promoção, calcule: Ver resolução no Guia do professor.

a) a média; **b)** o desvio padrão.

- Compare a homogeneidade das notas atribuídas às duas promoções.

19. Na locadora de veículos Alugue Já, o número de veículos alugados durante 15 dias está relacionado abaixo.

25 32 25 28 30 21 23 40
25 26 22 23 25 28 31

Para essa locadora, nesse período, responda às questões. **19. g)** Os valores desse grupo distanciam-se do valor médio cerca de 4,7 veículos.

a) Qual é a média de veículos alugados? ≃ 27

b) Qual é o número mediano de veículos alugados? 25

c) Qual é o número de veículos alugados com maior frequência? 25

d) Calcule a amplitude desse grupo de dados. 19

e) Calcule o desvio médio de veículos alugados. ≃ 3,67

f) Calcule a variância e o desvio padrão desse grupo de valores observados. *Var* ≃ 22,07 e *Dp* ≃ 4,7

g) Comente a variabilidade desse grupo de dados considerando o desvio padrão.

18. Retome o **reconhecimento de padrões**, pilar do *pensamento computacional* destacado neste capítulo, para analisar o desvio padrão dos dois conjuntos de dados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

20. Observe, nos diagramas a seguir, a distribuição dos valores pagos pelos clientes de uma sorveteria por quilograma em dois dias consecutivos.

Valor pago pelos clientes no 1º dia

3	80
4	50
5	20 40 60
6	50
7	30 45 80
8	10
9	50 70 75 80
10	25
11	60 75 80
12	
13	00
14	
15	30

Legenda:
3 | 80 = 3,80 reais

Dados fictícios.

Valor pago pelos clientes no 2º dia

5	20 45 50 55 60 75 80 95
6	50 60 85 90
7	50 65 70 80 90
8	55
9	60 75

Legenda:
5 | 20 = 5,20 reais

Dados fictícios.

a) Sem fazer contas, o que você diria sobre a variabilidade dos valores pagos em cada um dos dias? Em que dia a variabilidade dos valores pagos foi maior?

b) Compare os grupos de valores usando uma das medidas de dispersão para confirmar sua constatação.

21. Elabore um problema contextualizado em que seja necessário calcular medidas de tendência central e de dispersão. resposta pessoal

20. a) Ao observar os diagramas, espera-se que os alunos percebam que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior (os dados estão menos concentrados em torno de alguns valores).

20. b) Nesse caso, os alunos podem usar qualquer uma das medidas de dispersão estudadas.

2.4 Medidas de dispersão para dados agrupados em intervalos

Quando os dados estão agrupados em intervalos (ou classes) de mesma amplitude, a amplitude total é dada pela diferença entre o extremo superior da última classe e o extremo inferior da primeira classe:

- At = extremo superior da última classe − extremo inferior da primeira classe

Para calcular as outras medidas de dispersão, consideramos que a frequência de cada classe está concentrada no ponto médio dessa classe, como fizemos no cálculo da média. Assim:

- $Dm = \dfrac{f_1 \cdot |PM_1 - \overline{x}| + \ldots + f_n \cdot |PM_n - \overline{x}|}{f_1 + \ldots + f_n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(f_i \cdot |PM_i - \overline{x}|)}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}$

- $Var = \dfrac{f_1 \cdot (PM_1 - \overline{x})^2 + \ldots + f_n \cdot (PM_n - \overline{x})^2}{f_1 + \ldots + f_n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2]}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}$

- $Dp = \sqrt{Var}$

Exemplo

Na auditoria anual de uma empresa, foi anotado o tempo necessário, em minuto, para auditar 50 balanços.

Tempo para auditar os balanços	
Tempo de auditoria (em minuto)	**Quantidade de balanços (f_i)**
[10, 20[	3
[20, 30[	5
[30, 40[	10
[40, 50[	12
[50, 60[	20

Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
MODERNA

Para calcular as medidas de dispersão dessa distribuição, primeiro determinamos o ponto médio de cada intervalo e, em seguida, calculamos a média.

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 15 + 5 \cdot 25 + 10 \cdot 35 + 12 \cdot 45 + 20 \cdot 55}{50} = \frac{2.160}{50} = 43{,}2$$

Agora, vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos.

Tempo para auditar os balanços						
Tempo de auditoria (em minuto)	Quantidade de balanços (f_i)	PM_i	$(PM_i - \overline{x})$	$f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert$	$(PM_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2$
[10, 20[	3	15	−28,2	84,6	795,24	2.385,72
[20, 30[	5	25	−18,2	91	331,24	1.656,20
[30, 40[	10	35	−8,2	82	67,24	672,40
[40, 50[	12	45	1,8	21,6	3,24	38,88
[50, 60[	20	55	11,8	236	139,24	2.784,80
	$\Sigma f_i = 50$			$\Sigma(f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert) = 515{,}2$		$\Sigma\left[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2\right] = 7.538$

Dados fictícios.

Então:

$At = 60 - 10 = 50$

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{515{,}2}{50} = 10{,}304$$

$$Var = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2\right]}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{7.538}{50} = 150{,}76$$

$$Dp = \sqrt{Var} = \sqrt{150{,}76} \simeq 12{,}3$$

Caso escolhêssemos o desvio padrão para caracterizar a dispersão dessa distribuição, poderíamos dizer que os valores observados se distanciam cerca de 12,3 minutos da média.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

22. Na tabela abaixo, observe a distribuição do valor dos aluguéis, em real, pagos por 200 pessoas em residências situadas na zona urbana de uma cidade de médio porte. Os valores do grupo distanciam-se cerca de R$ 202,73 do valor médio (R$ 1.030,00).

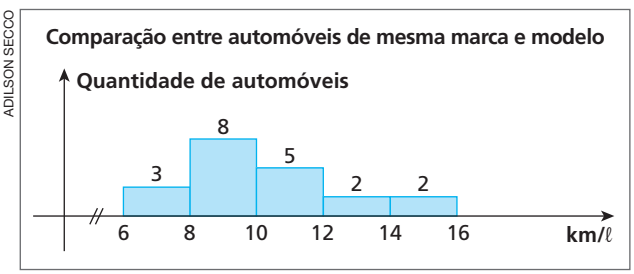
Aluguel pago por moradores da zona urbana da cidade	
Aluguel (em real)	Quantidade de pessoas (f_i)
[500, 700[	10
[700, 900[	40
[900, 1.100[	80
[1.100, 1.300[	50
[1.300, 1.500[	20
Total	200

Dados fictícios.

- Caracterize a variabilidade nessa situação usando o desvio padrão.

23. Considere os dados a seguir sobre a quantidade de quilômetros rodados por litro de combustível de 20 automóveis de mesma marca e modelo.

ADILSON SECCO



Dados fictícios.

- Caracterize a variabilidade nessa situação usando o desvio médio. Os valores do grupo distanciam-se cerca de 1,92 km/ℓ do valor médio (10,2 km/ℓ).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT407** da BNCC, pois, além de aprender a interpretar *box-plots*, nos exercícios os alunos vão comparar e avaliar a conveniência do uso de diferentes representações.

3 *Box-plot*

Antes de aprender como analisar um *box-plot*, vamos estudar alguns conceitos importantes para compreender esse tipo de representação.

Quartis

Vimos que a mediana de um grupo de valores previamente ordenado é o valor que divide esse grupo em duas partes com o mesmo número de elementos, ou seja, 50% dos valores estão abaixo e 50% dos valores estão acima da mediana.

O conceito de mediana pode ser generalizado para situações em que o grupo de dados é dividido em mais de duas partes. Um caso importante é aquele em que dividimos o grupo de dados em quatro subgrupos com o mesmo número de elementos. Os valores que dividem o conjunto ordenado de dados nesses quatro subgrupos são denominados **quartis**.

Há três quartis:

- **primeiro quartil** (indicamos por Q_1):

$\frac{1}{4}$ (ou 25%) dos valores estão abaixo de Q_1;

- **segundo quartil** (indicamos por Q_2):

coincide com a mediana, e $\frac{1}{2}$ (ou 50%) dos valores estão abaixo de Q_2;

- **terceiro quartil** (indicamos por Q_3):

$\frac{3}{4}$ (ou 75%) dos valores estão abaixo de Q_3.

Para determinar os quartis, calculamos inicialmente a mediana do grupo de dados (segundo quartil). A mediana divide o conjunto de dados em dois subgrupos; para determinar o primeiro e o terceiro quartis, calculamos as medianas de cada um desses subgrupos.

Exemplo

Comentar com os alunos que quando a quantidade de dados é ímpar, para determinar o 2º quartil, destacamos o elemento central (mediana) e para encontrar o 1º e 3º quartis, encontramos a mediana dos dados restantes à esquerda e à direita da mediana, respectivamente.

As massas de 12 laranjas, em grama, em determinado pacote comprado em um supermercado são: 133, 136, 137, 138, 140, 142, 145, 155, 158, 160, 161, 170.

Vamos determinar os quartis desse grupo:

- Segundo quartil/mediana

Como temos um número par de dados, a mediana é a média aritmética dos termos centrais (6º e 7º termos):

$$Q_2 = \frac{142 + 145}{2} = 143{,}5$$

- Primeiro quartil e terceiro quartil

A mediana dividiu o grupo de valores em dois subgrupos com 6 elementos cada um:

$$\underbrace{133,\ 136,\ 137,\ 138,\ 140,\ 142,}\quad \underbrace{145,\ 155,\ 158,\ 160,\ 161,\ 170}$$

As medianas de cada um desses subgrupos são o primeiro e o terceiro quartis:

$$Q_1 = \frac{137 + 138}{2} = 137{,}5$$

$$Q_3 = \frac{158 + 160}{2} = 159$$

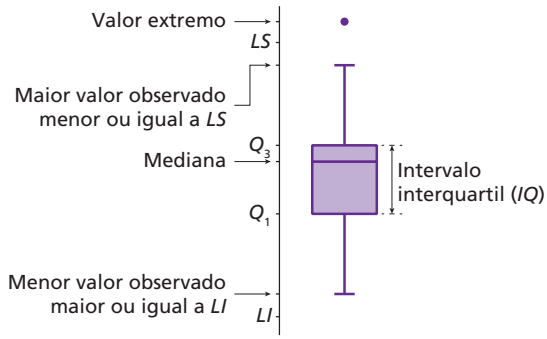
O intervalo $[Q_1, Q_3]$ contém cerca de 50% das observações centrais e dá uma ideia de quão dispersos estão os dados. A amplitude desse intervalo é chamada de **intervalo interquartil** (indicamos por *IQ*):

$$IQ = Q_3 - Q_1$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Box-plot



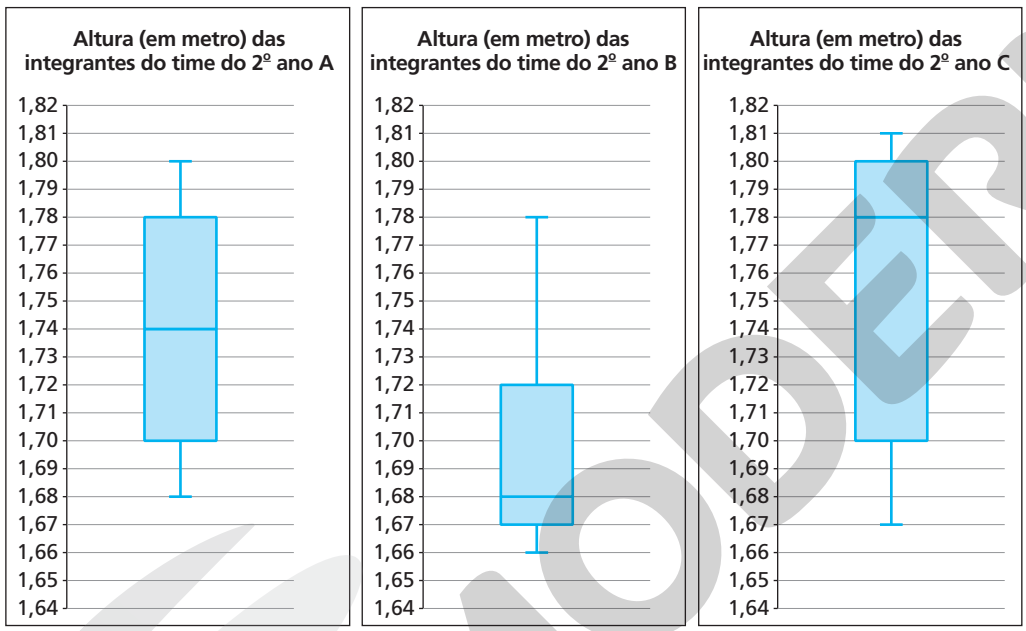
Os ***box-plots***, também conhecidos como **gráficos de caixa**, são representações gráficas bastante ricas para informar, entre outras coisas, valores discrepantes, a dispersão e a simetria dos dados.

Para a construção de um *box-plot*, considera-se um retângulo ("caixa") limitado pelo primeiro e pelo terceiro quartis. A mediana é representada por um traço no interior do retângulo. A partir do retângulo, para cima, segue uma linha até o maior valor do grupo de dados que não exceda $LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot IQ$, chamado limite superior. De modo similar, da parte inferior do retângulo, para baixo, segue uma linha até o menor valor do grupo de dados que não seja menor do que $LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot IQ$, chamado limite inferior. Os valores acima do limite superior ou abaixo do limite inferior são representados por asteriscos ou pontos e denominados **valores extremos**. Esses são valores considerados destoantes na distribuição.

Veja, por exemplo, os *box-plots* a seguir, que mostram as alturas, em metro, das integrantes dos três times de 2º ano de basquete feminino da escola Viva.

Observação

Um *box-plot* pode ser construído com o eixo na posição horizontal.



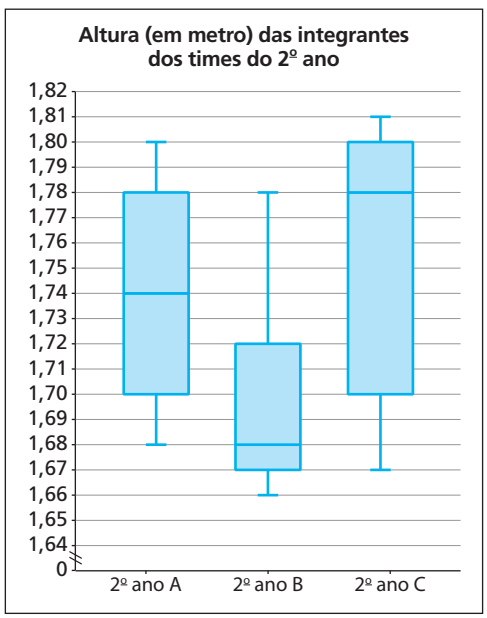
Dados fornecidos pela escola Viva.

Observe que a distribuição das alturas das integrantes do time do 2º ano A apresenta certa simetria: a mediana (1,74 m) é a média dos valores do primeiro e do terceiro quartis; é também a média entre os valores máximo e mínimo do grupo de alturas. É possível perceber, ainda, que a amplitude total dos dados é 0,12 m e que 50% das alturas estão concentradas entre 1,68 m e 1,74 m.

O *box-plot* que representa as alturas do time do 2º ano B mostra que a distribuição é assimétrica: apesar de a amplitude total dos dados ser também 0,12 m, metade das alturas está concentrada entre 1,66 m e 1,68 m, enquanto a outra metade das alturas está distribuída entre 1,68 m e 1,78 m.

O *box-plot* que representa as alturas do time 2º ano C também mostra que a distribuição é assimétrica: metade das alturas está concentrada entre 1,78 m e 1,81 m, enquanto a outra metade das alturas está entre 1,67 m e 1,78 m.

Para uma análise e comparação entre conjuntos de dados diferentes relacionados à mesma variável, podemos construir as "caixas" em uma mesma representação. Observe ao lado.



Dados fornecidos pela escola Viva.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

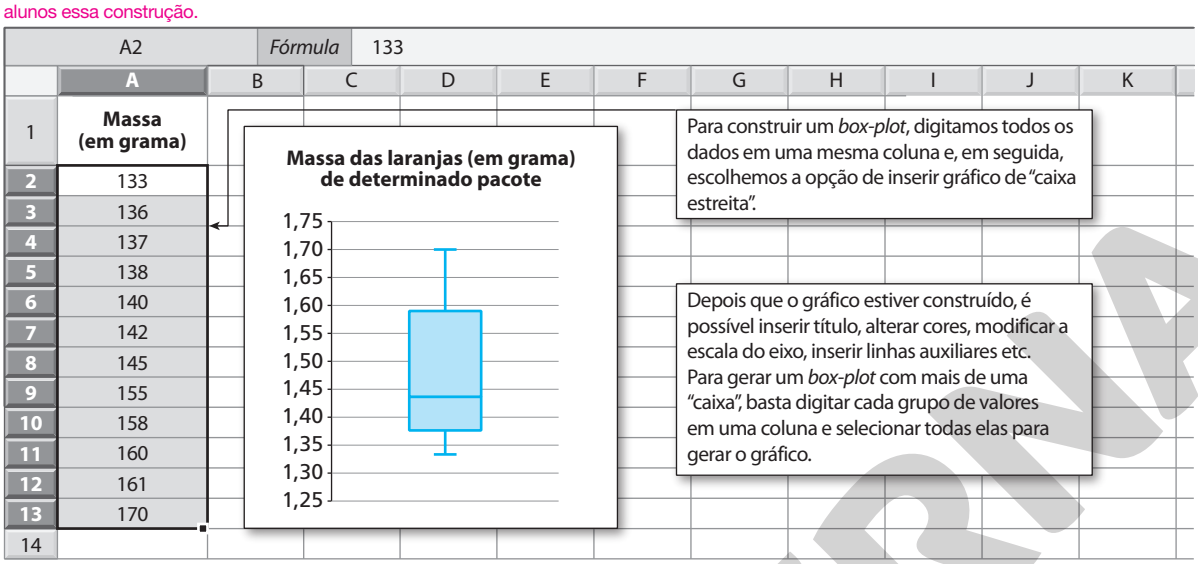
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica. Algumas planilhas podem não ter a opção de inserir o *box-plot* diretamente; portanto, é importante verificar como funciona esse recurso na planilha que você costuma usar antes de propor aos alunos essa construção.

Algumas planilhas eletrônicas permitem construir um *box-plot* de maneira muito simples. Para isso, em planilhas em que há essa opção, basta digitar todos os dados em uma mesma coluna (um dado em cada célula) e, em seguida, selecionar a opção de inserir gráfico de "caixa estreita".

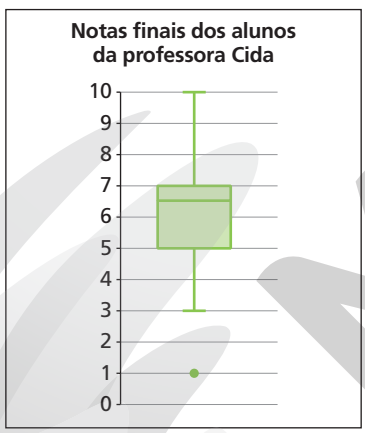
Observe como poderíamos construir um *box-plot* usando uma planilha eletrônica para os dados do exemplo da página 90.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

24. Observe, no *box-plot* a seguir, a distribuição das notas finais de 80 alunos da professora Cida.



Dados obtidos pela professora Cida.

De acordo com as informações do gráfico, responda às questões.

a) Qual é o valor do primeiro e do terceiro quartis da distribuição das notas? $Q_1 = 5$ e $Q_3 = 7$

b) Quantos alunos da professora Cida tiveram notas entre 5 e 7? 40 alunos

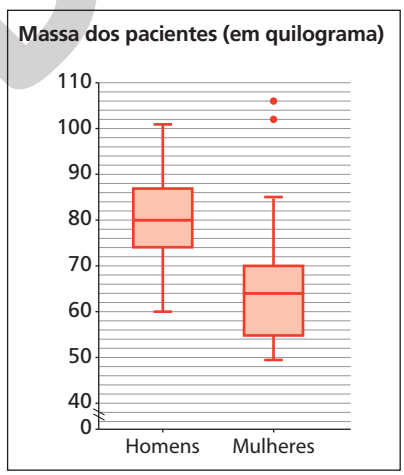
c) Qual foi a menor nota entre esses alunos? nota 1

d) Que porcentagem dos alunos obteve nota entre 7 e 10? 25%

e) Observando a representação gráfica, é possível saber quantos alunos tiveram nota final 10? Justifique sua resposta.

Espera-se que os alunos percebam que não é possível saber quantos alunos tiveram nota 10 apenas com o *box-plot*. É possível saber que 25% de 80 alunos (ou seja, 20 alunos) obtiveram notas entre 7 e 10, mas não é possível saber como foi a distribuição das notas nesse intervalo.

25. Uma nutricionista construiu o gráfico a seguir indicando a massa de todos os homens e mulheres que frequentam seu consultório.



Dados obtidos pela nutricionista.

Com base nas informações do gráfico, identifique a alternativa falsa. alternativa d

a) Metade dos pacientes homens tem entre 60 kg e 80 kg.

b) O valor mais alto entre as massas das mulheres é maior que o valor mais alto entre as massas dos homens.

c) Metade das pacientes mulheres tem até 64 kg.

d) A maior massa entre as mulheres é aproximadamente 85 kg.

e) 25% das mulheres têm entre 64 kg e 70 kg.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

26. Veja, a seguir, três representações gráficas do mesmo conjunto de dados: o melhor tempo, em segundo, dos participantes na primeira rodada $3 \times 3 \times 3$ do campeonato de cubo mágico Brasília Winter 2019, realizado em Brasília, DF, em agosto de 2019.

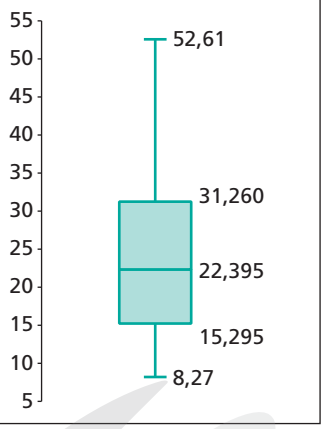
Melhor tempo (em segundo) dos participantes na primeira rodada $3 \times 3 \times 3$ do campeonato Brasília Winter 2019

0	827													
1	047	095	116	154	179	230	385	408	651	729	894	918	938	988
2	128	153	220	259	408	511	538	680	768	770	883	930		
3	322	343	472	544	738	797	945							
4	091													
5	261													

Legenda:
1 | 047 = 10,47 segundos

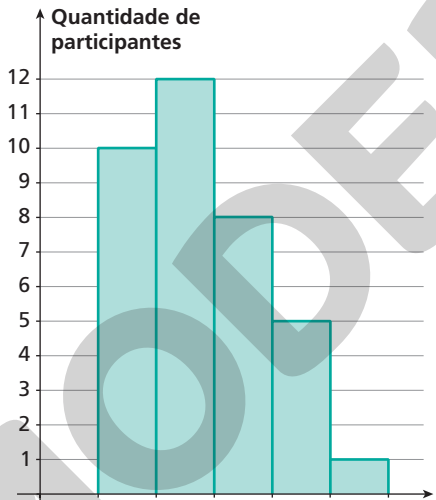
Dados obtidos em: <https://www.worldcubeassociation.org/competitions/BrasiliaWinter2019/results/all?event=333>. Acesso em: 27 abr. 2020.

Melhor tempo (em segundo) dos participantes na primeira rodada $3 \times 3 \times 3$ do campeonato Brasília Winter 2019



Dados obtidos em: <https://www.worldcubeassociation.org/competitions/BrasiliaWinter2019/results/all?event=333>. Acesso em: 27 abr. 2020.

Melhor tempo (em segundo) dos participantes na primeira rodada $3 \times 3 \times 3$ do campeonato Brasília Winter 2019



Dados obtidos em: <https://www.worldcubeassociation.org/competitions/BrasiliaWinter2019/results/all?event=333>. Acesso em: 27 abr. 2020.

Com base nessas representações, responda às questões.

a) Qual das representações você acha que é mais adequada? Converse com um colega a respeito disso, justificando sua escolha.

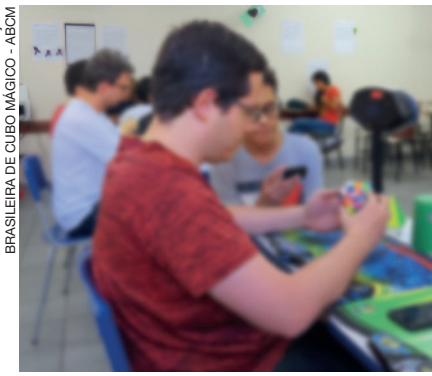
b) Qual das representações indicou menor perda de informações dos dados em si? Com base em alguma das representações, é possível saber o valor de cada dado?

c) Por meio do *box-plot*, é possível saber quantos participantes havia nessa rodada do campeonato? E por meio das outras representações? Determine o número de participantes.

d) Em sua opinião, qual das representações permite identificar de maneira mais imediata a dispersão dos dados em torno da mediana e dos quartis?

e) Identifique a mediana e o primeiro e o terceiro quartis desse grupo de dados. *Me* = 22,395; Q_1 = 15,295; Q_3 = 31,260

PEDRO MIRANDA MOREIRA/ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CUBO MÁGICO - ABCM



Participantes do campeonato Brasília Winter 2019, evento organizado pela Associação Brasileira de Cubo Mágico (ABCM) e reconhecido pela Associação Mundial de Cubo Mágico (WCA). Brasília, 2019.

a) Espera-se que os alunos percebam que a representação mais adequada depende dos fatores que se pretende analisar.

b) diagrama de ramo e folhas; sim, a partir do diagrama de ramo e folhas

c) não; sim; 36 participantes

d) Espera-se que os alunos percebam que a representação mais adequada, nesse caso, seria o *box-plot*.

DND_PROJECT/SHUTTERSTOCK

O cubo mágico é um tipo de quebra-cabeça tridimensional, inventado em 1974. A versão mais comum é a $3 \times 3 \times 3$, mas há outras, como a $2 \times 2 \times 2$, a $4 \times 4 \times 4$, a $5 \times 5 \times 5$, com faces em outros formatos etc.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

f) diagrama de ramo e folhas ou *box-plot*; menor valor: 8,27; maior valor: 52,61

g) 15 participantes; 1 participante; diagrama de ramo e folhas

h) resposta pessoal

i) resposta pessoal
De modo geral, temas como esse geram interesse nos jovens. Se preferir, a mediação do item **i** pode ser feita antes do exercício, para que os alunos se sintam engajados antes de analisar as representações gráficas. Caso um ou mais alunos saibam como montar um cubo mágico ou tenham um em casa, pode-se sugerir a eles que os tragam para a sala de aula, para que os colegas experimentem e tentem montá-lo.

f) Qual das representações é mais adequada para identificar o valor do menor e do maior dado desse grupo? Quais são esses valores?

g) Quantos participantes tiveram melhor tempo abaixo de 20 segundos? E entre 40 e 50 segundos? Que representação você consultou para responder a essas questões?

h) Agora, responda novamente ao item **a**. Você mudou de opinião?

i) Você já tentou montar um cubo mágico? O que você acha desse tipo de quebra-cabeça? Você gosta de passatempos como esse ou de outros parecidos? Converse com os colegas sobre isso.

27. Elabore um problema usando uma das representações gráficas do exercício 26. Passe seu problema para um colega resolver e resolva o problema criado por ele. resposta pessoal

28. Mara está treinando para uma prova de natação. Veja os tempos, em segundo, que ela fez em 15 treinos (do mais antigo para o mais recente) para completar 50 metros livre.

40,3 38,4 43,2 56,2 35,5 33,3 40,1 42,3 45,3
37,5 42,1 35,3 38,7 34,2 33,2

respostas pessoais

a) Represente graficamente esse grupo de dados. Compare sua representação com a de um colega e, se forem diferentes, discutam quanto a representação de um seria mais adequada que a do outro.

b) Caso Mara desejasse construir um gráfico para analisar a evolução de seus tempos ao longo dos treinos, os gráficos que vocês construíram seriam adequados? Qual gráfico seria interessante que ela construísse nesse caso? Ver comentários no Guia do professor.

29. Elabore uma atividade em que seja necessário construir uma representação gráfica e escrever conclusões a respeito de um grupo de dados. Entregue sua atividade para um colega resolver e resolva a dele.
resposta pessoal

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT510** da BNCC, pois os alunos investigarão conjuntos de dados relacionados ao comportamento de duas variáveis quantitativas usando planilhas eletrônicas e aprenderão a utilizar uma reta para descrever a relação observada.

4 Diagrama de dispersão

Com frequência, em um estudo ou pesquisa, interessa verificar se existe relação entre duas variáveis quantitativas. Por exemplo, verificar se o consumo das famílias pode estar relacionado ao seu rendimento, a massa dos bebês relacionada ao tempo de vida, as notas dos alunos relacionadas ao tempo de estudo, o preço de um produto relacionado à demanda, entre outros.

Uma representação bastante útil para verificar a associação entre duas variáveis quantitativas é o **diagrama de dispersão**.

Para construir um gráfico desse tipo, em muitas situações, uma variável é considerada como independente e a outra como dependente. Então, considera-se um grupo de dados da forma:

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

Em seguida, cada um dos pares é representado por um ponto no plano cartesiano.

Exemplo

Um professor de Estatística, interessado em analisar a relação entre a nota dos alunos em determinada prova e o tempo de estudo extraclasse para essa prova, coletou os dados indicados na tabela a seguir.

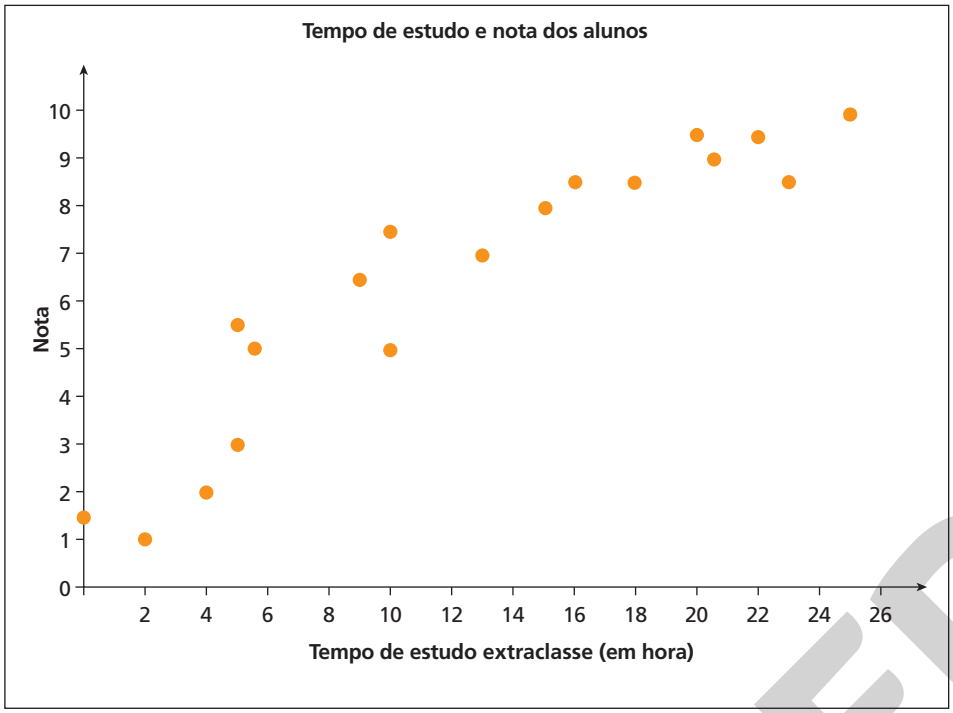
Tempo de estudo e nota dos alunos

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
Tempo de estudo (em hora)	20	25	10	5	16	5,5	4	13	2	0	10	5	18	15	23	20,5	22	9
Nota	9,5	10	7,5	5,5	8,5	5	2	7	1	1,5	5	3	8,5	8	8,5	9	9,5	6,5

Dados fornecidos pelo professor de Estatística.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nesse caso, a variável dependente é a nota, e a variável independente é o tempo de estudo extraclasse, pois a intenção é analisar se a nota está relacionada ao tempo de estudo. Para construir um diagrama de dispersão para esses dados, é necessário representar cada par ordenado (tempo de estudo, nota) em um plano cartesiano. Observe.



Dados fornecidos pelo professor de Estatística.

É possível perceber que, de modo geral, quanto maior o tempo de estudo extraclasse para a prova, maior a nota obtida.

Correlação linear

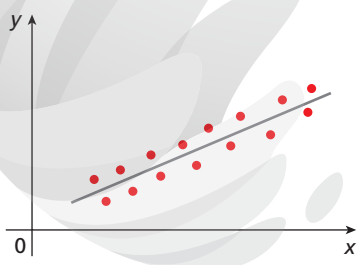
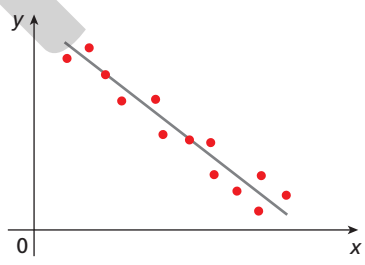
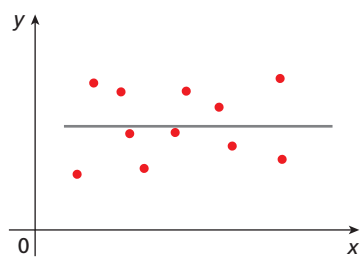
A correlação linear procura medir quão bem a relação entre as variáveis pode ser expressa por uma reta. Existe um coeficiente de correlação r_{xy} para quantificar essa relação. Não veremos como calcular diretamente esse coeficiente; veremos apenas como interpretá-lo e como determiná-lo usando uma planilha eletrônica.

Observe os tipos de correlação linear a seguir.

Caso queira aprofundar o assunto, o coeficiente de correlação pode ser calculado por meio da fórmula:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right]}}$$

em que n é o total de pares do grupo de dados. Para o cálculo, convém construir uma tabela com os valores de x_i, y_i, $x_i \cdot y_i$, $(x_i)^2$ e $(y_i)^2$, bem como os respectivos totais.

Correlação linear positiva	Correlação linear negativa	Correlação linear nula
		
A correlação é positiva se valores crescentes de x estiverem associados a valores crescentes de y. Nesse caso: $0 < r_{xy} \leqslant 1$	A correlação é negativa se valores crescentes de x estiverem associados a valores decrescentes de y. Nesse caso: $-1 \leqslant r_{xy} < 0$	Quando as variações de x e y ocorrem independentemente, a correlação é nula, ou seja, não existe dependência linear entre as variáveis. Nesse caso: $r_{xy} = 0$

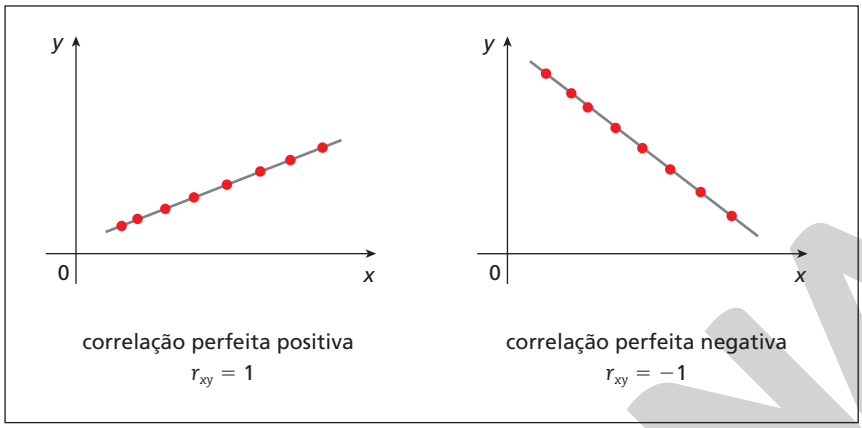
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observações

1. Quando os pontos estão perfeitamente alinhados, temos uma correlação perfeita positiva ou uma correlação perfeita negativa. Nesses casos, temos $r_{xy} = 1$ e $r_{xy} = -1$, respectivamente.

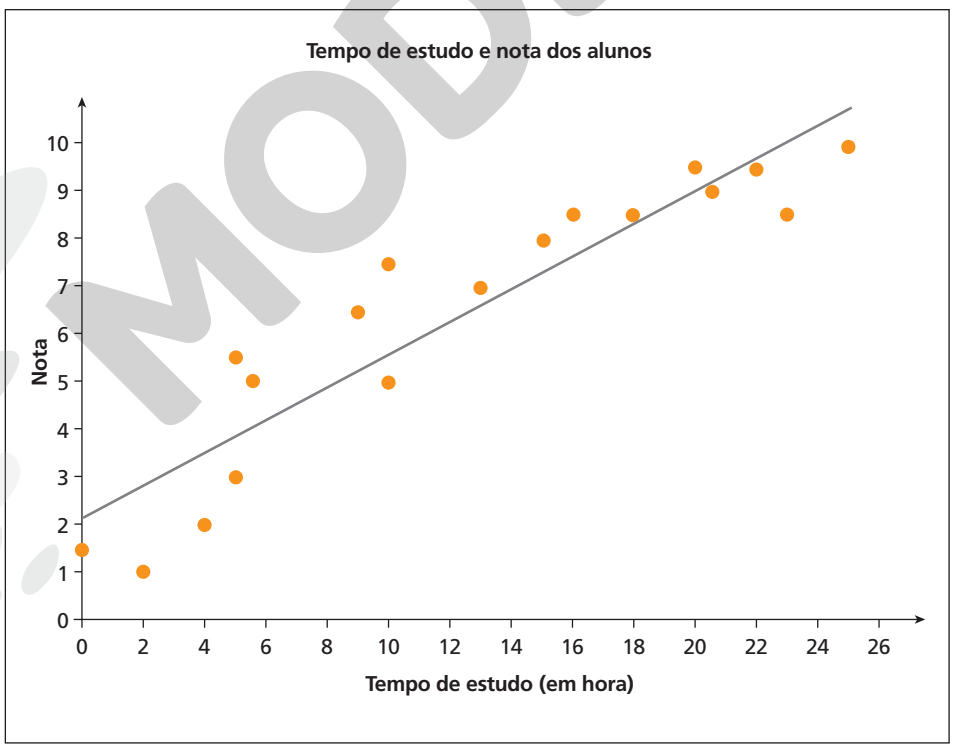


correlação perfeita positiva
$r_{xy} = 1$

correlação perfeita negativa
$r_{xy} = -1$

2. Quanto mais próximo de $+1$ ou de -1 estiver o coeficiente de correlação r_{xy}, mais forte será a correlação entre x e y; quanto mais próximo de zero estiver, mais fraca será essa correlação.

No caso do exemplo anterior, sobre a relação entre a nota dos alunos em determinada prova e o tempo de estudo extraclasse para essa prova, a correlação das variáveis é positiva, ou seja, os pontos distribuem-se de modo que é possível ajustá-los por meio da reta a seguir.



Dados fornecidos pelo professor de Estatística.

Vejamos, agora, como usar uma planilha eletrônica para construir um diagrama de dispersão, a reta que ajusta os pontos do diagrama e determinar o coeficiente de correlação das variáveis. Para isso, vamos considerar o conjunto de tempos que 15 atletas levaram para completar uma prova esportiva e o tempo médio de treino semanal.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

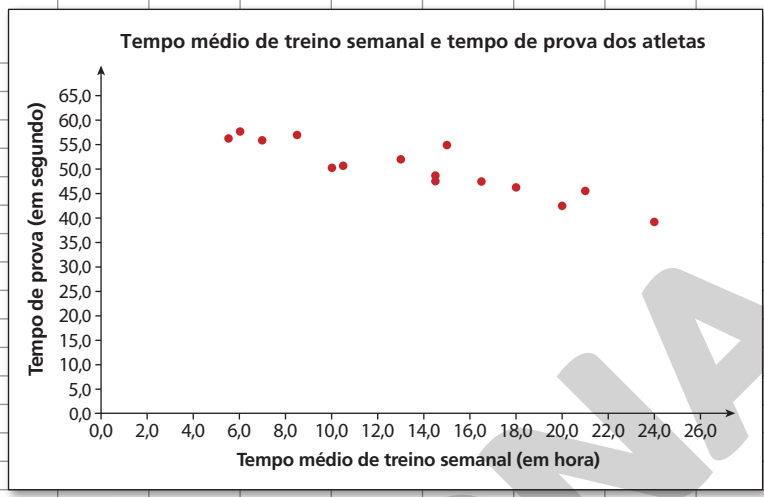
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica. Algumas planilhas podem ter o procedimento para essas construções diferente do indicado; portanto, verificar como funcionam esses recursos na planilha que você costuma usar antes de propor aos alunos essas construções.

Vamos investigar como o tempo de prova está relacionado ao tempo de treino.

B2 | *Fórmula* | 13

	A	B	C
1	**Atleta**	**Tempo médio de treino semanal (em hora)**	**Tempo de prova (em segundo)**
2	A	13,0	52,9
3	B	10,5	51,6
4	C	6,0	57,3
5	D	5,5	56,7
6	E	15,0	55,2
7	F	7,0	56,1
8	G	10,0	50,4
9	H	18,0	46,2
10	I	16,5	47,5
11	J	20,0	42,3
12	K	21,0	45,6
13	L	14,5	48,9
14	M	8,5	57,1
15	N	24,0	39,4
16	O	14,5	47,8

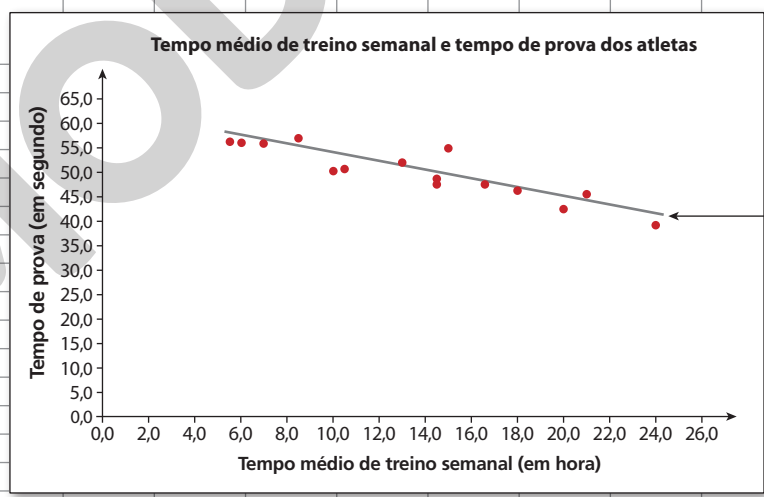


Para construir um diagrama, digitamos inicialmente os dados na planilha. É importante que os valores da variável independente sejam digitados à esquerda dos valores da variável dependente. Em seguida, selecionamos as duas colunas com os dados e escolhemos a opção de inserir gráfico de "dispersão".

Depois que o gráfico estiver construído, é possível inserir título no gráfico e nos eixos, alterar cores, modificar a escala dos eixos, inserir linhas auxiliares etc.

B2 | *Fórmula* | 13

	A	B	C
1	**Atleta**	**Tempo médio de treino semanal (em hora)**	**Tempo de prova (em segundo)**
2	A	13,0	52,9
3	B	10,5	51,6
4	C	6,0	57,3
5	D	5,5	56,7
6	E	15,0	55,2
7	F	7,0	56,1
8	G	10,0	50,4
9	H	18,0	46,2
10	I	16,5	47,5
11	J	20,0	42,3
12	K	21,0	45,6
13	L	14,5	48,9
14	M	8,5	57,1
15	N	24,0	39,4
16	O	14,5	47,8
19		r_{xy}	
20		−0,911473231	



Para determinar o coeficiente de correlação, digitamos, em uma célula vazia qualquer, a fórmula: = CORREL(B2:B16; C2:C16) (Calcula o coeficiente de correlação entre a variável cujos dados estão no intervalo B2 a B16 e a variável cujos dados estão no intervalo C2 a C16.)

Para traçar a reta que ajusta os pontos, basta escolher a opção de adicionar "linha de tendência".

Observando o diagrama de dispersão construído na planilha, é possível perceber que, quanto maior o tempo médio de treino semanal, menor o tempo de prova, ou seja, há uma correlação linear negativa entre essas variáveis. Essa correlação é comprovada pelo coeficiente de correlação entre -1 e zero: $r_{xy} = -0{,}91$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

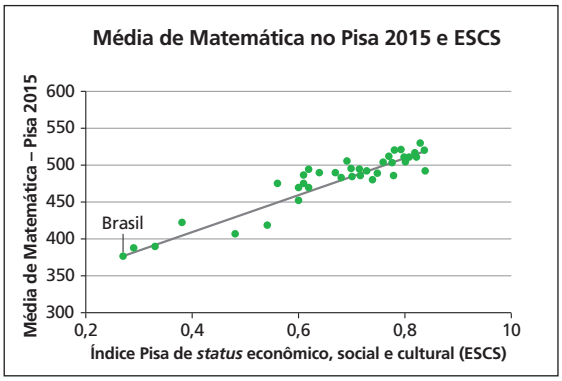
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

30. a) sim; há uma correlação positiva.
30. b) Dos países representados no diagrama, o Brasil é o que teve a menor média de Matemática no Pisa 2015 e o menor Índice Pisa de *status* econômico.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

30. Observe o diagrama e as informações a seguir, extraídos do *Anuário Brasileiro da Educação Básica 2019*.



Disponível em: <https://www.todospelaeducacao.org.br/_uploads/_posts/302.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2020.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) é uma avaliação trienal aplicada a estudantes de 15 anos em cerca de 70 países. Ele é realizado pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) em colaboração com as nações envolvidas.

O Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural (ESCS) é uma forma de considerar os efeitos do nível socioeconômico familiar dos estudantes, assim como do contexto social de suas escolas. Essa medida tem três componentes: índice do nível educacional dos pais, índice do nível ocupacional dos pais e índice dos bens domésticos – recursos educacionais e culturais presentes no lar.

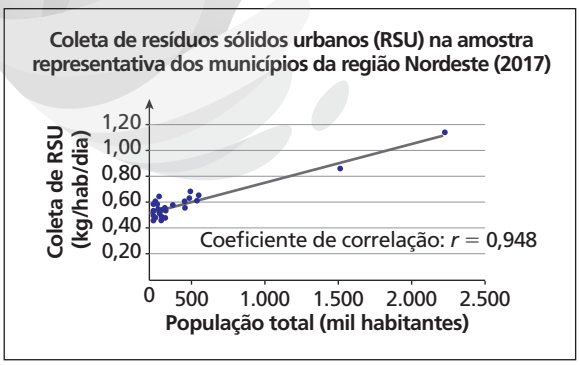
Nesse diagrama, cada ponto representa os dados de um país; os dados referentes ao Brasil são representados pelo ponto mais à esquerda no diagrama.

Com base em todas as informações apresentadas, responda às questões.

a) Há algum tipo de correlação entre o Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural (ESCS) e a média de Matemática no Pisa 2015?

b) Qual é a situação do Brasil, em relação a essas duas variáveis, comparado aos outros países representados no diagrama?

31. O diagrama a seguir foi extraído do documento *Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2017*.



Fonte: Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe). *Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2017*, set. 2018.

Em relação a esse diagrama, escolha a afirmativa correta. alternativa c

a) A correlação entre as variáveis "população" e "coleta de RSU" é negativa.

b) A correlação entre as variáveis "população" e "coleta de RSU" é nula.

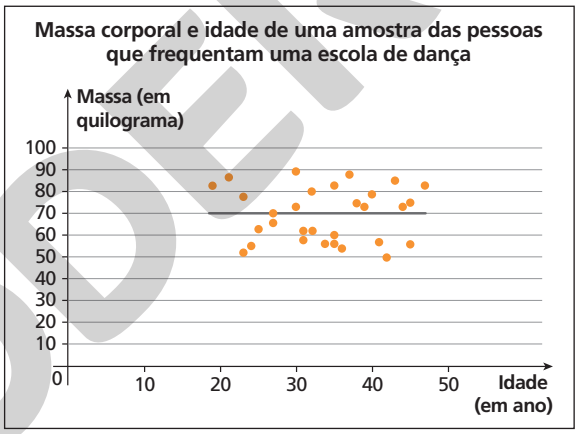
c) Nessa amostra, cidades com maior população tendem a ter maior coleta diária de resíduos sólidos urbanos por habitante.

d) Todos os municípios da amostra têm coleta diária de menos de 1 kg de RSU por habitante.

e) O diagrama apresenta dados de todos os municípios da região Nordeste.

32. O diagrama a seguir apresenta os dados de massa corporal e idade de uma amostra de 30 pessoas que frequentam uma escola de dança.

Pela representação gráfica, é possível perceber algum tipo de correlação linear entre as variáveis? sim; a correlação é nula.



Dados fornecidos pela escola de dança.

33. Considere os dados representados pelos pares ordenados a seguir, referentes a 20 alunos de uma turma de 3º ano. Em cada par, a primeira coordenada representa a altura do aluno (em centímetro), e a segunda, seu número de calçado.

Ver resolução no Guia do professor.

(150; 34) (162; 36) (154; 34) (168; 41) (167; 37)
(175; 42) (155; 35) (168; 37) (170; 38) (163; 36)
(167; 37) (165; 36) (175; 40) (172; 43) (180; 44)
(169; 39) (176; 39) (160; 36) (167; 36) (170; 42)

Usando uma planilha eletrônica, construa um diagrama de dispersão para esse conjunto de dados e verifique se o número do calçado está relacionado à altura dos alunos. Ainda na planilha, calcule o coeficiente de correlação e trace a reta que ajusta os pontos do diagrama.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

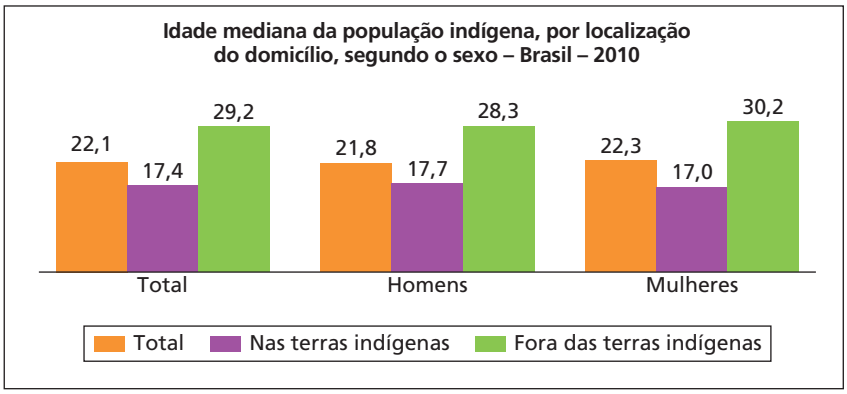
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação Nesse bloco de exercícios, os alunos vão resolver problemas em diferentes contextos, que envolvem as medidas de tendência central e as medidas de dispersão, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316** da BNCC.

1. Observe o gráfico a seguir e, depois, responda às questões.

NELSON MATSUDA



Fonte: IBGE. *Censo demográfico 2010*: características gerais dos indígenas – resultados do universo, 2012.

LUCIOLA ZVARICK/PULSAR IMAGENS

Crianças da Aldeia Piyulaga, da etnia Wauja, na Terra Indígena Xingu, Gaúcha do Norte – MT, 2019.

a) O que o gráfico mostra? a idade mediana da população indígena por localização do domicílio e por sexo

b) Qual é a idade mediana da população indígena total? 22,1 anos

c) A idade mediana da população indígena é maior entre a população residente em terras indígenas ou fora delas? fora de terras indígenas

d) A população masculina é mais velha ou mais nova que a população indígena feminina? Ver resolução no Guia do professor.

2. Em uma pesquisa realizada com 100 famílias, foram levantadas as seguintes informações:

Filhos por família						
Número de filhos	0	1	2	3	4	5
Quantidade de famílias	17	25	28	19	7	4

Dados fictícios.

2 e 2 a) Qual é a mediana e a moda do número de filhos?

b) Qual é o número médio de filhos por família? 1,86

3. A média das massas de 25 clientes de um *spa* é 84 kg. A esse grupo juntaram-se n pessoas, que, curiosamente, tem 90 kg cada uma.

Determine o número n de pessoas sabendo que a média das massas do novo grupo formado passou para 85 kg. 5

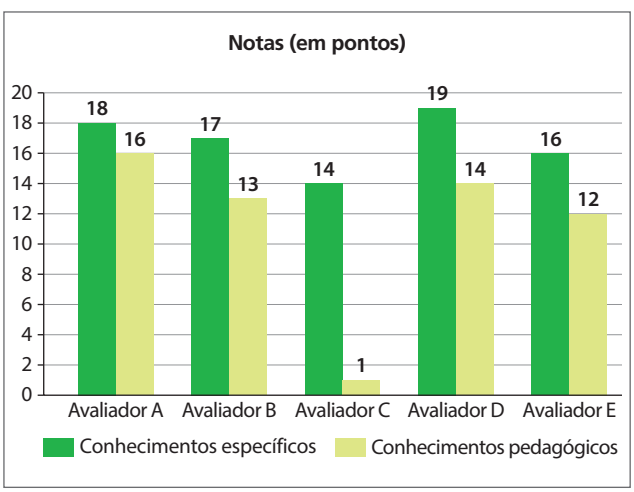
4. (Vunesp) Sejam dois bairros, A e B, de certa cidade. O bairro A possui 1.000 residências, sendo o consumo médio mensal de energia elétrica por residência 250 kWh. Já o bairro B possui 1.500 residências, sendo o consumo médio mensal por residência igual a 300 kWh. O consumo médio mensal de energia elétrica por residência, considerando os dois bairros, A e B, é:

alternativa b

a) 275 kWh
b) 280 kWh
c) 287,5 kWh
d) 292,5 kWh
e) 550 kWh

5. (Enem) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta de cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.

ADILSON SECCO



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

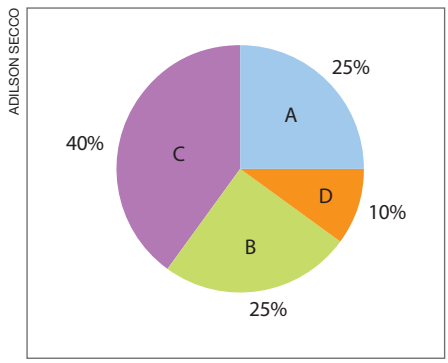
MODERNA

Registre as respostas em seu caderno.

A nova média, em relação à média anterior, é: alternativa b

a) 0,25 ponto maior.
b) 1,00 ponto maior.
c) 1,00 ponto menor.
d) 1,25 ponto maior.
e) 2,00 pontos menor.

6. (Enem) Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores da diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade é: alternativa c

a) 300,00
b) 345,00
c) 350,00
d) 375,00
e) 400,00

7. (Fuvest-SP) O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi: 5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nesta rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada? 18 gols

8. (Enem) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então: alternativa e

a) $X = Y < Z$
b) $Z < X = Y$
c) $Y < Z < X$
d) $Z < X < Y$
e) $Z < Y < X$

9. (Enem) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro abaixo.

Dias do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

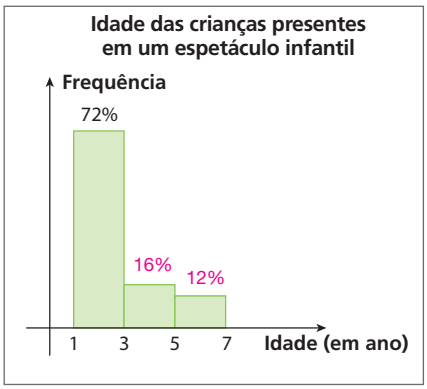
Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a: alternativa b

a) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.
b) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.
c) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.
d) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.
e) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

10. Cada um dos 60 alunos de uma turma obteve em uma prova nota 5 ou nota 10. A média dessas notas foi 6. Quantos alunos obtiveram nota 5? 48 alunos

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11. O gráfico abaixo tem uma falha de impressão: não aparecem a frequência entre 3 e 5 anos nem a frequência entre 5 e 7 anos. Sabendo que a média das idades é 2,8 anos, determine os percentuais relativos a essas frequências.



ADILSON SECCO

Dados fictícios.

12. Dado o conjunto de valores 2, 3, 5, 4 e 6, obtenha o desvio médio correspondente. 1,2

13. Considere a distribuição de frequências abaixo.

Dados observados	50	100	150
Frequência	30	60	10

Calcule a média e o desvio padrão dessa distribuição.
$\overline{x} = 90$ e $Dp = 30$

14. Considere os seguintes grupos de valores:

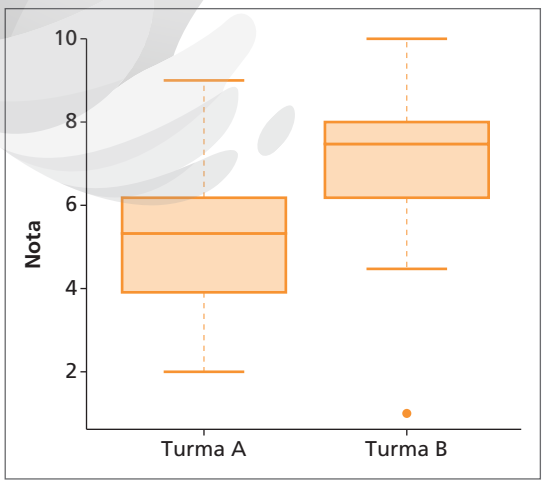
grupo A: x, 6, 3, 4, 5

grupo B: 9, 1, 4, 8, x, 6, 11, 3

Determine os possíveis valores inteiros de x de modo que a média no grupo A não ultrapasse 4 e que a média no grupo B seja, no mínimo, igual a 5.
$-2, -1, 0, 1$ e 2

Nos exercícios **15** e **16**, julgue cada item em certo ou errado.

15. (Cespe-DF)



NELSON MATSUDA

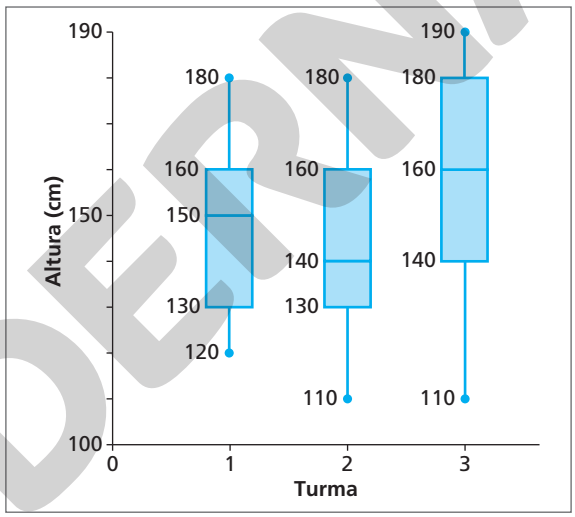
Com base na figura da coluna ao lado, que apresenta uma comparação entre as notas finais obtidas pelos alunos das turmas A e B de determinada disciplina, julgue os itens a seguir.

a) A nota mínima na turma A é menor que a nota mínima na turma B. errado

b) O desvio interquartílico das notas da turma A é menor que o desvio interquartílico das notas da turma B. errado

(*Observação*: Desvio interquartílico é o mesmo que chamamos de intervalo interquartil.)

16. (Cespe-DF)



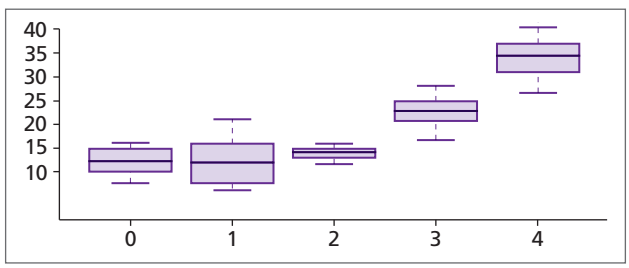
NELSON MATSUDA

A figura acima apresenta esquematicamente as distribuições das alturas (em cm) dos estudantes das três turmas de uma escola. As linhas verticais de cada *box-plot* se estendem até os valores extremos da distribuição. Com base nessas informações, julgue os itens consecutivos.

a) A turma 3 tem a maior amplitude de alturas. certo

b) Entre os estudantes da turma 1, 75% possuem alturas iguais ou superiores a 160 cm, enquanto metade dos estudantes da turma 3 tem altura igual ou inferior a 160 cm. errado

17. (Nucepe-PI) A figura abaixo mostra o *box-plot* da variável salário para amostras de 5 empresas, enumeradas de 0 a 4.



NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Registre as respostas em seu caderno.

Com relação a estes gráficos, é falso afirmar que: alternativa a

a) as empresas 1 e 2 são as que apresentam as menores variabilidades entre os salários.

b) a empresa 1 paga os menores salários.

c) a mediana dos salários das empresas 0 e 1 são equivalentes.

d) existem pessoas na empresa 1 que ganham mais do que na empresa 2.

e) as empresas 1 e 4 apresentam as maiores variabilidades entre os salários.

Aprofundamento

No exercício **18**, julgue cada item em certo ou errado.

18. (Cespe-DF)

2	1	3	2	6	
3	4	3	5	8	7
4	6	2	1	9	6
5	4	2	0	5	

2 | 1 = 21 anos

NELSON MATSUDA

Considerando que o diagrama de ramo e folhas acima mostra a distribuição das idades (em anos) dos servidores de determinada repartição pública, julgue os próximos itens.

a) O primeiro quartil e o terceiro quartil são, respectivamente, 34 e 46 anos de idade. errado

b) A mediana das idades dos servidores é igual a 39,5 anos. certo

19. (FGV) Um conjunto de 10 valores numéricos x_1, x_2, x_3, ... x_{10} tem média aritmética igual a 100 e variância igual a 20. Ver resolução no Guia do professor.

Se adicionarmos 5 a cada valor, isto é, se obtivermos o conjunto $(x_1 + 5)$, $(x_2 + 5)$, $(x_3 + 5)$, ... $(x_{10} + 5)$:

a) qual a média do novo conjunto de valores? Justifique.

b) qual a variância do novo conjunto de valores? Justifique.

20. (Enem) Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante. A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numeração dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor: alternativa a

a) branca e os de número 38.

b) branca e os de número 37.

c) branca e os de número 36.

d) preta e os de número 38.

e) preta e os de número 37.

21. O Departamento de Aviação Civil registrou, durante cinco dias, o percentual diário de voos de duas companhias aéreas, A e B, que decolaram sem atraso.

Percentual diário de voos que decolaram sem atraso					
Companhia A	90%	92%	95%	88%	91%
Companhia B	97%	88%	98%	86%	90%

Fonte: Departamento de Aviação Civil.

a) Que companhia teve o percentual médio mais alto? B

b) Que companhia teve desempenho mais regular? A

22. O gráfico a seguir mostra a quantidade de estrangeiros que visitaram certa cidade em diferentes anos. Determine o desvio padrão dos dados apresentados. ≃ 0,516 milhão de turistas

ADILSON SECCO

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Considerando os valores 7, 11, 8, 14 e 10, podemos afirmar que, para essa amostra, a média aritmética é [redacted], a moda [redacted] e a mediana [redacted]. alternativa c

a) 10; é 10; não existe
b) 10; não existe; é 8
c) 10; não existe; é 10
d) 10; não existe; é 14

2. Samanta almoça em um restaurante próximo a seu trabalho de segunda a sexta. Na semana passada, ela gastou as seguintes quantias: R$ 16,00, R$ 15,00, R$ 17,00, R$ 14,00 e R$ 15,00. Portanto, seu gasto médio com almoço na semana passada foi: alternativa d

a) R$ 15,00
b) R$ 16,50
c) R$ 15,50
d) R$ 15,40

3. Oito amigas têm, respectivamente, 13, 12, 12, 15, 14, 12, 13 e 15 anos. Podemos dizer que a idade mais frequente, ou idade [redacted], é [redacted] anos. alternativa b

a) mediana; 13
b) modal; 12
c) média; 12
d) mediana; 14

4. O desvio padrão [redacted] quando todos os valores observados são iguais. alternativa b

a) não existe
b) é zero
c) é negativo
d) é não nulo

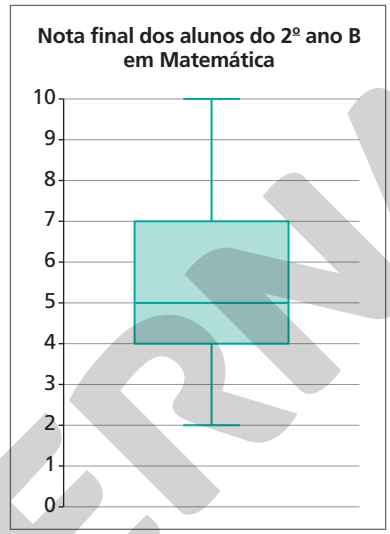
5. [redacted] é o desvio médio e [redacted] é a variância da distribuição 1, 2, 3, 4 e 5. alternativa d

a) 1,5; 2
b) 1,0; 10
c) 1,2; 10
d) 1,2; 2

6. Uma pesquisa de bairro constatou que um mesmo produto era vendido por preços diferentes nas seis lojas que o comercializavam em determinada rua. Os preços encontrados foram R$ 9,00, R$ 5,00, R$ 8,00, R$ 10,00, R$ 4,00 e R$ 6,00. A pesquisa calculou o desvio padrão desses valores, que é aproximadamente: alternativa d

a) 3,1
b) 1,0
c) 1,8
d) 2,2

7. Observando o *box-plot* a seguir, pode-se afirmar que o primeiro quartil, a mediana, o terceiro quartil e a amplitude das notas são, respectivamente: alternativa a



Dados fictícios.

a) 4, 5, 7 e 8
b) 2, 5, 10 e 8
c) 4, 5, 7 e 10
d) 5, 4, 7 e 10

8. Para verificar a associação entre duas variáveis numéricas é mais adequado construir um: alternativa c

a) gráfico de barras duplas.
b) gráfico de linhas.
c) diagrama de dispersão.
d) *box-plot*.

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam média, moda e mediana de uma distribuição.	X	X	X					
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.				X	X	X		
Ler e interpretar *box-plots* e analisar a conveniência de seu uso.							X	
Ler e interpretar diagramas de dispersão.								X
Páginas do livro referentes ao conceito	74 a 82	74 a 82	74 a 82	83 a 89	83 a 89	83 a 89	90 a 94	94 a 98

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O desenvolvimento das competências gerais **1** e **2** e das competências específicas **3** e **4**, bem como da habilidade **EM13MAT315** da BNCC, é favorecido nessa abertura de capítulo, pois, ao analisar o esquema na resolução do problema (saber se suas senhas são seguras), os alunos poderão utilizar conhecimentos construídos sobre os mundos físico e digital, além de exercitar a curiosidade intelectual, refletir, analisar e investigar causas, para resolver problemas e criar soluções, com base em conhecimentos da área tecnológica. A segurança de senhas é um tema contemporâneo de ciência e tecnologia e, por isso, é de grande interesse do universo juvenil. As senhas são necessárias em *sites*, aplicativos, celulares e computadores. Assim, explore ao máximo o esquema, perguntando aos alunos como mantêm a segurança de seus dados em dispositivos eletrônicos.

CAPÍTULO

4 Análise combinatória

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT310** e **EM13MAT315**.

ILUSTRAÇÃO: LUIZ AUGUSTO BARBOZA

Quem acessa a internet com frequência está acostumado a criar senhas para diferentes tipos de serviço (e-mail, redes sociais, cadastros em sites *etc.). Essas senhas, que muitas vezes misturam letras, algarismos e outros caracteres especiais, servem para garantir a segurança das informações e a privacidade dos usuários. Mas os termos que escolhemos como palavras-chave podem não ser tão seguros quanto imaginamos, o que nos torna alvos fáceis de vírus, programas de computador maliciosos e pessoas mal-intencionadas.*

Objetivos do capítulo

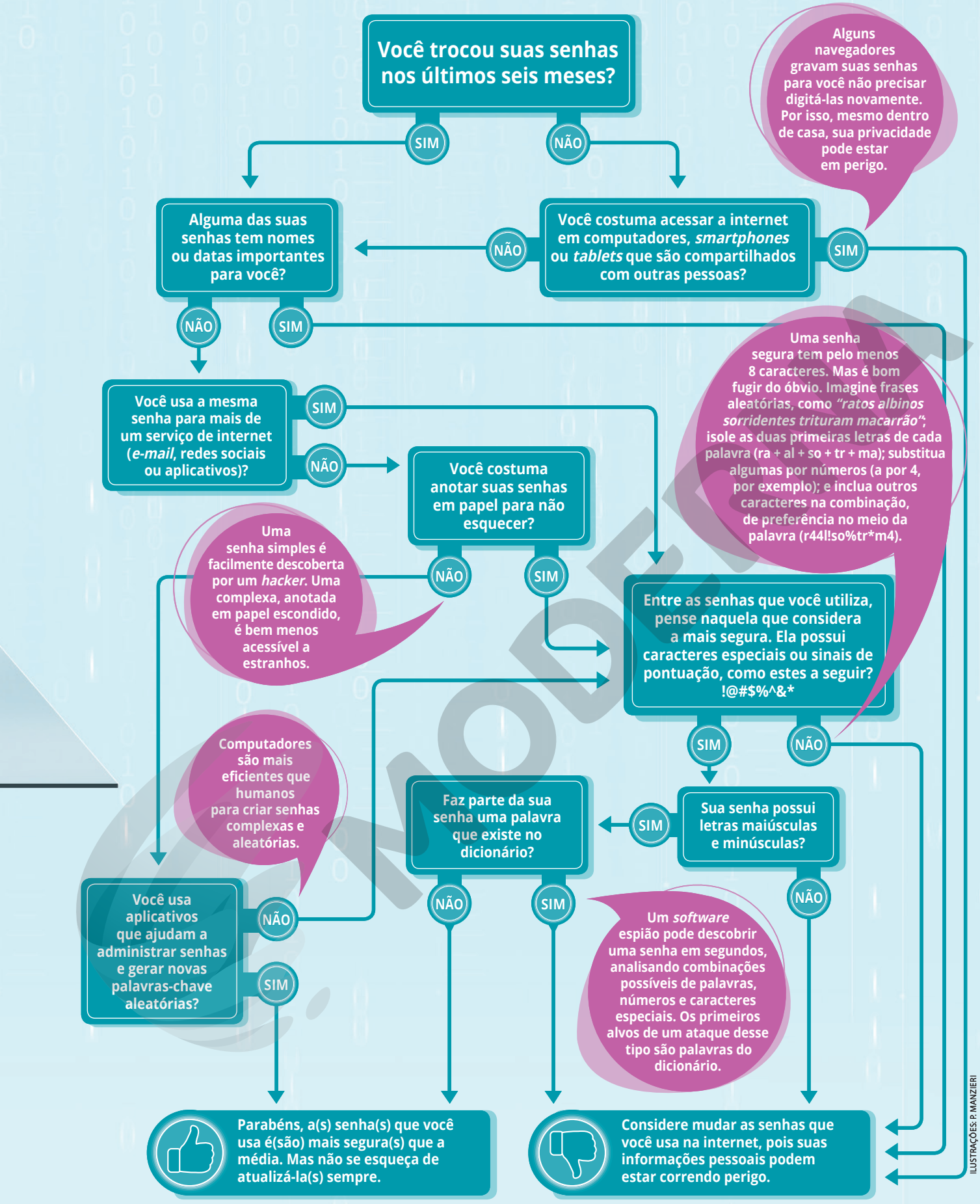
- Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.
- Aplicar as noções de fatorial.
- Identificar a natureza dos problemas de contagem.
- Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.

Todos os anos, *sites* especializados em segurança na rede divulgam as senhas mais comuns descobertas por *hackers*. No topo da lista, sempre estão combinações óbvias, como 123456 e password (a palavra "senha", em inglês), ou formadas por sequências de caracteres do teclado, como qwerty. É impossível estar completamente seguro na internet, mas, com criatividade e cuidado, é possível escapar do óbvio e aprimorar sua segurança na rede.

Segurança em dobro

Dê preferência a *sites* e serviços virtuais que tenham sistema de segurança complexo. Para acessá-los, além de uma senha, você precisará passar por uma etapa extra, como digitar um código autenticador ou reconhecer caracteres na tela.

MODERNA



ILUSTRAÇÕES: P. MANZIERI

Dados obtidos em: *The worst passwords of 2018*. SplashData. Disponível em: <https://www.teamsid.com/splashdatas-top-100-worst-passwords-of-2018/>. Acesso em: 20 abr. 2020; *Cartilha de segurança para a internet*: versão 4.0. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2012; *How secure is my password?* Disponível em: <howsecureismypassword.net/>. Acesso em: 20 abr. 2020.

Ao longo de todo o capítulo, será favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT310** da BNCC, uma vez que os alunos deverão resolver e elaborar problemas de contagem por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas.
A competência específica **3** também é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

1 Contagem

No mundo atual, é cada vez maior a necessidade de armazenar e transmitir dados pessoais e sigilosos com segurança. Além de complexos sistemas criptografados que compõem os suportes lógicos de programação nas redes de computadores, a inviolabilidade dos dados pode ser assegurada com certo grau de confiança quando o usuário cria senhas não previsíveis.

Uma senha é um conjunto de caracteres que confirma a identidade de um usuário ou permite o acesso a dados, programas ou sistemas que não estão disponíveis ao público. Para formar uma senha, além das 26 letras do alfabeto – que podem ser aplicadas em maiúscula ou em minúscula – e dos 10 algarismos, ainda dispomos de vários caracteres especiais.

De acordo com o infográfico da abertura deste capítulo, uma senha segura deve ter pelo menos 8 caracteres. Mesmo sem fazer uso dos caracteres especiais, a quantidade de senhas que podemos inventar é enorme.

Empregando apenas os algarismos e as letras do nosso alfabeto, quantas senhas com o tamanho mínimo sugerido no infográfico podem ser formadas? E se pudermos utilizar também os caracteres especiais sugeridos?

Resolver problemas como esses implica determinar a quantidade de combinações possíveis para formar as diferentes senhas. Problemas de contagem desse tipo fazem parte do nosso cotidiano.

O campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto é chamado de **Análise combinatória**. A Análise combinatória pode ser aplicada nas mais diversas situações, como na Química, ao investigar a possível união entre átomos, ou no esporte, ao elaborar tabelas de campeonatos.

Associada à Probabilidade e à Estatística, a Análise combinatória constitui um poderoso instrumento de antecipação de resultados nos campos industrial, comercial, científico ou governamental.

No decorrer deste capítulo, veremos como resolver os problemas citados e outros pertinentes à Análise combinatória.

1.1 Situações envolvendo problemas de contagem

Acompanhe as situações a seguir.

a) Um programa de TV sorteia duas casas de uma mesma rua para a entrega de prêmios. Os números das casas sorteadas devem ter 3 algarismos. Um dos números deve ser par, e o outro, ter algarismos distintos. Do total de números possíveis, quantos atendem à primeira exigência? E quantos atendem à segunda?

Vamos partir de um esquema que represente números de 3 algarismos no sistema decimal de numeração:

centena	dezena	unidade

No primeiro caso, há 9 possibilidades para a ordem das centenas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9). Para cada algarismo que pode ocupar a ordem das centenas, há 10 possibilidades para a ordem das dezenas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), totalizando $9 \cdot 10$ possibilidades, isto é, 90 possibilidades. Para cada uma dessas 90 possibilidades, há 5 para a ordem das unidades (para o número ser par, a ordem das unidades deve ser ocupada por 0, 2, 4, 6 ou 8). Logo, podemos formar $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$, ou seja, 450 números pares de 3 algarismos.

No segundo caso, como os algarismos devem ser distintos, há 9 possibilidades para a ordem das centenas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), 9 possibilidades para a ordem das dezenas (qualquer um dos 9 algarismos distintos da ordem das centenas, incluindo o 0), e 8 possibilidades para a ordem das unidades (qualquer um dos 8 algarismos distintos das ordens das centenas e das dezenas). Assim: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$, ou seja, podemos formar 648 números de 3 algarismos distintos.

Portanto, com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é possível formar 450 números pares de 3 algarismos e 648 números de 3 algarismos distintos.

Observação

Números com algarismos distintos são aqueles que não têm algarismos repetidos. São válidos, por exemplo, 532 ou 125, mas não 332, 555 ou 242.

Observação

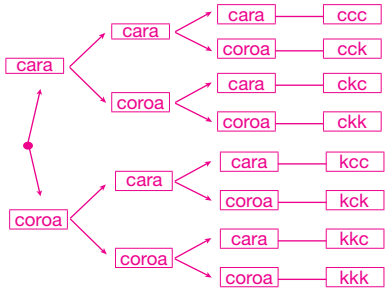
A casa da centena não pode ser zero, porque, nesse caso, teríamos um número com dois algarismos, e não com três. Por exemplo, 047.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

A árvore de possibilidades, nesse caso, seria assim:



ADILSON SECCO

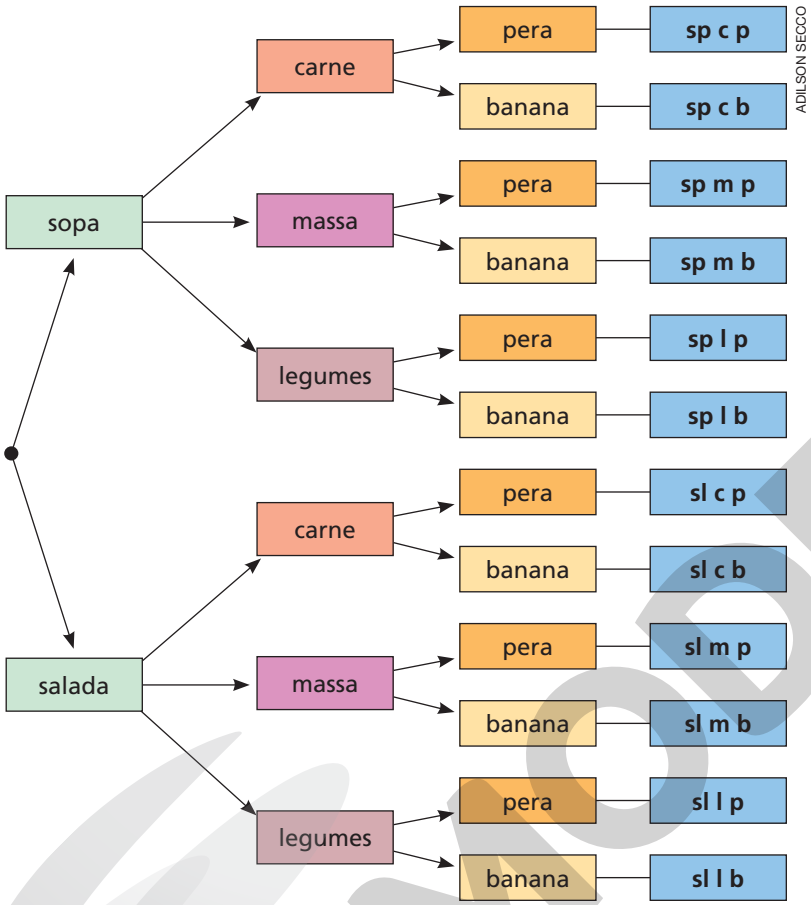
b) Raul almoça em um restaurante que oferece refeições a um preço fixo com direito a uma entrada, um prato principal e uma fruta. O restaurante oferece 2 opções de entrada (sopa ou salada), 3 opções de prato principal (carne, massa ou legumes) e 2 opções de fruta (pera ou banana). Quantas refeições diferentes Raul pode montar?

Ele deve fazer três tipos de escolha:

- E_1: sopa ou salada (**sp** ou **sl**);
- E_2: carne, massa ou legumes (**c**, **m** ou **l**);
- E_3: pera ou banana (**p** ou **b**).

Para 3 lançamentos, obtemos 8 resultados. Para 2 lançamentos, temos $2^2 = 4$ resultados; para 3 lançamentos, $2^3 = 8$ resultados. Dessa maneira, pode-se observar que, para 4 lançamentos, teremos $2^4 = 16$ resultados, e generalizando para n lançamentos, teremos 2^n resultados possíveis.

Vamos organizar as opções em uma árvore de possibilidades:



ADILSON SECCO

CRÉDITOS DAS FOTOS: SOPA: MARGOUILLAT PHOTO/SHUTTERSTOCK; SALADA: VALERY121283/SHUTTERSTOCK; CARNE: BONCHAN/SHUTTERSTOCK; MASSA: YELLOWJ/SHUTTERSTOCK; LEGUMES: SIAMIONAU PAVEL/SHUTTERSTOCK; PERA: BERGAMONT/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES; BANANA: MAKS NARODENKO/SHUTTERSTOCK

Portanto, Raul pode montar $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, ou seja, 12 refeições diferentes.

c) Agora, vamos considerar dois lançamentos sucessivos de uma moeda. Que resultados podem ocorrer?

Quando lançamos uma moeda, podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**). Lançando-a uma segunda vez, novamente podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**).

Vamos representar em uma tabela de dupla entrada esses 2 lançamentos:

2º lançamento / 1º lançamento	Cara (c)	Coroa (k)
Cara (c)	cc	ck
Coroa (k)	kc	kk

URFIN/SHUTTERSTOCK

Nos 2 lançamentos, temos $2 \cdot 2 = 4$, ou seja, 4 resultados: (**c**, **c**), (**c**, **k**), (**k**, **c**) ou (**k**, **k**).

Ao resolver as três situações anteriores, empregamos um princípio que será muito usado neste capítulo: o **princípio multiplicativo**, também chamado de **princípio fundamental da contagem**.

Observações

- Em problemas de contagem mais simples, a **árvore de possibilidades**, também chamada de **diagrama de árvore** ou **diagrama sequencial**, ajuda na visualização e na contagem de todas as possibilidades.
- Fazer uma tabela é outra maneira de visualizar e de contar as possibilidades.

Reflita

Faça uma árvore de possibilidades para 3 lançamentos sucessivos de uma mesma moeda. Quantos são os resultados possíveis? Pensando na quantidade de resultados obtidos para 2 e 3 lançamentos e no **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*, determine a quantidade de resultados possíveis para 4 lançamentos e conjecture qual seria essa quantidade para n lançamentos.

A atividade do boxe **Reflita** favorece o desenvolvimento das competências geral **2** e específica **5** da BNCC, pois ao resolvê-la os alunos irão recorrer à abordagem própria das ciências para investigar, elaborar hipóteses e estabelecer conjecturas, por meio da observação de padrões, sobre o princípio multiplicativo, que será apresentado em seguida.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

1.2 Princípio multiplicativo

Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, *A* e *B*. Se *A* pode ocorrer de *m* maneiras e se, para cada uma delas, *B* pode ocorrer de *n* maneiras, o número de maneiras que o acontecimento pode ocorrer é $m \cdot n$.

O princípio multiplicativo pode ser estendido para três ou mais etapas.

Exercícios resolvidos

R1. Três alunos chegam atrasados a uma palestra. No auditório, só estão vazias 7 cadeiras. Determinar a quantidade de maneiras que eles podem ocupar essas cadeiras.

▸ **Resolução**

Vamos considerar que a ocupação das cadeiras ocorra em três etapas:

- E_1 (escolha de uma cadeira pelo primeiro aluno): 7 possibilidades
- E_2 (escolha pelo segundo aluno): 6 possibilidades
- E_3 (escolha pelo terceiro aluno): 5 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Logo, os alunos podem ocupar as cadeiras de 210 maneiras diferentes.

A situação de 7 alunos escolherem 3 cadeiras é análoga à de 7 cadeiras serem escolhidas por 3 alunos quanto ao número de possibilidades. Logo, a quantidade seria a mesma.

Reflita

Considere agora que no exercício resolvido **R1**, 7 alunos chegassem atrasados e só houvesse 3 cadeiras vazias no auditório. Nesse caso, qual seria a quantidade de maneiras que 7 alunos poderiam ocupar os 3 lugares?

R2. Ao entrar em um cinema, 6 amigos encontram uma fila de 6 poltronas livres. Determinar de quantas maneiras diferentes eles podem ocupar essas poltronas.

▸ **Resolução**

O esquema abaixo representa as possibilidades de ocupação para as 6 poltronas.

6	5	4	3	2	1

Observe que são:

- 6 possibilidades para a ocupação da primeira poltrona;
- 5 possibilidades para a segunda;
- 4 possibilidades para a terceira;
- 3 possibilidades para a quarta;
- 2 possibilidades para a quinta;
- 1 possibilidade para a sexta.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Portanto, os amigos podem ocupar as poltronas de 720 maneiras diferentes.

Pelo princípio multiplicativo, temos:
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$
Logo, são 5.040 maneiras diferentes.

Reflita

Em uma situação parecida com a do exercício resolvido **R2**, de quantas maneiras diferentes 7 pessoas podem ocupar uma fila com 7 poltronas livres?

R3. Determinar a quantidade de números de 4 algarismos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

▸ **Resolução**

O esquema abaixo representa o número de 4 algarismos:

milhar	centena	dezena	unidade

Observe que, para o algarismo do milhar, há apenas 5 possibilidades, pois essa posição não pode ser ocupada pelo algarismo zero. Para cada uma das posições restantes — centena, dezena e unidade —, há 6 possibilidades.

Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:

$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1.080$

Portanto, é possível formar 1.080 números com os algarismos dados.

R4. Determinar a quantidade de números de 4 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 e que são divisíveis por 5.

▸ **Resolução**

Se um número é divisível por 5, termina em 0 ou em 5. Vamos estudar esses dois casos.

_ _ _ 0
- 3 possibilidades
- 4 possibilidades
- 5 possibilidades: (1, 2, 3, 4 e 5)

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

_ _ _ 5
- 3 possibilidades
- 4 possibilidades
- 4 possibilidades: (1, 2, 3 e 4)

$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

Assim, temos 60 números terminados em 0 e 48 números terminados em 5. Portanto, é possível formar 108 números divisíveis por 5.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se achar conveniente, conversar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e promover um trabalho interdisciplinar com base no exercício **R5**. Pode-se explicar aos alunos o que é o Mercosul e discutir quais seriam os objetivos de se criar um sistema comum de emplacamento de veículos.

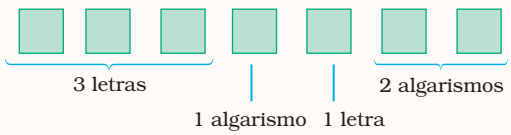
R5. Muitos países do Mercosul (Mercado Comum do Sul) já adotam um sistema unificado de emplacamento de veículos. No Brasil, na maioria dos estados, tornou-se obrigatório que veículos emplacados a partir de janeiro de 2020 adotassem esse sistema. No Brasil essas placas são compostas por uma sequência de 3 letras, 1 algarismo, 1 letra e 2 algarismos. Quantas são as possibilidades de placas diferentes para o Brasil nesse sistema? (Considere o alfabeto com 26 letras.)

JUNIOR ROZZO/ ROZZO IMAGENS

Novo modelo de placa adotado pelos países membros do Mercosul.

▸ **Resolução**

O diagrama a seguir representa os 7 espaços de uma placa nesse sistema:



Cada um dos espaços 1, 2, 3 e 5 pode ser preenchido com qualquer uma das 26 letras do alfabeto, e cada um dos espaços 4, 6 e 7 pode ser preenchido com qualquer um dos 10 algarismos, conforme o esquema abaixo:

26	26	26	10	26	10	10

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de placas diferentes é:
$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 456.976.000$
Portanto, há 456.976.000 possibilidades de placas diferentes para o Brasil nesse sistema.

Espera-se que os alunos percebam que o número de possibilidades de placas será igual ao do Brasil, pois da mesma forma será o produto de quatro fatores 26 e três fatores 10.

Reflita

No caso do Paraguai, as placas do sistema unificado têm o seguinte padrão de composição: 4 letras seguidas por 3 números. Sem fazer contas, responda: nesse caso, o número de possibilidades de placas é maior, menor ou igual que no Brasil?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Com 3 tipos de macarrão e 2 tipos de molho, quantas opções de pratos diferentes de macarronada podem ser preparadas? 6 opções
2. Empregando apenas letras e algarismos, aproximadamente quantas senhas com a quantidade mínima de caracteres sugerida no infográfico da abertura deste capítulo podem ser formadas? Indique a resposta usando uma potência. 62^8 senhas
3. Doze corredores participam de uma corrida. Se nenhum pode ganhar mais de um prêmio, de quantas maneiras podem ser distribuídos o 1º e o 2º prêmio? 132 maneiras
4. Quantos são os números de 4 algarismos? 9.000 números
5. De quantas maneiras distintas podem ser colocados 5 livros lado a lado em uma prateleira? 120 maneiras

AKSENOVA NATALYA/ SHUTTERSTOCK

6. A senha de acesso de um *site* é composta de 4 letras distintas seguidas de 3 algarismos distintos. A primeira letra não pode ser Z, e o primeiro algarismo não pode ser zero. Quantas diferentes senhas de acesso a esse *site* podem ser criadas? 223.560.000 senhas
7. Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:
   a) podem ser repetidos. 180 números
   b) não podem ser repetidos. 100 números
8. Quantos números entre 1.000 e 8.000 podemos formar usando apenas 1, 3, 5, 7 e 9 sem repeti-los? 96 números
9. A seleção para certo concurso é feita por uma prova com 6 questões. Para cada questão, há 3 opções de resposta. Os candidatos marcam as 6 respostas em um cartão igual ao da figura a seguir.

Código do candidato: xxxxxxx-y						
	1	2	3	4	5	6
A	○	●	○	○	●	○
B	●	○	○	●	○	○
C	○	○	●	○	○	●

ADILSON SECCO

Calcule e responda: de quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido? 729 maneiras

10. Qual é o número mínimo de pessoas que devem prestar o concurso do exercício **9**, de modo a garantir que dois cartões sejam preenchidos de forma idêntica? 730 pessoas
11. Uma técnica de atletismo deve escolher, de um grupo de 7 corredoras, dois times de 4 atletas cada um para as corridas de revezamento 4×100 m e 4×200 m. Todas as 7 atletas podem correr em qualquer um dos revezamentos. Se a melhor corredora deve ser a última nas duas corridas, de quantas maneiras distintas a técnica pode formar os times, sendo que as outras 6 corredoras devem participar de apenas uma equipe e cada ordem será contada como um time diferente? 720 maneiras

Para obter informações sobre o Mercosul, você pode consultar o *site*: <http://www.mercosul.gov.br/> (acesso em 20 abr. 2020). Segundo o Departamento Nacional de Trânsito (Denatran), a criação de um sistema comum de emplacamento permitirá um controle mais rigoroso do transporte de cargas e de passageiros, bem como de veículos particulares entre os países que compõem o bloco.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

13. Promover uma aula interdisciplinar com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias para explorar esse assunto. Perguntar aos alunos sobre sonetos musicados e pedir que apresentem os sonetos cantando e tocando instrumentos musicais na sala de aula. Além de favorecer o desenvolvimento da competência geral 3 da BNCC, pois valoriza e frui diversas manifestações artísticas e culturais, favorece também o desenvolvimento da habilidade da área de Linguagens e suas Tecnologias **EM13LGG601**, pois os alunos terão de analisar os sonetos, compreendendo a sua diversidade.

12. Uma torre de comunicações tem 5 bandeiras sinalizadoras. As mensagens são enviadas quando uma ou mais bandeiras são hasteadas, importando a ordem em que elas são hasteadas. Quantas mensagens distintas podem ser enviadas?

325 mensagens

MANGA

13. Leia o texto e responda.

O poeta e escritor francês Raymond Queneau (1903-1976) lançou, em 1961, um livro de sonetos muito interessante. O livro foi produzido de forma que o leitor possa compor sonetos com 14 versos, escolhendo, para cada linha, um verso entre 10 possíveis. Esse artifício foi possível pois a obra foi montada de modo que cada verso foi impresso em uma tira de papel e encadernado em 14 conjuntos de 10 tiras cada. O mais interessante é que, qualquer que seja a escolha entre os versos, o soneto formado sempre tem coerência.

JEAN PAZ - BIBLIOTECA DE ARTE GULBENKIAN, LISBOA

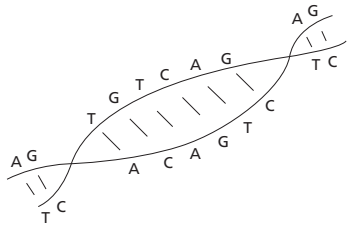
Livro de sonetos de Raymond Queneau na exposição *Tarefas infinitas*, no Centro de Pesquisa e Formação Sesc, São Paulo, 2018.

Segundo as informações do texto, determine a quantidade de sonetos que pode ser composta com o livro de Queneau. 10^{14} ou 100 trilhões de sonetos

14. (UFF-RJ) O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A-T, T-A, C-G e G-C.

Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:

- dois pares consecutivos não sejam iguais;
- um par A-T não seja seguido por um par T-A e vice-versa;
- um par C-G não seja seguido por um par G-C e vice-versa.



NELSON MATSUDA

Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem. Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é: alternativa a

a) 2^{11}
b) 2^{20}
c) 2×10
d) 2^{10}
e) $2^2 \times 10$

15. No código Morse, as "letras" são representadas por pontos e traços, em agrupamentos ordenados de 1 a 4 desses sinais para cada "letra". Quantas "letras" distintas podem ser representadas nesse código?

30 letras

A	B	C	D	E
•—	—•••	—•—•	—••	•

16. Quantos números de 5.000 a 6.999 contêm pelo menos um algarismo 3? 542 números

17. Uma escola tem 677 alunos. Explique por que pelo menos 2 alunos devem ter as mesmas duas letras iniciais de seus nomes. (Considere o alfabeto com 26 letras.) Ver resolução no Guia do professor.

18. Resolva este exercício com um colega.

Em determinado país, os números de telefone possuem 10 dígitos, conforme o padrão:

- código de área com 3 dígitos: o primeiro dígito não pode ser 0 ou 1;
- prefixo com 3 dígitos: o primeiro e o segundo dígito não podem ser 0 ou 1;
- número da linha com 4 dígitos: os dígitos não podem ser todos iguais a 0.

a) Quantos diferentes códigos de área existem? 800 códigos
b) O código de área para certa cidade é 431. Com esse código, quantos diferentes prefixos existem? 640 prefixos
c) Um dos prefixos da cidade do item **b** é 223. Com esse prefixo, quantos números de linha são possíveis? 9.999 números
d) Quantos diferentes números de telefone de 7 dígitos são possíveis dentro do código de área 431? 6.399.360 números
e) Quantos números de telefone de 10 dígitos são possíveis nesse país? 5.119.488.000 números

19. Elabore um exercício que utilize o princípio multiplicativo. Troque o exercício com um colega: ele resolve seu exercício e você resolve o exercício elaborado por ele. resposta pessoal

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

14. Pode-se aproveitar o exercício e, com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, discutir com a turma situações controversas sobre a manipulação e aplicação das tecnologias associadas ao DNA, como controle de pragas, controle de sementes, alimentos transgênicos ou geneticamente modificados etc. Para o debate, a turma deve se preparar com uma pesquisa a fim de ter argumentos consistentes, legais, éticos e responsáveis, de modo a distinguir diferentes pontos de vista, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência **3** da BNCC da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da habilidade **EM13CNT304**.

2 Fatorial de um número natural

Boa parte dos problemas da Análise combinatória pode ser resolvida com uma ferramenta de cálculo que consiste no produto de números naturais consecutivos chamada de fatorial. Por exemplo, $1 \cdot 2 \cdot 3$ ou $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Em ambos os exemplos, multiplicamos números naturais de 1 até n: no primeiro caso, $n = 3$; no segundo, $n = 8$.

O **fatorial** de um número natural n é representado por $n!$ (lemos: "n fatorial") e é definido por:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } n \geqslant 2$$

Considera-se que: $1! = 1$ e $0! = 1$

Exemplos

a) O fatorial de 4, ou seja, 4!, é 24, pois: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$

A notação fatorial facilita a representação da multiplicação de números naturais consecutivos. Por exemplo, para representar o produto $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, podemos escrever 25!

O número n! pode ser expresso da forma apresentada anteriormente, ou, se for conveniente, podemos escrevê-lo em termos de fatoriais de números menores. Veja abaixo:

- $10! = 10 \cdot \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{9!} = 10 \cdot 9!$
- $n! = n \cdot (n - 1)!$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)!$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)!$ etc., para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

Esse tipo de procedimento será muito usado na simplificação de expressões.

Exemplos

a) Veja como podemos simplificar as seguintes expressões:

- $\dfrac{8!}{5! \cdot 3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$
- $\dfrac{1.001!}{1.000!} = \dfrac{1.001 \cdot \cancel{1.000!}}{\cancel{1.000!}} = 1.001$
- $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{(n+1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n + 1$ (simplificamos $n!$ com $n!$)

b) Vamos escrever todas as expressões em termos de 5!

- $\dfrac{6!}{6} = \dfrac{6 \cdot 5!}{6} = 5!$
- $\dfrac{6!}{2} = \dfrac{6 \cdot 5!}{2} = 3 \cdot 5!$
- $4! = \dfrac{4! \cdot 5}{5} = \dfrac{5!}{5}$
- $\dfrac{8! - 6!}{3!} = \dfrac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!) - (6 \cdot 5!)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{(6 \cdot 5!) \cdot (8 \cdot 7 - 1)}{6} = 55 \cdot 5!$

Observação

Algumas calculadoras científicas têm a tecla $x!$, usada para calcular o fatorial de um número natural x.
Em uma calculadora com essa função, para calcular 9!, por exemplo, basta digitar 9 e apertar a tecla $x!$; no visor, aparecerá o número 362.880, que é o resultado de:
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Esse procedimento pode variar dependendo da calculadora.

Reflita

Veja como podemos expressar 1, 2, 3 e 4 usando os símbolos +, −, :, ·, $\sqrt{\ }$ e !, além de quatro números 4.
$1 = (4 + 4 - 4) : 4$
$2 = (4 : 4) + (4 : 4)$
$3 = 4 - 4^{(4-4)}$
$4 = (4!) : \left(\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}\right)$
Faça o mesmo para expressar números de 5 a 10.

Respostas possíveis:
$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$
$6 = (4! : 4) + 4 - 4$
$7 = (4 + 4) - (4 : 4)$
$8 = 4 + 4 + 4 - 4$
$9 = (4 : 4) + 4 + 4$
$10 = (44 - 4) : 4$

Pensamento computacional

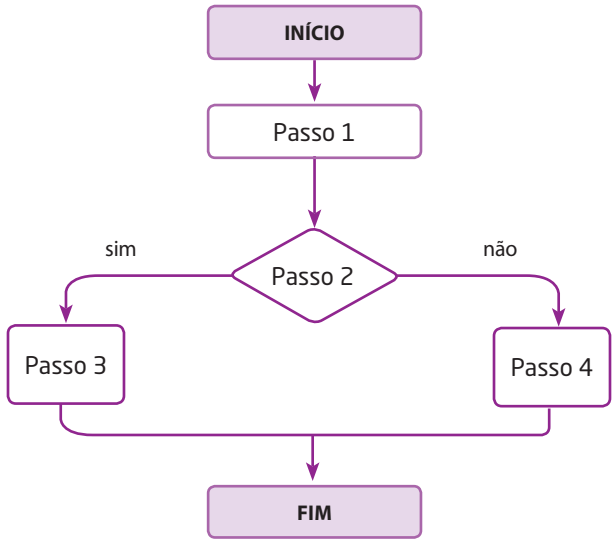
Leia o algoritmo a seguir, escrito em linguagem corrente, para representar o cálculo do fatorial de um número natural n:

Passo 1. Atribui-se um valor a n.
Passo 2. Verifica-se se $n < 2$.
Passo 3. Se n é menor que 2, o valor do fatorial, por definição, é 1, e podemos encerrar o cálculo.
Passo 4. Se n não é menor que 2, então calcula-se: $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 1$, e podemos encerrar o cálculo.

Se julgar pertinente, reforçar aos estudantes que a representação desse algoritmo está em um alto nível de abstração. Explicar que o passo 4 é uma síntese do processo. O cálculo do referido produto demanda mais passos e uma maneira específica de escrevê-lo para que a máquina compreenda.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



NELSON MATSUDA

Esse mesmo algoritmo do cálculo do fatorial de um número natural pode ser representado em um fluxograma.

Observe que o passo 2, no fluxograma ao lado, está representado com o símbolo de estrutura de decisão, pois é preciso verificar se $n < 2$. Sempre que usamos uma estrutura de decisão podemos seguir dois caminhos.

Nesse exemplo, caso n seja menor que 2, o passo a ser executado será o 3, seguindo o fluxo indicado pelo **sim**; caso contrário, em que n seja maior ou igual a 2, o passo a ser executado será o 4, de acordo com o fluxo indicado pelo **não**.

Nesse boxe será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Exercícios resolvidos

R6. Determinar o número natural n sabendo que:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = 4!$$

▸ **Resolução**

Podemos escrever $(n + 1)!$ como $(n + 1) \cdot n!$, obtendo: $\frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = 4!$

Temos: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Obtemos, assim, uma nova expressão, que pode ser simplificada:

$$\frac{(n+1)\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 24 \Rightarrow n + 1 = 24 \Rightarrow n = 23$$

R7. Calcular de quantas maneiras 8 crianças podem sentar em um banco, sabendo que a criança mais nova deve necessariamente sentar do lado esquerdo do banco.

▸ **Resolução**

O esquema a seguir representa o número de possibilidades de ocupação dos 8 lugares do banco.

1	7	6	5	4	3	2	1

O primeiro lugar no lado esquerdo do banco pode ser ocupado de uma única maneira (a criança mais nova). Sobram, então, 7 lugares para as outras 7 crianças. Assim, o próximo lugar pode ser ocupado de 7 maneiras diferentes; o lugar ao lado deste, de 6 maneiras diferentes; e assim por diante.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5.040$

Portanto, as crianças podem ocupar o banco de 5.040 maneiras diferentes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

20. Calcule o valor de:

a) $\frac{7!}{4!}$ 210

b) $\frac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!}$ $\frac{7}{4}$

21. Escreva as expressões em termos de 4! $\frac{205}{4} \cdot 4!$

a) $\frac{5!}{5}$ $4!$

b) $\frac{5!}{2!}$ $\frac{5}{2} \cdot 4!$

c) $\frac{7! - 5!}{4}$

22. Calcule n sabendo que:

a) $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$ 6

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$ 8

23. As letras A, B, C, D, E e F devem ser escritas uma em seguida da outra. De quantas maneiras isso pode ser feito? 720 maneiras

24. Os portões de 5 casas devem ser pintados com as cores azul, marrom, verde e vermelha. De quantas maneiras isso pode ser feito se cada portão deve ser pintado de uma única cor e dois portões não podem ser pintados da mesma cor?

25. Quantos números pares maiores de 40.000 podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6 se cada algarismo é usado apenas uma vez em cada número? 42 números

26. Reescreva o exercício **24** de modo que o novo enunciado permita que o exercício seja resolvido. Depois, peça a um colega de classe que resolva o exercício que você reescreveu, e resolva o exercício criado por ele. resposta pessoal

24. Espera-se que os alunos percebam que não é possível resolver o problema, pois não é possível pintar cinco portões com cores distintas sendo que há apenas quatro cores disponíveis.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 Permutações

3.1 Permutação simples

Anagrama de uma palavra é qualquer agrupamento, com ou sem significado, obtido pela transposição de suas letras. Por exemplo, ROMA e MRAO são anagramas da palavra AMOR.

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

Para a primeira letra, temos 4 possibilidades (A, M, O, R). Depois dessa escolha, há 3 possibilidades para a segunda letra, 2 para a terceira letra e 1 para a quarta letra. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, ou seja, 24 anagramas.

Cada um desses anagramas corresponde a uma permutação simples das letras da palavra AMOR.

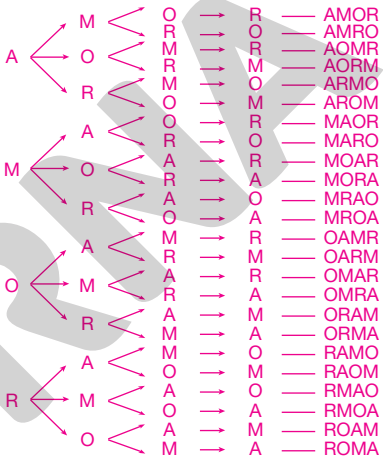
De uma permutação para outra, os elementos são sempre os mesmos; eles apenas trocam de posição. Daí o nome **permutação** (permutar significa trocar os elementos que formam um todo com a finalidade de obter nova configuração).

Dado um conjunto de n elementos distintos, chama-se **permutação simples** dos n elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos. Indica-se por P_n o número de permutações simples de n elementos.

Reflita

- É possível resolver esse problema usando uma árvore de possibilidades? Em caso afirmativo, faça isso.
- Todos os anagramas encontrados formam palavras com significado?

• Sim, pode-se resolver o problema usando uma árvore de possibilidades. Veja:



• Não. Anagramas como AOMR, RMAO ou MROA, por exemplo, formam palavras sem significado.

Situações envolvendo permutação simples

Vamos calcular o número de permutações simples em algumas situações.

a) Para saber, por exemplo, quantos anagramas da palavra CINEMA começam por C, consideramos que, para a primeira letra, temos 1 possibilidade (C) e que as outras 5 letras podem ser permutadas entre si.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$1 \cdot P_5 = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 5! = 120$

Logo, há 120 anagramas de CINEMA começados por C.

b) Vamos considerar que as 20 carteiras de uma sala de aula podem ser ocupadas, de modos distintos, por 20 alunos. Dizemos, então, que esses alunos podem ocupar essas carteiras de P_{20} modos, ou seja:

$P_{20} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.432.902.008.176.640.000$

Logo, há 2.432.902.008.176.640.000 modos de os alunos ocuparem essas carteiras.

O número de permutações simples de n elementos é dado por:
$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$,
ou $P_n = n!$

Exercícios resolvidos

R8. Determinar de quantas maneiras diferentes um casal com 3 filhos pode ocupar um sofá com 5 lugares, de modo que o casal fique sempre junto.

PAULO MANZI

▸ **Resolução**

Se o casal não pode ser separado, devemos considerá-lo como se fosse uma única pessoa, calculando a permutação de 4 pessoas (4!). O esquema abaixo representa uma das possibilidades de ocupação dos 5 lugares.

pai	mãe	filho 1	filho 2	filho 3

Porém, se o casal trocar as posições entre si (2!), obtemos uma possibilidade diferente da anterior.

mãe	pai	filho 1	filho 2	filho 3

Aplicando o princípio multiplicativo, temos: $4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$

Portanto, os 5 lugares podem ser ocupados de 48 maneiras diferentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R9. Determinar a soma de todos os números de 4 algarismos distintos formados com 2, 4, 6 e 8.

▸ **Resolução**

A soma procurada (S) tem P_4 parcelas: $P_4 = 4! = 24$

Na ordem das unidades simples (U), cada algarismo aparece 6 vezes (número de permutações dos outros 3 algarismos nas outras ordens). Ocorre o mesmo nas outras ordens.

A soma dos valores absolutos, em cada ordem, é:

$\underbrace{(8 + 8 + \ldots + 8)}_{6 \text{ vezes}} + \underbrace{(6 + 6 + \ldots + 6)}_{6 \text{ vezes}} + \underbrace{(4 + 4 + \ldots + 4)}_{6 \text{ vezes}} +$

$+ \underbrace{(2 + 2 + \ldots + 2)}_{6 \text{ vezes}} = 120$

$S = 120\ U + 120\ D + 120\ C + 120\ UM$

$S = 120 + 1.200 + 12.000 + 120.000$

$S = 133.320$

Portanto, a soma procurada é 133.320.

24 parcelas

UM	C	D	U
2	4	6	8
2	6	4	8
4	2	6	8
4	6	2	8
⋮	⋮	⋮	⋮
8	4	6	2
8	6	4	2

3.2 Permutação com elementos repetidos

Trocando-se a posição das letras da palavra AMORA, podem ser escritas outras sequências de letras. Nesse caso, porém, os anagramas não correspondem mais às permutações simples, pois a letra A se repete. Apesar de a palavra AMORA ter 5 letras, o número de anagramas distintos é inferior a 5!. Se as 2 letras A fossem distintas, (A_1MORA_2), teríamos 5! anagramas. Assim, fixadas as letras M, O e R, a permutação das letras A_1 e A_2, para cada anagrama de AMORA, daria origem a 2! novos anagramas. Porém, como essas letras são iguais, a permutação delas não gera um novo anagrama. Então, para o cálculo correto do número de anagramas de AMORA, devemos dividir por 2! o total de permutações simples, 5!. Portanto, o total de anagramas da palavra AMORA é $\frac{5!}{2!} = 60$.

Aplica-se o mesmo raciocínio aos casos em que há repetição de mais de 2 elementos.

Por exemplo, na palavra ARARA, se as letras A fossem distintas, teríamos 3! anagramas em cada posição fixada para as demais letras. Se as letras R fossem distintas, teríamos 2! anagramas em cada posição fixada para as demais letras.

Dessa forma, temos que dividir o total de permutações simples (5!) por (3! · 2!). Então, o número de anagramas da palavra ARARA é $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$, ou seja, 10 anagramas, pois, das 5 letras, 3 são A e 2 são R.

Obtemos a mesma palavra. Apesar de evidente, solicitar ao aluno para se concentrar nesse aspecto importante do texto teórico do livro do estudante.

Reflita

O que acontece se permutarmos a primeira e a última letra da palavra AMORA?

O número de permutações de n elementos, dos quais n_1 é de um tipo, n_2 de um segundo tipo, ..., n_k de um k-ésimo tipo, é indicado por $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ e é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Exercícios resolvidos

R10. Determinar quantos anagramas da palavra ELEGER começam por:

a) consoante.

b) vogal.

▸ **Resolução**

a) Temos 3 possibilidades de escolher uma consoante. Tendo escolhido a primeira consoante, sobram 5 letras com 3 letras E repetidas.

Então, o número de anagramas é:

$3 \cdot P_5^3 = 3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$

b) Temos 1 possibilidade de escolher uma vogal. Fixando essa vogal (E), sobram 5 letras com 2 letras E repetidas.

Então, o número de anagramas é:

$1 \cdot P_5^2 = 1 \cdot \frac{5!}{2!} = 60$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R11. destacar o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*, chamando a atenção dos alunos para o fato de que usamos o mesmo modo de cálculo de uma permutação de 6 elementos, tendo um elemento com 3 repetições e outro elemento com 2 repetições.
Observar que os carros a serem guardados na garagem com 3 vagas podem ser tratados como uma combinação de 6 elementos tomados 3 a 3, pois não importa a ordem em que serão guardados. Escolhidos esses 3 elementos, sobram 3 elementos para serem tomados 2 a 2 na garagem de 2 lugares. Desse modo, temos o seguinte cálculo: $C_{6,3} \cdot C_{3,2} = 60$

R11. Determinar de quantos modos um manobrista pode guardar 6 carros em 3 garagens, sabendo que cabem 3 carros em uma garagem, 2 carros na outra e apenas 1 na última. Para a contagem, não considerar a ordem dos carros em cada garagem.

▸ **Resolução**

Vamos representar os carros por *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*. Observe que não basta fazer uma permutação simples com os 6 carros. Suponha, como exemplo, as 6 seguintes disposições nas garagens:

Garagem para 3 carros	Garagem para 2 carros	Garagem para 1 carro
A B C	*D E*	*F*
A C B	*D E*	*F*
B A C	*D E*	*F*
B C A	*D E*	*F*
C A B	*D E*	*F*
C B A	*D E*	*F*

Todas as disposições indicadas na tabela são algumas das permutações possíveis dos 6 carros nas garagens. No entanto, devemos considerar que as posições dos carros em uma mesma garagem não importam. Assim, ao escolher os carros para a garagem que tem 3 vagas, por exemplo, observamos que as 3! permutações entre os 3 carros escolhidos são iguais. O mesmo acontece com os carros para a garagem com 2 vagas, ou seja, consideramos que as 2! permutações são iguais.

Logo, temos de dividir as permutações por 3! (garagem para 3 carros) e 2! (garagem para 2 carros):

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

Portanto, o manobrista pode guardar os 6 carros nas 3 garagens de 60 modos diferentes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

27. Quantos são os anagramas da palavra SABER? 120 anagramas

28. Com as letras da palavra PROVA, quantos são os anagramas que começam por vogal? Quantos são os anagramas que começam e terminam por consoante? 48 anagramas; 36 anagramas

29. Quantos são os anagramas da palavra CARREIRA? 3.360 anagramas

30. Oito clientes de um banco, dos quais 3 são mulheres, estão na fila única dos caixas. De quantas maneiras as pessoas dessa fila podem se posicionar de modo que as mulheres fiquem juntas? 4.320 maneiras

31. Com 2 bandeiras vermelhas indistinguíveis, 3 azuis também indistinguíveis e 1 branca, quantos sinais diferentes podemos emitir pendurando todas elas, enfileiradas, no mastro de um navio? 60 sinais

32. Deseja-se arrumar em uma estante 4 livros de Matemática, 3 de Química e 5 de Português, todos diferentes. Quantas são as possibilidades de arrumação se:

a) não houver restrições? 479.001.600 possibilidades

b) os livros de uma mesma matéria permanecerem juntos? 103.680 possibilidades

33. (FGV) Um processo industrial deve passar pelas etapas A, B, C, D e E.

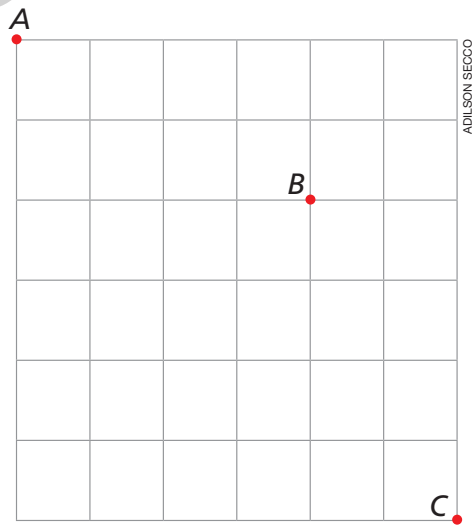
a) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas no início do processo e A deve preceder B? 6 sequências

b) Quantas sequências de etapas podem ser delineadas se A e B devem ficar juntas, em qualquer ordem, e não necessariamente no início do processo? 48 sequências

34. Qual é a soma de todos os números de 5 algarismos distintos que podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5? 3.999.960

35. De quantos modos podemos guardar 10 objetos em 3 caixas: a primeira com 5 objetos, a segunda com 3 e a terceira com 2? 2.520 modos

36. Uma pessoa vai de *A* para *B* e, então, de *B* para *C*, sempre andando para baixo ou para a direita, conforme o diagrama a seguir.



ADILSON SECCO

Quantos caminhos diferentes são possíveis? 225 caminhos

37. Elabore um exercício em que seja necessário calcular o número de anagramas de uma palavra. Depois, troque o exercício com um colega para que ele resolva o seu e você resolva o dele. resposta pessoal

36. Seria interessante que os alunos resolvessem esta questão em duplas ou em trios para incentivar a discussão de estratégias.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 Arranjo simples

Já vimos que a quantidade de permutações simples das letras da palavra AMOR é igual a $4! = 24$. Isso significa que as 4 letras dessa palavra podem ser reordenadas de 24 maneiras diferentes, resultando em 24 anagramas. Se, contudo, quisermos formar sequências de 2 letras distintas (escolhidas entre as 4 que formam a palavra AMOR), de quantas maneiras diferentes podemos fazê-las?

Vamos considerar que a situação descrita ocorra em duas etapas:

1ª etapa: escolher a primeira letra entre 4 possíveis;

2ª etapa: escolher a segunda letra entre 3 possíveis.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos: $4 \cdot 3 = 12$

Logo, são 12 possibilidades de formar sequências de 2 letras.

Observe que, desse total de 12 possibilidades, começam por:

- A → AM, AO e AR
- M → MA, MO e MR
- O → OA, OM e OR
- R → RA, RM e RO

Esses agrupamentos ordenados são os arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 2 a 2. Para indicar a quantidade de agrupamentos, escrevemos: $A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

Se desejarmos escolher 3 letras entre as 4 possíveis, as duas primeiras etapas se repetem e, para a 3ª etapa, temos a escolha da terceira letra entre as 2 restantes, o que totaliza $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Desse total de 24 possibilidades, começam por:

- A → AMO, AMR, AOM, AOR, ARO e ARM
- M → MAO, MAR, MOA, MOR, MRA e MRO
- O → OAM, OAR, OMA, OMR, ORA e ORM
- R → RAM, RAO, RMA, RMO, ROA e ROM

Esses agrupamentos ordenados são os arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 3 a 3. Para indicar a quantidade de agrupamentos, escrevemos: $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Observação

Dois arranjos simples diferem entre si pela ordem de colocação dos elementos ou por pelo menos um elemento. Exemplos:
- $abc \neq bca$
- $abc \neq abd$

Dado um conjunto com n elementos, chama-se **arranjo simples** dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $A_{n,p}$ o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p.

Observação

Qualquer problema que envolva permutações ou arranjos simples pode ser resolvido diretamente pelo princípio multiplicativo.

Vamos calcular o número total de agrupamentos simples de n elementos distintos, arranjados p a p, com $0 < p \leq n$, indicado por $A_{n,p}$.

Existem n possíveis escolhas para o primeiro elemento do agrupamento, $n - 1$ possíveis escolhas para o segundo elemento, $n - 2$ para o terceiro elemento, ..., $n - (p - 1)$ possíveis escolhas para o p-ésimo elemento do agrupamento.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, o número de arranjos simples de n elementos p a p é:

$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}}, \text{ com } 0 < p \leq n$$

Observações

- Multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número não nulo, obtemos uma fração equivalente.
- $n - (p - 1) = n - p + 1$

Desenvolvendo a expressão do 2º membro e multiplicando-o por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Assim:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ com } n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < p \leq n$$

Reflita

Verifique que:
- $A_{n,n} = n! = P_n$
- $A_{n,1} = n$

- $A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$
  Como $P_n = n!$, então: $A_{n,n} = n! = P_n$

- $A_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$
  Portanto: $A_{n,1} = n$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R12. Determinar a quantidade de números de 3 algarismos diferentes que podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 7.

▸ Resolução

Os problemas que envolvem permutações ou arranjos simples podem ser resolvidos por meio da fórmula ou do princípio multiplicativo. Vamos resolver este exercício dos dois modos.

1º modo:

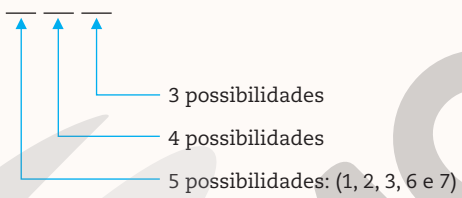
Sabemos que a ordem dos algarismos escolhidos resulta em números diferentes. Por exemplo, escolhendo os algarismos 1, 2 e 3, podemos escrever os números 123, 132, 213, 231, 312 ou 321. Portanto, devemos calcular o número de arranjos de 5 elementos, tomados 3 a 3:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Logo, podemos escrever 60 números de 3 algarismos distintos com os algarismos dados.

2º modo:

Vamos agora resolver este exercício aplicando o princípio multiplicativo. Fazendo um esquema para representar o número de 3 algarismos diferentes escolhidos entre 1, 2, 3, 6 e 7, temos:



Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Assim, temos 60 números de 3 algarismos diferentes formados a partir dos algarismos dados.

Reflita

Se a pergunta fosse "Quantos números de 3 algarismos, sem restrição, podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 7?", o resultado seria também igual a 60? Por quê?

Não, pois teríamos de contar os números com algarismos repetidos; nesse caso, haveria 125 números.

R13. Em uma sala existem 10 cadeiras enfileiradas numeradas de 1 a 10. Determinar de quantas maneiras 2 pessoas podem sentar nessas cadeiras, havendo ao menos uma cadeira entre elas.

▸ Resolução

Vamos considerar que os números das cadeiras escolhidas pelas pessoas A e B formam um par ordenado. Assim, o par ordenado (2, 5) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 2, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 5. O par ordenado (5, 2) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 5, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 2.

O total de maneiras diferentes de as cadeiras serem ocupadas pelas 2 pessoas será dado pelo número de pares ordenados formados com os números das cadeiras, que pode ser calculado da seguinte maneira:

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 10 \cdot 9 = 90$$

Logo, podem ser formados 90 pares ordenados.

Porém, existe uma restrição: A e B não podem sentar-se juntas.

Isso significa que A e B não devem ocupar cadeiras cujos números são consecutivos. Assim, devemos descobrir quantos são os pares ordenados cujos elementos são consecutivos para subtraí-los dos 90 pares ordenados possíveis.

Os pares ordenados formados com números consecutivos são:

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (8, 7), (9, 8) e (10, 9).

No total, são 18 pares.

Fazendo 90 − 18, podemos concluir que existem 72 maneiras de as 2 pessoas se sentarem com pelo menos uma cadeira entre elas.

Outro modo:

Também poderíamos resolver este exercício aplicando o princípio multiplicativo.

Por esse princípio, calculamos todas as possibilidades de 2 pessoas se sentarem nas 10 cadeiras enfileiradas.

A primeira pessoa poderá se sentar em qualquer uma das 10 cadeiras, restando, então, apenas 9 possibilidades de escolha para a segunda pessoa. Dessa maneira, temos 90 (10 · 9) maneiras de 2 pessoas se sentarem nas 10 cadeiras.

Este problema apresenta uma restrição: é necessário que haja pelo menos uma cadeira entre as pessoas. Se listarmos todas as possibilidades em que as duas pessoas ficam juntas, lado a lado, temos 18 possibilidades.

Agora, basta descontar esse valor do total de possibilidades encontradas inicialmente. Assim, há 72 possibilidades de 2 pessoas se sentarem em 10 cadeiras contanto que haja pelo menos uma cadeira entre elas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODENA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

38. De quantos modos 3 pessoas podem sentar em um sofá de 5 lugares? 60 modos

39. Em uma empresa, 10 de seus diretores são candidatos aos cargos de presidente e vice-presidente. Quantos são os possíveis resultados da eleição? 90 resultados

40. Cinco cavalos disputam um páreo. Supondo que não haja empates, qual é o número de possíveis resultados para as 3 primeiras colocações? 60 resultados

LO CHUN KIT/GETTY IMAGES

41. Um campeonato de futebol escolar vai ser disputado por 20 equipes. Admitindo que não haja empates, quantas são as possibilidades de classificação para os 2 primeiros lugares? 380 possibilidades

42. Determine o número x inteiro, $x \geqslant 2$, para que $A_{x,2} = 156$. 13

43. Uma sala possui 6 portas. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente? 30 maneiras

44. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O segredo do cofre é dado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre e gastar 10 segundos em cada tentativa, quanto tempo levará (no máximo) para conseguir abri-lo? 2 horas

45. Considere duas urnas, I e II, que contêm bolas numeradas. A urna I contém 5 bolas de 1 a 5 e a urna II, 3 bolas de 1 a 3.

Quantas sequências numéricas podemos obter se extrairmos, sem reposição, 3 bolas da urna I e, em seguida, 2 bolas da urna II? 360 sequências

46. Elabore um exercício que possa ser resolvido com arranjo simples. Faça a resolução de dois modos: usando a fórmula de arranjo e por princípio multiplicativo. Depois, troque o exercício com um colega para que ele resolva o seu exercício e você resolva o dele.

resposta pessoal

Observações

- Sequência é um agrupamento ordenado: $(a, b) \neq (b, a)$
- Conjunto é um agrupamento não ordenado: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Dizemos que um conjunto A é subconjunto do conjunto B se, e somente se, todos os elementos de A também forem elementos de B.

Reflita

Na foto, há 6 tipos de fruta. De quantas maneiras podemos escolher 3 frutas para fazer um suco?

TOPNATTHAPON/SHUTTERSTOCK

Pelo princípio multiplicativo, contamos o total de possibilidades e descontamos as escolhas repetidas. Assim, temos: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$

Ou seja, há 20 maneiras de escolher 3 frutas diferentes em um conjunto com 6 frutas disponíveis.

5 Combinação simples

Considerando o conjunto formado pelas letras da palavra AMOR, quantos **subconjuntos** com 3 elementos podemos formar?

Como já vimos, a quantidade de agrupamentos ordenados ou sequências é dada por $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Esses agrupamentos são:

AMO, AMR, AOM, AOR, ARO, ARM, MAO, MAR, MOA, MOR, MRA, MRO,

OAM, OAR, OMA, OMR, ORA, ORM, RAM, RAO, RMA, RMO, ROA, ROM

Pensando em termos de conjuntos cujos elementos são as letras do agrupamento, os conjuntos formados pelas letras AMO, AOM, MAO, MOA, OAM e OMA são iguais, pois, ao permutar as 3 letras, o conjunto continua tendo exatamente os mesmos elementos, isto é, o conjunto não se modifica.

Dessa forma, o total de 24 sequências com as 3 letras deve ser dividido por $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (número de permutações das 3 letras).

Pode-se, portanto, dizer que a quantidade de subconjuntos com 3 elementos é $\frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{24}{6} = 4$, escolhidos entre os 4 elementos do conjunto das letras da palavra AMOR:

{A, M, O}, {A, M, R}, {A, O, R}, {M, O, R}

Chamamos esses agrupamentos de combinações simples dos 4 elementos, tomados 3 a 3.

Dado um conjunto de n elementos, chama-se **combinação simples** dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $C_{n,p}$ o número de combinações simples de n elementos tomados p a p.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Acompanhe a situação a seguir.

Vamos determinar o número de subconjuntos do conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ que tenha 3 elementos, isto é, o número de combinações dos 5 elementos tomados 3 a 3, cuja notação é $C_{5, 3}$.

Cada combinação de 3 elementos, por exemplo {2, 6, 8}, origina 6 ($3! = 6$) agrupamentos ordenados (permutações desses elementos):

(2, 6, 8), (2, 8, 6), (6, 2, 8), (6, 8, 2), (8, 2, 6), (8, 6, 2)

Portanto, $C_{5, 3} \cdot 3!$ dá o total de arranjos dos 5 elementos tomados 3 a 3 ($A_{5, 3}$):

$$C_{5, 3} \cdot 3! = A_{5, 3} \Rightarrow C_{5, 3} = \frac{A_{5, 3}}{3!} \Rightarrow C_{5, 3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow C_{5, 3} = 10$$

Como vimos, com p elementos distintos, podemos obter $p!$ permutações. Isso significa que, a partir de uma combinação, podemos obter $p!$ arranjos distintos dos n elementos tomados p a p.

Então, o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos ($A_{n, p}$) e o número de permutações ($p!$):

$$C_{n, p} = \frac{A_{n, p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n - p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n - p)!} : p! = \frac{n!}{(n - p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}$$

Portanto:

$$C_{n, p} = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}, \text{ com } n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < p \leqslant n$$

Reflita

Quantos subconjuntos com n elementos tem um conjunto com n elementos?

Apenas um, o próprio conjunto. Lembrar que um conjunto não é diferente de "outro" se tiver os mesmos elementos dispostos em outra ordem.

$A_{n, n} = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

$P_n = n!$

$n! \cdot C_{n, n} = n! \cdot \frac{n!}{n! \cdot (n - n)!} = n! \cdot \frac{n!}{n! \cdot 0!} = n!$

Portanto: $A_{n, n} = P_n = n! \cdot C_{n, n}$

Reflita

Verifique que:
$A_{n, n} = P_n = n! \cdot C_{n, n}$

Exercícios resolvidos

R14. Dos 30 alunos de uma classe, 4 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem ser formadas:

a) se não houver restrições quanto ao sexo.

b) com 2 garotas e 2 garotos.

SÉRGIO PEDREIRA/PULSAR IMAGENS

▸ **Resolução**

a) Os 4 alunos devem ser escolhidos entre o total de 30 alunos. Como a ordem dos alunos não altera o agrupamento, trata-se de uma combinação:

$$C_{30, 4} = \frac{30!}{4! \cdot (30 - 4)!} =$$

$$= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \cancel{26!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{26!}} = 27.405$$

O número de equipes de 4 alunos, escolhidos entre 30, é 27.405.

b) Nesse caso, a escolha deverá ocorrer em duas etapas:

- E_1: escolher 2 entre as 20 garotas;
- E_2: escolher 2 entre os 10 garotos.

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades é dado por:

$$C_{20, 2} \cdot C_{10, 2} = \frac{20!}{2! \cdot (20 - 2)!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot (10 - 2)!} =$$

$$= 190 \cdot 45 = 8.550$$

O número de equipes com 2 garotas e 2 garotos é 8.550.

R15. Um garoto gostaria de convidar 7 amigos para acampar, porém só há lugar para 4 amigos na barraca. Calcular de quantas maneiras o garoto pode escolher 4 amigos entre 7.

▸ **Resolução**

A ordem em que os amigos serão escolhidos não é importante, o que sugere um problema de combinação de 7 pessoas tomadas 4 a 4.

$$C_{7, 4} = \frac{7!}{4! \cdot (7 - 4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Portanto, o garoto pode escolher os 4 amigos de 35 maneiras distintas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Outro modo:

A escolha de 4 pessoas em um grupo de 7 poderia ser feita pelo princípio multiplicativo:

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Porém, nesse total de 840 possibilidades, existem quartetos repetidos, pois a ordem em que as pessoas são escolhidas não altera a configuração do grupo. Assim, é preciso descontar a quantidade de possibilidades de formação de cada quarteto.
Temos, então: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Dessa maneira, cada quarteto foi contado 24 vezes.

Portanto, é necessário efetuar a divisão de 840 por 24, o que resulta em 35 possibilidades.

R16. Considerando 6 pontos, pertencentes a um mesmo plano e distribuídos de tal forma que não haja 3 pontos colineares, determinar quantos triângulos podem ser formados com 3 desses pontos como vértices.

▸ **Resolução**

A ordem em que tomamos os vértices de um triângulo não altera o triângulo. Logo, temos um problema envolvendo combinação.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

logo, podem ser formados 20 triângulos distintos.

Observação

Se existissem 3 pontos colineares, teríamos de subtrair do total o número de combinações envolvendo esses 3 pontos, já que eles formariam segmentos, e não triângulos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

47. Uma prova é composta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões? 3.003 formas

48. Quantas são as diagonais de um polígono convexo de n lados? $\frac{n(n-3)}{2}$

49. Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podem ser formadas com um grupo de 7 pessoas? 35 comissões

50. Ao sair de uma festa, 10 amigos se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados? 45 apertos de mão

BONGA1965/ SHUTTERSTOCK

51. Em um congresso de Educação, há 6 professores de Física e 6 de Matemática. Quantas são as possibilidades de se formar uma comissão de 5 professores com 2 professores de Matemática e 3 de Física? 300 possibilidades

52. Usando as 5 vogais e os algarismos de 0 a 9, quantos conjuntos de 5 elementos podemos formar, sendo 2 letras diferentes e 3 algarismos distintos? 1.200 conjuntos

53. Quantos grupos de 3 letras distintas podem ser constituídos com as letras da palavra SUCESSO? Quantos desses grupos não contêm vogal? 10 grupos; nenhum grupo

54. Entre os números 1, 2, 3, 4, ..., 15 serão selecionados 5 números ímpares e 3 números pares. Calcule quantos diferentes grupos de 8 números podem ser escolhidos. 1.960 grupos

55. Com um baralho de 52 cartas, quantos grupos de 3 cartas de espadas podem ser selecionados? 286 grupos

IAN DIKHTIAR/ SHUTTERSTOCK

56. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 5 bolas azuis. De quantas maneiras diferentes podemos retirar 3 bolas de modo que não saiam somente bolas vermelhas? 55 maneiras

57. Considere 7 pontos distintos sobre uma reta e 4 pontos, também distintos, sobre outra reta, paralela à primeira. Quantos triângulos podemos obter ligando 3 quaisquer desses 11 pontos? 126 triângulos

58. Certa loteria é denominada "6/53", significando que o vencedor deve acertar 6 números entre os números de 1 a 53. De quantas maneiras um jogador pode escolher 6 números nessa loteria? 22.957.480 maneiras

59. Elabore um exercício que possa ser resolvido com combinação simples. Depois, troque o seu exercício com um colega da turma para que ele resolva o seu e você resolva o dele. resposta pessoal

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Um restaurante tem 3 tipos de entrada, 2 pratos principais e 4 sobremesas. Quantas opções uma pessoa terá se comer 1 entrada, 1 prato principal e 1 sobremesa? 24 opções

2. Uma linha ferroviária com 11 estações deve imprimir bilhetes para cada tipo de viagem. Se cada bilhete deve conter o nome da estação de partida e o nome da estação de chegada, quantos tipos de bilhete são necessários? 110 tipos

3. Em uma corrida de Fórmula 1, 10 pilotos chegaram ao final. Admitindo que não haja empate, de quantas maneiras diferentes o pódio pode ser formado com 3 desses pilotos? 720 maneiras

4. Quantos números inteiros distintos podem ser formados usando todos os algarismos do número 253.225? 60 números

5. Em uma experiência na aula de Química, o professor coloca à disposição de seus alunos 5 substâncias: sal de cozinha (NaCl), ácido sulfúrico (H_2SO_4), sulfato de cobre ($CuSO_4$), carbonato de cálcio ($CaCO_3$) e água (H_2O). Os alunos devem selecionar 3 dessas substâncias para formar uma nova solução. Quantas são as possíveis escolhas? 10 escolhas

6. Quantos grupos podem ser formados, cada um com 3 meninos e 2 meninas, escolhidos de um total de 7 meninos e 5 meninas? 350 grupos

7. Uma bibliotecária precisa selecionar 5 jornais e 7 revistas, entre 8 jornais e 9 revistas disponíveis. De quantas maneiras ela pode fazer essa seleção? 2.016 maneiras

8. De uma urna que contém 5 bolas vermelhas e 3 bolas amarelas, devem-se sortear todas as bolas. Quantos são os resultados possíveis se as bolas sorteadas forem colocadas em fila? 56 resultados

RICARDO SIWIEC

9. No final de uma festa, alguns amigos se despediram trocando, ao todo, 28 apertos de mão. Sabendo que cada um deles cumprimentou todos os outros, quantos amigos estavam na festa? 8 amigos

10. (Mackenzie-SP) Um professor deve ministrar 20 aulas em 3 dias consecutivos, tendo, para cada um dos dias, as opções de ministrar 4, 6 ou 8 aulas. O número de diferentes distribuições possíveis dessas 20 aulas, nos 3 dias, é: alternativa b

a) 7 b) 6 c) 4 d) 10 e) 8

11. Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, sem repetição, quantos números de 3 dígitos podem ser pares? 24 números

12. (Mackenzie-SP) Considere todos os números de 3 algarismos formados com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9. Entre eles, a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais é: alternativa c

a) 17 c) 15 e) 24
b) 18 d) 22

13. (Mackenzie-SP) Num avião, uma fila tem 7 poltronas dispostas como na figura abaixo.

Os modos de João e Maria ocuparem duas poltronas dessa fila, de modo que não haja um corredor entre eles, são em número de: alternativa d

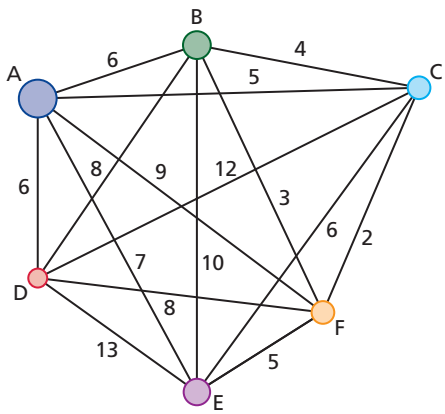
a) 6 c) 8 e) 12
b) 7 d) 10

14. (UFRJ) Ana dispunha de papéis com cores diferentes. Para enfeitar sua loja, cortou fitas desses papéis e embalou 30 caixinhas, de modo que não ficasse a mesma cor no papel e na fita em nenhuma das embalagens.

A menor quantidade de cores diferentes que ela necessitou usar para a confecção de todas as embalagens foi igual a: alternativa c

a) 30 b) 18 c) 6 d) 3

15. (Enem) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F, nessa ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Registre as respostas em seu caderno.

Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min 30 s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de: alternativa b

a) 60 min **c)** 120 min **e)** 360 min
b) 90 min **d)** 180 min

16. Uma sala deve ser iluminada com 5 lâmpadas e com interruptores independentes para acendê-las. De quantos modos possíveis poderemos iluminar essa sala? 31 modos

17. Um clube de tênis deve selecionar 2 duplas mistas de um grupo de 5 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras isso pode ser feito? 120 maneiras

ANDRESR/E+/GETTY IMAGES

Duplas mistas jogando tênis.

18. (FEMM-MG) Uma fábrica de sucos de frutas utiliza laranjas, uvas, maçãs, abacaxis e *kiwis* para produzir seus produtos, que são sucos com um único tipo de fruta ou sucos com mistura de dois tipos de frutas. Aos sucos produzidos pode ser adicionado açúcar ou adoçante. A quantidade de sucos diferentes que essa fábrica produz é: alternativa a

a) 30 **c)** 20
b) 25 **d)** 10

19. (Vunesp) Considere todos os números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1. 720 e 120

b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512.346 e que número ocupa a 242ª posição. 481ª e 312.465

20. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é: alternativa e

a) 24 **c)** 32 **e)** 89
b) 31 **d)** 88

Aprofundamento

21. Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, o logaritmo de b na base a é o número real x tal que $a^x = b$. Ou seja: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. Assim, resolva a equação: $(\log_3 n)! = 24$ $S = \{81\}$

22. Uma empresa é composta de 12 diretores. Quantas são as maneiras de escolher 5 deles para compor uma comissão com presidente, vice-presidente e 3 supervisores? 15.840 maneiras

Desafio

23. (UFMG) Um aposentado realiza diariamente, de segunda a sexta-feira, estas cinco atividades:

- leva seu neto para a escola, às 13 horas;
- pedala 20 minutos na bicicleta ergométrica;
- passeia com o cachorro da família;
- pega seu neto na escola, às 17 horas;
- rega as plantas do jardim de sua casa.

Cansado, porém, de fazer essas atividades na mesma ordem, ele resolveu realizá-las em uma ordem diferente. Nesse caso, o número de maneiras possíveis de ele realizar essas cinco atividades, *em ordem diferente*, é: alternativa b

a) 24 **b)** 60 **c)** 72 **d)** 120

24. (Fuvest-SP) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa, e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos? alternativa c

a) 12 **c)** 36 **e)** 108
b) 18 **d)** 72

25. (ITA-SP) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c? alternativa d

a) 1.692 **c)** 1.520 **e)** 1.392
b) 1.572 **d)** 1.512

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Para ir da cidade A à cidade B, existem 3 rodovias; e, para ir da cidade B à cidade C, há 4 rodovias. Existem [redacted] maneiras de ir da cidade A até a cidade C passando por B. alternativa c

a) 7
b) 3^4
c) 12
d) 4^3

2. Existem [redacted] números naturais de 4 algarismos que não têm algarismos repetidos. alternativa b

a) 4^9
b) $9^2 \cdot 56$
c) 10^4
d) $9 \cdot 10^3$

3. A expressão 6! é igual a: alternativa d

a) $7! - 1!$
b) $5! + 1!$
c) 6
d) $6 \cdot 5!$

4. Quatro atletas participam de uma prova. Não ocorrendo nenhum empate, podemos dizer que são possíveis [redacted] classificações nessa prova. alternativa d

a) 20
b) 240
c) 120
d) 24

5. São [redacted] os anagramas da palavra PAPAGAIO. alternativa d

a) 2.590
b) 1.280
c) 560
d) 3.360

6. Considere 15 pontos distintos de uma circunferência. Existem [redacted] retas passando por 2 desses pontos. alternativa c

a) $A_{15, 2}$
b) $2 \cdot P_{15}$
c) $C_{15, 2}$
d) $C_{15, 5}$

7. Cinco estudantes fizeram um trabalho em conjunto, mas apenas 2 vão apresentar o trabalho. São [redacted] as possibilidades de escolha dessa dupla. alternativa b

a) 20
b) 10
c) 45
d) 60

8. [redacted] são problemas de contagem que envolvem situações nas quais a ordem não é importante. alternativa c

a) Permutações
b) Permutações com repetição
c) Combinações
d) Arranjos

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente.

Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.	X	X		X				
Aplicar as noções de fatorial.			X					
Identificar a natureza dos problemas de contagem.				X	X	X	X	X
Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.				X	X	X	X	
Páginas do livro referentes ao conceito	106 a 110	106 a 110	111 e 112	111 a 114	111 a 114	114 a 117	116 e 117	116 a 120

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Este infográfico aborda o tema contemporâneo **saúde**. A apresentação desse tema e sua relação com probabilidade favorecem a interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, auxiliando no desenvolvimento das habilidades **EM13CNT205** e **EM13CNT303** da BNCC (competências específicas **2** e **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, respectivamente). Os alunos poderão interpretar as informações contidas no infográfico, analisar causas e consequências de uma pessoa com anemia falciforme e, com base em noções de probabilidade (previsão da possibilidade de gerar um filho doente), perceber que casais podem escolher ter ou não um bebê, o que favorece também o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106** da BNCC.
O infográfico também desenvolve a competência geral **2** da BNCC, uma vez que os alunos podem exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das Ciências, realizando reflexões e análises críticas. A competência específica **1** também está contemplada, pois com o infográfico os alunos percebem que podem utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, do cotidiano aos fatos das Ciências da Natureza.

CAPÍTULO

5 Probabilidade

Competências específicas da BNCC e habilidades de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3** e **4**; habilidades **EM13MAT106**, **EM13MAT311**, **EM13MAT312**, **EM13MAT315** e **EM13MAT511**.

ANEMIA FALCIFORME

A enfermidade teve origem na África e chegou ao continente americano com o tráfico de escravos no período colonial. A anemia falciforme é uma das doenças genéticas e hereditárias mais comuns no Brasil, uma vez que metade da população apresenta traços afrodescendentes.

Crianças com anemia falciforme apresentam risco maior de contrair infecções.

As **hemácias normais** são arredondadas e elásticas, podendo passar por todos os vasos sanguíneos do corpo, mesmo os mais estreitos.

As **hemácias falciformes** não circulam facilmente, podendo se enroscar umas nas outras e causar obstrução dos vasos.

O que é?

A anemia falciforme é uma alteração na formação da **hemoglobina A**, molécula que transporta o oxigênio pelo sangue a todas as partes do corpo. A mutação dá origem a uma variante, a **hemoglobina S**, que tem o formato de foice – daí o nome "falciforme".

Como acontece?

A combinação genética indica a probabilidade de filhos, gerados por um casal heterozigoto (quando ambos têm o traço da doença), terem ou não a anemia falciforme. Veja o esquema.

A anemia falciforme não é contagiosa.

A pessoa que tem o traço falciforme herdou de seus pais a hemoglobina (A) e (S) e não tem qualquer sintoma da doença.

AS AS

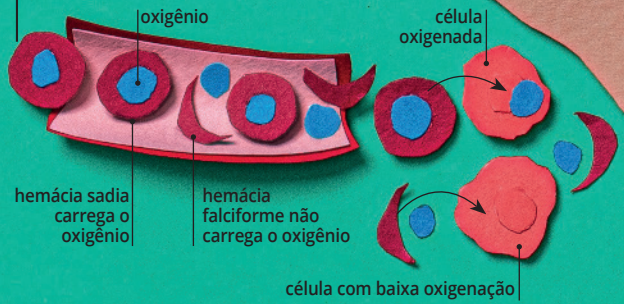
AA AS AS SS

AA Sem doença
AS Traço falciforme
SS Doença falciforme

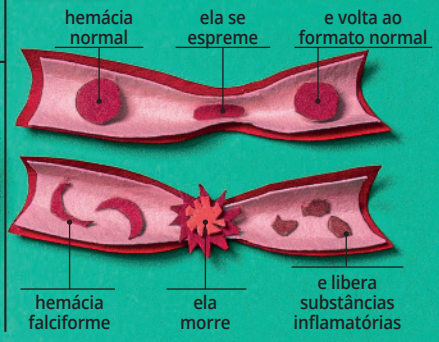
25% Sem doença
50% Traço falciforme
25% Doença falciforme

Sintomas

Cansaço e fraqueza: as hemácias falciformes têm dificuldade em carregar as moléculas de oxigênio, comprometendo funções básicas do corpo. Sem oxigenação, os músculos, por exemplo, perdem a força.



Sintomas



Síndrome mão-pé: mais comum em crianças, a hemácia falciforme se rompe ao tentar passar pelos pequenos vasos sanguíneos das mãos e dos pés, causando dor e vermelhidão no local.

Sintomas

Crises de dor: causadas pela obstrução de pequenos vasos sanguíneos. A dor é mais frequente nos ossos e nas articulações.

Sintomas

Infecções: a obstrução dos vasos lesiona o baço e causa a diminuição de sua funcionalidade. Isso torna o organismo mais suscetível às infecções.

O baço normal produz anticorpos que combatem as bactérias.

No baço de uma pessoa com anemia falciforme, o sangue circula devagar e causa entupimentos. Com isso, o órgão fica mais fraco.

Anemia falciforme no Brasil
No mundo, estima-se que 300 mil crianças nasçam com a doença a cada ano. No Brasil, são cerca de 3,5 mil crianças. Bahia, Rio de Janeiro e Minas Gerais são os estados com mais casos.

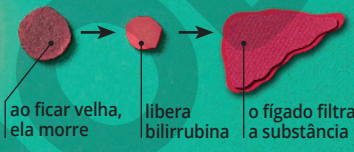
Minas Gerais
A cada 1.400 crianças, uma nasce com a doença falciforme.
A cada 30 crianças, uma nasce com o traço falciforme.

Bahia
A cada 650 crianças, uma nasce com a doença falciforme.
A cada 17 crianças, uma nasce com o traço falciforme.

Rio de Janeiro
A cada 1.300 crianças, uma nasce com a doença falciforme.
A cada 20 crianças, uma nasce com o traço falciforme.

Sintomas

Ciclo da hemácia normal

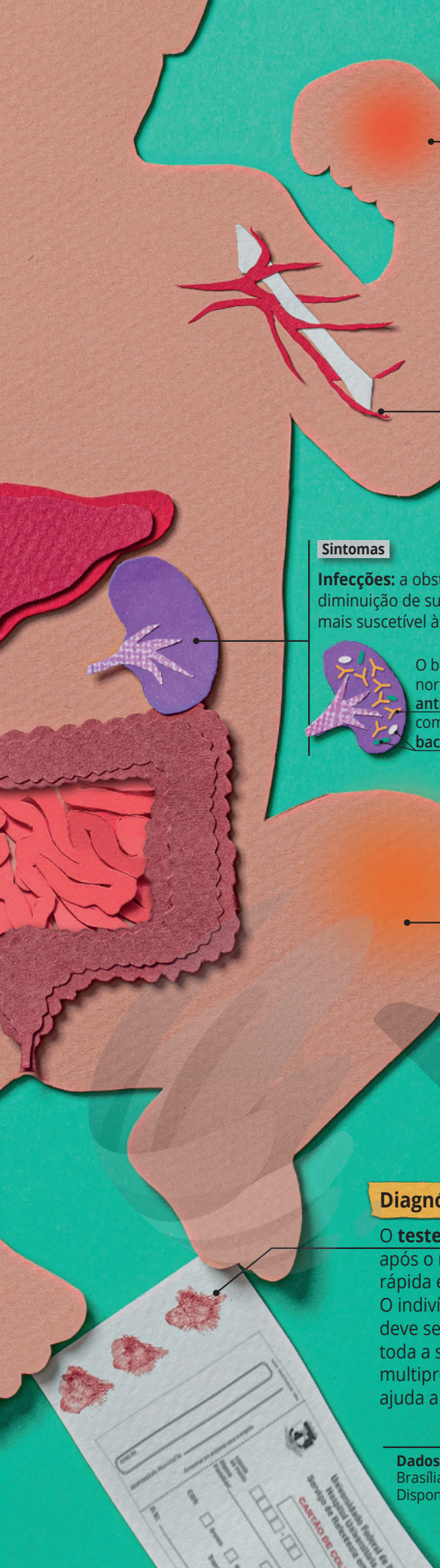


Ciclo acelerado da hemácia falciforme

Icterícia: pele e olhos ficam amarelados devido ao excesso de bilirrubina na circulação sanguínea. Essa substância é liberada quando um glóbulo vermelho morre.

Diagnóstico e tratamento

O **teste do pezinho**, realizado logo após o nascimento, detecta de forma rápida e precoce a anemia falciforme. O indivíduo com a doença falciforme deve ser acompanhado durante toda a sua vida por uma equipe multiprofissional, que monitora e ajuda a controlar os sintomas.



Objetivos do capítulo

- Determinar o espaço amostral, os eventos desse espaço e calcular o número de elementos desses conjuntos.
- Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento.
- Trabalhar com situações-problema que envolvam a teoria das probabilidades.

ILUSTRAÇÃO: RICARDO DAVINO

Dados obtidos em: Ministério da Saúde. Doença falciforme: o que se deve saber sobre herança genética, Brasília (DF), 2014. Agência Nacional de Vigilância Sanitária. Manual do paciente: doença falciforme. Disponível em: <https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/anvisa/paciente.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2020.

A competência específica 3 é favorecida em vários momentos deste capítulo, uma vez que os alunos constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

Observação

Quando realizamos seguidos lançamentos de um dado cúbico perfeito (ou honesto), cada uma de suas faces tem a mesma chance de ficar voltada para cima.
Neste capítulo, salvo aviso contrário, consideraremos todos os dados perfeitos. Isso também é válido para moedas, baralhos, bolinhas numeradas etc.

Ao iniciar este assunto, discutir com os alunos o significado dos termos *acaso*, *casual*, *aleatório*, *chance* e *possibilidade*.

Os tópicos **1**, **2**, e **3** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT311** da BNCC, uma vez que os alunos irão identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando a contagem das possibilidades para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

1 Experimento aleatório, espaço amostral e evento

FERNANDO FAVORETTO

O tema deste capítulo é a **teoria da probabilidade**, que teve sua origem no século XVII, na tentativa de responder a questões ligadas aos jogos de azar. Atualmente, é aplicada em previsão meteorológica, análises econômicas, no estabelecimento dos possíveis efeitos colaterais de medicamentos e em múltiplos aspectos da vida social e da pesquisa científica. Por exemplo, antes do início de uma partida de futebol, o juiz ou juíza lança uma moeda para cima com o objetivo de sortear, em cara ou coroa, a metade do campo em que deverá jogar uma das equipes e a saída da bola para a outra equipe. No entanto, antes do lançamento, não é possível saber com exatidão se sairá cara ou coroa. Por isso, o sorteio descrito nessa situação é chamado de **experimento aleatório**.

São também classificados como experimentos aleatórios o lançamento de um dado, a retirada de uma bola numerada em um bingo, o sorteio de seis números em uma loteria, entre outros.

No lançamento de uma moeda, por exemplo, os possíveis resultados são cara e coroa. O conjunto {cara, coroa} formado por esses possíveis resultados é chamado de **espaço amostral** desse experimento.

Na face voltada para cima no lançamento de um dado cúbico perfeito (ou honesto), os eventos possíveis são os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O espaço amostral desse experimento aleatório é o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Podemos definir esses conceitos da seguinte maneira:

Experimento aleatório é todo experimento que, quando repetido várias vezes e sob as mesmas condições, apresenta, entre as possibilidades, resultados imprevisíveis.

Espaço amostral (S) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Evento (E) é todo subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

Exemplos

a) No lançamento de um dado, um possível evento é: "o número na face voltada para cima é par". Nesse caso, o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e o evento é $E = \{2, 4, 6\}$. O número de elementos dos dois conjuntos é indicado, respectivamente, por $n(S) = 6$ e $n(E) = 3$.

b) Quando se retira uma bola de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50, um possível evento é: "a bola retirada contém um número primo menor que 20". O espaço amostral desse experimento é $S = \{1, 2, \ldots, 50\}$, e o evento é $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. O número de elementos do conjunto S é $n(S) = 50$ e o do conjunto E é $n(E) = 8$.

c) No sorteio de uma carta de um baralho de 52 cartas, um possível evento é: "a carta sorteada é de copas e com figura". O espaço amostral desse experimento é o conjunto S = {ás de copas, 2 de copas, ..., rei de copas, ás de ouros, 2 de ouros, ..., rei de ouros, ás de espadas, ..., rei de espadas, ás de paus, ..., rei de paus}. O evento é o conjunto E = {valete de copas, dama de copas, rei de copas}. Nesse experimento, $n(S) = 52$ e $n(E) = 3$.

Observação

Chamamos de **discretos** os espaços amostrais cujos elementos podemos enumerar, ou seja, que possuem uma quantidade finita de elementos. Exemplo:
O espaço amostral do sorteio de um número entre os dez primeiros números naturais não nulos é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Esse espaço amostral tem 10 elementos.
Os espaços amostrais que não são discretos são chamados de **contínuos**.
Exemplo:
O espaço amostral do sorteio de um número real que pertence ao intervalo de 1 a 2 é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$. Não há como enumerar os elementos desse conjunto, assim esse espaço amostral é contínuo.

O desenvolvimento da habilidade **EM13MAT511** é favorecido com o boxe **Observação**, porque os alunos irão reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não.

1.1 Evento simples, evento certo e evento impossível

Todo subconjunto unitário do espaço amostral é denominado **evento simples** ou **evento elementar**.

Se um evento coincidir com o espaço amostral, será chamado de **evento certo**. Por exemplo, no lançamento de um dado, "obter um número natural menor que 7" é um evento certo.

Se um evento for o conjunto vazio, será chamado de **evento impossível**. Por exemplo, no lançamento de um dado, "obter um número maior que 6" é um evento impossível.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R1. Lançando-se dois dados, um vermelho e um branco, e considerando as faces voltadas para cima, responder às questões.

a) Quantos elementos há no espaço amostral?

b) Em quantos casos a soma dos números das faces superiores é maior que 8?

c) Em quantos casos o produto dos números das faces superiores é igual a 28?

▸ **Resolução**

a) A tabela a seguir mostra todos os possíveis resultados.

		Dado branco					
		1	2	3	4	5	6
Dado vermelho	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Portanto, há 36 elementos no espaço amostral.

b) Observando a tabela, notamos que a soma é maior que 8 em 10 casos. Logo, o número de elementos que correspondem ao evento "soma maior que 8" é igual a 10.

c) Os únicos pares de números naturais cujo produto dos elementos é 28 são (28, 1), (14, 2), (7, 4), (1, 28), (2, 14) e (4, 7). Uma vez que nenhum desses pares ordenados pertence ao espaço amostral S, o evento "produto igual a 28" não tem elementos, ou seja, trata-se de um evento impossível.

R2. Quatro bolas numeradas de 1 a 4 são colocadas em uma urna. Duas bolas são sorteadas aleatoriamente, uma após a outra. Determinar o espaço amostral quando esse experimento é realizado:

a) com reposição da primeira bola retirada;

b) sem reposição da primeira bola retirada.

▸ **Resolução**

a) Se o experimento é realizado com reposição, todas as bolas "participam" de ambos os sorteios, e o espaço amostral é dado por $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

b) Se o experimento é realizado sem reposição, o número que foi sorteado em primeiro lugar não "participa" do segundo sorteio. Nesse caso, o espaço amostral é dado por $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

R3. Uma caixa contém 2.000 lâmpadas, das quais 5 estão queimadas. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 5 lâmpadas dessa caixa e verificar se estão queimadas ou não. Determinar o número de elementos do espaço amostral desse experimento.

▸ **Resolução**

Listar, caso a caso, todos os elementos do espaço amostral desse experimento é impraticável, em razão do elevado número de possibilidades. Porém, podemos utilizar a Análise combinatória para determinar o número de elementos desse espaço amostral.

Trata-se de um caso de combinação (pois a ordem em que as lâmpadas são sorteadas não é importante), no qual vamos determinar de quantas maneiras 5 lâmpadas podem ser selecionadas de um total de 2.000 lâmpadas disponíveis. Assim:

$$C_{2.000,\,5} = \frac{2.000!}{5! \cdot (2.000 - 5)!} = \frac{2.000!}{5! \cdot 1.995!} =$$

$$= \frac{2.000 \cdot 1.999 \cdot 1.998 \cdot 1.997 \cdot 1.996 \cdot \cancel{1.995!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{1.995!}} \simeq$$

$$\simeq 2{,}65 \cdot 10^{14}$$

Logo, o total de elementos desse espaço amostral é, aproximadamente, $2{,}65 \cdot 10^{14}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. A família Silva gosta de jogar bingo em casa sorteando ao acaso números de 1 a 90. Considerando que o número sorteado na primeira rodada seja um múltiplo de 5, escreva o espaço amostral e o evento representativo da situação. $S = \{1, 2, 3, ..., 89, 90\}$; $E = \{5, 10, 15, ..., 85, 90\}$

2. Se, no início de uma rodada de bingo da família Silva, alguém disser "vai sair um número maior que 3", a chance de acerto é maior que a de erro: sair um número maior que 3 é, nesse caso, um acontecimento (evento) **muito provável** (não ocorre sempre, mas ocorre com frequência). Determine quantos elementos tem esse evento e quantos elementos tem o espaço amostral. 87; 90

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4. S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), (3, 1), ..., (6, 6)}
a) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

3. Em um jogo de baralho comum, com 52 cartas, temos 13 cartas de ouros, 13 cartas de copas, 13 cartas de paus e 13 cartas de espadas. Se alguém disser "vai sair um rei de ouros", estará apostando em um acontecimento (evento) **pouco provável**.

Nesse caso, o número de elementos do evento é muito menor que o número de elementos do espaço amostral? Justifique sua resposta com uma contagem. sim, pois n(E) = 1 e n(S) = 52

4. Para o lançamento simultâneo de dois dados, um azul e um vermelho, ambos considerados perfeitos, determine o espaço amostral e os eventos correspondentes a cada uma das situações a seguir.

a) Sair o mesmo número em ambos os dados.
b) Sair soma 9. {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}
c) Sair soma menor que 2. ∅
d) Sair produto maior que 30. {(6, 6)}
e) Sair produto menor que 10.
f) Sair soma maior que 1 e menor que 15. S
g) Sair número par em ambos os dados.
h) Sair, em um dos dados, o número 6 e, no outro dado, um número múltiplo de 3. {(6, 3), (3, 6), (6, 6)}

e) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)}
g) {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)}

5. Em uma embalagem há 500 parafusos. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 3 parafusos dessa embalagem e verificar se eles estão de acordo com as normas de qualidade. Calcule o número de elementos do espaço amostral desse experimento. 20.708.500

6. Elabore um exercício em que se deve calcular o número de elementos do espaço amostral de um experimento. Depois, entregue seu exercício a um colega para que ele o resolva. Você deve resolver o exercício elaborado por ele.
resposta pessoal

Além da habilidade **EM13MAT311**, como já mencionado, esse tópico busca favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT511** reconhecendo a existência de diferentes tipos de evento, equiprováveis ou não, além de investigar implicações no cálculo de probabilidades.

2 Probabilidade

GCAFOTOGRAFIA/SHUTTERSTOCK

Acompanhe a situação a seguir.

Suponha que um casal queira ter dois filhos. O primeiro filho poderá ser do sexo masculino (M) ou do sexo feminino (F). O segundo também poderá ser de um dos dois sexos. Sabendo que a chance de nascer um filho do sexo masculino é igual à chance de nascer um filho do sexo feminino, independentemente do sexo do filho já existente, qual é a chance desse casal ter os dois filhos do sexo masculino (M, M)?

Podemos responder à questão determinando o espaço amostral S e o evento E (dois filhos do sexo masculino).

- S = {(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)}
- E = {(M, M)}

Note que n(E) = 1 e n(S) = 4.

Dizemos que a chance de nascerem dois filhos do sexo masculino é de 1 para 4, ou seja, $\frac{1}{4}$.

Nessa situação, consideramos que, para cada evento simples, existe a mesma chance de ocorrência. Quando adotamos esse critério em um espaço amostral finito, esse espaço é denominado **espaço amostral equiprovável**.

Em um espaço amostral equiprovável S, finito e não vazio, a **probabilidade** de ocorrência de um evento E, indicada por $P(E)$, é a razão entre o número de elementos do evento, n(E), e o número de elementos do espaço amostral, n(S):

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Seja E um evento e S o espaço amostral finito, não vazio, de um experimento aleatório. Como consequência da definição, temos:

$$0 \leqslant n(E) \leqslant n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leqslant \frac{n(E)}{n(S)} \leqslant \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

- Se E é um evento impossível, então $P(E) = 0$.
- Se E é um evento certo, então $P(E) = 1$.

Reflita

No dia a dia há muitas situações em que a teoria da probabilidade nos auxilia na tomada de decisões. Por exemplo, será que vale a pena gastar dinheiro em uma aposta da Mega-Sena, sabendo que a probabilidade de ganhar é de 1 em 50.063.860, ou seja, 0,000002%?
Cite uma situação em que a probabilidade pode auxiliar em uma tomada de decisão. resposta pessoal

Esse boxe favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106**, pois os alunos identificarão situações do cotidiano em que seja necessário tomar decisões, levando em conta os riscos probabilísticos.

Observação

Em geral, a probabilidade é uma medida de tendência, e não de certeza.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Boxe Reflita: Considerando $P(n)$ a probabilidade de a face superior no lançamento de um dado apresentar o número n, temos:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Exercícios resolvidos

Se considerar o momento oportuno para a turma, essa questão pode ser generalizada:

Reflita

Qual é a soma das probabilidades de todos os eventos simples no lançamento de um dado?

R4. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de a face superior apresentar:

a) o número 3 (E_1)?
b) um número menor que 7 (E_2)?
c) um número menor que 1 (E_3)?
d) um divisor da soma dos pontos de todas as faces do dado (E_4)?

a soma de todos os eventos simples de um experimento aleatório é sempre igual a 1.

▸ **Resolução**

O espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é equiprovável e $n(S) = 6$.

a) $E_1 = \{3\}$ é um evento simples e $n(E_1) = 1$; então, $P(E_1) = \frac{1}{6}$.

b) $E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ é um evento certo e $n(E_2) = 6$; então, $P(E_2) = \frac{6}{6} = 1$.

c) $E_3 = \varnothing$ é um evento impossível e $n(E_3) = 0$; então, $P(E_3) = \frac{0}{6} = 0$.

d) O número total de pontos é: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

$E_4 = \{1, 3\}$ e $n(E_4) = 2$; então, $P(E_4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Boxe Reflita:
a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Não, pois para cada evento simples não existe a mesma chance de ocorrência (há mais chance de ocorrer o evento {6} do que de ocorrer os outros eventos simples).

Reflita

Considere agora um dado viciado, em que a chance de ocorrer a face 6 é de 4 para 9, enquanto a chance de ocorrer cada uma das outras faces é de 1 para 9.

a) Qual é o espaço amostral? Ele é equiprovável?
b) Para calcular as probabilidades dos eventos "E_1: sair face 3" e "E_2: sair face 6", podemos usar a fórmula $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$? Justifique.
c) Quais seriam as probabilidades no item **b** se pudéssemos usar a fórmula? Quais são as reais probabilidades dos eventos E_1 e E_2?

b) Não podemos usar a fórmula, pois ela só é válida para eventos equiprováveis.

R5. No lançamento simultâneo de uma moeda e de um dado, determinar:

EDNEI MARX

a) o espaço amostral;
b) o número de elementos do evento E_1: coroa na moeda e face par no dado; e a probabilidade de ocorrência de E_1;
c) a probabilidade de ocorrência do evento E_2: face 3 no dado.

▸ **Resolução**

a) A moeda tem duas faces, coroa (k) e cara (c), e o dado tem as faces numeradas de 1 a 6. Portanto, o espaço amostral é $S = \{(k, 1), (k, 2), (k, 3), (k, 4), (k, 5), (k, 6), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6)\}$ e $n(S) = 12$.

b) O evento "coroa na moeda e face par no dado" é o conjunto $E_1 = \{(k, 2), (k, 4), (k, 6)\}$ e $n(E_1) = 3$. Então:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

ou $P(E_1) = 25\%$

c) O evento "face 3 no dado" é o conjunto $E_2 = \{(k, 3), (c, 3)\}$ e $n(E_2) = 2$. Então:

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}1667 \text{ ou } P(E_2) \simeq$$

$\simeq 16{,}67\%$

Observação

Podemos registrar a probabilidade de um evento nas formas fracionária, decimal ou percentual.

R6. Uma equipe de 12 pessoas é formada por 9 homens e 3 mulheres, das quais duas serão sorteadas para compor uma comissão. Indicar a probabilidade de a comissão ser formada por:

a) duas mulheres;
b) um homem e uma mulher.

▸ **Resolução**

Para calcular o número de elementos do espaço amostral, devemos considerar um grupo de 12 pessoas, do qual serão retirados 2 elementos, não importando a ordem, o que corresponde ao número de combinações de 12, tomadas 2 a 2:

$$n(S) = C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot (12 - 2)!} = 66$$

a) Temos E_1: comissão formada por 2 mulheres de um total de 3.

$$n(E_1) = C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot (3 - 2)!} = 3$$

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22}$$

b) Temos E_3: comissão formada por 1 homem (de um total de 9) e 1 mulher (de um total de 3). Então:

$$n(E_3) = C_{9,1} \cdot C_{3,1} = 9 \cdot 3 = 27$$

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{27}{66} = \frac{9}{22}$$

Boxe Reflita:
c) $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ As reais probabilidades são: $P(E_1) = \frac{1}{9}$ e $P(E_2) = \frac{4}{9}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

Decomposição

Este princípio propõe a divisão de um problema em problemas menores e mais simples de serem resolvidos, viabilizando a solução do problema inicial.

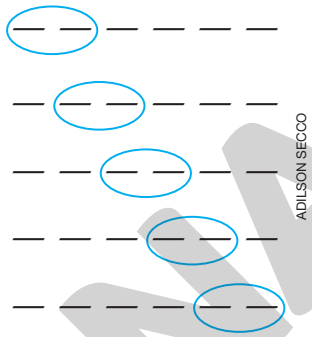
- Seis pessoas são colocadas aleatoriamente em fila. Sabendo que há 2 irmãos entre essas pessoas, determinar a probabilidade de eles ficarem juntos.

  Para resolver este problema, vamos decompô-lo em problemas menores, determinando:

  a) o espaço amostral;

  b) o número de elementos do evento;

  c) a probabilidade de os dois irmãos ficarem juntos.


ADILSON SECCO

Resolução:

a) O espaço amostral S é formado por todas as possibilidades de fila.
Assim: $n(S) = P_6 = 6! = 720$
Portanto, há 720 maneiras de dispor as 6 pessoas em uma fila.

b) O evento E é "os irmãos ficarem juntos na fila". Então, devemos considerar a posição dos 2 irmãos como apenas uma e permutar com as outras 4 pessoas da fila, conforme esquema ao lado. Assim, obtemos: $P_5 = 5! = 120$
Como os irmãos podem trocar de lugar entre si de duas maneiras ($P_2 = 2!$), temos: $n(E) = P_2 \cdot P_5 = 2 \cdot 120 = 240$
Portanto, há 240 maneiras de dispor as 6 pessoas em uma fila de modo que os 2 irmãos fiquem juntos.

c) $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$

Logo, a probabilidade de os irmãos ficarem juntos na fila é de $\frac{1}{3}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. No lançamento de um dado com a forma de um dodecaedro regular (poliedro de 12 faces pentagonais congruentes), cujas faces estão numeradas de 1 a 12, considera-se que "saiu o número 2" se, após o lançamento, a face com o número 2 estiver voltada para cima. Calcule a probabilidade de, em um lançamento, sair um número:

VIKTOR1/SHUTTERSTOCK

a) par; $\frac{1}{2}$

b) maior que 4; $\frac{2}{3}$

c) divisível por 3; $\frac{1}{3}$

d) múltiplo de 5; $\frac{1}{6}$

e) menor que 1. 0

8. Em uma urna, há 5 bolas brancas, 3 pretas e 7 vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, determine a probabilidade de ela ser:

a) branca; $\frac{1}{3}$

b) preta; $\frac{1}{5}$

c) branca ou preta; $\frac{8}{15}$

d) vermelha e branca. 0

9. Em um pacote de balas, há 5 de sabor morango e 10 de sabor abacaxi. Se 3 balas forem retiradas ao acaso, qual é a probabilidade de todas serem do sabor morango? $\frac{2}{91}$

10. Em 4 cartelas, escrevem-se as letras R, O, M e A, uma em cada cartela. As cartelas são, então, depositadas em um saco.

EDNEI MARX

Qual é a probabilidade de, retirando uma a uma as cartelas do saco, formarmos, na ordem de saída, a palavra AMOR? $\frac{1}{24}$

11. Dez pessoas, das quais 4 são de uma mesma família, serão colocadas aleatoriamente em fila. Qual é a probabilidade de as 4 pessoas da família ficarem juntas? $\frac{1}{30}$

12. Em um grupo de 6 crianças, há 2 meninos e 4 meninas. Desse grupo, 5 crianças são selecionadas. Qual é a probabilidade de que ambos os meninos estejam no grupo selecionado? $\frac{2}{3}$

13. Cristina tem na carteira quatro notas de R$ 10,00, duas de R$ 50,00 e uma de R$ 100,00. Para pagar uma conta de R$ 40,00 no supermercado, ela puxa duas notas da carteira, aleatoriamente. Qual é a probabilidade de Cristina não precisar puxar outra nota? $\frac{5}{7}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O exercício **14** busca favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT511** da BNCC, pois solicita o reconhecimento de eventos, equiprováveis ou não, e sua implicação no cálculo de probabilidades.

14. Suponha que no lançamento de uma moeda, não honesta, a probabilidade de sair cara (c) seja $\frac{1}{3}$ e a probabilidade de sair coroa (k) seja $\frac{2}{3}$. Considerando essas informações, reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) O espaço amostral, com essas probabilidades, é equiprovável? não

b) Determine o espaço amostral para três lançamentos seguidos dessa moeda.

$S = \{ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk\}$

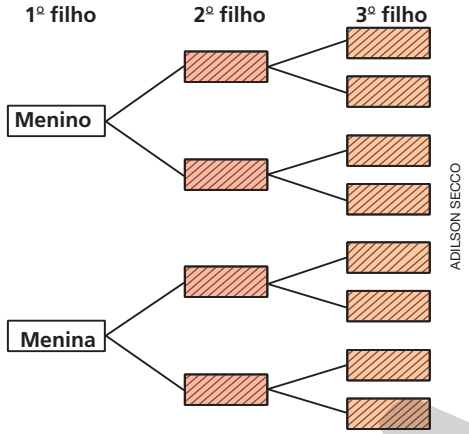
15. Um casal planeja ter três filhos. Faça um diagrama de árvore, como o modelo ao lado, com todos os possíveis arranjos entre meninos (M) e meninas (F). Depois, calcule a probabilidade de nascimento de:

a) duas meninas e um menino (E_1); $\frac{3}{8}$

b) três meninos (E_2); $\frac{1}{8}$

c) pelo menos um menino (E_3); $\frac{7}{8}$

d) todas as crianças do mesmo sexo (E_4). $\frac{1}{4}$



16. De uma urna com 5 bolas amarelas, 7 vermelhas e 4 azuis, são retiradas, simultaneamente e ao acaso, 3 bolas. Calcule a probabilidade de as 3 bolas serem:

a) amarelas; $\frac{1}{56}$

b) azuis; $\frac{1}{140}$

c) vermelhas; $\frac{1}{16}$

d) da mesma cor. $\frac{7}{80}$

2.1 Eventos complementares

Em uma urna, há 5 bolas coloridas, sendo 3 vermelhas e 2 brancas. Uma bola é sorteada, sua cor é anotada e ela é devolvida à urna. Nessa situação, considere o evento A "a bola sorteada é vermelha", com $n(A) = 3$, e o evento B "a bola sorteada é branca", com $n(B) = 2$. Sabe-se que, para o espaço amostral S desse experimento, temos $n(S) = 5$. Logo, as probabilidades dos eventos A e B são dadas por:

- $P(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$
- $P(B) = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

A probabilidade de ocorrência do evento B poderia ser calculada considerando-se que há somente duas possibilidades no experimento, ou seja, a bola sorteada só pode ser branca ou vermelha. Assim, a reunião dos eventos A e B implica um evento certo, cuja probabilidade é igual a 1 (100%). Por isso, temos:

$$P(B) + P(A) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{3}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

Seja S o espaço amostral de um experimento aleatório e A um evento de S. Dizemos que o evento $\bar{A}$ é **complementar** do evento A se $\bar{A} \cap A = \varnothing$ e $\bar{A} \cup A = S$.

A soma das probabilidades de dois eventos complementares é igual a 1, ou seja, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Assim:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Observação

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 7, 9\}$

- A união de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.
  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$
- A intersecção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.
  $A \cap B = \{2, 3\}$
- A diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.
  $A - B = \{1\}$
- A diferença entre B e A é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B, mas não pertencem a A.
  $B - A = \{4, 7, 9\}$

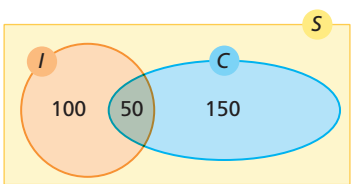
2.2 Intersecção de dois eventos

Acompanhe a situação a seguir.

Entrevistaram-se 300 adolescentes acerca da preferência quanto a esportes individuais ou coletivos. O resultado da pesquisa foi o seguinte:

- 150 gostam de esportes individuais;
- 200 gostam de esportes coletivos;
- 50 gostam dos dois tipos.

É possível representar o resultado da pesquisa em um diagrama de Venn. Observe ao lado.



Escolhendo um desses adolescentes ao acaso, qual é a probabilidade de que ele goste igualmente dos dois tipos de esporte?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nesse experimento, o espaço amostral S é a união do conjunto dos adolescentes que gostam de esportes individuais (I) com o conjunto dos que gostam de esportes coletivos (C). Assim, $n(S) = n(I \cup C) = 300$.

Sendo E o evento "o adolescente escolhido gosta igualmente dos dois tipos de esporte", a probabilidade de E é a probabilidade da intersecção dos eventos C e I; logo, $n(E) = 50$. Assim:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}67\%$$

Em geral, se A e B são eventos quaisquer, a **probabilidade da intersecção** de A e B, representada por $P(A \cap B)$, é dada por:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Decorre da igualdade acima que, se A e B não apresentam elementos comuns ($A \cap B = \varnothing$), então $P(A \cap B) = 0$, pois $n(A \cap B) = 0$.

2.3 União de dois eventos

SWAPAN PHOTOGRAPHY/ SHUTTERSTOCK

Acompanhe a situação a seguir.

Marcos está jogando com os amigos. A brincadeira consiste em somar pontos com o lançamento simultâneo de dois dados, um vermelho e um azul.

Qual é a probabilidade de Marcos ou um de seus amigos obter soma par ou soma múltipla de 3?

Da situação apresentada, conhecemos:

- o espaço amostral S, em que $n(S) = 36$

  $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

- o evento "sair soma par" (E_1), em que $n(E_1) = 18$ e $P(E_1) = \frac{1}{2}$

  $E_1 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

- o evento "sair soma múltipla de 3" (E_2), em que $n(E_2) = 12$ e $P(E_2) = \frac{1}{3}$

  $E_2 = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), \{(6, 6)\}$

Procuramos a probabilidade de ocorrer o evento E_1 ou de ocorrer o evento E_2, ou seja, a **probabilidade da união** de E_1 e E_2, que é dada por: $P(E_1 \cup E_2)$

Então, para a situação analisada, podemos determinar:

$E_1 \cup E_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 6)\}$

Fazendo uso da definição de probabilidade, calculamos:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de Marcos obter soma par **ou** soma múltipla de 3 é $\frac{2}{3}$.

Qual é a probabilidade de Marcos ou um de seus amigos obter, agora, soma par e soma múltipla de 3?

Nesse caso, basta determinar $E_1 \cap E_2$ e aplicar a definição de probabilidade:

$E_1 \cap E_2 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\}$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Então, a probabilidade de Marcos obter soma par **e** soma múltipla de 3 é $\frac{1}{6}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Considerando os resultados de $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_1 \cap E_2)$ e $P(E_1 \cup E_2)$, verificamos a igualdade: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

Ou seja: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Para generalizar essa relação, vamos tomar os eventos E_1 e E_2 de um espaço amostral S, finito e não vazio, para os quais teremos:

$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2)$

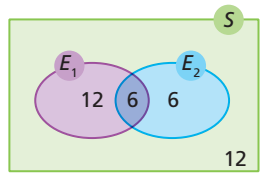
Dividindo os membros da igualdade por $n(S)$, temos:

$$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

Portanto, a probabilidade de ocorrência do evento **união de E_1 e E_2** é dada por:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Observação



ADILSON SECCO

$n(E_1) = 12 + 6$
$n(E_2) = 6 + 6$
contados duplamente

$n(E_1 \cup E_2) = 18 + 12 - 6$

$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36}$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Eventos mutuamente exclusivos

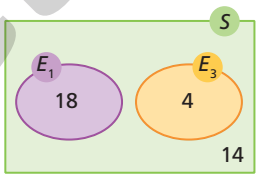
Se E_1 e E_2 são conjuntos disjuntos, isto é, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, os eventos E_1 e E_2 são ditos **mutuamente exclusivos**.

Como $n(E_1 \cap E_2) = 0$ e $P(E_1 \cap E_2) = 0$, a probabilidade da união de dois eventos mutuamente exclusivos é:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Exemplo

No jogo de Marcos com seus amigos, vimos que $n(E_1) = 18$, isto é, há soma par em 18 casos. Se E_3 é o evento "sair soma 5", então $E_3 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ e $n(E_3) = 4$. Como $E_1 \cap E_3 = \varnothing$, temos o diagrama ao lado.



ADILSON SECCO

Assim: $n(E_1 \cup E_3) = 18 + 4 - 0 = 22$

Portanto: $P(E_1 \cup E_3) = \frac{n(E_1 \cup E_3)}{n(S)} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} \simeq 61\%$

Ou, ainda, como os eventos E_1 e E_3 são mutuamente exclusivos, temos:

$$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) = \frac{18}{36} + \frac{4}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} \simeq 61\%$$

Exercícios resolvidos

R7. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 50. Calcular a probabilidade de ser sorteada uma bola cujo número seja:

a) par **ou** múltiplo de 5;

b) par e maior que 10 **ou** o menor número primo.

▸ **Resolução**

a) Para calcular a probabilidade de sair um número par **ou** um número múltiplo de 5, vamos considerar os eventos E_1 e E_2 e os respectivos números de elementos:

- E_1: número par, $n(E_1) = 25$
- E_2: número múltiplo de 5, $n(E_2) = 10$
- $E_1 \cap E_2$: par **e** múltiplo de 5, $n(E_1 \cap E_2) = 5$

Assim:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{25}{50} + \frac{10}{50} - \frac{5}{50} = \frac{30}{50} = 0{,}6 = 60\%$

Portanto, a probabilidade de ocorrer um número par **ou** múltiplo de 5 é 60%.

b) Para calcular a probabilidade de sair um número par maior que 10 **ou** o menor número primo, vamos considerar os eventos E_3 e E_4 e os respectivos números de elementos:

- E_3: número par maior que 10, $n(E_3) = 20$
- E_4: menor número primo, $n(E_4) = 1$
- $E_3 \cap E_4$: não há número par maior que 10 e igual a 2; logo, $n(E_3 \cap E_4) = 0$.

Os conjuntos E_3 e E_4 são eventos mutuamente exclusivos:

$P(E_3 \cup E_4) = P(E_3) + P(E_4)$

$P(E_3 \cup E_4) = \frac{20}{50} + \frac{1}{50} = \frac{21}{50} = 0{,}42 = 42\%$

Logo, a probabilidade de ser sorteado um número par maior que 10 **ou** o menor número primo é 42%.

Observação

De 1 a 50 existem 15 números primos, e o menor deles é 2. Portanto, $E_4 = \{2\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R8. Em uma pesquisa realizada com 50 pessoas foi perguntado:

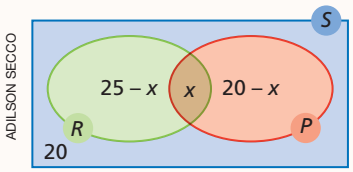
- Você ouve rádio?
- Você ouve *podcast*?

Os resultados indicaram que 25 pessoas ouvem rádio, 20 pessoas ouvem *podcast* e 20 pessoas não costumam ouvir rádio nem *podcast*. Calcular a probabilidade de, ao selecionar uma dessas pessoas, ela ouvir rádio e *podcast*.

▸ **Resolução**

Observe que a pessoa que ouve rádio pode também ouvir *podcast* e que a pessoa que ouve *podcast* pode também ouvir rádio.

Sendo x o número de pessoas que ouve rádio e *podcast*, vamos representar os dados da pesquisa em um diagrama. Temos:



ADILSON SECCO

- x pessoas ouvem rádio e *podcast*;
- $25 - x$ pessoas ouvem apenas rádio;
- $20 - x$ pessoas ouvem apenas *podcast*;
- 20 pessoas não costumam ouvir rádio nem *podcast*.

O evento E ("selecionar uma pessoa que ouça ambas as mídias") é a intersecção dos eventos R ("selecionar uma pessoa que ouça rádio") e P ("selecionar uma pessoa que ouça *podcast*").

Como $n(E) = n(R \cap P) = x$, temos:

$(25 - x) + x + (20 - x) + 20 = 50 \Rightarrow 65 - x = 50 \Rightarrow x = 15$

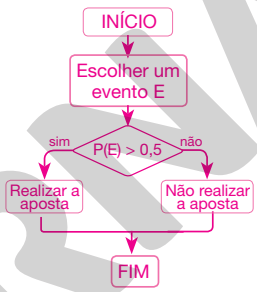
Portanto, 15 pessoas ouvem ambas as mídias.

Logo, a probabilidade de E é:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$$

O *podcast* é um tipo de mídia atual que faz parte do universo juvenil. Aproveitar a oportunidade para explorar o tema e chamar a atenção dos alunos para esse tipo de compartilhamento que tem grande quantidade de temas e pode ser ouvido a qualquer hora. Perguntar se eles ouvem ou já produziram algum *podcast* e peça que falem sobre o tema tratado.

22. Orientar os alunos a analisar o algoritmo depois de escrito, seja em linguagem corrente, seja em um fluxograma. Pedir a eles que validem as probabilidades já calculadas para os eventos, seguindo o fluxo do algoritmo. Exemplo de resposta:



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

17. Um baralho comum tem 52 cartas, distribuídas em quatro grupos idênticos, exceto pelo naipe de cada grupo: paus, ouros, copas e espadas. Se tirarmos uma carta ao acaso, qual será a probabilidade de ela ser:

a) uma carta de paus ou uma dama? $\frac{4}{13}$

b) uma carta de ouros ou copas ou um rei? $\frac{7}{13}$

18. Uma urna contém 4 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 3 bolas brancas. Retirando-se uma das bolas ao acaso, qual é a probabilidade de ela ter cor primária (amarela, vermelha ou azul)? $\frac{2}{3}$

19. Se lançarmos um dado vermelho e um dado preto, qual será a probabilidade de sair 3 no vermelho ou 2 no preto? $\frac{11}{36}$

20. Em uma cidade de 1.000 habitantes, 400 são sócios de um clube A, 300 de um clube B e 200 de ambos os clubes. Calcule a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ser sócia do clube A ou do B. $\frac{1}{2}$

21. De 140 alunos de uma escola de Comunicações, 80 cursam Música, 40 cursam Artes Cênicas e 20 cursam Música e Artes Cênicas. Escolhido ao acaso um estudante, determine a probabilidade de ele cursar:

NEJRON PHOTO/SHUTTERSTOCK

a) Música; $\frac{4}{7}$

b) Artes Cênicas; $\frac{2}{7}$

c) Música e Artes Cênicas; $\frac{1}{7}$

d) Música ou Artes Cênicas. $\frac{5}{7}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O exercício 22 favorece o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os alunos devem escrever um algoritmo.

22. Uma roleta honesta é provida de um disco dividido em ângulos centrais de mesmo tamanho, numerados de 1 a 36. Para sortear um desses números, joga-se uma bolinha sobre o disco, com a roleta em rotação, e considera-se válido o número sobre o qual a bolinha para.

Determine a probabilidade de:

a) sair um número par; $\frac{1}{2}$

b) sair um múltiplo de 3; $\frac{1}{3}$

c) sair um número par e múltiplo de 3; $\frac{1}{6}$

d) sair um número par ou múltiplo de 3; $\frac{2}{3}$

e) não sair um número par nem um múltiplo de 3; $\frac{1}{3}$

f) não sair um número par ou não sair um múltiplo de 3. $\frac{5}{6}$

- Considerando os eventos dos itens anteriores, escreva um algoritmo para decidir se uma aposta deve ou não ser realizada. A aposta será feita somente para os eventos cuja probabilidade de ocorrer é maior que 0,5.

23. Em um auditório, estão 35 pessoas loiras ou morenas. Vinte delas são homens, dos quais 4 são loiros. Entre as mulheres há 8 loiras.

Sorteando-se ao acaso uma pessoa desse auditório, qual é a probabilidade de ela ser:

a) uma mulher ou uma pessoa loira? $\frac{19}{35}$

b) um homem moreno? $\frac{16}{35}$

c) uma mulher morena ou um homem? $\frac{27}{35}$

24. Os esportistas João e Pedro vão disputar a corrida de São Silvestre*. Se a chance de João ser campeão é de 0,25 e a de Pedro é de 0,20, qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, de João ou Pedro ganhar a corrida? 45%

25. Em um grupo de 30 pessoas, 20 têm cidadania australiana, 10 têm cidadania brasileira e 8 têm ambas as cidadanias. As demais não têm nenhuma dessas cidadanias. Uma pessoa desse grupo é selecionada ao acaso.

a) Desenhe um diagrama que represente a situação. Ver resolução no Guia do professor.

b) Determine a probabilidade de a pessoa selecionada não ter nenhuma das cidadanias. $\frac{4}{15}$

c) Calcule a probabilidade de a pessoa selecionada ter apenas uma das cidadanias. $\frac{7}{15}$

26. Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20. Uma ficha é retirada ao acaso. Qual é a probabilidade de a ficha sorteada apresentar um número divisível por 3 ou divisível por 5? $\frac{9}{20}$

27. Três moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de que ocorra três caras ou três coroas? $\frac{1}{4}$

28. Em um centro de informações, há 8 atendentes trabalhando no primeiro turno, das 7 às 15 horas, 12 atendentes trabalhando no segundo turno, das 15 às 23 horas, e 3 atendentes no terceiro turno, das 23 às 7 horas. Três atendentes são selecionados para uma equipe que vai revisar os procedimentos de trabalho. Qual é a probabilidade de os 3 atendentes trabalharem no primeiro turno ou trabalharem no terceiro turno? $\frac{57}{1.771}$

29. Elabore um exercício em que seja necessário calcular a probabilidade da união de dois eventos. Depois, peça a um colega que resolva seu exercício. Você deve resolver o exercício elaborado por ele. resposta pessoal

* A São Silvestre é uma tradicional corrida de rua realizada anualmente na cidade de São Paulo, Brasil, no dia 31 de dezembro, dia de São Silvestre.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 Probabilidade condicional

Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312** da BNCC, já que propõe a resolução e a elaboração de diversos problemas que envolvem o cálculo de probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos.

Acompanhe a situação a seguir.

Um jogo consiste em escolher um número entre 1 e 6 e lançar um dado duas vezes sucessivas. Se o número escolhido aparecer em pelo menos um dos lançamentos, a pessoa vence; se não aparecer em nenhum dos dois lançamentos, a pessoa perde. Dois amigos decidiram jogar. Um deles escolheu o número 3 e lançou o dado duas vezes. Qual é a probabilidade de ele ganhar, se não obteve o número 3 no primeiro lançamento?

O número de elementos do espaço amostral S é $n(S) = 36$.

- Evento A: obter o número 3 em pelo menos um dos lançamentos.

$A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$

Como $n(A) = 11$, temos $P(A) = \frac{11}{36}$.

Os jogos de RPG (*role-playing games*) têm como mote principal a interpretação de personagens. Nesses tipos de jogos são utilizados dados de formatos cúbicos, dodecaédricos, icosaédricos etc.

Os jogos fazem parte do universo juvenil e essa cultura pode auxiliar na aproximação e interação com os temas abordados nesse capítulo. Aproveitar o texto inicial de Probabilidade condicional que trabalha um jogo de dados e iniciar uma discussão sobre jogos que utilizam dados. Perguntar aos alunos qual tipo de jogo que eles gostam e pedir que compartilhem com a sala as suas preferências.

Observação

Representação do espaço amostral:

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

- Evento B: não obter o número 3 no primeiro lançamento.

  $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

  Como $n(B) = 30$, temos $P(B) = \frac{30}{36}$.

Denotamos por $A|B$ a ocorrência do evento A, dado que o evento B já tenha ocorrido, e por $P(A|B)$ a **probabilidade condicional** de ocorrer A, dado que B já ocorreu.

Na situação acima, $P(A|B)$ é "a probabilidade de obter 3 em um dos lançamentos do dado, considerando que não foi obtido 3 no primeiro lançamento".

Note que a ocorrência do evento B modifica a condição e a probabilidade do evento A, pois, a partir da ocorrência de B, o espaço amostral passa a ser o conjunto B:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}67\%$$

Assim, a probabilidade de um dos amigos ganhar, tendo escolhido o número 3 e não obtido esse número no primeiro lançamento do dado, é de aproximadamente 16,67%. Em geral, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) \neq 0; \text{ ou } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Observação

$A \cap B = \{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$
Como $n(A \cap B) = 5$, temos:
$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$

Exercícios resolvidos

R9. Em uma bolsa, há 2 cubos vermelhos e 4 cubos azuis. Se 2 cubos são selecionados ao acaso, um de cada vez, e o primeiro cubo retirado não é reposto na bolsa, calcular a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos.

▸ **Resolução**

- Evento B: o primeiro cubo é vermelho.

  Então: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- Evento A: o segundo cubo é vermelho. A probabilidade da ocorrência de A depende da ocorrência de B, pois, se o primeiro cubo retirado for vermelho, haverá somente um cubo vermelho entre 5 cubos restantes na bolsa.

Assim: $P(A|B) = \frac{1}{5}$

Queremos obter a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos, ou seja, devemos calcular a probabilidade de $A \cap B$:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \simeq 6{,}67\%$

R10. De um baralho comum são retiradas 2 cartas, uma a uma e sem reposição. Calcular a probabilidade de as duas cartas serem de copas.

▸ **Resolução**

- Evento B: a primeira carta é de copas.

  Então: $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

- Evento A: a segunda carta é de copas.

  $P(A|B) = \frac{12}{51}$

Queremos obter a probabilidade de ambas as cartas serem de copas, ou seja, devemos calcular a probabilidade de $A \cap B$:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{51} \simeq 5{,}88\%$

3.1 Eventos independentes

Considere o lançamento simultâneo de um dado e de uma moeda.

Adotando c para cara e k para coroa, o espaço amostral desse experimento é

$S = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6), (k, 1), (k, 2), (k, 3), (k, 4), (k, 5), (k, 6)\}$ e $n(S) = 12$.

Vamos considerar os eventos:

- Evento A: sair cara na moeda.
- Evento B: sair um número múltiplo de 3 no dado.

  Então:

  $A = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6)\}$ e $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

$B = \{(c, 3), (c, 6), (k, 3), (k, 6)\}$ e $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$A \cap B = \{(c, 3), (c, 6)\}$ e $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Note que $P(A|B) = P(A)$, ou seja, a probabilidade de sair cara na moeda não é alterada pela ocorrência de número múltiplo de 3 no dado.

Temos, ainda:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = P(B)$$

Como $P(B|A) = P(B)$, a probabilidade de ocorrer o evento B também não é alterada pela ocorrência do evento A.

Portanto, a ocorrência de um evento não interferiu na probabilidade de ocorrência do outro. Dizemos, então, que os eventos "sair cara na moeda" e "sair um número múltiplo de 3 no dado" são eventos independentes.

Para a ocorrência simultânea dos dois eventos independentes, substituímos $P(A|B)$ por $P(A)$ em $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Assim, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dois eventos, A e B, são **eventos independentes** se a ocorrência de um deles não interfere na ocorrência do outro, isto é, se $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.

Dois eventos, A e B, são **eventos dependentes** quando a probabilidade de ocorrência de um deles interfere na ocorrência do outro. Nesse caso, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Observação

Não confunda eventos **independentes** com eventos **mutuamente exclusivos!**

A probabilidade de ocorrência de mais de dois eventos independentes é igual ao produto das probabilidades de cada um dos eventos.

Exemplo

Retiramos 2 cartas de um baralho de 52 cartas, uma após a outra e com reposição. Vamos calcular a probabilidade de a primeira ser uma dama e a segunda ser um 10.

- S: cartas do baralho e $n(S) = 52$.
- Evento A: primeira carta ser uma dama, $n(A) = 4$.
- Evento B: segunda carta ser um 10, $n(B) = 4$.
- $P(A) = P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Como houve reposição, A e B são eventos independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$$

Então, a probabilidade de a primeira carta ser uma dama e a segunda ser um 10 é $\frac{1}{169}$.

Exercício resolvido

R11. O 2º ano A da Escola Viva! tem 30 alunos. Cada aluno estuda uma língua estrangeira e outra disciplina opcional, de acordo com a tabela.

Disciplinas e línguas estudadas pelos alunos do 2º ano A				
Disciplina optativa / Língua	Xadrez (X)	Dança (D)	Música (M)	Total
Francês (F)	10	3	5	18
Espanhol (E)	5	6	1	12
Total	15	9	6	30

Fonte: Escola Viva!

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

a) Calcular a probabilidade de um aluno, selecionado ao acaso, estudar xadrez, sabendo que ele estuda francês.

b) Verificar se os eventos "aluno estuda xadrez" e "aluno estuda francês" são eventos independentes.

▸ **Resolução**

a) Dos 18 alunos que estudam francês, 10 estudam xadrez. Então:

$$P(X|F) = \frac{P(X \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{10}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Logo, a probabilidade de um aluno, selecionado ao acaso, estudar xadrez, sabendo que ele estuda francês, é de $\frac{5}{9}$.

b) A probabilidade de um aluno estudar xadrez é: $P(X) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Logo, os eventos **não** são independentes, pois $P(X|F) \neq P(X)$.

36. O enunciado está incompleto. Falta a informação se há reposição de bola após a primeira retirada.
Após os alunos tentarem resolver o exercício e se ninguém perceber que o enunciado está incompleto, pedir à turma para que resolva o exercício com e sem reposição após a primeira retirada. As respostas nesses casos são: com reposição: $\frac{2}{9}$; sem reposição: $\frac{8}{33}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

30. Um grupo de 1.000 pessoas apresenta, conforme sexo e qualificação profissional, a composição indicada na tabela a seguir.

Qualificação profissional do grupo		
Sexo \ Qualificação	Especializados	Não especializados
Homens	210	390
Mulheres	140	260

Dados fictícios.

Escolhendo uma dessas pessoas ao acaso, qual é a probabilidade:

a) de ser homem? 60%

b) de ser mulher não especializada? 26%

c) de ser não especializado? 65%

d) de ser homem especializado? 21%

e) se for especializado, de ser mulher? 40%

31. Uma moeda é lançada três vezes. Qual é a probabilidade de, nas três vezes, sair coroa na face voltada para cima? $\frac{1}{8}$

32. Uma urna contém 5 bolas verdes e 7 bolas brancas. Retiramos 2 bolas em seguida, com reposição.

a) Qual é a probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda ser verde? $\frac{35}{144}$

b) Qual é a probabilidade de as duas bolas serem brancas? $\frac{49}{144}$

c) Crie uma pergunta sobre probabilidade envolvendo a situação descrita no enunciado. Peça a um colega que resolva. Em seguida, discutam a elaboração da pergunta e as respostas obtidas. resposta pessoal

33. Seis cartas (2, 3 e 4 de copas, 2 e 4 de paus e 4 de espadas) são embaralhadas e colocadas com a face voltada para baixo sobre uma mesa. Sabendo que uma dessas cartas é escolhida ao acaso, responda às questões e justifique suas respostas. Ver justificativas no Guia do professor.

a) Os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de copas" são independentes? não

b) E os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de paus"? sim

34. Em uma escola, estudam alunos de dois segmentos: no Ensino Médio são 400 meninos e 200 meninas; no Ensino Fundamental, são 400 meninas e 300 meninos. Ao sortear um aluno dessa escola, calcule a probabilidade de ser:

a) menino, sabendo que é aluno do Ensino Médio; $\frac{2}{3}$

b) aluno do Ensino Médio, sabendo que é menino. $\frac{4}{7}$

35. Uma urna contém 3 bolas: 1 verde, 1 azul e 1 branca. Tira-se 1 bola ao acaso, registra-se sua cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se a experiência mais duas vezes. Qual é a probabilidade de serem registradas 3 cores distintas? $\frac{2}{9}$

36. Uma urna contém 8 bolas vermelhas e 4 bolas pretas. Ao retirarmos duas bolas em seguida, qual é a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda ser vermelha?

37. Elabore um exercício em que seja necessário calcular a probabilidade de um evento em um experimento aleatório com etapas sucessivas. Resolva o exercício de um colega de sala e peça a ele que resolva o seu. Depois, confiram as resoluções e discutam se o enunciado está claro e se com todos os dados fornecidos é possível resolver o exercício. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Esse tópico busca favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312**, propondo a resolução de problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

4 Método binomial

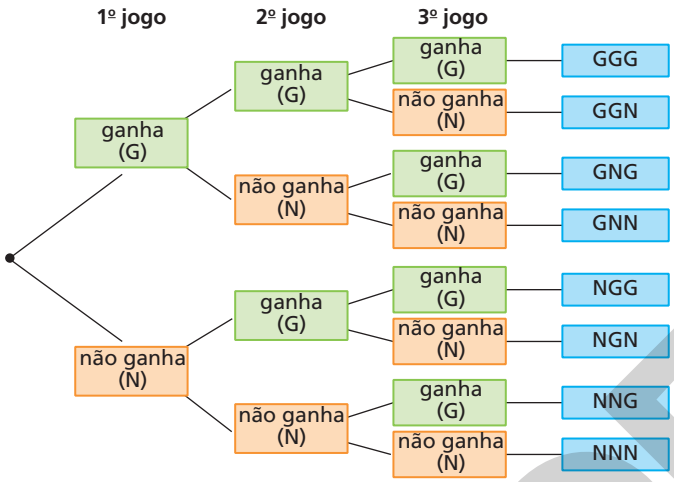
Jaime vai participar de um torneio de tênis de mesa composto de 3 jogos. Em cada jogo, ele só pode ganhar ou não ganhar.

Vamos representar por p a probabilidade de Jaime ganhar um jogo e por q a probabilidade de ele não ganhar. Vamos ainda supor que p seja constante para os 3 jogos e que o resultado de cada jogo seja independente do resultado dos demais.

Como não há empate, ganhar e não ganhar são eventos complementares; logo, $p + q = 1$.

Podemos representar todas as possibilidades de resultado dos jogos de Jaime nesse torneio em uma árvore de possibilidades. Observe a seguir.

WANG BO/XINHUA/ZUMA PRESS/GLOW IMAGES



ADILSON SECCO

Aproveitar o tema utilizado na explicação do Método binomial para discutir com os alunos sobre a prática de esporte. Esse é um tema da cultura juvenil e pode auxiliar na interação com o trabalho a ser abordado neste tópico.

Observando a árvore de possibilidades, é possível chegar a algumas conclusões.

- Há apenas uma possibilidade de Jaime vencer os 3 jogos (GGG). Como a probabilidade de Jaime ganhar cada jogo é constante (p), a probabilidade de ele ganhar os 3 jogos é dada por: $p \cdot p \cdot p = p^3$
- Há apenas uma possibilidade de Jaime não ganhar nenhum jogo (NNN). A probabilidade de isso ocorrer é dada por: $q \cdot q \cdot q = q^3$
- Jaime pode ganhar 2 jogos e não ganhar 1 de 3 maneiras (GGN, GNG, NGG); esse número de possibilidades é o número de permutações de 2 vitórias e 1 derrota, ou seja, pode ser calculado por $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$. Assim, a probabilidade de Jaime ganhar 2 jogos e não ganhar 1 é dada por: $3 \cdot p \cdot p \cdot q = 3 \cdot p^2 \cdot q^1$
- Jaime pode ainda ganhar 1 jogo e não ganhar 2; nesse caso, também há 3, ou P_3^2, maneiras (GNN, NGN, NNG). Assim, a probabilidade de Jaime ganhar 1 jogo e não ganhar 2 é dada por: $3 \cdot p \cdot q \cdot q = 3 \cdot p^1 \cdot q^2$

Vamos considerar agora que Jaime disputará 5 jogos e calcular a probabilidade de ele vencer 3 dessas 5 partidas, considerando que, para cada jogo, a probabilidade de Jaime vencer é $p = \frac{1}{2}$, e a probabilidade de não vencer é $q = \frac{1}{2}$.

Antes de calcular a probabilidade de ocorrer o evento E ("Jaime vencer 3 partidas em 5 disputadas"), vamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A ("Jaime vencer as 3 primeiras partidas e perder as 2 seguintes").

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Vencer as 3 primeiras partidas.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Perder as 2 últimas partidas.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODENA

Como Jaime pode vencer quaisquer 3 das 5 partidas disputadas, devemos contar o total de permutações dos resultados das 5 partidas, sendo 3 vitórias e 2 derrotas. Assim, determinamos de quantas maneiras podem ocorrer 3 vitórias e 2 derrotas em 5 partidas disputadas:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 10$$

Portanto, a probabilidade de Jaime vencer 3 das 5 partidas disputadas é:

$$P(E) = P_5^{3,2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 31{,}25\%$$

A situação apresentada é um exemplo de aplicação do **método binomial** para o cálculo de probabilidades. Nela, há somente duas possibilidades com suas respectivas probabilidades: vencer (p) ou não vencer (q). Existem outras situações que também podem ser resolvidas por esse método, tais como: o lançamento de uma moeda (cara ou coroa), o sexo de um futuro filho (masculino ou feminino), um teste com questões do tipo verdadeiro-falso, entre outras.

Se para determinado evento há somente duas possibilidades, sucesso ou insucesso, cujas probabilidades são, respectivamente, p e q, temos, para a probabilidade de ocorrer m vezes o resultado procurado, em um total de n repetições do experimento, a expressão:

$$P(E) = P_n^{m,\,n-m} \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ ou seja, } P(E) = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Exemplo

Vamos calcular a probabilidade de um casal ter, em um total de 6 filhos, 5 meninos e 1 menina.

Para cada nascimento, temos: $P(\text{menino}) = P(\text{menina}) = \frac{1}{2}$

Para 5 meninos, em 6 nascimentos, temos:

$$P = P_6^{5,1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{6!}{5! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{64} = \frac{3}{32} \simeq 9{,}4\%$$

Portanto, a probabilidade é, aproximadamente, 9,4%.

Exercício resolvido

R12. Certo jogador de basquete consegue média de 90% de acerto em lances livres. Sofrendo uma falta, esse jogador tem direito a 3 lances livres. Qual é a probabilidade de ele acertar pelo menos um lance livre?

▸ **Resolução**

- $P(\text{acerto}) = 90\%$
- $P(\text{erro}) = 10\%$
- E: acertar pelo menos um lance livre
- E_n: acertar n lances livres

Como $P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$ ou $P(E) = 1 - P(E_0)$, temos:

$$P(E) = 1 - \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^0 \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^3$$

$$P(E) = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1.000} = 99{,}9\%$$

Logo, a probabilidade de ele acertar pelo menos um lance em três é de 99,9%.

Exercícios propostos

38. Comentar com os alunos que, no contexto utilizado, não viciado é sinônimo de honesto.

Registre as respostas em seu caderno.

38. Qual é a probabilidade de sair coroa 3 vezes em 7 lançamentos de uma moeda não viciada? $\simeq 27{,}3\%$

39. Uma empresa que empacota farinha deixa passar 0,1% do produto embalado com peso abaixo do limite legal. Qual é a probabilidade aproximada de um consumidor comprar 3 pacotes e nenhum deles ter peso abaixo do limite? $\simeq 99{,}7\%$

40. Um casal planeja ter 4 filhos. Sabendo que a probabilidade de ter um menino é igual à de ter uma menina, calcule a probabilidade de terem:

a) quatro meninos; $\frac{1}{16}$

b) duas meninas e dois meninos; $\frac{3}{8}$

c) um menino e três meninas. $\frac{1}{4}$

O exercício **40** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT205** (competência **2**) da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e pode ser discutido em um trabalho interdisciplinar com o professor daquela área, tendo por base os fundamentos da Genética, ramo em que a probabilidade tem grande importância.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

41. Um banco atribui, por um processo randômico (aleatório), a senha das contas de seus clientes. A senha é formada por 6 caracteres alfanuméricos, isto é, os caracteres podem ser escolhidos entre 26 letras e 10 algarismos. Usando uma calculadora, calcule a probabilidade aproximada de uma senha ter:

a) apenas letras; 14,2%

b) apenas números; 0,05%

c) 4 letras e 2 números; 31,5%

d) 2 letras e 4 números; 4,7%

e) pelo menos uma letra; 99,9%

f) pelo menos um número. 85,8%

42. Em cobaias de um experimento, o pelo preto é dominante sobre o branco. Os pais de uma ninhada de 5 filhotes são heterozigotos pretos, de modo que, para cada filhote, a probabilidade de ser preto é $\frac{3}{4}$ e a de ser branco é $\frac{1}{4}$.

ROSA JAY/ SHUTTERSTOCK

MICHIEL DE WIT/ SHUTTERSTOCK

Determine a probabilidade de os filhotes serem:

a) 3 brancos e 2 pretos; a) $\frac{45}{512}$

b) 2 brancos e 3 pretos; b) $\frac{135}{512}$

c) 1 branco e 4 pretos; c) $\frac{405}{1.024}$

d) todos pretos. d) $\frac{243}{1.024}$

5 Frequência relativa e probabilidade

Em algumas situações, pode-se determinar a probabilidade de ocorrer um evento usando a frequência relativa.

Para calcular o valor da apólice de seguros de um automóvel, por exemplo, leva-se em conta, entre outros fatores, a probabilidade de um veículo daquele modelo ser roubado. Para determinar essa probabilidade, realiza-se um levantamento do número de carros roubados daquele modelo em relação ao total de carros do mesmo modelo.

Considere que determinado modelo, em certo período, teve 38 carros roubados a cada 1.000. Escrevendo essa relação em forma de razão, temos:

$$p = \frac{38}{1.000} = \frac{3,8}{100} = 3,8\%$$

Portanto, podemos afirmar que a probabilidade de um carro desse modelo ser roubado, no período estudado, era de 3,8%, ou seja, 38 carros em 1.000.

A frequência relativa também pode auxiliar no cálculo da probabilidade de, por exemplo, um medicamento em estudo fazer o efeito desejado, acontecer um acidente aéreo ou haver alguma sequela após determinado tipo de cirurgia.

Em situações como essas é possível considerar que a frequência relativa equivale à "probabilidade de ocorrer o evento".

Porém, a frequência relativa é usada com maior eficiência no cálculo de probabilidades em situações nas quais há uma quantidade grande de experimentos. Se, por exemplo, lançarmos um dado duas vezes e sair a face 1 nos dois lançamentos, a frequência relativa é $f_r = \frac{2}{2} = 100\%$. Nesse caso, não podemos usar a frequência como a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, pois o número de experimentos é muito pequeno.

Se lançarmos 50 vezes o dado e sair a face 1 em 12 lançamentos, a frequência relativa será $f_r = \frac{12}{50} = 24\%$. Ainda com esse número de experimentos não é possível usar a frequência relativa no cálculo da probabilidade em questão.

Porém, se em 100.000 lançamentos sair a face 1 em 16.595, teremos como frequência relativa $f_r = \frac{16.595}{100.000} = 16,595\%$. Nesse caso, o número de ocorrências já é grande o suficiente para que a frequência seja usada na determinação da probabilidade.

Número de lançamentos	Frequência absoluta de ocorrência da face 1	Frequência relativa
2	2	100%
50	12	24%
100.000	16.595	16,595%

Observação

Para calcular a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, dividimos o número de elementos n(E) do evento E (face 1) pelo número de elementos n(S) do espaço amostral S (faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6).

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6} = 0,1666...$

A probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado é aproximadamente 16,7%.

STUART MCCLYMONT/STONE/GETTY IMAGES

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R13. Em 150 lançamentos de uma moeda, obteve-se o resultado mostrado na tabela ao lado.

Face	Número de vezes
Cara	86
Coroa	64

a) Construir uma tabela de frequências.

b) Verificar se o modelo probabilístico que estabelece probabilidades iguais para "cara" e "coroa" parece adequado para esse caso.

▸ **Resolução**

a) Calculando as frequências relativas, podemos completar a tabela.

Face	Número de vezes (frequência absoluta)	Frequência relativa
Cara	86	$\simeq 57{,}3\%$
Coroa	64	$\simeq 42{,}7\%$

b) Como as frequências são diferentes (face "cara": aproximadamente 57,3%; face "coroa": aproximadamente 42,7%), o evento não é equiprovável; então, o modelo probabilístico que estabelece probabilidades iguais não é adequado.

Podemos inferir duas possibilidades:

- a moeda não é "honesta", pois a chance de sair face "cara" é maior;
- a quantidade de experimentos foi insuficiente para usar a frequência relativa na determinação da probabilidade de ocorrer face "cara" ou "coroa".

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

Ver resolução no Guia do professor.

43. Um dado foi lançado 1.000 vezes com o resultado mostrado na tabela abaixo.

Face	Número de vezes
1	150
2	175
3	163
4	166
5	174
6	172

a) Construa uma tabela de frequências.

b) Analise se, com essa quantidade de lançamentos, podemos considerar a frequência relativa como a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado. Elabore uma conclusão.

44. Uma grife de moda jovem fez o levantamento, no decorrer de um mês, da quantidade de camisetas que vendeu.

Cor da camiseta	Quantidade vendida
Branca	4.200
Preta	3.600
Azul	1.200
Vermelha	1.800
Rosa	600
Amarela	600

Ver resolução no Guia do professor.

a) Construa uma tabela de frequências.

b) Quantas camisetas brancas ou pretas foram vendidas ao todo? 7.800

c) Que porcentagem do total de camisetas vendidas pela grife representa a venda de camisetas pretas? 30%

d) Se uma das camisetas vendidas é selecionada ao acaso, qual é a probabilidade de que ela seja amarela? 5%

45. Uma pesquisa realizada com os moradores de um bairro próximo a uma indústria siderúrgica apresentou o seguinte resultado:

Porcentagem da população	Olhos irritados	Coriza	Tosse	Problemas respiratórios
10%	X	X	—	—
15%	—	X	X	X
5%	X	X	X	X
45%	X	—	—	—
25%	—	—	—	—

As pessoas que apresentam pelo menos três desses sintomas são aconselhadas a fazer um acompanhamento médico.

Qual é a probabilidade de encontrar, nesse bairro, pessoas que necessitam de acompanhamento médico? 20%

46. Uma seguradora fez uma pesquisa sobre três modelos de carros. A cada 10.000 carros segurados, registram-se os seguintes resultados:

Modelo do carro	Quantidade de carros roubados	
A	380	3,8%
B	289	2,89%
C	254	2,54%

Com base nesses dados, calcule a probabilidade de roubo para cada modelo citado.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Essa seção busca favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT311**, **EM13MAT312** e **EM13MAT511** da BNCC com exercícios complementares sobre os temas desenvolvidos durante o capítulo.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Na resolução do exercício 1, chamar a atenção dos alunos para o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do *pensamento computacional*. É importante que eles observem e concluam que os procedimentos estudados anteriormente para solucionar outros problemas podem ser replicados nesses exercícios complementares.

Aplicação

1. Em um grupo de estudo, há 2 meninos e 3 meninas. Um professor pede ao grupo que escolha dois alunos para a apresentação do trabalho. Determine o espaço amostral da situação "escolher dois alunos do grupo". Em seguida, determine os eventos:

a) escolher duas meninas;
b) escolher uma menina e um menino;
c) escolher dois meninos.

Ver resolução no Guia do professor.

2. De um baralho o comum de 52 cartas, uma é retirada ao acaso. Determine os eventos: Ver resolução no Guia do professor.

a) a carta retirada é de espadas;
b) a carta retirada é um número menor que 5 e maior que 2;
c) a carta retirada é um ás.

3. A tabela apresenta o tempo de permanência de determinado número de clientes no restaurante Que Delícia no decorrer de um dia.

Tempo de permanência de alguns clientes no restaurante	
Tempo (min)	**Número de clientes**
1 a 10	11
11 a 20	8
21 a 30	9
31 a 40	7
41 a 50	13
51 a 60	2

Fonte: Restaurante Que Delícia.

a) Qual é a probabilidade de um cliente ter ficado no restaurante de 11 a 20 minutos? 16%
b) Qual é a probabilidade de um cliente não ter ficado no restaurante mais do que 40 minutos? 70%

4. Uma prova é composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada uma, sendo apenas uma correta. Qual é a probabilidade de um aluno, "chutando" as respostas, acertar todas as questões? $\frac{1}{5^{10}}$

5. Silvana vai a uma sorveteria que oferece 3 opções de picolé à base de fruta e 5 que não contêm fruta. Ela quer comprar 2 picolés, mas fica muito indecisa quanto aos sabores. Como gosta de todos igualmente, resolve pegar 2 sabores diferentes ao acaso, sem escolher. Qual é a probabilidade de que:

a) os 2 sorvetes sejam à base de fruta? $\frac{3}{28}$
b) nenhum dos sorvetes seja à base de fruta? $\frac{5}{14}$
c) somente 1 dos sorvetes seja à base de fruta? $\frac{15}{28}$

6. Jogando-se dois dados, qual é a probabilidade de sair 5 em pelo menos um deles ou de o produto entre os resultados ser igual a 12? $\frac{5}{12}$

7. (Mackenzie-SP) Numa urna, há bolas brancas numeradas de 1 a 10, bolas pretas numeradas de 11 a 20 e bolas vermelhas numeradas de 21 a 30. Uma pessoa aposta que, se escolher uma bola ao acaso, essa bola será branca ou terá um número primo. A probabilidade de essa pessoa ganhar a aposta é: alternativa c

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{7}{15}$ **c)** $\frac{8}{15}$ **d)** $\frac{9}{20}$ **e)** $\frac{11}{30}$

8. (UEL-PR) Numa loteria, são sorteados 5 números de 1 a 20, e é possível ganhar com 3, 4 ou 5 acertos. Cada apostador só pode escolher 5 números. Qual a probabilidade de um apostador acertar 4 dos 5 números sorteados? alternativa c

a) $\frac{1}{50^4}$ **b)** $\frac{4}{50^4}$ **c)** $\frac{75}{15.504}$ **d)** $\frac{15}{15.504}$ **e)** $\frac{5}{15.504}$

9. (Enem) A figura I ao lado mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

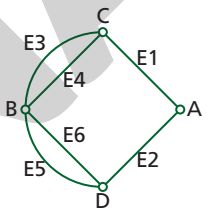


figura I

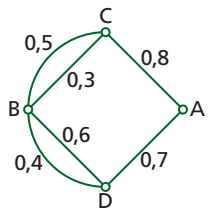


figura II

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível.

O melhor trajeto para Paula é: alternativa d

a) E1E3 **b)** E1E4 **c)** E2E4 **d)** E2E5 **e)** E2E6

10. (Enem) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é: alternativa d

a) $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{5}{14}$
b) $\frac{1}{5}$ **d)** $\frac{5}{7}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

11. A comissão de formatura da escola de Marcos promoveu uma rifa com 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Sabendo-se que o bilhete sorteado é múltiplo de 4 e que Marcos tem o bilhete de número 44, qual é a probabilidade de ele ser o premiado? 4%

12. Em certa cidade, 20% dos habitantes têm carro da marca A. Se 8 habitantes forem selecionados ao acaso, qual é a probabilidade aproximada de 3 deles terem carro da marca A? 14,68%

13. De acordo com as estatísticas do clube em que joga, a probabilidade de Paulo fazer um gol de pênalti é 75%. Qual é a probabilidade de ele acertar 4 de 5 pênaltis cobrados? $\simeq$ 40%

14. Em uma fábrica, a máquina X produz 35% do total da produção, a máquina Y, 40%, e a máquina Z, o restante. As produções de X, Y e Z apresentam, respectivamente, 2%, 1,5% e 0,8% de defeito. Em um dia em que a produção total das três máquinas foi de 20.000 peças, verificou-se que uma peça, separada ao acaso, era defeituosa. Qual é a probabilidade de essa peça ter sido produzida pela máquina X? $\frac{7}{15}$

15. (UFC-CE) Num certo país, 8% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas à análise detalhada. Entre estas, verificou-se que 15% são fraudulentas; e, entre as não suspeitas, 5% são fraudulentas.

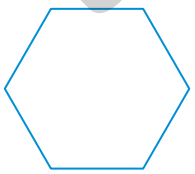
a) Se uma declaração é separada ao acaso, qual a probabilidade de ser suspeita e fraudulenta? 1,2%

b) Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ter sido suspeita? $\simeq$ 20,7%

16. O código de acesso de um cartão de crédito é formado por 6 dígitos. Cada dígito é um número natural de 0 a 9. Um cliente que teve o cartão extraviado receia que alguém descubra o código. Calcule a probabilidade de alguém acertar o código do cartão em um total de 1.000 tentativas, aleatórias e distintas. 0,1%

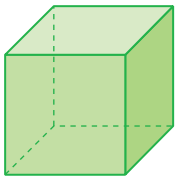
Aprofundamento

17. Escolhem-se, aleatoriamente, 3 dos 6 vértices do hexágono regular representado ao lado. Calcule a probabilidade de os vértices escolhidos formarem um triângulo equilátero. $\frac{1}{10}$



ADILSON SECCO

18. Sorteando-se ao acaso 2 vértices quaisquer de um cubo, determine a probabilidade de esses vértices não estarem na mesma face. $\frac{1}{7}$



ADILSON SECCO

19. Uma pesquisa sobre grupos sanguíneos, na qual foram testadas 10.000 pessoas, revelou que 4.212 pessoas têm o antígeno A, 3.723 têm o antígeno B e 3.077 não têm antígeno algum. Qual é a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ter os dois antígenos? 10,12%

20. Em um grupo de 200 alunos de língua estrangeira, todos estudam pelo menos uma das línguas oferecidas. Desse grupo:

- 99 estudam italiano;
- 115 estudam japonês;
- 87 estudam alemão;
- 44 estudam italiano e japonês;
- 38 estudam alemão e japonês;
- 31 estudam italiano e alemão.

Sabendo que há alunos que estudam as 3 línguas, resolva as questões a seguir.

a) Construa um diagrama de Venn para representar a situação descrita. Ver resolução no Guia do professor.

b) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele falar as 3 línguas? $\frac{3}{50}$

c) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele falar exatamente 2 línguas? $\frac{77}{200}$

d) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele falar italiano, dado que também fala japonês? $\frac{44}{115}$

e) Se um aluno é escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele falar alemão, dado que também fala japonês? $\frac{38}{115}$

Desafio

21. (UFRJ) Uma caixa contém bombons de nozes e bombons de passas. O número de bombons de nozes é superior ao número de bombons de passas em duas unidades. Se retirarmos, ao acaso, dois bombons dessa caixa, a probabilidade de que ambos sejam de nozes é $\frac{2}{7}$.

a) Determine o número total de bombons. 22 bombons

b) Se retirarmos, ao acaso, dois bombons da caixa, determine a probabilidade de que sejam de sabores distintos. $\frac{40}{77}$

22. (Enem) Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por 3, 4, 6, 8 ou 10 doses do medicamento, de acordo com o risco que o paciente pretende assumir. Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente? alternativa b

a) 3 doses **b)** 4 doses **c)** 6 doses **d)** 8 doses **e)** 10 doses

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

O exercício complementar **22** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106**, uma vez que com essa atividade o aluno poderá identificar uma ideia de uma situação em que um paciente deve fazer escolhas levando em conta os riscos probabilísticos.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de [redacted], do qual qualquer subconjunto é chamado de [redacted]. alternativa c

a) amostra; evento
b) espaço; amostra
c) espaço amostral; evento
d) evento; fenômeno aleatório

2. Considere o experimento "uma bola é retirada ao acaso de uma urna contendo 3 bolas azuis e 4 bolas vermelhas". Sendo A o evento "retirar bola azul" e V o evento "retirar bola vermelha", o espaço amostral (S) desse experimento e o valor de n(S) são, respectivamente: alternativa a

a) $\{A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3, V_4\}$; 7
b) $\{A, V\}$; 2
c) $\{A\}$; 1
d) $\{V\}$; 1

3. De um baralho honesto de 52 cartas, uma carta é retirada ao acaso. Sendo E o evento "retirar uma carta de copas", então n(E) e $P(E)$ são, respectivamente: alternativa b

a) 10 e $\frac{1}{2}$ **b)** 13 e $\frac{1}{4}$ **c)** 26 e $\frac{1}{2}$ **d)** 52 e $\frac{1}{4}$

4. No experimento "escolher 6 números na Mega-Sena", considere os eventos A "os números sorteados são pares ou ímpares" e B "os números sorteados são negativos". Podemos dizer que A é um evento [redacted] e B é um evento [redacted]. alternativa d

a) aleatório; elementar
b) simples; impossível
c) certo; simples
d) certo; impossível

5. Lançando-se um dado cúbico honesto, a probabilidade de ocorrer um número par é: alternativa b

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{6}$

6. Uma cartela contém 20 pilhas. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 5 pilhas dessa cartela e verificar se elas estão de acordo com as normas de qualidade. O número de elementos do espaço amostral desse experimento é dado por: alternativa c

a) P_5 **b)** P_{20}^5 **c)** $C_{20,5}$ **d)** $A_{20,5}$

7. No sorteio de um número natural de 1 a 100, a probabilidade de obter um número múltiplo de 10 ou um número múltiplo de 15 é: alternativa d

a) $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{3}{50}$ **c)** $\frac{3}{100}$ **d)** $\frac{13}{100}$

8. Uma pesquisa apontou que 9 entre 10 mulheres preferem o sabonete X. Sorteando-se duas mulheres ao acaso, a probabilidade de que nenhuma use o sabonete X é: alternativa b

a) $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{100}$ **c)** $\frac{9}{10}$ **d)** $\frac{9}{100}$

9. Sabe-se que a soma dos números obtidos em um lançamento de dois dados honestos é 7. A probabilidade de ter ocorrido a face 4 em um deles é: alternativa a

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{12}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $\frac{1}{2}$

10. Em cada 10 nutricionistas, 8 recomendam a marca X de certo produto. Três nutricionistas são solicitados a dar sua opinião a respeito dessa marca. A probabilidade de que nenhum recomende a marca X é: alternativa b

a) $\frac{64}{125}$ **b)** $\frac{1}{125}$ **c)** $\frac{124}{125}$ **d)** $\frac{23}{125}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Determinar o espaço amostral, os eventos desse espaço e calcular o número de elementos desses conjuntos.	X	X	X	X		X				
Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento.			X		X		X	X	X	X
Trabalhar com situações-problema que envolvam a teoria das probabilidades.								X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	126 a 128	126 a 128	126 a 131	126 a 128	128 a 131	126 a 128	128 a 135	128 a 138	128 a 138	128 a 142

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Além de trabalhar o tema contemporâneo **saúde** e as competências gerais **1** e **2** da BNCC, o infográfico dessa seção pode ser explorado de modo interdisciplinar com um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Nesse sentido, é favorecido o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT208** e **EM13CNT303** que fazem parte das competências **2** e **3**, respectivamente, dessa área. Pode-se, por exemplo, trabalhar o texto e as atividades com o propósito de compreender parte da evolução da biologia com análise na história humana.

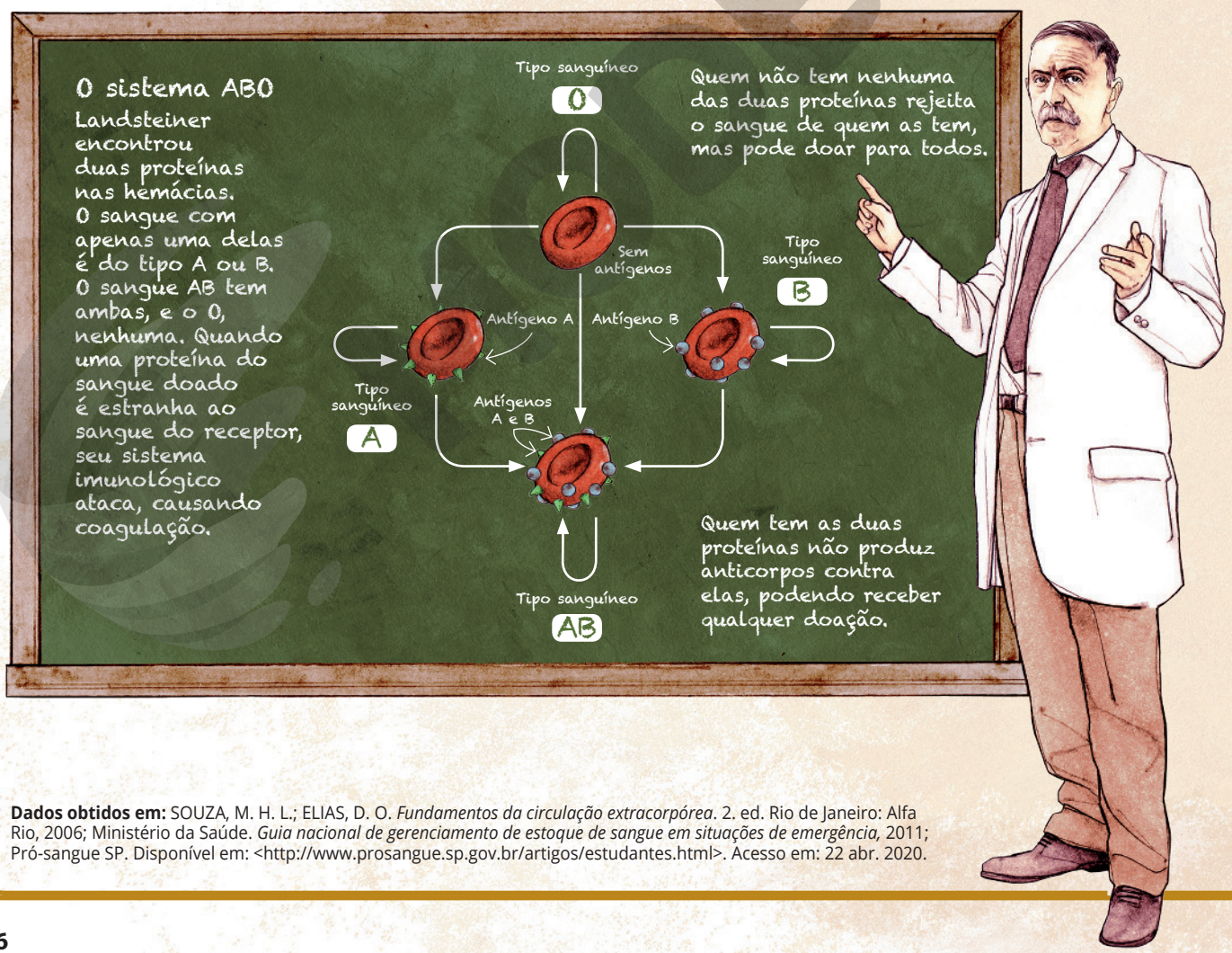
Combinação vital

Depois de séculos de tentativas e de erros fatais, a transfusão de sangue tornou-se uma das mais importantes técnicas da medicina com a contribuição de várias ciências, entre elas a Matemática.

Diversas experiências com transfusão sanguínea foram registradas na Europa a partir do Renascimento, muitas delas desastrosas, como a que resultou na morte de um homem que havia recebido sangue de carneiro em 1667 na França.

Apesar de fatalidades como essa, algumas tentativas aleatórias demonstraram que o sangue de uma pessoa podia salvar outra, embora não se soubesse por que isso às vezes funcionava, outras vezes não.

A razão só foi descoberta em 1900 pelo médico austríaco Karl Landsteiner (1868-1943). Combinando diversas amostras, ele e seus auxiliares perceberam que existem quatro tipos principais de sangue humano, sendo que a mistura de alguns resulta em coagulação. Foi, então, proposto o sistema de classificação ABO.



Dados obtidos em: SOUZA, M. H. L.; ELIAS, D. O. *Fundamentos da circulação extracorpórea*. 2. ed. Rio de Janeiro: Alfa Rio, 2006; Ministério da Saúde. *Guia nacional de gerenciamento de estoque de sangue em situações de emergência,* 2011; Pró-sangue SP. Disponível em: <http://www.prosangue.sp.gov.br/artigos/estudantes.html>. Acesso em: 22 abr. 2020.

3. Essa atividade favorece o desenvolvimento do tema contemporâneo educação em direitos humanos, já que, ao fazer uma campanha na comunidade sobre doação voluntária de sangue, os alunos se envolverão com um assunto social de extrema importância para a população.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Karl Landsteiner e seus colaboradores propuseram o sistema de classificação ABO do sangue humano. Explique esse sistema.
Ver resolução no Guia do professor.

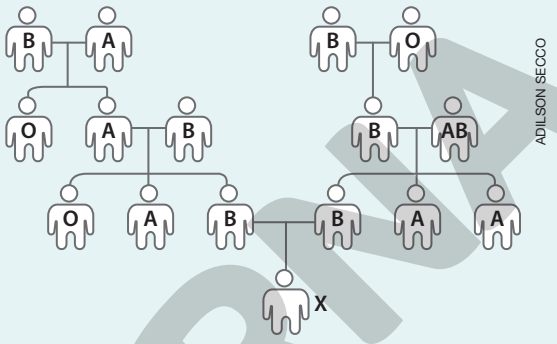
2. Monte no caderno uma tabela como a do exemplo abaixo, relacionando as doações de sangue possíveis. Ver resolução no Guia do professor.

Doação de sangue								
Receptores \ Doadores	AB+	AB–	A+	A–	B+	B–	O+	O–
AB+	X	X	X	X	X	X	X	X
AB–		X						

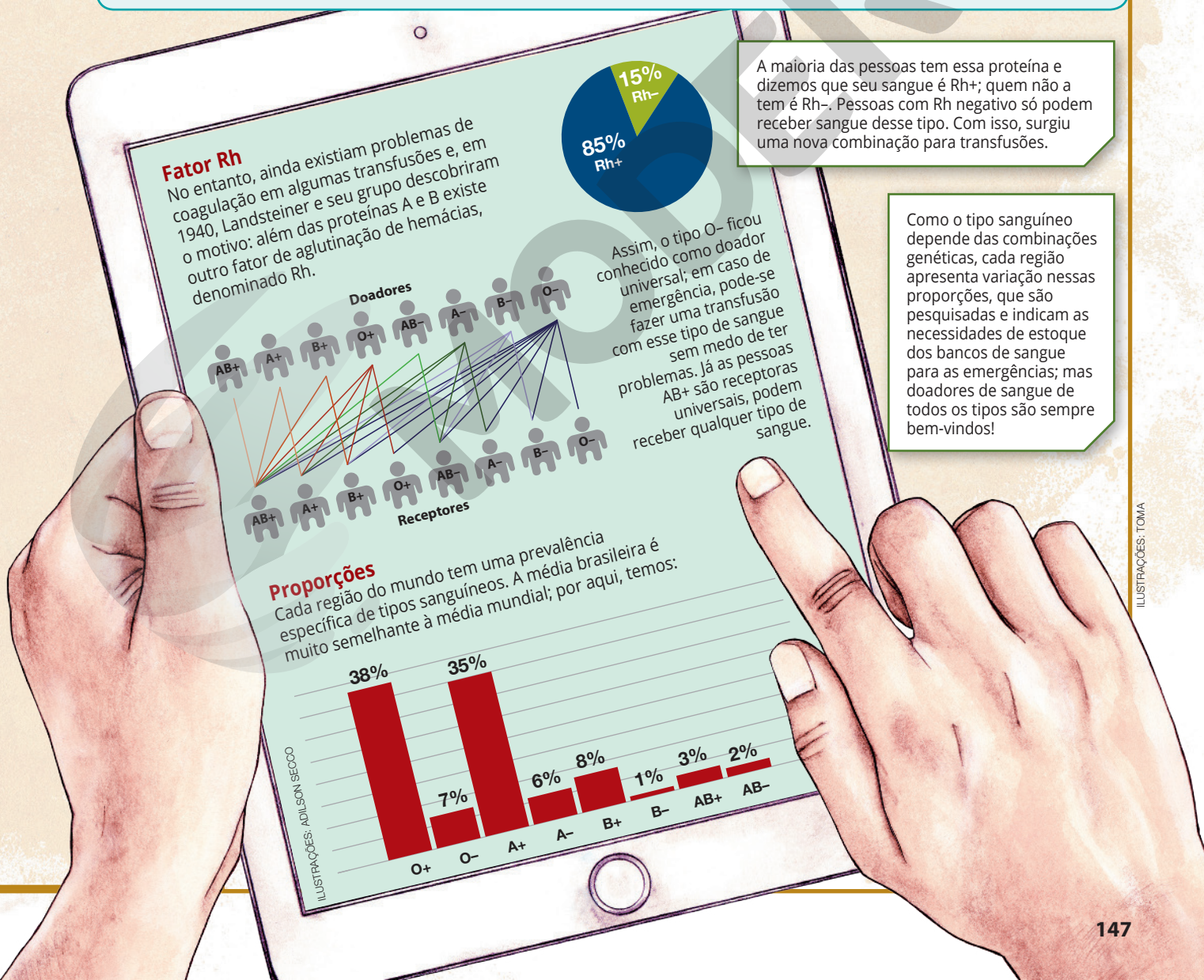
3. Pesquise sobre doação de sangue em sua cidade determinando: os pontos de coleta, o tipo de sangue mais procurado, as restrições para doar sangue, a importância de cada um conhecer seu tipo sanguíneo etc. Depois, com a classe, monte cartazes e cartilhas sobre a doação voluntária e faça uma campanha na sua comunidade.

4. Faça uma pesquisa sobre a aplicação da probabilidade à Genética (no sistema ABO), monte uma apresentação e resolva o problema a seguir. Apresente a solução para os demais colegas de classe.

- O esquema a seguir mostra os tipos sanguíneos de uma família. Com base nessas informações, calcule a probabilidade de o descendente X ter sangue tipo O. Ver resolução no Guia do professor.



ADILSON SECCO



ILUSTRAÇÕES: TOMA

CÓPIA

Considerando a BNCC, esta seção visa desenvolver as competências gerais **4**, **5**, **6** e **9**, pois os alunos poderão utilizar a linguagem digital de modo crítico, significativo, reflexivo e ético em práticas sociais e dessa forma se expressar e disseminar informações. A ideia de um orçamento faz com que o aluno reflita sobre vários aspectos, principalmente aqueles alinhados ao exercício da cidadania e aos seus projetos de vida.

Educação financeira

Metas e projetos

O trabalho deve ser realizado em grupo, isso pode facilitar o exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação.
São desenvolvidas também as competências específicas de Matemática **1**, **2** e **3** e a habilidade **EM13MAT203**. Além disso, a seção favorecerá o desenvolvimento do tema contemporâneo **educação financeira** e **educação para o consumo**. Ver comentários e respostas no Guia do professor.

No decorrer da seção será apresentada uma situação por meio de um diálogo. Leia o diálogo, reflita sobre a situação que ele traz e discuta com os colegas cada um dos trechos apresentados.

Objetivos

Analisar uma situação que requer um planejamento financeiro para ser realizada; compreender as etapas de organização de um projeto; estabelecer prioridades; harmonizar desejos com necessidades; desenvolver estratégias para adequar-se à realidade financeira; planejar-se financeiramente para realizar grandes projeto.

Para começar e pensar

No próximo mês, Joana completará 16 anos e deseja comemorar seu aniversário com alguns amigos. Ela pensou em fazer uma festa em casa e procurou sua mãe para verificar a possibilidade de realizar o evento.

Joana: — Mãe, gostaria de comemorar meu aniversário com uma festa aqui em casa. Quero reunir alguns amigos, servir algumas comidinhas gostosas, conversar e dançar muito! O que você acha?

Mônica: — Uma festa? Precisamos estudar as possibilidades, filha. Quantas pessoas você quer convidar? Que tipo de comida pretende servir? O que você pensou sobre a música?

Joana: — Ainda não pensei em nada disso... acho que vou convidar alguns amigos da escola, meus primos e os amigos aqui do bairro. Comida pode ser qualquer coisa, desde que seja gostosa... hahahaha. E música? Tem que ser música para dançar!

Mônica: — Precisamos detalhar melhor isso... Para começar, vamos ver a quantidade de pessoas que você pretende convidar e, depois, faremos um orçamento da festa. Faça uma lista de convidados para começarmos.

Joana: — Combinado!

1. Você sabe o que significa "fazer um orçamento"?

2. Se você fosse preparar uma festa de aniversário, quais itens consideraria indispensáveis para realizá-la? Responda a seguir.

a) Decida quantas pessoas seriam convidadas, se haveria decoração e música, quais comidas e bebidas seriam servidas, quais materiais seriam comprados e quais serviços seriam contratados. Faça uma lista dos convidados e de todos os itens que julgar necessários.

b) Utilizando uma planilha eletrônica, liste os itens elencados no item **a** desta atividade e, para cada um deles, coloque uma estimativa de custo. Você pode pesquisar esses valores na internet e fazer uma média dos preços encontrados, ou ainda visitar locais que fornecem o produto ou serviço.

c) Qual é o orçamento total da festa?

CAIO BORACINI

Para discutir

3. Organizem-se em grupos com até cinco integrantes e comparem os itens listados no item **a** da atividade **2**. Discutam quais itens são prioritários e quais podem ser descartados, se for necessário. Comparem também os preços individuais dos produtos e tentem chegar a um orçamento financeiramente viável ao grupo. Produzam um novo orçamento com os itens e os custos acordados por todos.

MODERNA

Leia o próximo trecho do diálogo sobre a preparação da festa de aniversário da Joana.

No dia seguinte, Joana entregou a lista de convidados para sua mãe.

Joana: — Aqui está a lista de convidados, mãe! São 25 pessoas. Vou criar um grupo de mensagens com eles para começar a agitar a festa.

Mônica: — Espere um pouco, Joana! As prestações do carro comprometem boa parte da nossa renda mensal. Preciso analisar nossas despesas para verificar quanto podemos dispor para a festa. Além disso, precisamos ter uma ideia de qual será o custo total dessa festa.

Joana: — Sim! Eu já adiantei o orçamento para a festa. Veja!

	A	B	C	D	E
1	**Meu aniversário**			**Número de convidados:**	25
2					
3	**Produto**	**Valor unitário**	**Total**	**Observações**	
4	Música		R$ -	Não haverá gasto	
5	Sanduíche de metro (unidades)	R$ 50,00	R$ 250,00	1 sanduíche serve 5 pessoas	
6	Bolo (kg)	R$ 35,00	R$ 87,50	1 quilograma serve 10 pessoas	
7	Refrigerante/suco (litro)	R$ 4,00	R$ 40,00	10 litros serve 25 pessoas	
8	Descartáveis	R$ 10,00	R$ 50,00	1 *kit* para 5 pessoas	
9	Decoração		R$ 150,00		
10	**Total**		R$ 577,50		

Observação

O uso da planilha eletrônica auxilia muito na elaboração de orçamentos. Para obter o valor da célula C5, por exemplo, foi usada a fórmula =(E1/5*B5), sendo 5 a quantidade de convidados que 1 sanduíche de metro serve.

Utilizando fórmulas em uma planilha eletrônica, ao modificar um item (por exemplo, o número de convidados), todos os valores que dependem dessa informação serão recalculados. Isso facilita muito a elaboração de orçamentos!

Fórmulas utilizadas para encontrar os valores de C6, C7, C8 e C10, respectivamente: =(E1/10*B6); =(E1/25*10*B7); =(E1/5*B8); =SOMA(C5:C9)

Perguntar aos alunos o significado de cada componente das fórmulas utilizadas na planilha elaborada por Joana.

Joana: — Mãe, vamos anotar nossas despesas e receitas mensais em uma planilha eletrônica também. Isso vai ajudar a calcular quanto poderei usar em minha festa.

ILUSTRAÇÕES: CAIO BORACINI

	A	B
1	**Receitas e despesas da família durante o mês**	
2		
3	**Receitas**	
4	Salário de Mônica	R$ 2.475,30
5		
6	**Despesas**	
7	Aluguel	R$ 650,00
8	Energia elétrica	R$ 90,00
9	Água	R$ 50,00
10	Alimentação	R$ 400,00
11	Transporte/combustível	R$ 350,00
12	Parcela do carro	R$ 560,00
13	Extras (gás, farmácia, lazer etc.)	R$ 200,00
14	Reserva para as férias	R$ 100,00
15	**Total**	R$ 2.400,00
16		
17	**Disponível**	R$ 75,30

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Agora, responda às questões a seguir.

4. De acordo com os cálculos de Joana e Mônica, será possível realizar a festa?

5. Analisando o orçamento da família de Mônica, você acha que fazer um empréstimo ou parcelar os custos dos produtos e dos serviços necessários para a realização da festa são boas soluções? Discuta com seus colegas alternativas para a realização da festa.

6. Proponha alternativas para Joana comemorar seu aniversário de modo que não extrapole o orçamento de sua mãe.

Na semana seguinte, Joana encontrou com sua amiga Maria.

Maria: — Estou tão feliz, Joana! Finalmente vou ganhar meu celular novo.

Joana: — Mas o celular que você quer é muito caro! Seus pais mudaram de emprego?

Maria: — Não, mas estamos economizando há alguns meses e guardando dinheiro para isso. Conseguimos economizar nas contas de luz e telefone e até mesmo na alimentação, evitando desperdícios. Meus pais ficaram muito felizes com o resultado! Acho que conseguiremos o valor total no próximo mês.

Joana: — Ah, que ótimo, Maria! Vou tentar me organizar assim para meu próximo aniversário. Queria tanto fazer uma festa, mas acho que este ano não será possível. Temos uma economia para as nossas férias; minha mãe propôs utilizarmos esse dinheiro, mas ela vem sonhando com essa viagem há meses e não concordei. Não seria justo.

Maria: — Tente se planejar com antecedência, amiga. Vai dar certo! Estou torcendo por você!

CAIO BORACINI

Reflita e discuta com os colegas sobre as questões abaixo e, em seguida, responda-as.

7. Você sabe o que significa "fazer um planejamento financeiro"?

8. Por quais razões você faria um planejamento financeiro?

9. No próximo ano será o aniversário de 17 anos de Joana. Que estratégias ela pode utilizar para garantir a comemoração de seu aniversário?

Para finalizar

Reflita sobre a situação apresentada nesta seção e procure relacioná-la com seus projetos pessoais. Feito isso, responda às questões a seguir.

10. Você possui algum grande projeto que demande investimento financeiro? Se sim, qual(is) é(são)?

11. De que maneiras você poderia se organizar para colocar o seu grande projeto em prática?

12. Escolha uma meta para seu futuro. Faça um orçamento do investimento necessário para colocar essa meta em prática e aponte as estratégias que você utilizaria para alcançá-la.

A análise e produção de um orçamento familiar ou para aquisição de produtos e serviços utilizando planilhas eletrônicas favorecem o desenvolvimento da competência específica **1** da BNCC, já que os alunos utilizam procedimentos matemáticos para interpretar uma situação do cotidiano ao estudar a possibilidade e a viabilidade de se fazer uma festa. A utilização desses recursos tecnológicos para comunicar, de forma eficiente, os orçamentos que embasaram a tomada de decisão da família auxilia no favorecimento do desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, que vai ao encontro do desenvolvimento da habilidade **EM13MAT203**, já que os orçamentos foram utilizados como forma de planejamento. Todas essas práticas propiciam o desenvolvimento do tema contemporâneo **educação financeira** e **educação para o consumo**.

MODELO

Essa seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **5**, **7**, **8**, **9** e **10** das competências específicas **1**, **2**, **3** e **4** e da habilidade **EM13MAT202**, da BNCC.
Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Registre as respostas em seu caderno.

Pesquisa e ação

Pesquisa estatística

Objetivos

Realizar pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes; elaborar relatório com os resultados da pesquisa estatística realizada; divulgar pesquisa para a comunidade escolar.

Você já leu ou ouviu falar sobre os cuidados da saúde na adolescência? Será que os adolescentes brasileiros têm hábitos de vida saudáveis?

Durante o período da adolescência, o corpo sofre diversas transformações importantes e essenciais para a vida adulta, por isso desenvolver hábitos saudáveis pode auxiliar na obtenção e na manutenção de uma boa saúde física e mental. Além disso, hábitos consolidados na adolescência tendem a continuar ao longo de toda a vida do indivíduo, e muitos deles influenciam diretamente na saúde.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), "saúde é um estado de completo bem-estar físico, mental e social, e não apenas a mera ausência de doença ou enfermidade". A OMS declara também que "saúde mental é um estado de bem-estar no qual um indivíduo realiza suas próprias habilidades, pode lidar com as tensões normais da vida, pode trabalhar de forma produtiva e é capaz de fazer contribuições à sua comunidade". A boa saúde mental, entre outros fatores, depende da boa saúde física. Podemos dizer que ambas estão diretamente relacionadas. Entre os principais comportamentos que causam risco à saúde física estão ausência ou diminuição de atividades físicas, alimentação inadequada e rotina de sono desequilibrada. Esses comportamentos podem ser observados em pessoas de todas as faixas etárias; porém, nesta seção, vamos refletir sobre a presença deles entre os adolescentes.

Por diversas razões, muitos adolescentes deixam de fazer atividade física, seja na escola, durante as aulas de Educação Física ou fora dela. Além disso, há outros comportamentos de risco à saúde que muitas vezes fazem parte da rotina de alguns adolescentes: uso excessivo de celulares e computadores, rotina de sono inadequada e consumo exagerado de alimentos ricos em açúcares e gorduras. Esses comportamentos podem desencadear o desenvolvimento de doenças como hipertensão arterial, obesidade, entre outras.

Diante da importância desse tema, vamos realizar, nesta seção, uma pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes. Os dados da pesquisa serão analisados e apresentados em um relatório que poderá ser disponibilizado para toda a comunidade escolar, como forma de conscientizar sobre a importância de desenvolver um estilo de vida saudável nessa fase da vida.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

VECTORFUSIONART/SHUTTERSTOCK

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

A prática de atividades físicas é um dos principais hábitos que contribuem para a manutenção da saúde física e mental.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Etapa 1: Definição do escopo da pesquisa

1. O tema principal da pesquisa estatística é a saúde dos adolescentes. Organizem-se em grupos e definam os objetivos da pesquisa, ou seja, os problemas que se pretende detectar e analisar. Observem que dentro do tema da pesquisa poderão ser abordados tópicos como alimentação, atividade física, hábitos de sono, saúde mental, imagem corporal, entre outros.
2. Definam o público a ser pesquisado. Podem fazer parte dessa **população** os adolescentes da escola, do bairro, das famílias, lembrando que, de acordo com o Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), considera-se adolescente pessoas entre 12 e 18 anos. A pesquisa deverá ser **amostral**, ou seja, realizada com uma parte da população. Lembrem-se de que em uma pesquisa amostral é preciso escolher de forma estratégica a amostra, pois ela deve representar a população como um todo.

Etapa 2: Planejamento da pesquisa

3. Seguindo as orientações do professor, façam um cronograma para realizar a pesquisa estatística. Para isso, é preciso considerar qual é o tempo disponível para a realização da atividade completa, listar todas as tarefas que deverão ser cumpridas e estimar o tempo que será utilizado para concluir cada uma das etapas.
4. Definidos os objetivos e o cronograma, vocês poderão estruturar as perguntas que serão feitas na pesquisa. Nesse momento, são estipulados os tipos de variáveis, que poderão ser **quantitativas** (quando seus valores são expressos por números) e **qualitativas** (quando seus valores são expressos por atributos). Para formular as perguntas, o grupo deverá levantar informações sobre o tema em jornais, revistas, *sites* etc. O questionário construído poderá conter questões de múltipla escolha ou questões abertas. Lembrem-se de que as questões abertas permitem ao entrevistado expor sua opinião de forma mais completa. É importante criar perguntas simples, claras e que não gerem constrangimentos. Outra decisão a ser tomada pelo grupo antes da aplicação do questionário é se ele será respondido por escrito ou oralmente. Também é possível gravar as respostas; nesse caso, deve-se de pedir autorização para o entrevistado antes.

Etapa 3: Coleta de dados

5. Realizem as entrevistas de acordo com o cronograma criado pelo grupo. Os entrevistadores devem esclarecer as dúvidas que os entrevistados possam ter e precisam se manter imparciais em relação às perguntas do questionário.

Etapa 4: Organização e análise dos dados

6. Nesta etapa, vocês vão organizar os dados obtidos na pesquisa para que sejam analisados. Se os questionários possuírem perguntas abertas, vocês precisarão categorizar as respostas, ou seja, organizá-las em grupos de elementos com mesma propriedade. Durante a análise dos resultados obtidos, o grupo poderá iniciar uma primeira discussão de como os resultados da pesquisa serão divulgados, a fim de direcionar o trabalho da próxima etapa.
7. Utilizem uma planilha eletrônica para a construção de tabelas e gráficos com os dados obtidos na pesquisa. Esses itens serão importantes na análise dos dados. Utilizem também as **medidas de tendência central** (média aritmética, moda e mediana) e as **medidas de dispersão** (amplitude e desvio padrão) para analisá-los. Discutam os resultados obtidos para obter conclusões. As discussões realizadas nesta etapa são de extrema importância para preparar a próxima etapa.

E1: No que se refere ao escopo da pesquisa, há possibilidade de se fazer um trabalho de interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas tecnologias, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT207** e **EM13CNT301** da BNCC dessa área, as quais fazem parte das competências específicas **2** e **3**, respectivamente. Essas competências se relacionam com a competência geral **8** no que diz respeito ao autocuidado com a saúde física e emocional, já que ao final da pesquisa os alunos devem refletir também sobre o tema pesquisado. Todo o trabalho de pesquisa e a discussão a respeito da saúde dos adolescentes envolvem os temas contemporâneos **Saúde** e **Educação alimentar e nutricional**.

Se achar necessário, retome o conceito de população desenvolvido no capítulo **1** deste livro.

E2: A atividade de pesquisa estatística favorece diretamente o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** da BNCC, propiciando etapas de investigação, interpretação e análise de dados, permitindo aos alunos que tomem decisões a partir das informações coletadas. Essas competências que estão diretamente relacionadas com as competências gerais **4** e **7**.

Se achar conveniente, alerte os alunos de que a escolha de muitas perguntas abertas pode tornar a organização dos dados uma atividade mais complexa, mas é importante que eles façam pelo menos uma questão nesse modelo para que compreendam o modo de trabalhar com esse tipo de informação.

E3: Nessa etapa, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT202**, pois os alunos terão a oportunidade de planejar e executar uma pesquisa amostral sobre um tema relevante e comunicar os resultados por meio de relatórios com a interpretação de medidas central e de dispersão, estudadas no capítulo 3, utilizando ou não recursos tecnológicos.

Ressalte a importância de dois pilares do *pensamento computacional*, a **abstração** e o **reconhecimento de padrões**, na realização da etapa 4. Espera-se que os alunos percebam tal relevância ao organizar e tabular os dados coletados, bem como à análise destes para a obtenção de conclusões.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Etapa 5: Elaboração do relatório

8. Utilizem as conclusões da etapa anterior para compor o relatório, definindo, antes, como os resultados serão apresentados. Tabelas e gráficos são boas formas de apresentar os resultados, pois possibilitam leitura e interpretação das informações de forma rápida e fácil.

9. Para a elaboração do relatório é importante verificar, inicialmente, se os objetivos definidos foram alcançados; se não foram, é preciso avaliar o que pode ter inviabilizado isso. O relatório deverá trazer um breve histórico do problema, além de relatar cada etapa do processo. Também deverá apresentar gráficos e tabelas para fornecer informações ao leitor, de maneira precisa e eficiente, bem como comentários e discussões acerca dos problemas levantados.

10. O relatório poderá ser impresso ou digital. Se for digital, pode-se publicá-lo no *blog* da escola, caso ela possua um, para que todos possam acessá-lo; se for impresso, poderá ficar disponível na biblioteca da escola.

Etapa 6: Apresentação

11. Combinem com o professor o dia e o local para apresentar os resultados da pesquisa à comunidade escolar. Nesse dia, vocês poderão mostrar ao público as principais informações e conclusões do relatório. Tabelas e gráficos enriquecem a apresentação, pois são maneiras eficientes de comunicar os resultados. É interessante, também, mostrar outras pesquisas referentes a essa temática, a fim de comparar e discutir os resultados.

12. É importante que todos os integrantes do grupo participem da apresentação, não só mostrando o material, mas fazendo intervenções em momentos adequados. Relatem, de forma criteriosa, como foi elaborada cada etapa da pesquisa, desde a delimitação dos objetivos até o preparo da apresentação. Caso o relatório tenha sido disponibilizado na internet, informem o endereço eletrônico para que os interessados possam ler o documento na íntegra.

Etapa 7: Avaliação e síntese do trabalho realizado

Somente o item **14** deverá ser feito individualmente.

13. Reúnam-se nos grupos para avaliar o trabalho realizado. Nesse momento, vocês poderão discutir os itens a seguir e outros que julgarem pertinentes.

- O que vocês acharam da pesquisa estatística realizada?
- Os objetivos da pesquisa ficaram claros?
- Como vocês avaliam o relatório? Foram apresentadas todas as informações relevantes sobre a pesquisa?
- Vocês acreditam que, ao ler o relatório, os leitores, em especial os adolescentes, podem se conscientizar sobre o tema?
- O grupo trabalhou de forma colaborativa?
- Quais pontos poderiam ser melhorados?

14. Faça também uma avaliação sobre sua participação nas diversas etapas da pesquisa. Para nortear essa autoavaliação, responda às questões a seguir e, ao final, produza um texto que reflita sua participação no trabalho.

- Participei das etapas de realização da pesquisa estatística?
- Tive dificuldade em trabalhar de forma colaborativa?
- Houve dificuldades durante a organização e a análise dos dados da pesquisa? Quais foram essas dificuldades?
- Propus ideias, sugestões e mudanças durante o processo?
- Participei das discussões, da pesquisa e da elaboração do relatório?
- Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
- Houve dificuldades durante o trabalho? Quais foram as dificuldades? Como busquei resolvê-las?
- Compreendi a importância das pesquisas estatísticas e como elas podem auxiliar na análise e na solução de problemas?
- O que aprendi durante a realização das etapas desta seção?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

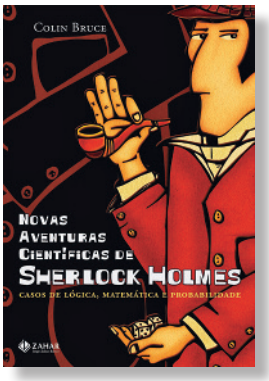
MODERNA

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre tantas outras.

Livros

REPRODUÇÃO



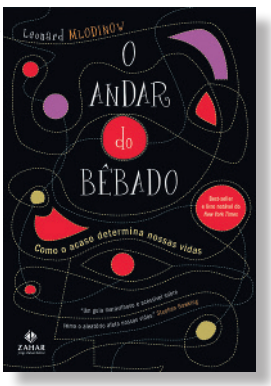
Novas aventuras científicas de Sherlock Holmes: casos de Lógica, Matemática e Probabilidade

Colin Bruce

Rio de Janeiro: Zahar, 2003.

Esse livro traz interessantes enigmas, casos e problemas matemáticos resolvidos pelo famoso detetive inglês Sherlock Holmes. Mas não se trata de contos matemáticos; são, na verdade, histórias que envolvem mistérios, intrigas e crimes solucionados pelo mestre das aventuras policiais. Nessa obra envolvente, o autor mostra a importância da argumentação e da avaliação bem fundamentadas para entender os casos e tomar decisões que mudam o rumo e o desfecho das histórias. São lições que ultrapassam a aprendizagem matemática e divertem.

REPRODUÇÃO



O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas

Leonard Mlodinow

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Nessa obra, o autor apresenta ferramentas para identificar os indícios do acaso, procurando ajudar o leitor a fazer escolhas mais acertadas e a conviver melhor com fatores que ele não pode controlar.

REPRODUÇÃO

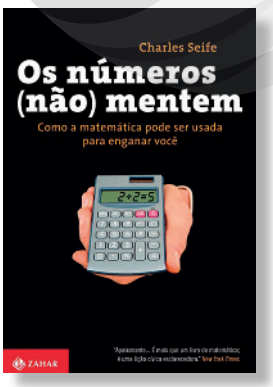
Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX

David Salsburg

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

De forma simples, o autor conta como a Estatística transformou os métodos de pesquisa na ciência, aumentando a credibilidade da investigação em diversos campos do saber, como a Medicina, a política e a publicidade. Tudo de forma leve, partindo de quadros biográficos como o que inspirou o título do livro.

REPRODUÇÃO



Os números (não) mentem: como a matemática pode ser usada para enganar você

Charles Seife

Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Nesse livro, o jornalista e matemático Charles Seife revela como funciona o perigoso mecanismo de persuasão dos números, mostrando situações em que números suspeitos são usados para confundir e enganar as pessoas. Com uma linguagem leve e acessível, o autor nos ensina a desenvolver a desconfiança necessária para questionar os dados que chegam até nós e o modo como eles são apresentados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sites

IBGEeduca – jovens

A área voltada para o público jovem do IBGEeduca traz informações relevantes e atualizadas sobre nosso país, seu território e sua população. Além disso, o *site* oferece materiais de estudo, mapas e matérias especiais sobre atualidades. Trata-se de uma fonte oficial e confiável de pesquisa que ajuda a se manter atualizado sobre o país.

<https://educa.ibge.gov.br/jovens>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Fresquinho, crocante e de qualidade

Esse fascículo, com textos, ilustrações e trechos de vídeos da série Matemática em Toda Parte, da TV Escola, pode ajudá-lo a entender mais a respeito do controle de qualidade de biscoitos. Também ajuda a compreender como técnicas de amostragem assegura a qualidade de um lote de produtos testando-se poucas unidades.

<http://hotsite.tvescola.org.br/matematica-em-toda-parte-2/fasciculos/fabrica/#>.
Acesso em: 11 mar. 2020.

Software

Medidas do corpo: *box-plot*

Nesse *software* de uso *on-line*, do *site* da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), o foco é o uso de gráficos *box-plots* para comparar variáveis quantitativas (gênero, altura e número do calçado) em diferentes categorias.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/media/software/1238/>. Acesso em: 11 set. 2020.

Vídeo

Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista dois profissionais das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da matemática em seu trabalho.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Podcasts

Estudão

O Estudão é um *podcast* em seis episódios do jornal *O Estado de S. Paulo* que aborda temas relacionados à Matemática financeira e à economia. Os temas são explicados por professores de cursinhos, como uma aula em formato de *podcast*.

Disponível em: <https://infograficos.estadao.com.br/focas/por-minha-conta/materia/estudao-seu-podcast-de-revisao-para-se-dar-bem-no-enem>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Fronteiras da ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a Ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que fala do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas no formato de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Áudio

O que é margem de erro?

Esse áudio, da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), simula um programa de rádio em que o apresentador discute com uma convidada especial o significado da expressão "margem de erro".

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1288>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Respostas

CAPÍTULO 1

1. a) 125.000
b) 800
c) resposta pessoal

2. a) quantitativa discreta
b) qualitativa nominal
c) qualitativa ordinal
d) qualitativa ordinal
e) quantitativa contínua
f) qualitativa nominal
g) qualitativa ordinal

3. a) Resposta possível: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.

4. a) os jovens latino-americanos
b) mais de 15 mil jovens entre 15 e 24 anos de nove países: Brasil, Chile, Colômbia, El Salvador, Haiti, México, Paraguai, Peru e Uruguai
c) entre abril e maio de 2018
d) A amostra foi composta de 1.488 jovens de Recife.

6. b) os meninos

7. resposta pessoal

8. a) ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta
c) A empresa Extrações com ≃ 13,9%

10. b) resposta pessoal

11. b) resposta pessoal

Exercícios complementares

1. alternativa c

2. a) os internautas brasileiros
b) 2.000 internautas das classes A, B, C e D de todas as regiões do Brasil
c) de 21 a 26 de junho de 2018; IBOPE Conecta
d) *fake news* (notícias falsas)
e) 90 pessoas; 920 pessoas
f) respostas pessoais

3. a) 6.616 adolescentes em idade média de 12 anos.
b) aproximadamente, 4.697 alunos.
d) Resposta pessoal.

4. respostas pessoais

5. a) censitária
b) 48.455.867 matrículas na educação básica; 39.460.618 na rede pública e 8.995.249 na rede privada
d) 40.572

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa b
3. alternativa c
4. alternativa d
5. alternativa a

Compreensão de texto

1. alternativa c

3. resposta pessoal

4. Exemplo de resposta: A saúde mental, aumento do número de suicídios de crianças e adolescentes e problemas como *bullying* e *cyberbullying*.

5. aproximadamente 46,64%

6. resposta pessoal

7. resposta pessoal

CAPÍTULO 2

1. b) 6 alunos
c) 8 alunos
d) 31,25%
e) 25%
f) 43,75%

3. a) R$ 100,00
b) de R$ 100,00 a R$ 130,00
c) 60,5%
d) 161 quartos
e) 39 quartos

5. b) 20 Unidades Federativas
c) aproximadamente 11,1%

7. resposta pessoal

10. a) 33 alunos
d) sim; 84 minutos

11. a) Na representação 1 há menos perda de informações sobre os dados, já que cada um deles está expresso no diagrama.
b) A representação 3 resumiu mais os dados, pois distribuiu os dados em intervalos com maior amplitude, porém, pelo mesmo motivo, apresentou maior perda de informações.
c) 27 apartamentos gastaram menos de R$ 150,00 em energia elétrica nesse mês.
d) Sim, 3 apartamentos gastaram mais de R$ 200,00 em energia elétrica. Não é possível responder a essa questão somente observando a representação 3, pois nesse histograma o último intervalo é [192, 214[, cuja frequência é 4. Assim, desse gráfico concluímos que 4 apartamentos gastaram de 192 (inclusive) a 214 reais, mas não sabemos como é a distribuição dos valores nesse intervalo, poderiam ser todos valores menores que 200.
e) Sim, 1 dos apartamentos do condomínio gastou R$ 130,00 em energia elétrica. Para responder a essa questão é necessário consultar a representação 1, a única que preservou os valores dos dados.

13. a) Não seria coerente, pois se cada símbolo representasse 1.000.000 de habitantes, teríamos de arredondar todos os valores da tabela para 500.000 (e representá-los por meio símbolo) ou para zero; em ambos os casos, isso seria incoerente e provocaria falsas interpretações.
c) resposta pessoal

14. a) verdadeira
b) verdadeira
c) falsa
d) verdadeira
e) verdadeira

15. a) 76%
b) 64%
c) 54,63%
d) 5,824%

16. alternativa b

17. a) verdadeira
b) verdadeira
c) verdadeira
d) verdadeira
e) verdadeira
f) falsa
g) verdadeira
h) verdadeira
i) falsa

18. a) verdadeira
b) falsa
c) falsa
d) falsa
e) falsa

19. a) Samba Nascente, com 30 pontos.
b) Samba Nascente, com 6 quesitos.
c) Apenas com as informações do enunciado e dos gráficos não é possível responder à pergunta.

20. resposta pessoal

Exercícios complementares

1. 94%

2. a) boa: 8; moderada: 14; ruim: 1; muito ruim: 1, péssima: 0
b) crianças, idosos e pessoas com doenças respiratórias e cardíacas
c) Quando a qualidade do ar está ruim, toda a população pode apresentar sintomas como tosse seca, cansaço, ardor nos olhos, nariz e garganta. Pessoas de grupos sensíveis podem apresentar efeitos mais graves à saúde.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. a) O gráfico fornece os 10 parques mais visitados do Brasil, suas áreas e a quantidade de visitantes em 2018.
b) Parque Nacional da Tijuca; 2,6 milhões de visitantes
c) Parque Nacional do Iguaçu; 1.852,62 km^2
d) 526 mil visitantes
e) resposta pessoal

5. a) 66%
b) feminino
c) de 25 a 34 anos
d) celular/*smartphone*
f) resposta pessoal

6. b) cerca de 500 gigawatts (GW)
c) 14.418 MW; aproximadamente 2,88%

7. a) falsa
b) falsa
c) verdadeira
d) falsa
e) falsa
f) verdadeira

8. a) O gráfico apresenta, para a região metropolitana de Salvador, as taxas de desemprego aberto e oculto em cada um dos meses de 2018 e as taxas de desemprego total em cada mês de 2017.
b) aberto: 16,7%; oculto: 8,7%
d) nos meses de fevereiro a dezembro

9. a) verdadeira
b) verdadeira
c) falsa
d) verdadeira
e) verdadeira

10. resposta pessoal

Autoavaliação

1. alternativa d
2. alternativa d
3. alternativa a
4. alternativa c
5. alternativa b
6. alternativa c
7. alternativa b

Compreensão de texto

1. alternativa c

2. resposta pessoal

3. alternativa e

4. a) Para mostrar a oferta de ações do tipo *follow-on* em 2010 foi quebrada a escala na representação da barra correspondente.
b) Com a quebra na escala, não fica evidente a real dimensão do valor destoante dos demais.

5. a) Gráfico de barras horizontais.
b) O comprimento das barras não é proporcional aos valores que elas representam, em especial a barra que representa os gastos previdenciários de São Paulo não é proporcional às outras barras.
c) Para representar os gastos de São Paulo a barra foi "dobrada", não mostrando a real dimensão dos dados. A barra que representa esses gastos deveria ter comprimento aproximadamente igual a dez vezes o comprimento da barra que representa os gastos de Porto Alegre.

6. a) Gráfico de linha.
c) Possivelmente no primeiro valor do eixo horizontal a faixa etária seria "< 5 anos", para que as faixas etárias apresentadas cobrissem toda a população, qualquer que seja a idade.

CAPÍTULO 3

1. a) Média = 9; Mediana = 11; Moda = = 11;
b) Média ≃ 61,14; Mediana = 65; Não existe moda.
c) Média ≃ 3,13; Mediana = 4; existem três modas: 1, 4 e 5;
d) Média = 7; Mediana = 7; Moda = = 7;
e) Média = −5; Mediana = −5; Moda = −6;

2. a) 233 quilowatt-hora
b) 264,5 quilowatt-hora

3. a) ≃ R$ 3.438,67
b) R$ 3.457,00
c) Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

4. a) ≃ 0,917
b) 1
c) 1

5. 156,8

6. alternativa d

7. a) Ensino Superior

8. 59 gols

9. resposta pessoal

10. resposta pessoal

11. a) 9,2 segundos
b) ≃ 9,3 segundos

12. a) 11 minutos
b) 17,5 minutos

13. a) R$ 3.316,00
b) R$ 1.460,00

14. resposta pessoal

15. alternativa b

16. alternativa d

17. a) *Var* ≃ 10,07 e *Dp* ≃ 3,17
b) Os valores do grupo distanciam-se cerca de 3,17 viagens do valor médio (aproximadamente 15 viagens).

18. a) 2,3
b) ≃ 0,84

19. a) ≃ 27
b) 25
c) 25
d) 19
e) ≃ 3,67
f) *Var* ≃ 22,07 e *Dp* ≃ 4,7
g) Os valores desse grupo distanciam-se do valor médio cerca de 4,7 veículos.

20. a) A variabilidade dos valores do 1º dia foi maior (os dados estão menos concentrados em torno de alguns valores).
b) resposta pessoal

21. resposta pessoal

22. Os valores do grupo distanciam-se cerca de R$ 202,73 do valor médio (R$ 1.030,00).

23. Os valores do grupo distanciam-se cerca de 1,92 km/ℓ do valor médio (10,2 km/ℓ).

24. a) $Q_1 = 5$ e $Q_3 = 7$
b) 40 alunos
c) nota 1
d) 25%
e) Não é possível saber quantos alunos tiveram nota 10 apenas com o *box-plot*. É possível saber que 25% de 80 alunos (ou seja, 20 alunos) obtiveram notas entre 7 e 10, mas não é possível saber como foi a distribuição das notas nesse intervalo.

25. alternativa d

26. a) A representação mais adequada depende dos fatores que se pretende analisar.
b) diagrama de ramo e folhas; sim, com base no diagrama de ramo e folhas
c) não; sim; 36 participantes
d) A representação mais adequada nesse caso seria o *box-plot*.
e) *Me* = 22,395; Q_1 = 15,295; Q_3 = 31,260
f) diagrama de ramo e folhas ou *box-plot*; menor valor: 8,27; maior valor: 52,61
g) 15 participantes; 1 participante; diagrama de ramo e folhas
h) resposta pessoal
i) resposta pessoal

27. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

29. resposta pessoal

30. a) sim; há uma correlação positiva.
b) Dos países representados no diagrama, o Brasil é o que teve a menor média de Matemática no Pisa 2015 e o menor Índice Pisa de *status* econômico.

31. alternativa c

32. sim; a correlação é nula.

Exercícios complementares

1. a) a idade mediana da população indígena por localização do domicílio e sexo
b) 22,1 anos
c) fora de terras indígenas
d) No total, a população masculina é mais nova que a população feminina

2. a) 2 e 2 b) 1,86

3. 5

4. alternativa b

5. alternativa b

6. alternativa c

7. 18 gols

8. alternativa e

9. alternativa b

10. 48 alunos

11. entre 3 e 5: 16%; entre 5 e 7: 12%

12. 1,2

13. $\bar{x} = 90$ e $Dp = 30$

14. $-2, -1, 0, 1$ e 2

15. a) errado b) errado

16. a) certo b) errado

17. alternativa a

18. a) errado b) certo

19. a) média: 105
b) variância: 20

20. alternativa a

21. a) B b) A

22. $\simeq$ 0,516 milhão de turistas

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa d
3. alternativa b
4. alternativa b
5. alternativa d
6. alternativa d
7. alternativa a
8. alternativa c

CAPÍTULO 4

1. 6 opções

2. 62^8 senhas

3. 132 maneiras

4. 9.000 números

5. 120 maneiras

6. 223.560.000 senhas

7. a) 180 números b) 100 números

8. 96 números

9. 729 maneiras

10. 730 pessoas

11. 720 maneiras

12. 325 mensagens

13. 10^{14} ou 100 trilhões de sonetos

14. alternativa a

15. 30 letras

16. 542 números

17. resposta pessoal

18. a) 800 códigos
b) 640 prefixos
c) 9.999 números
d) 6.399.360 números
e) 5.119.488.000 números

19. resposta pessoal

20. a) 210 b) $\frac{7}{4}$

21. a) $4!$ c) $\frac{205}{4} \cdot 4!$
b) $\frac{5}{2} \cdot 4!$

22. a) 6 b) 8

23. 720 maneiras

25. 42 números

26. resposta pessoal

27. 120 anagramas

28. 48 anagramas; 36 anagramas

29. 3.360 anagramas

30. 4.320 maneiras

31. 60 sinais

32. a) 479.001.600 possibilidades
b) 103.680 possibilidades

33. a) 6 sequências
b) 48 sequências

34. 3.999.960

35. 2.520 modos

36. 225 caminhos

37. resposta pessoal

38. 60 modos

39. 90 resultados

40. 60 resultados

41. 380 possibilidades

42. 13

43. 30 maneiras

44. 2 horas

45. 360 sequências

46. resposta pessoal

47. 3.003 formas

48. $\frac{n(n-3)}{2}$

49. 35 comissões

50. 45 apertos de mão

51. 300 possibilidades

52. 1.200 conjuntos

53. 10 grupos; nenhum grupo

54. 1.960 grupos

55. 286 grupos

56. 55 maneiras

57. 126 triângulos

58. 22.957.480 maneiras

59. resposta pessoal

Exercícios complementares

1. 24 opções

2. 110 tipos

3. 720 maneiras

4. 60 números

5. 10 escolhas

6. 350 grupos

7. 2.016 maneiras

8. 56 resultados

9. 8 amigos

10. alternativa b

11. 24 números

12. alternativa c

13. alternativa d

14. alternativa c

15. alternativa b

16. 31 modos

17. 120 maneiras

18. alternativa a

19. a) 720 e 120
b) 481ª e 312.465

20. alternativa e

21. $S = \{81\}$

22. 15.840 maneiras

23. alternativa b

24. alternativa c

25. alternativa d

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa b
3. alternativa d
4. alternativa d
5. alternativa d
6. alternativa c
7. alternativa b
8. alternativa c

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 5

1. $S = \{1, 2, 3, ..., 89, 90\}$;
$E = \{5, 10, 15, ..., 85, 90\}$

2. 87; 90

3. sim, pois $n(E) = 1$ e $n(S) = 52$

4. $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), (3, 1), ..., (6, 6)\}$
a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
b) $\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
c) $\varnothing$
d) $\{(6, 6)\}$
e) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)\}$
f) S
g) $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$
h) $\{(6, 3), (3, 6), (6, 6)\}$

5. 20.708.500

6. resposta pessoal

7. a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ e) 0
b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

8. a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{8}{15}$
b) $\frac{1}{5}$ d) 0

9. $\frac{2}{91}$

10. $\frac{1}{24}$

11. $\frac{1}{30}$

12. $\frac{2}{3}$

13. $\frac{5}{7}$

14. a) não
b) $S = \{ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk\}$

15. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{1}{4}$

16. a) $\frac{1}{56}$ c) $\frac{1}{16}$
b) $\frac{1}{140}$ d) $\frac{7}{80}$

17. a) $\frac{4}{13}$ b) $\frac{7}{13}$

18. $\frac{2}{3}$

19. $\frac{11}{36}$

20. $\frac{1}{2}$

21. a) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{1}{7}$
b) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{5}{7}$

22. a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{5}{6}$

23. a) $\frac{19}{35}$ b) $\frac{16}{35}$ c) $\frac{27}{35}$

24. 45%

25. b) $\frac{4}{15}$ c) $\frac{7}{15}$

26. $\frac{9}{20}$

27. $\frac{1}{4}$

28. $\frac{57}{1.771}$

29. resposta pessoal

30. a) 60% c) 65% e) 40%
b) 26% d) 21%

31. $\frac{1}{8}$

32. a) $\frac{35}{144}$ b) $\frac{49}{144}$
c) resposta pessoal

33. a) não b) sim

34. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{7}$

35. $\frac{2}{9}$

36. O enunciado está incompleto. Falta a informação de que há ou não reposição de bola após a primeira retirada.

37. resposta pessoal

38. $\simeq 27,3\%$

39. $\simeq 99,7\%$

40. a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{4}$

41. a) 14,2% d) 4,7%
b) 0,05% e) 99,9%
c) 31,5% f) 85,8%

42. a) $\frac{45}{512}$ c) $\frac{405}{1.024}$
b) $\frac{135}{512}$ d) $\frac{243}{1.024}$

44. b) 7.800
c) 30%
d) 5%

45. 20%

46.
- modelo A: 3,8%
- modelo B: 2,89%
- modelo C: 2,54%

Exercícios complementares

1. Sejam A, B meninos e C, D, E meninas.
$S = \{(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$
$E_1 = \{(C, D), (C, E), (D, E)\}$
$E_2 = \{(A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E)\}$
$E_3 = \{(A, B)\}$

2. a) $E_1 = \{A_E, 2_E, 3_E, 4_E, 5_E, 6_E, 7_E, 8_E, 9_E, 10_E, J_E, Q_E, K_E\}$
b) $E_2 = \{3_E, 4_E, 3_C, 4_C, 3_O, 4_O, 3_P, 4_P\}$
c) $E_3 = \{A_E, A_O, A_C, A_P\}$

3. a) 16% b) 70%

4. $\frac{1}{5^{10}}$

5. a) $\frac{3}{28}$ b) $\frac{5}{14}$ c) $\frac{15}{28}$

6. $\frac{5}{12}$

7. alternativa c

8. alternativa c

9. alternativa d

10. alternativa d

11. 4%

12. 14,68%

13. $\simeq 40\%$

14. $\frac{7}{15}$

15. a) 1,2% b) $\simeq 20,7\%$

16. 0,1%

17. $\frac{1}{10}$

18. $\frac{1}{7}$

19. 10,12%

20. b) $\frac{3}{50}$ d) $\frac{44}{115}$
c) $\frac{77}{200}$ e) $\frac{38}{115}$

21. a) 22 bombons b) $\frac{40}{77}$

22. alternativa b

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa a
3. alternativa b
4. alternativa d
5. alternativa b
6. alternativa c
7. alternativa d
8. alternativa b
9. alternativa a
10. alternativa b

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 9 mar. 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 9 mar. 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e um caderno complementar). Os livros apresentam diversos conceitos da educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os estudantes transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://ibge.gov.br/>. Acesso em: 9 mar. 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Materiais elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. *Estatística básica*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

Esse livro trata da análise de dados, de probabilidade e de tópicos de inferência estatística.

CRESPO, Antonio Arnot. *Estatística fácil*. São Paulo: Saraiva, 1994.

Com uma linguagem objetiva, esse livro traz uma abordagem introdutória de Estatística.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livros conceituados e que são referências em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

HUFF, Darrell. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

Esse livro une linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

LIMA, Antonio Carlos P.; MAGALHÃES, Marcos N. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 3. ed. São Paulo: IME-USP, 2001.

Voltado a estudantes de cursos superiores, esse livro apresenta uma introdução à Probabilidade e à Estatística.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro contempla o estudo de progressões aritméticas e geométricas, Matemática financeira, análise combinatória, probabilidade, Geometria espacial, pontos, retas e planos, medição de distâncias e de ângulos, poliedros, volumes e áreas, entre outros.

LIMA, Elon Lages *et al*. *Temas e problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção do Professor de Matemática).

Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, nesse livro as teorias são apresentadas de forma simples e acompanhadas de problemas contextuais que permitem mostrar as variadas aplicações de temas como funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, aplicações de Trigonometria, cálculo de volumes, combinatória e Matemática financeira.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

SPIEGEL, Murray R.; STEPHENS Larry J. *Estatística*. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. (Coleção Schaum).

Livros de Estatística voltados a estudantes de cursos profissionalizantes ou superiores, que apresentam conteúdos de Estatística estudados no Ensino Médio e no universitário.

MODELO

MODERNA

ISBN 978-65-5779-036-6

MODERNA