ORGANIZADORA: Editora Moderna

Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

**EDITOR RESPONSÁVEL:** 

Fabio Martins de Leonardo

# CONEXOES MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

**Trigonometria** 





Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias MANUAL DO PROFESSOR





## CONEXOES MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Trigonometria

Organizadora: Editora Moderna Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

#### **Editor responsável:**

**Fabio Martins de Leonardo** 

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias

## MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020



#### Elaboração dos originais:

#### Dario Martins de Oliveira

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

#### Edson Ferreira de Souza

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo, Editor.

#### Ernani Nagy de Moraes

Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

#### Fabio Martins de Leonardo

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo, Editor

#### Juliana Ikeda

Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

#### Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura

Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

#### Maria José Guimarães de Souza

Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

#### Natasha Cardoso Dias

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

#### Renata Martins Fortes Gonçalves

Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

#### Romenig da Silva Ribeiro

Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor. **Edição de texto:** Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayume Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

**Assistência editorial:** Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Érico da Silva Candido, Fernando Barriento, Magali

Bragado, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho,
Rodrigo Terra

Gerência de design e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

**Edição de infografia:** Giselle Hirata, Priscilla Boffo **Coordenação de revisão:** Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Beatriz Rocha, Frederico Hartje, Inaya Oliveira,

Simone Garcia

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de bureau: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos

Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto,

Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletíva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -Funções e aplicações -- Estatística e
probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e
espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

#### Índices para catálogo sistemático:

Matemática: Ensino médio 510.7
 Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Todos os direitos reservados

#### EDITORA MODERNA LTDA.

Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904 Vendas e Atendimento: Tel. (0\_\_11) 2602-5510 Fax (0\_\_11) 2790-1501 www.moderna.com.br 2020 Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

## Guia para o professor

#### **PARTE GERAL**

Pressupostos teórico-metodológicos	I۷
A Base Nacional Comum Curricular	IV
As mudanças no Ensino Médio	VIII
As metodologias ativas	IX
A importância da Matemática	XI
A língua materna e a Matemática	XII
As tecnologias digitais, a computação e a Matemática	XIII
Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade	XIV
A gestão da sala de aula	X۷
Um olhar inclusivo	χV
Avaliação	ΧV
Organização e estrutura da obra	XVI
Organização dos volumes	
Sugestão de cronograma	XVI
Sugestões de consulta para o professor	XIX
Livros e artigos	XIX
Referências bibliográficas	XX

#### PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volumeXXIV
Sugestões de ampliaçãoXXVII
<u>Capítulo 1</u> A semelhança e os triângulosXXVII
Capítulo 3 Ciclo trigonométrico e trigonometria
em um triângulo qualquerXXVII
Capítulo 4 Funções trigonométricasXXIX
Educação financeira Bens públicosXXIX
Sugestões de avaliaçãoxxx
Capítulo 1 A semelhança e os triângulosXXX
Capítulo 2 Trigonometria no triângulo retânguloXXXIV
<u>Capítulo 3</u> Ciclo trigonométrico e trigonometria
em um triângulo qualquer XXXIX
<u>Capítulo 4</u> Funções trigonométricasXLIII
Resoluções e comentários XLVII
Capítulo 1 A semelhança e os triângulosXLVIII
<u>Capítulo 2</u> Trigonometria no triângulo retângulo LV
Capítulo 3 Ciclo trigonométrico e trigonometria
em um triângulo qualquerLVIII
<u>Capítulo 4</u> Funções trigonométricasLXV
Educação financeira Bens públicosLXXV
Pesquisa e ação Maguete I XXV/III

#### **PARTE GERAL**

#### Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

#### A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

[...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

#### Competências gerais da Educação Básica

- 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
- 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- **3.** Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
- **4.** Utilizar diferentes linguagens verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
- **5.** Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
- **6.** Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
- **7.** Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
- **8.** Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
- **9.** Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
- **10.** Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

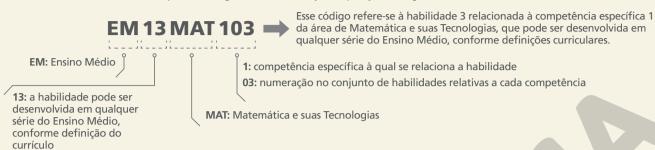
(BNCC, 2018, p. 9-10.)

#### Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

#### Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

#### HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apojo de tecnologias digitais.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

#### HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocíniar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

#### HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

#### COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

#### HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências

#### HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de  $2^{\circ}$  grau do tipo  $y = ax^{\circ}$ .

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

#### As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

#### O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

[...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

[...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório Violência escolar e bullying (Unesco, 2019), o bullying é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o cyberbullying é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

#### As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

[...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

[...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times, pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

#### Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido. Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

[...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto e Educação financeira*, trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

#### Preparando os alunos para a cooperação

A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]

Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.

Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.

[...]

O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed.
Porto Alegre: Penso, 2017.

#### A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

#### A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (techné ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (mátema) a realidade natural e sociocultural (etno) na qual está inserido.

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

[...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

#### A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

#### Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de softwares.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

<sup>1</sup> Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

O uso da escuta ativa<sup>2</sup> é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

#### As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

[...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, tablets etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a

construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica. Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474)

[...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

#### O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máguina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- Decomposição: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- Reconhecimento de padrões: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- Abstração: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

<sup>2</sup> Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

 Algoritmo: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

#### Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com softwares específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- Scratch: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. Softwares como o Scratch trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos

para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

#### Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar. Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que "cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora" e destaca quinze temas.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC:* contexto histórico e pressupostos pedagógicos, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu esses temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais		
Ciência e tecnologia	Meio ambiente	
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo	
Multiculturalismo	Cidadania e civismo	
Diversidade cultural     Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	- Vida familiar e social - Educação para o trânsito - Educação em direitos humanos - Direitos da criança e do adolescente - Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso	
Economia	Saúde	
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional	

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

#### A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

[...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

#### Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demaís.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

#### Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por consequinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

#### Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, podcasts, softwares, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

#### Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre *pensamento computacional*.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveís e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção Educação financeira favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção Ampliando os conhecimentos indicam-se livros, vídeos, sites, podcasts, softwares, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

#### Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS	
	1º	Grandezas e medidas	
	l⊼	Conjuntos	
	20	Funções	
	2º	Algoritmos e introdução à programação	
1º		Função afim	
I=	3º	Função quadrática	
		Função exponencial	
		Função logarítmica	
	4º	Sequências	
		Matemática financeira	
		A semelhança e os triângulos	
	1º	Trigonometria no triângulo retângulo	
	2º	Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer	
2º	Z	Funções trigonométricas	
Z <sup>±</sup>	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas	
	3*	Introdução à Geometria Espacial	
	4º	Poliedros	
	4=	Corpos redondos	
		Organização e apresentação de dados	
	1º	Análise de dados	
		Medidas estatísticas	
	2º	Análise combinatória	
3º	Σ-	Probabilidade	
	32	Matrizes e determinantes	
		Sistemas lineares	
	4º	Geometria Analítica	
	4-	Transformações geométricas	

#### Sugestões de consulta para o professor

#### Livros e artigos

#### Ensino de Matemática

BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. In: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.

Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.

• BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.

• BONGIOVANNI, V. Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria. São Paulo: Proem, 2006.

Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.

D'AMBROSIO, U. Educação matemática: da teoria à prática.
 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.
   O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.
- HUFF, D. Como mentir com Estatística. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

 LIMA, E. L. et al. A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).

Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.

• LINS, R. C.; GIMENEZ, J. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.

Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.

 MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. A Matemática e os temas transversais. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta). A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?

 PERELMANN, I. Aprenda Álgebra brincando. São Paulo: Hemus, 2014.

Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.

PONTE, J. P. et al. Investigações matemáticas na sala de aula.
 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).

O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

#### Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. Computador, escola e vida: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.
   Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e Educação Matemática. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).

Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.

• MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.

O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

#### História da Matemática

BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução Helena Castro.
 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

 EVES, H. Introdução à história da Matemática. Tradução Hygino H. Domingues. 4 ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.

ROONEY, A. A história da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

ROQUE, T. História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

#### Currículo

COLL, C. Psicologia e currículo. São Paulo: Ática, 1999.
 Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

#### Didática

- DANTE, L. R. Didática da resolução de problemas de Matemática.
   12. ed. São Paulo: Ática, 2007.
  - Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.
- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.
  - Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

#### Formação de professores

FIORENTINI, D. Formação de profissionais de Matemática. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

#### Sites e artigos para download

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

<http://www.periodicos.capes.gov.br/>

Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <a href="https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat">https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat</a>
   Site da Revista Eletrônica de Educação Matemática, traz artigos de todas as edições publicadas.
- <a href="http://www.edumatec.mat.ufrgs.br">http://www.edumatec.mat.ufrgs.br</a>
   Oferece softwares, atividades, artigos e links de interesse para o professor de Matemática.
- <a href="https://www.ime.usp.br/lem/">https://www.ime.usp.br/lem/</a>
   Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo softwares educacionais, apostilas e informações nessa área.
- <a href="http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/">http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/</a>
   Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

#### Revistas e periódicos

 Boletim GEPEM. Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

• Educação Matemática em revista.

Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

Revista do Professor de Matemática.

Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

 Zetetiké. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educacão Matemática.

Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

#### Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <a href="https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas">https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas</a>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. Modernidade líquida. Rio de Janeiro: Zahar, 2001. Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. Aprendizagem baseada em projetos: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação. Disponível em: <a href="http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol\_pensamento\_computacional.html">http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol\_pensamento\_computacional.html</a>>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda

etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <a href="https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208">https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208</a>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <a href="http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia\_pratico\_temas\_contemporaneos.pdf">http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia\_pratico\_temas\_contemporaneos.pdf</a>>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <a href="http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf">http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf</a>>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida. CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <a href="https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/">https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/</a>». Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <a href="https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf">https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf</a>>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <a href="https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf">https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf</a>>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In: Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al.* Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveís em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <a href="https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula">https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula</a>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do blended learning têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <a href="http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177">http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177</a>>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática. Campinas, SP: Mercado de Letras. 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. Estratégias de leitura. Porto Alegre: Artmed, 1998. O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <a href="https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711">https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711</a>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

#### PARTE ESPECÍFICA

#### A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

#### Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume

#### Competência geral 1

Os conhecimentos historicamente construídos pela humanidade subsidiam o entendimento do estudante para a compreensão da sociedade na qual se insere. As aberturas dos capítulos 2 e 3, nas páginas 40 e 41 e 56, assim como as páginas 29, 51, 58, por exemplo, valorizam os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e digital, contribuindo para o desenvolvimento dessa competência.

#### Competência geral 2

Essa competência é colocada em ação em diversas oportunidades nesse volume, o que pode ser observado na proposta de uso de ferramentas computacionais, como software de Geometria dinâmica, por exemplo, nas páginas 17, 25, 30, 32, 42, 57, 83, 87 e 91. No infográfico Torre de canudinhos, nas páginas 38 e 39, na abertura das páginas 40 e 41, na seção Compreensão de texto nas páginas 106 e 107, e na seção Pesquisa e ação, nas páginas 111 a 113, essa competência também é favorecida.

#### Competência geral 3

Essa competência é favorecida na apreciação da obra de Antonio Peticov, que tem como base retângulos áureos, apresentada no boxe Observações, na página 24.

#### Competência geral 4

Essa competência é favorecida nas atividades exploratórias por meio da Geometria dinâmica em que o estudante elabora e verifica conjecturas com o uso das linguagens digital, algébrica, geométrica e visual. No boxe *Explore*, da página 32, o estudante verifica as relações métricas entre as medidas lineares dos elementos de um triângulo retângulo. Há, ainda, outras propostas relacionadas à utilização de uma ferramenta computacional de maneira investigativa, como pode ser observado nas páginas 17, 25 e 30. Outro exemplo que concorre para essa competência se dá na realização das atividades propostas na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, uma vez que uma exposição de maquetes com as adequações para ambientes acessíveis, de acordo com as especificações da NBR 9050, é um modo eficiente de partilhar informações na linguagem matemática.

#### Competência geral 5

Ao verificar a validade de uma proposição em diferentes configurações por meio da Geometria dinâmica, há o favorecimento do desenvolvimento dessa competência, pois o estudante é solicitado a compreender e a utilizar de maneira crítica, significativa e reflexiva essa tecnologia, como pode ser observado nas páginas 17, 25, 30, 32, 42 e 57.

#### Competência geral 6

A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, valoriza novos saberes, aqui representados pela aplicação do conceito de Desenho Universal e da NBR 9050. Ao discutir os tópicos propostos para a elaboração das plantas e a construção de maquetes, bem como sobre a concepção de habitação inclusiva tendo em vista os sete princípios do conceito de Desenho Universal, o estudante faz escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e desenvolve um projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. Dessa maneira, essa competência é contemplada.

#### Competência geral 7

Ao longo do volume, as demonstrações de teoremas, por exemplo, fornecem instrumentos para o estudante argumentar tecnicamente com base em hipóteses e proposições anteriormente comprovadas.

Na seção Educação financeira, nas páginas 108 a 110, temas relacionados a orçamentos de órgãos públicos, tributos, corrupção e ética são colocados em discussão. Dessa maneira, a seção propicia ao estudante o total teor dessa competência.

Para além da argumentação técnica, a seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, em especial na etapa 5, na exposição da maquete e na análise coletiva, cada grupo deverá argumentar e defender o seu projeto. Em seguida, coletivamente, a turma deverá convergir para uma proposta que respeite e promova os direitos humanos, a questão socioambiental e o consumo responsável.

#### Competência geral 8

O trabalho em grupo para a realização da seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, requer autoconhecimento das potencialidades cognitivas e emocionais e uma avaliação confiável em relação aos demais participantes do grupo. Essa atividade provoca o aprendizado para que cada um e todos consigam aferir tais propriedades nos âmbitos pessoal e social.

#### Competência geral 9

Essa competência é contemplada nas seções *Educação financeira*, nas páginas 108 a 110, e *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, em que os estudantes, ao trabalhar em grupo, devem resolver eventuais conflitos, em atitude de cooperação com os colegas, exercitando o respeito e a empatia.

#### Competência geral 10

Ainda nas seções Educação financeira, nas páginas 108 a 110, e Pesquisa e ação, nas páginas 111 a 113, os estudantes também são levados a questionamentos sobre posicionamentos e atitudes, quanto aos princípios éticos, dos colegas e os próprios, conforme se propõe na etapa Para finalizar na primeira secão e na Autoavaliação, na segunda secão.

#### Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

#### Competência específica 1

O desenvolvimento dessa competência é promovido ao longo de todo o volume. No capítulo 4, na página 78, apresenta-se o estudo do fenômeno cíclico das marés por meio de funções trigonométricas. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 106 e 107, traz a utilização de conceitos matemáticos na modelagem e na interpretação do comportamento dos sons em sua representação pela comparação à função seno como um fato das Ciências da Natureza. Também na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, conceitos de grandezas e medidas devem ser aplicados nos estudos de antropometria, de escala e de proporção para a construção da maquete.

#### Habilidade EM13MAT101

A seção Compreensão de texto, nas páginas 106 e 107, traz a utilização de conceitos matemáticos na modelagem e na interpretação do comportamento dos sons em sua representação pela comparação à função seno como um fato das Ciências da Natureza.

#### Habilidade EM13MAT103

Para desenvolver as etapas 2 e 3 da seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, os estudantes deverão interpretar e compreender a NBR 9050. Nesse texto, há diversas especificações que empregam unidades de medida de diferentes grandezas, que permitem o trabalho com essa habilidade.

#### Competência específica 2

Saúde, educação e segurança são áreas que devem receber atenção e investimentos dos poderes públicos (executivo, legislativo, judiciário), que, para tanto, devem se articular na elaboração de orçamentos de despesas a serem subsidiadas por tributos. Esses desafios e mais uma discussão a respeito de ética e direitos humanos são propostos na seção *Educação financeira*, nas páginas 108 a 110, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, que mobilizam essa competência.

#### Habilidade EM13MAT201

As preocupações com questões de acessibilidade estão presentes em diversas áreas responsáveis por construções de escolas, hospitais, calçadas, *shopping centers* etc., já que é fundamental garantir acesso a todos (crianças, cadeirantes, deficientes visuais, idosos, entre outros), respeitando as diferenças das pessoas que circulam nesses espaços. Para tanto, recorre-se à abordagem própria da ciência, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para resolver problemas e criar soluções. Assim é que, na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, essa habilidade é contemplada.

#### Competência específica 3

Ao longo das páginas 46, 50, 53 e 54, e da seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, são propostos problemas que envolvem conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade.

#### Habilidade EM13MAT306

Nas páginas 78, 86, 103, 104 e 105 há atividades nas quais há modelagem de fenômenos periódicos reais, entre as quais destacamos altura de maré, variação da quantidade de algas em um rio/mar/lago, mensuração da poluição causada por espuma em um rio etc., que favorecem o desenvolvimento dessa habilidade. Nas resoluções dessas atividades é empregado o conceito de função periódica, e pode ser colocada em discussão a preservação dos recursos naturais no contexto de educação ambiental.

A seção Compreensão de texto, nas páginas 106 e 107, trata da utilização de conceitos matemáticos na modelagem e na interpretação do comportamento dos sons em sua representação pela comparação à função seno como um fato das Ciências da Natureza.

#### Habilidade EM13MAT308

Ao longo dos capítulos 1, 2 e 3, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 111 a 113, são propostos diversos problemas que envolvem as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, favorecendo, assim, o desenvolvimento da habilidade.

#### Habilidade EM13MAT315

No boxe *Pensamento computacional*, as atividades propostas favorecem o desenvolvimento dessa habilidade. Na página 43, por exemplo, um algoritmo é representado em um fluxograma, enquanto na página 51, o estudante deverá elaborar um algoritmo em linguagem corrente para o cálculo do valor do cosseno de um ângulo usando uma calculadora científica e, em seguida, representá-lo em um fluxograma. No capítulo 4, nas páginas 97 e 98, propõe-se, no boxe *Pensamento computacional*, a elaboração de um fluxograma a partir de um algoritmo para representar a translação horizontal de um gráfico de uma função trigonométrica.

#### Competência específica 4

Essa competência é favorecida em situações ao longo da obra em que os estudantes devem empregar registros de representação matemáticos diversos. Isso acontece, por exemplo, nas páginas 17, 25, 30 e 32, quando se propõe a utilização de uma ferramenta computacional de forma investigativa, possibilitando testar hipóteses ao alterar a configuração inicial da construção geométrica. Também nas páginas 43 e 51, do capítulo 2, e nas páginas 97 e 98, do capítulo 4, após elaborar um algoritmo em linguagem corrente, o estudante deverá representar o algoritmo como um fluxograma, articulando assim a linguagem corrente com a linguagem computacional.

#### Habilidade EM13MAT404

Ao resolver o exercício 15 da página 89, do capítulo 4, dadas as sentenças de duas funções, o estudante deve analisar e comparar seus gráficos, domínios de validade, imagem e comportamento, contemplando assim essa habilidade. Nas páginas 86 e 92 também há atividades que favorecem o desenvolvimento dessa habilidade.

#### Competência específica 5

Em cada um dos quatro capítulos deste volume são propostos investigações e o estabelecimento de conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas. Nas páginas 29 a 31, o estudante encontra uma investigação sobre o teorema de Pitágoras por meio do uso de Geometria dinâmica, seguida da demonstração geométrica, favorecendo essa competência. Já na página 47, do capítulo 2, o estudante encontra uma investigação sobre a relação fundamental da trigonometria seguida da demonstração algébrica e, junto, um boxe *Explore* que incentiva a verificação da relação em um triângulo particular. Outros exemplos desse tipo de abordagem também podem ser observados nas páginas 17, 18, 19, 25, 32, 57, 72. Nas páginas 83, 87 e 91, do capítulo 4, as atividades propiciam o desenvolvimento dessa competência, já que possibilitam a investigação e o estabelecimento de conjecturas, por meio do uso de tecnologia, de um conceito matemático, ao construir, verificar e analisar a curva tangente a partir do rastreamento do ponto que a determina.

#### Como as competências específicas e as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1: Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, reaional e alobal.

Essa competência é favorecida por meio das propostas que favorecem o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, como as da página 78.

EM13CNT101: Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.

A abertura do capítulo 4, na página 78, aborda o estudo do fenômeno cíclico das marés, com a observação e a análise das transformações do ambiente e de seus movimentos para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações do cotidiano, promovendo o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.

**Competência específica 2:** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

O desenvolvimento dessa competência é promovido nas aberturas dos capítulos 3 e 4, nas páginas 56 e 78. Na abertura do capítulo 4, por exemplo, na página 78, o estudo do fenômeno cíclico das marés é descrito por uma função geométrica e representado por um gráfico, de forma a interpretar a parte da dinâmica da Terra.

EM13CNT202: Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

Na abertura do capítulo 3, na página 56, é citada uma informação, explicando que uma estrutura similar a uma engrenagem foi descoberta em um inseto por cientistas.

EM13CNT204: Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

O estudo do fenômeno cíclico das marés pode ser modelado por meio de uma função trigonométrica e, com isso, interpreta-se com uma boa aproximação uma parte da dinâmica da Terra. Esse estudo é apresentado na abertura do capítulo 4, na página 78.

Competência específica 3: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

Essa competência é favorecida por meio das propostas que favorecem o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, nas páginas 38 a 41, 69, 104, 106 e 107.

EM13CNT301: Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica. Essa habilidade é favorecida na seção Compreensão de texto, nas páginas 38 e 39, em que os estudantes são incentivados a criar questões e a elaborar hipóteses sobre a representação de modelos explicativos para justificar conclusões em situações-problema em uma perspectiva científica. A abertura do capítulo 2, nas páginas 40 e 41, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, pois apresenta uma questão feita na Antiguidade sobre as relações entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua, com definição de hipótese, estimativas e um método para medi-las. Com isso, obtêm-se representação e interpretação de resultados experimentais para justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica. Na página 69, do capítulo 3, após a abordagem contextualizada do conceito da lei dos senos, há sugestão de propor aos estudantes a construção de um teodolito caseiro, um instrumento de medição que poderá ser utilizado na elaboração de hipóteses ou na avaliação e na justificação de situações-problema sob uma perspectiva científica.

EM13CNT302: Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.

O exercício complementar 15, na página 104, permite, a partir de uma apresentação para toda a sala dos gráficos construídos e das tábuas de marés consultadas, a promoção de debates em torno do tema e de sua relevância sociocultural e ambiental, favorecendo, assim, o desenvolvimento dessa habilidade.

**EM13CNT306**: Avaliar os riscos envolvidos em atividades cotidianas, aplicando conhecimentos das Ciências da Natureza, para justificar o uso de equipamentos e recursos, bem como comportamentos de segurança, visando à integridade física, individual e coletiva, e socioambiental, podendo fazer uso de dispositivos e aplicativos digitais que viabilizem a estruturação de simulações de tais riscos.

A seção Compreensão de texto, nas páginas 106 e 107, permite a exploração dos efeitos colaterais causados pela poluição sonora, recorrendo à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão e a análise crítica para investigar causas, bem como avaliar os riscos envolvidos em atividades cotidianas, nas quais há incidências de sons que ultrapassam os níveis previstos pelas normas legais e que podem causar problemas auditivos irreversíveis, além de outros problemas também relacionados à saúde.

**EM13CNT307**: Analisar as propriedades dos materiais para avaliar a adequação de seu uso em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e/ou propor soluções seguras e sustentáveis considerando seu contexto local e cotidiano.

A seção Compreensão de texto, nas páginas 38 e 39 do capítulo 1, contempla essa habilidade ao propor a construção de uma torre com canudinhos e linha. O estudante deverá analisar o material e verificar que o triângulo não pode ter sua forma alterada sem que se modifique o comprimento de seus lados; assim, um sistema de triângulos apresenta grande estabilidade, pois não sofre deslocamento pela ação da força aplicada. O estudante deverá concluir também que a força exercida sobre um dos vértices do triângulo se distribui até atingir o equilíbrio, tornando o sistema mais resistente e estável. Isso não ocorre com módulos quadriláteros, já que estes são sensíveis ao movimento de seus vértices e à distribuição desigual das forças, tornando-se menos resistentes e mais instáveis.

#### Como a competência específica e a habilidade de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1: Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

Essa competência é favorecida por meio das propostas que favorecem o desenvolvimento das habilidades a ela vinculadas, nas páginas 108 a 110.

**EM13CHS102:** Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos.

A seção *Educação financeira*, nas páginas 108 a 110, favorece o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais no que diz respeito às discussões sobre as circunstâncias econômicas e sociais que giram em torno de bens públicos, bem como direitos, deveres e ética em uma sociedade.

#### Como as habilidades de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

**EM13LGG601:** Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.

Essa habilidade é favorecida na apreciação da obra de Antonio Peticov, que tem como base retângulos áureos, apresentada no boxe Observações, na página 24.

**EM13LGG602:** Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

Essa habilidade é favorecida na apreciação da obra de Antonio Peticov, que tem como base retângulos áureos, apresentada no boxe *Observações*, na página 24.

#### Sugestões de ampliação

#### Capítulo 1 - A semelhança e os triângulos

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais 2, 4 e 7, da competência específica 3 de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades EM13CNT301, EM13CNT303 e EM13CNT307.

A seção *Compreensão de texto* permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Essa proposta *maker* consiste em uma atividade prática cujo objetivo é a construção de um edifício produzido com estruturas feitas de canudos. Pretende-se trabalhar inicialmente com noções de planejamento e execução de projetos, para que no momento seguinte sejam executadas as ações mão na massa.

Como motivação inicial, solicite aos estudantes que pesquisem a história do desenvolvimento de edifícios, a fim de discutir, em outro momento, sobre as questões sociais que envolvem essas construções. Sugira temas como:

- · verticalização urbana e distanciamento social;
- · desenvolvimento social;
- sistemas estruturais, como vigas, treliças, nós, grelhas, pilares, pórticos;
- · edifícios sustentáveis;
- · edifícios inteligentes e suas tecnologias.

Os estudantes devem ser organizados em grupos de, no máximo, cinco integrantes. Apresente a proposta da construção de um edifício de canudos, bem como as regras e as condições para que a atividade seja bem executada por todos. Defina algumas condições para a construção:

- Que tipos de junção, fixação e/ou cola poderão ser utilizados?
- Quais são os materiais aceitos para a construção das estruturas?
- · Qual será a área mínima da base?
- Os edifícios deverão contar com paredes ou somente com as estruturas aparentes?
- Quanto tempo cada grupo terá para pesquisar, planejar e construir os edifícios?

Oriente os estudantes a planejar a construção, pesquisando sistemas de estrutura de edifícios, termos específicos, suporte de carga, vigas de sustentação, entre outros. Durante o planejamento, os alunos deverão elaborar um plano de ação para o projeto, contendo a estrutura escolhida pelo grupo, os materiais e as junções que serão utilizados, a previsão de carga que suas estruturas poderão suportar e o tempo (dentro do previsto pelo professor) para a realização do projeto.

Antes do início da montagem, levante os seguintes questionamentos:

- Que forças atuam no edifício para que ele permaneça estável?
- Canudos com diferentes espessuras podem suportar cargas diferentes?
- Canudos feitos de outros materiais podem suportar cargas diferentes?
- Como fazer uma viga utilizando menos material, mas que suporte uma carga maior?

Lembre-se de que, no momento da montagem dos edifícios, os estudantes poderão ter dificuldades para tirar as ideias do papel. Seja cauteloso ao sugerir soluções, pois a experimentação, inclusive o erro, faz parte do processo. É importante deixá-los tentar e testar.

Após a finalização dos projetos, os estudantes devem montar uma apresentação justificando as escolhas sobre a estrutura construída.

Caso julgue necessário, peça que, no momento da apresentação, entreguem suas referências bibliográficas.

Depois da atividade, se julgar oportuno, destaque os principais conceitos trabalhados com o intuito de apresentar aos estudantes todos os conteúdos novos que foram abordados durante o processo, por exemplo, estabilidade e estática, resistência dos materiais, planejamento e execução de projetos, entre outros.

Para finalizar, pergunte aos estudantes como se sentiram participando do desenvolvimento do projeto. Essa reflexão é importante para que eles criem a consciência do que foi feito durante o projeto; se participaram ativamente, se houve a participação dos demais integrantes do grupo, se as discussões foram colaborativas e se houve respeito a diferentes ideias e opiniões.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- Apostila de "Sistemas estruturais de edificações e exemplos"
  - <a href="https://www.fec.unicamp.br/~nilson/apostilas/sistemas\_estruturais\_grad.pdf">https://www.fec.unicamp.br/~nilson/apostilas/sistemas\_estruturais\_grad.pdf</a>>.
- MakerZine: Projeto Maker (Ponte de macarrão) + App (Build a bridge)
  - <a href="https://www.makerzine.com.br/tecnologia/maker-ponte-de-macarrao-app-build-a-bridge/">https://www.makerzine.com.br/tecnologia/maker-ponte-de-macarrao-app-build-a-bridge/</a>.
- Revista Superinteressante <a href="https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-sao-feitos-os-pilares-de-pontes-construidas-sobre-o-mar/">https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-sao-feitos-os-pilares-de-pontes-construidas-sobre-o-mar/><a href="https://www.de-pontes-construidas-sobre-o-mar/">https://www.de-pontes-construidas-sobre-o-mar/</a>>. (Acessos em: 2 jul. 2020.)

#### Capítulo 3 - Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais 2, 4 e 5, das competências específicas 2 e 3 de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades EM13CNT202, EM13CNT307 e EM13CNT309.

A abertura do capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é discutir como a natureza pode inspirar engenheiros, arquitetos, designers e profissionais das mais diversas áreas de Ciências, tecnologias e Arte (Biomimética).

Inicie a aula exibindo a palestra de Janice Beynus, escritora americana de Ciências Naturais, consultora em inovação e autora, apresentada no Tedtalks e disponível em: < https://www.ted.com/ talks/janine\_benyus\_biomimicry\_s\_surprising\_lessons\_from\_ nature\_s\_engineers?language=pt-br#t-161225>. (Acesso em: 2 jul. 2020.) Em seguida, converse com os estudantes sobre quanto pesquisadores e cientistas das mais diversas áreas recorrem à observação da natureza para solucionar problemas. Se houver disponibilidade, apresente a eles o site < https://asknature.org> (Acesso em: 2 jul. 2020.), uma plataforma colaborativa na qual são inseridas diversas ideias de como as formas de vida no planeta já apresentam sutis resoluções dos mais diversos desafios da engenharia e de demais áreas do conhecimento. Aborde, especialmente, a posição dos painéis de captação de luz de uma usina de energia solar que foi inspirada nas posições e no formato espiral de florestas de girassol - tal arranjo dos painéis otimizou e aumentou a produção de energia. Finalize essa sensibilização comentando que a inspiração poderá também ser no âmbito bioquímico, com a produção de substâncias sintéticas que simulam a atividade de substâncias naturais encontradas em seres vivos, como medicamentos e outros.

Na sequência, organize os estudantes em equipes. Cada um deles receberá uma ficha com o nome da inspiração da natureza/aplicação na Engenharia ou Ciência.

Sugestões:

- I. Minidrones e o formato de abelhas e de moscas.
- II. Aerodinâmica dos aviões "Winglets" e das asas de águias.
- III. Robôs inspirados no exoesqueleto e nas patas de artrópodes.
- IV. Ventilação natural de edifícios e tocas de cães da pradaria.
- V. Trem-bala japonês e asa aerodinâmica das aves.

Pode-se também estimular os estudantes a trazer outras ideias pesquisadas por eles.

Para cada grupo, sugira sites de pesquisas confiáveis, como:

- I. <a href="https://super.abril.com.br/ciencia/o-manual-incrivel-de-inspiracao-na-natureza/">https://super.abril.com.br/ciencia/o-manual-incrivel-de-inspiracao-na-natureza/</a>;
- II. <https://canaltech.com.br/curiosidades/airbus-cienciae-inovacao-inspiradas-na-natureza-47623/>;
- III. <https://gizmodo.uol.com.br/aranhas-insetos-roboscanudos/>;
- IV. <a href="http://goinggreen.com.br/2018/01/04/tres-exemplos-onde-biomimetica-e-arguitetura-trabalharam-juntas/">http://goinggreen.com.br/2018/01/04/tres-exemplos-onde-biomimetica-e-arguitetura-trabalharam-juntas/</a>;
- V. <a href="https://inovacaosebraeminas.com.br/biomimetica-o-que-e/">https://inovacaosebraeminas.com.br/biomimetica-o-que-e/</a>. (Acessos em: 2 jul. 2020.)

Cada grupo deverá se aprofundar em seu tema e apresentar dois materiais:

- A) Um projeto em 3-D, utilizando, basicamente, formas geométricas para exemplificar o produto. O aplicativo Tinkercad (disponível em: <a href="https://www.tinkercad.com/">https://www.tinkercad.com/</a>, acesso em: 2 jul. 2020.) é gratuito e permite a criação de projetos 3-D diretamente no navegador da internet.
- B) Um texto explicativo desse projeto 3-D de engenharia que exponha as vantagens tecnológicas e econômicas e as aplicabilidades.

Reserve um dia para a apresentação, em que cada equipe apresentará seu projeto e fornecerá os textos explicativos às outras equipes. Para a discussão final, apresente tudo o que serviu como inspiração. Conduza as discussões de forma que os estudantes entendam como a pesquisa e a compreensão da biodiversidade podem ser importantes para o desenvolvimento de novas tecnologias úteis à sociedade humana. Caso a escola tenha uma impressora 3-D, sugira que os projetos dos estudantes no *TinkerCad* sejam impressos.

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais 1, 2, 3, 5 e 6, da competência específica 3 de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades EM13CNT301 e EM13CNT307.

O tópico "Trigonometria em um triângulo qualquer" permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A proposta consiste na confecção de pipas esportivas ou artísticas, inicialmente representando-as em duas dimensões (pipas planas) e, se houver disponibilidade, em três dimensões.

O objetivo principal desta atividade será apresentar aos estudantes os conceitos relacionados com o desenvolvimento e a execução de planejamentos, ou seja, as principais ideias atreladas a projetos, bem como conceitos matemáticos e físicos relacionados à confecção de uma pipa.

Como motivação inicial, pode-se propor uma abordagem histórica sobre o sonho da humanidade de voar; logo, é possível falar sobre a história da aviação e sua relação com o desenvolvimento humano, bem como sua relevância comercial e política na globalização. Veja algumas sugestões de nomes de personagens importantes a serem pesquisados para a apresentação inicial:

- Marco Polo e seu uso bélico (entre os anos 1250 e 1320);
- Leonardo da Vinci e seus projetos de voo (próximo de 1500);
- Alexander Wilson e as pipas com termômetro para medir a variação de temperatura (em 1749);
  - Benjamin Franklin e a eletricidade (em 1752);
- Graham Bell e a utilização das pipas com equipamentos meteorológicos (por volta de 1900);
- Santos Dummont e seu conhecimento sobre pipas utilizados no 14 Bis (em 1906).

A metodologia utilizada nesse momento pode ser expositiva (ou adaptada caso julgue necessário), porém é importante que seja breve para focar a atenção dos estudantes na parte prática. Esse momento inicial servirá para abordar o tópico "pipas" e, logo em seguida, mostrar o seu uso como entretenimento ("pipas esportivas" e/ou "pipas artísticas"), para que o projeto tenha uma continuidade.

Peça aos estudantes que se organizem em grupos (o número fica a critério do professor) e distribua o desafio de planejar pipas em 3-D. Relembre conceitos de desenho geométrico (e até de desenho técnico) para auxiliar no projeto. Note que nesse momento os estudantes precisam ser estimulados a pesquisar as estruturas que comporão a pipa em 3-D. Incentive-os a pesquisar projetos na internet, como "pipas esportivas", ou "pipa caixa" ou "pipas artísticas".

- Quais seriam os melhores materiais para serem utilizados na fabricação dessas pipas?
- Utilizar estruturas mais largas ajuda para que a estrutura fique mais reforçada?
- · Qual é o melhor material para conectar as estruturas?
- Quais são e como atuam as forças em uma pipa para que esta figue estável no ar?
- Existe uma relação entre os ângulos das forças que atuam na pipa?
- Qual é a importância da rabiola (ou cauda, ou rabo) e do estirante na pipa?
- Se a pipa tiver alguma superfície coberta, qual será a área dessa cobertura?
- Que comprimento (estimativa) de linha será utilizado na amarração das estruturas?

Peça a cada grupo que entregue ou apresente à turma seus projetos contendo as devidas dimensões, ângulos entre as estruturas, materiais escolhidos e a arte. É aqui que os estudantes vão preparar o desenho técnico para essa entrega e, consequentemente, utilizar a lei dos senos.

Pode-se fazer uso de um aplicativo gratuito para a modelagem em 2-D e 3-D, como o Tinkercad (disponível em: <a href="https://www.tinkercad.com/">https://www.tinkercad.com/</a>, acesso em 19 jun. 2020.).

Para finalizar a parte prática do projeto, proponha aos estudantes que confeccionem suas pipas esportivas. Estipule um tempo para a fabricação e planeje uma atividade ao ar livre para testarem o funcionamento. Para a segurança de todos, use uma área sem fiação elétrica por perto. Vale destacar que esta atividade não é uma proposta de competição. Também é importante reforçar que as linhas cortantes, comumente chamadas de cerol, são proibidas.

Ao término da parte prática, retome os principais conceitos trabalhados durante todo o processo. Destaque que a participação de todos foi essencial para o sucesso do projeto e que puderam vivenciar uma dinâmica de trabalho que será muito importante na vida profissional deles. Fica como dica final o registro com fotos e vídeos de todo o processo, pois a atividade em si é muito bonita e terá uma grande adesão dos estudantes.

Sugestão de materiais de pesquisa:

Instructables
 <a href="https://www.instructables.com/howto/kites/">https://www.instructables.com/howto/kites/</a>

#### · Pipas para gerar energia eólica

<a href="https://www.cimm.com.br/portal/noticia/exibir\_noticia/6068-pipas-para-gerar-energia-eolica">https://www.cimm.com.br/portal/noticia/exibir\_noticia/6068-pipas-para-gerar-energia-eolica>

(Acessos em: 17 maio 2020.)

#### Capítulo 4 - Funções trigonométricas

Esta atividade permite o desenvolvimento das competências gerais 2, 7 e 10, da competência específica 2 de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades EM13CNT203 e EM13CNT206.

A abertura do capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é introduzir e apresentar aos estudantes as modalidades de Unidades de Conservação do Brasil e discutir propostas de tomada de decisão pública, manejo e conservação da biodiversidade. Retome a foto de introdução do capítulo para apresentar a seguinte situação-problema:

O Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICM-Bio) está realizando estudos e manejos em uma área do litoral brasileiro com piscinas naturais. Essas paisagens, além de possuírem incrível beleza, têm a característica de serem ambientes recifais que funcionam como berçários da vida marinha; são base da cadeia alimentar; possuem uma grande variedade de peixes, algas e corais; e, finalmente, apresentam complexas relações ecológicas importantes para diversos organismos marinhos. Preservar esses locais é importante para a manutenção da vida de muitas espécies.

Em seguida, apresente, de forma resumida, o conceito de Unidade de Conservação (UC), as modalidades que existem no Brasil e as diferentes funções que ICMBio e Ibama desempenham. Proponha uma pesquisa mais aprofundada em casa (sala de aula invertida) sobre as modalidades de UCs. Será necessário que os estudantes: 1) saibam a diferença entre área de proteção integral e de uso sustentável; 2) tragam exemplos de conhecidas UCs e digam as modalidades a que estão submetidas; 3) expliquem o conceito de plano de manejo, especialmente sobre as permissões de visitação turística, educacional e pesquisa; 4) aprofundem -se, especialmente, em três modalidades: Reserva Biológica (Rebio), Reserva Particular de Patrimônio Natural (RPPN) e Reserva de Desenvolvimento Sustentável (RDS).

O desenvolvimento da atividade, após pesquisa, dá-se com a divisão da turma em três diferentes grupos - esses serão os três "Conselhos". Em cada um dos Conselhos, deverá haver estudantes que serão defensores/especialistas de uma ReBio, de uma RPPN, de uma RDS, e alunos que serão a "opinião pública/gestores públicos". Pode-se pedir a cada estudante, na pesquisa anterior, que se especialize em uma das três modalidades, porém é importante que eles também conheçam as características das outras duas UCs. Cada Conselho deverá iniciar os trabalhos com a leitura da situação-problema; em seguida, cada grupo deverá defender que área de piscinas naturais melhor se adequará ao seu modelo de conservação: RPPN, ReBio ou RDS. É importante impor algumas regras, como tempo limite de argumentação, apresentação de exemplos e argumentos viáveis. Os estudantes da opinião pública farão a mediação de cada Conselho e, posteriormente, a tomada de decisão. O debate deve ser estimulado, e sugere-se que, ao final das apresentações, cada equipe de especialistas tenha uma pergunta à outra. A tomada de decisão pelos estudantes da opinião pública deverá ser apenas após a entrega dos envelopes-surpresa. Cada Conselho recebe um envelope-surpresa, com conteúdo conforme a seguir, após as apresentações e um prévio debate.

**Envelope 1**: É apresentado ao Conselho que nessa área foi descoberta uma nova espécie de coral supersensível às variações ambientais, uma área de desova de uma tartaruga em risco de extinção e uma nova espécie de polvo que se alimenta exclusivamente nas piscinas.

**Envelope 2**: É apresentado ao Conselho que essa área é utilizada há mais de dez anos por uma pequena comunidade local caiçara para visitação pública/turística; essa atividade é uma importante fonte de renda para a associação de moradores e que já está organizando uma ONG.

**Envelope 3**: É apresentado ao Conselho que essa área pertence a uma grande empresa de pesca. Os donos dessa empresa já possuem uma equipe diretiva relacionada ao meio ambiente e restringem o acesso às piscinas naturais.

Depois da entrega dos envelopes, é de extrema importância que ocorra um novo debate entre os Conselhos. Os alunos especialistas deverão chegar a um consenso de que, com a informação de cada envelope, existirá uma modalidade mais adequada para a área de piscinas naturais. Espera-se que a decisão de cada conselho seja no seguinte formato: envelope 1 com uma ReBio, envelope 2 com RDS e envelope 3 com RPPN.

Finalize a atividade com os Conselhos expondo a todos a decisão final de modalidade de UC para a área e peça aos estudantes que apresentem o conteúdo do envelope e comentem os melhores pontos da discussão. Conclua discutindo a importância de uma legislação que crie áreas de conservação permanente e como essas áreas podem ser importantes do ponto de vista conservacionista, social, educacional, turístico e de pesquisa.

Sugestão de materiais de pesquisa:

#### · Ministério do Meio Ambiente

<a href="https://www.mma.gov.br/areas-protegidas/unidades-de-conservacao/sistema-nacional-de-ucs-snuc.html">https://www.mma.gov.br/areas-protegidas/unidades-de-conservacao/sistema-nacional-de-ucs-snuc.html</a>

#### World Wide Fund of Nature (WWF)

<a href="https://www.wwf.org.br/natureza\_brasileira/questoes\_ambientais/unid/">https://www.wwf.org.br/natureza\_brasileira/questoes\_ambientais/unid/>

(Acessos em: 2 jul. 2020.)

#### Educação financeira - Bens públicos

Esta atividade permite o desenvolvimento da competência geral 3, da competência específica 2 de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e da habilidade EM13CHS103.

Esta seção permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, de forma a discutir a finalidade do dinheiro arrecadado por meio de pagamento de impostos.

Para transformar as necessidades da população em serviços que atendam ao interesse público, o Estado possui uma estrutura complexa e composta de diferentes níveis de atuação. Do local ao nacional, o financiamento para que tudo possa funcionar depende do pagamento de tributos por cidadãos e empresas. Os recursos arrecadados por impostos, contribuições, taxas e outros instrumentos ajudam a garantir o funcionamento e o acesso de milhões de pessoas a educação, saúde, transportes, entre outros recursos públicos.

Conhecer melhor a estrutura e as principais demandas existentes em seu entorno permite refletir sobre a importância dos recursos financeiros e do planejamento para a melhoria do acesso da população aos serviços públicos. Peça aos estudantes que se organizem em equipes com pelo menos quatro integrantes para que possam realizar um levantamento de serviços públicos, orçamento disponível e demandas presentes em bairros, regiões ou cidades onde moram. Cada equipe poderá ser responsável por um tipo de serviço ou equipamento público existente.

Oriente cada grupo a escolher um tipo de serviço: por exemplo, escolas, serviços de saúde, cultura, áreas verdes e de lazer, transportes, saneamento básico, pavimentação ou manutenção de vias ou outros.

O professor pode definir o recorte espacial para a pesquisa ou deixar que os estudantes escolham (o bairro da escola ou a cidade, por exemplo). Em seguida, direcione os grupos para que respondam às seguintes perguntas:

- Que tipo de equipamento ou serviço público foi escolhido?
- Qual é o raio de atuação da pesquisa (próximo a escola, bairro, cidade)?
- Os serviços públicos selecionados conseguem atender de forma satisfatória a toda a população? Por quê?
- O orçamento previsto para esses serviços é divulgado? Se sim, quais são os valores envolvidos?
- Os recursos destinados são suficientes para atender as pessoas que procuram pelos serviços? Quantas pessoas, aproximadamente, utilizam esses serviços?
- Foi possível identificar a necessidade de melhoria nos serviços pesquisados pelo grupo? Se sim, que tipos de melhoria?
- O orçamento, se for divulgado, é suficiente para melhorar o acesso aos serviços pesquisados? Por quê?

Com os dados levantados pelos grupos, estimule-os a construir um ou mais mapas que contenham o tipo de recorte escolhido (por exemplo, escolas públicas), indicando locais com a presença desses equipamentos ou serviços. A ideia é que possam também indicar nesses mapas as respostas às perguntas acima.

Os resultados da pesquisa e dos mapas serão úteis para a realização de um debate a respeito do orçamento disponível para as regiões pesquisadas pelos grupos. A distribuição de recursos pelo poder público é suficiente para atender às demandas existentes? A população consegue ter acesso pleno? Se ocorrem, que fatores impedem possíveis melhorias na gestão dos recursos públicos?

Se possível, inclua nas discussões a importância do Orçamento Participativo como instrumento de decisão coletiva sobre as despesas públicas. Sugestão de materiais de pesquisa:

- Controladoria Geral da União. O que é o Orçamento Público <a href="http://www.portaltransparencia.gov.br/entenda-a-gestao-publica/orcamento-publico">http://www.portaltransparencia.gov.br/entenda-a-gestao-publica/orcamento-publico</a>
- Vídeo: Cidadania e Democracia Orçamento participativo <a href="https://www.youtube.com/watch?v=pa-ZCTQDaVl">https://www.youtube.com/watch?v=pa-ZCTQDaVl</a> (Acessos em: 17 maio 2020.)

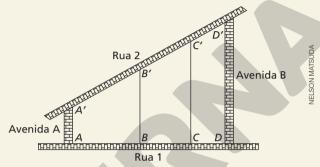
#### Sugestões de avaliação

#### Capítulo 1 - A semelhança e os triângulos

#### Avaliação 1

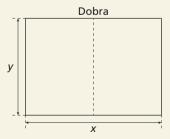
Objetivos do capítulo	Questões
Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.	1 e 2
Identificar figuras planas semelhantes.	3 e 4
Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.	5 e 6
Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.	7, 8, 9 e 10

- **Q1–** Considere m, n e p três retas paralelas e s e t duas transversais. As retas paralelas determinam dois segmentos sobre a transversal s,  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , tais que AB = x e BC = x + 1. Sobre a transversal t, as paralelas determinam os segmentos  $\overline{DE}$  e  $\overline{EF}$ , na mesma ordem, de tal modo que DE = 2x + 10 e EF = 4x + 4.
  - a) Faça um esquema para representar essa situação.
  - **b)** Determine o valor de x.
  - c) Calcule a medida dos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DE}$  e  $\overline{EF}$ .
- **Q2–** (UFU-MG) Uma área delimitada pelas Ruas 1 e 2 e pelas Avenidas A e B tem a forma de um trapézio ADD'A', com  $AD = 90 \,\mathrm{m}$  e  $A'D' = 135 \,\mathrm{m}$ , como mostra o esquema da figura abaixo.



Tal área foi dividida em terrenos ABB'A', BCC'B' e CDD'C', todos na forma trapezoidal, com bases paralelas às avenidas tais que AB=40 m, BC=30 m e CD=20 m. De acordo com essas informações, a diferença, em metros, A'B'-C'D' é igual a

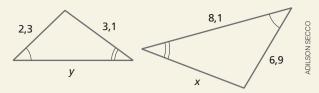
- **a)** 20
- **b)** 30
- c) 15
- **d)** 45
- Q3- (Fatec-SP) Um formato de papel usado para impressões e fotocópias, no Brasil, é o A4, que faz parte de uma série conhecida como série A, regulamentada internacionalmente pelo padrão ISO 216. Essa série criou um padrão de folha retangular que, quando seu lado maior é dobrado ao meio, gera um retângulo semelhante ao original, conforme ilustrado.



Considerando uma folha da série A, com as dimensões indicadas na figura, pode-se afirmar que

- **a)** x = 2y
- **b)**  $x = y\sqrt{2}$
- c) x = y
- **d)**  $y = x^2$
- **e)** y = 2x
- **Q4-** Considere três polígonos, I, II e III, de modo que I seja semelhante a II e II seja congruente a III. O que se pode afirmar do polígono I em relação ao polígono III?

Q5 - Os triângulos a seguir são semelhantes e apresentam alguns lados cujas medidas são desconhecidas. Determine essas medidas.



Q6- (UFJF-MG) Uma folha de papel retangular (Figura 1) é dobrada conforme indicado na Figura 2 abaixo:



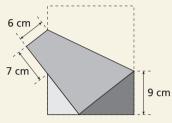


Figura 1

Figura 2

A área do triângulo cinza-escuro na Figura 2, formado após a dobra da folha, mede, em centímetros quadrados

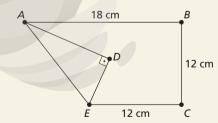
**a)** 31,50

**d)** 63,00

**b)** 34,65

**e)** 189,00

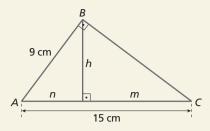
- **c)** 47,25
- Q7- (Uece) A medida, em metros, do lado de um quadrado em que o comprimento de cada uma das diagonais é 2 m é igual a
  - a)  $2\sqrt{2}$
  - **b)**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
  - c)  $\sqrt{2}$
  - **d)**  $3\sqrt{2}$
- Q8-(Enem) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AEé

- **a)**  $2\sqrt{22}$  cm
- **b)**  $6\sqrt{3}$  cm
- **c)** 12 cm
- **d)**  $6\sqrt{5}$  cm
- **e)**  $12\sqrt{2}$  cm

Q9 - Considere o triângulo ABC, retângulo em B. Sabe-se que o cateto  $\overline{AB}$  mede 9 cm e que a hipotenusa  $\overline{AC}$  mede 15 cm.



#### Calcule:

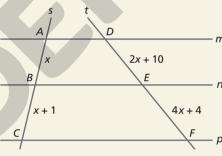
- **a)** a medida do cateto  $\overline{BC}$ ;
- **b)** a medida *h* da altura em relação à hipotenusa;
- c) as medidas m e n das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
- **Q10-** (ESPM-SP) Num triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, a medida da altura relativa à hipotenusa é igual a 4. O valor da expressão  $\frac{a}{b \cdot c} + \frac{a}{a \cdot c}$ é igual a:
  - **a)** 1

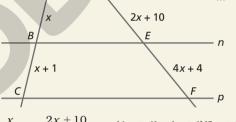
**b)** 2

c)  $\frac{1}{2}$ 

#### Resoluções da avaliação 1

Q1-a)





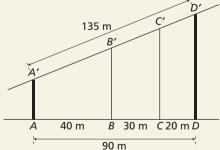
- **b)**  $\frac{x}{x+1} = \frac{2x+10}{4x+4} \Rightarrow x(4x+4) = (x+1)(2x+10) \Rightarrow$  $\Rightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$
- **c)** AB = 5

$$BC = x + 1 = 6$$

$$DE = 2x + 10 = 20$$

$$EF = 4x + 4 = 24$$

Q2-

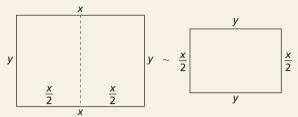


$$\frac{AB}{AD} = \frac{A'B'}{A'D'} \Rightarrow \frac{40}{90} = \frac{A'B'}{135} \Rightarrow A'B' = 60$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{C'D'}{A'D'} \Rightarrow \frac{20}{90} = \frac{C'D'}{135} \Rightarrow C'D' = 30$$

Portanto: A'B' - C'D' = 60 m - 30 m = 30 malternativa b

**Q3-** A folha de dimensões x e y é semelhante à folha de dimensões  $\frac{x}{u}$  e y, como ilustra a figura.



Assim. temos:

$$\frac{y}{\frac{x}{2}} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{2}$$
, pois  $x, y > 0$ .

alternativa b

Q4-Se os polígonos I e II são semelhantes, os ângulos correspondentes são congruentes.

Como os polígonos II e III são congruentes, os ângulos correspondentes são congruentes.

Assim, os polígonos I e III têm ângulos correspondentes congruentes. Portanto, podemos afirmar que esses polígonos são semelhantes.

Q5 - Escrevendo as razões entre as medidas dos lados, temos as seguintes proporções:

$$\frac{2,3}{6,9} = \frac{3,1}{x} = \frac{y}{8,1}$$

$$\frac{2,3}{6,9} = \frac{3,1}{x} \Rightarrow 2,3x = 21,39 \Rightarrow x = 9,3$$

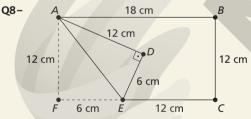
$$\frac{2,3}{6,9} = \frac{y}{8,1} \Rightarrow 6,9y = 18,63 \Rightarrow y = 2,7$$

Q6- Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{9}{x} = \frac{6}{7} \Rightarrow x = 10.5$$

Logo, a área é:  $\frac{10,5\cdot 9}{2}$  = 47,25 alternativa c

**Q7-** Do teorema de Pitágoras, temos:  $2^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ alternativa c



A partir da figura, podemos concluir que, após essa primeira dobradura, a medida do segmento  $\overline{AE}$  é calculado

$$AE^2 = 6^2 + 12^2 \Rightarrow AE^2 = 180 \Rightarrow AE = 6\sqrt{5}$$

alternativa d

**09-a)**  $BC^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow BC^2 = 144 \Rightarrow BC = 12$ Portanto, o cateto  $\overline{BC}$  mede 12 cm.

**b)** 
$$\frac{h}{9} = \frac{12}{15} \Rightarrow h = \frac{9 \cdot 12}{15} \Rightarrow h = \frac{36}{5}$$

Logo,  $h \text{ mede } \frac{36}{5} \text{ cm.}$ 

**c)** 
$$12^2 = 15 \cdot m \Rightarrow m = \frac{144}{15} \Rightarrow m = \frac{48}{5}$$

$$9^2 = 15 \cdot n \Rightarrow n = \frac{81}{15} \Rightarrow n = \frac{27}{5}$$

Assim,  $m \in n \text{ medem } \frac{48}{5} \text{ cm } \in \frac{27}{5} \text{ cm.}$ 

**Q10**- Usando a relação métrica  $a \cdot h = b \cdot c$ , temos:

$$\frac{a}{b \cdot c} + \frac{b}{a \cdot c} + \frac{c}{a \cdot b} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a \cdot b \cdot c} =$$

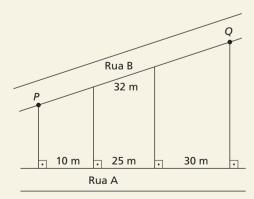
$$= \frac{a^2 + a^2}{a \cdot a \cdot b} = \frac{2a^2}{a^2 \cdot b} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

alternativa c

#### Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.	1 e 2
Identificar figuras planas semelhantes.	3 e 4
Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.	5 e 6
Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.	7, 8, 9 e 10

- Q1- Um arquiteto está desenhando a planta de um salão comercial cujas medidas reais são 4 m de comprimento e 3,25 m de largura.
  - a) Sabendo que essa planta está sendo desenhada na escala 1:200, responda: que medida, em centímetro, deverá ter os segmentos que representam o comprimento e a largura dessa sala?
  - b) Se o arquiteto está usando uma régua graduada, cuja menor divisão é o milímetro, essa escala é a ideal para representar esse salão? Justifique sua resposta.
- Q2- (Cotil) Com a urbanização, as cidades devem melhorar sua infraestrutura, como, por exemplo, fazendo mais vias asfaltadas. Sendo assim, a figura abaixo mostra a rua B, que precisa ser asfaltada do ponto P até o ponto Q. Na rua A, já asfaltada, há três terrenos com frente para a rua B e para a rua A. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3, para a rua A, medem, respectivamente, 10 m, 25 m e 30 m. A frente do lote 2 para a rua B mede 32 m.

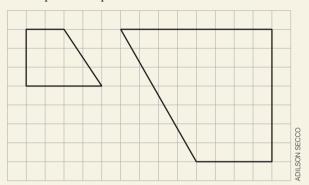


Quantos metros de asfalto serão necessários?

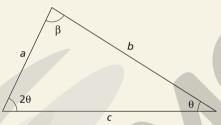
- **a)** 65 m
- **b)** 72 m
- **c)** 38,4 m
- **d)** 83,2 m
- **e)** 84,0 m

- Q3 (UFRGS-RS) Considere as áreas dos hexágonos regulares A e B inscritos, respectivamente, em círculos de raios 1 e 4. A razão entre a área do hexágono A e a área do hexágono B é:
  - **a)**  $\frac{1}{16}$
- **e)** 1

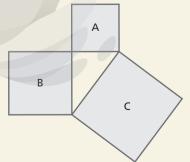
- **b)**  $\frac{1}{9}$
- Q4- Sabendo que a malha quadriculada a seguir é composta de quadrados cujos lados medem uma unidade, pode-se afirmar que os dois trapézios desenhados são semelhantes? Justifique sua resposta.



- Q5 (UPE) Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 5 cm, 7 cm e 8 cm. Quais são as respectivas medidas dos lados de um triângulo semelhante a este cujo perímetro mede 0,6 m?
  - **a)** 15 cm, 21 cm e 24 cm
- **d)** 11 cm, 23 cm e 26 cm
- **b)** 12 cm, 22 cm e 26 cm
- e) 16 cm, 18 cm e 26 cm
- **c)** 18 cm, 20 cm e 22 cm
- Q6- (Unicamp-SP) A figura abaixo exibe um triângulo com lados de comprimentos a, b e c e ângulos internos  $\theta$ ,  $2\theta$  e  $\beta$ .

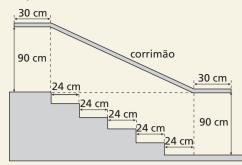


- a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine todos os valores possíveis para o ângulo  $\theta$ .
- **b)** Prove que, se c = 2a, então  $\beta = 90^\circ$ .
- Q7 No esquema a seguir, o quadrado A tem 81 cm<sup>2</sup> de área, o quadrado B tem 144 cm² de área e o quadrado C tem 225 cm2 de área.



- a) Sabendo que cada lado do triângulo é congruente a um lado de um dos quadrados, como pode ser verificado na figura, determine a medida dos lados desse triângulo.
- b) Mostre que o triângulo é retângulo.

**Q8-** (Enem)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

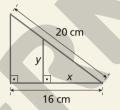
**a)** 1,8 m

**d)** 2,1 m

**b)** 1,9 m

**e)** 2,2 m

- **c)** 2,0 m
- **Q9-** Determine os valores de x e de y para que o triângulo maior tenha o dobro da área do triângulo menor.



- Q10- (Enem) Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada
  - a) no centro do quadrado.
  - b) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.
  - c) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.
  - d) no vértice de um triângulo equilátero de base AB, oposto a essa base.
  - e) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

#### Resoluções da avaliação 2

- Q1-a) Com relação à medida do comprimento, cada 1 cm da planta equivale a 200 cm de distância real. Então, 400 cm na realidade correspondem a 2 cm no desenho. Considerando a medida da largura, temos, em relação à escala usada, 325 cm de distância real, que equivalem a 1,625 cm na planta.
  - b) Não, pois o arquiteto terá dificuldade para representar algumas medidas usando uma régua graduada comum, que apresenta o milímetro como a menor divisão.
- **Q2-** De acordo com o teorema de Tales, podemos escrever que:

$$\frac{32}{PQ} = \frac{25}{10 + 25 + 30} \Rightarrow PQ = 83,2$$

DILSON SECCO

Q3 - A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Logo: 
$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

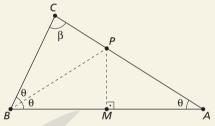
alternativa a

- **Q4-** Escrevendo as razões entre as medidas dos lados paralelos dos trapézios correspondentes, temos  $\frac{4}{8}$  e  $\frac{2}{4}$ . Escrevendo a razão entre as medidas de um par de lados não paralelos dos trapézios correspondentes, temos  $\frac{3}{7}$ . Como as três razões não são iguais, podemos concluir que os trapézios não são semelhantes.
- **Q5** Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo semelhante, em centímetro. Logo, como o perímetro do triângulo que queremos encontrar mede 0,6 m = 60 cm, temos:  $\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{5+7+8} \Leftrightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{8} = \frac{60}{20} =$

$$=3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 21 \\ c = 24 \end{cases}$$

alternativa a

- **Q6- a)** O triângulo é isósceles se  $\beta=\theta$  ou  $\beta=2\theta$ . Logo, temos: se  $\beta=\theta$ , então  $4\theta=180^{\circ}\Rightarrow\theta=45^{\circ};$  se  $\beta=2\theta$ , então  $5\theta=180^{\circ}\Rightarrow\theta=36^{\circ}.$ 
  - **b)** Considerando P o encontro da bissetriz de ABC com o lado  $\overline{AC}$ , os ângulos  $M\hat{B}P$  e  $M\hat{A}P$  são congruentes, e podemos concluir que o triângulo ABP é isósceles de base  $\overline{AB}$ . Considerando M o ponto médio de  $\overline{AB}$ , então  $BM = \frac{2a}{2} = a$  e  $\overline{MP}$  é perpendicular a AB. Como BC = a,  $\overline{BP}$  é lado comum e MBP e CBP são iguais, o que leva à congruência dos triângulos MBP e CBP (caso LAL).

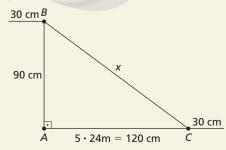


Portanto,  $\beta = 90^{\circ}$ .

**Q7- a)** A área do quadrado A é igual a 81 cm²; logo, seu lado mede 9 cm. A área do quadrado B é igual a 144 cm²; então, seu lado mede 12 cm. Considerando o quadrado C, cuja área é igual a 225 cm², verificamos que seu lado mede 15 cm.

Assim, concluímos que os lados do triângulo medem 9 cm, 12 cm e 15 cm.

- **b)** Considerando que os dois lados menores sejam os catetos e o lado maior, a hipotenusa, vamos verificar se o teorema de Pitágoras é válido para esse triângulo:  $9^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow 81 + 144 = 225 \Rightarrow 225 = 225$  Como o teorema de Pitágoras é satisfeito, esse triângulo é retângulo.
- **Q8-** Na figura, x é a hipotenusa do triângulo ABC.



Então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow x = 150$$

Portanto, o comprimento total do corrimão, em metro, é:  $1,5+2\cdot 0,3=2,1$ 

alternativa d

**Q9**- Representando por  $\alpha$  a medida do cateto do triângulo maior, cuja medida não foi dada, temos:

$$a^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow a = 12$$

Logo, esse cateto mede 12 cm.

Sabemos que a área do triângulo maior é igual ao dobro da área do triângulo menor, então:

$$\frac{16\cdot 12}{2} = 2\cdot \frac{x\cdot y}{2} \Rightarrow xy = 96 \text{ (I)}$$

Analisando os triângulos, podemos concluir que eles são semelhantes. Logo:

$$\frac{12}{y} = \frac{16}{x} \Rightarrow 12x = 16y \Rightarrow x = \frac{16y}{12} \Rightarrow x = \frac{4y}{3}$$
 (II)

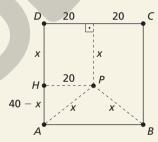
De (I) e (II), temos:

$$\frac{4y}{3} \cdot y = 96 \Rightarrow y^2 = 72 \Rightarrow y = 6\sqrt{2}$$

$$x = \frac{4 \cdot 6\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x = 8\sqrt{2}$$

Portanto, os catetos y e x medem  $6\sqrt{2}$  cm e  $8\sqrt{2}$  cm.

**Q10-** Organizando os dados do problema na figura, em que P é o ponto de construção da estação, temos:



Pelo teorema de Pitágoras no triângulo APH, obtemos:

$$x^2 = 20^2 + (40 - x)^2 \Rightarrow 80x = 2000 \Rightarrow x = 25$$

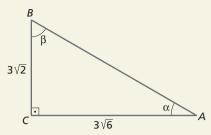
Então, a nova estação será construída na perpendicular à estrada que liga  $C \in D$ , passando por seu ponto médio, a 25 km da estrada.

alternativa c

### Capítulo 2 - Trigonometria no triângulo retângulo

#### Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
ldentificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.	1 e 2
Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.	3, 4, 5, 6, 7 e 8
Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.	9 e 10



- a) Calculem sen  $\alpha$ , cos  $\alpha$  e tg  $\alpha$ .
- b) Com base apenas nos resultados obtidos no item anterior, sem fazer cálculos, determinem sen  $\beta$  e cos  $\beta$ .
- c) Determinem o valor de tg  $\beta$ , considerando os valores de sen  $\beta$  e cos  $\beta$  obtidos no item  ${f b}$ .
- **d)** Com um transferidor, meçam os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ . Em seguida, obtenham os valores de seno, cosseno e tangente desses ângulos.
- e) Comparem os valores encontrados nos itens a, b e c com os cálculos do item anterior.
- **Q2-** (Uece) As diagonais de um retângulo dividem cada um de seus ângulos internos em dois ângulos cujas medidas são respectivamente  $30^{\circ}$  e  $60^{\circ}$ . Se x é a medida do maior lado e y é a medida do menor lado do retângulo, então a relação entre x e y é

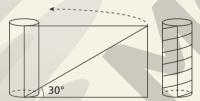
**a)** 
$$x^2 - 4y^2 = 0$$

**b)** 
$$x^2 - 2y^2 = 0$$

**c)** 
$$x^2 - 6y^2 = 0$$

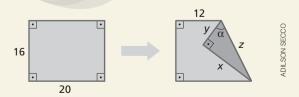
**d)** 
$$x^2 - 3y^2 = 0$$

**Q3**– (Enem) Para decorar um cilindro circular reto, será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma  $30^\circ$  com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede  $\frac{6}{\pi}$  cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



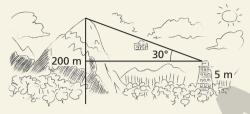
O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

- **a)**  $36\sqrt{3}$
- **b)**  $24\sqrt{3}$
- **c)**  $4\sqrt{3}$
- **d)** 36
- **e)** 72
- Q4- Uma folha de papel foi dobrada conforme o esquema:

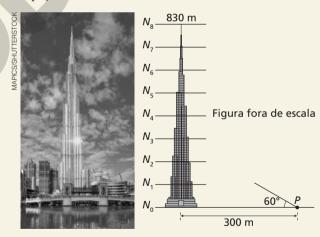


- a) Determine as medidas x,  $y \in z$  do triângulo formado com a dobra.
- **b)** Calcule sen  $\alpha$ , cos  $\alpha$  e tg  $\alpha$ .

Q5- (Cotil) O prefeito de uma cidade turística pretende construir um teleférico unindo o parque cultural ao topo de uma montanha de 200 m de altura, como mostra a figura abaixo. Considerando que a plataforma de embarque do teleférico deve estar a uma altura de 5 m do chão e que o pico da montanha possa ser observado sob um ângulo de 30°, determine a distância percorrida pelo teleférico do ponto de embarque ao topo da montanha.



- **a)** 350 m
- **b)** 370 m
- **c)** 390 m
- **d)** 410 m
- **Q6-** (Cesgranrio-RJ) Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente a:
  - **a)**  $6\sqrt{3}$  m
  - **b)** 12 m
  - **c)** 13,6 m
  - **d)**  $9\sqrt{3}$  m
  - **e)** 18 m
- Q7- (PUC) Burj Khalifa, localizado em Dubai, é considerado o edifício mais alto do mundo, com cerca de 830 m. A figura ao lado da fotografia representa a extensão vertical desse edifício altíssimo, dividida em 8 níveis igualmente espaçados.



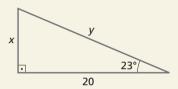
Dado: adote  $\sqrt{3}$  = 1,73 em suas contas finais.

Utilizando os dados fornecidos, um feixe de *laser* emitido a partir do ponto indicado na figura por P atingiria a coluna central do Burj Khalifa, aproximadamente, na marca

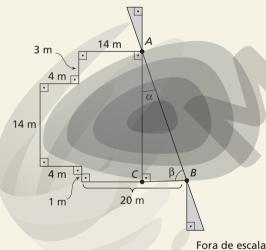
- **a)** N5
- **b)** N6
- **c)** N7
- **d)** N4
- **e)** N3
- **Q8-** (Unifesp) De acordo com a norma brasileira de regulamentação de acessibilidade, o rebaixamento de calçadas para travessia de pedestres deve ter inclinação constante e não

- a) Calcule a medida de  $\overline{AB}$  na situação limite da regulamentação.
- **b)** Calcule o comprimento de  $\overline{AC}$  na situação em que a inclinação da rampa é de 5%. Deixe a resposta final com raiz quadrada.
- **Q9–** Usando a tabela de razões trigonométricas, determine os valores de x e de y indicados no triângulo a seguir.





Q10– (Famerp-SP) Duas equipes de escavação vão perfurar um túnel AB em uma montanha, sendo que uma delas partirá de A e a outra de B, a fim de se encontrarem. Para cavar nas direções corretas os engenheiros precisam determinar as medidas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , indicados na figura, que essa direção forma com as retas perpendiculares  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente.



#### Dados:

Х	63,4°	68,2°	71,6°	74°	76°
tg x	2	2,5	3	3,5	4

De acordo com o projeto e com os dados fornecidos,  $\alpha$  e  $\beta$  são, respectivamente, iguais a

- **a)** 18,4° e 71,6°
- **b)** 21,8° e 68,2°
- **c)** 14° e 76°
- **d)** 26,6° e 63,4°
- **e)** 16° e 74°

#### Resoluções da avaliação 1

Q1- a) Calculando a medida da hipotenusa, temos:

$$(3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{2})^2 = AB^2 \Rightarrow AB = 6\sqrt{2}$$

Assim

$$sen \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- **b)**  $\operatorname{sen} \beta = \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  $\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$
- **c)** tg  $\beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$
- **d)**  $\alpha = 30^{\circ} \text{ e } \beta = 60^{\circ}$

Assim:

sen 
$$30^{\circ} = \frac{1}{2}$$
;  $\cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\tan 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 

sen 
$$60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
;  $\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$ ;  $\log 60^{\circ} = \sqrt{3}$ 

- **e)** Espera-se que os estudantes percebam que os valores encontrados são iguais.
- **Q2** Cada diagonal divide o retângulo em dois triângulos retângulos congruentes, cujos ângulos agudos medem 30° e 60°. Como o maior lado se opõe ao maior ângulo, temos:

$$tg 60^{\circ} = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$
  $x^2 - 3y^2 = 0$ 

alternativa d

**Q3 –** O comprimento da circunferência da base do cilindro é:

$$2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12$$

A segunda figura sugere que o papel transparente deu seis voltas no cilindro e, portanto, o comprimento do retângulo é de  $6\cdot12=72$ 

Dessa forma: tg  $30^\circ = \frac{h}{72} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = 24\sqrt{3}$ 

**Q4- a)** A medida x representa a largura da folha; logo: x = 16.

A medida y é parte do comprimento da folha; então:

$$y + 12 = 20 \Rightarrow y = 8$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

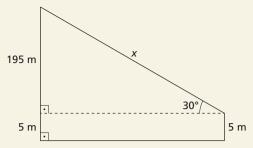
$$16^2 + 8^2 = z^2 \Rightarrow z^2 = 320 \Rightarrow z = 8\sqrt{5}$$

**b)** sen 
$$\alpha = \frac{16}{8\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$tg \ \alpha = \frac{16}{8} = 2$$

Q5- Organizando os dados na figura, temos:



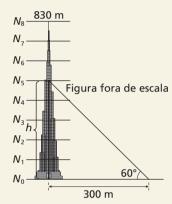
sen  $30^{\circ} = \frac{195}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{195}{x} \Rightarrow x = 390$ alternativa c

Q6- Considerando o comprimento da rampa (36 metros) e sua angulação (30°), temos:

sen 
$$30^{\circ} = \frac{h}{36} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{36} \Rightarrow h = 18$$

alternativa e

**Q7 -** A medida de cada nível será: 830 : 8 = 103,75



Na figura, temos:

$$tg 60^\circ = \frac{h}{300} \Rightarrow h = 519$$

Assim:

 $519:103,75 \approx 5$ 

alternativa a

Q8-a) Na situação limite, em centímetros, temos:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{10}{AB} = \frac{1}{12} \Rightarrow AB = 120$$

**b)** Na situação em que a inclinação é de 5%, temos:  $\frac{BC}{AB} = \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{10}{AB} = \frac{1}{20} \Rightarrow AB = 200$ 

$$\frac{BC}{AB} = \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{10}{AB} = \frac{1}{20} \Rightarrow AB = 200$$

Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = 10\sqrt{401}$$

**Q9-** 
$$\cos 23^\circ = \frac{20}{y} \Rightarrow 0.9205 = \frac{20}{y} \Rightarrow y \approx 21.73$$

$$tg\ 23^{\circ} = \frac{x}{20} \Rightarrow 0.4245 = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 8.49$$

Q10- Temos:

$$AC = 3 + 14 + 1 = 18$$

$$BC = 20 - 14 = 6$$

$$tg \beta = \frac{AC}{BC} \Rightarrow tg \beta = \frac{18}{6} \Rightarrow \beta \approx 71.6^{\circ}$$

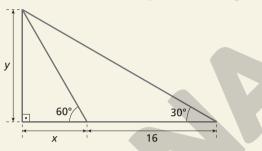
$$\alpha = 90 - \beta \Rightarrow \alpha = 90 - 71.6 \Rightarrow \alpha = 18.4$$

alternativa a

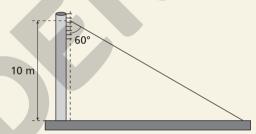
#### Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
ldentificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.	1 e 2
Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.	3, 4, 5, 6, 7 e 8
Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.	9 e 10

**Q1-** Determine o valor de x e de y indicados na figura.



Q2-(IFPE) Após a instalação de um poste de energia, há a orientação de que ele fique apoiado por um período de 48 horas, após a sua fixação no terreno, por meio de 4 cabos de sustentação. A figura a seguir ilustra um desses cabos:



Sabendo que o cabo de sustentação do poste forma um ângulo de 60° com a vertical e que ele está conectado ao poste a uma altura de 10 metros, determine o comprimento mínimo do cabo.

**a)** 10 m

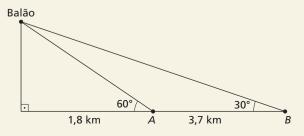
**d)** 20 m

**b)** 5 m

e) 12 m

- c) 25 m
- Q3-(Enem) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: <a href="https://arquivo.correiodobrasil.com.br/balao-">https://arquivo.correiodobrasil.com.br/balao-</a> atmosferico-assusta-moradores-de-bauru/>. Acesso em: 1º jun. 2020



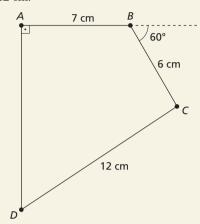
Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

- **a)** 1.8 km
- **d)** 3,7 km

**b)** 1,9 km

e) 5.5 km

- **c)** 3,1 km
- Q4- (Insper) O quadrilátero ABCD indicado na figura possui ângulo reto em A, um ângulo externo de  $60^{\circ}$  em B e três lados de medidas conhecidas, que são AB = 7 cm, BC = 6 cm e CD = 12 cm.

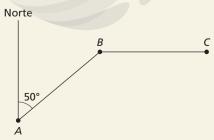


Nesse quadrilátero, a medida de  $\overline{AD}$ , em centímetros, é igual a

- **a)**  $3(2 + \sqrt{3})$
- **c)**  $2(\sqrt{11} + \sqrt{3})$
- **e)**  $12\sqrt{3}$
- **b)**  $2\sqrt{11} + 3\sqrt{3}$  **d)**  $9\sqrt{3}$
- Q5 Em certo horário do dia, a sombra de um poste, projetada pelo Sol, tem 25 m de comprimento. Sabendo que nesse horário os raios solares formam um ângulo de 45° com o solo, determine a altura desse poste.

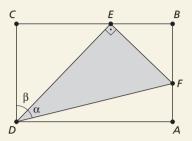


Q6- (FGV) A figura abaixo mostra a trajetória de Renato com seu barco.



Renato saiu do ponto A e percorreu 10 km em linha reta, até o ponto *B*, numa trajetória que faz 50° com a direção

- norte. No ponto B, virou para o leste e percorreu mais 10 km em linha reta, chegando ao ponto C. Calcule a distância do ponto A ao ponto C. Dados: sen  $20^{\circ} = 0.342$ ,  $\cos 20^{\circ} = 0.940.$
- Q7- (Uerj) Na figura abaixo, observa-se o retângulo ABCD, que contém o triângulo retângulo DEF, no qual DF = 1.



Considerando os ângulos  $E\hat{D}F = \alpha$  e  $C\hat{D}E = \beta$ , determine o comprimento do lado  $\overline{DA}$  em função de  $\alpha$  e  $\beta$ .

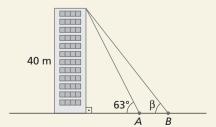
- Q8- (Uece) Uma pessoa, com 1,7 m de altura, está em um plano horizontal e caminha na direção perpendicular a um prédio cuja base está situada neste mesmo plano. Em certo instante, essa pessoa visualiza o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 30 graus. Ao caminhar mais 3 m, visualiza o ponto mais alto do prédio, agora sob um ângulo de 45 graus. Nestas condições, a medida da altura do prédio, em metros, é aproximadamente

  - **b)** 6.6
  - **c)** 7,6
  - **d)** 8,6
- Q9 Na entrada de uma loja está sendo projetada uma rampa, conforme mostra o esquema a seguir.



Se a rampa deve ter 10% de inclinação, determine:

- **a)** o comprimento horizontal (x) dessa rampa;
- **b)** o ângulo de inclinação α; (Dica: Consulte a tabela de razões trigonométricas.)
- c) o comprimento (y) aproximado da rampa.
- **Q10-** Do alto de um prédio de 40 m de altura, um observador vê um carrinho de pipoca e uma barraca de pastel alinhados com a entrada do prédio. Eles estão representados, no esquema a seguir, pelos pontos A e B, respectivamente.



Usando uma calculadora, determine:

- a) a distância entre o carrinho de pipoca e o prédio;
- **b)** o valor do ângulo  $\beta$ , considerando que AB = 11 m.

#### Resoluções da avaliação 2

Q1- tg 
$$30^\circ = \frac{y}{x+16} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x+16} \Rightarrow y = \frac{x\sqrt{3}+16\sqrt{3}}{3}$$
 (I)

tg 60° = 
$$\frac{y}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\sqrt{3}$$
 (II)

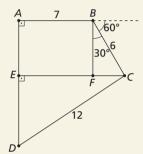
$$x\sqrt{3} = \frac{x\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x\sqrt{3} = x\sqrt{3} + 16\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \Rightarrow x = 8$$

Como  $y = x\sqrt{3}$ , então  $y = 8\sqrt{3}$ .

Portanto,  $x = 8 e y = 8\sqrt{3}$ .

- **Q2** Considerando *x* o comprimento do cabo, em metro, temos:  $\cos 60^\circ = \frac{10}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 20$
- **Q3 -** Sendo *h* a altura em que se encontrava o balão, temos: tg  $60^{\circ} = \frac{h}{18} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{18} \Rightarrow h \approx 3.1$  alternativa c
- Q4- Em centímetro, temos:



sen 
$$30^\circ = \frac{CF}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CF}{6} \Rightarrow CF = 3$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BF}{6} \Rightarrow BF = 3\sqrt{3}$$
  
No triângulo *CDE*, retângulo em E, temos:

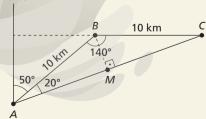
$$EC^2 + ED^2 = CD^2 \Rightarrow 10^2 + ED^2 = 12^2 \Rightarrow ED = 2\sqrt{11}$$

Por fim, temos:  $AD = AE + ED \Rightarrow AD = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{11}$ alternativa b

**Q5** – Representando a medida da altura do poste por x, temos:  $tg\ 45^\circ = \frac{x}{25} \Rightarrow 1 = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 25$ 

Portanto, o poste tem 25 m de altura.

Q6- Norte



$$\cos 20^{\circ} = \frac{AM}{10} \Rightarrow AM = 10 \cdot \cos 20^{\circ}$$

Logo:  $AC = 2 \cdot AM \Rightarrow AC = 2 \cdot 10 \cdot 0.940 \Rightarrow AC = 18.8$ 

Q7 - 
$$m(\hat{CDF}) = (\alpha + \beta)$$
  
 $m(\hat{AFD}) = (\alpha + \beta)$ 

Assim, do  $\triangle ADF$ , temos: sen  $(\alpha + \beta) = \frac{DA}{DF} \Rightarrow$ 

$$\Rightarrow$$
 sen  $(\alpha + \beta) = \frac{DA}{1} \Rightarrow DA =$ sen  $(\alpha + \beta)$ 

Q8- Seja h a altura do prédio, então:

tg 30° = 
$$\frac{h-1.7}{h-1.7+3}$$
  $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$  =  $\frac{h-1.7}{h+1.3}$   $\Rightarrow h \approx 5.6$  m alternativa a

**09- a)** Como a rampa deve ter 10% de inclinação, para cada 10 m de altura serão necessários 100 m de comprimento horizontal. Logo, x = 25, ou seja, para 2,5 m de altura serão necessários 25 m de comprimento horizontal.

**b)** 
$$tg \alpha = \frac{2.5}{25} = 0.1.$$

Consultando a tabela, verifica-se que tg  $6^{\circ} = 0,1051$ . Logo, pode-se aproximar o valor de α para 6°. Assim,

**c)** sen 
$$\alpha = \frac{2.5}{y} \Rightarrow 0.1045 = \frac{2.5}{y} \Rightarrow y \approx 23.92$$

Logo, a rampa tem cerca de 23,92 m de comprimento.

Q10-a) Representando a distância entre o carrinho de pipoca e o prédio por x, temos:

$$tg 63^{\circ} = \frac{40}{x} \Rightarrow 1,96 = \frac{40}{x} \Rightarrow x \approx 20,41$$

Portanto, a distância entre o prédio e o carrinho de pipoca é, aproximadamente, 20,41 m.

**b)** Se AB = 11, então a distância entre a barraca de pastel e o prédio é: 20,41 + 11 = 31,41

Assim: 
$$tg \ \beta = \frac{40}{31,41} \Rightarrow tg \ \beta \simeq 1,27 \Rightarrow \beta \simeq 52^{\circ}$$

## Capítulo 3 - Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer

#### Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.	1 e 2
Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.	3
Ampliar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°.	4 e 5
Estender a relação fundamental da trigonometria para o ciclo trigonométrico.	6
Aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.	7, 8, 9 e 10

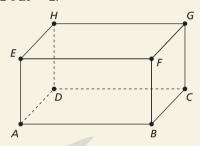
- Q1- O pêndulo de um relógio de parede descreve um ângulo de  $60^{\circ}$ , e sua extremidade percorre um arco  $\widehat{AB}$ . Calcule o comprimento desse arco, sabendo que o pêndulo tem 0,60 m de comprimento.
- **Q2-** (Eear) Gabriel verificou que a medida de um ângulo é  $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a
  - a) 48°
  - **b)** 54°
  - c) 66°
  - **d)** 72°
- **Q3** Resolva as equações, com  $x \in [0, 2\pi]$ .

**a)** 
$$2 \cdot \text{sen } x + \sqrt{3} = 0$$

**b)** 
$$3 \cdot tg \left( x - \frac{\pi}{6} \right) - \sqrt{3} = 0$$

A figura acima representa o trapézio escaleno de altura 6 cm, com base menor medindo 13 cm, um dos ângulos internos da base maior medindo 75° e lado transversal oposto a esse ângulo igual a 12 cm. Qual é a área, em cm², desse trapézio?

- **a)** 120
- **b)** 118
- **c)** 116
- **d)** 114
- **e)** 112
- **Q5** Calcule o valor da expressão  $\frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6}}{\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}}.$
- **Q6–** Sendo  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  e  $\alpha$  um arco do QIV, determine:
  - a) sen o
- **b)** tg c
- **Q7-** (Fuvest-SP) O paralelepípedo retorretângulo ABCDEFGH, representado na figura, tem medida dos lados AB = 4, BC = 2 e BF = 2.



O seno do ângulo HÂF é igual a

a)  $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ 

**d)**  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 

**b)**  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 

**e)**  $\frac{3}{\sqrt{10}}$ 

- c)  $\frac{2}{\sqrt{10}}$
- **Q8-** (Ifal) Um triângulo possui lados iguais a 6, 9 e 11. O cosseno do maior ângulo interno desse triângulo é:
  - a)  $\frac{11}{15}$
  - **b)**  $-\frac{1}{27}$
  - c)  $\frac{26}{33}$
  - **d)**  $-\frac{2}{27}$
  - **e)** -1
- **Q9 -** (Uece) Se as medidas de dois lados de um triângulo são respectivamente 7 m e 5  $\sqrt{2}\,$  m e se a medida do ângulo entre esses lados é  $135^\circ$ , então, a medida, em metros, do terceiro lado é
  - **c)** 13

a) 12b) 15

**d)** 14

**Q10-** (Unicamp-SP) A figura abaixo exibe um triângulo isósceles com dois lados de comprimento a=5 cm e um dos ângulos internos igual a  $\theta$ , em que cos  $\theta=\frac{3}{5}$ .



- a) Calcule a área desse triângulo.
- b) Determine o comprimento do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

#### Resoluções da avaliação 1

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Q1-360^{\circ} -- 2\pi \cdot 0,60} \\
60^{\circ} -- x
\end{array} \Rightarrow x = \frac{60^{\circ} \cdot 2\pi \cdot 0,60}{360^{\circ}} \Rightarrow x \approx 0,628$$

O pêndulo descreve um arco de aproximadamente 0,628 m.

**Q2**- Sabendo que  $\pi$  rad equivale a 180°, temos:

$$\frac{3\pi}{10}$$
 rad =  $\frac{3 \cdot 180^{\circ}}{10}$  = 54°

alternativa b

**Q3-a)** 
$$2 \cdot \text{sen } x + \sqrt{3} = 0$$
  
 $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$ 

Portanto, 
$$S = \left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$$
.

**b)** 
$$3 \cdot \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Os arcos cuja tangente é  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  medem  $\frac{\pi}{6}$  ou  $\frac{7\pi}{6}$ .

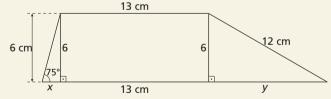
Assim:

• 
$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

• 
$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto,  $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$ .

Q4- Organizamos os dados na figura a seguir:



$$tg 75^{\circ} = \frac{6}{x} \Rightarrow tg (45^{\circ} + 30^{\circ}) = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{tg 45^{\circ} + tg 30^{\circ}}{1 - tg 30^{\circ} \cdot tg 45^{\circ}} = \frac{6}{x}$$

Logo:  $x = 12 - 6 \cdot \sqrt{3}$ 

Calculando o valor de *u*, temos:

$$y^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow y = 6 \cdot \sqrt{3}$$

E a medida da base maior é dada por:

$$x + 13 + y = 12 - 6 \cdot \sqrt{3} + 13 + 6 \cdot \sqrt{3} = 25$$

Portanto, a sua área A é dada por:

$$A = \frac{(25+13) \cdot 6}{2} = 114$$

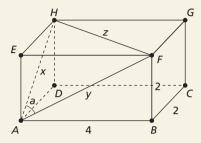
alternativa d

Q6-a) 
$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \alpha \in \text{QIV}$$
 
$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

Como  $\alpha \in QIV$ , temos sen  $\alpha = -\frac{4}{5}$ .

**b)** 
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

Q7-



$$\triangle ABF$$
:  $y^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow y^2 = 20 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$ 

$$\triangle EHF: z^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow z^2 = 20 \Rightarrow z = 2\sqrt{5}$$

$$\triangle EHA$$
:  $x^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ 

Então, pela lei dos cossenos, temos:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos a \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

E pela relação fundamental, temos:

$$sen^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow sen \ a = \frac{3}{\sqrt{10}}$$
alternativa e

**Q8-** Notamos que esse triângulo não é retângulo, pois não é pitagórico.

Assim, aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \theta \Rightarrow 11^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{-1}{97}$$

alternativa b

**Q9** – Considerando *x* a medida do terceiro lado, aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 72 + (5\sqrt{2})2 - 2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow x = 13$$
  
alternativa c

**Q10-a)** Como  $\cos\theta = \frac{3}{5}$ , então:  $sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \Rightarrow sen \theta = \frac{4}{5}$ 

Logo, a área S do triângulo, em cm², é dada por:

$$S = \frac{a \cdot a \cdot \sin \theta}{2} = 10$$

**b)** Sendo *x* a medida do 3º lado, temos:

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \theta \Rightarrow x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

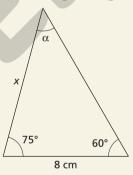
Considerando r a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo, em centímetro, temos:

$$S = \frac{a \cdot a \cdot x}{4r} \Rightarrow 10 = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5}}{4r} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

#### Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.	1 e 2
Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.	3
Ampliar as razões trigonométricas para ângulos maiores que 90°.	4, 5 e 6
Estender a relação fundamental da trigonometria para o ciclo trigonométrico.	7
Aplicar a lei do senos e a lei dos cossenos.	8, 9 e 10

- **Q1-** Quanto mede o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 5 h 40 min?
- **Q2-** (Uece) Em um relógio analógico circular usual, no momento em que está registrando 10 horas e 35 minutos, a medida do menor ângulo entre os ponteiros indicadores de horas e minutos é:
  - **a)** 108°
  - **b)** 107°30'
  - **c)** 109°
  - **d)** 108°30'
- **Q3 -** Resolva a equação trigonométrica  $tg^2 x = 1$ , com  $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ .
- Q4- (UFPR) Considere o triângulo a seguir:

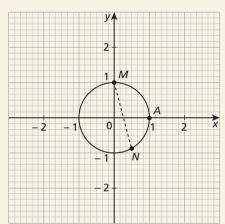


- a) Quanto mede o ângulo α?
- **b)** Quanto mede x?
- **Q5** Em relação aos eixos xe ye à origem O, encontre os arcos simétricos dos arcos de medida:
  - a)  $\frac{4\pi}{5}$  rad
  - **b)** 320°
- **Q6-** (IFCE) O valor de cos 105° é:
  - **a)**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - **b)**  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
  - c)  $\frac{\sqrt{2} \sqrt{6}}{2}$
  - **d)**  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$
  - **e)**  $\frac{\sqrt{2} \sqrt{6}}{4}$
- **Q7 –** Calcule o valor de y tal que  $y = \cos x + \sin x$ , sabendo que  $\tan x = -1$  e que o arco x pertence ao  $2^{\circ}$  quadrante.

**Q8-** (Unicamp-SP) Considere o triângulo retângulo *ABC* exibido na figura abaixo, em que AB = 2 cm, BC = 1 cm e CD = 5 cm. Então, o ângulo  $\theta$  é igual a

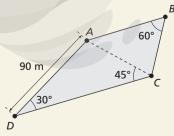


- **a)** 15°
- **b)** 30°
- c) 45°
- **d)** 60°
- **Q9 –** (UFRGS-RS) Na circunferência de raio 1, representada na figura a seguir, os pontos M e N são tais que o arco de extremidades A e M mede  $\frac{\pi}{2}$  rad e o arco de extremidades A e N mede  $\frac{-\pi}{3}$  rad.



A distância entre os pontos M e N é

- **a)**  $\sqrt{2-\sqrt{3}}$
- **b)**  $2 \sqrt{3}$
- **c)**  $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
- **d)** 1
- **e)**  $2 + \sqrt{3}$
- **Q10–** (UFJF-MG) Um terreno plano, em forma do quadrilátero ABCD, possui um de seus lados medindo 90 m, os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  paralelos e dois ângulos opostos medindo 30° e 60°. Além disso, a diagonal  $\overline{AC}$  desse terreno forma 45° com o lado  $\overline{CD}$ .



A medida do menor lado desse terreno, em metros, é

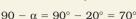
a)  $\frac{45\sqrt{2}}{2}$ 

- **c)**  $15\sqrt{3}$  **d)**  $30\sqrt{3}$
- **b)**  $\frac{45\sqrt{6}}{2}$
- **e)**  $90\sqrt{3}$

#### Resoluções da avaliação 2

**Q1-** A medida do menor ângulo formado pelos ponteiros é igual a  $90^{\circ} - \alpha$ .

$$\begin{cases} 60 \text{ min} & --- 30^{\circ} \\ 40 \text{ min} & --- \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = 20^{\circ}$$



O menor ângulo formado pelos ponteiros mede 70°.



**Q2–** O menor ângulo em tais condições é dado por:  $\beta = 90^{\circ} + \alpha$ , em que  $\alpha$  é a medida, em grau, que o ponteiro das horas percorre em 35 min. Assim:

$$\alpha = \frac{35 \cdot 30^{\circ}}{60} \Rightarrow \alpha = 17^{\circ}30'.$$

Portanto:  $\beta = 90^{\circ} + 17^{\circ}30' \Rightarrow \beta = 107^{\circ}30'$  alternativa b

**Q3-**  $\operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \text{ ou } \operatorname{tg} x = 1$ 

Para tg x = -1, temos:

$$x = 2\pi - \pi = 4 = 7\frac{\pi}{4}$$
 ou  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}$ 

Para tg x = 1, temos:

$$x = \frac{\pi}{4}$$
 ou  $x = \pi + \frac{\pi}{4} = 5\frac{\pi}{4}$ 

Como  $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ , então:  $x = \frac{\pi}{4}$ 

- **Q4- a)**  $\alpha + 75^{\circ} + 60^{\circ} = 180^{\circ} \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$ 
  - b) Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen }60^{\circ}} = \frac{8}{\text{sen }45^{\circ}} \Rightarrow x = 4 \cdot \sqrt{6}$$

**Q5- a)** eixo *x*:

$$2\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$$

eixo u

$$\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$$

..........

$$\pi + \frac{4\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$$



**b)** eixo *x*:

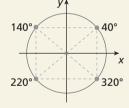
$$360^{\circ} - 320^{\circ} = 40^{\circ}$$

eixo y:

$$(360^{\circ} - 320^{\circ}) + 180^{\circ} = 220^{\circ}$$

origem:

$$320^{\circ} - 180^{\circ} = 140^{\circ}$$



**Q6-**  $\cos 105^\circ = \cos (60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow \cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$  alternativa e

**Q7-** 
$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = -1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\operatorname{cos} x$$

 $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ 

$$(-\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$
  
Como  $x \in QII$ , temos  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Então, sen  $x = -\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Portanto:

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 0$$



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABC e ABD, temos:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = \therefore AC^2 = 2^2 + 1^2 + \therefore AC = \sqrt{5}$$

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = \therefore AD^2 = 2^2 + 6^2 + \therefore AD = 2\sqrt{10}$$

Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo ACD, temos:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos \theta$$

$$5^2 = (\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2 \cdot (\sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{10}) \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{20}{4 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo:  $\theta = 45^{\circ}$ 

alternativa c

**Q9-** A soma dos arcos MA e NA resulta em um arco total medindo  $150^\circ$ , conforme ilustra a imagem. A distância entre os pontos M e N pode ser obtida pela lei dos cossenos.  $x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 150^\circ \Rightarrow x = \sqrt{2^- + \sqrt{3}}$  alternativa c

**Q10**- 
$$\Delta DAC$$
:  $\frac{90}{\text{sen }45^{\circ}} = \frac{AC}{\text{sen }30^{\circ}} \Rightarrow AC = 45\sqrt{2}$ 

$$\triangle ABC$$
:  $\frac{BC}{\text{sen }45^{\circ}} = \frac{AC}{\text{sen }60^{\circ}} \Rightarrow BC = 30\sqrt{3}$ 

alternativa d

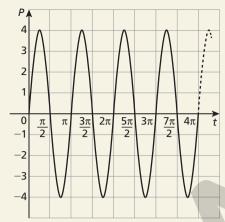
# Capítulo 4 - Funções trigonométricas

#### Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.	1
Estender o conceito de ciclo trigonométrico em IR.	2
Resolver equações trigonométricas.	3, 4 e 5
Construir e analisar gráfico de funções trigonométricas.	6, 7, 8, 9 e 10

**Q1-** (Enem) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo  $\pm A \cdot \text{sen}$  ( $wt + \theta$ ), que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência  $w = \frac{2\pi}{T}$ , em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo;  $\theta$  é o ângulo de fase  $0 \le \theta < \frac{2\pi}{W}$ , que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento. O gráfico representa um movimento periódico, P = P(t), em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão

do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.



A expressão algébrica que representa a posição P(t), da cabeça do pistão, em função do tempo t é

- **a)** P(t) = -4 sen (2t)
- **b)** P(t) = 4 sen (2t)
- **c)** P(t) = -4 sen (4t)
- **d)**  $P(t) = 4 \, \text{sen} \left( 2t + \frac{\pi}{4} \right)$
- **e)**  $P(t) = 4 \, \text{sen} \left( 4t + \frac{\pi}{4} \right)$
- **Q2–** (Uece) Se f e g são funções reais de variável real definidas por  $f(x) = \sin^2 x$  e  $g(x) = \cos^2 x$ , então seus gráficos, construídos em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, se cruzam exatamente nos pontos cujas abcissas são
  - **a)**  $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$ , em que k é um número inteiro qualquer.
  - **b)**  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , em que k é um número inteiro qualquer.
  - c)  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ , em que k é um número inteiro qualquer.
  - **d)**  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ , em que k é um número inteiro qualquer.
- **Q3-** (UEG-GO) Os valores de x, sendo  $0 \le x \le 2\pi$ , para os quais  $f(x) = \text{sen } x \in g(x) = \cos x$  se interceptam, são:
  - **a)**  $\frac{\pi}{4} e^{\frac{3\pi}{4}}$
  - **b)**  $\frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$
  - **c)**  $\frac{\pi}{4} e^{\frac{5\pi}{4}}$
  - **d)**  $\frac{5\pi}{4} e^{\frac{7\pi}{4}}$
  - **e)**  $\frac{\pi}{4} \in \frac{7\pi}{4}$
- **Q4-** (PUC-RJ) Considere a equação sen  $(2\theta) = \cos \theta$ . Assinale a soma de todas as soluções da equação com  $\theta \in [0, 2\pi]$ .
  - a)  $\frac{2\pi}{3}$
  - **b)**  $\frac{\pi}{3}$
  - c)  $\frac{3\pi}{2}$
  - d)  $\frac{\pi}{6}$
  - **e)** 3π
- **Q5 –** (ITA) Determine o conjunto de soluções reais da equação  $3\cos\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$   $tg^2x=1$ .

- Q6- (UFRGS-RS) Considere a função real de variável real f(x) = 3 - 5 sen (2x + 4). Os valores de máximo, mínimo e o período de f(x) são, respectivamente,
  - **a)**  $-2, 8, \pi$
  - **b)** 8, -2,  $\pi$
  - **c)**  $\pi$ , -2, 8
  - **d)** π, 8, –2
  - **e)** 8,  $\pi$ , -2
- Q7 (Espcex) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão  $P(t) = 10^3 \left\{ \cos \left( \frac{t-2}{6} \right) \pi + 5 \right\}$ em que o tempo t é medido em meses

É correto afirmar que

- a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do
- **b)** a população atinge seu máximo em t = 6.
- c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
- d) a população média anual é de 6.000 animais.
- e) a população atinge seu mínimo em t=4 com 6.000
- **Q8** Sendo  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos x$ , construa o gráfico de f e determine o domínio, a imagem, o período e a amplitude de f.
- Q9- (UEL-PR) Uma empresa de produtos alimentícios recebeu de seu contador uma planilha com os lucros mensais referentes ao ano de 2017. Ao analisar a planilha, a empresa constatou que, no mês de abril, teve R\$ 50.000,00 de lucro e que, no mês de junho, o lucro foi de R\$ 30.000,00. Determine o lucro da empresa, em dezembro de 2017, sabendo que a função que descreve o lucro L no mês t daquele ano é definida por  $L(t) = a \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} t \right) + b$ , em que  $1 \le t \le 12, a > 0 e b > 0.$
- **Q10** Dada a função f, tal que  $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ , construa o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período de f.

### Resoluções da avaliação 1

Q1- Por se tratar da função seno, sabemos que seu período é  $2\pi$ , mas que seu período no gráfico é  $\pi$ . Então  $\pi = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow w = 2$ 

Como a função seno é crescente no 1º quadrante e sua imagem é o intervalo [-1, 1], concluímos que A = 4, já que a função  $A \cdot \text{sen}(wt + \theta)$  varia no intervalo [-4, 4] e é crescente em  $\left| 0, \frac{\pi}{4} \right|$ . E, por fim, sendo P(0) = 0 e  $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ , temos:  $0 = 4 \operatorname{sen} (2 \cdot 0 \cdot \theta) \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ 

Portanto, a função procurada é P(t) = 4 sen (2t). alternativa b

**Q2-** As abscissas dos pontos de intersecção dos gráficos de fe g são tais que:

 $\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou sen } x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{Ent\tilde{ao}} : x = \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{k}\pi}{2} \end{array}$ 

alternativa c

**Q3-** sen  $x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$  alternativa c

**Q4-** sen  $(2\theta) = \cos \theta \Rightarrow 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = \cos \theta \Rightarrow \cos \theta$  $(2 \operatorname{sen} \theta - 1) = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \text{ ou } 2 \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$  $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$  ou  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 

$$2 \operatorname{sen} \theta - 1 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \operatorname{ou} \theta = \frac{5\pi}{6}$$

Assim, a soma das raízes da equação é:  $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$  $+\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=2\pi+\pi=3\pi$ 

**Q5-** 3 cos sec<sup>2</sup>  $\left(\frac{x}{2}\right)$  - tg<sup>2</sup>x = 1  $\Rightarrow$  3 cos sec<sup>2</sup>  $\left(\frac{x}{2}\right)$  = 1 + tg<sup>2</sup>x  $\Rightarrow$  $\Rightarrow \frac{3}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{X}{2}\right)} = \operatorname{sec}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ 

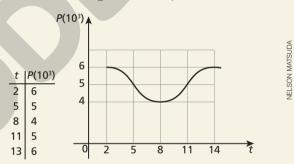
Assim:  $\frac{3}{1-\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 6 \cos 2\pi = 1 - \cos x \Rightarrow$ 

$$\Rightarrow$$
 6 cos 2x + cos x - 1 = 0

Logo:  $\cos x = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2}$  ou  $\cos x = \frac{1}{3}$ 

Portanto:  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ou  $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2k\pi$ +  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

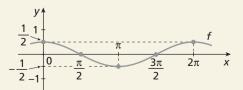
- **Q6-** Os valores máximo e mínimo de sen (2x + 4) são 1 e 1. Assim, os extremos da função são  $3 - 5 \cdot 1 = -2 \text{ e } 3 - 5 \cdot$ • (-1) = 8. Ainda, o período é dado por  $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ . Portanto, os valores pedidos são 8, -2 e  $\pi$ . alternativa b
- Q7 Ao construirmos o gráfico da função, temos:



Portanto, o período chuvoso ocorre em seis meses, ou seja, dois trimestres. alternativa a

**Q8-**  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos x$ 

х	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	0	-1	0	1
$\frac{1}{2} \cdot \cos x$	1/2	0	$-\frac{1}{2}$	0	1/2



Período =  $2\pi$ 

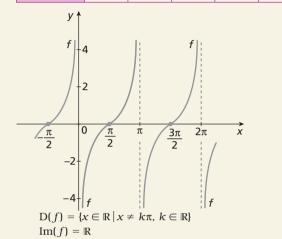
 $\operatorname{Im}(f) = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$  Amplitude =  $\frac{1}{2}$ 

Logo: L(12) = L(8) = L(4) = 50.000

Portanto, o lucro da empresa em dezembro de 2017 foi de  $\mathbb{R}$ \$ 50.000,00.

Q10-

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$x + \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	0	∄	0	∄	0

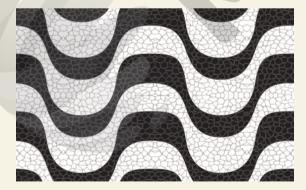


#### Avaliação 2

Período =  $\pi$ 

Objetivos do capítulo	Questões
Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.	1
Estender o conceito de ciclo trigonométrico em IR.	2
Resolver equações trigonométricas.	3, 4 e 5
Construir e analisar gráfico de funções trigonométricas.	6, 7, 8, 9 e 10

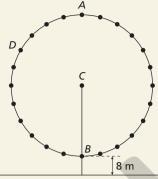
**Q1-** (PUC-RS) O calçadão de Copacabana é um dos lugares mais visitados no Rio de Janeiro. Seu traçado é baseado na praça do Rocio, em Lisboa, e simboliza as ondas do mar.



Quando vemos seus desenhos, fica evidente que podemos pensar na representação gráfica de uma função

- a) logarítmica.
- **b)** exponencial.
- c) seno ou cosseno.
- d) polinomial do 1º grau.
- e) polinomial do 2º grau.

**Q2-** (CFTRJ) O esquema a seguir representa uma roda-gigante em construção que terá 120 m de diâmetro. Cada ponto representa uma das 24 cabines igualmente espaçadas entre si. O ponto *C* representa o centro da roda gigante e os pontos *A* e *B* são, respectivamente, os pontos mais alto e mais baixo da roda-gigante.



(Utilize, se necessário, a aproximação  $\pi = 3,1$ .)

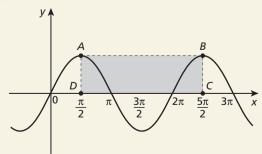
- a) Qual o comprimento, em metros, do arco  $\widehat{AD}$ ?
- **b)** Qual a altura, em metros, do ponto D em relação ao chão?
- **Q3-** (UFRGS-RS) Considere as funções  $f(x) = \text{sen } x \text{ e } g(x) = \cos x$ . O número de raízes da equação f(x) = g(x) no intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$  é
  - **a)** 3

ADILSON SECCO

- c) 5 d) 6
- **e)** 7

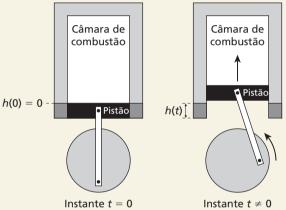
- **b)** 4
- **Q4-** (UEG) Resolvendo-se a equação sen 2x = 1, encontramos a primeira determinação positiva de x igual a:
  - a)  $\frac{\pi}{2}$
- c)  $\frac{\pi}{4}$
- e)  $\frac{\pi}{12}$

- **b)**  $\frac{\pi}{3}$
- d)  $\frac{\pi}{6}$
- **Q5-** (PUC-RS) Se  $x \in \mathbb{R}$ , então a equação  $\cos x = \cos (-x)$  apresenta o conjunto-solução
  - a) R
  - **b)** [-1, 1]
  - **c)**  $[0, +\infty)$
  - **d)** (-∞, 0)
  - **e)** {-1, 0, 1}
- **Q6-** (Uerj) O gráfico a seguir representa a função periódica definida por f(x)=2 sen  $(x), x\in\mathbb{R}$ . No intervalo  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ , A e B são pontos do gráfico nos quais  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$  são valores máximos dessa função. A área do retângulo ABCD é:



- **a)** 6π
- **b)** 5π
- c)  $4\pi$
- **d)** 3π

- **Q7 -** (UCS) A pressão arterial P (em mmHg) de uma pessoa varia, com o tempo t (em segundos), de acordo com a função definida por  $P(t) = 100 + 20 \cos{(6t + \pi)}$ , em que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco. Considerando que  $19\pi = 60$ , quais são, de acordo com a função, respectivamente, a pressão mínima, a pressão máxima e a frequência de batimentos cardíacos por minuto dessa pessoa?
  - a) 80, 120 e 57
  - **b)** 80, 120 e 60
  - **c)** 80, 100 e 19
  - **d)** 100, 120 e 19
  - **e)** 100, 120 e 60
- **Q8** Dada a função f, tal que  $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ , construa o gráfico e determine o domínio, a imagem, o período e a amplitude.
- Q9- (Enem) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função  $h(t)=4+4 \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$  definida para  $t\geqslant 0$ 

descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos. O valor do parâmetro  $\beta$ , que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante t=0), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para  $\pi$ . O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro  $\beta$ , de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

- **a)** 1
- **b)** 2
- **c)** 4
- **d)** 5
- **e)** 8
- **Q10-** Dados  $f(x) = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} e g(x) = 2 \cdot \cos \frac{x}{2}$ , faça o que se pede.
  - **a)** Construa os gráficos de f e g em um mesmo plano cartesiano.
  - **b)** Analisando os gráficos do item **a**, determine os valores de x, em que f(x) = g(x).

#### Resoluções da avaliação 2

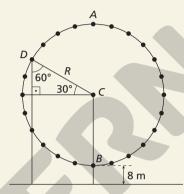
**Q1-** O desenho nos remete a funções como seno ou cosseno, que, por serem periódicas, têm gráficos que se assemelham a ondas.

alternativa c

**Q2- a)** 
$$d = 120 \Rightarrow R = 60 \text{ e } \frac{360^{\circ}}{24} = 15^{\circ}$$
  
Então, de *A* até *D*:  $15^{\circ} \cdot 4 = 60^{\circ}$   
 $C = 2\pi R = 372$   
 $372 - 360^{\circ}$   
 $x - 60^{\circ}$   
 $x = 62$ 

Portanto, o arco AD mede 62m.

**b)** Sendo x a distância entre o ângulo reto e o ponto D, temos:



sen 
$$30^{\circ} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 30$$
  
Então, a altura pedida é:

x + R + 8 = 98 m

Q3-
$$f(x) = g(x) \Rightarrow \text{sen } x = \cos x \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 1$$

Considerando o intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$ , temos as seguintes soluções:  $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$  e  $\frac{5\pi}{4}$  alternativa b

**Q4-** Considerando  $k \in \mathbb{Z}$ , temos:  $\sec 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  Portanto, a primeira determinação positiva é  $\frac{\pi}{4}$ .

- **Q5-** Como a função cosseno é par, temos:  $\cos x = \cos (-x) \Leftrightarrow \cos x = \cos x$ Portanto,  $S = \mathbb{R}$ .
- **Q6-** Sendo  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$  sen  $\frac{\pi}{2}=2$ , concluímos que a área do retângulo *ABCD* é:  $\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2=4\pi$  alternativa c
- **Q7** A pressão mínima ocorre quando cos  $(6t+\pi=-1)$ , ou seja, 100-20=80. Já a máxima ocorre quando cos  $(6t+\pi=1)$ , ou seja, 100+20=120.

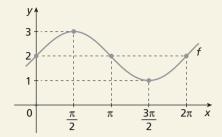
Sendo  $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$  o período, a frequência de batimentos cardíacos por minuto de uma pessoa é dada por:

$$\frac{60}{\frac{\pi}{3}} = \frac{180}{\pi} \approx 57$$

alternativa a

-80	f(y)	= 2	+	sen	v
Uo-	I(X)	- 2	$\overline{}$	Sen	х

х	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	1	0	-1	0
2 + sen <i>x</i>	2	3	2	1	2



$$\mathrm{D}(f)=\mathbb{R}$$

$$Im(f) = [1, 3]$$

Período = 
$$2\pi$$

**Q9 -** Se 
$$h(t) = 6$$
, então  $6 = 4 + 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ 

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Logo, sendo  $t \ge 0$ , temos:

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \ldots \right\}$$

E, como a altura 6 cm deve ser atingida três vezes, temos:  $\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{16\pi}{3\beta}$ 

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{16\pi}{3\beta}$$

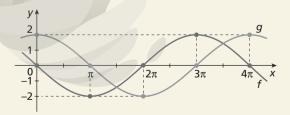
E, como ela deve ser atingida pela terceira vez antes de  $4\ s$ , temos:

$$\frac{16\pi}{3\beta} < 4 \Rightarrow \beta > \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, o menor valor inteiro a ser atribuído a  $\beta$  é 5. alternativa d

Q10-

a)	х	0	π	2π	3π	4π
	<u>x</u> 2	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	$-2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$	0	-2	0	2	0
	$2\cos\frac{x}{2}$	2	0	-2	0	2



**b)** 
$$f(x) = g(x)$$
, para  $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ 

## Resoluções e comentários

### Capítulo 1 - A semelhança e os triângulos

#### **Exercícios propostos**

**1. a)** 
$$\frac{x}{6} = \frac{21}{7} \Rightarrow x = 18$$

**b)** 
$$\frac{1.5}{1.2} = \frac{6.25}{x} \Rightarrow x = 5$$

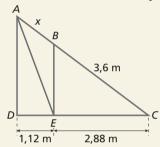
**c)** 
$$\frac{x}{10} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = 15$$

- d) Apenas com os dados informados, não é possível determinar o valor de x.
- 2. Resposta possível:

$$\frac{x+2}{x} = \frac{3x+4}{3x-1} \Rightarrow (x+2)(3x-1) = (3x+4)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 4x \Rightarrow x = 2$$

**3.** Representando a distância de A até B por x, temos:



$$\frac{3.6}{2.88} = \frac{x}{1.12} \Rightarrow x = \frac{3.6 \cdot 1.12}{2.88} \Rightarrow x = 1.4$$

Logo, AB = 1.4 m.

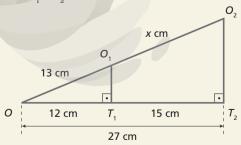
4. Pelo teorema de Tales, as medidas procuradas, em metro, são:

$$\frac{20}{22} = \frac{y}{27} \Rightarrow y \simeq 24.5$$

$$\frac{20}{22} = \frac{32}{x} \Rightarrow x = 35,2$$

Logo,  $y \approx 24.5 \text{ m e } x = 35.2 \text{ m}.$ 

5. No esquema a seguir, x representa a distância entre os centros O, e Oo.



$$\frac{x}{15} = \frac{13}{12} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 13}{12} \Rightarrow x = 16,25$$

Logo, a distância entre os centros  $O_1$  e  $O_2$  é 16,25 cm.

- 6. a) Não, pois triângulos retângulos podem ter formatos diferentes. Por exemplo: dois triângulos retângulos, sendo um deles com catetos que medem a e a e outro com catetos que medem a e 2a, não são semelhantes.
  - b) Sim, dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes, pois ambos possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

Comentário: Uma extensão desse exercício pode ser proposta para os alunos: refletir a respeito da semelhança entre outros tipos de polígonos regulares, como pentágonos e hexágonos. Seria interessante que eles elaborassem um texto para registrar e justificar suas conclusões; para isso, podem se basear no desenvolvimento do exercício R2. Espera-se que os alunos concluam que polígonos regulares com a mesma quantidade de lados serão sempre semelhantes. Por exemplo, hexágonos regulares são sempre semelhantes, já que os ângulos internos correspondentes são sempre congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Durante as reflexões, discuta com os alunos o conceito de polígono regular, lembrando que esse tipo de figura apresenta os ângulos internos congruentes e os lados congruentes.

7.



Razão entre as larguras:  $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ 

Razão entre os comprimentos:  $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ 

Como as razões são iguais, os retângulos são semelhantes, com razão de semelhança  $\sqrt{3}$ .

Comentário: Se necessário, revisar com os alunos a racionalização de denominadores.

8. a) Como os retângulos são semelhantes, temos:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{A'B'} \Rightarrow A'B' = 9$$

Logo, o comprimento do retângulo maior é 9 cm.

- **b)** A razão de semelhança é  $\frac{1}{3}$ .
- c) Perímetro de ABCD: 8 cm

Perímetro de A'B'C'D': 24 cm

Logo, a razão entre os perímetros é:  $\frac{8}{2^4} = \frac{1}{3}$ 

**d)** Área de *ABCD*:  $(3 \cdot 1) \text{ cm}^2 = 3 \text{ cm}^2$ 

Área de A'B'C'D': (9 • 3) cm<sup>2</sup> = 27 cm<sup>2</sup>

Logo, a razão entre as áreas é:  $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ 

Comentário: Faça os alunos notarem que a razão entre os perímetros é igual à razão de semelhança, enquanto a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança (como concluído no boxe Reflita da página 23). 9. a) Como a razão de semelhança é  $\frac{1}{100}$ , podemos efetuar:

$$\frac{3}{x_1} = \frac{1}{100} \Rightarrow x_1 = 300$$

$$\frac{4}{x_2} = \frac{1}{100} \Rightarrow x_2 = 400$$

Logo, as dimensões do quarto são: 300 cm e 400 cm, ou 3 m e 4 m.

b) Sejam:

a = área do quarto da maquete

A = área do quarto da casa

$$a = 3 \cdot 4 = 12$$

$$A = 300 \cdot 400 = 120.000$$

Razão entre as áreas: 
$$\frac{a}{A} = \frac{12}{120.000} = \frac{1}{10.000}$$

Comentário: Ressalte aos alunos que ao calcular a razão precisamos que as grandezas utilizadas estejam na mesma unidade. Nesse caso, ambas em centímetro ou ambas em metro.

**10.** Sejam:

L =largura do terreno

l = largura da oficina

C =comprimento do terreno

c =comprimento da oficina

a) Sabemos que:  $\frac{l}{L} = \frac{c}{C} = \frac{2}{5}$ 

Razão entre as áreas:  $\frac{l \cdot c}{L \cdot C} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 16\%$ 

**b)** Sabemos que a área do terreno é 1.440 m² e que a razão entre as áreas é  $\frac{4}{25}$ . Assim, sendo x a área da oficina:

$$\frac{4}{25} = \frac{x}{1.440} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 1.440}{25} \Rightarrow x = 230,4$$

Logo, a área da oficina é 230,4 m².

- **11.** Espera-se que o aluno perceba que o retângulo *ABFG* construído é áureo, pois a razão obtida é uma aproximação do número de ouro: 1,61...
- **12.** Seja *h* a altura do prédio.

Aplicando a ideia de semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{h}{5} = \frac{15}{3} \Rightarrow h = 25$$

alternativa a

13. a) Pela congruência entre os ângulos, concluímos que △ABC ~ △A'B'C'. Logo:

$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 7,5$$

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 9$$

**b)** Temos que  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ . Logo:

$$\frac{2}{x+2} = \frac{x+4}{12} \Rightarrow (x+2)(x+4) = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow x = -8$$
 (não convém) ou  $x = 2$ 

14. Pela semelhança entre os triângulos, ABD e ECD, temos:

$$\frac{x}{1,7} = \frac{5,7+2,3}{2,3} \Rightarrow x \approx 5,9$$

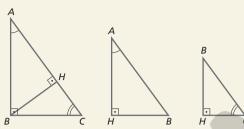
Logo, a altura aproximada do poste é 5,9 metros.

**15.**  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ . Logo:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{x}{21} \Rightarrow x = 14$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{12}{12 + u} \Rightarrow y = 6$$

16. Desenhando os triângulos separadamente, temos:



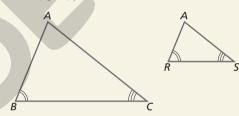
- O triângulo *AHB* é semelhante ao triângulo *ABC* por possuir os três ângulos congruentes aos ângulos de *ABC*. O triângulo *BHC* é semelhante ao triângulo *ABC* por possuir os três ângulos congruentes aos ângulos de *ABC*. Logo, os triângulos *AHB* e *BHC* são semelhantes entre si.
- **17.** a) Como  $\overline{RS}$  //  $\overline{BC}$ , sabemos que  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  estão contidos em retas transversais a  $\overline{RS}$  e  $\overline{BC}$ . Assim:  $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{SC}$

Como AR = RB, temos:

$$1 = \frac{AS}{SC} \Rightarrow AS = SC$$

Logo, S é o ponto médio de  $\overline{AC}$ .

**b)** Como  $\overline{RS} /\!\!/ \overline{BC}$ , temos:

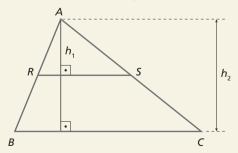


O triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *ARS*, pois tem dois ângulos respectivamente congruentes. Assim:

$$\frac{AB}{AR} = \frac{BC}{RS} \Rightarrow \frac{2 \cdot AR}{AR} = \frac{BC}{RS} \Rightarrow RS = \frac{BC}{2}$$

Logo, RS é metade de BC.

c) Na figura a seguir,  $h_1$  representa a medida da altura do triângulo ARS relativa ao lado  $\overline{RS}$ , e  $h_2$  representa a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado  $\overline{BC}$ .



A reta que contém as alturas dos triângulos é transversal às retas paralelas  $\overrightarrow{RS}$  e  $\overrightarrow{BC}$ . Logo:

$$\frac{AR}{AB} = \frac{h_1}{h_2}$$

Mas  $AB = 2 \cdot AR$ . Então:

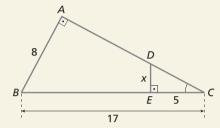
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_2 = 2 \cdot h_1$$

d) Resposta possível:

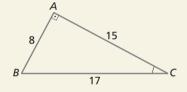
A reta que passa pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo e é paralela a um dos outros lados intersecta o terceiro lado e a altura em seus pontos médios.

Comentário: Espera-se, com o boxe **Reflita** da página 23, com o exercício **7** e com esse exercício, que os alunos concluam que, se for conhecido o valor da razão de semelhança entre duas figuras, ela pode ser utilizada para comparar quaisquer elementos lineares dessas duas figuras.

18.



No  $\triangle ABC$ , pelo teorema de Pitágoras, temos:  $17^2=8^2+AC^2\Rightarrow AC^2=289-64\Rightarrow AC^2=225\Rightarrow AC=15$  Desenhando os triângulos ABC e EDC, separadamente, temos:





$$\begin{vmatrix}
B\widehat{A}C &\cong D\widehat{E}C \text{ (retos)} \\
A\widehat{C}B &\cong E\widehat{C}D \text{ (comum)}
\end{vmatrix} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{15}{5} \Rightarrow x = \frac{40}{15} \Rightarrow x = 2\frac{10}{15}$$

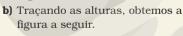
alternativa b

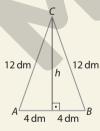
**19. a)** Traçando a altura, obtemos a figura ao lado.

Assim:

$$h^2 + 4^2 = 12^2 \Rightarrow h^2 = 144 - 16 \Rightarrow h = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

Logo, a altura é  $8\sqrt{2}$  dm.



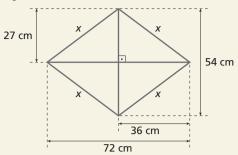


Assim:

$$h^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow h = 20$$

Assim, a altura é 20 cm.

**20.** Como as diagonais de um losango interceptam-se nos seus pontos médios, temos:

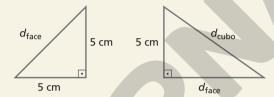


Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 36^2 + 27^2 \Rightarrow x^2 = 2.025 \Rightarrow x = 45$$

Logo, o perímetro do losango é 4 · 45, ou seja, 180 cm.

21.



- a) Pelo teorema de Pitágoras, temos:
  - $(d_{\text{face}})^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow (d_{\text{face}})^2 = 50 \Rightarrow d_{\text{face}} = 5\sqrt{2}$

Portanto, a medida da diagonal de uma face é  $5\sqrt{2}$  cm.

• 
$$(d_{\text{cubo}})^2 = (d_{\text{face}})^2 + 5^2 \Rightarrow$$
  
 $\Rightarrow (d_{\text{cubo}})^2 = (5\sqrt{2})^2 + 5^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (d_{\text{cubo}})^2 = 75 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow d_{\text{cubo}} = 5\sqrt{3}$ 

Logo, a medida da diagonal do cubo é  $5\sqrt{3}$  cm.

**b)** Usando o teorema de Pitágoras para obter a diagonal da face, temos:

$$(d_{ ext{face}})^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d_{ ext{face}} = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d_{ ext{face}} = a\sqrt{2}$$

Considerando o resultado anterior, por meio do teorema de Pitágoras, verificamos que:

$$\begin{split} &(d_{\text{cubo}})^2 = (d_{\text{face}})^2 + a^2 \Rightarrow (d_{\text{cubo}})^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (d_{\text{cubo}})^2 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow d_{\text{cubo}} = 3a^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_{\text{cubo}} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d_{\text{cubo}} = a\sqrt{3} \end{split}$$

Portanto, as medidas da diagonal e da aresta do cubo se relacionam da seguinte maneira:  $d_{\mathrm{cubo}}=a\sqrt{3}$ 

Comentário: O objetivo principal desse exercício é que os alunos apliquem o teorema de Pitágoras para verificar algumas relações entre a medida da aresta de um cubo, da diagonal da face de um cubo e da diagonal do cubo. Essas relações podem ser trabalhadas para o caso de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c. Para isso, os alunos terão de refletir sobre alguns aspectos desse tipo de sólido geométrico, por exemplo:

- a) Como são as faces de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a. b e c.
- **b)** Como se relacionam as medidas das diagonais das faces desse paralelepípedo com as medidas a, b e c de suas arestas.

Espera-se que os alunos percebam que, considerando o paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c, são verificadas as seguintes relações entre as medidas da diagonal das faces e as medidas das arestas:

• 
$$d_{\text{face 1}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

• 
$$d_{\text{face } 2} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

• 
$$d_{\text{face } 3} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Os alunos também devem perceber que, para o mesmo paralelepípedo, a medida da diagonal do paralelepípedo e a medida das arestas relacionam-se da seguinte forma:

• 
$$d_{\text{paralelepípedo}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

22. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 + b^2 = 10^2$$

Mas, pela proporção, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4b}{3}$$

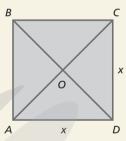
Então

$$\frac{16}{9}b^2 + b^2 = 100 \Rightarrow \frac{25}{9}b^2 = 100 \Rightarrow b = 6$$

Assim, a = 8.

Logo, 
$$a = 8$$
 cm e  $b = 6$  cm.

**23.** Seja *x* a medida de um dos lados do piso. Esquematizando esse piso, temos a figura a seguir.



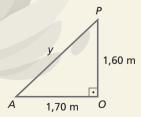
Área do piso = 
$$5,76 \text{ m}^2$$

$$x^2 = 5.76 \Rightarrow x = 2.4$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow (AC)^2 = 11,52 \Rightarrow AC \approx 3,4$$

Agora, consideramos o  $\triangle AOP$ , em que AO é metade de AC,  $\overline{OP}$  representa o mastro central e y é a medida da haste lateral, como representado no esquema a seguir.



$$y^2 = (1,7)^2 + (1,6)^2 \Rightarrow y \approx 2,33$$

Assim, cada haste lateral mede, aproximadamente, 2.33 m.

24. a) Resposta possível:

$$6, 8, 10, pois 6^2 + 8^2 = 10^2$$

5, 12, 13, pois 
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

- b) Quando as medidas dos lados de um triângulo formam um terno pitagórico, ele é um triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.
- c) Sim; por exemplo, 1, 1 e √2 formam um triângulo retângulo, mas não um triângulo pitagórico, já que √2 não é um número natural.

Comentário: Avalie a conveniência de explorar mais o tema "triângulos pitagóricos" propondo a questão: "Mostrar que o único triângulo pitagórico cujas medidas dos lados são números naturais consecutivos é o triângulo de lados 3, 4 e 5".

Resolução:

Seja o triângulo retângulo com lados de medidas consecutivas (a-1), a e (a+1). Então:

$$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + a^2$$

$$a^2 - 4a = 0$$

$$a = 0$$
 (não serve) ou  $a = 4$ 

Logo, as únicas medidas possíveis para os lados do triângulo são 3, 4 e 5.

25. a) Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$(IA)^2 = (PA)^2 + (PI)^2 \Rightarrow 17^2 = 15^2 + (PI)^2 \Rightarrow PI = 8$$

Logo, a medida do cateto  $\overline{PI}$  é 8 cm.

**b)** Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos:

$$h \cdot 17 = 8 \cdot 15 \Rightarrow h \simeq 7,1$$

Logo, a medida h dessa altura é, aproximadamente, 7,1 cm.

c) Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos:  $8^2 = 17 \cdot m \Rightarrow m \approx 3.8$ 

$$15^2 = 17 \cdot n \Rightarrow n \approx 13.2$$

Logo, as medidas m e n das projeções dos catetos sobre a hipotenusa são, respectiva e aproximadamente, 3.8 cm e 13.2 cm.

Comentário: Caso os alunos não se recordem das relações métricas, os itens  ${\bf b}$  e  ${\bf c}$  podem ser resolvidos apenas pela semelhança de triângulos.

26. Resposta pessoal.

#### **Exercícios complementares**

1. Como a escala adotada na maquete é de 1:250, então:

$$\frac{2.800}{250}$$
 cm = 11,2 cm

$$\frac{1.200}{250}$$
 cm = 4,8 cm

alternativa c

Pelas medidas da caneta (na foto e real), podemos calcular a escala da foto:

$$\frac{1,4}{16.8} = \frac{1}{12} = 1:12$$

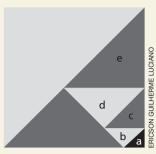
Com essa escala, podemos calcular a largura x e o comprimento y reais da pegada:

$$\frac{1}{12} = \frac{2,2}{x} \Rightarrow x = 26,4$$

$$\frac{1}{12} = \frac{3.4}{y} \Rightarrow y = 40.8$$

alternativa d

3. Para determinar o lado do quadrado (quebra-cabeça montado), vamos calcular a medida do cateto dos triângulos a e c e a medida da hipotenusa do triângulo d. que é a mesma medida do cateto do triângulo e.



Pelo teorema de Pitágoras, a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles com medida de cateto  $\ell$  é igual a  $\ell\sqrt{2}$ . Assim, as medidas em centímetros do cateto e hipotenusa dos triângulos são:

• triângulo a:

cateto: 2; hipotenusa:  $2\sqrt{2}$ 

• triângulo b:

cateto:  $2\sqrt{2}$ ; hipotenusa: 4

• triângulo *c*:

cateto: 4 cm; hipotenusa:  $4\sqrt{2}$ 

• triângulo d:

cateto:  $4\sqrt{2}$ ; hipotenusa: 8 cm

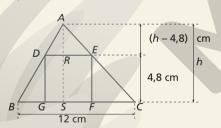
Portanto, a medida do lado do quadrado é 14 cm (2 + 4 + 8 = 14).

**4.** Se  $AB = 5 \cdot (AD) = 5 \cdot (FB)$ , temos:

 $FD = 3 \cdot (AD) e AF = 4 \cdot (AD)$ 

$$\frac{AF}{AD} = \frac{FG}{DE} \Rightarrow \frac{FG}{DE} = \frac{4 \cdot (AD)}{AD} \Rightarrow \frac{FG}{DE} = 4$$

5. Como o perímetro do quadrado é 19,2 cm, a medida do lado é 4,8 cm.

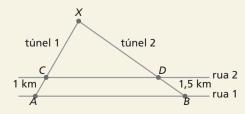


Como  $\overline{DE} / \overline{BC}$ , os triângulos ADE e ABC são semelhan-

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AR}{AS} \Rightarrow \frac{4.8}{12} = \frac{h - 4.8}{h} \Rightarrow h = 8$$

Portanto, a altura mede 8 cm.

6.



Túnel 1: 
$$AX = 12 \cdot 250 = 3.000$$

Logo, o túnel 1 tem 3.000 m = 3 km de comprimento.  $\triangle CXD \sim \triangle AXB$ 

$$\triangle CXD \sim \triangle AXB$$

alternativa e

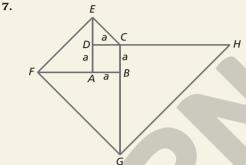
 $\frac{3}{1} = \frac{BX}{1.5} \Rightarrow BX = 4.5$ 

Assim, BX tem 4.5 km = 4.500 m de comprimento.

Se são perfurados 12 m por dia, serão necessários:

$$\frac{4.500}{12}$$
 = 375 dias para chegar a *X* na construção do túnel 2.

375 - 250 = 125 dias de antecedência



Todos os triângulos são semelhantes, pois são retângulos e isósceles. Então:

 $\triangle EDC$  é isósceles de lado  $a \Rightarrow EC = a\sqrt{2}$ 

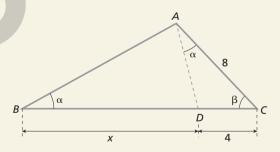
 $\triangle AEF$  é isósceles de lado  $2a \Rightarrow EF = 2a\sqrt{2}$ 

 $\triangle BFG$  é isósceles de lado  $3a \Rightarrow FG = 3a\sqrt{2}$ 

 $\triangle$  CGH é isósceles de lado  $4a \Rightarrow GH = 4a\sqrt{2}$ 

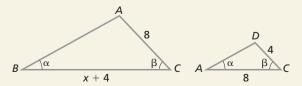
$$\frac{GH}{CE} = \frac{4a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{GH}{CE} = 4$$

8.



Os triângulos ABC e DAC são semelhantes, pois ambos têm ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ .

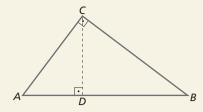
Observe:



$$\frac{x+4}{8} = \frac{8}{4} \Rightarrow x+4 = 16 \Rightarrow x = 12$$

Portanto, BD = x = 12 cm

alternativa c



$$\triangle ABC \sim \triangle ACD, \text{ pois: } \begin{cases} A\widehat{C}B \cong A\widehat{D}C \text{ (ângulos retos)} \\ C\widehat{A}B \cong C\widehat{A}D \text{ (ângulo comum)} \end{cases}$$
 
$$\triangle ABC \sim \triangle CBD, \text{ pois: } \begin{cases} A\widehat{C}B \cong C\widehat{D}B \text{ (ângulos retos)} \\ C\widehat{B}A \cong C\widehat{B}D \text{ (ângulo comum)} \end{cases}$$

Portanto,  $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ .

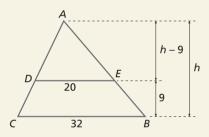
Assim, os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

$$(CD) \cdot (CD) = (AD) \cdot (DB)$$

$$(CD)^2 = (AD) \cdot (DB)$$

10.



No esquema, h representa a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado  $\overline{CD}$  (medidas em centímetro).

Como DE // CB, sabemos que os triângulos ABC e AED são semelhantes. Então:

$$\frac{h-9}{h} = \frac{20}{32} \Rightarrow h = 24$$

Logo, a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado CB é 24 cm.

11. Como o triângulo ABC está inscrito em uma circunferência, temos:

OA = OB = OC = r, sendo r o raio da circunferência. Assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OCH.



$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 18^2 \Rightarrow r^2 - \frac{r^2}{4} = 324 \Rightarrow r = 12\sqrt{3}$$

Logo, o raio da circunferência mede  $12\sqrt{3}$  cm.

12. Considere o seguinte esquema da situação, em que x é a distância a ser encontrada.



O ponto B é o ponto mais a leste de C e está a 20 km ao

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABT, temos:

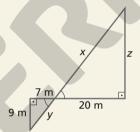
$$60^2 = 20^2 + (40 + x)^2$$

$$x^2 + 80x - 1.600 = 0$$

$$x = 40\sqrt{2} - 40$$
 ou  $x = -40\sqrt{2} - 40$  (não convém)

Logo, a distância procurada é  $40(\sqrt{2} - 1)$  km. alternativa c

13. Considere o esquema da situação (medidas em metro):



No menor triângulo retângulo, temos:

$$9^2 + 7^2 = y^2$$
$$y = \sqrt{130} \Rightarrow y \approx 11.4$$

Os triângulos retângulos da figura são semelhantes, pois têm dois ângulos internos congruentes. Então:

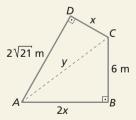
$$\frac{x}{y} = \frac{20}{7} \Rightarrow x \approx 32,6$$

O comprimento da corda é dado por: x + y

$$x + y \simeq 32.6 + 11.4 = 44$$

Logo, a parte esticada da corda deve medir, aproximadamente, 44 m.

14. De acordo com o enunciado, temos:



Sendo AC = y e AB = 2x, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABC e CDA, temos:

$$\begin{cases} y^2 = (2x)^2 + 6^2 \\ y^2 = x^2 + (2\sqrt{21})^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(2x)^2 + 6^2 = x^2 + (2\sqrt{21})^2 \Rightarrow$$

$$4x^2 + 36 = x^2 + 84$$

$$3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

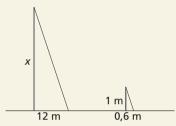
#### Autoavaliação

- **1.** Pelo teorema de Tales, temos:  $\frac{2}{3.8} = \frac{x}{5.7} \Rightarrow x = 3$  alternativa c
- Os triângulos AIM e AMO são semelhantes, pois são triângulos isósceles e retângulos.
   alternativa a
- Todos os triângulos equiláteros são semelhantes, pois têm todos os ângulos internos medindo 60°.
   alternativa c
- **4.** Se AB = 10 cm e AM = 35 cm, concluímos que BM = 25 cm. Sendo x a medida de CN, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{10}{15} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 15}{10} \Rightarrow x = 37.5$$

alternativa o

5. A figura abaixo representa a situação descrita.

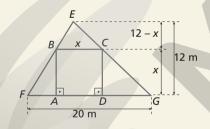


Observe que os triângulos são semelhantes. Então, temos:

$$\frac{x}{1} = \frac{12}{0.6} \Rightarrow x = 20$$

alternativa d

**6.** Sendo *x* a medida do lado do quadrado, temos:

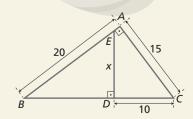


△EBC ~ △EFG

$$\frac{12-x}{12} = \frac{x}{20} \Rightarrow 240 - 20x = 12x \Rightarrow x = 7.5$$

alternativa a

7.



O triângulo *ABC* é retângulo em *A*. Então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(BC)^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow BC = 25$$

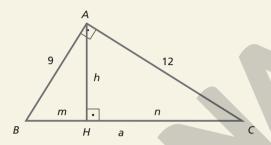
Portanto, BD = 15.

 $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ , pois têm um ângulo reto e um ângulo comum. Assim:

$$\frac{x}{15} = \frac{15}{20} \Rightarrow x = 11,25$$

alternativa d

8. Considere a figura:



• 
$$a^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow a = 15$$

• 
$$h \cdot 15 = 9 \cdot 12 \Rightarrow h = 7.2$$

• 
$$9^2 = 15 \cdot m \Rightarrow m = 5.4$$

• 
$$12^2 = 15 \cdot n \Rightarrow n = 9.6$$

alternativa d

Comentário: Esse exercício também pode ser resolvido identificando que os triângulos ABC, HBA e HAC são semelhantes e, a partir daí, usar esse conceito na resolução.

#### Compreensão de texto

A seção *Compreensão de texto* desse capítulo explora uma propriedade do triângulo que não se encontra em nenhuma outra forma poligonal, a estabilidade. Por isso, o formato triangular é empregado nas mais variadas construções que requerem rigidez.

- 1. O triângulo é muito empregado nas construções por causa da sua propriedade de estabilidade. Uma estrutura triangular, dependendo da força exercida, pode até quebrar, mas não deforma, pois tem rigidez.
- 2. O triângulo não pode alterar sua forma sem alterar o comprimento de seus lados; assim, um sistema de triângulos apresenta grande estabilidade, pois não sofre deslocamento pela ação da força aplicada. A força exercida sobre um dos vértices do triângulo se distribui até atingir o equilíbrio, tornando o sistema mais resistente e estável. Isso não ocorre com módulos quadriláteros, já que são sensíveis ao movimento dos seus vértices e à distribuição desigual das forças, tornando-os menos resistentes e instáveis.
- Não. A resistência de uma estrutura depende também da força aplicada sobre ela e de como essa estrutura foi construída.
- 4. Para deixar um módulo quadrilátero estável, devemos "triangularizá-lo". Espera-se que os alunos apresentem respostas possíveis para essa "triangularização", indicando módulos com números diferentes de diagonais do quadrilátero.

### Capítulo 2 - Trigonometria no triângulo retângulo

Com base no estudo do conceito de semelhanca desenvolvido no Capítulo 1, esse capítulo define as principais razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Estudar as razões trigonométricas e saber aplicá-las na resolução de situações-problema é fundamental para o aprofundamento da Trigonometria que será tratada nos próximos capítulos, em que serão definidas as funções trigonométricas, outras razões e aplicações. O uso da calculadora científica e a consulta da tabela de razões trigonométricas podem auxiliar na resolução dos exercícios.

#### **Exercícios propostos**

**1.** sen 
$$\alpha = \frac{12}{13}$$
; cos  $\alpha = \frac{5}{13}$ ; tg  $\alpha = \frac{12}{5}$ 

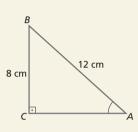
2. Do enunciado, temos:

$$(AC)^2 = 12^2 - 8^2 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$$

Assim:

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



**3.** 
$$\cos \alpha = \frac{x}{45} \Rightarrow x = 45 \cdot 0.8 \Rightarrow x = 36$$

Portanto, x vale 36 cm.

Comentário: No enunciado foram dados os valores de sen α, cos α e tg α. É importante que os alunos percebam que, com essas informações, é possível elaborar mais de uma resolução para a atividade. Seria interessante, então, que fosse proposto a eles resolver o exercício de mais de uma maneira.

**4.** tg 
$$60^{\circ} = \frac{r}{1.100} \Rightarrow 1{,}7321 \simeq \frac{r}{1.100} \Rightarrow r \simeq 1.905$$

Logo, a largura aproximada do rio Amazonas nesse local é 1.905 m.

5. a)



**b)** sen 
$$\alpha = \frac{4}{x} \Rightarrow 0.1045 = \frac{4}{x} \Rightarrow x \approx 38.3$$

Logo, o avião percorreu aproximadamente 38,3 km até atingir a altura de 4 km.

- 6. Resposta pessoal.
- 7. Sabemos que, se  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares, temos sen  $\alpha = \cos \beta$ .

Além disso, tg  $\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ . Assim:

$$tg\ 20^{\circ} = \frac{0.3420}{0.9397} \simeq 0.3639$$

$$sen 70^{\circ} = cos 20^{\circ} \approx 0.9397$$

$$\cos 70^\circ = \sin 20^\circ \simeq 0.3420$$

$$tg 70^{\circ} = \frac{0.9397}{0.3420} \approx 2.7477$$

$$\cos 40^\circ = \frac{0.6428}{0.8391} \simeq 0.7661$$

$$sen 50^\circ = cos 40^\circ \simeq 0.7661$$

$$\cos 50^{\circ} = \sin 40^{\circ} \approx 0.6428$$

$$tg \ 50^{\circ} = \frac{0.7661}{0.6428} \simeq 1.1918$$

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	0,3639
70°	0,9397	0,3420	2,7477
50°	0,7661	0,6428	1,1918
40°	0,6428	0,7661	0,8391

8. a) Como sen  $\alpha = \frac{24}{25}$ , podemos desenhar a figura ao lado.

$$x^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$$

Logo, 
$$\cos \alpha = \frac{7}{25}$$
 e tg  $\alpha = \frac{24}{7}$ .

Comentário: Use este item para mostrar aos alunos que, dada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo, é possível obter as outras razões sem recorrer à relação fundamental da Trigonometria.

**b)** 
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{576}{625} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{49}{625} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{25}$$

$$tg \alpha = \frac{\sec \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

Comentário: Explique aos alunos que, como α é um ângulo agudo e cos α é a razão entre as medidas de dois lados de um triângulo, o valor de cos α deve ser positivo.

**9.** a) 
$$\cos 60^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5$$

sen 
$$60^\circ = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 5\sqrt{3}$$

Logo, x = 5 cm e  $y = 5\sqrt{3}$  cm.

**b)** Pelo teorema de Pitágoras:  $x^2 + 4^2 = 8^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$ 

Assim,  $x = 4\sqrt{3}$  cm.

$$\operatorname{sen} y = \frac{4}{8} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$$

Consultando a tabela de razões trigonométricas, concluímos que  $y = 30^{\circ}$ .

**10.** a) sen  $30^{\circ} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow c = 10$ 

Logo, o cabo de aço mede 10 m.

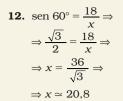
**b)** tg 
$$30^{\circ} = \frac{5}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{h} \Rightarrow h = \frac{15}{\sqrt{3}}$$

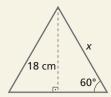
Considerando  $\sqrt{3} \simeq 1,73$ , obtemos  $h \simeq 8,7$ .

Assim, a altura do poste é, aproximadamente, 8,7 m.

**11.** sen  $30^{\circ} = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot 0.5 \Rightarrow h = 1.5$ 

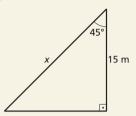
Portanto, a altura h é 1,5 m.





Logo, a medida de cada lado desse triângulo equilátero é, aproximadamente, 20,8 cm.

13. Do enunciado, temos:



Para cada cabo x, temos:

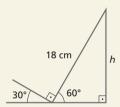
$$\cos 45^\circ = \frac{15}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{x} \Rightarrow x \simeq 21.2$$
 Então, para um cabo, foram usados aproximadamente

Então, para um cabo, foram usados aproximadamente 21,2 m de cabo de aço.

Como, para prender a antena, foram necessários quatro cabos:  $4x \simeq 4 \cdot 21, 2 \simeq 84.8$ 

Portanto, foram usados cerca de 85 m de cabo de aço.

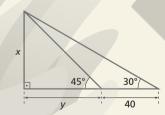
14. Observando que as medidas dos três ângulos formados pelo vértice do bloco que está encostado no chão somam 180°, temos:



sen 
$$60^\circ = \frac{h}{18} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{18} \Rightarrow h \approx 15.6$$

Portanto, h é, aproximadamente, 15,6 cm.

**15.** Sendo *x* a altura da torre, temos:



$$tg \ 45^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow 1 = \frac{x}{y} \Rightarrow y = x$$

$$tg \ 30^\circ = \frac{x}{y + 40} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{x + 40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 3x \Rightarrow x(3 - \sqrt{3}) = 40\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow x \approx 54.6$$

alternativa c

**16.** sen 
$$20^{\circ} = \frac{h}{3} \Rightarrow h \approx 3 \cdot 0{,}342 \Rightarrow h \approx 1{,}026$$

Logo, após percorrer 3 km, o avião estará a aproximadamente 1,026 km de altura.

**17.** a) 
$$\cos 89.83^{\circ} = \frac{TL}{TS}$$

Em uma calculadora científica, obtemos cos  $89,83^{\circ} \simeq 0.0030$  Assim:

$$0.0030 \simeq \frac{384.000}{TS} \Rightarrow TS \simeq \frac{384.000}{0.0030} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$
 TS  $\approx$  128.000.000

Portanto:  $TS \simeq 128.000.000 \text{ km}$ 

**b)** 
$$\frac{TS}{TL} = \frac{128.000.000}{384.000} \approx 333$$

**18.** a) 
$$tg \alpha = \frac{1}{12} \Rightarrow tg \alpha \approx 0.0833$$

Para obter a medida  $\alpha$  na calculadora científica, digitamos 0,0833 e acionamos a tecla  $tan^{-1}$ , obtendo 4,76. Aproximando para o inteiro mais próximo, temos  $\alpha \simeq 5$ . Esse valor também pode ser obtido na tabela trigonométrica.

Logo, o ângulo formado entre a rampa e a horizontal, quando a inclinação é máxima, mede aproximadamente  $5^{\circ}$ .

b) Para a inclinação máxima, temos o triângulo:



Sendo r o comprimento da rampa construída, temos:

sen 
$$5^{\circ} = \frac{3}{r} \Rightarrow r \simeq \frac{3}{0.087} \Rightarrow r \simeq 34,5$$

Logo, para um desnível de 3 m entre dois andares, devem ser construídos aproximadamente 34,5 m de rampa.

c) Resposta pessoal.

Comentário: Trabalhe a ideia da tangente como inclinação. Incentive os alunos a perceber, no item **a**, que o valor da tangente do ângulo formado entre a rampa e o solo, em porcentagem, coincide com a inclinação da rampa.

### **Exercícios complementares**

**1.** 
$$tg 55^{\circ} = \frac{x}{24} \Rightarrow x \approx 1,4281 \cdot 24 \Rightarrow x \approx 34,27$$

Logo, o rio tem, aproximadamente, 34,27 m de largura.

**2.** Seja x a medida do cateto oposto ao ângulo de  $22^{\circ}$ .

$$\operatorname{tg} 22^{\circ} = \frac{x}{80} \Rightarrow x \approx 0,4040 \cdot 80 \Rightarrow x \approx 32,32$$

$$32,32 + 1,60 = 33,92$$

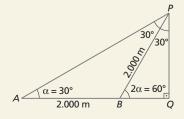
A altura do ninho das araras é, aproximadamente, 33,92 m.

 A menor distância entre o barco e o ponto P é a medida do segmento PQ, perpendicular à trajetória do barco.

Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^{\circ}$ , obtemos a medida dos ângulos internos dos triângulos.

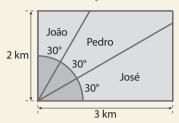
Em seguida, observando que o triângulo APB é isósceles, concluímos que: AB = BP = 2.000 m

No triângulo *PQB*, temos:



alternativa b

4. Veja, na figura a seguir, que cada irmão ficou com um setor de 30° na área de extracão:



Observando o terreno de João, temos:

tg 
$$30^{\circ} = \frac{x}{2} \Rightarrow x \approx 0.58 \cdot 2 \Rightarrow x \approx 1.16$$

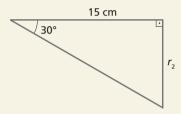
Área do terreno de João: 
$$\frac{1,16 \cdot 2}{2} = 1,16$$

Área total do terreno: 
$$3 \cdot 2 = 6$$

Assim: 
$$\frac{1,16}{6} \approx 0,19 = 19\%$$

alternativa e

5. Destacando parte da figura, temos:



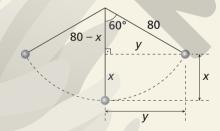
tg 
$$30^{\circ} = \frac{r_2}{15} \Rightarrow r_2 = 15 \cdot 0,5774 \Rightarrow r_2 \approx 8,66$$

Então

$$r_1 + r_2 = 15 \Rightarrow r_1 \approx 15 - 8,66 \Rightarrow r_1 \approx 6,34$$

Logo, os raios das circunferências são, aproximadamente, 8,66 cm e 6,34 cm.

6. Observe a figura abaixo.



$$\cos 60^{\circ} = \frac{80 - x}{80} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{80 - x}{80} \Rightarrow x = 40$$

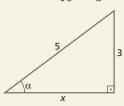
Logo, x = 40 cm e  $y = 40\sqrt{3}$  cm.

### Autoavaliação

1. sen 
$$\alpha = \frac{3}{5}$$
; cos  $\alpha = \frac{4}{5}$ ; tg  $\alpha = \frac{3}{4}$ 

alternativa c

**2.** sen  $\alpha = 0.6 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$tg \ \alpha = \frac{3}{4} = 0.75$$

alternativa b

alternativa a

3.  $\sin 30^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4$   $\cos 30^\circ = \frac{y}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{8} \Rightarrow$   $\Rightarrow y = 4\sqrt{3} \Rightarrow y \approx 6.93$ 

4. Esquematizando a situação, temos:



Lembrando que 1.5 km = 1.500 m, temos:

$$tg 20^\circ = \frac{h}{1.500} \Rightarrow 0.3640 = \frac{h}{1.500} \Rightarrow h = 546$$

O avião estará a uma altura aproximada de 546 m.

5. Veja ao lado o esquema da situação.

$$tg 55^\circ = \frac{x}{35}$$
$$x = 35 \cdot 1,4281 \Rightarrow x \approx 50$$

Nesse local, a largura do rio é, aproximadamente, 50 m.



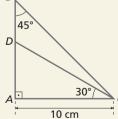
**6.** Dada a figura ao lado, temos:

$$tg \ 30^{\circ} = \frac{AD}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AD}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

O  $\triangle ABC$  é retângulo isósceles; então, AB = 10. Daí:



$$BD = AB - AD = 10 - \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = \frac{10(3-\sqrt{3})}{3}$$

alternativa a

7. sen  $6^{\circ} = \frac{4}{AC} \Rightarrow AC \simeq \frac{4}{0,1045} \simeq 38,3 \text{ m}$   $d \simeq (1,5 + 38,3) \text{ m} \Rightarrow d \simeq 39,8 \text{ m}$ alternativa d

### Capítulo 3 - Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer

#### Exercícios propostos

- 1. a) radiano grau  $\pi \quad --- 180$   $\underline{5\pi} \quad --- x \Rightarrow x = 225^{\circ}$ 
  - **b)** radiano grau  $\pi$  180  $\frac{7\pi}{6}$  x  $\Rightarrow x = 210^{\circ}$
  - c) radiano grau  $\begin{array}{ccc}
    \pi & --- & 180 \\
    \frac{\pi}{2} & --- & x
    \end{array}
    \Rightarrow x = 90^{\circ}$
- **2. a)** grau radiano  $180 \pi \xrightarrow{30 x} x \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ 
  - **b)** grau radiano  $180 \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$
  - c) grau radiano 180 —  $\pi$ 120 —  $x \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$  rad
  - **d)** grau radiano  $180 - \pi$   $\pi$   $\Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$  rad
  - e) grau radiano  $180 - \pi$   $\Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$  rad
  - **f)** grau radiano 180 —  $\pi$ 240 —  $x \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$  rad
- 3. circunferência grau  $1 \longrightarrow 360 \\ \frac{2}{5} \longrightarrow x \Rightarrow x = 144^{\circ}$  circunferência radiano  $1 \longrightarrow 2\pi$

$$\frac{2}{5} \qquad 2\pi \qquad \Rightarrow x = \frac{4\pi}{5} \text{ rad}$$

4. a) O relógio é dividido em 12 horas.

Então, a cada hora, o ponteiro percorre um ângulo de:  $360^{\circ}$  :  $12=30^{\circ}$ 

Das 13 h às 17 h, temos 4 horas. Logo, o ponteiro das horas percorrerá:  $4\cdot 30^\circ=120^\circ$ 

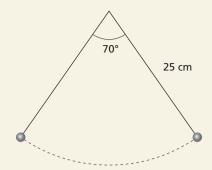
Em radiano, essa medida é equivalente a  $4 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$ 

Portanto, esse ponteiro das 13 h às 17 h percorre 120° ou  $\frac{2\pi}{3}$  rad.

**b)** Sendo x a distância percorrida das 13 h às 17 h, calculamos:

Logo, a extremidade do ponteiro percorre aproximadamente 14,65 cm.

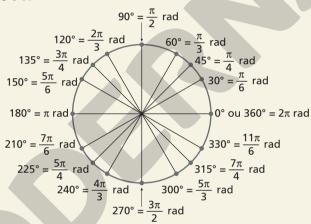
**5**.



medida (grau) comprimento (cm) 
$$360 - 2\pi r \Rightarrow x = \frac{70 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 25}{360} \Rightarrow x \approx 30.5$$

Logo, o pêndulo descreve um arco de aproximadamente 30,5 cm.

6 e 7.



**8.** a) A:  $180^{\circ} - 20^{\circ} = 160^{\circ}$ B:  $180^{\circ} + 20^{\circ} = 200^{\circ}$ 

$$C: 360^{\circ} - 20^{\circ} = 340^{\circ}$$

**b)** A:  $2\pi - \frac{9\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$  rad

$$B: \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad}$$

$$C: \pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$$
 rad

**9. a)**  $250^{\circ} - 180^{\circ} = 70^{\circ}$ 

**b)** 
$$2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi - 11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$
 rad

**10. a)** Como sen  $215^{\circ} < 0$  e sen  $280^{\circ} < 0$ , temos: sen  $215^{\circ} \cdot$  sen  $280^{\circ} > 0$ 

**b)** 
$$\cos 50^{\circ} > 0$$
  $\cos 325^{\circ} > 0$   $\Rightarrow (\cos 50^{\circ} + \cos 325^{\circ}) > 0$  (I)

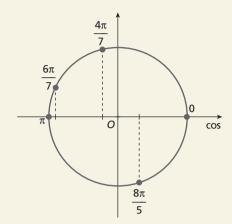
$$\cos 215^{\circ} < 0 \\
\cos 145^{\circ} < 0$$
  $\Rightarrow (\cos 215^{\circ} + \cos 145^{\circ}) < 0$  (II)

De (I) e (II), temos:

$$(\cos 50^{\circ} + \cos 325^{\circ}) \cdot (\cos 215^{\circ} + \cos 145^{\circ}) < 0$$

11. 
$$\frac{4\pi}{7}$$
 rad =  $\frac{4 \cdot 180^{\circ}}{7}$  \( \preceq 103^{\circ}\)
 $\frac{6\pi}{7}$  rad =  $\frac{6 \cdot 180^{\circ}}{7}$  \( \preceq 154^{\circ}\)
 $\frac{8\pi}{5}$  rad =  $\frac{8 \cdot 180^{\circ}}{5}$  =  $288^{\circ}$ 

Representando no ciclo trigonométrico, temos:

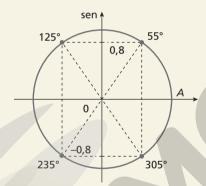


Observando o eixo dos cossenos, concluímos que:  $\cos \ \pi < \ \cos \ \frac{6\pi}{7} < \ \cos \ \frac{4\pi}{7} < \ \cos \ \frac{8\pi}{5} < \ \cos \ 0$ 

**12. a)** sen 
$$125^{\circ} \simeq 0.8$$

**b)** sen 
$$235^{\circ} \simeq -0.8$$

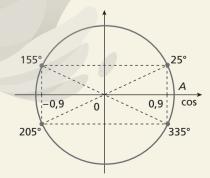
**c)** sen 
$$305^{\circ} \simeq -0.8$$



**13. a)** 
$$\cos 155^{\circ} \simeq -0.9$$

**b)** 
$$\cos 205^{\circ} \simeq -0.9$$

**c)** 
$$\cos 335^{\circ} \approx 0.9$$

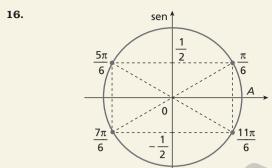


**14. a)** sen 
$$\alpha = -\text{sen } 27^{\circ} \simeq -0.45$$

**b)** sen 
$$\beta = -\text{sen } 130^{\circ} = -\text{sen } 50^{\circ} \simeq -0.77$$

**c)** 
$$\sin \theta = -\sin 260^{\circ} = -(-\sin 80^{\circ}) \approx 0.98$$

**15.** 
$$\cos \alpha = -\cos 48^{\circ} \simeq -0.67$$
  
 $\cos \beta = -\cos 110^{\circ} = -(-\cos 70^{\circ}) \simeq 0.34$   
 $\cos \theta = -\cos 260^{\circ} = -(-\cos 80^{\circ}) \simeq 0.17$ 



$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

**17.** a) 
$$\sin 2\pi + \cos 2\pi + \sin \pi + \cos \pi = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$$
  
b)  $\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} = 1 - (-1) + 0 - 0 = 2$ 

c) 
$$\sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

d) 
$$\frac{\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{4\pi}{3}}{2 \cdot \sin\frac{5\pi}{6}} = \frac{0 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

**18.** Com a calculadora de um celular ou com uma calculadora científica, obtemos:

**a)** sen 
$$\frac{\pi}{9} \simeq 0.342$$

**b)** sen 
$$\frac{2\pi}{9} \simeq 0.643$$

**c)** sen 
$$\frac{3\pi}{9} \approx 0.866$$

**19.** a) 
$$2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{9} \simeq 2 \cdot 0.342 = 0.684$$

$$sen \frac{2\pi}{9} \simeq 0,643$$

Logo: 
$$2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{9} \neq \text{sen } \frac{2\pi}{9}$$

Portanto, a igualdade é falsa.

**b)** sen 
$$\frac{\pi}{9}$$
 + sen  $\frac{2\pi}{9}$  \simeq 0,342 + 0,643 = 0,985

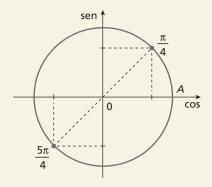
$$sen \frac{3\pi}{9} = 0.866$$

Logo: sen 
$$\frac{\pi}{9}$$
 + sen  $\frac{2\pi}{9}$   $\neq$  sen  $\frac{3\pi}{9}$ 

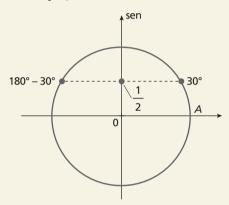
Portanto, a igualdade é falsa.

Comentário: Com a verificação de casos particulares, so salunos são estimulados a concluir que o seno da soma de duas medidas não é igual à soma dos senos dessas mesmas medidas.

- No 1º quadrante: sen  $\frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- No 3º quadrante: sen  $\frac{5\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

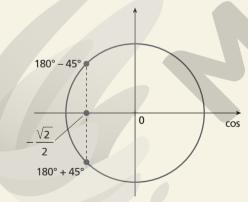


**21. a)** Observando o ciclo trigonométrico e lembrando que sen  $30^\circ = \frac{1}{2}$ , concluímos que há dois arcos que satisfazem a equação:



$$sen x = \frac{1}{2} \implies x = 30^{\circ} ou x = 150^{\circ}$$

b)



$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 135^{\circ} \text{ ou } x = 225^{\circ}$$

Comentário: Esse exercício propicia aos alunos resolver equações trigonométricas simples.

22. a) 
$$tg \ 40^{\circ} > 0$$
  
 $tg \ 220^{\circ} > 0$   $\Rightarrow (tg \ 40^{\circ} + tg \ 220^{\circ}) > 0$  (I)  
 $tg \ 315^{\circ} < 0$   
 $tg \ 165^{\circ} < 0$   $\Rightarrow (tg \ 315^{\circ} + tg \ 165^{\circ}) < 0$  (II)  
De (I) e (II), vem:

 $(tg \ 40^{\circ} + tg \ 220^{\circ}) \cdot (tg \ 315^{\circ} + tg \ 165^{\circ}) < 0$ 

**b)** 
$$\operatorname{tg} \frac{4\pi}{6} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} < 0$$
 $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} > 0$ 

$$\Rightarrow 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} < 0$$

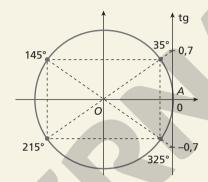
$$Logo: \frac{2 \cdot tg \frac{4\pi}{6} \cdot tg \frac{5\pi}{4}}{-2} > 0$$

**23.** 
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 42^{\circ} \approx 0.90$$
  
 $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 160^{\circ} = -\operatorname{tg} 20^{\circ} \approx -0.36$   
 $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 260^{\circ} = \operatorname{tg} 80^{\circ} \approx 5.67$ 

**24.** a) tg 
$$145^{\circ} \simeq -0.7$$

**b)** tg 
$$215^{\circ} \simeq 0.7$$

**c)** tg 
$$325^{\circ} \simeq -0.7$$



**25.** Podemos escolher, por exemplo,  $\alpha=20^\circ$ , assim, tg  $20^\circ\simeq 0.364$  e tg  $40^\circ\simeq 0.839$ . Observando a relação, verificamos que tg  $40^\circ\neq 2\cdot$  tg  $20^\circ$ , ou seja,  $0.839\neq 0.728$ . Podemos escolher  $\alpha=30^\circ$ , que é um dos ângulos notáveis, assim não é preciso utilizar a calculadora para verificar essa desigualdade.

Comentário: Essa questão leva os alunos a verificar, agora de modo mais abrangente, que não há proporcionalidade entre as medidas de um ângulo e os respectivos valores da tangente.

**26. a)** tg  $\alpha = \frac{0.55}{0.84}$  é menor que 1.

**b)** 
$$tg \alpha = \frac{0.55}{0.84} \approx 0.65 \text{ é menor que 1.}$$

c)  $\cos \alpha > 0$  e sen  $\alpha > 0$ ; então,  $\alpha$  pertence ao 1º quadrante.

**d)** 
$$(\pi - \alpha) \in 2^{\underline{\alpha}}$$
 quadrante  $\Rightarrow$  tg  $(\pi - \alpha) < 0$   
 $(\pi + \alpha) \in 3^{\underline{\alpha}}$  quadrante  $\Rightarrow$  tg  $(\pi + \alpha) > 0$ 

$$(2\pi - \alpha) \in 4^{\circ}$$
 quadrante  $\Rightarrow$  tg  $(2\pi - \alpha) < 0$ 

**e)** 
$$tg (\pi - \alpha) \simeq -0.65$$

$$tg(\pi + \alpha) \simeq 0.65$$

$$tg (2\pi - \alpha) \simeq -0.65$$

Comentário: Esse exercício proporciona a diversidade de aplicação dos conceitos estudados: peça aos alunos que façam uma estimativa; calculem e comparem o resultado com o valor estimado; localizem o quadrante de um arco conhecendo os valores de seno, cosseno e tangente; e apliquem as relações de simetria para tangente.

**27.** 
$$\cos^2 x + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{12}{13}$$

Como x pertence ao 1º quadrante, temos cos x > 0.

$$Logo, \cos x = \frac{12}{13}.$$

**28. a)**  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow (0.8)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin x = \pm 0.6$ 

Como x pertence ao  $4^{\circ}$  quadrante, temos sen x < 0. Logo, sen x = -0.6.

- **b)**  $\lg x = \frac{\sec x}{\cos x} = \frac{-0.6}{0.8} \Rightarrow \lg x = -0.75$
- **29.** a)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{4}$

Como sen<sup>2</sup>  $\alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , temos:

$$\operatorname{sen}^{2} \alpha + \left(\frac{3 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{4}\right)^{2} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^{2} \alpha + \frac{9 \cdot \operatorname{sen}^{2} \alpha}{16} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 \cdot \text{sen}^2 \, \alpha}{16} = 1 \Rightarrow \text{sen} \, \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Como α pertence ao 3º quadrante, temos:

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5} = -0.8$$

 $\Rightarrow$  cos  $\alpha = -0.6$ 

**b)** 
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{-\frac{4}{5}}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow$$

- **30.** Para um arco de medida  $\alpha$ , a relação fundamental da Trigonometria sempre é válida:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Como  $(0.8)^2 + (0.4)^2 = 0.64 + 0.16 = 0.8$ , não são possíveis as
- **31.** a)  $180^{\circ} 80^{\circ} 30^{\circ} = 70^{\circ}$

$$\frac{6}{\text{sen } 70^{\circ}} = \frac{y}{\text{sen } 30^{\circ}} = \frac{x}{\text{sen } 80^{\circ}}$$

igualdades sen  $\alpha = 0.8$  e cos  $\alpha = 0.4$ .

$$x = \frac{6 \cdot \text{sen } 80^{\circ}}{\text{sen } 70^{\circ}} \simeq \frac{6 \cdot 0.98}{0.94} \Rightarrow x \simeq 6.3$$

$$y = \frac{6 \cdot \sin 30^{\circ}}{\sin 70^{\circ}} \simeq \frac{6 \cdot 0.5}{0.94} \Rightarrow y \simeq 3.2$$

Logo,  $x \approx 6.3$  cm e  $y \approx 3.2$  cm.

**b)** 
$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin x} \Rightarrow \sin x \approx \frac{3 \cdot 0.87}{4} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow$  sen  $x \simeq 0.6525$ 

Pela tabela dada, obtemos:  $x \simeq 40^{\circ}$ 

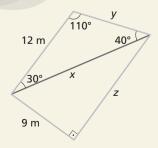
$$180^{\circ} - 60^{\circ} - 40^{\circ} = 80^{\circ}$$

Assim:  $\frac{4}{\text{sen } 60^{\circ}} \simeq \frac{y}{\text{sen } 80^{\circ}}$ 

$$y \simeq \frac{4 \cdot \text{sen } 80^{\circ}}{\text{sen } 60^{\circ}} \simeq \frac{4 \cdot 0.98}{0.87} \simeq 4.5$$

Logo,  $x \simeq 40^{\circ}$  e  $y \simeq 4.5$  m.

32. a) Esquematizando:



Aplicando a lei dos senos no triângulo obtusângulo, temos:

$$\frac{x}{\sin 110^{\circ}} = \frac{12}{\sin 40^{\circ}}$$

$$x \simeq \frac{12 \cdot 0.94}{0.64} \Rightarrow x \simeq 17.6$$

Logo, a distância entre a casa e a entrada é, aproximadamente, 17.6 metros.

**b)** Aplicando a lei dos senos, vamos descobrir a distância entre a entrada e o pomar:

$$\frac{17.6}{\sin 110^{\circ}} = \frac{y}{\sin 30^{\circ}}$$

$$y \simeq \frac{17.6 \cdot 0.5}{0.94} \simeq 9.4$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos:

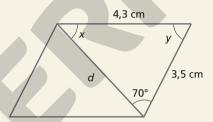
$$z^2 = (17,6)^2 - 9^2 \Rightarrow z \approx 15,1$$

caminho 1:  $12 + 9.4 \approx 21.4$ 

caminho 2:  $9 + 15,1 \approx 24,1$ 

Portanto, o caminho 1 é o mais curto.

33.



$$\frac{d}{\text{sen } y} = \frac{4.3}{\text{sen } 70^{\circ}} = \frac{3.5}{\text{sen } x}$$

$$\operatorname{sen} x \simeq \frac{3.5 \cdot 0.94}{4.3} \simeq 0.77 \Rightarrow x \simeq 50^{\circ}$$

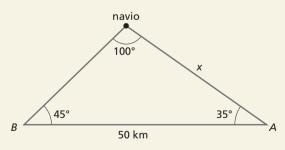
$$y \simeq 180^{\circ} - 50^{\circ} - 70^{\circ} \Rightarrow y \simeq 60^{\circ}$$

$$\frac{d}{\text{sen }60^{\circ}} \simeq \frac{3.5}{\text{sen }50^{\circ}} \Rightarrow \frac{d}{0.87} \simeq \frac{3.5}{0.77} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \simeq \frac{0.87 \cdot 3.5}{0.77} \Rightarrow d \simeq 3.95$$

Logo, a medida aproximada da diagonal é 3,95 cm.

34. Esquematizando a situação:



Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{50}{\sin 100^{\circ}} = \frac{x}{\sin 45^{\circ}} \Rightarrow x \simeq \frac{50 \cdot 0.71}{0.98} \simeq 36.2$$

Assim, a distância entre o navio e o ponto de observação  $\bar{Q}$   $\bar{Q}$ 

35. Velocidade: 0,2 m/s

Em 5 minutos, ou seja, em 300 segundos, cada nadador percorre:  $300 \cdot 0.2 \text{ m} = 60 \text{ m}$ 

Como o triângulo ABC é isósceles, temos:

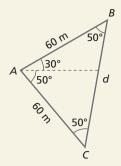
 $\operatorname{med}(\widehat{B}) = \operatorname{med}(\widehat{C}) = 50^{\circ}$ 

Aplicando a lei dos senos,

$$\frac{60}{\sin 50^{\circ}} = \frac{d}{\sin 80^{\circ}}$$

$$d \simeq \frac{60 \cdot 0.98}{0.77} \simeq 76.36$$

Logo, a distância entre os nadadores será, aproximadamente, 76,36 m.



**36.** a) 
$$y^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ$$
  
$$y^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y^2 \simeq 25.6$$

Portanto,  $y \approx 5.1$  cm.

**b)** 
$$x^2 = 2.5^2 + 3^2 - 2 \cdot 2.5 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 6.25 + 9 - 2 \cdot 2.5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

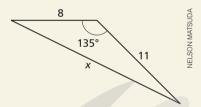
$$x^2 \simeq 22.75$$

Portanto,  $x \approx 4.8$  cm.

**37.** 
$$x^2 = 8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cos 135^\circ$$

$$x^2 = 64 + 121 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x^2 \simeq 309,08$$



Portanto,  $x \approx 17.6$  cm.

**38.** a) 
$$5^2 = 2^2 + 3.5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3.5 \cdot \cos \alpha$$

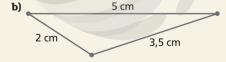
$$25 = 4 + 12.25 - 14 \cdot \cos \alpha$$

$$25 - 4 - 12,25 = -14 \cdot \cos \alpha$$

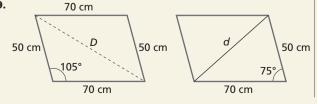
$$8,75 = -14 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{8,75}{14} = -\frac{5}{8}$$

Como cos  $\alpha$  < 0, concluímos que o ângulo  $\alpha$  é obtuso e, portanto, o triângulo é obtusângulo.







Sabemos que cos  $105^{\circ} = -\cos 75^{\circ}$ .

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$D^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 105^\circ \Rightarrow D \approx 96$$

$$d^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 75^\circ \Rightarrow d \approx 74.7$$

As diagonais medem, aproximadamente, 96 cm e 74,7 cm.

**40.** Sabemos que: 1 n'o = 1.852 m/h = 1,852 km/hAo meio-dia, os navios viajaram 4 horas.

Então:

#### Navio 1:

- Velocidade (km/h): 24 · 1,852 = 44,448
- Distância percorrida (km):  $4 \cdot 44,448 \approx 177.8$
- Velocidade (km/h):  $18 \cdot 1,852 = 33,336$
- Distância percorrida (km): 4 · 33,336 ≃ 133,3

Representando a situação ao meio-dia, temos:

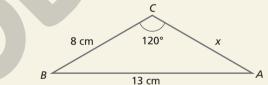


Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 177.8^2 + 133.3^2 - 2 \cdot 177.8 \cdot 133.3 \cdot \cos 75^\circ$$
  
 $x \approx 192.5$ 

Portanto, a distância entre os navios ao meio-dia é, aproximadamente, 192,5 km.

41.



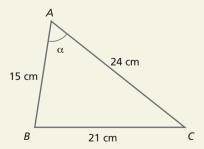
$$(13)^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$$

$$169 = 64 + x^2 - 16 \cdot x (-0.5)$$

$$x^2 + 8x - 105 = 0 \Rightarrow x = -15$$
 (não serve) e  $x = 7 \Rightarrow AC = 7$ 

Portanto, a medida do lado AC é 7 cm.

42.



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$21^2 = 15^2 + 24^2 - 2 \cdot 15 \cdot 24 \cdot \cos \alpha$$

$$441 = 225 + 576 - 720 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^{\circ}$$

Portanto, a medida do ângulo formado entre os lados  $\overline{AB}$ e  $\overline{AC}$  do triângulo é 60°.

#### **Exercícios complementares**

1. 
$$\frac{360}{x} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{15.7} \Rightarrow x = 225^{\circ}$$

**2.** 
$$\frac{360^{\circ}}{300^{\circ}} = \frac{2\pi r}{200} \Rightarrow r = \frac{360 \cdot 100}{300 \cdot \pi} \Rightarrow r \approx 38,22$$

Logo, o raio mede, aproximadamente, 38,22 m.

3. grau radiano  

$$180 - \pi$$
  
 $140 - x \Rightarrow x = \frac{7\pi}{9}$  rad

Logo, o ângulo central α mede 1,4 rad.

5. Cada hora determina um ângulo de 30°, porém, como já se passaram 20 minutos da hora cheia, ou seja,  $\frac{1}{2}$  da hora, o ponteiro das horas percorreu 10°.



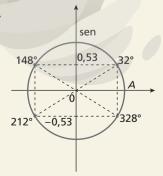
Logo, o menor ângulo formado pelos ponteiros mede:  $(20^{\circ} + 30^{\circ}) = 50^{\circ}$ 

$$\alpha = \frac{30 \cdot 15}{60} = \frac{450}{60} = 7^{\circ}30'$$

$$\alpha + 30^{\circ} = 7^{\circ}30' + 30^{\circ} = 37^{\circ}30'$$

Assim, o menor ângulo formado pelos ponteiros mede 37°30'.



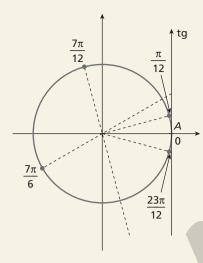


**a)** sen 
$$148^{\circ}$$
 = sen  $32^{\circ}$  = 0.53

**b)** sen 
$$212^{\circ} = -\text{sen } 32^{\circ} = -0.53$$

**c)** sen 
$$328^{\circ} = -\text{sen } 32^{\circ} = -0.53$$

8.



Em ordem decrescente:

$$tg \frac{7\pi}{6}$$
,  $tg \frac{\pi}{12}$ ,  $tg \frac{23\pi}{12}$ ,  $tg \frac{7\pi}{12}$ 

grau radiano
$$\begin{array}{ccc}
180 & \longrightarrow & \pi \\
144 & \longrightarrow & a
\end{array} \Rightarrow a = \frac{4\pi}{5} \text{ rad}$$

$$P: 180^{\circ} - 144^{\circ} = 36^{\circ}$$

grau radiano
$$180 - \pi$$

$$36 - x$$

$$x = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

$$R: 36^{\circ} + 180^{\circ} = 216^{\circ}$$

$$\begin{array}{ccc}
180 & \pi \\
216 & y
\end{array}
\Rightarrow y = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$$

S: 
$$360^{\circ} - 36^{\circ} = 324^{\circ}$$

$$\begin{array}{ccc}
180 & --- & \pi \\
324 & --- & z
\end{array}
\Rightarrow z = \frac{9\pi}{5} \text{ rad}$$

**10.** a) sen 
$$\frac{5\pi}{3}$$
 - cos  $\frac{5\pi}{4}$  =  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  -  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  =  $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ 

**b)** 
$$\cos \frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{6}$$

11. 
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{30}}{6}$$

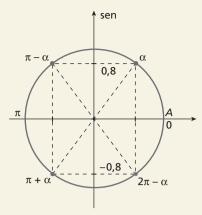
Como  $\theta$  pertence ao  $3^{\circ}$  quadrante, temos cos  $\theta < 0$ .

Logo, 
$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{30}}{6}$$
.

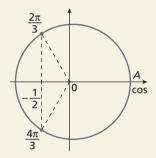
Assim:

$$tg \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \Rightarrow tg \theta = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{6}}{-\frac{\sqrt{30}}{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow$$
 tg  $\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}} \Rightarrow$  tg  $\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$  tg  $\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 



- **a)** sen  $(\pi \alpha) = \text{sen } \alpha = 0.8$
- **b)** sen  $(\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0.8$
- **c)** sen  $(2\pi \alpha) = -\text{sen } \alpha = -0.8$
- **13.** Os arcos de medida x que têm cosseno igual a  $-\frac{1}{2}$ , para  $0 < x < 2\pi$ , são  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$ .



14.

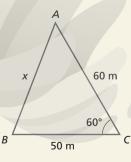


Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 30^{\circ}} = \frac{15\sqrt{2}}{\text{sen } 135^{\circ}} \Rightarrow x = \frac{15\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = 15$$

Portanto, x = 15 cm.

15.



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^{2} = 60^{2} + 50^{2} - 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \cos 60^{\circ}$$
$$x^{2} = 3.600 + 2.500 - 6.000 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 3.100$$

$$x = 10\sqrt{31} \approx 55,7$$

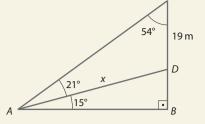
Portanto, a distância entre os edifícios A e B é, aproximadamente, 55,7 m.

16. Fazendo um esquema da situação, temos:

$$med(\widehat{A}) = 36^{\circ}$$

$$med(\hat{B}) = 90^{\circ}$$

$$med(\widehat{C}) = 54^{\circ}$$



Aplicando a lei dos senos no  $\triangle ACD$ , temos:

$$\frac{19}{\text{sen } 21^{\circ}} = \frac{x}{\text{sen } 54^{\circ}} \Rightarrow x \simeq \frac{19 \cdot 0.81}{0.36} \simeq 42,75$$

A distância entre o topógrafo e a base da torre é, aproximadamente, 42,75 m.

**17. a)** Se  $\cos x = \frac{1}{3}$ , então:

$$sen2 x + cos2 x = 1 \Rightarrow sen2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Rightarrow 
\Rightarrow sen2 x = \frac{8}{9}$$

Como x é um arco do  $1^{\circ}$  quadrante, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**b)** 
$$\lg x = \frac{\sec x}{\cos x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

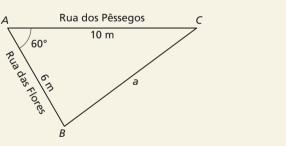
**18. a)**  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$ 

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{16}{25}$$

Como x é um arco do  $1^{\circ}$  quadrante, temos: sen  $x = \frac{4}{5}$ 

**b)** 
$$tg \ x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow tg \ x = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

19. O terreno pode ser representado pela figura a seguir.



Para calcular o terceiro lado do terreno, podemos usar a lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$$

$$a^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 136 - 60 = 76$$

$$a = 2\sqrt{19}$$

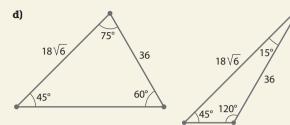
$$a \simeq 8.7 \text{ m}$$

- Há dados suficientes para a resolução do problema.
- Algumas informações não são necessárias para a resolução, como as distâncias do terreno ao hospital e da doceria à escola, por isso foram descartadas.

$$\frac{36}{\text{sen } 45^{\circ}} = \frac{18\sqrt{6}}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{18\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{36} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**b)** sen 
$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = 60^{\circ}$$
 ou  $\beta = 120^{\circ}$ 

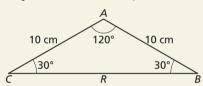
c) 
$$\alpha = 180^{\circ} - (45^{\circ} + 60^{\circ}) = 75^{\circ}$$
 ou  $\alpha = 180^{\circ} - (45^{\circ} + 120^{\circ}) = 15^{\circ}$   
Logo,  $\alpha = 75^{\circ}$  ou  $\alpha = 15^{\circ}$ .



21. Resposta pessoal.

Comentário: Verifique se os alunos estão sentindo dificuldade em criar um problema contextualizado. Incentive-os e oriente-os, se necessário. Pode acontecer de o problema elaborado ter informações extras, irrelevantes para a resolução do problema (como na atividade 19), que deverão ser descartadas, e é possível também que alguns alunos criem problemas insolúveis por falta de informações. Essas situações deverão ser detectadas pela dupla e resolvidas. Auxilie-os nesse processo.

22. Esquematizando a situação, temos:



Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, temos:

$$\frac{\sin 30^{\circ}}{10} = \frac{\sin 120^{\circ}}{R}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{10} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{R}$$

$$R = 10 \cdot 1,7 = 17$$

Assim, o tipo de material a ser utilizado é o IV. alternativa d

#### Autoavaliação

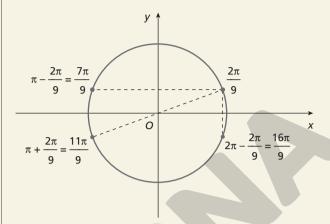
comprimento  $-2\pi\cdot 12$ 

$$x = \frac{120 \cdot 2\pi \cdot 12}{360} = 8\pi$$

Portanto,  $x \approx 25$  cm alternativa d

2. grau radiano  $180 - \pi$  $x = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ alternativa c

Logo, um arco de  $\frac{11\pi}{12}$  rad pertence ao  $2^{\circ}$  quadrante. alternativa b



Os arcos simétricos de  $\frac{2\pi}{Q}$  rad, respectivamente aos eixos  $x \in y \in \hat{a}$  origem O, medem  $\frac{16\pi}{9}$ ,  $\frac{7\pi}{9} \in \frac{11\pi}{9}$ 

alternativa b

**5.** a) 
$$\begin{cases} \sin 210^{\circ} < 0 \\ \cos 150^{\circ} < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 210^{\circ} + \cos 150^{\circ} < 0$$

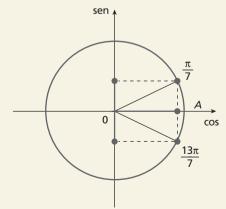
**b)** 
$$\begin{cases} tg \ 150^{\circ} < 0 \\ tg \ 225^{\circ} > 0 \end{cases} \Rightarrow tg \ 150^{\circ} \cdot tg \ 225^{\circ} < 0$$

c) 
$$\begin{array}{c} \cos 270^{\circ} = 0 \\ \sin 125^{\circ} > 0 \end{array}$$
  $\Rightarrow \cos 270^{\circ} \cdot \sin 125^{\circ} = 0$ 

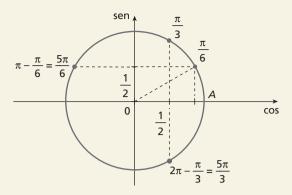
d) 
$$\begin{cases} \sin 240^{\circ} < 0 \\ \cos 110^{\circ} < 0 \end{cases}$$
  $\Rightarrow \sin 240^{\circ} \cdot \cos 110^{\circ} > 0$  alternativa d

6.

**VELSON MATSUDA** 



Observando o ciclo trigonométrico, concluímos que:  $\operatorname{sen} \frac{13\pi}{7} = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{7} \operatorname{e} \cos \frac{13\pi}{7} = \cos \frac{\pi}{7}$ alternativa c



O seno de  $\frac{\pi}{6}$  é igual ao cosseno de  $\frac{5\pi}{3}$  e ao seno de  $\frac{5\pi}{6}$  alternativa a

**8.**  $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow sen^2 \alpha + (0.8)^2 = 1 \Rightarrow sen^2 \alpha = 0.36 \Rightarrow sen \alpha = \pm 0.6$ 

Como  $\alpha$  pertence ao  $4^{\circ}$  quadrante, temos sen  $\alpha = -0.6$ .

Assim: 
$$tg \alpha = \frac{sen \alpha}{cos \alpha} = \frac{-0.6}{0.8} \Rightarrow tg \alpha = -0.75$$

alternativa a

**9.** 
$$\frac{6}{\sin 44^\circ} = \frac{y}{\sin 36^\circ} = \frac{x}{\sin 100^\circ}$$

$$x = \frac{6 \cdot \text{sen } 100^{\circ}}{\text{sen } 44^{\circ}}$$

$$y = \frac{6 \cdot \text{sen } 36^{\circ}}{\text{sen } 44^{\circ}}$$

alternativa d

10. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$(AB)^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 20^\circ$$

$$(AB)^2 \simeq 144 + 64 - 180,5$$

$$(AB)^2 \simeq 27.5$$

$$AB \simeq 5,25$$

alternativa c

# Capítulo 4 - Funcões trigonométricas

#### **Exercícios propostos**

**1. a)** Analisando alguns pontos do gráfico, verificamos que:

$$f(-2) = f(2) = f(6)$$

Como a função é periódica, observamos que:

$$f(x) = f(x+4)$$

Logo, o período p da função é 4.

b) Com procedimento análogo ao do item a, temos:

$$f(-3) = f(-1) = f(1) = f(3)$$

$$f(x) = f(x+2) \Rightarrow p=2$$

c) Com procedimento análogo ao do item a, temos:

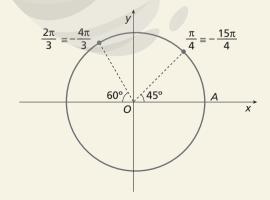
$$f(-1,5) = f(1,5) = f(4,5)$$

$$f(x) = f(x+3) \Rightarrow p=3$$

- 2. Analisando os gráficos, concluímos que:
  - a) valor mínimo: 0; valor máximo: 2
  - **b)** valor mínimo: -1; não tem máximo
  - c) valor mínimo: 8; valor máximo: 12

Comentário: Para o item **c**, comente com os alunos que o 1 não é um valor máximo, pois ele não pertence à função.

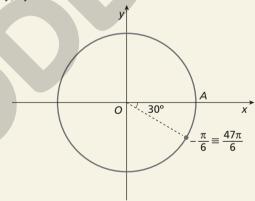
3. a), b), c), d)



$$-\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{15\pi}{4} \equiv -\frac{15\pi}{4} + 4\pi = \frac{\pi}{4}$$

e), f)



$$-\frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6} + 8\pi = \frac{47\pi}{6}$$

- **4. a)** Uma expressão geral dos arcos côngruos a 60° é:  $60^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$ 
  - **b)** Uma expressão geral dos arcos côngruos a  $\frac{\pi}{6}$  é:  $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

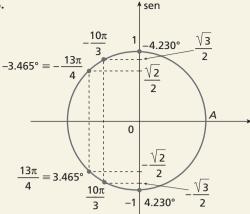
**c)** 
$$385^{\circ} = 25^{\circ} + 360^{\circ} \equiv 25^{\circ}$$

Uma expressão geral dos arcos côngruos a 385° é: 25° +  $k \cdot$  360°,  $k \in \mathbb{Z}$ 

**d)** 
$$\frac{25\pi}{7} = \frac{11\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} = \frac{11\pi}{7} + 2\pi = \frac{11\pi}{7}$$

Uma expressão geral dos arcos côngruos a  $\frac{25\pi}{7}$  é:

$$\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$



**a)** sen 
$$3.465^{\circ}$$
 = sen  $225^{\circ}$  = -sen  $45^{\circ}$  =  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

**b)** sen 
$$\frac{13\pi}{4}$$
 = sen  $\frac{5\pi}{4}$  = -sen  $\frac{\pi}{4}$  =  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

**c)** sen 
$$4.230^{\circ}$$
 = sen  $270^{\circ}$  =  $-1$ 

**d)** sen 
$$\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$$
 = sen  $\frac{2\pi}{3}$  =  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

**e)** sen 
$$(-3.465^\circ)$$
 = sen  $135^\circ$  = sen  $45^\circ$  =  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

**f)** sen 
$$\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$$
 = sen  $\frac{3\pi}{4}$  = sen  $\frac{\pi}{4}$  =  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

**g)** sen 
$$(-4.230^\circ)$$
 = sen  $90^\circ = 1$ 

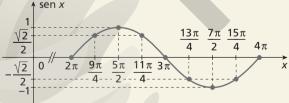
**h)** sen 
$$\frac{10\pi}{3} = \text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- 6. Observando os valores no exercício anterior, podemos generalizar:
  - $sen(-\alpha) = -sen \alpha$
  - $\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} (-\alpha)$
- **7.** Sabemos que os valores da função f(x) = sen x variam no intervalo [-1, 1].

Assim:

$$-1 \le \text{sen } x \le 1 \Rightarrow -1 \le 2k - 3 \le 1 \Rightarrow$$
  
  $\Rightarrow 2 \le 2k \le 4 \Rightarrow 1 \le k \le 2$ 

8.



9. a) O gráfico I aproximou os números irracionais para números racionais com duas casas decimais. Assim,  $2\pi$  foi representado por 6,28.

**b)** amplitude = 
$$\frac{2-0}{2} = 1$$

**c)** 
$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e Im}(f) = [0, 2]$$

**d)** Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de 
$$f$$
 é o gráfico de  $g$  deslocado 1 unidade para cima. Assim, a imagem das duas funções não é a mesma. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

Comentário: Com esse exercício, oriente os alunos a fazerem a leitura de um gráfico e identificar os conceitos de domínio, imagem, amplitude e período. Além disso, o exercício possibilita trabalhar a ideia de translação do gráfico, em função do parâmetro k, na função  $f(x) = k + \operatorname{sen} x$ .

**10.** O número máximo ocorre quando sen  $\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ . Então:

$$f(t)_{\text{max.}} = 2.500 + 1.215 \cdot 1 = 3.715$$

Portanto, o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa é 3.715.

**11. a)** Analisando a função  $h(t) = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$  verificamos que a altura máxima é atingida pela maré quando seno assume seu valor máximo (1):

$$h_{\text{máx}} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

E a altura mínima é atingida pela maré quando seno assume seu valor mínimo (-1):

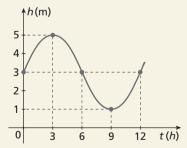
$$h_{\min} = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$$

Logo, a altura máxima atingida pela maré é 5 m e a mínima é 1 m.

**b)** Atribuindo alguns valores a t, obtemos:

t	$h(t) = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$
0	$h(0) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}(0) =$ = 3 + 2 \cdot 0 = 3
3	$h(3) = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ $= 3 + 2 \cdot 1 = 5$
6	$h(6) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}(\pi) =$ = 3 + 2 \cdot 0 = 3
9	$h(9) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) =$ = 3 + 2 \cdot (-1) = 1
12	$h(12) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}(2\pi) =$ = 3 + 2 \cdot 0 = 3

Assim, esboçamos o gráfico de  $h(t) = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ :



**c)** Podemos observar, no gráfico esboçado na resposta ao item **b**, que a maré alta ocorre para t=3. Além disso, observamos que, a partir de t=12, o ciclo se reinicia. Logo, a altura máxima atingida pela maré ocorre novamente para t=15.

Como t=0 representa meio-dia (12 h), concluímos que a maré alta ocorre às 15 h e às 3 h.

Analogamente, concluímos que a maré baixa ocorre para t = 9 e t = 21, ou seja, às 21 h e às 9 h.

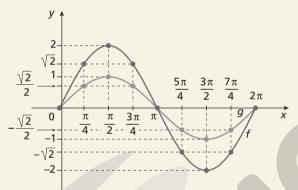
**d)** Observando o gráfico da função, concluímos que a maré alta se repete de 12 h em 12 h e que o mesmo acontece com a maré baixa.

Comentário: Este exercício e o exercício anterior mostram a aplicação dos conceitos estudados na modelagem de uma situação em uma empresa e um evento das Ciências da Natureza, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101**.

12. a)

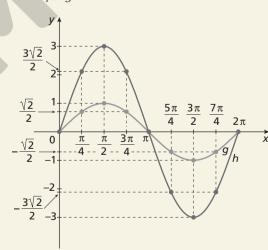
х	sen x	2 • sen <i>x</i>
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	2
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
π	0	0
<u>5π</u> 4	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
2π	0	0

b), c)



**d)** A amplitude da função g mede 1 e a amplitude da função f mede 2, ou seja, a amplitude da função f é o dobro da amplitude da função g.

	•		
e)	х	sen x	3 • sen <i>x</i>
	0	0	0
	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
	$\frac{\pi}{2}$	1	3
	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
	π	0	0
	<u>5π</u> 4	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
	$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3
	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
	2π	0	0



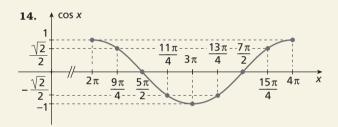
Para funções do tipo  $i(x) = k \cdot \text{sen } x$ , em que k é um número real positivo, a amplitude do gráfico de i será igual a k vezes o valor da medida da amplitude do gráfico da função q(x) = sen x.

Comentário: Esse é um exercício de investigação sobre o parâmetro k na função dada por  $i(x) = k \cdot \operatorname{sen} x$ . Os alunos iniciam a investigação pela construção do gráfico em casos particulares. Se necessário, proponha outros casos antes de eles formularem uma hipótese. Se achar conveniente, explore esse exercício em um  $\operatorname{software}$  de construção de gráficos, que possibilite a visualização de vários casos particulares, facilitando a generalização.

**13.** 
$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 78x + \cos 80x =$$

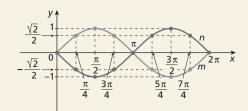
$$= \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi + \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi + \dots + \cos 20\pi =$$

$$= 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + \dots + 0 - 1 + 0 + 1 = 0$$



- **15. a)**  $g(0) = g(2\pi)$ Como a função é periódica, temos:  $g(x) = g(x + 2\pi)$ O período p da função g é  $2\pi$ .
  - **b)** amplitude =  $\frac{2-0}{2} = 1$
  - **c)**  $D(g) = \mathbb{R} \text{ e Im}(g) = [0, 2]$
  - **d)** Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de g é o gráfico de f deslocado 1 unidade para cima. Assim, a imagem das duas funções não é a mesma. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.
- **16.** Vamos construir um quadro com os valores de x, sen x e sen x, considerando  $0 \le x \le 2\pi$ .

x	sen x	−sen x	
0	0	0	
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\frac{\pi}{2}$	1	-1	
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
π	0	0	
<u>5π</u> 4	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
<u>3π</u> 2	-1	1	
<u>7π</u> 4	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
2π	0	0	



Comentário: Espera-se que os alunos concluam que, assim como os gráficos das funções  $g(x) = \cos x$  e  $h(x) = -\cos x$ , os gráficos das funções  $m(x) = \sin x$  e  $n(x) = -\sin x$  são simétricos em relação ao eixo x.

**17.** O pico da doença deu-se quando cosseno assumiu seu valor máximo, ou seja, para  $\cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right) = 1$ . Então:  $n_{max} = 6.380 + 5.900 \cdot 1 = 12.280$ 

 $n_{\text{max}} = 6.380 + 5.900 \cdot 1 = 12.280$ Portanto, ocorreram 12.280 casos nessa determinada região.

Sabemos que o valor máximo de cosseno ocorre para os arcos de  $0, 2\pi, 4\pi, ...$ ; então:

• 
$$\frac{\pi \cdot t - \pi}{6} = 0 \Rightarrow \pi \cdot t - \pi = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

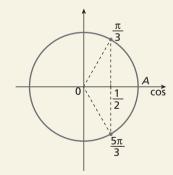
• 
$$\frac{\pi \cdot t - \pi}{6} = 2\pi \Rightarrow \pi \cdot t - \pi = 12\pi \Rightarrow t = \frac{13\pi}{\pi} = 13$$

Logo, como *t* varia de 1 a 12 (de acordo com os meses do ano), concluímos que o pico da doença ocorreu em janeiro.

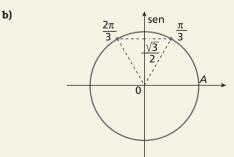
- **18. a)** Observando o gráfico, temos:  $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ Como a função é periódica, temos:  $h(x) = h(x + \pi)$ O período p da função h é  $\pi$ .
  - **b)** Observando o gráfico, concluímos que as assíntotas passam em:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

c) 
$$D(h) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} e \operatorname{Im}(h) = ]-\infty, +\infty[$$

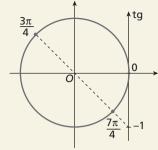
- **19.** Espera-se que os alunos concluam que  $g(x) = \operatorname{tg} x$  e  $j(x) = -\operatorname{tg} x$  são simétricas em relação ao eixo x.
- 20. a)



$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ rad ou } x = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$



$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \operatorname{rad} \operatorname{ou} \frac{2\pi}{3} \operatorname{rad}$$



tg 
$$x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$
 rad ou  $x = \frac{7\pi}{4}$  rad

**d)** sen 
$$x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$
 rad

**e)** sen 
$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$
 rad ou  $x = \pi$  rad ou  $x = 2\pi$  rad

**21. a)** sen 
$$x \cdot (\text{sen } x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi \\ \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Logo, os valores possíveis para x são 0 rad,  $\pi$  rad,  $2\pi$  rad e  $\frac{3\pi}{2}$  rad.

**b)** 
$$2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2 \cdot \sin x - 1) = 0$$

$$\begin{cases}
\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} \\
\text{ou} \\
2 \cdot \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \\
\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}
\end{cases}$$

Os valores possíveis de x são  $\frac{\pi}{6}$  rad,  $\frac{\pi}{2}$  rad,

$$\frac{5\pi}{6}$$
 rad e  $\frac{3\pi}{2}$  rad.

**c)** 
$$\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1 = 0$$

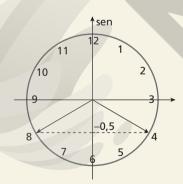
Sendo  $\cos x = y$ , temos:

$$y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2\pi$$

Os possíveis valores de x são 0 rad e  $2\pi$  rad.

22.



O relógio estará indicando 16 h ou 20 h.

O relógio estará indicando 16 h ou 20 h.

23. 
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-1\Rightarrow x-\frac{\pi}{2}=\pi\Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$$

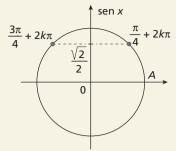
Assim,  $x=\frac{3\pi}{2}$  rad.

24. a)  $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

Assim,  $x = \frac{3\pi}{2}$  rad.

**24. a)** sen 
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

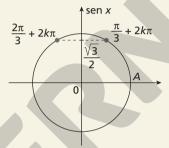
No intervalo  $[0, 2\pi]$ , os arcos cujo seno vale  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  são



Logo, no universo real temos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

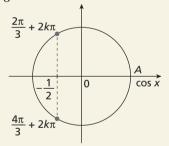
**b)** sen 
$$x = \text{sen } \frac{2\pi}{3}$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**c)** 
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

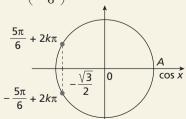
No intervalo [0,  $2\pi$ ], os arcos cujo cosseno vale  $-\frac{1}{2}$ 



Logo, no universo real temos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

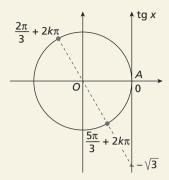
**d)** 
$$\cos x = \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right)$$



Logo: 
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou} \right\}$$
  
$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**e)** tg  $x = -\sqrt{3}$ 

Os arcos cuja tangente vale  $-\sqrt{3}$ , considerando o intervalo [0,  $2\pi$ ], são  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{5\pi}{3}$ .

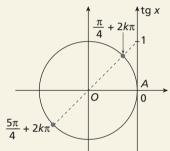


Observe que:  $\frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \pi$ 

Logo, no universo real temos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathbf{f)} \ \text{tg } x = \ \text{tg } \frac{5\pi}{4}$$



Observe que:  $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi$ 

Logo:  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$ 

**25.** No intervalo  $[0, 2\pi]$ , os arcos cujo cosseno vale  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  são  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{11\pi}{6}$ .

Assim, temos:

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$$

Portanto:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**26.** sen  $x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$  ou  $\cos x = 0$ 

No universo real, temos:

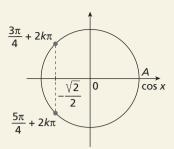
$$\mathrm{sen}\; x=0 \Rightarrow x=0+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Da união das soluções, concluímos que:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \, \middle| \, x = \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**27.** 
$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Logo, uma resposta possível é:  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

Comentário: Este exercício proporciona a reversibilidade do estudo, ou seja, a oportunidade de elaborar uma equação a partir de uma solução conhecida.

**28.** • Para x = 0, temos:

$$f(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Logo, a função fé representada pela curva em vermelho. Espera-se que os alunos percebam que o gráfico de fé o gráfico da função seno transladado  $\frac{\pi}{2}$  unidade para a esquerda.

• Para  $x = \frac{\pi}{4}$ , temos:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 = 1$$

Logo, a função g é representada pela curva em azul. Espera-se que os alunos percebam que o gráfico de g é o gráfico da função cosseno transladado  $\frac{\pi}{4}$  unidade para a direita.

- **29.** Partindo da função original  $g(x) = \operatorname{sen} x$ :
  - $1^{\circ}$  passo: sen  $x \to \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

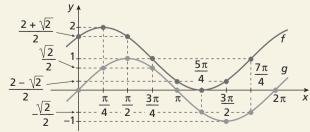
O gráfico de g sofrerá uma translação de  $\frac{\pi}{4}$  para a esquerda sobre o eixo x.

•  $2^{9}$  passo: sen  $\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 1 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 

O gráfico da função translada 1 unidade para cima.

O novo conjunto imagem será Im(f) = [0, 2].

Construindo o gráfico, temos:



O domínio, o período e a amplitude de f são os mesmos de g:

 $D(f) = \mathbb{R}, p = 2\pi e$  a amplitude é 1.

- a amplitude do gráfico é 2. Logo, b = 2;
- o gráfico está deslocado 2 unidades para cima em relação ao gráfico  $g(x) = 2 \cdot \cos x$ . Logo,  $\alpha = 2$ .

Outro modo:

Também podemos resolver esse exercício algebricamente:

• Pelo gráfico, temos que f(0) = 4. Assim:

$$f(0) = a + b \cdot \cos 0$$

$$4 = a + b \cdot 1$$

$$a + b = 4$$
 (I)

• Pelo gráfico, temos também que  $f(\pi) = 0$ . Assim:

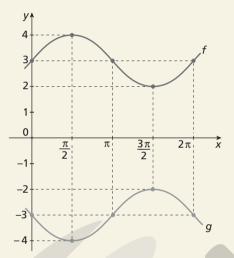
$$f(\pi) = a + b \cdot \cos \pi$$

$$0 = a + b \cdot (-1)$$

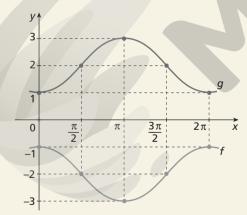
$$a = b$$
 (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos a=2 e b=2.

**31.** a)  $f(x) = 3 + \sin x e g(x) = -3 - \sin x$ 



**b)**  $f(x) = -2 + \cos x e g(x) = 2 - \cos x$ 



Espera-se que os alunos percebam que, dada uma função inicial, ao multiplicar sua lei por -1, as ordenadas negativas tornam-se positivas e as positivas tornam-se negativas. Por isso, seu gráfico será refletido, no plano cartesiano, em relação ao eixo x.

Comentário: Softwares para a construção de gráficos são ferramentas cada vez mais indispensáveis no processo de ensino-aprendizagem, pois ampliam as fronteiras do

aprendizado, permitindo aos alunos que vão além da construção em si de um gráfico específico para a construção de "famílias" de gráficos.

- **32. a)** Partindo da função  $q(x) = \operatorname{sen} x$ , temos:
  - 1º passo: sen  $x \to \text{sen } 2x$ O novo período é  $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .
  - $2^{a}$  passo: sen  $2x \rightarrow 3$  sen 2xA nova amplitude é igual a 3.

Quando multiplicamos g por 3, sua imagem passa a ser [-3, 3].

Então, Im(f) = [-3, 3].

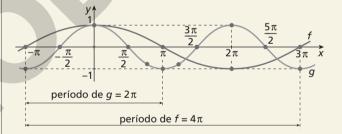
O domínio de f é o mesmo de g, ou seja,  $D(f) = \mathbb{R}$ .

- **b)** Partindo da função  $g(x) = \cos x$ , temos:
  - 1º passo:  $\cos x \rightarrow \cos 3x$ O novo período é  $p = \frac{2\pi}{3}$ .
  - $2^{\circ}$  passo:  $\cos 3x \rightarrow 2 \cdot \cos 3x$ A nova amplitude é igual a 2.
  - 3º passo: 2 · cos 3x → 5 + 2 · cos 3x
     Ocorre translação de 5 unidades para cima.

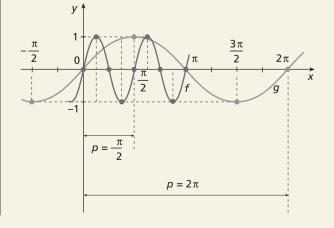
Após o  $2^{\circ}$  passo, o conjunto imagem da função g passa a ser [-2, 2]. Após o  $3^{\circ}$  passo, o conjunto imagem passa a ser [3, 7]. Logo, Im(f) = [3, 7].

O domínio de f é o mesmo de g, ou seja,  $D(f) = \mathbb{R}$ .

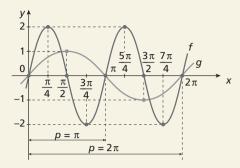
**33. a)** Partimos da função  $g(x)=\cos x$  e, em seguida, construímos o gráfico de f com período  $p=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ .



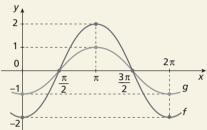
**b)** Partimos da função  $g(x) = \operatorname{sen} x$  e, em seguida, construímos o gráfico de f com período  $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .



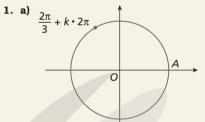
c) Partimos da função  $g(x) = \operatorname{sen} x$  e, em seguida, construímos o gráfico de fcujo período é  $p=\frac{2\pi}{2}=\pi$ e a amplitude é 2.



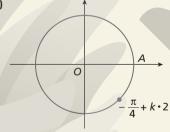
**d)** Partimos da função  $g(x) = -\cos x$  e, em seguida, construímos o gráfico de f com amplitude 2. Observe que o período não sofre mudança.



# **Exercícios complementares**



**b**)



c)



**2. a)**  $855^{\circ} = 135^{\circ} + 2 \cdot 360^{\circ} \equiv 135^{\circ}$ Assim, a expressão pedida é:  $135^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ 

**b)** 
$$\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 8\pi \equiv \frac{\pi}{3}$$

Assim, a expressão pedida é:

$$\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$
, com  $k \in \mathbb{Z}$ 

**3.** A função seno varia de -1 a 1. A função f(x) = -sen 10xtambém varia de -1 a 1. Então, podemos escrever:

$$-1 \le -\text{sen } 10x \le 1$$

Adicionando 4 a todos os membros, temos:

 $-1 + 4 \le 4 - \sin 10x \le 1 + 4 \Rightarrow 3 \le 4 - \sin 10x \le 5$ 

Logo, o menor valor da expressão é 3 e o maior é 5.

**4.** Em 2025, temos t = 15 anos.

$$A(15) = 850 + 200 \cdot \text{sen } \frac{\pi \cdot 15}{6}$$

Temos:  $\frac{15\pi}{6} = \frac{5\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}$ 

$$A(15) = 850 + 200 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}$$

$$A(15) = 1.050$$

Portanto, a quantidade de algas nessa baía, em janeiro de 2025, será 1.050 toneladas.

5. Observando a lei da função, conclui que o número máximo de clientes ocorre quando sen  $\frac{x \cdot \pi}{12} = -1$ , e que o

número mínimo de clientes ocorre quando sen  $\frac{x \cdot \pi}{12} = 1$ .

$$f(x)_{\text{max.}} = 900 - 800 \cdot (-1) = 900 + 800 = 1.700$$

$$f(x)_{\min} = 900 - 800 \cdot (1) = 900 - 800 = 100$$

$$f(x)_{\text{máx.}} - f(x)_{\text{min.}} = 1.700 - 100 = 1.600$$

alternativa e

6. Para determinar o primeiro momento do dia em que a quantidade de espuma atingiu 5 m³ por metro de rio, igualamos f(t) a 5:

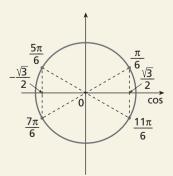
$$3 + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6} = 5 \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6} = 1$$

Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, sen x = 1 para  $x = \frac{\pi}{2}$ .

$$\frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 3$$

Portanto, a quantidade de espuma atingiu 5 m³ por metro de rio pela primeira vez no dia às 3 horas.

7.  $\frac{3}{4} - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 



Logo,  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ 

Sendo  $\cos x = y$ , temos:

$$4y^{2} + 4y + 1 = 0 \Rightarrow (2y + 1)^{2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}$$
 ou  $x = \frac{4\pi}{3}$ 

Logo, a soma das raízes é:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

**9. a)** sen  $x = \sin \frac{\pi}{5}$ 

Então: 
$$x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$
 ou  $x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ 

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**b)**  $\cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$
 ou

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

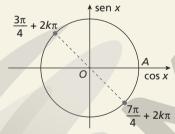
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \, \middle| \, x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) 
$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Logo: 
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**10.** sen  $x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\sin x$ 



Logo: 
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

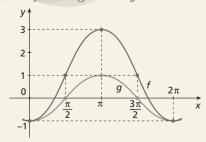
**11.** a)  $f(x) = 1 - 2 \cdot \cos x = 1 + 2 \cdot (-\cos x)$ 

Partindo da função  $g(x) = -\cos x$ , temos:

•  $1^{\circ}$  passo:  $-\cos x \rightarrow 2 \cdot (-\cos x)$ A nova amplitude é 2.

•  $2^{\circ}$  passo:  $2 \cdot (-\cos x) \to 1 + 2 \cdot (-\cos x)$ 

O gráfico da função é transladado 1 unidade para cima. Assim, esboçamos o gráfico de f:



Logo, temos Im( f) = [-1, 3], D( f) =  $\mathbb{R}$  e  $p = 2\pi$ .

**b)** 
$$f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Partindo da função g(x) = sen x, temos:

• 1º passo: sen 
$$x \to \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

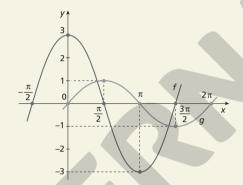
O gráfico de g ficará transladado  $\frac{\pi}{2}$  unidade para a esquerda sobre o eixo x.

• 2º passo: sen 
$$\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 3 \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

A função terá nova amplitude igual a 3.

Assim, a nova imagem será [-3, 3].

Portanto:



O domínio e o período de f são iguais aos de g, ou seja,  $D(f) = \mathbb{R}e \ p = 2\pi.$ 

- **12. a)** O valor mínimo para sen  $x \in -1$ ; e o valor máximo é 1. Ou seja: -1 ≤ sen x ≤ 1
  - **b)** O valor mínimo para  $2 \cdot \text{sen } x \in -2$ ; e o valor máximo é 2. Ou seja:  $-2 \le 2 \cdot \text{sen } x \le 2$
  - c) O valor mínimo para  $y = 1 + 2 \cdot \text{sen } x \in -1$ ; e o valor máximo é 3. Ou seja:  $-1 \le 1 + 2 \cdot \text{sen } x \le 3 \text{ ou, ainda,}$  $-1 \le y \le 3$
- 13. a) Sim. No intervalo dado, cos x (curva verde) é sempre
  - b) Não. No intervalo dado, sen x (curva azul) é sempre decrescente, mas, para  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , sen x é positivo.
  - c) Não. No intervalo dado, tg x (curva alaranjada) é sempre crescente, mas, para  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , tg x é negativa.
  - **d)** Pelos gráficos, observamos que sen  $x = \operatorname{tg} x$  no ponto em que  $x = \pi$  (ponto de cruzamento entre as curvas azul e laranja). As coordenadas desse ponto são  $(\pi, 0)$ .
  - e) Pelos gráficos, observamos que:
    - $\cos x = \sin x$  no ponto de cruzamento entre a curva verde e a curva azul. Esse ponto está no intervalo em que  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ;
    - tg x = cos x no ponto de cruzamento entre a curva alaranjada e a curva verde. Esse ponto está no intervalo em que  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ .

Portanto, no intervalo considerado, o ponto em que  $\cos x = \sin x \text{ tem abscissa maior que a abscissa do}$ ponto em que tg  $x = \cos x$ .

# 15. Resposta possível:

Nesta sugestão, foram escolhidas as marés do dia 27 de março de 2020 em Cajueiro da Praia (PI).

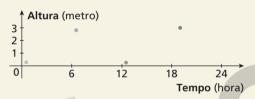
Tempo (horário)	Altura (m)
0:28	0,3
6:29	3,0
12:44	0,2
18:50	3,0

Fonte: <a href="https://tabuademares.com/br/piaui/cajueiro-da-praia">https://tabuademares.com/br/piaui/cajueiro-da-praia</a> (acesso em 20 mar. 2020).

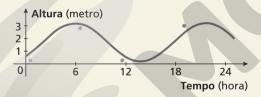
Arredondando os horários, obtemos a tabela a seguir.

Tempo (horário)	Altura (m)
0:30	0,3
6:30	3,0
12:30	0,2
19:00	3,0

Para construir o gráfico, primeiro marcamos os pontos da tabela.



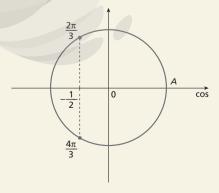
Em seguida, construímos uma curva aproximada.



As informações selecionadas foram modeladas com uma função seno.

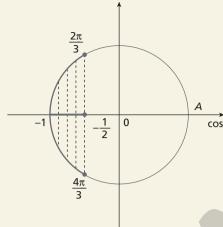
período  $\approx 24$  horas amplitude  $\approx 1,4$  m

16. a)



$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$
 ou  $x = \frac{4\pi}{3}$ 

b)



$$\cos x \le -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$$

# Autoavaliação

1. 
$$\frac{16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 4\pi \equiv \frac{4\pi}{3}$$

2. 
$$\frac{22\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + \frac{20\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + 4\pi = \frac{2\pi}{5}$$
  
Logo, uma expressão geral dos arcos côngruos a  $\frac{22\pi}{5}$  é

 $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$ 

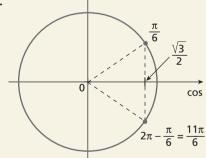
alternativa c

**3.** Observamos, no gráfico, que o período da função é 0,75. Portanto, o intervalo de tempo de um batimento cardíaco é 0,75 s.

alternativa d

**4.** A função seno é periódica, pois sen  $x = \text{sen}(x + 2\pi)$  e seu período é  $2\pi$ . alternativa b

**5**.



$$2 \cdot \cos x = \sqrt{3} \implies \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

alternativa d

**6.** 
$$\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$
 ou

$$2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, 
$$x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$$
 ou  $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ 

Portanto, 
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$
. alternativa b

ILUSTRACÕES: ADILSON SECCO

**7.** A amplitude corresponde ao número que multiplica sen  $(x + \pi)$ .

Como  $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen } (x + \pi)$ , a amplitude é 3. alternativa a

**8.** A imagem da função  $g(x) = \cos(2x + 1)$  é o conjunto [-1, 1].

A imagem da função  $h(x) = 2 \cdot \cos(2x + 1)$  é o conjunto [-2, 2]. Portanto, a imagem da função  $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos(2x + 1)$  é o conjunto [1, 5].

**9.** 
$$p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

alternativa b

10. A massa é máxima quando:

sen 
$$\frac{\pi t}{60} = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{60} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 30$$
  
 $m(t)_{\text{máx}} = 4.500 + 3.400 \cdot 1 = 7.900$ 

A massa é mínima quando:

$$\mathrm{sen}\ \frac{\pi t}{60} = -1 \Rightarrow \frac{\pi t}{60} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 90$$

$$m(t)_{\min} = 4.500 + 3.400 \cdot (-1) = 1.100$$

Tempo decorrido: 90 - 30 = 60

alternativa c

# Compreensão de texto

- a) De acordo com o texto, som é uma variação de pressão muito rápida que se propaga na forma de ondas em um meio elástico.
  - b) O som é causado por uma vibração de um corpo elástico, o qual gera uma variação de pressão de acordo com o meio à sua volta.
  - c) Segundo o texto, o som é audível para o ser humano quando as variações ocorrem entre 20 e 20.000 vezes por segundo.
- 2. O gráfico do som senoidal é determinado a partir do gráfico da função seno. Portanto, o único gráfico que representa um som senoidal é o que consta no item c. alternativa c
- **3.** A variação máxima de pressão ocorre quando sen  $(1,07\pi x 334\pi t) = 1$ . Então:

$$\Delta p_{\text{max.}} = 1.48 \cdot 1 = 1.48$$

Portanto,  $\Delta p_{\text{máx}} = 1,48 \text{ pascal.}$ 

- 4. a) Respostas possíveis: metrô chegando na estação; banda de rock; decolagem de um avião a jato; lançamento de foguete.
  - b) No caso de secadores de cabelo, a média do nível de ruído é cerca de 80 decibéis; nos liquidificadores e aspiradores de pó, geralmente a média do nível de ruído está na faixa entre 80 e 90 decibéis.
  - c) Resposta pessoal.
  - d) Resposta pessoal.

Comentário: Se possível, finalize a atividade com uma conversa coletiva sobre o assunto. Espera-se, com essa atividade, sensibilizar os alunos em relação aos danos causados por ruídos excessivos. Além disso, conscientizá-los sobre a importância da colaboração de cada cidadão com atitudes individuais, como falar baixo dentro de salas de aula ou de espetáculos, regular seu automóvel periodicamente ou ouvir música em volume mais baixo.

# EDUCAÇÃO FINANCEIRA

# Bens públicos

Considerando a BNCC, esta seção visa desenvolver as competências gerais **7**, **9** e **10** e a competência específica **2** de Matemática. Além disso, trabalha com temas contemporâneos transversais da BNCC relacionados à **educação financeira** e **educação fiscal**, esta última abordando os vários tributos oriundos das esferas federal, estadual e municipal e suas destinações; à **educação em direitos humanos**, discutindo tópicos como corrupção e ética. Se achar conveniente, é possível fazer um trabalho interdisciplinar com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais no que diz respeito à competência específica **1**, trabalhando a habilidade **EM13CHS102**.

As atividades desta seção devem ser um convite à reflexão e à ação, levando os alunos a pensar em como as atitudes, as escolhas, o uso das informações e a cultura financeira podem impactar em toda a sociedade.

Com a finalidade de oferecer subsídios para o trabalho em sala de aula e um conjunto de possibilidades de caminhos a serem percorridos, são sugeridas nas atividades algumas discussões.

# Para começar e pensar:

A primeira tarefa a ser realizada é uma oportunidade de discutir os conceitos iniciais que serão trabalhados nesta seção por meio da compreensão do orçamento de um estabelecimento público.

- Proponha aos alunos um debate sobre o tema. Se achar conveniente, para motivar a discussão, peça que assistam ao vídeo "Educação Fiscal e Cidadania | Tributos: que história é essa?", disponível em: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=VUcDz\_twyeo">https://www.youtube.com/watch?v=VUcDz\_twyeo</a>. Acesso em: 23 mar. 2020.
- 2. Estimule os alunos a refletir sobre a qualidade dos serviços públicos prestados em sua cidade, como escolas, hospitais públicos, serviço de iluminação, segurança, programas sociais, entre outros.
- 3. Se julgar conveniente, sugira aos alunos que façam outras perguntas na conversa com os funcionários da escola, tais como: "Quais gastos a escola tem todos os meses?"; "A escola tem gastos eventuais? Quais?"; "Quanto você avalia que a escola precisa receber por mês para custear todos esses gastos?".
- 4. No orçamento de uma escola pública, devem ser considerados gastos mensais com infraestrutura, água, energia elétrica; gastos eventuais com obras e aquisição de móveis; materiais esportivos; merenda para os alunos; materiais para sala de aula e secretaria: caneta/giz, apagador, materiais de escritório etc. Além disso, o governo deve garantir a compra e a distribuição de livros didáticos e o pagamento do salário dos funcionários (inspetores, cozinheiros, secretários, professores, faxineiros e gestores).

Para fazer a estimativa de gastos anual de uma escola, é necessário envolver todas as despesas, avaliando quais são fixas, variáveis e eventuais, considerando também o período de férias. Por exemplo, as despesas relativas à merenda não ocorrem no período de férias; obras não ocorrem com frequência mensal; o salário dos funcionários ocorre mensalmente, independentemente de feriados e recessos.

# Para discutir:

De acordo com o Código Tributário Nacional, os tributos podem ser classificados como impostos, taxas e contribuições de melhoria.

Os impostos são percentuais cobrados sobre patrimônios (IPTU, ITBI, ITR, IPVA), renda (IR), circulação de mercadorias (ICMS, IPI), contratação de serviços (ISS), operações financeiras (IOF), entre outros.

As taxas são cobradas mediante um serviço público específico prestado pelo governo diretamente ao contribuinte. Alguns exemplos são: os documentos emitidos por órgãos públicos, como prefeituras e departamentos de trânsito estaduais e a taxa de coleta de lixo.

A contribuição de melhoria é cobrada com objetivo de repor o custo de obras públicas que resulte em valorização imobiliária. O proprietário deve pagar essa contribuição em decorrência do enriquecimento gerado pela valorização imobiliária a partir de uma obra realizada pelo governo municipal, estadual ou federal.

**5.** Alguns tributos que podem ser encontrados:

Sigla	Tributo	Esfera responsável
IPTU	Imposto Predial e Territorial Urbano	
TFA	Taxa de Fiscalização de Anúncios	
ISS	Imposto Sobre Serviço de Qualquer Natureza	Governo municipal
TFE	Taxa de Fiscalização de Estabelecimentos	
ITBI	Imposto sobre Transmissão de Bens e Imóveis	
IPVA	Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores	
ICMS	Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços	Governo estadual
ITCMD	Imposto de Transmissão Causa Mortis e Doação	
IOF	Imposto sobre Operações Financeiras	
IPI	Imposto sobre Produtos Industrializados	
IR	Imposto de Renda	Governo
II/IE	Imposto de Importação/ Imposto de Exportação	federal
Cofins	Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social	
CSLL	Contribuição Social sobre Lucro Líquido	

6. Na composição de preços de um produto, devem ser considerados diversos gastos, como matéria-prima, mão de obra, infraestrutura, lucro do fabricante e do comerciante, tributos etc. O percentual da compra destinado aos tributos dependerá da natureza do produto. Os tributos embutidos na compra de um medicamento, por exemplo, são diferentes dos tributos embutidos na compra de um automóvel. Outro exemplo pode ser a compra de um *videogame* importado, no qual está embutido Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI) e Imposto de Importação (II).

7. Emitir nota fiscal é dever de todo estabelecimento que efetua venda direta ao consumidor (Lei nº 12.741/12, de 8 de dezembro de 2012). A nota fiscal pode ser utilizada como comprovante de uma compra, caso haja necessidade de troca ou alguma reclamação do produto, mas também é um meio de o governo controlar o pagamento de impostos devidos nas transações.

#### 8. a), b)

Sigla	Tributo	Esfera responsável
CIP	Contribuição de Iluminação Pública	Governo municipal
ICMS	Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços	Governo estadual
Cofins	Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social	Governo federal
PIS	Programa de Integração Social	Governo federal

 c) Os percentuais praticados variam de acordo com os estados brasileiros.

Em uma iniciativa do Instituto Brasileiro de Planejamento e Tributação (IBPT) e da Associação Comercial de São Paulo (ACSP), o Impostômetro tem por objetivo apresentar gratuitamente uma estimativa do montante de tributos arrecadados no Brasil. É possível acompanhar pelo endereço eletrônico <a href="https://impostometro.com.br/">https://impostometro.com.br/</a> (acesso em: 23 mar. 2020) os tributos totais recolhidos, além das arrecadações estaduais e municipais ou por categoria tributária. Se for possível, acesse o *site* com os alunos e discutam a ordem de grandeza do montante apresentado. Instigue-os a refletir sobre o que é possível fazer com os valores arrecadados.

# Para finalizar:

- **9.** Espera-se que os alunos observem as três situações apresentadas na ilustração, nas quais há desrespeito às leis e aos outros cidadãos.
  - a) situação: uma jovem que recebeu troco a mais do caixa do supermercado; correção: a jovem deveria ter devolvido ao caixa o valor recebido a mais.
  - b) situação: carro estacionado em local proibido; correção: o carro deveria estar estacionado em local permitido.
  - c) situação: um menino tentando passar na frente de outras pessoas; correção: menino se posicionando no final da fila.

Pessoas que vivem em uma sociedade têm direitos e deveres, sendo dever de todo cidadão respeitar os direitos dos outros, em vez de querer que somente seus direitos sejam respeitados.

Provoque uma discussão sobre os direitos e os deveres de um cidadão, bem como sobre os direitos e os deveres dos representantes de uma sociedade (governantes).

- 10. Proponha aos alunos que discutam sobre o significado da palavra ética e peça a eles que escrevam, no quadro, as atitudes listadas, a fim de que toda a turma tome conhecimento dos tópicos discutidos.
- 11. Não é necessário debater esta questão, pois alguns alunos podem se sentir constrangidos em compartilhar suas respostas; porém, é importante pedir a eles que repensem essas atitudes e façam uma autorreflexão sobre elas. Ao final da atividade, reforce que indivíduos que vivem em uma sociedade possuem direitos e deveres, sendo dever de todo cidadão respeitar os direitos dos outros cidadãos.

# PESQUISA E AÇÃO

# Maquete

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais 2, 4, 6, 7, 8, 9 e 10, das competências específicas 1, 2 e 3 e das habilidades EM13MAT103, EM13MAT201 e EM13MAT308, além de favorecer o desenvolvimento do tema contemporâneo educação em direitos humanos.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a atividade desta seção é proposta em etapas, que poderão ser realizadas no decorrer do semestre escolar. Mesmo que algumas etapas, como a pesquisa e a elaboração do produto, possam ser realizadas fora da sala de aula, é importante verificar o perfil dos alunos e orientá-los com relação ao planejamento, ao prazo, ao material necessário e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações e o acompanhamento do trabalho.

Esta atividade proporciona aos alunos a possibilidade de, com base em critérios científicos e utilizando dados, fatos e evidências, argumentar e propor soluções para problemas reais. Além disso, incentiva modificar e adaptar ideias existentes e criar propostas novas, colocando-as em prática, aplicando conhecimentos matemáticos.

# Etapa 1:

O objetivo desta etapa é estimular os alunos a partilhar os conhecimentos prévios sobre os assuntos abordados na seção, ampliando-os. Também se busca levá-los a refletir sobre as especificidades de uma sociedade inclusiva, que: define-se pelo respeito e pela valorização das diferenças; reconhece a igualdade entre as pessoas; considera a diferença um princípio básico, o que torna inaceitável qualquer tipo de discriminação (inclusive do ponto de vista da arquitetura e do urbanismo).

- 1. a) Segundo o Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, acessibilidade é a "qualidade ou caráter do que é acessível" e acessível é "a que pode se ter acesso; a que se tem acesso; fácil de atingir; que pode ser facilmente compreendido; inteligível".
  - Segundo a NBR 9050 da ABNT (disponível em: < https:// www.ufrgs.br/incluir/wp-content/uploads/2017/07/ Acessibilidade-a-edifca%C3%A7%C3%B5esmobili%C3%A1rio-espa%C3%A7os.-PDF1.pdf>, acesso em: 10 fev. 2019): "Acessibilidade: possibilidade e condição de alcance, percepção e entendimento para utilização, com segurança e autonomia, de espaços, mobiliários, equipamentos urbanos, edificações, transportes, informação e comunicação, inclusive seus sistemas e tecnologias, bem como outros serviços e instalações abertos ao público, de uso público ou privado de uso coletivo, tanto na zona urbana como na rural, por pessoa com deficiência ou mobilidade reduzida; Acessível: espaços, mobiliários, equipamentos urbanos, edificações, transportes, informação e comunicação, inclusive seus sistemas e tecnologias ou elemento que possa ser alcançado, acionado, utilizado e vivenciado por qualquer pessoa."
  - b) Acessibilidade física, de acordo com o texto inicial desta seção, é o conjunto de critérios que visa garantir mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa: crianças, adultos altos ou baixos, idosos, gestantes, obesos, pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida.

- Os alunos poderão trazer alguns exemplos como: pisos táteis, elevadores especiais, rampas de acesso, corrimão de escadas, sanitários adaptados, semáforos com dispositivos sonoros para os deficientes visuais etc.
- c) Espera-se que os alunos reflitam sobre sociedade inclusiva, respeito e valorização das diferenças, reconhecendo a igualdade entre as pessoas. Se possível, antes de debater este item, providencie uma cadeira de rodas, um par de muletas e uma venda; com sua supervisão, peça aos alunos que se locomovam na escola, observando quais foram as dificuldades para se locomover. Outra sugestão, dependendo da viabilidade, é dar uma volta na região próxima à escola, a fim de que identifiquem e presenciem as dificuldades.

# Etapa 2:

Durante a atividade de pesquisa, oriente os alunos a buscar informações em fontes confiáveis, como *sites* do governo e de instituições de ensino e/ou de pesquisa.

A seguir, indicamos as fontes que serviram de bibliografia para a elaboração desta seção:

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. ABNT NBR 9050: Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Rio de Janeiro: ABNT, 2015. 148 p. Disponível em: <a href="https://www.ufrgs.br/incluir/wp-content/uploads/2017/07/Acessibilidade-a-edifca%C3%A7%C3%B5es-mobili%C3%A1rio-espa%C3%A7os.-PDF1.pdf">https://www.ufrgs.br/incluir/wp-content/uploads/2017/07/Acessibilidade-a-edifca%C3%A7%C3%B5es-mobili%C3%A1rio-espa%C3%A7os.-PDF1.pdf</a> . Acesso em: 10 fev. 2020.
- Ana Claudia Carletto e Silvana Cambiaghi. Desenho Universal: um conceito para todos. Disponível em: <a href="https://www.maragabrilli.com.br/wp-content/uploads/2016/01/universal\_web-1.pdf">https://www.maragabrilli.com.br/wp-content/uploads/2016/01/universal\_web-1.pdf</a>>. Acesso em: 10 fev. 2020.
- Secretaria de Estado da Habitação e Secretaria de Estado dos Direitos da Pessoa com Deficiência do Governo do Estado de São Paulo. *Desenho Universal*: habitação de interesse social. Disponível em: <a href="http://www.mpsp.mp.br/portal/page/portal/Cartilhas/manual-desenho-universal.pdf">http://www.mpsp.mp.br/portal/page/portal/Cartilhas/manual-desenho-universal.pdf</a>>. Acesso em: 10 fev. 2020.
- Universidade de São Paulo (USP). Manoel Rodrigues Alves (edição), Lucia Vilela Leite Filgueiras (colaboração), Renata Pontin de Mattos Fortes (colaboração). *Manual de acessibilidade*: diretrizes de acessibilidade física e digital em ambientes didáticos. São Carlos, 2014. 74 p. Disponível em: <a href="https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/167237/mod\_resource/content/1/Manual\_de\_acessibilidade\_com\_ISBN.pdf">https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/167237/mod\_resource/content/1/Manual\_de\_acessibilidade\_com\_ISBN.pdf</a>>. Acesso em: 10 fev. 2020.
- 2. a) É um conceito sobre acessibilidade física conjunto de critérios que visa garantir mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa: crianças, adultos altos ou baixos, idosos, gestantes, obesos, pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida. Desenvolvido no final dos anos 1980, nos Estados Unidos, por profissionais da área de Arquitetura, visa definir projetos de produtos e ambientes que contemplem a diversidade humana adotando sete princípios.

Segundo o texto da NBR 9050, desenho universal é a "concepção de produtos, ambientes, programas e serviços a serem utilizados por todas as pessoas, sem necessidade de adaptação ou projeto específico, incluindo os recursos de tecnologia assistiva".

#### b) Respostas possíveis:

#### I. USO IGUALITÁRIO, EQUITATIVO

Exemplos: rampas com corrimãos e guarda-corpo; portas com sensores que se abrem sem exigir força física ou alcance das mãos de usuários de alturas variadas.

#### II. USO FLEXÍVEL, ADAPTÁVEL

Exemplos: os projetos devem prever a possibilidade de deslocamento de paredes ou divisórias para ampliar dormitórios ou outros ambientes; tesoura que se adapta a destros ou canhotos.

#### III. USO SIMPLES E INTUITIVO

Exemplos: placas visíveis e legíveis identificando os sanitários; projetos que definem percursos simples e intuitivos para a circulação.

#### IV. INFORMAÇÃO DE FÁCIL PERCEPÇÃO

Exemplos: pictogramas "homem" e "mulher", com informação em relevo e Braille, são conhecidos universalmente e de fácil compreensão; semáforos sonoros; mapas de informações em alto-relevo; maquetes táteis.

#### V. TOLERÂNCIA AO ERRO (SEGURANÇA)

Exemplos: escadas e rampas com corrimão duplo; piso tátil de alerta; faixa contrastante evitam acidentes; elevadores com sensores em diversas alturas que permitam às pessoas entrar sem riscos de a porta ser fechada no meio do procedimento.

#### VI. ESFORCO FÍSICO MÍNIMO

Exemplos: sistema de alavanca adequado permite que um cadeirante abra uma janela com facilidade; torneiras de sensor ou do tipo alavanca, que minimizam o esforço e a torção das mãos para acioná-las; maçanetas tipo alavanca, que são de fácil utilização, podendo ser acionadas até com o cotovelo, facilitando a abertura de portas no caso de incêndios, não sendo necessário girar a mão.

# VII. DIMENSÃO E ESPAÇO PARA APROXIMAÇÃO E USO

Exemplos: mobiliário adequado permite que um cadeirante tenha acesso a todos os compartimentos com conforto e segurança; poltronas para obesos em cinemas e teatros; banheiros com dimensões adequadas para pessoas em cadeira de rodas ou as que estão com bebês em seus carrinhos.

# c) Respostas possíveis:

- Pessoas com mobilidade reduzida ou com deficiência público-alvo: gestantes, obesos, crianças, idosos, usuários de próteses e órteses entre outros; dificuldade: vencer desníveis, principalmente subir escadas sem corrimãos; passar por locais estreitos, percorrer longos percursos, atravessar pisos escorregadios; abrir e fechar portas; manipular objetos; acionar mecanismos redondos ou que necessitem do uso das duas mãos simultaneamente, entre outras.
- Usuários de cadeira de rodas público-alvo: paraplégicos, tetraplégicos, hemiplégicos, pessoas que tiveram membros amputados, entre outros; dificuldade: vencer desníveis isolados, escadas e rampas muito íngremes; ter alcance visual limitado;

- manusear comandos de janelas e metais sanitários muito altos; não ter espaços amplos para girar; abrir portas; não passar por locais estreitos, como portas de 60 cm; utilizar banheiros que não permitem a aproximação a vasos sanitários, entre outras.
- Pessoas com deficiências sensoriais público-alvo: usuários com limitação da capacidade visual, auditiva e da fala; dificuldade: identificar sinalização visual, como placas de orientação, advertência e numeração de imóveis; localizar comandos e aparelhos, como botoeiras e interfones; localizar imóveis pela numeração; detectar obstáculos, como telefones públicos, caixas de correio e desníveis não sinalizados de forma podotátil (faixas em alto-relevo fixadas no chão para fornecer auxílio na locomoção pessoal de deficientes visuais); determinar direção a seguir (pessoas com deficiência visual); utilizar comandos sonoros, como campainhas e interfones (pessoas com deficiência auditiva e/ou da fala), entre outras.
- Pessoas com deficiência cognitiva público-alvo: usuários com dificuldades em habilidades adaptativas; dificuldade: compreender símbolos e sinais em placas informativas, entre outras.
- d) A norma NBR 9050 "estabelece os critérios e parâmetros técnicos a serem observados nos projetos, construções, instalações e adaptações do meio urbano e rural, e de edificações às condições de acessibilidade". "Visa proporcionar a utilização de maneira autônoma, independente e segura do ambiente, edificações, mobiliário, equipamentos urbanos e elementos à maior quantidade possível de pessoas, independentemente de idade, estatura ou limitação de mobilidade ou percepção."
- e) "Diversas condições de mobilidade e de percepção do ambiente, com ou sem a ajuda de aparelhos específicos, como próteses, aparelhos de apoio, cadeiras de rodas, bengalas de rastreamento, sistemas assistivos de audição ou qualquer outro que venha a complementar necessidades individuais."
- f) Segundo o *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*, antropometria é: "parte da antropologia que trata da mensuração do corpo humano ou de suas partes", é o "registro das particularidades físicas dos indivíduos". Para a determinação das dimensões referenciais da NBR 9050, "foram consideradas as medidas entre 5% e 95% da população brasileira, ou seja, os extremos correspondentes a mulheres de baixa estatura e homens de estatura elevada".
  - Caso algum aluno traga e aborde o conceito de ergonomia, explique que é o estudo da adaptação dos membros do corpo humano ao ambiente à sua volta. Esse estudo utiliza técnicas da antropometria para adaptar o espaço ao ser humano, criando produtos e objetos que sejam fáceis e confortáveis de se manusear e que se adaptem ao corpo humano.
- g) Os parâmetros antropométricos são apresentados nas páginas 6 a 29 do documento. Espera-se que os alunos compreendam que todos os parâmetros apresentados são importantes no ambiente escolar.
- h) Os critérios específicos para os edifícios escolares são apresentados nas páginas 135 e 136 do documento.

# Etapa 3:

- Caso a planta baixa da escola esteja disponível, compartilhe-a com os alunos.
- 7. a) Espera-se que os alunos percebam que os espaços poderão ser reorganizados de várias formas, desde que contemplem as exigências necessárias.
  - c) Espera-se que os alunos tenham usado os conceitos desenvolvidos nos capítulos 1 e 2 deste volume.

# Etapa 4:

Nessa etapa, os alunos serão estimulados a mobilizar conhecimentos sobre proporcionalidade e semelhança de figuras.

**10.** Estimule os alunos a usar, se possível, 100% de materiais recicláveis para a criação das maquetes e optar pelo uso de madeira ou papelão para a base, em vez de isopor, contribuindo para a preservação do meio ambiente.

11. Converse com os alunos para que eles não se esqueçam de reservar um lugar na base da maquete para colocar o nome dos integrantes do grupo e a escala utilizada, além de indicarem quais alterações foram realizadas e os critérios para realizá-las.

# Etapa 5:

Se achar conveniente, incentive os alunos a criar cartazes divulgando a exposição para a comunidade escolar.

# Etapa 6:

Proponha aos alunos que realizem a autoavaliação baseando-se nas experiências que tiveram no decorrer de todo o processo e nas questões propostas na atividade 15. O objetivo desta etapa é possibilitar que reflitam sobre seu processo de aprendizagem, os objetivos alcançados, as dificuldades apresentadas, a importância dos conhecimentos matemáticos em diferentes âmbitos e a contribuição para a formação geral.



# CONEXOES MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

**Trigonometria** 

Organizadora: Editora Moderna Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

# **Editor responsável:**

**Fabio Martins de Leonardo** 

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020



#### Elaboração dos originais:

#### Dario Martins de Oliveira

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

#### Edson Ferreira de Souza

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo, Editor

#### Ernani Nagy de Moraes

Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

#### Fabio Martins de Leonardo

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo, Editor

#### Juliana Ikeda

Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

#### Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura

Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

#### Maria José Guimarães de Souza

Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

#### Natasha Cardoso Dias

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

#### Renata Martins Fortes Gonçalves

Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

#### Romenig da Silva Ribeiro

Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor. Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar

Pinto Carvalho

Gerência de design e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

*Ilustrações*: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

**Edição de infografia:** Giselle Hirata, Priscilla Boffo **Coordenação de revisão:** Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Beatriz Rocha, Cecilia Setsuko, Inaya Oliveira, Leila dos Santos, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Vânia Bruno

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de bureau: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos

Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto,

Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

# Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões: matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo: Moderna, 2020.

Obra em 6 v. Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos --Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Bibliografia.

## Índices para catálogo sistemático:

510.7

1. Matemática : Ensino médio

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Todos os direitos reservados

#### EDITORA MODERNA LTDA.

Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904 Vendas e Atendimento: Tel. (0\_\_11) 2602-5510 Fax (0\_\_11) 2790-1501 www.moderna.com.br 2020 Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

# Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções Compreensão de texto, Educação financeira, Pesquisa e ação e Ampliando os conhecimentos complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores



O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

# Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, as competências trabalhadas neste volume.

# Competências gerais da Educação Básica

- Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
- 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
- Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
- **4.** Utilizar diferentes linguagens verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

- 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
- **6.** Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
- 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

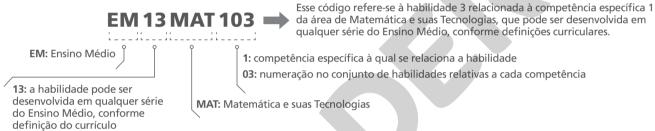
- **8.** Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
- 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de
- indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
- 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

# Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

# Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

# HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

**(EM13MAT103)** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2:** Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

#### HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3:** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

#### HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4:** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

#### HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5:** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

# Competências específicas e habilidades de outras áreas

# Ciências da Natureza e suas Tecnologias

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1:** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

#### HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

(EM13CNT101) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.

**COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2:** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

#### HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2

(EM13CNT202) Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros).

(EM13CNT204) Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

## HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

(EM13CNT301) Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

(EM13CNT302) Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.

(EM13CNT307) Analisar as propriedades dos materiais para avaliar a adequação de seu uso em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e/ou propor soluções seguras e sustentáveis considerando seu contexto local e cotidiano.

# Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

## HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

(EM13CHS102) Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/ desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos.

# Linguagens e suas Tecnologias

# HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6

(EM13LGG601) Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.

(EM13LGG602) Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

# Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

CAPÍTULO 1 – A semelhança e os triângulos			
Objetivo	Justificativa		
O objetivo desse capítulo é identificar figuras planas semelhantes e resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos, a semelhança de figuras planas, a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.	O conceito de semelhança e as relações métricas daí advindas são utilizados nas mais diferentes áreas. Um exemplo típico é a construção de maquetes na área da engenharia e arquitetura que podem auxiliar na visão espacial dos ambientes que serão construídos, já que os espaços preservam a proporcionalidade.		
CAPÍTULO 2 – Trigonom	etria no triângulo retângulo		
Objetivo	Justificativa		
O objetivo desse capítulo é identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo, além de resolver problemas que envolvam essas razões e usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.	O desenvolvimento da Trigonometria na história se deu pela necessidade de medições em locais inacessíveis. Seu uso continua sendo muito importante em diversas situações da atualidade, como, por exemplo, em cálculos de inclinações máximas e mínimas para construção de uma rampa de acesso.		
CAPÍTULO 3 – Ciclo trigonométrico e	trigonometria em um triângulo qualquer		
Objetivo	Justificativa		
O objetivo desse capítulo é calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano, além de conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos, ampliar as razões trigonométricas para ângulos com medidas maiores que 90°, estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico e aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.	O aprofundamento no estudo da Trigonometria permite ampliar o trabalho iniciado no capítulo anterior e, assim, aumentar a sua aplicabilidade em diversas áreas, como engenharia e astronomia.		
CAPÍTULO 4 – Fur	nções trigonométricas		
Objetivo	Justificativa		
O objetivo desse capítulo é relacionar funções trigonométricas com fenômenos periódicos, além de estender o IR, resolver equações trigonométricas, construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.	O estudo das funções periódicas, em particular, das funções trigonométricas, viabiliza a modelagem de fenômenos naturais, físicos e sociais com comportamento cíclico ou periódico, o que possibilita a representação, de modo aproximado, de oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de tempo, permitindo, inclusive, que sejam feitas previsões em muitas situações.		

# Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras, e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o reconhecimento de padrões pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o pensamento computacional como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.



Pilares do pensamento computacional.

# Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do pensamento computacional. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par. Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par, ou 1 quando n é impar. Por exemplo:

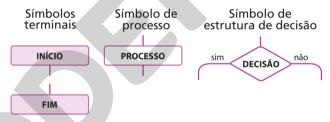
Outra maneira de

decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

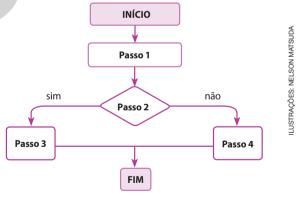
Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

- **Passo 1**. Dado *n* natural, calcula-se o resto *r* da divisão de *n* por 2.
- Passo 2. Verifica-se se r = 0. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.
- **Passo 3.** O valor de  $r \in 0$ , portanto  $n \in par$ . Encerra-se o algoritmo.
- Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é impar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.



O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural *r*, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

Nesta obra, você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

# Organização da obra





#### **Videotutorial**

 Assista ao videotutorial com orientações sobre este volume.

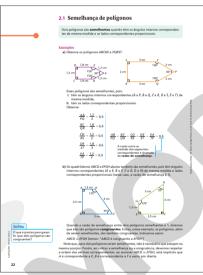
# Abertura do capítulo

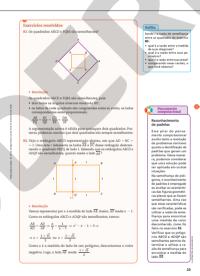
- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.



# Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.



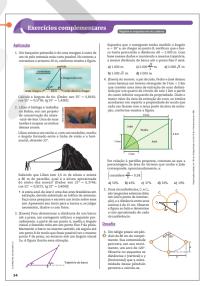


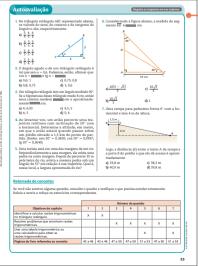
# Pensamento computacional

O pensamento computacional é destacado por meio de boxes ou do ícone:

# **Exercícios complementares**

- Aplicação: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- Aprofundamento: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- Desafio: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.





# Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.



# Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.



# Ícone de atividade em grupo

# Educação financeira

Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.





# Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

# **Ampliando os conhecimentos**

As sugestões de livros, vídeos, sites, softwares, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

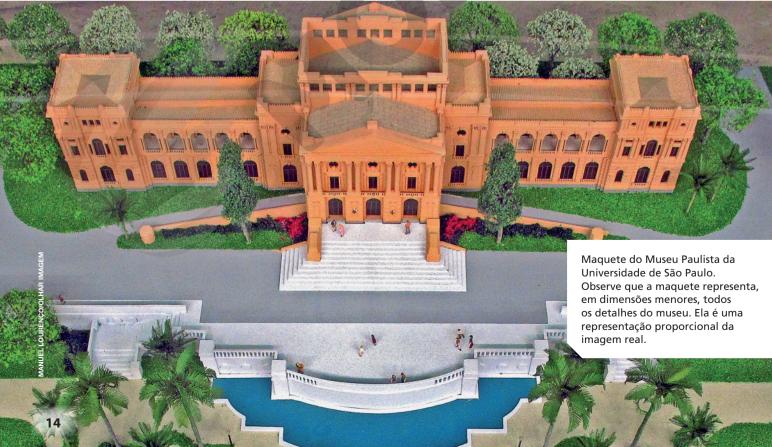


# Sumário

CAPÍTULO 1 A semelhança e os triângulos	14	
ŭ		
1. Proporcionalidade entre segmentos		
<ul><li>1.1. Feixe de retas paralelas e retas transversais</li><li>1.2. Teorema fundamental</li></ul>	15	
	18	
	19	
2. Semelhança		
2.1. Semelhança de polígonos		
2.2. Semelhança de triângulos		
3. Relações métricas no triângulo retângulo		
	20 29	
3.2. Demonstrando o teorema de Pitágoras		
3.3. A semelhança e o teorema de Pitágoras:	50	
outras relações métricas no		
triângulo retângulo	31	
Exercícios complementares		
Autoavaliação		
Compreensão de texto		
comprecisão de texto	50	
CA DÍMILI O 3		
CAPÍTULO 2 Trigonometria no	40	
triângulo retângulo		
1. Razões trigonométricas	42	
1.1. Explorando razões em um triângulo		
	42	
1.2. Seno, cosseno e tangente de um ângulo	44	
1.3. Relações entre seno, cosseno e	47	
	4/	
2. Seno, cosseno e tangente dos ângulos	40	
	48	
3. Uso da calculadora e da tabela	г1	
trigonométrica		
3.1. Tabela de razões trigonométricas		
Exercícios complementares		
Autoavaliação	55	
CAPÍTULO 3 Ciclo trigonométrico e		
trigonometria em um		
triângulo qualquer	56	
1. Arcos de uma circunferência	57	
	57	
1.2. Medida angular de um arco		
1.3. Relação entre grau e radiano		
,	ככ	
2. Ciclo trigonométrico		

3. Seno, cosseno e tangente	62
3.1. Seno e cosseno de um arco	62
3.2. Tangente de um arco	
3.3. Relação fundamental da Trigonometria	68
4. Trigonometria em um triângulo qualquer	
4.1. Lei dos senos	
4.2. Lei dos cossenos	72
Exercícios complementares	
Autoavaliação	77
CAPÍTULO 4 Funções trigonométricas	78
1. Funções periódicas	78
2. Ciclo trigonométrico	80
2.1. A função de Euler	80
2.2. Arcos côngruos	81
3. A função seno	83
4. A função cosseno	87
5. A função tangente	90
6. Equações trigonométricas	92
6.1. Resolução de equações trigonométricas no	
	92
6.2. Resolução de equações trigonométricas	0.4
	94
7. Construção de gráficos	
1	03
3	05
Compreensão de texto 10	06
Educação financeira 10	08
-	11
	14
	•
	16
Referências bibliográficas 1	19





# Ao longo de todo o capítulo, será favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, uma vez que os alunos deverão resolver problemas envolvendo semelhança de figuras planas e relações métricas no triângulo retângulo.

# Objetivos do capítulo

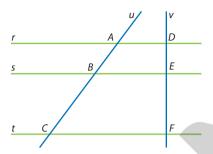
- Resolver situações--problema que envolvam a proporção entre segmentos.
- Identificar figuras planas semelhantes.
- Resolver situações--problema que envolvam a semelhança de figuras planas.
- Resolver situações--problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.

# Proporcionalidade entre segmentos

Vamos iniciar este capítulo com noções de proporcionalidade entre segmentos, pois esta é a base para trabalhar o conceito de semelhança de figuras.

# 1.1 Feixe de retas paralelas e retas transversais

Observe a figura abaixo. As retas r, s e t são coplanares, distintas e paralelas entre si, formando um **feixe de retas paralelas**. As retas u e v são **retas transversais** ao feixe, pois pertencem ao mesmo plano do feixe e intersectam todas as paralelas.

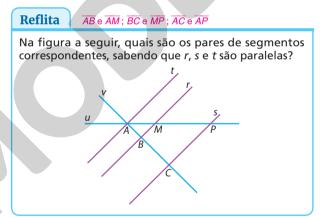


As retas paralelas determinam sobre as retas transversais pares de **segmentos correspondentes** (segmentos das transversais cujos extremos pertencem às mesmas paralelas). Na figura anterior:

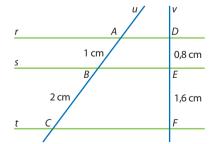
- AB é correspondente a DE;
- BC é correspondente a EF;
- $\overline{AC}$  é correspondente a  $\overline{DF}$ .

Discutir com os alunos as imagens apresentadas nesta abertura. Nessa conversa, devem surgir palavras como miniatura, parecido e semelhante. Nesse momento, não é necessário se aprofundar; pode-se fazer isso mais adiante, antes de iniciar o tema semelhança propriamente dito.

Comentar sobre a utilização das maquetes, por exemplo na área da construção civil. Pode-se também fazer um breve histórico de quando o prédio foi construído, com qual finalidade.



Medindo esses segmentos, obtemos:



Note que  $\frac{1}{0.8} = \frac{2}{1.6}$ , isto é,  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ . Ou seja, as razões entre as medidas dos

segmentos correspondentes são iguais. Veja a seguir como usar um *software* de Geometria dinâmica para fazer construções geométricas.

# Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

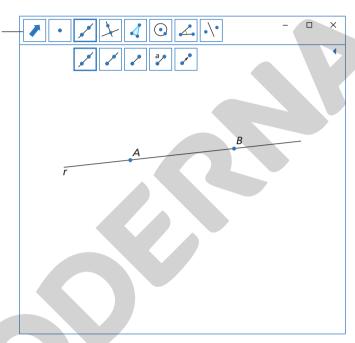
# Software de Geometria dinâmica

Para realizar construções, podemos baixar da internet softwares livres de **Geometria dinâmica**. Com esses tipos de softwares, podemos realizar diversas construções utilizando o mesmo princípio da régua e do compasso, aplicar propriedades, além de facilitar a observação de relações métricas e padrões.

Acompanhe, a seguir, a construção de um feixe de retas paralelas cortado por uma transversal e verifique, realizando medições, as relações obtidas no item anterior.

**1.** Construímos uma reta qualquer no plano clicando na ferramenta "construção de retas". Depois, basta clicar em uma parte da tela para obter um ponto da reta e, com o *mouse*, determinar a direção da reta e o outro ponto.

Normalmente, cada um dos botões da parte superior da tela representa um grupo de ferramentas. Com elas, podemos construir retas paralelas, circunferências, ângulos, segmentos, medir segmentos etc.



**2.** Construímos as retas s e t, paralelas à reta r. Para isso, clicamos na reta r e arrastamos o mouse até o local da tela em que queremos a paralela.

# **Explore**

Use um software de Geometria dinâmica e faça uma construção similar a esta. Apresente na construção as medidas dos segmentos e a razão entre os segmentos correspondentes. Feito isso, com a ferramenta "mover", movimente o ponto A de modo a alterar a medida dos segmentos. Verifique o que acontece com as razões calculadas e escreva o que foi observado. (Dica: para construir as retas transversais, utilize os pontos já existentes das retas paralelas, pois esses pontos são móveis. Os pontos construídos com a ferramenta de intersecção, em geral, não podem ser movimentados.)

Vale ressaltar que, dependendo do software escolhido, o passo

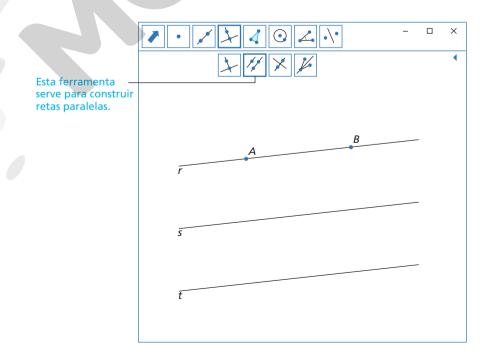
isso, é importante se familiarizar

com o programa antes de usá-lo

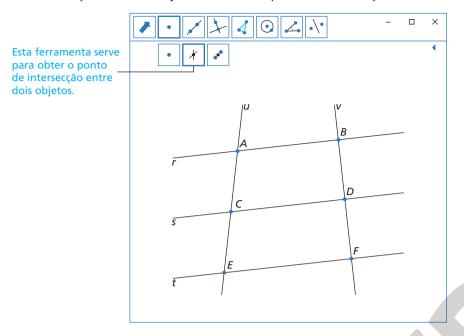
a passo da construção pode

mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. Por

em sala de aula.

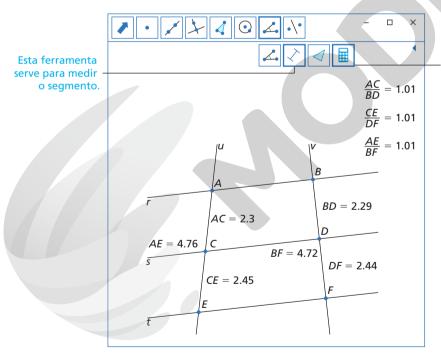


**3.** Com a ferramenta de "construção de retas" e a partir dos pontos A e B, construímos as retas u e v, transversais às retas paralelas. Depois, com a ferramenta "intersecção entre dois objetos" obtemos os pontos de intersecção entre as retas.



**4.** Com a ferramenta "medida de segmento", obtemos as distâncias AC, BD, CE, DF, AE e BF e, posteriormente, com a "calculadora dinâmica" do software, calculamos as razões  $\frac{AC}{BD}$ ,  $\frac{CE}{DF}$  e  $\frac{AE}{BF}$ .

Ao movimentar um dos pontos da figura, espera-se que os alunos percebam que as razões permanecem as mesmas, mesmo que as medidas dos segmentos correspondentes se alterem. Esta atividade favorece o desenvolvimento das competências gerais 2, 4 e 5 da BNCC, assim como as competências específicas 4 e 5, quando propõe a utilização de uma ferramenta computacional de maneira investigativa, possibilitando testar hipóteses ao alterar a configuração inicial da construção geométrica.



Essa calculadora utiliza as medidas realizadas de forma dinâmica, ou seja, ao movimentar a construção modificando as medidas iniciais, a calculadora refaz o cálculo, automaticamente, com as novas medidas.

Perceba que para essa construção as razões entre os segmentos correspondentes também são iguais. Por isso, dizemos que esses segmentos são proporcionais.

Será que esse fato ocorre para qualquer feixe de paralelas cortado por retas transversais?

O teorema de Tales afirma que essa proporcionalidade, vista nos exemplos anteriores, sempre ocorre. Mas, antes de estudá-lo, veremos outro teorema, enunciado a seguir, que poderá auxiliar no entendimento e na demonstração do teorema de Tales.

# Observação

Cada software calcula e apresenta as razões das medidas dos segmentos de modo diferente, seja por meio de seleção dos elementos, seja por meio de um editor de texto matemático. Em geral, o cálculo é expresso na tela e, qualquer movimentação em elementos da construção, os valores são alterados automaticamente.

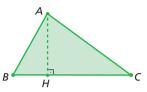
Em caso de dúvidas na utilização de algum software, pesquise na internet. Há muitos tutoriais disponíveis.

# 1.2 Teorema fundamental da proporcionalidade

Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intersecta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina, sobre esses lados, segmentos proporcionais.

# Observação

Considere o triângulo ABC representado a seguir.



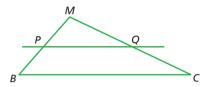
A área desse triângulo pode ser dada por:

$$A_{tri\hat{a}ngulo} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

Em contextos que envolvem áreas, a superfície poligonal será chamada pelo nome do polígono que a determina. Por exemplo: em vez de dizer "a área da superfície triangular", diremos "a área do triângulo".

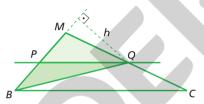
# Demonstração

1º Considere o triângulo BCM e a reta  $\overrightarrow{PQ}$ , paralela a  $\overline{BC}$ , tal que  $P \in \overline{BM}$  e  $Q \in \overline{MC}$ . Vamos mostrar que  $\frac{MP}{PB} = \frac{MQ}{QC}$ .



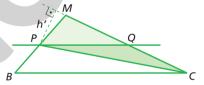
2º Os triângulos QMP e QPB têm a mesma altura de medida h relativas aos lados  $\overline{MP}$  e  $\overline{PB}$ , respectivamente. Então, a razão entre suas áreas é:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (MP) \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot (PB) \cdot h} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{MP}{PB} \quad (1)$$



3º Os triângulos *QMP* e *QPC* têm a mesma altura de medida h' relativas aos lados  $\overline{MQ}$  e  $\overline{QC}$ , respectivamente. Então, a razão entre suas áreas é:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (MQ) \cdot h'}{\frac{1}{2} \cdot (QC) \cdot h'} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{MQ}{QC}$$
 (11)

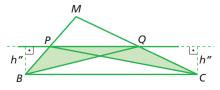


4º De (I) e (II), vem que:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{MP}{PB} \Rightarrow A_{QMP} = \frac{MP}{PB} \cdot A_{QPB}$$

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{MQ}{QC} \Rightarrow A_{QMP} = \frac{MQ}{QC} \cdot A_{QPC}$$

 $5^{\circ}$  Os triângulos *QPB* e *QPC* têm base  $\overline{PQ}$  e altura de medida h'' em relação ao lado comum  $\overline{PQ}$ . Logo, têm a mesma área.



Com esta demostração, favorecemos o desenvolvimento da competência específica 5 da BNCC.

Assim, podemos concluir que:  $\frac{MP}{PB} = \frac{MQ}{QC}$ 

# Observação

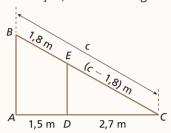
A recíproca desse teorema também é válida, isto é: se uma reta que intercepta dois lados de um triângulo em pontos distintos determina sobre eles segmentos proporcionais, então essa reta é paralela ao terceiro lado do triângulo.

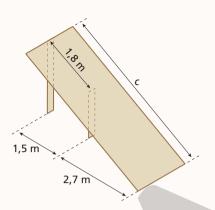
# Exercício resolvido

**R1.** Dois pilares paralelos de sustentação de uma rampa distam 1,5 m entre si. O pilar de menor altura em relação ao chão está a 2,7 m do pé da rampa, e seu topo dista 1,8 m do topo do pilar mais alto, como mostrado na representação ao lado. Determinar o comprimento *c* dessa rampa.



Esquematizando a situação, obtemos a figura abaixo.





Como o segmento  $\overline{DE}$  é paralelo ao lado  $\overline{AB}$  do triângulo ABC, concluímos que  $\overline{DE}$  determina sobre  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  segmentos proporcionais. Assim, temos:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{DA}$$

$$\frac{c - 1.8}{1.8} = \frac{2.7}{1.5}$$

$$c - 1.8 = 3.24$$

$$c = 5.04$$

Logo, a rampa tem 5,04 m de comprimento.

# 1.3 Teorema de Tales

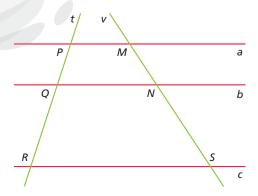
Pouco se sabe sobre Tales de Mileto. Apontado como o primeiro filósofo grego, acredita-se que tenha vivido aproximadamente entre 625 a.C. e 546 a.C. A ele são atribuídas diversas descobertas matemáticas, sendo considerado o criador da Geometria demonstrativa.

Entre outros feitos, Tales teria realizado o estudo da proporcionalidade entre segmentos; por isso, o enunciado a seguir é conhecido como **teorema de Tales**.

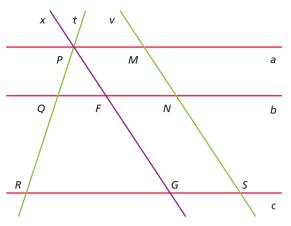
Os segmentos correspondentes determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas retas transversais são **proporcionais**.

## Demonstração

Sejam a, b e c retas paralelas intersectadas pelas retas transversais t e v nos pontos P, Q, R, M, N e S. Vamos mostrar que  $\frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$ .



Com esta demostração, favorecemos o desenvolvimento da competência específica 5 da BNCC. Considere uma reta x, paralela à reta v e que passe por P, intersectando as retas b e c nos pontos F e G, respectivamente.



# **Observações**

• Da figura, decorrem outras proporções, por exemplo:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{MN}{MS} e \frac{PR}{QR} = \frac{MS}{NS}$$

 O teorema de Tales garante que a razão entre dois segmentos quaisquer de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal. No triângulo *PRG*, vale o teorema fundamental da proporcionalidade. Assim, con-

cluímos que: 
$$\frac{PQ}{QR} = \frac{PF}{FG}$$
 (I)

Os quadriláteros *PMNF* e *FNSG* são paralelogramos. Então, seus lados opostos têm mesma medida: PF = MN e FG = NS (II)

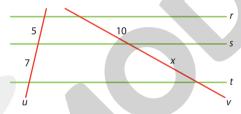
De (I) e (II), concluímos que: 
$$\frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NS}$$
 (III)

$$Logo: \frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$$

# **Exemplo**

Na figura representada abaixo, as retas r, s e t são paralelas, intersectadas por duas transversais, u e v.

Vamos determinar x.



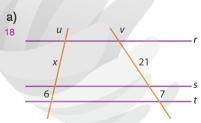
Pelo teorema de Tales, temos:

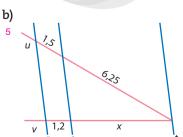
$$\frac{5}{10} = \frac{7}{x}$$
$$5x = 70$$
$$x = 14$$

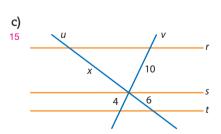
# **Exercícios propostos**

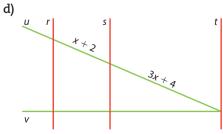
Registre as respostas em seu caderno.

1. Sabendo que as retas r, s e t são paralelas, determine o valor de x em cada item.









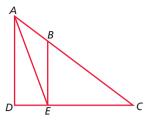
Apenas com os dados informados, não é possível determinar o valor de x.

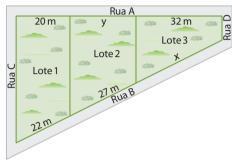
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

- **2.** Refaça a figura do item **d** do exercício anterior e indique medidas para os segmentos correspondentes aos segmentos x + 2 e 3x + 4. Peça a um colega de sala que determine o valor de x do seu exercício e faça o mesmo com o exercício dele. Antes de entregar o exercício ao colega, verifique se há coerência em sua resposta. resposta pessoal
- 3. Para a cobertura de um galpão, instalou-se uma estrutura metálica na forma de treliça, conforme mostra a figura ao lado, na qual as peças  $\overline{AD}$  e  $\overline{BE}$  são paralelas.

Determine AB, sabendo que BC = 3.6 m, DE = 1.12 m e EC = 2.88 m. 1.4 m





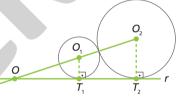


 $x = 35,2 \text{ m e } y \approx 24,5 \text{ m}$ 

Dado que as divisas entre os lotes são paralelas às ruas C e D, encontre as medidas x e y, que fazem frente para as ruas B e A, respectivamente.

**5.** Considere duas circunferências, de centros  $O_1$  e  $O_2$ , tangentes entre si, e a reta r, tangente a essas circunferências nos pontos  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, como mostra a figura ao lado.

Sabendo que  $OT_1 = 12$  cm,  $OT_2 = 27$  cm e  $OO_1 = 13$  cm, determine a distância entre os centros  $O_1$  e  $O_2$ . 16,25 cm



LUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

# Semelhança

Retomar a situação apresentada na abertura do capítulo.

Em muitas situações do cotidiano, encontramos figuras e objetos semelhantes: em maquetes, miniaturas, ampliações e reduções de fotografias, entre outras. Nessas situações, as figuras não têm necessariamente o mesmo tamanho, mas têm a mesma forma. Por isso, dizemos que essas figuras são **semelhantes**.

Por exemplo, a fotografia II é uma redução da fotografia I, sem deformação da imagem. Assim, elas são semelhantes. O mesmo não ocorre com as fotografias I e III.

Fotografia I





Fotografia II



Fotografia III



Tamanduá-bandeira.

Além de estar presente na ampliação ou na redução de fotografias (sem deformação), a ideia de semelhança também está presente nas figuras geométricas.

Sim, dois círculos são sempre semelhantes, pois a forma é mantida e apenas o raio é modificado; apesar de as medidas dos ângulos correspondentes serem sempre iguais, dois retângulos nem sempre são semelhantes, pois os lados correspondentes podem não ser proporcionais.

# Reflita

Dois círculos são sempre semelhantes? E dois retângulos?

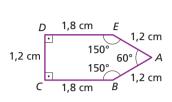
# Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

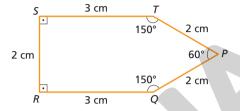
# 2.1 Semelhança de polígonos

Dois polígonos são **semelhantes** quando têm os ângulos internos correspondentes de mesma medida e os lados correspondentes proporcionais.

# **Exemplos**

a) Observe os polígonos ABCDE e PQRST.





Esses polígonos são semelhantes, pois:

- I. têm os ângulos internos correspondentes ( $\hat{A}$  e  $\hat{P}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{Q}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{R}$ ,  $\hat{D}$  e  $\hat{S}$ ,  $\hat{E}$  e  $\hat{T}$ ) de mesma medida;
- II. têm os lados correspondentes proporcionais.
  Observe:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

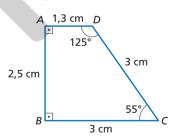
$$\frac{BC}{QR} = \frac{1,8}{3} = 0,6$$

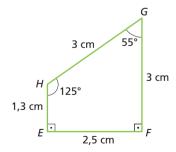
$$\frac{CD}{RS} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

$$\frac{DE}{ST} = \frac{1,8}{3} = 0,6$$

$$\frac{EA}{TP} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$
A razão entre as medidas dos segmentos correspondentes é chamada de **razão de semelhança**.

b) Os quadriláteros ABCD e EFGH abaixo também são semelhantes, pois têm ângulos internos correspondentes ( $\hat{A}$  e  $\hat{E}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{F}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{G}$ ,  $\hat{D}$  e  $\hat{H}$ ) de mesma medida e lados correspondentes proporcionais (nesse caso, a razão de semelhança é 1).





#### Reflita

O que é preciso para garantir que dois polígonos são congruentes?

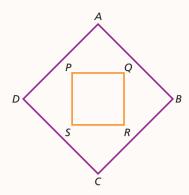
Espera-se que os alunos percebam que os ângulos e os lados correspondentes das figuras são congruentes e proporcionais, respectivamente. Quando a razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes é 1, dizemos que eles são polígonos **congruentes**. Então, nesse exemplo, os polígonos, além de serem semelhantes, são também congruentes. Indicamos assim:

ABCD ≅ EFGH (lemos: "ABCD é congruente a EFGH")

Note que, para dois polígonos serem semelhantes, não é necessário que estejam na mesma posição. Porém, ao indicar a semelhança ou a congruência, devemos respeitar a ordem dos vértices correspondentes: ao escrever  $ABCD \cong EFGH$ , está implícito que A é correspondente a E, E0 é correspondente a E1 e assim por diante.

# Exercícios resolvidos

R2. Os quadrados ABCD e PQRS são semelhantes?



# ► Resolução

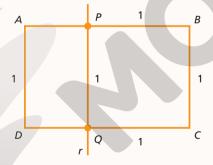
Os quadrados ABCD e PQRS são semelhantes, pois:

- têm todos os ângulos internos medindo 90°;
- os lados de cada quadrado são congruentes entre si; então, os lados correspondentes serão proporcionais:

$$\frac{AB}{PO} = \frac{BC}{OR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$$

A argumentação acima é válida para quaisquer dois quadrados. Portanto, podemos concluir que dois quadrados são sempre semelhantes.

**R3.** Veja o retângulo ABCD representado abaixo, em que AD = BC = 1. Uma reta r intersecta os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$  desse retângulo determinando o quadrado PBCQ de lado 1. Sabendo que os retângulos ABCD e ADQP são semelhantes, quanto mede o lado  $\overline{AB}$ ?



#### ► Resolução

Vamos representar por x a medida do lado  $\overline{AB}$ . Assim,  $\overline{AP}$  mede x-1. Como os retângulos ABCD e ADQP são semelhantes, temos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x - 1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Como x é a medida do lado de um polígono, descartamos o valor negativo. Logo, o lado  $\overline{AB}$  mede  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

#### Reflita

Sendo *r* a razão de semelhança entre os quadrados do exercício **R2**·

- qual é a razão entre a medida de suas diagonais?
- qual é a razão entre seus perímetros?
- qual é a razão entre suas áreas?
- comparando essas razões, o que você observa?

Espera-se que os alunos percebam que:

- a razão entre as medidas das diagonais é igual à razão de semelhança r;
- a razão entre os perímetros é igual à razão de semelhanca r;
- a razão entre as áreas é igual à razão de semelhança elevada ao quadrado.



# Pensamento computacional

# Reconhecimento de padrões

Esse pilar do pensamento computacional auxilia tanto a resolução de problemas similares quanto a identificação de padrões que geram um problema. Dessa maneira, podemos considerar que uma solução pode ser aplicada em outras situações.

Na semelhança de polígonos, o reconhecimento de padrões é empregado ao analisar as características das figuras geométricas planas que as fazem semelhantes. Uma vez que essas características são verificadas, pode-se utilizar a razão de semelhança para encontrar uma medida de valor desconhecido, como foi feito no exercício R3.

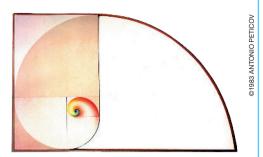
Verificar que os polígonos ABCD e ADQP são semelhantes permite determinar e utilizar a razão de semelhança para encontrar a medida do lado  $\overline{AB}$ .

A reprodução dessa obra de arte de Antonio Peticov tem como base retângulos áureos.

Pode-se trabalhar o tema da obra com a área de Linguagens e suas tecnologias, explorando a competência específica 6 dessa área e as habilidades EM13LGG601 e o entendimento sobre a contextualização de uma obra de arte, podem auxiliar os alunos a desenvolver visão crítica e histórica, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade. O desenvolvimento da competência geral 3 também é favorecido com esse tema.

# **Observações**

- O número irracional  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  é conhecido como **número de ouro**, razão áurea ou divina proporção, usualmente representado pela letra grega  $\phi$  (lemos: "fi"). Esse número tem diversas aplicações na Matemática.
- Retângulo áureo é aquele no qual a razão entre seu comprimento e sua largura é  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . O retângulo *ABCD* do exercício **R3** é um retângulo áureo.

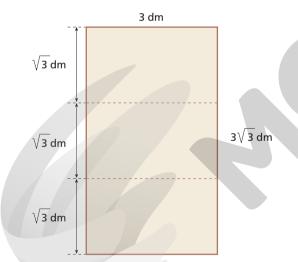


PETICOV, Antonio. *Obra 1.618*, 1983. Madeira e tinta sobre tela, 220 cm  $\times$  350 cm. Espiral construída tendo como base retângulos áureos.

Mais informações sobre o número de ouro podem ser encontradas no livro Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente (ver página 114, na seção Ampliando os conhecimentos).

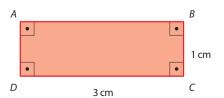
# **Exercícios propostos**

- 6. Responda às questões e justifique sua resposta.
  - a) Todos os triângulos retângulos são polígonos semelhantes?
  - b) Dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes? Ver resolução no Guia do professor.
- 7. Um guardanapo retangular de medidas 3 dm por
- 3√3 dm é dobrado em três partes iguais, conforme mostra a figura.



Os retângulos correspondentes ao guardanapo aberto e a ele dobrado são semelhantes? Se forem, qual é a razão de semelhança? São semelhantes; a razão de semelhança é  $\sqrt{3}$ .

8. Considere os retângulos semelhantes a seguir.



# Registre as respostas em seu caderno.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998



- a) Qual é o comprimento do retângulo maior?9 cm
- b) Qual é a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo retângulo?  $\frac{1}{2}$
- c) Qual é a razão entre o perímetro do primeiro retângulo e o do segundo? 1/2
- d) Qual é a razão entre a área do primeiro retângulo e a do segundo?  $\frac{1}{9}$
- 9. A maquete de uma casa foi construída na escala
  - 1 : 100  $\left(\text{razão de semelhança} \frac{1}{100}\right)$ . Um quarto

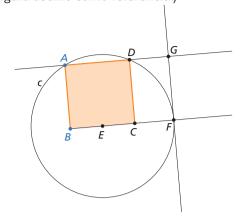
retangular dessa maquete tem 3 cm e 4 cm de dimensões. Com base nisso, responda às questões.

- a) Quais são as dimensões reais desse quarto?
- b) Qual é a razão de semelhança entre as áreas do quarto da maquete e da casa real? 1
- **10.** Em um terreno retangular de 1.440 m<sup>2</sup> de área, foi construída uma oficina com planta retangular, semelhante à do terreno.

Sabendo que a razão entre as larguras da oficina e do terreno é  $\frac{2}{5}$ , responda.

- a) Qual é a razão entre a área da oficina e a área total do terreno? Escreva essa razão na forma de porcentagem. 4/25; 16%
- b) Qual é a área da oficina? 230,4 m²

11. Utilizando um software de Geometria dinâmica, reproduza os passos a seguir. (Dica: utilizar a figura abaixo como referência.)



- 1. Construir um quadrado ABCD.
- 2. Construir a semirreta  $\overline{BC}$ .
- 3. Marcar o ponto E, ponto médio de  $\overline{BC}$ .
- 4. Traçar uma circunferência c de centro E e raio
- 5. Marcar o ponto F, intersecção de  $\overrightarrow{BC}$  com a circunferência c.
- 6. Construir uma reta perpendicular a  $\overline{BC}$ , passando por F.
- 7. Construir a reta  $\overrightarrow{AD}$ .
- 8. Marcar o ponto G, intersecção de  $\overrightarrow{AD}$  com a perpendicular construída no passo 6.
- 9. Com as ferramentas do software, medir BF e FG e encontrar a razão entre essas medidas.

Observe a razão obtida. O que podemos concluir sobre a construção realizada?

Solicitar aos alunos que movimentem os pontos móveis da construção e analisem o que aconteceu com a razão obtida. Eles deverão perceber que a razão não se altera mesmo com a mudança da configuração inicial da construção geométrica. A postura investigativa nesta atividade favorece o desenvolvimento das competências gerais 2, 4 e 5 da BNCC e específicas 4 e 5.

3.8 cm

4 cm

2 cm

2.8 cm

ADILSON SECCO

# 2.2 Semelhança de triângulos

Para determinar se dois triângulos são semelhantes, precisamos verificar se satisfazem as condições de semelhança de polígonos, isto é, se os lados correspondentes são proporcionais e se os ângulos internos correspondentes são congruentes.

# Exemplo

ERICSON GUILHERME LUCIANO

Comparando as medidas dos ângulos internos e dos lados dos triângulos ABC e PQR, podemos perceber que:



seguir seja satisfeita:

• 
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 2$$

Assim, podemos concluir que:  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ 

(lemos: "o triângulo ABC é semelhante ao triângulo PQR") Entretanto, o triângulo é um polígono especial, pois, verificada apenas uma das condições de semelhança, automaticamente a outra também ocorre. Em outras palavras, para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que uma das condições a

- Os ângulos internos correspondentes sejam congruentes.

# Os lados correspondentes sejam proporcionais.

# Exemplos a) 6 2 4,5 3

Esses dois triângulos são semelhantes, pois os lados correspondentes são propor-

$$\frac{3}{4.5} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = 0,666...$$
 (razão de semelhança)

Consequentemente, os ângulos correspondentes são congruentes.

# Observações

- Quando dois ângulos têm a mesma medida, dizemos que eles são congruentes.
- Lembre que o símbolo ≅ é usado para indicar uma congruência.  $\hat{A} \cong \hat{P}$  significa que o ângulo é congruente ao ângulo  $\hat{P}$ , ou seja, eles têm a mesma medida.
- O símbolo ~ é usado para indicar a semelhança.

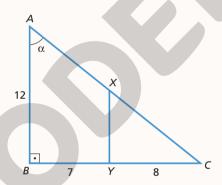
# Observação

Os lados correspondentes podem ser identificados de acordo com seus tamanhos. Por exemplo, o maior lado de um triângulo é correspondente ao maior lado do outro.

Note que, como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, em ambos os triângulos o ângulo não identificado mede  $180^{\circ}-30^{\circ}-45^{\circ}=105^{\circ}$ . Assim, podemos perceber que a segunda condição de semelhança para triângulos também pode ser simplificada: basta que dois ângulos correspondentes sejam congruentes para que os dois triângulos sejam semelhantes.

# Exercícios resolvidos

**R4.** No triângulo ABC representado abaixo, os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{XY}$  são paralelos. O ângulo mede  $\alpha$ , e o ângulo  $\hat{B}$  é reto. As medidas estão expressas em centímetro. Calcular a medida  $\overline{XY}$ .



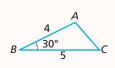
# ► Resolução

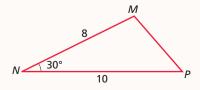
Como  $\overline{AB}$  e  $\overline{XY}$  são paralelos e intersectados pelos segmentos transversais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , temos  $B\hat{A}C \cong Y\hat{X}C$  e  $A\hat{B}C \cong X\hat{Y}C$ . Assim, os triângulos ABC e XYC são semelhantes, pois têm dois ângulos correspondentes congruentes. Logo, os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais, isto é:

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YC} \Rightarrow \frac{12}{XY} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow XY = \frac{8 \cdot 12}{15} \Rightarrow XY = 6,4$$

Portanto,  $\overline{XY}$  mede 6,4 cm.

**R5.** Os triângulos ABC e MNP representados a seguir têm dois lados correspondentes proporcionais (medidas expressas em centímetro), e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes. Mostrar que esses triângulos são semelhantes.





Nos exemplos da página anterior, abordamos os casos LLL (ladoja -lado-lado) e AA (ângulo-ângulo) de semelhança de triângulos. No exercício **R5**, temos o caso LAL (lado-ângulo-lado).

Observação

correspondentes.

Os ângulos indicados na figura abaixo são **ângulos** 

100°

100°

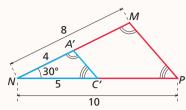
100°

Uma reta transversal a um

feixe de paralelas determina sobre elas ângulos corres-

pondentes congruentes.

Do mesmo modo, no lado  $\overline{\text{NP}}$  obtemos o segmento  $\overline{\text{NC}}'$  de 5 cm.



Como  $\frac{4}{8} = \frac{5}{10}$ , os segmentos  $\overline{\text{NA}}'$ ,  $\overline{\text{NM}}$ ,  $\overline{\text{NC}}'$  e  $\overline{\text{NP}}$  são proporcionais; então, pela recíproca do teorema fundamental da proporcionalidade, temos que as retas  $\overline{\text{AC}}$  e  $\overline{\text{MP}}$  são paralelas  $(\overline{\text{A'C'}}/\!\!/\overline{\text{MP}})$ . Assim, os ângulos correspondentes são congruentes:

$$\hat{A}' \cong \hat{M} \in \hat{C}' \cong \hat{P}$$

Dessa forma, mostramos que os triângulos ABC e MNP são semelhantes, pois têm os três ângulos internos correspondentes congruentes.

### Observação

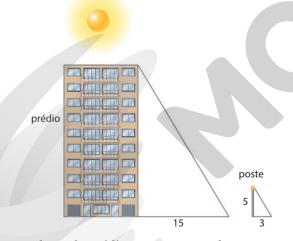
Se quaisquer dois triângulos estiverem nas mesmas condições do exercício resolvido **R5**, ou seja, se tiverem dois lados respectivamente proporcionais e os ângulos formados por esses lados forem congruentes, então os triângulos serão semelhantes.

Os exercícios propostos neste bloco favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, que propõe a resolução de problemas utilizando noções de congruência e de semelhança.

### **Exercícios propostos**

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

12. (Vunesp) A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m.

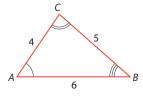


A altura do prédio, em metro, mede: alternativa a

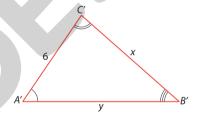
- a) 25b) 29
- c) 30d) 45

e) 75

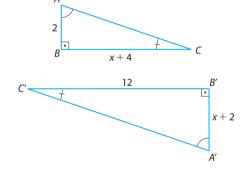
- 2 Determine our rede items our
- **13.** Determine, em cada item, o valor das incógnitas. x = 7.5:



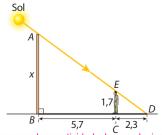
Registre as respostas em seu caderno.



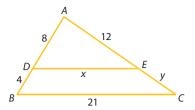
b) x = 2



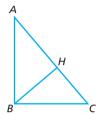
**14.** Uma pessoa de 1,7 m de altura está a 5,7 m da base de um poste e projeta uma sombra de 2,3 m, conforme o esquema a seguir. Qual é a altura aproximada do poste? 5,9 m



**15.** Determine x e y sabendo que  $\overline{BC} /\!\!/ \overline{DE}$ . x = 14; y = 6



16. O ângulo B de um triângulo ABC é reto. A altura relativa à hipotenusa desse triângulo divide-o em dois triângulos: ABH e CBH. Mostre que esses três triângulos são semelhantes. Ver resolução no Guia do professor.



17. Com a figura a seguir, é possível obter conclusões importantes.



Sabendo que  $\overline{RS}$  é paralelo a  $\overline{BC}$  e que R é ponto médio de AB, faça o que se pede.

- a) Mostre que S é ponto médio de  $\overline{AC}$ .
- b) Pela conclusão do item a, mostre que RS é metade de BC.
- c) Agora, verifique que a medida da altura do triângulo ARS relativa ao lado RS é metade da medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado  $\overline{BC}$ .
- d) Discuta com um colega e, em seguida, elaborem um pequeno texto com as conclusões a que vocês chegaram.

# **3** Relações métricas no triângulo retângulo



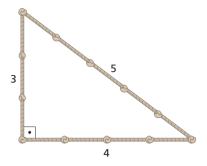
Composição horizontal de vigas de carvalho, arquitetura do final da Idade Média, séc. XV. Crémieu em Isère, região do Ródano-Alpes na França.

Os triângulos retângulos têm diversas aplicações: estão presentes nas construções, nos trabalhos de topografia e de agrimensura, nas situações em que é preciso calcular distâncias inacessíveis, entre outras.

Há registros de que os egípcios utilizavam um triângulo retângulo em particular como um esquadro: o de lados 3, 4 e 5.

Esse esquadro era constituído por uma corda com 12 nós igualmente espaçados. O espaço entre os nós correspondia a uma unidade de medida de comprimento. Esse instrumento era usado por agrimensores na demarcação de ângulos retos.

Os conhecimentos historicamente construídos favorecem o desenvolvimento da competência geral 1 da BNCC.



### Observação

ADILSON SECCO

Em um triângulo retângulo:

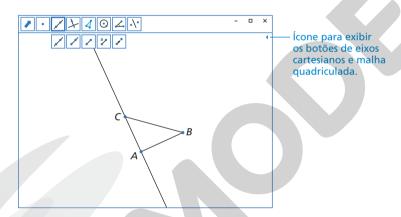
- catetos são os lados adjacentes ao ângulo reto;
- hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto.

É possível inserir as medidas 3, 4 e 5 desse triângulo em uma importante relação:  $a^2 + b^2 = c^2$ , que ficou conhecida como **relação pitagórica**, pois acredita-se que tenha sido estudada pelos pensadores gregos da escola de Pitágoras. Com a soma dos quadrados  $3^2 + 4^2$ , obtemos 25, que é o quadrado de 5; assim:  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . Outros números naturais servem a essa relação, como 5, 12 e 13.

# 3.1 Explorando o teorema de Pitágoras

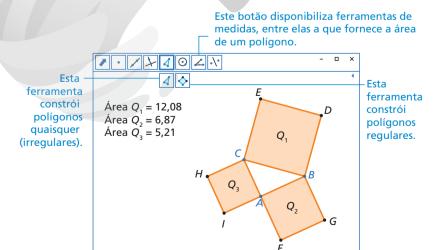
Vamos explorar uma relação demonstrada pelos gregos há cerca de 2.500 anos. Em um *software* de Geometria dinâmica, podem ser realizados os seguintes passos:

1. Construímos um triângulo retângulo qualquer.



Os alunos devem perceber que, para construir um triângulo retângulo, é preciso construir uma reta perpendicular a um segmento de reta, que posteriormente será um dos catetos.

**2.** Construímos um quadrado sobre cada um dos lados, chamados de  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ . Depois, com a ferramenta do *software*, medimos a área desses quadrados.



Alguns softwares não possuem ferramenta específica para a construção de polígonos regulares; nesse caso, orientar os alunos a construí-los usando retas perpendiculares e retas paralelas. Para garantir que todos os lados tenham a mesma medida, pode-se usar a ferramenta de construção de uma circunferência para transportar medidas.

### Observação

Na medição das áreas, pode ocorrer erro de aproximação na última casa decimal, o que pode acarretar uma pequena diferença na soma das áreas. Desconsidere essas eventuais diferenças.

É importante esclarecer aos alunos que essa verificação, realizada com o apoio do software de Geometria dinâmica, não é uma demonstração; porém, utilizar a Geometria dinâmica para verificar a validade de uma proposição em diferentes configurações pode favorecer o entendimento e o desenvolvimento das competências gerais 2, 4 e 5 da BNCC e específicas 4 e 5.

3. Com a "calculadora dinâmica" do *software*, adicionamos as áreas dos dois quadrados menores.

Esta ferramenta fornece a área do polígono selecionado.

Esta ferramenta 1.124041 pode ser usada para selecionar um objeto ou Área  $Q_1 = 12,08$ mover uma Área  $Q_{2} = 6,87$ construção Área  $Q_3 = 5,21$ Q. através de seus pontos.  $Q_3$  $Q_{2}$ Área Q,+ + Área  $Q_3 = 12,08$ 

A ferramenta "calculadora dinâmica" atualiza os resultados dos cálculos simultaneamente à movimentação das construções geométricas.

Observe que essa soma é igual à área do quadrado maior (construído sobre a hipotenusa).

**4.** Agora, movimente um dos vértices do triângulo *ABC*. Observando a soma das áreas dos quadrados menores, verificamos que a relação anterior continua válida.

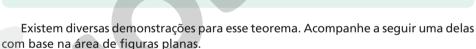
Concluímos assim, experimentalmente, que a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos é igual à área do quadrado sobre a hipotenusa. Esse é o princípio do teorema de Pitágoras.

# 3.2 Demonstrando o teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras pode ser enunciado da seguinte forma:

Em um triângulo retângulo com os catetos de medidas b e c e a hipotenusa de medida a, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, ou seja:

 $a^2 = b^2 + c^2$ 

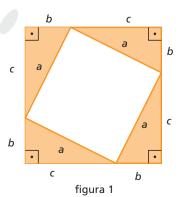


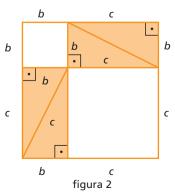


Com esta demostração, favorecemos o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.

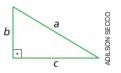
Vamos considerar um quadrado de lado b+c. Se retirarmos quatro triângulos retângulos com catetos de medidas b e c e hipotenusa de medida a, restará um quadrado de lado a, como mostra a figura 1. Note que os triângulos retângulos são congruentes.

Na figura 2, também temos um quadrado de lado b+c. Retiramos quatro triângulos retângulos com catetos de medidas b e c e hipotenusa a, porém os triângulos estão em posições diferentes da mostrada na figura 1.





ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO





Busto de Pitágoras. Ilha de Samos, Grécia. Foto tirada em setembro de 2017. Embora a existência de Pitágoras seja discutível, vários escultores modelaram sua suposta imagem.

Ao comparar as duas situações, podemos verificar que a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados de lado b e de lado c.

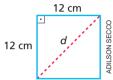
Observando a figura 1, a área do quadrado de lado b+c pode ser dada por  $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2$  e, observando a figura 2, a área do quadrado de lado b+c pode ser dada por  $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + b^2 + c^2$ .

Como essas áreas são iguais, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2 = 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

### **Exemplos**

a) O lado de um quadrado mede 12 cm. Quanto mede cada uma de suas diagonais? A diagonal d desse quadrado forma com dois de seus lados consecutivos um triângulo retângulo cujos lados medem 12 cm, 12 cm e d (em cm).

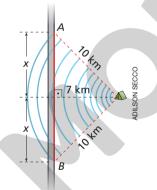


Assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 12^2 + 12^2 \Rightarrow d^2 = 144 + 144 \Rightarrow d = \sqrt{288} \Rightarrow d = 12\sqrt{2}$$

Como as diagonais de um quadrado são congruentes, cada uma delas mede  $12\sqrt{2}$  cm.

b) Um grupo de amigos acampou a 7 km de uma estrada. Com um equipamento de rádio cujo alcance é de 10 km, eles pretendem se comunicar com os caminhoneiros que circulam nessa estrada. Quantos quilômetros da estrada podem ser alcançados pela onda sonora do rádio?



Vamos determinar 2x, que representa o comprimento da borda da estrada ( $\overline{AB}$ ) atingida pelas ondas desse rádio.

Observando o triângulo isósceles representado na figura acima, vemos que ele está dividido em dois triângulos retângulos congruentes. Aplicando o teorema de Pitágoras em um desses triângulos retângulos, temos:

$$x^{2} + 7^{2} = 10^{2} \Rightarrow x = \sqrt{51} \Rightarrow x \approx 7,14$$

De *A* até *B*, temos:  $2x \approx 2 \cdot 7,14 = 14,28$ 

Portanto, a onda de rádio alcança aproximadamente 14,28 km da estrada.

# 3.3 A semelhança e o teorema de Pitágoras: outras relações métricas no triângulo retângulo

É possível demonstrar o teorema de Pitágoras por meio da semelhança de triângulos. Nessa demonstração, encontramos outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo. Acompanhe a seguir.

### Observação

A recíproca do teorema de Pitágoras também é válida. Ou seja, um triângulo com lados de medidas a, b e c tal que  $a^2 = b^2 + c^2$  é um triângulo retângulo.

A recíproca do teorema de Pitágoras pode ser deduzida com a lei dos cossenos, que será estudada no capítulo "Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer".

### Reflita

Uma diagonal de um polígono é um segmento de reta que tem extremidades em dois vértices não consecutivos desse polígono. Existe polígono sem diagonal? Caso exista, identifique-o.

Sim; o triângulo.

### Explore

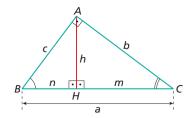
Com auxílio de um software de Geometria dinâmica, reproduza o triângulo retângulo ABC, ao lado, e trace sua altura relativa à hipotenusa. Com a ferramenta "medidas", obtenha as medidas a, b, c, m, n e h e, utilizando a "calculadora dinâmica" do software, escreva as relações encontradas (I a IV). Em seguida, movimente os vértices do triângulo e observe como as relações se comportam.

Espera-se que os alunos percebam que as relações são válidas nas diferentes configurações do triângulo retângulo. O uso de ferramentas computacionais favorece o desenvolvimento das competências gerais 2. 4 e 5 e específicas 4 e 5. Formar grupos de 4 a 6 alunos e propor a cada um que pesquise um tipo de demonstração do teorema de Pitágoras, diferente das apresentadas neste capítulo. Indicar uma bibliografia para a pesquisa inicial. Acertar com os grupos a demonstração que será feita por cada equipe, de forma que sejam trabalhadas demonstrações diferentes. A partir daí, combinar com os alunos a data para realizar as apresentações. Ao final, abrir uma roda de conversa discutindo as similaridades e as diferenças entre as demonstrações, qual delas os alunos acharam mais clara ou mais difícil etc. Essas demonstrações, assim como a apresentada, favorecem o desenvolvimento da competência específica 5 da BNCC.

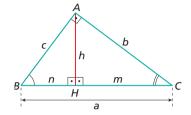
### Demonstração

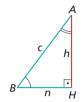
### Considere:

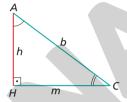
- um triângulo retângulo com catetos de medidas
   b e c e hipotenusa de medida a;
- a altura relativa à hipotenusa desse triângulo, de medida h;
- os segmentos  $\overline{CH}$  e  $\overline{BH}$  de medidas m e n, respectivamente.



Com a altura AH do triângulo ABC, obtemos outros dois triângulos retângulos: HAC e HBA. Esses três triângulos são semelhantes, pois possuem três ângulos internos respectivamente congruentes.







Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998

Pela semelhança entre os triângulos, obtemos:

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{C}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{h} \Rightarrow bc = ah \text{ (I) e } b^2 = am \text{ (II)}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = an$$
 (III)

$$\triangle AHC \sim \triangle BHA \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \text{ (IV)}$$

Somando as relações II e III, membro a membro, temos:

$$b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

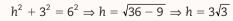
Assim, demonstramos o teorema de Pitágoras e obtemos outras relações no triângulo retângulo.

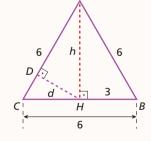
### Exercício resolvido

- **R6.** Na figura ao lado, o triângulo ABC é equilátero. Determinar:
  - a) a medida h da altura desse triângulo;
  - b) a medida d da altura relativa ao lado  $\overline{AC}$ , no triângulo HCA.

### ▶ Resolução

a) No triângulo ABC, a altura AH relativa ao lado BC determina dois triângulos retângulos congruentes (AHC e AHB) de hipotenusa 6 e catetos h e 3. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AHB, obtemos:

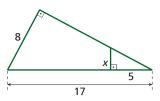




b) No triângulo HCA, a altura relativa ao lado  $\overline{AC}$  determina o triângulo retângulo DHA, semelhante ao triângulo HCA. Da proporcionalidade entre os lados correspondentes, temos:  $\frac{AH}{AC} = \frac{DH}{HC}$ 

Assim: 
$$\frac{h}{6} = \frac{d}{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} \cdot 3 = 6 \cdot d \Rightarrow d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

18. (FEI-SP) Na figura, x mede: alternativa b



**a)** 3

d) 
$$3+2\frac{10}{15}$$

e) n.r.a.

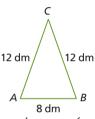
b)  $2\frac{10}{15}$  c) Faltam dados para calcular x.

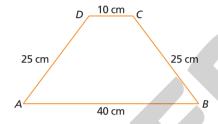
(Observação: Nesta questão, "n.r.a." significa "nenhuma resposta anterior".)

19. Calcule as alturas das figuras em relação ao lado  $\overline{AB}$ .

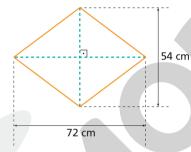
a)  $8\sqrt{2}$  dm



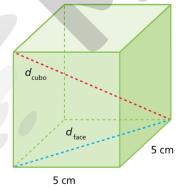




20. Determine o perímetro do losango.



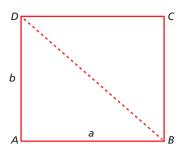
**21.** Considere um cubo cuja aresta mede 5 cm.



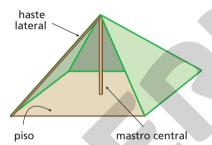
- a) Determine:
  - a medida da diagonal de uma face; 5√2 cm
  - a medida da diagonal do cubo. 5√3 cm
- b) Com um colega, analisem o item anterior e respondam: dado um cubo cuja aresta mede a, qual é a relação entre as medidas de sua aresta e de sua diagonal?  $d_{\text{cubo}} = a\sqrt{3}$

Os exercícios deste bloco contemplam parcialmente a habilidade **EM13MAT308** da BNCC, que propõe a resolução de problemas envolvendo triângulos por meio de relações métricas.

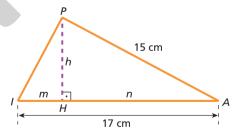
22. No retângulo a seguir, temos  $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$  e BD = 10 cm. Quanto mede cada lado do retângulo? a = 8 cm e b = 6 cm



23. Uma barraca tem o mastro central de sustentação perpendicular ao centro do piso quadrado. Sabendo que o mastro tem 1,60 m de altura e o piso, 5,76 m² de área, determine, com o auxílio de uma calculadora, o comprimento de cada haste lateral da barraca.  $\approx$  2,33 m

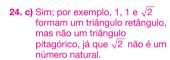


- **24.** Três números **naturais** não nulos que obedecem à relação pitagórica são conhecidos como **terno pitagórico**, por exemplo, 3, 4 e 5, e formam um triângulo pitagórico.
  - a) Dê as medidas de outros dois triângulos pitagóricos.
  - b) Que tipo de triângulo obtemos quando as medidas de seus lados formam um terno pitagórico? Justifique. Triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.
  - Triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.
    c) Pode existir um triângulo retângulo cujas medidas não formam um terno pitagórico? Justifique.
- 25. Observe o triângulo retângulo PIA.



Sabendo que  $\overline{PH}$  é a altura relativa à hipotenusa, determine:

- a) a medida do cateto  $\overline{PI}$ ; PI = 8 cm
- b) a medida aproximada h dessa altura;  $h \approx 7.1$  cm
- c) as medidas aproximadas m e n das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.  $m \simeq 3.8$  cm e  $n \simeq 13.2$  cm
- 26. Em duplas, elaborem uma situação-problema que utilize, em sua resolução, uma ou mais relações métricas do triângulo retângulo apresentadas neste capítulo. Depois, troquem a questão com outra dupla, para que eles resolvam a questão que vocês elaboraram e vice-versa. resposta pessoal



# **Exercícios complementares**

Registre as respostas em seu caderno.

Os exercícios desse bloco contemplam parcialmente a habilidade **EM13MAT308** da BNCC, que propõe a resolução de problemas que envolvam triângulos utilizando semelhança e relações métricas.

No capítulo "Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer", serão apresentadas as leis do seno e do cosseno, que complementarão essa habilidade.

### **Aplicação**

1. (Enem) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1: 250.

Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

a) 4,8 e 11,2

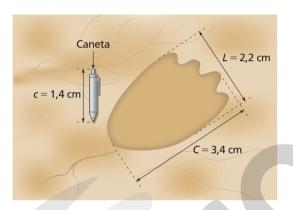
alternativa c d) 28,0 e 12,0

**b)** 7,0 e 3,0

e) 30,0 e 70,0

c) 11,2 e 4,8

2. (Enem) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetro, são, respectivamente, iguais a: alternativa d

- a) 4,9 e 7,6
- d) 26,4 e 40,8
- b) 8,6 e 9,8
- e) 27,5 e 42,5
- c) 14,2 e 15,4
- 3. (Enem) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.



Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm.

O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

a) 14

d)  $6 + 4\sqrt{2}$ 

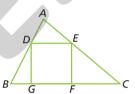
**b)** 12

e)  $6 + 4\sqrt{2}$ 

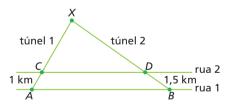
- c)  $7\sqrt{2}$
- 4. (Mackenzie-SP) Na figura, se

$$AB = 5 \cdot (AD) = 5 \cdot (FB)$$
, a razão  $\frac{FG}{AB}$  vale: alternativa b

- a) 3
- 1)  $\frac{5}{2}$
- b) 4
- $\frac{2}{7}$
- **c)** 5
- 5. Um quadrado está inscrito em um triângulo como mostra a figura a seguir. Calcule a medida da altura relativa ao lado BC do triângulo ABC sabendo que o perímetro do quadrado inscrito é 19,2 cm e que BC = = 12 cm.



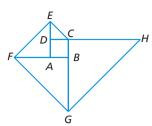
6. (UFV-MG) Sob duas ruas paralelas de uma cidade serão construídos, a partir das estações A e B, passando pelas estações C e D, dois túneis retilíneos, que se encontrarão na estação X, conforme ilustra a figura abaixo.



A distância entre as estações A e C é de 1 km e entre as estações B e D, de 1,5 km. Em cada um dos túneis são perfurados 12 m por dia. Sabendo que o túnel 1 demandará 250 dias para ser construído e que os túneis deverão se encontrar em X, no mesmo dia, é correto afirmar que o número de dias que a construção do túnel 2 deverá anteceder à do túnel 1 é:

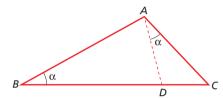
- a) 105
- **b)** 145
- c) 135
- **d)** 115
- **e)** 125

7. (UFBA) Na figura abaixo, todos os triângulos são retângulos isósceles, e ABCD é um quadrado.



Nessas condições, determine o quociente  $\frac{GH}{CE}$ . 4

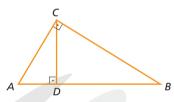
8. (UFS-SE) Na figura, são dados AC = 8 cm e CD = 4 cm.



A medida de BD é, em centímetro: alternativa c

- **a)** 9
- **b)** 10
- **c)** 12
- **d)** 15
- **e)** 16

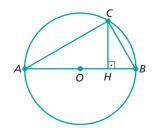
9. Considere o triângulo ABC a seguir.



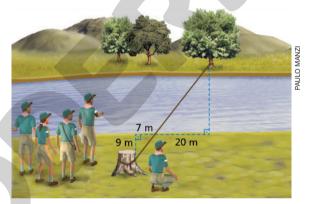
- a) O que representa  $\overline{\text{CD}}$  nesse triângulo? a altura relativa ao lado.  $\overline{\text{AB}}$
- b) Mostre que (CD)<sup>2</sup> = (AD) · (DB). Ver resolução no Guia do professor.

### **Aprofundamento**

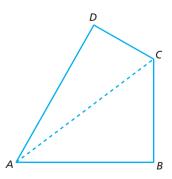
- 10. As bases de um trapézio medem 20 cm e 32 cm, e a altura mede 9 cm. Prolongando os lados não paralelos, obtemos um triângulo. Calcule a medida da altura desse triângulo, relativa à base maior do trapézio, em centímetro. 24 cm
- 11. Na figura,  $\overline{AB}$  é o diâmetro da circunferência de centro O. A altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede 18 cm, e H é o ponto médio de  $\overline{OB}$ . Determine o raio dessa circunferência. 12 $\sqrt{3}$  cm



- 12. (UFSCar-SP) Um programa de rádio é gerado em uma cidade plana, a partir de uma central C localizada 40 km a leste e 20 km ao norte da antena de transmissão T. C envia o sinal de rádio para T, que em seguida o transmite em todas as direções, a uma distância máxima de 60 km. O ponto mais a leste de C, que está 20 km ao norte de T e poderá receber o sinal do rádio, está a uma distância de C, em km, igual a: alternativa c
  - a)  $20(\sqrt{2}-1)$
- **d)**  $40(\sqrt{3}-1)$
- **b)**  $30(\sqrt{3}-1)$
- **e)**  $50(2-\sqrt{2})$
- c)  $40(\sqrt{2}-1)$
- 13. Um grupo de escoteiros deve atravessar um rio caudaloso. Para isso, o melhor nadador deve cruzar o rio com uma corda e amarrá-la do outro lado. Observe a imagem a seguir.



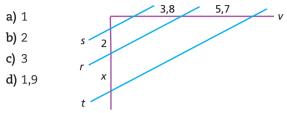
- Qual deve ser o comprimento aproximado da parte esticada da corda? aproximadamente 44 m
- 14. (PUC) Na figura, está a planta de um lago poligonal de lados AB = 2CD, BC = 6 m e  $AD = 2\sqrt{21}$  m. Os ângulos internos de vértices  $B \in D$  são retos. A medida do segmento  $\overline{AC}$ , em metro, é: alternativa a



- a) 10
- **b)** 12
- c) 14
- **d)** 16

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

1. Na figura abaixo, as retas s. r e t são paralelas e u e v são transversais que intersectam essas paralelas. Os valores indicam as medidas dos segmentos determinados. Quanto vale x? alternativa c



- 2. No quadrado AMOR, o segmento  $\overline{MI}$  é parte de uma de suas diagonais. Portanto, é possível afirmar que os pares de polígonos são semelhantes.
  - a) AIM e AMO
  - b) ARSI e AMOR
  - c) AISOM e AISR
  - d) ROIMA e MAISO



- 3. Todos os triângulos equiláteros são semelhantes, pois eles: alternativa c
  - a) são acutângulos.
  - b) não são retângulos.
  - c) têm todos os ângulos internos medindo 60°.
  - d) têm os lados de medidas diferentes.
- 4. Na figura ao lado, BC e MN são paralelos.

Se AB = 10 cm,

AM = 35 cm eAC = 15 cm, a medida de CN, em centímetro, é:

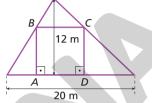
a) 7,5

**b)** 4,5

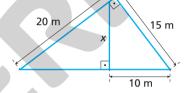
c) 37,5

**d)** 30

- 5. O Sol projeta no chão plano as sombras de um poste e de uma haste verticais, que medem, respectivamente, 12 m e 0,6 m. Se a altura da haste mede 1 m, a altura do poste é: alternativa d
  - a) 6 m
- **b)** 7,2 m
- c) 12 m
- **d)** 20 m
- 6. Um triângulo com base de 20 m e altura relativa a essa base de 12 m está circunscrito a um quadrado ABCD. O lado desse quadrado mede:
  - a) 7,5 m
  - **b)** 4,5 m
  - c) 30 m
  - d) 18 m



- 7. Observe a figura. A medida x vale: alternativa c
  - a) 12,75 m
  - **b)** 12,25 m
  - c) 11,75 m
  - d) 11,25 m



8. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 9 cm e 12 cm. A medida da hipotenusa é cm, a medida da altura relativa à hipotenusa é cm e as medidas dos segmentos determinados por essa altura sobre a hipotenusa são cm e cm.

A alternativa que completa, adequadamente, o texto acima é: alternativa d

- a) 17; 7,2; 7,4; 9,6
- c) 19; 7,2; 10,6; 8,4
- **b)** 15; 5,4; 7,2; 9,6
- **d)** 15; 7,2; 5,4; 9,6

### Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.				Х	Х	Х	Х	Х
Identificar figuras planas semelhantes.		Х	Х	Х	Х	Х	Х	Х
Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.					х	х	х	х
Resolver situações-problema que envolvam a relação pitagórica e as demais relações métricas no triângulo retângulo.							х	х
Páginas do livro referentes ao conceito		21 a 28	25 a 28	15 a 28	25 a 28	25 a 28	28 a 34	28 a 34

### dependendo

Toda essa estrutura, dependendo do material utilizado e de como foi construída, tem capacidade de suportar a força de tração ou de compressão aplicada a ela. Essa força tem intensidade, direção e sentido. Aqui, a força aplicada pela mão pode testar a resistência da torre.

# Treliças

Em conjunto, os triângulos formam estruturas muito fortes chamadas treliças, utilizadas em pontes, telhados e nessa torre de canudos.

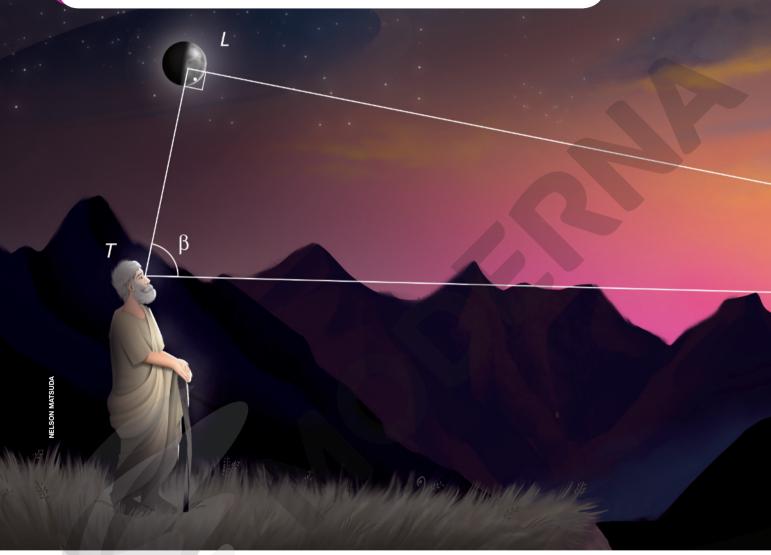


CAPÍTULO

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências 3, 4 e 5; habilidades EM13MAT308 e EM13MAT315.

# 2

# Trigonometria no triângulo retângulo



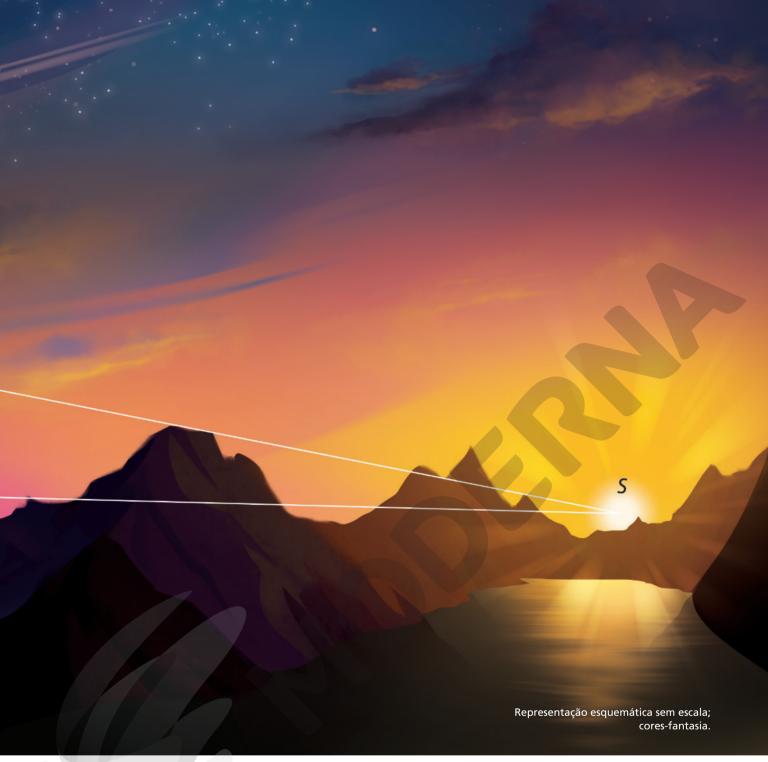
### Objetivos do capítulo

- Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.
- Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.

Resolver problemas de Astronomia, como descobrir as distâncias entre a Terra, o Sol e a Lua, sempre despertou o interesse do ser humano. Desse tipo de especulação nasceu a Trigonometria, parte da Matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

O grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.), considerado por muitos o primeiro grande astrônomo da História, usou as ideias da Trigonometria ao estabelecer um método geométrico para investigar a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua.

Seus cálculos partiram da observação de que, quando a Lua está no quarto crescente – ocasião em que exatamente metade dela aparece iluminada pelo Sol –, o ângulo  $\hat{L}$ , do triângulo formado entre o Sol (S), a Lua (L) e a Terra (T), mede 90°, conforme mostrado na ilustração acima.



Essa abertura favorece o desenvolvimento da competência específica 3 e da habilidade EM13CNT301 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. pois apresenta uma questão feita na Antiguidade, com elaboração de hipóteses, estimativas e um método para medir. Com isso, obtendo representação e interpretação de resultados experimentais para justificar conclusões no enfrentamento de situações--problema sob uma perspectiva científica, valoriza os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, colaborando para a compreensão da realidade, além de exercitar a curiosidade intelectual. favorecendo o desenvolvimento das competências gerais 1 e 2 da BNCC.

Aplicando os conhecimentos da época, Aristarco observou que o ângulo  $\beta$ , formado entre as linhas de vista da Terra ao Sol e da Terra à Lua, media 87°. Com base nisso e em conceitos trigonométricos, concluiu que a razão entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua  $\left(\frac{TS}{TL}\right)$  estaria entre 18 e 20, o que significava que a distância Terra-Sol era 18 a 20 vezes a distância Terra-Lua.

Atualmente, sabemos que a distância Terra-Sol é cerca de 400 vezes a distância Terra-Lua. A grande diferença entre esse valor e o encontrado por Aristarco está relacionada ao ângulo  $\beta$ , cuja medida correta é de aproximadamente 89,83°. Mesmo assim, o raciocínio de Aristarco foi correto.

Neste capítulo, estudaremos conceitos básicos da Trigonometria no triângulo retângulo e veremos que ela tem grande aplicação no cálculo de distâncias inacessíveis: na Astronomia, como fez Aristarco; na Topografia, para determinar a altura de morros, montanhas e colinas; na Engenharia, para estabelecer o comprimento de uma rampa etc.

Ao longo de todo capítulo será favorecido o desenvolvimento da habilidade EM13MAT308 da BNCC, pois os alunos poderão compreender as razões trigonométricas, como uma aplicação da semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos em vários contextos.

Esse tópico favorece o desenvolvimento das competências

gerais 2 e 5 da BNCC, pois inclui investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade na elaboração e testes de hipóteses, na resolução de problemas e criação de soluções. Os alunos também compreendem e utilizam uma ferramenta digital de modo crítico, significativo e reflexivo para comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos e resolver problemas.

Se possível, faça a atividade com os alunos no laboratório de informática ou apresente a construção em um projetor em sala de aula.

construir retas

# D Razões trigonométricas

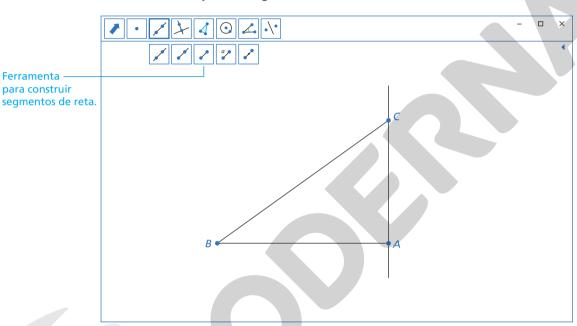
Com base no conceito de semelhança de triângulos, dados dois ou mais triângulos retângulos semelhantes, exploraremos algumas razões entre as medidas de seus lados.

# 1.1 Explorando razões em um triângulo retângulo usando o computador

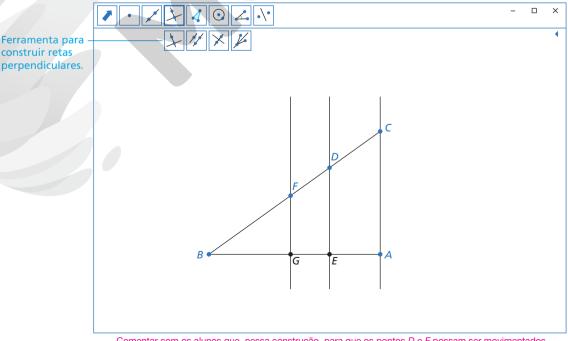
Utilizando um software de Geometria dinâmica, vamos acompanhar o passo a passo da construção a seguir.

1. Construímos um triângulo retângulo BCA, retângulo em A, traçando primeiramente o segmento  $\overline{AB}$  e, em seguida, uma perpendicular a esse segmento passando pelo ponto A. Marcamos um ponto C qualquer nessa perpendicular,  $C \neq A$ , e traçamos o segmento  $\overline{BC}$ .

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998

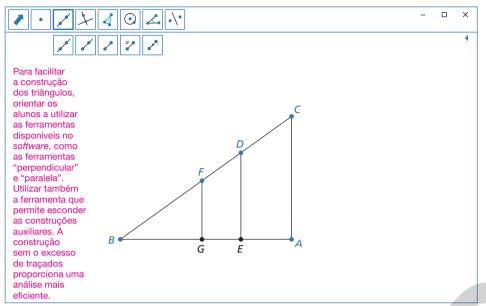


2. Construímos  $\overrightarrow{DE}$  e  $\overrightarrow{FG}$ , paralelas à reta  $\overrightarrow{CA}$ .



Comentar com os alunos que, nessa construção, para que os pontos D e F possam ser movimentados, marcamos sobre o segmento  $\overline{BC}$  os pontos que definem as retas paralelas  $\overline{DE}$  e  $\overline{FG}$ .

3. Traçamos os segmentos  $\overline{CA}$ ,  $\overline{DE}$  e  $\overline{FG}$  e utilizamos um recurso do software para esconder as retas que os continham.

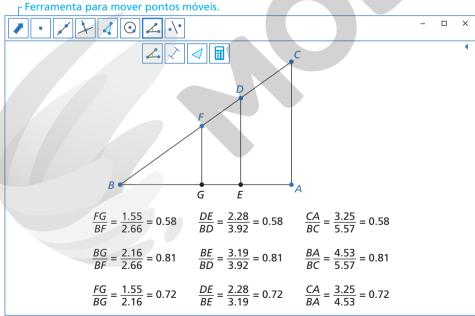


Os triângulos BFG, BDE e BCA são semelhantes, pois têm ângulos correspondentes congruentes.

- 4. Com a ferramenta apropriada, medimos os lados de cada triângulo. Utilizando a calculadora do software, obtemos as seguintes razões:
  - $\frac{FG}{BF}$ ,  $\frac{DE}{BD}$  e  $\frac{CA}{BC}$

Esse procedimento pode variar ou ser diferente entre os softwares, orientar os alunos com relação a essas diferenças.

- $\frac{BG}{BF}$ ,  $\frac{BE}{BD}$  e  $\frac{BA}{BC}$
- $\frac{FG}{BG}$ ,  $\frac{DE}{BF}$  e  $\frac{CA}{BA}$



Observe que as razões entre os lados correspondentes são constantes. Em geral, o programa aproxima as razões para duas casas decimais e usa o sinal de igual para essas aproximações.

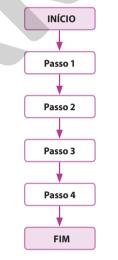
Agora, movimentamos os pontos do triângulo, modificando as medidas dos lados, e observamos que as razões continuam constantes.



### **Algoritmo**

Um algoritmo é uma seguência finita e bem definida de passos para resolver um problema ou realizar uma tarefa.

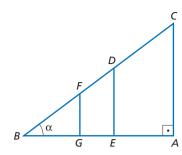
Um passo a passo como o descrito ao lado é um algoritmo e está representado em linguagem corrente. Entretanto, um algoritmo também pode ser representado por um fluxograma. Cada passo corresponde a um processo no fluxograma. Veja:



Pode haver pequenas diferenças na última casa decimal por erro de aproximação. De modo geral, os pontos obtidos com a ferramenta "intersecção" não são pontos móveis. Verificar as funcionalidades do software escolhido e orientar os alunos. Se julgar conveniente, pedir aos alunos que gravem essa construção para explorá-la em outros momentos.

# 1.2 Seno, cosseno e tangente de um ângulo

Seja  $\alpha$  a medida do ângulo  $\hat{B}$ .



A semelhança entre os triângulos BFG, BDE e BCA nos permite escrever as seguintes proporções:

$$\frac{FG}{BF} = \frac{DE}{BD} = \frac{CA}{BC}$$

As razões entre as medidas dos catetos opostos ao ângulo  $\alpha$  e das hipotenusas dos triângulos são iguais a uma constante, chamada de seno do ângulo α.

$$sen \ \alpha = \frac{medida \ do \ cateto \ oposto \ a \ \alpha}{medida \ da \ hipotenusa}$$

Do mesmo modo, podemos dizer que:

$$\frac{BG}{BF} = \frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC}$$

As razões entre as medidas dos catetos adjacentes ao ângulo  $\alpha$  e das hipotenusas dos triângulos são chamadas de cosseno do ângulo α.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Igualmente, podemos escrever:

$$\frac{FG}{BG} = \frac{DE}{BE} = \frac{CA}{BA}$$

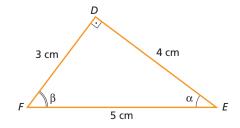
As razões entre as medidas dos catetos opostos ao ângulo  $\alpha$  e dos catetos adjacentes ao mesmo ângulo são chamadas de tangente do ângulo α.

$$\text{tg }\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a }\alpha}{\text{medida do cateto adjacente a }\alpha}$$

As razões sen  $\alpha$ ,  $\cos \alpha$  e to  $\alpha$  são conhecidas como razões trigonométricas.

### **Exemplo**

No triângulo retângulo *DEF* representado abaixo,  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos agudos,  $\overline{DF}$  é o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  e  $\overline{DE}$  é o cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$ .



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

O seno, o cosseno e a tan-

gente podem ser números irracionais? Justifique.

Sim, pois a medida de um dos lados

Nesse caso, sen  $\alpha$  e o cos  $\alpha$  são o

número irracional  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

pode ser irracional, por exemplo:

Em relação ao ângulo agudo  $\beta$ , o cateto oposto é  $\overline{DE}$  e o cateto adjacente é  $\overline{DF}$ . Aplicando as definições, obtemos:

• sen 
$$\beta = \frac{4}{5} = 0.8$$

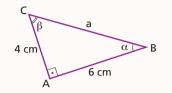
• 
$$\cos \beta = \frac{3}{5} = 0.6$$

• tg 
$$\beta = \frac{4}{3} \simeq 1,33$$

Podemos usar as razões trigonométricas para determinar medidas desconhecidas de um triângulo retângulo, como veremos nos exercícios R2 e R3.

### Exercícios resolvidos

R1. Determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 4 cm.



### ► Resolução

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998

Para o cálculo do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , é necessário determinar a medida a da hipotenusa. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$a^2 = 36 + 16 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$$

Agora, podemos calcular as razões:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$sen \beta = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{6}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

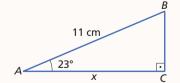
$$\cos\alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos\beta = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$tg \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$tg \beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

R2. Determinar a medida do lado  $\overline{AC}$  do triângulo retângulo representado ao lado. (Considerar: sen  $23^{\circ} = 0.39$ ; cos  $23^{\circ} = 0.92$ ;  $tg 23^{\circ} = 0,42)$ 



▶ Resolução

Para facilitar os cálculos, os valores das razões foram aproximados.

Pela figura, temos a medida da hipotenusa e queremos obter a medida do cateto adjacente ao ângulo de 23°. A razão trigonométrica que relaciona essas duas medidas é o cosseno de 23°.

Como cos 23° = 0,92 e cos 23° = 
$$\frac{x}{11}$$
, temos:

$$0.92 = \frac{x}{11} \Rightarrow x = 11 \cdot 0.92 \Rightarrow x = 10.12$$

Portanto, o lado  $\overline{AC}$  mede 10,12 cm.

### Reflita

Considere a afirmação: o seno e o cosseno de um ângulo agudo é sempre um número maior que zero e menor que 1. Ela é verdadeira? Explique.

É verdadeira, pois, como são razões entre medidas de lados de um triângulo, devem ser maiores que zero: e como no denominador dessas razões está a medida da hipotenusa, que é o maior lado de um triângulo retângulo, o valor sempre será um número menor que 1

### Reflita

Que relações podemos estabelecer entre os valores obtidos no exercício R1?

Espera-se que os alunos percebam as seguintes relações:

 $sen \alpha = cos \beta$ 

O objetivo desta atividade é instigar os alunos a observar algumas relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares ( $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos complementares) que serão estudadas no próximo tópico.

### ▶ Resolução

No esquema ao lado, c representa o comprimento da fita, e d, a distância da ponta da fita ao mastro.

Considerando as informações apresentadas, podemos escrever:

$$sen 30^o = \frac{3}{c}$$

Substituindo sen 30° por 0,5, obtemos o valor de c:

$$0.5 = \frac{3}{c} \Rightarrow c = 6$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow d^2 = 27 \Rightarrow d = 3\sqrt{3} \Rightarrow d \approx 5.2$$

Portanto, a fita tem 6 metros de comprimento e sua ponta está a, aproximadamente, 5,2 metros do mastro.

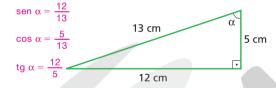


Grupo de dança folclórica de trança-fitas, no Festival de Cultura Tradicional Paulista, São Paulo, SP, 2018.

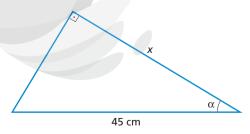
Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento da competência específica 3, pois o aluno poderá utilizar estratégias, conceitos, definicões e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

No enunciado das atividades 3 e 5, foram dados os valores de sen  $\alpha$ , cos  $\alpha$  e tg  $\alpha$ . É importante que os alunos percebam que é possível descartar **Exercícios propostos** duas das razões e trabalhar apenas com uma delas. Pode ser que algum aluno use outra razão, diferente da usual, para resolver o

1. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo  $\alpha$  do triângulo retângulo representado abaixo.



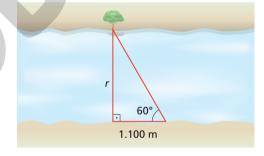
- 2. Em um triângulo ABC, retângulo em C, o cateto oposto ao vértice A mede 8 cm e a hipotenusa mede 12 cm. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo  $\hat{A}$ .  $\sin \hat{A} = \frac{2}{3}$ ;  $\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ;  $tg \hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 3. No triângulo retângulo representado a seguir, considere sen  $\alpha = 0.6$ , cos  $\alpha = 0.8$  e tg  $\alpha = 0.75$ . Calcule x. 36 cm



- 4. Na região do município de Óbidos, no Pará, encon-
- tra-se a garganta mais estreita do rio Amazonas. De um ponto na margem esquerda avista-se, perpendicularmente, certa árvore na outra margem.

problema. Caso isso aconteça, discuta com a sala outros modos de resolução.
Cosseno e a tangente do Caminhando 1.100 m pela margem esquerda, avista-se a mesma árvore sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo.

3 m



Sabendo que tg  $60^{\circ} \simeq 1,7321$ , calcule a largura aproximada do rio Amazonas nesse local. ≈ 1.905 m

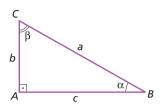
- **5.** Um avião levanta voo sob um ângulo  $\alpha$ . Depois de percorrer uma distância x, em quilômetro, ele atinge 4 km de altura.
  - a) Faça um esquema dessa situação.
  - **b)** Calcule a distância x. (Dados: sen  $\alpha = 0,1045$ ;  $\cos \alpha = 0.9945$ ;  $tg \alpha = 0.1051$ )  $\approx 38.3 \text{ km}$
- 6. Elabore um exercício em que seja necessário utilizar, ao menos, uma das razões trigonométricas para determinar a altura de um penhasco.

Peça a um colega de sua sala para que resolva o seu exercício e você deve resolver o dele. Use sen  $60^{\circ} = 0,86$ ;  $\cos 60^{\circ} = 0,5$  e tg  $60^{\circ} = 1,73$ 

# 1.3 Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

# Seno e cosseno de ângulos complementares

Considere o triângulo ABC, retângulo em A, e todas as razões trigonométricas que envolvem os ângulos agudos e complementares  $\alpha$  e  $\beta$ .



- sen  $\alpha = \frac{b}{a}$  cos  $\alpha = \frac{c}{a}$  tg  $\alpha = \frac{b}{c}$
- sen  $\beta = \frac{c}{a}$  cos  $\beta = \frac{b}{a}$  tg  $\beta = \frac{c}{b}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Com base nessas razões, vamos estabelecer algumas relações importantes.

Note que podemos escrever  $\beta$  em função de  $\alpha$ , ou seja,  $\beta = 90^{\circ} - \alpha$ .

Observe que  $\frac{b}{a} = \text{sen } \alpha = \cos \beta$ . Como  $\beta = 90^{\circ} - \alpha$ , concluímos que:

$$sen \alpha = cos (90^{\circ} - \alpha)$$

Veja também que  $\frac{c}{a} = \cos \alpha = \sin \beta$ .

Substituindo  $\beta = 90^{\circ} - \alpha$  nessa igualdade, concluímos que:

$$\cos \alpha = \text{sen} (90^{\circ} - \alpha)$$

# Relação fundamental da Trigonometria

Sendo  $\alpha$  um ângulo agudo, a equação abaixo, conhecida como relação fundamental da Trigonometria, é sempre válida:

$$sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$$

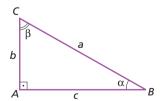
### Demonstração

No triângulo ABC, representado ao lado, sabemos que

sen 
$$\alpha = \frac{b}{a}$$
 e cos  $\alpha = \frac{c}{a}$ . Assim:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 =$$

$$=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2} \text{ (I)}$$



Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo ABC, temos:  $a^2 = b^2 + c^2$  (II)

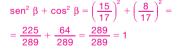
De (I) e (II), podemos escrever: sen² 
$$\alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Portanto, quaisquer que sejam as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, vale a igualdade:  $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$ .

Ângulos complementares são ângulos cuja soma de suas medidas resulta em 90°.

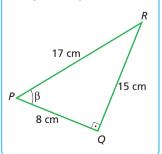


$$\alpha + \beta = 90^{\circ}$$



### Explore

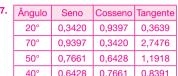
Dado o triângulo representado abaixo, verifique que  $sen^2 \beta + cos^2 \beta = 1.$ 

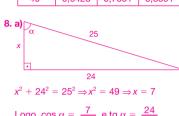


A utilização de demonstrações pode auxiliar no entendimento e na validação das proposições, favorecendo o desenvolvimento da competência específica 5 da BNCC.

$$tg \ \alpha = \frac{sen \ \alpha}{cos \ \alpha}$$

### Demonstração





No triângulo *ABC*, sabemos que sen  $\alpha = \frac{b}{a}$ ,  $\cos \alpha = \frac{c}{a}$  e tg  $\alpha = \frac{b}{c}$ .

Escrevendo b em função de sen  $\alpha$ , temos:

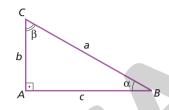
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \operatorname{sen} \alpha$$
 (I)

Também podemos escrever c em função de cos  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos \alpha$$
 (II)



$$tg \alpha = \frac{b}{c} = \frac{a \cdot sen \alpha}{a \cdot cos \alpha} = \frac{sen \alpha}{cos \alpha}$$



# Exercícios propostos

7. Copie a tabela abaixo em seu caderno, preenchendo as lacunas com as informações que faltam. (Você pode usar uma calculadora, mas não use as funções "sin", "cos" ou "tan".)

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	O
70°	7		
50°			O TE
40°	0,6428		0,8391

### Registre as respostas em seu caderno.

- 8. Seja  $\alpha$  a medida de um ângulo agudo. Sabendo que sen  $\alpha=\frac{24}{25}$ , vamos calcular o cosseno e a tangente desse ângulo de dois modos diferentes.
  - a) Siga os passos abaixo.
    - Desenhe um triângulo retângulo, de modo que um de seus ângulos agudos seja  $\alpha$ .
    - Depois, com base no valor de sen  $\alpha$ , escreva as medidas da hipotenusa e de um dos catetos.
    - Calcule a medida do outro cateto.
    - Finalmente, calcule cos  $\alpha$  e tg  $\alpha$ .
  - b) A partir da relação fundamental da Trigonometria (sen²  $\alpha$  + cos²  $\alpha$  = 1), calcule cos  $\alpha$ . Depois, calcule tg  $\alpha$ .

**8. b)** 
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{576}{625} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{49}{625} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{25}$$

Temos: 
$$tg \alpha = \frac{sen \alpha}{cos \alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

# 2 Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

Na Trigonometria, os ângulos de 30°, 45° e 60° são conhecidos como **ângulos notáveis**. Com figuras geométricas conhecidas, podemos obter os valores do seno, do cosseno e da tangente desses ângulos. Acompanhe a seguir.

# Ângulo de 45°

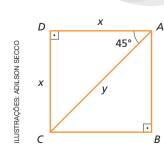
Considere o triângulo retângulo ACD representado ao lado, obtido da divisão do quadrado ABCD por sua diagonal  $\overline{AC}$ .

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos  $y^2 = x^2 + x^2$ , ou seja,  $y = x\sqrt{2}$ .

De acordo com as definições, temos:

• sen 45° = cos 45° = 
$$\frac{x}{y} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• tg 
$$45^{\circ} = \frac{x}{x} = 1$$



Aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos obtidos, temos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Então, de acordo com as definições:

• sen 60° = 
$$\frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• sen 30° = 
$$\frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

• 
$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

• 
$$\cos 30^\circ = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

• tg 60° = 
$$\frac{h}{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

• tg 30° = 
$$\frac{\frac{x}{2}}{h} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Os resultados obtidos, frequentemente usados em problemas de Trigonometria, podem ser organizados na seguinte tabela:

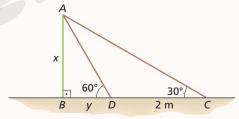
	30°	45°	60°
seno	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Nos próximos exercícios, vamos usar esses valores.

Habitualmente os alunos se deparam com um problema contendo diversas informações. Desse problema, extraem as informações relevantes para resolvê-lo, criando a abstração da situação. Neste momento, propõe-se o exercício da criatividade e do pensar o caminho inverso, determinando uma situação cuja abstração dada pode representar.

### Exercício resolvido

R4. Uma pequena árvore, cuja altura está representada por x, ao ser replantada, foi escorada por duas vigas de madeira representadas por AD e AC, como mostra o esquema.



Determinar a altura x da árvore e a distância y até a escora mais próxima à árvore.

### Observação

A altura de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um dos lados desse triângulo, tendo uma das extremidades nesse lado e a outra no vértice oposto a esse lado.

### **Pensamento** computacional

### **Abstração**

Ao observar uma situação e extrair os dados relevantes para resolver um problema relacionado a ela, pratica-se um dos pilares do pensamento computacional: a abstração.

O esquema do exercício R4 poderia ser a abstração de alguma situação diferente da descrita. Por exemplo: um construtor civil escorou uma coluna com duas tábuas de madeira de reflorestamento. Uma tábua formava um ângulo de 60° em relacão ao solo, e a outra formava um ângulo de 30°, também em relação ao solo. As tábuas estavam separadas a uma distância de 2 m entre si e se encontravam no ponto mais alto da coluna. O construtor cobrou R\$ 4 200,00 pelo serviço, e as tábuas custaram R\$ 50,00. Qual é a altura da coluna escorada e qual é a distância da tábua que forma 60° em relação ao solo da referida coluna?

Quais dados não são utilizados para resolver o problema?

• O tipo da madeira, o valor do servico e o preco das tábuas. LUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Aqui, é um bom momento para enfatizar que sempre convém examinar se há mais de uma maneira de resolver um dado exercício.

### Reflita

Considerando o fato de que o triângulo ADC é isósceles, resolva o exercício R4 de uma maneira diferente da que foi apresentada.

### ▶ Resolução

Analisando o triângulo ABC, observamos que podemos usar a tangente de 30°, pois ela relaciona x (medida do cateto oposto ao ângulo de 30°) com y + 2 (medida do cateto adjacente ao ângulo de  $30^{\circ}$ ):

tg 30° = 
$$\frac{x}{y+2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y+2} \Rightarrow x = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3}$$
 (I)

Agora, analisando o triângulo ABD, observamos que podemos usar a tangente de 60°, pois ela relaciona x (medida do cateto oposto ao ângulo de 60°) com y (medida do cateto adjacente ao ângulo de 60°):

tg 60° = 
$$\frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{3}$$
 (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:  $y\sqrt{3} = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 1$ 

Como 
$$x = y\sqrt{3}$$
, temos  $x = \sqrt{3}$ .

Assim, 
$$x = \sqrt{3}$$
 m e y = 1 m.

30°

60°

5 m

Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento da competência específica 3, pois os alunos poderão utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

### Exercícios propostos

**9.** Determine x e y nos seguintes triângulos:

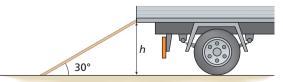
= 5 cm:  $= 5\sqrt{3}$  cm 8 cm 10 cm У  $x = 4\sqrt{3} \text{ cm}; y = 30^{\circ}$ 60°

10. Uma das extremidades de um cabo de aço está presa ao topo de um poste, formando com este um ângulo de 30°, enquanto a outra extremidade está fixada no chão a 5 m do

pé do poste.

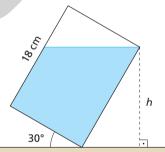
Considerando essas informações, determine:

- a) o comprimento c do cabo de aço. c = 10 m
- b) a altura h do poste.  $h \approx 8.7 \text{ m}$
- 11. Um ajudante de pedreiro estava descarregando areia de um caminhão por uma rampa de madeira apoiada à caçamba. Se a rampa tem 3 m de comprimento e forma com o solo um ângulo de 30°, qual é a altura entre a caçamba e o solo, representada por h? 1,5 m





- 12. Um triângulo equilátero tem 18 cm de altura. Determine a medida aproximada de seus lados.
- 13. Uma antena de 15 m de altura é presa ao chão por quatro cabos de aço. O ângulo que cada um deles forma com a ponta da antena mede 45°. Ouantos metros de cabo de aco foram usados. aproximadamente, para prender essa antena?
- 14. Um recipiente com forma de bloco retangular, com 18 cm de altura, foi tombado, como mostra a figura.



Determine a altura aproximada h entre o solo e o nível da água contida no recipiente tombado.

15. (Vunesp) Uma pessoa, no nível do solo, observa o ponto mais alto de uma torre vertical, à sua frente, sob o ângulo de 30°. Aproximando-se 40 metros da torre, ela passa a ver esse ponto sob o ângulo de 45°. A altura aproximada da torre, em metro, é:

alternativa c

- a) 44,7 b) 48,8
- c) 54,6
- d) 60,0
- e) 65,3

# Uso da calculadora e da tabela trigonométrica

Vimos que as razões trigonométricas dos ângulos notáveis são valores conhecidos e que, para obter aproximações, basta usar uma calculadora simples.

Mas como obtemos as razões trigonométricas de outros ângulos agudos?

Esses valores podem ser encontrados em tabelas trigonométricas, que contêm as razões trigonométricas de diversos ângulos agudos (veja na próxima página). Elas foram desenvolvidas inicialmente por astrônomos da Antiguidade, devido à necessidade de usar esses valores em seus estudos. Com base em conhecimentos babilônicos, Hiparco de Niceia (190 a.C.-120 a.C.) construiu o que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, e por isso é considerado o "pai da Trigonometria".

No entanto, após a invenção e a difusão das calculadoras, essas tabelas passaram a ser menos usadas. Atualmente, podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente de ângulos em calculadoras científicas, em computadores e até mesmo em alguns telefones celulares.



sin cos tan

Calculadora com as teclas "sin", "cos" e "tan" (seno, cosseno e tangente, respectivamente). As calculadoras científicas costumam ter também as funções "sin-", "cos-1" e "tan-1", que fornecem a medida do ângulo a partir do seno, do cosseno ou da tangente dele, conforme veremos no exercício **R6**.

### Exemplos

a) Vamos calcular sen 53° na calculadora.

Primeiro, verificamos se a opção "graus" está selecionada para que a calculadora reconheça 53 como 53°. Em geral, essa opção é indicada por deg, que significa "grau" (grau, em inglês, é *degree*).

Em seguida, digitamos: 5 3 sin =

O resultado será 0,7986355, que é uma aproximação para sen 53°.

b) Para calcular cos 12°, acionamos as teclas: 1 2 cos =

Concluímos que: cos 12° ≈ 0,9781476

c) Para calcular tg 73°, digitamos: 7 3 tan =

Assim: tg 73° ~ 3,2708526

### **Observações**

1. Normalmente, as calculadoras oferecem três opções para as unidades de medida dos ângulos: deg rad grad

Por isso, é importante verificar se a opção deg está selecionada.

- 2. Em algumas calculadoras, dependendo do modelo, o procedimento pode ser outro: primeiro, digitamos a tecla sin; em seguida, a medida do ângulo escolhido; e, por último, apertamos =.
- **3.** O número de casas decimais que aparecerá para sen 53°, por exemplo, vai depender da capacidade máxima de dígitos do visor da calculadora, já que o valor é uma aproximação de um número irracional, com infinitas casas decimais não periódicas.

### **Explore**

Considerando os valores da tabela da página 49 e usando uma calculadora simples, obtenha uma aproximação, com três casas decimais, para:

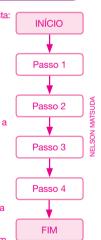
- sen 45° 0,707
- cos 30° 0.866
- tg 30° 0,577

Com essa atividade, espera-se que os alunos se familiarizem com o cálculo de aproximações das razões trigonométricas dos ângulos notáveis, as quais serão bastante usadas nos exercícios contextualizados.

# Pensamento computacional

Com base nos exemplos de uso da calculadora, elabore um algoritmo em linguagem corrente que descreve como calcular o valor do cosseno de um ângulo α. Em seguida, represente esse algoritmo em um fluxograma.

Exemplo de resposta: Passo 1. Ative a função "grau" da calculadora. Passo 2. Digite a medida do ângulo em arau. Passo 3 Pressione a tecla da função cosseno "cos" Passo 4. Pressione a tecla ' Nesse boxe será favorecido o desenvolvimento da competência específica 4 e da habilidade EM13MAT315, uma vez que os alunos terão de escrever um algoritmo em um fluxograma.



### **Explore**

Usando uma calculadora científica, calcule cos  $\alpha$  (escolha  $\alpha$ , sendo  $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$ ). Em seu caderno, anote o valor obtido com aproximação de quatro casas decimais. Em seguida, calcule sen  $\alpha$  e divida-o por cos  $\alpha$ . Verifique que o quociente obtido é uma aproximação de tg  $\alpha$ .

### Observação

Note que, para  $0^{\circ} < x < 90^{\circ}$ , um aumento na medida do ângulo x implica aumento do sen x, diminuição do  $\cos x$  e aumento da tg x.

### Reflita

Sendo x e y ângulos disponíveis na tabela, você percebe alguma relação entre x e y, de forma que sen  $x = \cos y$ ?

Para que sen  $x = \cos y$ , devemos ter  $x + y = 90^{\circ}$ , isto é, x e y devem ser ângulos complementares.

### **Explore**

Utilizando um software de Geometria dinâmica, construa um triângulo retângulo qualquer de maneira que os ângulos agudos possam ser modificados. Meça os lados do triângulo e, com a calculadora do software, calcule o seno, o cosseno e a tangente de um dos ângulos agudos e, então, procure na tabela trigonométrica essas razões para descobrir a medida aproximada do ângulo. Movimente a construção geométrica, modificando a medida dos ângulos agudos do triângulo retângulo e localize, na tabela de razões trigonométricas, a medida aproximada do novo ângulo. (Dica: da maneira que construímos os triângulos retângulos da página 42, podemos modificar as medidas dos ângulos agudos.)

Ao final da atividade, sugerir aos alunos que meçam o ângulo com a ferramenta de medidas do software e comparem com o valor obtido na tabela trigonométrica.

### 3.1 Tabela de razões trigonométricas

A tabela a seguir apresenta aproximações para as razões trigonométricas com quatro casas decimais.

	Tabela de razões trigonométricas								
Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente		
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355		
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724		
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106		
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504		
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918		
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349		
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799		
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270		
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764		
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281		
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826		
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399		
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003		
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643		
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321		
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040		
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807		
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626		
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503		
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445		
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460		
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559		
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751		
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051		
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475		
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042		
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777		
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709		
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874		
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321		
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108		
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315		
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046		
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	4,1446		
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713		
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138		
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154		
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443		
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144		
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301		
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007		
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811		
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363		
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900		
45°	0,7071	0,7071	1,0000						

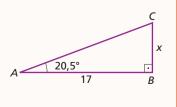
### Exercícios resolvidos

**R5.** Calcular o valor de x no triângulo ABC representado ao lado.

► Resolução

Observando a figura, podemos escrever:

$$tg 20,5^{\circ} = \frac{x}{17}$$



ADILSON SECCO

Em uma calculadora, obtemos

tg 20,5° 
$$\simeq$$
 0,37. Assim: 0,37  $\simeq \frac{x}{17} \Rightarrow x \simeq 6,29$ 

R6. Um fio de 15 m de comprimento, esticado, eleva uma pipa até a altura de 6,8 m. Determinar a medida do ângulo formado pelo fio com o solo.

### ► Resolução

Pelos dados informados no enunciado, podemos escrever:  $sen \alpha = \frac{6.8}{15} \Rightarrow sen \alpha \approx 0.4533$ 



Na calculadora científica, temos as teclas:

- sin, que, dada a medida do ângulo, calcula o valor de seu seno;
- sin-1, que, dado o valor do seno, calcula a medida do ângulo agudo.

Então, para descobrir a medida  $\alpha$ , digitamos 0,4533 e acionamos a tecla sin<sup>-1</sup>, obtendo 26,955606.

Logo, o fio forma um ângulo de aproximadamente 27° com o solo.

### Reflita

Como você usaria a tabela trigonométrica para obter ta 20,5°?

Na tabela trigonométrica, não há o ângulo de medida 20,5°. No entanto, espera-se que os alunos observem os valores

• tg  $20^\circ = 0.3640$  • tg  $21^\circ = 0.3839$ Assim, devem concluir que a tg 20,5° está entre esses valores, ou seja, é aproximadamente 0,37.

### Explore

Resolva o exercício **R6** usando a tabela trigonométrica da página anterior.

Espera-se que os alunos procurem na coluna dos senos da tabela trigonométrica o valor mais próximo de 0,4533. Eles encontrarão 0,4540, que é o seno de 27°

Esse bloco de exercícios favorece o desenvolvimento da competência específica 3, pois os alunos poderão utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente

### **Exercícios propostos**

Nos exercícios a seguir, utilize uma calculadora ou a tabela trigonométrica da página anterior para obter os valores necessários para a resolução.

**16.** Ao levantar voo, um avião percorre uma trajetória retilínea com inclinação de 20° com a horizontal, conforme mostra a figura.



Calcule a altura em que ele estará após percorrer  $3 \text{ km.} \simeq 1.026 \text{ km}$ 

17. Vamos voltar à ideia de Aristarco, vista na abertura do capítulo. Quando a Lua está no quarto crescente, um triângulo retângulo LTS é formado entre a Lua, a Terra e o Sol, conforme mostra a figura.



Sabendo que o ângulo β mede aproximadamente 89,83° e considerando TL = 384.000 km, determine:

- a) a medida TS.  $\approx 128.000.000 \text{ km}$
- b) a razão  $\frac{TS}{TI}$ .  $\approx$  333

Registre as respostas em seu caderno.

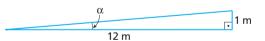
18. Na construção civil, existem diversas regras de acessibilidade para pessoas com deficiência.

Uma delas é que a rampa de acesso tenha inclinação máxima de 8,33%. Isso significa que, a cada 1 m de altura, deve-se ter, no mínimo, 12 m de afastamento horizontal a partir do iní-



cio da rampa. (Note que 1:12  $\approx$  0,0833 = 8,33%.) Considerando uma rampa com inclinação máxima, responda às questões a seguir.

a) Qual é a medida do ângulo formado entre a rampa e a horizontal? (Considere o número inteiro mais próximo.) ≈ 5°



- b) Para um desnível de 3 m entre dois andares, quantos metros lineares de rampa devem ser construídos? ≈ 34,5 m
- c) Na construção de uma rampa de acessibilidade, além de sua inclinação, outros elementos devem ser levados em consideração, como o tipo de corrimão e a sinalização com piso tátil, por exemplo.

Em grupo, pesquisem sobre o tema e produzam um texto que especifique como esses outros elementos devem ser integrados à rampa para permitir a acessibilidade. resposta pessoal

# Exercícios complementares

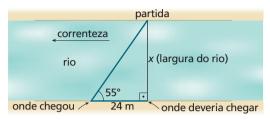
Com o exercício 2, pode-se trabalhar o tema contemporâneo Educação ambiental.

Registre as respostas em seu caderno

A arara-azul-de-lear é uma das aves brasileiras que estão em extinção, principalmente por causa do tráfico de animais. Incentivar a produção da pesquisa solicitada no exercício. Na apresentação dos trabalhos, se julgar necessário, perguntar aos alunos, por exemplo, o que pensam sobre o comércio de animais, sobre a ocupação desordenada de territórios e sobre medidas do governo no auxílio à preservação das espécies.

### **Aplicação**

1. Um barqueiro pretendia ir de uma margem à outra de um rio pela travessia mais curta possível. No entanto, a correnteza o arrastou 24 m, conforme mostra a figura.



Calcule a largura do rio. (Dados: sen 55°  $\simeq$  0,8192; cos 55°  $\simeq$  0,5736; tg 55°  $\simeq$  1,4281)  $\simeq$  34,27 m

2. Lílian é bióloga e trabalha na Bahia, em um projeto de conservação da araraazul-de-lear. Uma de suas tarefas é mapear os ninhos dessas araras.

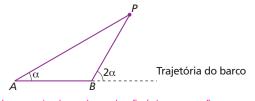


Lílian avistou um ninho e, com um teodolito, mediu o ângulo formado entre a linha de visão e a horizontal, obtendo 22°.



Sabendo que Lílian tem 1,6 m de altura e estava a 80 m do paredão, qual é a altura aproximada do ninho das araras? (Dados: sen  $22^{\circ} \simeq 0,3746$ ;  $\cos 22^{\circ} \simeq 0,9272$ ; tg  $22^{\circ} \simeq 0,4040$ )  $\simeq 33,92$  m

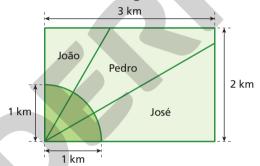
- A arara-azul-de-lear é uma das aves brasileiras em extinção, devido sobretudo ao tráfico de animais.
   Faça uma pesquisa e escreva um texto sobre essa ave. Apresente seu texto para a turma e, se julgar necessário, ilustre-o com fotos. resposta pessoal
- 3. (Enem) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação.



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo  $\alpha=30^\circ$  e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2.000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será: alternativa b

- **a)** 1.000 m
- c)  $2.000 \frac{\sqrt{3}}{3}$  m
- e)  $2.000\sqrt{3}$  m

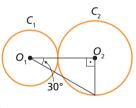
- **b)** 1.000 √3 m
- **d)** 2.000 m
- 4. (Enem) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km × 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a: alternativa e

$$\left(\text{considere } \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.58\right)$$

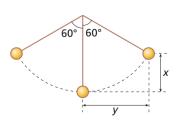
- **a)** 50% **b**
- **b)** 43%
- **c)** 37%
- **d)** 33%
- 5. Duas circunferências, C₁ e C₂, são tangentes externas (têm um único ponto de intersecção), e a distância entre seus centros é de 15 cm. Observe a figura ao lado e determine o raio aproximado de cada circunferência. ≈ 6,34 cm; ≈ 8,66 cm



e) 19%

### Desafio

- 6. Um relógio possui um pên-
- dulo de 80 cm de comprimento. Sua extremidade percorre, em seu movimento, um arco de 120°. Observe no esquema as distâncias x (vertical) e y (horizontal) que a extremidade desse pêndulo



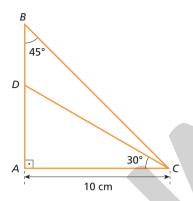
- percorra e calcule-as. x = 40 cm;  $y = 40\sqrt{3}$  cm
- 6. Uma maneira de resolver o desafio é decompor a figura, encontrando um triângulo, para calcular o valor de x e y por meio de trigonometria. Além de extrair as informações relevantes para resolver o problema, o aluno decompõe a resolução em problemas menores, em etapas. Pratica-se, assim, os pilares de abstração e decomposição do pensamento computacional.

- 1. No triângulo retângulo ABC representado abaixo, os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo  $\alpha$  são, respectivamente: alternativa c
  - a)  $\frac{3}{5}$ ;  $\frac{4}{5}$ ;  $\frac{4}{3}$
  - b)  $\frac{4}{5}$ ;  $\frac{3}{5}$ ;  $\frac{3}{4}$
  - c)  $\frac{3}{5}$ ;  $\frac{4}{5}$ ;  $\frac{3}{4}$
  - d)  $\frac{5}{3}$ ;  $\frac{5}{4}$ ;  $\frac{4}{3}$
- 2. O ângulo agudo  $\alpha$  de um triângulo retângulo é tal que sen  $\alpha = 0,6$ . Podemos, então, afirmar que:  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$  e tg  $\alpha = \frac{1}{2}$ . alternativa b
  - **a)** 0,6; 1
- **c)** 0,75; 0,8
- **b)** 0,8; 0,75
- **d)** 1; 0,6
- 3. Um triângulo retângulo tem um ângulo medindo 30°. Se a hipotenusa desse triângulo mede 8 cm, então seus catetos medem cm e aproximadamente cm. alternativa a
  - a) 4; 6,93
- c) 4,5; 5

**b)** 4; 5

- d) 5; 6
- **4.** Ao levantar voo, um avião percorre uma trajetória retilínea com inclinação de 20° com a horizontal. Determine a altitude, em metro, em que o avião estará quando passar sobre um prédio situado a 1,5 km do ponto de partida. (Dados: sen 20°  $\simeq$  0,3420; cos 20°  $\simeq$  0,9397; tg 20°  $\simeq$  0,3640)  $\simeq$  546 m
- 5. Uma turista está em uma das margens de um rio. Perpendicularmente a essa margem, ela avista uma pedra na outra margem. Depois de percorrer 35 m pela beira do rio, avista a mesma pedra sob um ângulo de 55° em relação à sua trajetória. Qual é, nesse local, a largura aproximada do rio? ~ 50 m

6. Considerando a figura abaixo, a medida do segmento  $\overline{BD}$  é cm. alternativa a



- a)  $\frac{10(3-\sqrt{3})}{3}$
- c)  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$
- b)  $\frac{10\sqrt{3}}{2}$
- d) 1
- 7. Uma rampa para pedestres forma 6° com a horizontal e tem 4 m de altura.



Logo, a distância (d) entre o início A da rampa e a porta B do prédio a que ela dá acesso é aproximadamente: alternativa d

- a) 33,8 m
- c) 38,3 m
- **b)** 40,9 m
- d) 39,8 m

### Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.	Х	Х					
Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.			Х	Х	Х	Х	X
Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.					х		х
Páginas do livro referentes ao conceito	42 a 46	42 a 46	47 a 50	47 a 50	51 a 53	47 a 50	51 a 53

**CAPÍTULO** 

# Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer

### Objetivos do capítulo

- Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.
- Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.
- Ampliar as razões trigonométricas para ângulos com medidas maiores que 90°.
- Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.
- Aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.



Engrenagens na antiga Fazenda Ipanema, em Sorocaba-SP. Foto tirada em janeiro de 2019.

olvimento da competência geral 1 da BNCC, apresentando conhecimentos historicamente construídos. Na área de

As engrenagens são peças dentadas, normalmente circulares, que, unidas a eixos, transmitem movimento a diversos tipos de máquina. As engrenagens funcionam em pares, encaixando os dentes de uma na outra.

> A primeira engrenagem de que se tem conhecimento é em uma carruagem chinesa do ano 260 a.C. chamada "carro que segue o sul". Ela movia uma estátua com um braço estendido apontando em certa direção; era usada como uma espécie de bússola. Os primeiros registros escritos de uma engrenagem foram feitos por Aristóteles, no século 4 a.C.

> Em 2013, cientistas descobriram uma estrutura similar a uma engrenagem em um inseto, o Issus coleoptratus, uma espécie de percevejo encontrado nos jardins europeus. Os pesquisadores afirmam que essa engrenagem biológica é muito parecida com os mecanismos utilizados nas máguinas.

> Nos capítulos anteriores, estudamos as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) em um triângulo retângulo e as usamos para obter a medida de lados e de ângulos. No entanto, elas foram definidas apenas para ângulos agudos e não se mostram práticas para trabalhar com triângulos que não sejam retângulos.

> Neste capítulo, definiremos os conceitos de seno, cosseno e tangente em uma circunferência, o que possibilitará a aplicação da Trigonometria a triângulos quaisquer e servirá de base para o desenvolvimento do próximo capítulo "Funções trigonométricas".

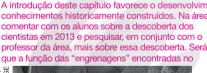




Imagem ampliada 2.369× mostra as engrenagens nas patas do inseto Issus coleoptratus.

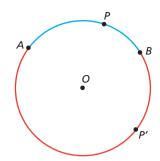
# 🛈 Arcos de uma circunferência

Dois pontos, A e B, de uma circunferência a dividem em duas partes. Cada uma das partes, incluindo esses pontos, é chamada de **arco de circunferência**. Na figura ao lado, temos:

- $\widehat{APB}$ : arco de extremidades A e B, contendo P;
- $\widehat{AP'B}$ : arco de extremidades A e B, contendo P'.

Se não houver dúvida sobre qual das partes estamos considerando, podemos indicar o arco apenas por  $\widehat{AB}$ .

Podemos obter duas medidas de um arco: o comprimento e a medida angular.

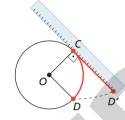


# 1.1 Comprimento de um arco

O **comprimento** de um arco é sua medida linear e pode ser indicado em milímetro, centímetro, metro etc.

Considere o arco  $\widehat{CD}$ , destacado em vermelho na figura ao lado. Se pudéssemos retificar esse arco transformando-o em um segmento, conseguiríamos medi-lo com uma régua graduada.

No Ensino Fundamental foi trabalhado o conceito de comprimento de uma circunferência (C), chegando-se à fórmula  $C = 2\pi r$  (sendo r, o raio da circunferência). Essa fórmula será usada para obter o comprimento de arcos de circunferência, conforme veremos no exercício R1.



### Observação

Lembre-se de que  $\pi$  é um número irracional cujo valor é 3,14159265... Para fins de cálculos, é comum adotarmos como aproximação  $\pi \simeq 3,14$ .

### Explore

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

É importante se familiarizar com o software de Geometria dinâmica escolhido, antes de usá-lo em sala de aula. Dependendo do programa, as ferramentas disponíveis podem ser diferentes e, talvez, seja preciso modificar o passo a passo da construção.

Com auxílio de um software de Geometria dinâmica, realize os procedimentos a seguir.

- 1. Trace uma circunferência de centro A passando por um ponto qualquer B.
- 2. Trace um diâmetro da circunferência. Para isso trace uma reta passando pelos pontos A e B; essa reta interceptará a circunferência em B e em outro ponto que denominaremos D; depois, basta traçar o segmento BD, que é um diâmetro da circunferência.
- 3. Com a ferramenta para medir comprimentos, meça o comprimento C da circunferência e seu diâmetro d (segmento  $\overline{BD}$ ).
- 4. Com a calculadora do software, calcule  $\frac{C}{d}$ .
- 5. Movimente os pontos A e B. O que acontece com a razão calculada no item anterior?

A seguir, algumas considerações em relação aos itens 2, 3 e 5 do boxe **Explore**.

- Orientar os alunos a esconder alguns elementos da construção (a maioria dos softwares possui essa função), a fim de que ela não fique muito poluída visualmente.
- Dependendo do software, o modo de realizar essas medições pode ser diferente; em alguns, por exemplo, para medir o comprimento da circunferência é necessário separá-la em arcos e medir o comprimento desses arcos.
- Os alunos deverão perceber que a razão é constante e aproximadamente igual a 3,14.

Com a atividade apresentada nesse boxe, é possível proporcionar a oportunidade de investigar a situação geométrica proposta. Assim, o aluno poderá fazer conjecturas por meio da exploração em uma única construção com diversas configurações diferentes, o que é possível pela movimentação da construção realizada com um software de Geometria dinâmica, já que suas propriedades são preservadas. Portanto, essa atividade favorece o desenvolvimento das competências gerais 2 e 5 da BNCC e específica 5.

### Exercício resolvido

**R1.** Calcular o comprimento de um arco de 50° contido em uma circunferência com 8 cm de raio.

### ► Resolução

Lembrando que uma circunferência tem 360° e seu comprimento é dado por  $2\pi r$ , podemos montar a seguinte regra de três:

medida do arco (grau)

comprimento (cm)

$$x = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 50^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{20\pi}{9}$$

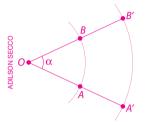
Substituindo  $\pi$  por 3,14, obtemos:

$$x \simeq \frac{20 \cdot 3,14}{9} \Rightarrow x \simeq 6,98$$

Logo, o arco mede aproximadamente 6,98 cm.

Com auxílio de um software de Geometria dinâmica, construa duas circunferências concêntricas, com raios diferentes. Construa um ânaulo central de medida α qualquer, que determine, nessas circunferências, respectivamente os arcos  $\widehat{AB}$  $e \widehat{A'B'}$ .

- As medidas angulares de  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{A'B'}$  são iquais?
- Os comprimentos de  $\widehat{AB}$ e  $\widehat{A'B'}$  são iguais?

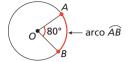


Espera-se que os alunos percebam que a medida angular do arco depende apenas da medida do ângulo central; logo, as medidas angulares são iguais. Já os comprimentos dos arcos são diferentes, pois dependem do raio da circunferência que contém cada um deles; quanto maior o raio, maior o comprimento da circunferência

### 1.2 Medida angular de um arco

Sempre que nos referimos à medida de um arco de circunferência, estamos fazendo referência à sua medida angular, que é igual à medida do ângulo central correspondente.

Por exemplo, na figura a seguir, temos o arco  $\widehat{AB}$  (destacado em vermelho) e seu ângulo central correspondente AÔB.



Como o ângulo  $\widehat{AOB}$  mede 80°, o arco  $\widehat{AB}$  também mede 80°. Indicamos:  $med(\widehat{AB}) = med(\widehat{AOB}) = 80^{\circ}$ .

Geralmente, as unidades usadas para medir um arco são o grau e o radiano.

### 0 grau

Considere uma circunferência dividida em 360 arcos de comprimentos iguais. Define--se um grau (1°) como a medida angular de cada um desses arcos. Por isso, dizemos que a circunferência tem 360°.

A ideia de dividir uma circunferência em 360 partes surgiu com os astrônomos babilônicos, milênios antes da era comum. Acredita-se que esses estudiosos tenham escolhido essa divisão ao notar que um ano tem aproximadamente 360 dias. Essa divisão também foi adotada por matemáticos gregos, como Hiparco de Niceia (século II a.C.) e Ptolomeu de Alexandria (c. 90-168 d.C.), tornando-se usual na Geometria e na Trigonometria.

Também foram criados submúltiplos do grau, como se pode observar a seguir.

- Dividindo 1 grau em 60 partes iguais, obtemos 1 minuto (1'). Trazer informações do contexto histórico do Ou seja,  $1^{\circ} = 60'$ .
- Dividindo 1 minuto em 60 partes iguais, obtemos 1 segundo (1"). unidade de medida, Ou seja, 1' = 60''.

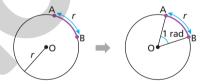
surgimento do grau, como

da competência geral 1 da BNCC.

### O radiano

Para medir arcos e ângulos, também podemos usar o radiano. A medida angular de um arco é 1 radiano (1 rad) quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

Observe a circunferência de raio r representada abaixo. Como o comprimento do arco  $\overrightarrow{AB}$  é r, sua medida angular é 1 radiano. Indicamos: med $(\overrightarrow{AB}) = 1$  rad.



No exercício resolvido a seguir, veremos que uma circunferência (ou seja, um arco de 360°) mede  $2\pi$  rad.

### Exercício resolvido

R2. Calcular a medida angular, em radiano, de uma circunferência.

### ▶ Resolução

Dada uma circunferência de raio r, um arco de medida 1 rad tem o comprimento igual a r. Como o comprimento da circunferência é  $2\pi r$ , temos:

medida do arco (rad) comprimento (cm)

$$\alpha = 2\pi$$

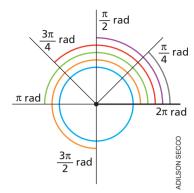
$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Logo, uma circunferência mede  $2\pi$  rad.

Um ângulo que determina uma circunferência corresponde a um arco que mede 360° ou  $2\pi$  rad. Assim, um ângulo raso, que determina uma semicircunferência, corresponde a um arco que mede 180° ou  $\pi$  rad.

A tabela abaixo fornece a relação entre as medidas, em grau e em radiano, de alguns ângulos. Observe também a figura ao lado.

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



### **Exemplos**

a) Vamos obter a medida, em grau, de um arco de  $\frac{\pi}{6}$  rad.

grau radiano
$$180 - - - \pi$$

$$x - - \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30$$

Assim, um arco de  $\frac{\pi}{6}$  rad mede 30°.

b) Vamos obter a medida, em radiano, de um arco de 200°.

radiano grau
$$\pi - 180$$

$$x - 200 \cdot \pi$$

$$x = \frac{200 \cdot \pi}{180} = \frac{10\pi}{9}$$

Assim, um arco de 200° mede  $\frac{10\pi}{9}$  rad.

c) Vamos determinar a medida x, em grau e em radiano, de um arco com aproximadamente 12,56 cm de comprimento, em uma circunferência com 12 cm de raio.

medida

- (cm) (grau) 12.56  $x \simeq \frac{360 \cdot 12,56}{2 \cdot 3.14 \cdot 12} \Rightarrow x \simeq 60$
- · Assim, o arco mede aproximadamente 60°.
- comprimento medida 12,56

• Medida em radiano:

$$x = \frac{2\pi \cdot 12,56}{2 \cdot \pi \cdot 12} = \frac{12,56}{12} \approx 1,047$$

· Assim, o arco mede aproximadamente 1,047 rad.

### Observação

Veja outro modo:

### Observação

Pela definição de radiano, poderíamos ter feito o cálculo assim:

comprimento medida

$$x = \frac{12,56}{12} \simeq 1,047$$

### **Exercícios propostos**

• Medida em grau:

comprimento

1. Estabeleça, em grau, a medida dos arcos de:

a) 
$$\frac{5\pi}{4}$$
 rad 225°

a)  $\frac{5\pi}{4}$  rad 225° b)  $\frac{7\pi}{6}$  rad 210° c)  $\frac{\pi}{2}$  rad 90°

- 2. Determine, em radiano, a medida dos arcos de:
  - a) 30°

**b)** 60°

e) 210°

- f) 240°
- 3. Determine, em grau e em radiano, a medida do arco que representa  $\frac{2}{5}$  da circunferência. 144°;  $\frac{4\pi}{5}$  rad

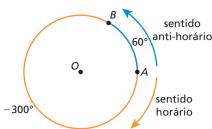
### Registre as respostas em seu caderno.

- 4. O ponteiro das horas de um relógio tem 7 cm de comprimento.
  - a) Quantos graus esse ponteiro percorre das 13 h às 17 h? Qual é essa medida em radiano?
  - b) Quantos centímetros sua extremidade percorre das 13 h às 17 h?  $\approx$  14,65 cm
- 5. Um pêndulo oscila e forma, entre suas posições extremas, um ângulo de 70°. Sabendo que esse pêndulo tem 25 cm de comprimento, calcule o comprimento aproximado do arco que ele descreve.

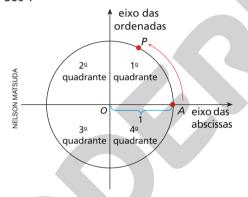
# Ciclo trigonométrico

Em uma circunferência pode-se adotar dois sentidos: o sentido horário e o sentido anti-horário. Na circunferência representada ao lado, sendo A o ponto de partida, estabelecemos:

- o sentido anti-horário para medidas positivas. Assim,  $med(\widehat{AB}) = 60^{\circ}$ .
- o sentido horário para medidas negativas. Assim. med $(\widehat{AB}) = -300^{\circ}$ .

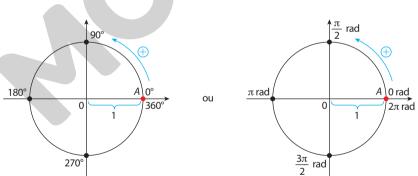


A circunferência trigonométrica, ou ciclo trigonométrico, tem centro na origem O(0, 0) de um plano cartesiano e raio de 1 unidade. O eixo das abscissas e o eixo das ordenadas do plano cartesiano dividem o ciclo em quatro quadrantes. No ciclo trigonométrico, o ponto A(1, 0) é a origem de todos os arcos, ou seja, é o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto P qualquer para determinar o arco AP (P é a extremidade do arco). Adotando o sentido anti-horário como positivo, associaremos, a cada ponto P da circunferência, a medida de  $\widehat{AP}$  tal que 0 rad  $\leq$  med $(\widehat{AP}) \leq 2\pi$  rad, ou  $0^{\circ} \leq \text{med}(\widehat{AP}) \leq 360^{\circ}$ .



Observe que a medida de um arco do 1º quadrante, por exemplo, está entre 0° e 90°. As intersecções entre os eixos e o ciclo trigonométrico são as extremidades dos

arcos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°.



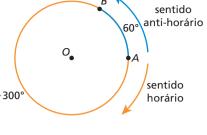
# Simetria no ciclo trigonométrico

Vamos estudar três tipos de simetria no ciclo trigonométrico: em relação ao eixo das ordenadas, em relação à origem O e em relação ao eixo das abscissas.

Na figura ao lado:

- P e P' são simétricos em relação ao eixo das ordenadas;
- P e P" são simétricos em relação à origem O;
- P e P''' são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Se as extremidades de dois arcos são pontos que apresentam uma dessas simetrias, dizemos que os arcos são arcos simétricos.



Observação

Daqui em diante, convencionamos que a notação  $\widehat{AB}$  representa um arco da circunferência orientada no sentido anti-horário, com origem em A e extremidade em B.

Os arcos com medida negativa e com medida maior que  $2\pi$  serão

abordados no próximo capítulo.

### Observação

No ciclo trigonométrico. pelo fato de o raio ser unitário, a medida de um arco em radiano é numericamente igual ao seu comprimento.



Se achar conveniente, repetir a pergunta para arcos do 3º e do 4º quadrantes

Entre quais valores, em grau, está a medida de um arco do 2º quadrante? E em radiano?

entre 90° e 180°; entre rad e  $\pi$  rad

### Observação

Ouando a extremidade P de um arco  $\widehat{AP}$  pertence a algum quadrante, dizemos que o arco  $\widehat{AP}$  é um arco desse quadrante.



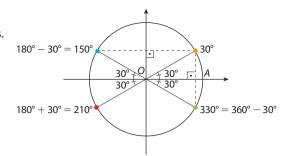
### Exemplo

Dado o arco de 30°, vamos obter as medidas de seus arcos simétricos. Observe o ciclo trigonométrico representado ao lado.

As medidas de seus arcos simétricos são:

- em relação ao eixo das ordenadas:  $180^{\circ} 30^{\circ} = 150^{\circ}$
- em relação à origem: 180° + 30° = 210°
- em relação ao eixo das abscissas:  $360^{\circ} 30^{\circ} = 330^{\circ}$

Esse mesmo raciocínio pode ser usado para outros arcos, medidos em grau ou em radiano.



### Exercício resolvido

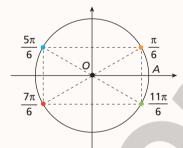
**R3.** Determinar as medidas, em radiano, dos arcos simétricos ao arco de  $\frac{\pi}{6}$  rad em relação ao eixo das ordenadas, à origem O e ao eixo das abscissas.

### ► Resolução

Os arcos simétricos ao arco de  $\frac{\pi}{6}$  medem:

- em relação ao eixo das ordenadas:  $\pi \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
- em relação à origem O:  $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
- em relação ao eixo das abscissas:  $2\pi \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Veja a solução gráfica no ciclo trigonométrico representado abaixo.



### Observação

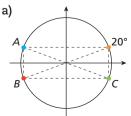
Registre as respostas em seu caderno.

Em um ciclo trigonométrico, quando um valor, sem unidade de medida, estiver associado a um ponto, subentende-se que esse valor representa a medida de um arco em radiano.

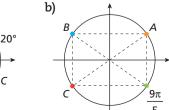
### Exercícios propostos

- **6.** Desenhe um ciclo trigonométrico e assinale os pontos que são extremidades dos arcos de 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° e 360°. Ver resolução no Guia do professor.
- 7. Considere o ciclo trigonométrico desenhado no exercício anterior. Determine, em radiano, as medidas dos arcos indicados no ciclo.

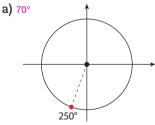
  Ver resolução no Guia do professor.
- 8. Calcule a medida dos arcos de extremidades A, B e C nos ciclos trigonométricos representados abaixo.  $A = \frac{\pi}{5}, B = \frac{4\pi}{5}, C = \frac{6\pi}{5}$

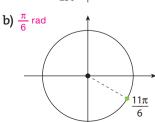


 $A = 160^{\circ}, B = 200^{\circ}, C = 340^{\circ}$ 



9. Obtenha a medida dos arcos do 1º quadrante que
 são simétricos aos arcos cujas medidas estão indicadas nas figuras.





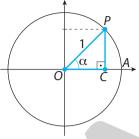
Uma maneira de resolver a atividade 9 se dá por meio do reconhecimento de padrões (um dos pilares do pensamento computacional) relacionados aos arcos simétricos. Pedir aos alunos que expliquem com as próprias palavras alguns padrões, por exemplo: qualquer simétrico de um arco do 1º quadrante em relação à origem pode ser obtido adicionando-se 180°; qualquer simétrico em relação ao eixo das ordenadas que estiver no 1º ou 2º quadrantes pode ser obtido subtraindo-se de  $\pi$  a medida do arco.

# 3 Seno, cosseno e tangente

Já estudamos o seno, o cosseno e a tangente de ângulos agudos em um triângulo retângulo. Agora, vamos ampliar esses conceitos para arcos da circunferência trigonométrica.

### 3.1 Seno e cosseno de um arco

Considere um arco  $\widehat{AP}$  de medida  $\alpha$  no 1º quadrante do ciclo trigonométrico. Lembrando que o ciclo tem raio unitário, no triângulo OPC, temos:



sen 
$$\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{CP}{OP} = \frac{CP}{1} = CP$$

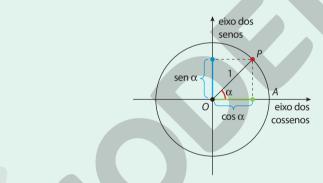
$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{OC}{OP} = \frac{OC}{1} = OC$$

Ou seja, nesse caso, o seno de  $\alpha$  corresponde à ordenada do ponto P, e o cosseno de  $\alpha$ . à abscissa de P.

Essa conclusão, obtida a partir de um arco do 1º quadrante, pode ser ampliada. Vamos definir seno e cosseno para qualquer arco do ciclo trigonométrico.

Nesta obra, não faremos distinção entre seno de um arco ou de um ângulo e seno da medida de um arco ou da medida de um ângulo.

Para todo arco  $\widehat{AP}$  do ciclo trigonométrico, de medida  $\alpha$  rad, com  $0 \le \alpha \le 2\pi$ , temos:



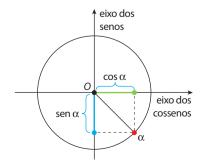
- seno de  $\alpha$  é a ordenada do ponto P;
- cosseno de  $\alpha$  é a abscissa do ponto P.

Assim, podemos chamar o eixo das ordenadas de eixo dos senos e o eixo das abscissas de eixo dos cossenos.

Note, portanto, que o seno e o cosseno podem ser positivos ou negativos, dependendo do quadrante ao qual o arco pertence.

### Exemplo

Vamos analisar o sinal do seno e do cosseno de um arco do  $4^{\circ}$  quadrante de medida  $\alpha$ .



Observando o ciclo, concluímos que:

- seno de  $\alpha$  é negativo (sen  $\alpha$  < 0);
- cosseno de  $\alpha$  é positivo (cos  $\alpha > 0$ ).

### Reflita

Determine o sinal do seno e do cosseno de arcos do:

- 1º quadrante; sen > 0; cos > 0
- 2º quadrante; sen > 0; cos < 0
- 3º quadrante.sen < 0; cos < 0</li>

USTRAÇÕES: ADILSON SECCO

#### Exercícios resolvidos

R4. Conside os senos dos arcos a seguir e escreva-os em ordem crescente.

$$\pi$$
,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{12}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$ ,  $\frac{10\pi}{9}$ 

#### ▶ Resolução

Como não aparece a unidade de medida, as medidas dos arcos estão em radiano. Para facilitar, podemos converter essas medidas em grau:

$$\pi=180^{\circ}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180^{\circ}}{3} = 120^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{180^{\circ}}{2} = 90^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{12} = \frac{180^{\circ}}{12} = 15^{\circ}$$

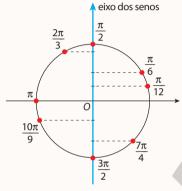
$$\frac{\pi}{6} = \frac{180^{\circ}}{6} = 30^{\circ}$$

$$\frac{7\pi}{4} = \frac{7 \cdot 180^{\circ}}{4} = 315^{\circ}$$

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \cdot 180^{\circ}}{2} = 270^{\circ}$$

$$\frac{10\pi}{9} = \frac{10 \cdot 180^{\circ}}{9} = 200^{\circ}$$

Agora, vamos representá-las no ciclo trigonométrico.

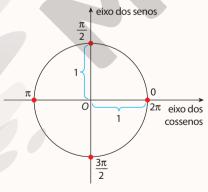


Observando o eixo dos senos, escrevemos os senos em ordem crescente:  $\sin\frac{3\pi}{2}$ ,  $\sin\frac{7\pi}{4}$ ,  $\sin\frac{10\pi}{9}$ ,  $\sin\pi$ ,  $\sin\frac{\pi}{12}$ ,  $\sin\frac{\pi}{6}$ ,  $\sin\frac{2\pi}{3}$ ,  $\sin\frac{\pi}{2}$ 

**R5.** Obter o seno e o cosseno de 0,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$ .

#### ► Resolução

Vamos representar essas medidas no ciclo trigonométrico.



Lembrando que o raio do ciclo vale 1, obtemos:

$$sen 0 = sen 2\pi = 0$$

$$\cos 0 = \cos 2\pi = 1$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$sen \pi = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

$$sen \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos\frac{3\pi}{2}=0$$

#### Reflita

 $\frac{10\pi}{9}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$  e  $\frac{3\pi}{2}$ 

Observe a figura representada ao lado. Quais das medidas representadas têm seno negativo?

#### Observação

Em um ciclo trigonométrico, sendo  $\alpha$  a medida de um arco, sempre teremos:

$$-1 \le \text{sen } \alpha \le 1$$

$$-1 \le \cos \alpha \le 1$$

#### Observação

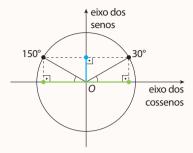
Vamos relembrar os valores do seno e do cosseno dos ângulos notáveis.

	$30^{\circ}$ ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou <u>π</u> 4	60° ou <u>π</u> 3
sen	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	<u>√3</u> 2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2

R6. Obter o seno e o cosseno de 150°.

#### ► Resolução

Vamos determinar esses valores por simetria no ciclo trigonométrico. Primeiro, marcamos o arco de 150° e seu correspondente no 1º quadrante.



Depois, observamos que:

- sen 150° é positivo e tem o mesmo valor que sen 30°;
- cos 150° é negativo e vale o oposto de cos 30°.

Como conhecemos os valores para 30°, concluímos que:

• sen 
$$150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

• 
$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Podemos aplicar raciocínio similar para arcos de outros quadrantes.

## **Exercícios propostos**

10. Indique o sinal das expressões.

11. Escreva os cossenos dos arcos abaixo em ordem crescente sem calcular seus valores.

$$\begin{array}{l} 0, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \pi \, e \, \frac{8\pi}{5} \\ \cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0 \end{array}$$

**12.** Dado sen  $55^{\circ} \simeq 0.8$ , calcule o valor aproximado de:

a) sen 
$$125^{\circ}$$

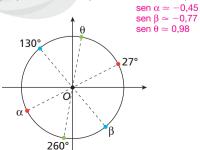
c) sen 
$$305^{\circ}$$
  
 $\approx -0.8$ 

**13.** Sabendo que cos  $25^{\circ} \simeq 0.9$ , registre o valor aproximado de:

b) 
$$\cos 205^{\circ}$$
  
 $\approx -0.9$ 

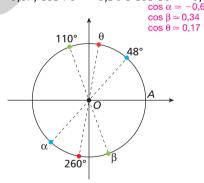
c) 
$$\cos 335^{\circ}$$
  
 $\approx 0.9$ 

**14.** Descubra os valores aproximados de sen  $\alpha$ , sen  $\beta$ e sen  $\theta$ , sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem O. (Dados:  $sen 27^{\circ} \simeq 0.45$ ;  $sen 50^{\circ} \simeq 0.77$  e  $sen 80^{\circ} \simeq 0.98$ )



#### Registre as respostas em seu caderno.

**15.** Descubra os valores aproximados de  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ e cos  $\theta$ , sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem O. (Dados:  $\cos 48^{\circ} \simeq 0.67$ ;  $\cos 70^{\circ} \simeq 0.34$  e  $\cos 80^{\circ} \simeq 0.17$ )



- $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$  **16.** Determine o seno dos arcos simétricos a  $\frac{\pi}{6}$  rad nos demais quadrantes.
- 17. Calcule o valor das expressões.

a) sen 
$$2\pi + \cos 2\pi + \sin \pi + \cos \pi$$
 o

**b)** 
$$\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}$$
 2

c) 
$$\sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6}$$
 0

d) 
$$\frac{\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{4\pi}{3}}{2 \cdot \sin\frac{5\pi}{6}}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

18. Para calcular o seno de  $\frac{2\pi}{5}$ , Edna alterou a configuração da calculadora do seu celular do modo grau para radiano. Digitando no painel a sequência de teclas:

 $\sin \left(\begin{array}{c|c} 2 & \times & \pi \\ \hline\end{array}\right) =$ 

obteve 0,9510565162951.

Assim, concluiu que sen  $\frac{2\pi}{5} \approx 0.95$ .

Agora, com a calculadora de um celular ou com uma calculadora científica, calcule os valores a seguir dando o resultado com três casas decimais.

a) sen 
$$\frac{\pi}{9}$$
 0,342

**b)** sen 
$$\frac{2\pi}{9}$$
 0,643 **c)** sen  $\frac{3\pi}{9}$  0,866

c) sen 
$$\frac{3\pi}{9}$$
 0,86

(Observação: O procedimento pode variar dependendo do modelo do aparelho. Em alguns, por exemplo, a medida deve ser digitada antes da tecla sin . Nas calculadoras científicas, também é preciso verificar se a unidade de medida utilizada - rad - está selecionada.)

19. Com base nos valores encontrados no exercício anterior, classifique cada igualdade em verdadeira ou falsa.

a) 
$$2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{9} = \text{sen } \frac{2\pi}{9}$$
 falsa

b) 
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{9} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{9} = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{9}$$
 falsa

- 20. Em que quadrantes os arcos têm seno e cosseno com mesmo sinal? Nesses quadrantes, para que valores de  $\alpha$  tem-se sen  $\alpha = \cos \alpha$ ? 1º quadrante:  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ; 3º quadrante:  $\alpha = \frac{5}{4}$
- **21.** Dê o valor de x, em grau, com  $0^{\circ} \le x \le 360^{\circ}$ , para

a) sen 
$$x = \frac{1}{2} x = 30^{\circ}$$
 ou  $x = 150^{\circ}$ 

**b)** 
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} x = 135^{\circ} \text{ ou } x = 225^{\circ}$$

# 3.2 Tangente de um arco

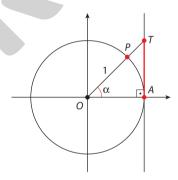
Considere o ciclo trigonométrico representado ao lado, um arco  $\widehat{AP}$  de medida  $\alpha$  do 1º quadrante e a reta perpendicular ao eixo das abscissas pelo ponto A. Prolongando o segmento  $\overline{OP}$ , obtemos na reta vertical o ponto T, conforme mostra a figura.

Lembrando que o ciclo trigonométrico tem raio unitário, no triângulo AOT, temos:

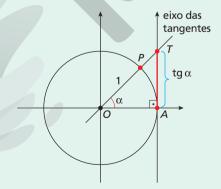
tg 
$$\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Note que, nesse caso, a tangente de  $\alpha$  corresponde à ordenada do ponto T.

Essa conclusão, obtida a partir de um arco do 1º quadrante, pode ser ampliada. Vamos definir tangente para qualquer arco do ciclo trigonométrico que não possua extremidade no eixo das ordenadas.



Considere um arco  $\widehat{AP}$  do ciclo trigonométrico, de medida  $\alpha$  rad, com  $0 \le \alpha \le 2\pi$ e  $\frac{\pi}{2} \neq \alpha \neq \frac{3\pi}{2}$ . Seja T o ponto de intersecção da reta  $\overrightarrow{OP}$  com a reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando pelo ponto A.



A tangente de  $\alpha$  é a ordenada do ponto T.

Vamos considerar a reta  $\overrightarrow{AT}$  o **eixo das tangentes**, com origem A e o mesmo sentido e a mesma unidade do eixo dos senos.

Observe, portanto, que a tangente pode ser positiva ou negativa, dependendo do quadrante ao qual o arco pertence.

#### Reflita

Vimos que, para qualquer valor  $\alpha$ , os valores de seno e cosseno estão contidos no intervalo:

$$-1 \leqslant sen \ \alpha \leqslant 1$$

$$-1 \le \cos \alpha \le 1$$

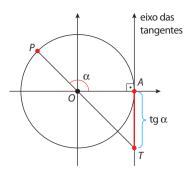
Observe a figura ao lado e responda: isso também é válido para tg α?

Espera-se que os alunos concluam que não há limitação para tg  $\alpha$ , uma vez que ela pode assumir qualquer valor real.

positiva: 1º e 3º quadrantes; negativa: 2º e 4º quadrantes

#### Exemplo

Considere um arco  $\widehat{AP}$  de medida  $\alpha$  do  $2^{\circ}$  quadrante. A intersecção do prolongamento do segmento  $\overline{OP}$  com o eixo das tangentes é o ponto  $T_{i}$ conforme mostra a figura ao lado. Observe que, nesse caso, to  $\alpha$  é negativa.



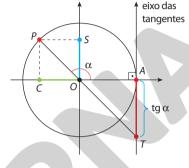
#### Observação

Dois triângulos são seme-Ihantes quando seus ângulos correspondentes têm mesma medida e seus lados correspondentes são proporcionais.

Observe a figura ao lado. Note que os triângulos AOT e COP são semelhantes. Então:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{CP}{OC} \Rightarrow \frac{AT}{1} = \frac{OS}{OC}$$

Assim, concluímos que, no ciclo trigonométrico, também vale a seguinte relação:



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998

$$tg \alpha = \frac{sen \alpha}{cos \alpha}$$

#### Observação

Note que a relação tg  $x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$  é coerente com o fato de a tangente não estar definida para  $x = \frac{\pi}{2}$  e  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Isso porque, para tais arcos, cos x vale 0, e assim teríamos uma divisão com o denominador zero, o que é impossível.

#### Exercícios resolvidos

R7. Considere as tangentes dos arcos a seguir, e escreva-as em ordem crescente.

$$\frac{\pi}{5}$$
,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{11\pi}{10}$  e  $\frac{15\pi}{8}$ 

#### ▶ Resolução

Inicialmente, vamos converter essas medidas em grau e, em seguida, representá-las no ciclo trigonométrico.

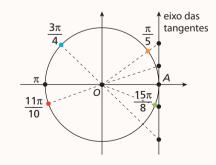
$$\pi = 180^{\circ}$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{180^{\circ}}{5} = 36^{\circ}$$

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^{\circ}}{4} = 135^{\circ}$$

$$\frac{11\pi}{10} = \frac{11 \cdot 180^{\circ}}{10} = 198^{\circ}$$

$$\frac{15\pi}{8} = \frac{15 \cdot 180^{\circ}}{8} = 337,5^{\circ}$$



Observando o eixo das tangentes, escrevemos as tangentes em ordem

$$tg\,\frac{3\pi}{4},tg\,\frac{15\pi}{8},tg\,\frac{11\pi}{10},tg\,\frac{\pi}{5}$$

Reflita

• tg 0 0 •  $tg \pi 0$ 

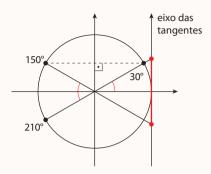
• tg 2π 0

e determine:

Observe a figura ao lado

#### ► Resolução

Vamos determinar esses valores por simetria no ciclo trigonométrico. Primeiro, marcamos no ciclo trigonométrico os arcos, seus correspondentes no  $1^{\circ}$  quadrante e os prolongamentos dos raios, até intersectarem o eixo das tangentes.



Depois, observamos que:

- tg 150° é negativa e tem valor oposto a tg 30°;
- tg 210° é positiva e tem o mesmo valor que tg 30°.

Como conhecemos o valor da tangente de 30°, concluímos que:

• tg 150° = 
$$-\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

• tg 210° = tg 30° = 
$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Podemos aplicar raciocínio similar para arcos de outros quadrantes.

#### Observação

Vamos relembrar os valores da tangente dos ângulos notáveis.

>		30° ou <u>π</u> 6	45° ou <u>π</u> 4	60° ou <u>π</u> 3
	tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	√3

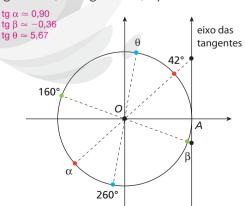
# **Exercícios propostos**

22. Indique o sinal das expressões:

a) 
$$(tg 40^{\circ} + tg 220^{\circ}) \cdot (tg 315^{\circ} + tg 165^{\circ})$$
 negativo

b) 
$$\frac{2 \cdot tg \frac{4\pi}{6} \cdot tg \frac{5\pi}{4}}{-2}$$
 positivo

23. Descubra os valores aproximados de tg  $\alpha$ , tg  $\beta$  e tg  $\theta$ , sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem O. (Dados: tg  $20^{\circ} \simeq 0,36$ ; tg  $42^{\circ} \simeq 0,90$  e tg  $80^{\circ} \simeq 5,67$ )



#### Registre as respostas em seu caderno.

- **24.** Dado tg  $35^{\circ} \simeq 0.7$ , registre o valor aproximado de:
  - a) tg  $145^{\circ} \simeq -0.7$
  - **b)** tg  $215^{\circ} \simeq 0.7$
  - c) tg  $325^{\circ} \simeq -0.7$
- 25. Escolha um ângulo de medida  $\alpha$ , com 0° <  $\alpha$  < 45°. Com auxílio de uma calculadora científica, calcule tg  $\alpha$  e tg  $2\alpha$ . Podemos afirmar que tg  $2\alpha$  = 2 · tg  $\alpha$ ? Espera-se que os alunos concluam que a Igualdade não é verdadeira. Ver resolução no Guia do professor.
- **26.** Considerando cos  $\alpha \simeq 0.84$  e sen  $\alpha \simeq 0.55$ , responda às questões.
  - a) Sem efetuar cálculos, apenas analisando os valores dados acima, verifique se o valor de  $tg \, \alpha \, \acute{\rm e}$  maior ou menor que 1. menor que 1
  - b) Determine o valor aproximado de tg  $\alpha$  e compare-o com a resposta do item anterior.
  - c) Em qual quadrante se encontra o arco de medida α? 1º quadrante
  - d) Determine o sinal de tg  $(\pi \alpha)$ , tg  $(\pi + \alpha)$  e tg  $(2\pi \alpha)$ . negativo; positivo; negativo
  - e) Determine os valores aproximados de tg  $(\pi \alpha)$ , tg  $(\pi + \alpha)$  e tg  $(2\pi \alpha)$ .

 $\simeq -0.65; \simeq 0.65; \simeq -0.65$ 

Observe o ciclo trigonométrico representado ao lado. O ponto P é extremidade do arco  $\widehat{AP}$  de medida  $\alpha$  rad; logo, P tem coordenadas cos  $\alpha$  e sen  $\alpha$ . Os lados do triângulo COP medem  $OC = \cos \alpha$ ,  $CP = \sin \alpha$  e OP = 1.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *COP*, obtemos a **relação fundamental da Trigonometria**:

$$sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$$

Vimos que essa relação é válida para um arco do 1º quadrante. Agora, vamos verificar se ela continua válida para arcos dos demais quadrantes.

#### 2º quadrante

- sen  $(\pi \alpha) = \text{sen } \alpha \Rightarrow \text{sen}^2 (\pi \alpha) = \text{sen}^2 \alpha$
- $\cos (\pi \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2 (\pi \alpha) = (-\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$ Então,  $\sin^2 (\pi - \alpha) + \cos^2 (\pi - \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

#### 3º quadrante

- $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2(\pi + \alpha) = (-\operatorname{sen}\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha$
- $\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2 (\pi + \alpha) = (-\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$  $\text{Então, } \sin^2 (\pi + \alpha) + \cos^2 (\pi + \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

#### 4º quadrante

- $sen (2\pi \alpha) = -sen \alpha \Rightarrow sen^2 (2\pi \alpha) = (-sen \alpha)^2 = sen^2 \alpha$
- $\cos{(2\pi \alpha)} = \cos{\alpha} \Rightarrow \cos^2{(2\pi \alpha)} = \cos^2{\alpha}$ Então,  $\sec^2{(2\pi - \alpha)} + \cos^2{(2\pi - \alpha)} = \sec^2{\alpha} + \cos^2{\alpha} = 1$

Verificamos, assim, que a relação é válida para um arco de qualquer quadrante.

Nos casos em que *P* pertence a um dos eixos, temos:

- $sen^2 0 + cos^2 0 = 0^2 + 1^2 = 1$ 
  - $sen^2 \pi + cos^2 \pi = 0^2 + (-1)^2 = 1$
- $sen^2 \frac{\pi}{2} + cos^2 \frac{\pi}{2} = 1^2 + 0^2 = 1$
- $sen^2 \frac{3\pi}{2} + cos^2 \frac{3\pi}{2} = (-1)^2 + 0^2 = 1$

Dessa forma, verificamos que para qualquer arco  $\widehat{AP}$  tal que med  $\widehat{(AP)} = \alpha$  rad, com  $0 \le \alpha \le 2\pi$ , a relação fundamental da Trigonometria é válida.

#### **Exercícios resolvidos**

**R9.** Sabendo que sen  $\alpha = 0.5$  e que  $\alpha$  é a medida de um arco do  $2^{\alpha}$  quadrante, obter cos  $\alpha$ .

#### ► Resolução

Podemos obter esse valor pela relação fundamental da Trigonometria:

$$sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$$

$$(0.5)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 0.75$$

Com auxílio de uma calculadora, obtemos:  $\cos \alpha \simeq \pm 0.87$ 

Como o arco é do  $2^{\circ}$  quadrante, concluímos que cos  $\alpha$  é negativo.

Logo,  $\cos \alpha \simeq -0.87$ .

**R10.** Sabe-se que  $\alpha$  é a medida de um arco do  $4^{\circ}$  quadrante e que tg  $\alpha=-2,4$ . Calcular sen  $\alpha$  e cos  $\alpha$ .

#### ► Resolução

$$tg \ \alpha = \frac{sen \ \alpha}{cos \ \alpha} = -2,4$$

$$sen \alpha = -2,4 \cdot cos \alpha$$

Substituindo o valor de sen  $\alpha$  na relação fundamental da Trigonometria, obtemos:

$$(-2,4\cdot\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$$

$$6,76 \cdot \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{100}{676}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{5}{13}$$

Como o arco é do  $4^{\circ}$  quadrante,  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ 

Substituindo  $\cos \alpha$  por  $\frac{5}{13}$  em sen  $\alpha = -2.4 \cdot \cos \alpha$ , temos sen  $\alpha = -\frac{12}{13}$ .

#### **Exercícios propostos**

- 27. Determine cos x sabendo que sen  $x = \frac{5}{13}$  e que x é um arco do 1º quadrante.  $\frac{12}{13}$
- **28.** Se cos x = 0.8 e x é um arco do  $4^{\circ}$  quadrante, determine:
  - a) sen x 0.6
- **b)** tg x 0.75
- **29.** Se  $\alpha$  é um arco do 3º quadrante e tg  $\alpha = \frac{4}{2}$ , determine:
  - a) sen  $\alpha = 0.8$
- b)  $\cos \alpha = 0.6$
- **30.** Verifique se, para um arco de medida  $\alpha$ , é possível que sen  $\alpha = 0.8$  e cos  $\alpha = 0.4$ . não

Esse tópico visa favorecer o desenvolvimento da habilidade EM13MAT308 da BNCC no que se refere à aplicação das leis do seno e do cosseno na resolução e na elaboração de problemas que envolvem triângulos.

# 4 Trigonometria em um triângulo qualquer

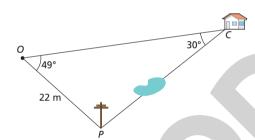
Vimos o cálculo das razões trigonométricas de ângulos obtusos. Agora, aplicaremos esse conhecimento em um triângulo gualguer.

#### 4.1 Lei dos senos

Acompanhe a situação a seguir.

Um fio elétrico será instalado entre um poste P e uma casa C, separados por um lago em um terreno plano. Como calcular o comprimento de fio necessário?

Observe o esquema que representa essa situação.



Se achar conveniente. realizar um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Tecnologias, construindo um teodolito caseiro (há vários modelos disponíveis na internet, pedir aos instrumento de medição elaboração de hipóteses, ou avaliando e justificando situações-problema sob

Ciências da Natureza e suas alunos que pesquisem), um que poderá ser utilizado na uma perspectiva científica,

o que favorece o desenvolvimento da habilidade EM13CNT301, que faz parte da competência específica 3, e também vem ao encontro do tema contemporâneo ciência e tecnologia.

Topógrafa usando um teodolito.

De acordo com o dicionário

Houaiss, teodolito é um ins-

trumento de precisão para

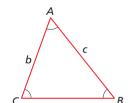
medir ângulos horizontais

e ângulos verticais, muito

empregado em trabalhos

geodésicos e topográficos.

Observação



As medidas dos ângulos, apresentadas no esquema, foram obtidas com o auxílio de um teodolito. Para obtermos o comprimento PC do fio, podemos aplicar a lei dos senos, apresentada a seguir.

Em um triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, isto é:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

#### Demonstração

Considere um triângulo qualquer ABC, com altura de medida h relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

Temos: sen 
$$\hat{C} = \frac{h}{b}$$
, ou  $h = b \cdot \text{sen } \hat{C}$ , e sen  $\hat{B} = \frac{h}{c}$ , ou  $h = c \cdot \text{sen } \hat{B}$ 

Portanto: 
$$b \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{B}$$
, ou  $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$  (I)

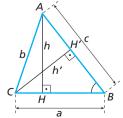
Considere agora a altura de medida h', relativa ao lado  $\overline{AB}$ .

Temos: sen 
$$\hat{A} = \frac{h'}{b}$$
, ou  $h' = b \cdot \text{sen } \hat{A}$ , e sen  $\hat{B} = \frac{h'}{a}$ , ou

$$h' = a \cdot \text{sen } \hat{R}$$

Portanto: 
$$b \cdot \text{sen } \hat{A} = a \cdot \text{sen } \hat{B}$$
, ou  $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$  (II)

De (I) e (II), obtemos: 
$$\frac{a}{\operatorname{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen } \hat{C}}$$



#### Observação

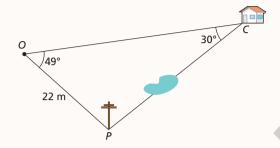
Na demonstração ao lado, usamos um triângulo acutângulo, mas é possível demonstrar a lei dos senos também para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo.

#### Exercícios resolvidos

**R11.** Retomar a situação da página anterior e calcular, aproximadamente, o comprimento de fio necessário para unir o poste à casa.

#### ► Resolução

Temos o seguinte esquema:



Pela lei dos senos:

$$\frac{PC}{\sin 49^{\circ}} = \frac{OP}{\sin 30^{\circ}}$$

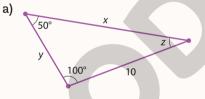
Em uma calculadora, obtemos: sen 49°  $\simeq$  0,75°

Assim

$$\frac{PC}{0,75} \simeq \frac{22}{0,5} \Rightarrow PC \simeq \frac{22 \cdot 0,75}{0,5} \Rightarrow PC \simeq 33$$

Portanto, são necessários cerca de 33 m de fio para unir o poste à casa.

**R12.** Considerando os valores do quadro abaixo, calcular as medidas x, y e z em cada item.



b)	X 8
	60°
	7,4 \ z
	y

α	sen $\alpha$
20°	0,34
30°	0,50
40°	0,64
50°	0,77
60°	0,87
70°	0,94
80°	0,98

#### ► Resolução

a) Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, calculamos o valor de z:

$$z = 180^{\circ} - 100^{\circ} - 50^{\circ} = 30^{\circ}$$

Observando o triângulo, pela lei dos senos, podemos escrever:

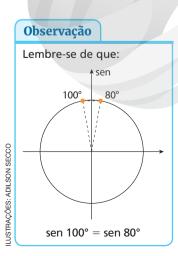
$$\frac{10}{\text{sen } 50^{\circ}} = \frac{x}{\text{sen } 100^{\circ}} = \frac{y}{\text{sen } 30^{\circ}}$$

Agora, calculamos cada uma das incógnitas separadamente:

$$\frac{10}{\sin 50^{\circ}} = \frac{x}{\sin 100^{\circ}} \Rightarrow \frac{10}{0,77} \simeq \frac{x}{0,98} \Rightarrow x \simeq 12,7$$

$$\frac{10}{\sin 50^{\circ}} = \frac{y}{\sin 30^{\circ}} \Rightarrow \frac{10}{0,77} \approx \frac{y}{0,5} \Rightarrow y \approx 6,5$$

Assim,  $x \simeq 12,7$ ,  $y \simeq 6,5$  e  $z = 30^{\circ}$ .



$$\frac{7,4}{\text{sen }60^{\circ}} = \frac{8}{\text{sen }y} = \frac{z}{\text{sen }x}$$

Primeiro, vamos calcular a medida y:

$$\frac{7.4}{\text{sen }60^{\circ}} = \frac{8}{\text{sen }y} \Rightarrow \frac{7.4}{0.87} = \frac{8}{\text{sen }y} \Rightarrow \text{sen }y \approx 0.94$$

Observando o quadro dado, concluímos que y  $\simeq 70^{\circ}$ .

Agora, podemos calcular a medida x:

$$x \simeq 180^{\circ} - 60^{\circ} - 70^{\circ} = 50^{\circ} \Rightarrow x \simeq 50^{\circ}$$

Finalmente, calculamos z:

$$\frac{7,4}{\text{sen }60^{\circ}} = \frac{z}{\text{sen }x} \Rightarrow \frac{7,4}{0,87} \approx \frac{z}{\text{sen }50^{\circ}} \Rightarrow \frac{7,4}{0,87} \approx \frac{z}{0,77} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z \approx \frac{7,4 \cdot 0,77}{0.87} \Rightarrow z \approx 6,55$$

Portanto,  $x \simeq 50^{\circ}$ ,  $y \simeq 70^{\circ}$  e  $z \simeq 6,55$ .

#### Observação

Algumas calculadoras têm a tecla sin-1, que fornece a medida do ângulo após a digitação do seno desse ângulo. Por exemplo, se não tivéssemos o quadro, poderíamos encontrar o valor de y digitando:



Nesse caso, obteríamos, aproximadamente, 70°.

O procedimento apresentado pode variar dependendo do modelo da calculadora. Orientar os alunos caso tragam calculadoras que funcionem de modo diferente do apresentado.

Em algumas calculadoras, por exemplo, é necessário digitar primeiro a tecla sin<sup>-1</sup> e depois o valor do seno do ângulo que

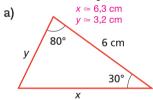
queremos determinar.

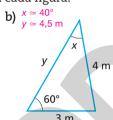
#### **Exercícios propostos**

#### Registre as respostas em seu caderno.

Na resolução dos exercícios a seguir, se necessário, utilize uma calculadora ou o quadro apresentado no exercício R12.

**31**. Calcule o valor aproximado de *x* e *y* em cada figura.





**32.** No esquema a seguir estão representados o posicionamento da casa, do pomar, da entrada e do jardim da propriedade de Márcia.



- a) Determine a distância aproximada entre a casa e a entrada. ~ 17,6 m
- b) Como entre a casa e a entrada existe um lago, verifique algebricamente qual dos caminhos alternativos é o mais curto para ir da entrada até a casa.

Caminho 1: entrar, passar pelo pomar e seguir até a casa.

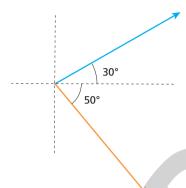
Caminho 2: entrar, passar pelo jardim e seguir até a casa. O caminho 1 é o mais curto (aproximadamente 21,4 m contra 24,1 m do caminho 2).

33. Um paralelogramo tem lados de medidas 3,5 cm e 4,3 cm. Uma de suas diagonais forma com o menor lado um ângulo de 70°. Qual é a medida aproximada dessa diagonal?  $\approx$  3,95 cm

ADILSON SECCO

- 34. Um navio é visto no mar por dois pontos de observação, A e B, localizados na costa, distantes 50 km um do outro. O ângulo formado pelo segmento AB e o segmento que une o navio ao ponto de observação A é 35°. O ângulo formado pelo segmento AB e o segmento que une o navio ao ponto de observação B é 45°. Qual é a distância aproximada entre o navio e o ponto de observação A? ≈ 36,2 km
- **35.** Reúna-se com um colega e resolvam o exercício a seguir.

Dois nadadores partiram do mesmo ponto de uma lagoa, ao mesmo tempo, e nadaram à velocidade de 0,2 m/s. Um dos nadadores foi na direção 30° nordeste, e o outro, na direção 50° sudeste, conforme o diagrama abaixo.



Qual será a distância aproximada entre os nadadores após 5 minutos de viagem?

≃ 76,36 m

#### 4.2 Lei dos cossenos

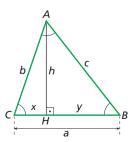
O teorema de Pitágoras relaciona a medida dos três lados de um triângulo, mas é válido apenas para triângulos retângulos. A lei dos cossenos (apresentada a seguir) relaciona os três lados de um triângulo qualquer, conhecendo a medida de um de seus ângulos internos.

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o dobro do produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo formado por esses lados, isto é:

$$a^{2} = b^{2} + c^{2} - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^{2} = a^{2} + c^{2} - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^{2} = a^{2} + b^{2} - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Demonstração

Considere um triângulo ABC qualquer e sua altura  $\overline{AH}$  relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

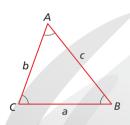


Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHB, temos:

$$c^2 = h^2 + y^2$$
 ou  $c^2 = h^2 + (a - x)^2$ 

Do triângulo AHC, temos:

$$h = b \cdot \operatorname{sen} \hat{C} e x = b \cdot \cos \hat{C}$$



#### Observação

Na demonstração ao lado, usamos um triângulo acutângulo, mas é possível demonstrar a lei dos cossenos também para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo. No caso do triângulo retângulo, a demonstração se reduz ao teorema de Pitágoras.

As demonstrações das leis do seno e do cosseno empregam recursos e estratégias que propiciam o entendimento dessas proposições, favorecendo o desenvolvimento da competência específica 5 da BNCC.

Assim:

$$c^{2} = (b \cdot \operatorname{sen} \hat{C})^{2} + (a - b \cdot \cos \hat{C})^{2}$$

$$c^{2} = b^{2} \cdot \operatorname{sen}^{2} \hat{C} + a^{2} - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} + b^{2} \cdot \cos^{2} \hat{C}$$

$$c^{2} = b^{2} \cdot (\operatorname{sen}^{2} \hat{C} + \cos^{2} \hat{C}) + a^{2} - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

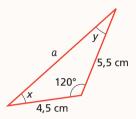
Como sen²  $\hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1$ , concluímos que:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$ 

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} = b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

#### Exercício resolvido

R13. Determinar a medida a indicada no triângulo abaixo.



#### ► Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

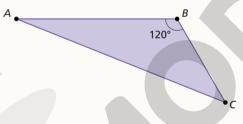
$$a^2 = (5,5)^2 + (4,5)^2 - 2 \cdot 5,5 \cdot 4,5 \cdot \cos 120^\circ$$

Como cos  $120^{\circ} = -\cos 60^{\circ} = -0.5$ , encontramos:

$$a^2 = 30,25 + 20,25 + 24,75 \Rightarrow a^2 = 75,25 \Rightarrow a \approx 8,7$$

Logo, a vale aproximadamente 8,7 cm.

**R14.** Considere o triângulo ABC a seguir. Determine a medida do lado BC, dado que AB = 10 cm e AC = 14 cm.



#### ► Resolução

Para simplificar a notação, chamaremos o lado  $\overline{BC}$  de x.

Pela lei dos cossenos, temos:

$$14^2 = 10^2 + x^2 - 2 \cdot 10 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$$

$$196 = 100 + x^2 - 20 \cdot x \cdot (-0.5)$$

$$x^2 - 10x - 96 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-96) =$$

$$= 100 + 376 = 484$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{484}}{2}$$

$$x = \frac{-10 \pm 22}{}$$

$$x = \frac{-10 + 22}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

ou

$$x = \frac{-10 - 22}{2} = \frac{-32}{2} = -16$$

Como queremos determinar a medida do lado de um triângulo, só a raiz positiva da equação nos convém.

Portanto, a medida do lado BC é igual a 6 cm.

#### Reflita

No triângulo do exercício **R13**, é possível calcular *x* e *y* ? Como?

Podemos calcular x e y aplicando a lei dos senos, após ter encontrado o valor de a.

$$\frac{8,7}{\text{sen }120^{\circ}} = \frac{5,5}{\text{sen }x} = \frac{4,5}{\text{sen }y}$$

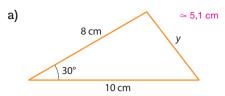
$$\frac{5}{\text{sen }x} \approx 0,55 \Rightarrow x \approx 33^{\circ}$$

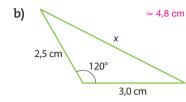
$$\frac{5}{\text{sen }y} \approx 0,45 \Rightarrow y \approx 27^{\circ}$$

#### **Exercícios propostos**

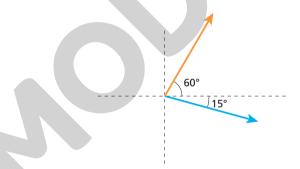
Registre as respostas em seu caderno.

36. Calcule o valor aproximado da incógnita em cada item.



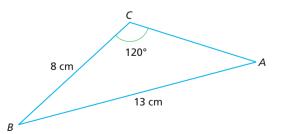


- **37.** Um triângulo possui lados medindo 8 cm e 11 cm. Sabendo que o ângulo interno formado entre esses lados mede 135°, descubra a medida aproximada do terceiro lado. ≈ 17,6 cm
- 38. Um triângulo tem lados medindo 2 cm, 3,5 cm e 5 cm.
  - a) Seja  $\alpha$  o ângulo formado entre os lados de medidas 2 cm e 3,5 cm. Pela lei dos cossenos, calcule o valor de cos  $\alpha$ . Por esse valor, podemos concluir que o triângulo é retângulo, acutângulo ou obtusângulo?  $\cos \alpha = -\frac{5}{\circ}$ ; obtusângulo
  - b) Com auxílio de uma régua e compasso, faça um esboço desse triângulo. Ver resolução no Guia do professor.
- **39.** Os lados de um paralelogramo têm medidas 50 cm e 70 cm. Calcule a medida de cada diagonal desse paralelogramo sabendo que seu maior ângulo interno mede  $105^{\circ}$ . (Dado:  $\cos 75^{\circ} \simeq 0.26$ )  $\approx 96$  cm,  $\approx 74.7$  cm
- **40.** Dois navios saíram do porto de Santos às 8 h da manhã. Um dos navios viajou na direção 60° nordeste à velocidade de 24 nós. O outro navio viajou na direção 15° sudeste à velocidade de 18 nós, conforme o esquema abaixo.



Sabendo que cos 75°  $\simeq$  0,26, descubra a distância, em quilômetro, entre os navios ao meio-dia. (*Observação*: 1 nó é uma unidade de medida de velocidade equivalente a 1.852 m/h.)  $\simeq$  192,5 km

41. No triângulo ABC, determine a medida do lado AC.7 cm



**42.** Um triângulo tem lados de medida AB = 15 cm, BC = 21 cm e AC = 24 cm. Qual é a medida do ângulo formado entre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ ? 60°

# **Exercícios complementares**

#### Registre as respostas em seu caderno.

#### **Aplicação**

- 1. Em uma circunferência de 8 m de diâmetro, toma-se um arco de 15,7 m de comprimento. Considerando  $\pi=3,14$ , determine a medida do ângulo correspondente a esse arco, em grau. 225°
- 2. Qual é o valor aproximado do raio de um arco de circunferência que mede 300° e tem comprimento de 200 m? = 38.22 m
- 3. Calcule a medida, em radiano, de um ângulo de 140°.
- **4.** Um ângulo central de uma circunferência de 5 cm de raio determina sobre ela um arco de 7 cm. Calcule a medida desse ângulo em radiano. 1,4 rad

#### Exercício resolvido

**R15.** Determinar a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 11 h 45 min.

#### ► Resolução

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Na figura abaixo, observamos que o ângulo procurado mede ( $\alpha + 60^{\circ}$ ).



A cada intervalo de 60 min, o ponteiro das horas percorre 30°.

Usando regra de três, calculamos  $\alpha$ :

$$\frac{30^{\circ}}{\alpha} = \frac{60}{45} \Rightarrow \alpha = 22,5^{\circ}$$

Assim:

$$\alpha + 60^{\circ} = 22.5^{\circ} + 60^{\circ} = 82.5^{\circ} = 82^{\circ}30'$$

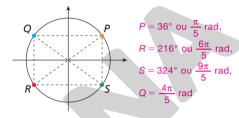
Portanto, a medida do menor ângulo é 82°30'.

- 5. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2 h 20 min? 50°
- 6. Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 16 h 15 min? 37°30'
- 7. Considerando sen  $32^{\circ} = 0,53$ , calcule o valor de:
  - a) sen 148° 0,53
  - b) sen 212° -0,53
  - c) sen  $328^{\circ}$  -0,53

**8.** Considere as tangentes dos arcos a seguir e escreva-as em ordem decrescente.

$$\frac{\pi}{12}$$
,  $\frac{7\pi}{12}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{23\pi}{12}$  tg  $\frac{7\pi}{6}$ , tg  $\frac{\pi}{12}$ , tg  $\frac{23\pi}{12}$ , tg  $\frac{7\pi}{12}$ 

9. Determine a medida, em grau e em radiano, dos ângulos indicados por P, Q, R e S no ciclo trigonométrico representado abaixo, sabendo que a medida do ângulo Q, em grau, é 144.



10. Calcule o valor de:

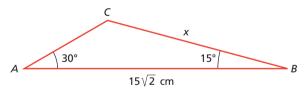
a) sen 
$$\frac{5\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{4} - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$$

b) 
$$\cos \frac{2\pi}{3} - tg \frac{7\pi}{6} \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{6}$$

- 11. Se  $\theta$  é a medida, em radiano, de um arco do  $3^{\circ}$  quadrante e sen  $\theta = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ , quanto vale tg  $\theta$ ?  $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- 12. Dado sen  $\alpha = 0.8$ , sendo  $\alpha$  um arco do  $1^{\circ}$  quadrante, determine o que se pede em cada item.

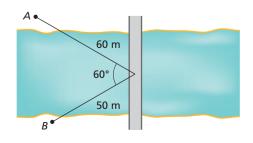
a) sen 
$$(\pi - \alpha)$$
 0,8 b) sen  $(\pi + \alpha)$  -0,8 c) sen  $(2\pi - \alpha)$  -0,8

- 13. Que arcos, entre 0 e  $2\pi$ , têm cosseno igual a  $-\frac{1}{2}$ ? Esboce o ciclo trigonométrico em seu caderno e mostre esses arcos.  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$  Ver resolução no Guia do professor.
- 14. Considere o triângulo representado abaixo.

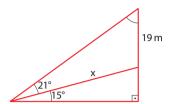


Calcule o valor de x. 15 cm

15. De uma ponte, um engenheiro observa dois edifícios, um em cada margem de um rio. O edifício A está a 60 m de distância do engenheiro, e o edifício B, a 50 m. Considerando as medidas indicadas na figura abaixo, determine a distância entre os edifícios A e B. ≈ 55,7 m



16. No pico de uma montanha, há uma torre de 19 m de altura. Ao fazer medições em determinado ponto da região, um topógrafo obtém 36° para o ângulo de visão até o topo da torre e 15° para o ângulo de elevação até a base da torre, conforme mostra a figura abaixo.



Qual é a distância aproximada entre o topógrafo e a base da torre? (Dados: sen 21°  $\simeq$  0,36 e sen 54°  $\simeq$  0,81)  $\simeq$  42.75 m

- 17. Considerando x um arco do 1º quadrante e  $\cos x = \frac{1}{3}$ , determine:
  - **a)** sen  $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ADILSON SECCO

- b) tg x  $2\sqrt{2}$
- 18. Sendo  $\cos x = \frac{3}{5}$ , com  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , calcule o valor de:

a) sen  $x \frac{4}{5}$ 

**b)**  $tg x \frac{4}{3}$ 

#### **Aprofundamento**

19. Um terreno triangular situado em uma esquina tem 6 m de frente para a rua Flores e 10 m de frente para a rua dos Pêssegos. O ângulo formado entre essas duas ruas é 60°. A distância do terreno ao Hospital do Centro é 2 km e a distância entre a doceria das Marias e a Escola Dr. Carlos Guimarães é 500 m. Qual é a medida do terceiro lado do terreno? ≈ 8,7 m Após resolver o problema, responda às questões

a seguir.

• Há dados suficientes para a resolução do proble-

Há dados suficientes para a resolução do problema? Se os dados não foram suficientes, qual(is) dado(s) faltou(aram)? sim
 Todos sa informações foram utilizados no resolu.

Todas as informações foram utilizadas na resolução do problema? Se nem todas as informações foram utilizadas, quais foram descartadas?
 Algumas informações foram descartadas, como as distâncias do terreno ao hospital e da doceria à escola.

- 20. Em um triângulo, temos um ângulo de medida 45° oposto a um lado de medida 36, um ângulo de medida  $\beta$  oposto ao lado de medida  $18\sqrt{6}$  e um ângulo de medida  $\alpha$  oposto a um lado de medida desconhecida.
  - a) Aplicando a lei dos senos, encontre o valor de sen  $\beta$ . sen  $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
  - b) Com base na resposta do item anterior, podemos concluir que há dois valores possíveis para β. Quais são esses valores? 60° ou 120°
  - c) Determine os possíveis valores de  $\alpha.75^{\circ}$  ou 15°

- d) Pelos itens anteriores, concluímos que há duas possibilidades de formato para esse triângulo. Faça o esboço delas. Ver resolução no Guia do professor.
- 21. Elabore um problema que utilize a lei dos cossenos em sua resolução. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema elaborado por você e você resolve o dele. Depois, converse com sua dupla sobre os

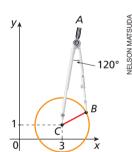
o dele. Depois, converse com sua dupla sobre os problemas elaborados e suas resoluções, refletindo sobre as questões a seguir. resposta pessoal

- Você conseguiu resolver o problema elaborado por seu colega?
- Faltaram dados para a resolução? Nesse caso, quais informações faltaram?
- Havia excesso de informação? Quais informações não fazem parte da resolução do problema?
   Após as discussões, reescrevam os problemas com as adequações que julgar conveniente.

#### **Desafio**

22. (Enem) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um

plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	0 < R ≤ 5
II	5 < R ≤ 10
III	10 < R ≤ 15
IV	15 < R ≤ 21
V	21 < R ≤ 40

Considere 1,7 como aproximação para  $\sqrt{3}$ .

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será alternativa d

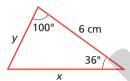
- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) IV.
- e) V.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998

- 1. Em uma circunferência com 12 cm de raio, um arco de 120° tem aproximadamente cm de comprimento. alternativa d
  - a) 20
- **b)** 22
- c) 24
- d) 25
- 2. A medida 210° é equivalente a rad. a)  $\frac{5\pi}{6}$  b)  $\frac{2\pi}{6}$  c)  $\frac{7\pi}{6}$  alternativa c  $\frac{2\pi}{6}$

- 3. Um arco de  $\frac{11\pi}{12}$  rad pertence ao quadrante. a) 1º b) 2º c) 3º d) 4º **c)** 3º
- **4.** Os arcos simétricos de  $\frac{2\pi}{9}$  rad, respectivamente aos eixos x e y e à origem O, medem: alternativa b
  - a) 320°; 220°; 140°
- c) 340°; 160°; 200°
- b)  $\frac{16\pi}{9}$ ;  $\frac{7\pi}{9}$ ;  $\frac{11\pi}{9}$
- d)  $\frac{7\pi}{9}$ ;  $\frac{11\pi}{9}$ ;  $\frac{16\pi}{9}$
- 5. Qual das seguintes expressões resulta em um número positivo? alternativa d
  - a) sen  $210^{\circ} + \cos 150^{\circ}$
- c) cos 270° · sen 125°
- **b)** tg 150° tg 225°
- d) sen 240° · cos 110°
- **6.** O seno e o cosseno de  $\frac{13\pi}{7}$  são, respectivamente, iguais a: alternativa c
  - a) sen  $\frac{\pi}{7}$  e cos  $\frac{\pi}{7}$
- c) –sen  $\frac{\pi}{7}$  e cos  $\frac{\pi}{7}$
- **b)** sen  $\frac{\pi}{7}$  e  $-\cos \frac{\pi}{7}$  **d)**  $-\sin \frac{\pi}{7}$  e  $-\cos \frac{\pi}{7}$
- 7. O seno de  $\frac{\pi}{6}$  é igual a cos e sen elementos e sen
- b)  $\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{7\pi}{6}$
- d)  $\frac{2\pi}{3}$ ;  $\frac{11\pi}{6}$

- **8.** Se  $\cos \alpha = 0.8$  e  $\alpha$  é medida de um arco do  $4^{\circ}$  quadrante, então tg  $\alpha$  é igual a: alternativa a
  - a) -0.75
  - **b)** -0.6
  - c) -1,33...
  - **d)** 0,75
- 9. Considere a figura a seguir.



Nesse triângulo, pode-se afirmar que: alternativa d

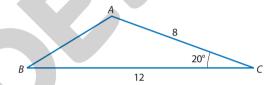
a) 
$$x = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 44^{\circ}}{\text{sen } 100^{\circ}}\right) \text{cm}$$

c) 
$$y = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 36^{\circ}}{\text{sen } 100^{\circ}}\right) \text{cm}$$

b) 
$$x = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 36^{\circ}}{\text{sen } 44^{\circ}}\right) \text{cm}$$

d) 
$$y = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 36^{\circ}}{\text{sen } 44^{\circ}}\right) \text{cm}$$

10. Observe o triângulo representado abaixo.



Sabendo que cos  $20^{\circ} \simeq 0,94$ , o valor mais próximo para AB é: alternativa c

a) 3,25

c) 5,25

**b)** 4,25

d) 6,25

#### Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

				N	úmero d	a questá	io			
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Calcular o comprimento e a medida de um arco, em grau e em radiano.	Χ	Х								
Conhecer o ciclo trigonométrico e os arcos simétricos.			Х	Х	Х	Х	Х			
Ampliar as razões trigonométricas para ângulos com medidas maiores que 90°.					Х	Х	Х			
Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.								х		
Aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.									Х	х
Páginas do livro referentes ao conceito	57 a 59	57 a 59	60 e 61	60 e 61	62 a 69	62 a 69	62 a 69	68 e 69	69 a 74	69 a 74

**CAPÍTULO** 

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências 1, 4 e 5; habilidades EM13MAT101, EM13MAT306, EM13MAT315 e EM13MAT404.

4

# Funções trigonométricas



A fotografia menor retrata a praia de Taipu de Fora, Maraú – BA. A fotografia principal retrata a formação de piscinas naturais com a maré baixa. Fotos de 2018.

O contexto que apresenta este tópico envolve alta e baixa das marés, fenômeno periódico natural, aqui modelado pela função cosseno, além da utilização de conceitos e de procedimentos matemáticos para interpretar situações das Ciências da Natureza, favorecendo, assim, o desenvolvimento da habilidade

EM13MAT306 e da competência específica

1. Nesse sentido, pode-se fazer um trabalho
interdisciplinar, promovendo o desenvolvimento
da habilidade EM13CNT204 e da competência
específica 2 da área de Ciências da Natureza e
suas Tecnologias, por exemplo, em discussões
sobre previsões e cálculos a respeito dos
movimentos das marés, com base na análise das
interações gravitacionais. Também é favorecido
o desenvolvimento da habilidade EM13CNT101,
que faz parte da competência específica 1, com
a observação e a análise das transformações do

#### Reflita

Imagine o ciclo trigonométrico visto no capítulo anterior e responda:

- Qual é o valor máximo de cos x? Para quais valores de x isso ocorre? 1; para x = 0 e x
- Qual é o valor mínimo de cos x? Para qual valor de x isso ocorre? –1; para x = π

# D Funções periódicas

Muitos fenômenos naturais, físicos e sociais têm comportamento cíclico, ou periódico (isto é, que se repetem a cada determinado período de tempo), podendo ser modelados por **funções trigonométricas**. Isso significa que essas funções são capazes de representar, de modo aproximado, as oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de tempo.

A maré – movimento de descida e de subida do nível das águas – é um exemplo de fenômeno periódico devido à força gravitacional exercida pela Lua e pelo Sol na Terra. Acompanhe a situação a seguir.

Em uma cidade litorânea do Nordeste brasileiro, em determinada época do ano, a maré baixa acontece por volta das 12 h e das 24 h, e a maré alta ocorre por volta das 6 h e das 18 h. A função trigonométrica a seguir modela, de modo aproximado, a altura h da maré (em metro) nessa época:

 $h(t) = 1,15 - 1,05 \cdot \cos\left(t \cdot \frac{\pi}{6}\right)$ , em que o tempo (t) é medido em hora a partir da meia-noite.

- ambiente e de seus movimentos para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações do cotidiano, promovendo o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas. Aproveitar a temática da abertura e reforçar com os alunos a importância de se preservar os recursos naturais. Eles devem sentir-se responsáveis pela preservação dos ambientes naturais, que dizem respeito aos aspectos econômicos, sociais, políticos, ecológicos e éticos, com base em um contexto de **educação ambiental**.

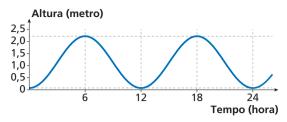
Em diversas cidades do litoral brasileiro, com o fenômeno da maré baixa, formam-se piscinas naturais que atraem turistas de diversas regiões, como é o caso da Península de Maraú na praia de Taipu de Fora (BA). Por conta disso, muitas dessas cidades vivem em função do turismo, o que, algumas vezes, torna difícil a tarefa de preservar a região.

Faça uma pesquisa sobre turismo sustentável e cite algumas atitudes que podem ser tomadas por turistas para a preservação do local que estão visitando. Comunique à turma as atitudes que você relacionou e iniciem uma discussão sobre o tema.

Esse boxe trata do tema contemporâneo educação ambiental. Os alunos podem pesquisar na internet usando a palavra-chave: turismo sustentável. Há vários sites que tratam desse assunto, incluindo o do Ministério do Turismo, que disponibilizou uma cartilha sobre turismo sustentável. Se julgar conveniente, incentivar os alunos a elaborar uma cartilha com atitudes sustentáveis de turismo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe que essa função descreve o comportamento periódico da maré, como mostra o gráfico a seguir.



Note que o gráfico "se repete" a cada 12 horas, assim como a altura da maré. Também é possível concluir que:

- a maré alta atinge 2,2 m de altura (ocorre às 6 h e às 18 h);
- a maré baixa tem 0,1 m de altura (ocorre às 0 h e às 12 h).

Pela lei da função, também podemos verificar algebricamente essas conclusões. Por exemplo, às 0 h e às 6 h, temos:

$$h(0) = 1,15 - 1,05 \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

$$h(0) = 1,15 - 1,05 \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

$$h(0) = 1,15 - 1,05 \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

$$h(0) = 1,15 - 1,05 \cdot \cos\left(\pi\right)$$

$$h(0) = 1,15 - 1,05 \cdot \cos\left(\pi\right)$$

$$h(0) = 1,15 - 1,05 \cdot (-1)$$

$$h(0) = 0,1$$

Além do nível das marés, muitos outros fenômenos apresentam comportamento periódico, como as variações da temperatura terrestre e da pressão sanguínea, a propagação do som, entre outros.

Neste capítulo, vamos estudar as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente – exemplos típicos de funções periódicas –, as quais surgem com frequência na modelagem matemática de fenômenos que apresentam periodicidade, como é o caso das marés.

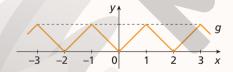
# Definição de função periódica

Uma função  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  é chamada de **função periódica** quando existe um número real positivo p tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , f(x) = f(x + p).

O menor valor positivo de p que satisfaz a igualdade acima é chamado de **período de** f.

#### Exercício resolvido

**R1.** No plano cartesiano representado a seguir foi traçado o gráfico da função periódica *g*. Analisando o gráfico, identificar o período dessa função.



► Resolução

Analisando alguns pontos do gráfico, podemos verificar que:

• 
$$g(-2) = 0$$
 •  $g(0) = 0$  •  $g(2) = 0$ 

Logo, como a função g é periódica, podemos observar que g(x) = g(x + 2).

Portanto, o período dessa função é 2.

#### Reflita

Voltando à situação das marés, responda: qual é o período da função apresentada? O que isso significa naquele contexto?

O período é 12; isso significa que a altura da maré se repete a cada 12 horas.



#### Pensamento computacional

ADILSON

#### Decomposição

Ao determinar o período de uma função periódica, sabe-se como é o comportamento dela em toda a extensão de seu domínio.

Essa identificação de regularidade permite decompor um estudo extenso em partes menores e mais simples, em que o resultado observado em uma parte pode ser extrapolado para o todo.

Decompor um problema em partes menores para resolver o problema inicial é um dos pilares do *pensamento computacional*: a **decomposição**.

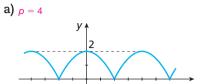
LUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

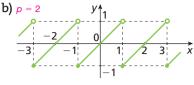
#### Exercícios propostos

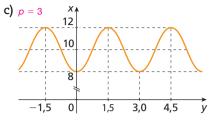
Ao encontrar o período de uma função periódica, os alunos colocam em prática a **decomposição**, que é um pilar do pensamento computacional.

Registre as respostas em seu caderno.

1. Em cada plano cartesiano a seguir está representada graficamente uma função periódica. Qual é o periódica de cada uma dessas funções?



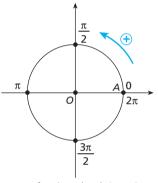




2. Observe os gráficos da questão anterior. Qual é o valor mínimo e o valor máximo de cada uma das funções?

#### Observação

Vamos relembrar algumas medidas positivas do ciclo trigonométrico.



Não confunda: O(0, 0) é a origem do sistema cartesiano, e A(1, 0) é a origem do ciclo trigonométrico.

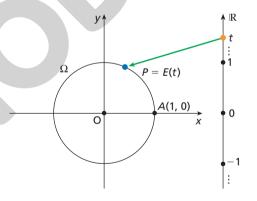
# **2** Ciclo trigonométrico

Já vimos que o ciclo trigonométrico tem raio 1 e centro na origem do sistema cartesiano. O ponto A(1,0) é a origem de todos os arcos orientados (ângulos) e, por convenção, o sentido positivo é o anti-horário.

No capítulo anterior, estudamos apenas a primeira volta do ciclo trigonométrico (arcos com medidas entre 0 e  $2\pi$ ). Agora, vamos ampliar esse estudo para as infinitas voltas, associando números reais aos pontos do ciclo trigonométrico. Isso possibilitará, mais adiante, o estudo das funções trigonométricas.

# 2.1 A função de Euler

Vamos definir a função  $E: \mathbb{R} \to \Omega$  que associa a cada número real t um único ponto P localizado na circunferência  $\Omega$ , conforme ilustrado a seguir.





HANDMANN, Jakob Emanuel. Retrato de Leonhard Euler, 1753, pastel seco sobre papel, 57 cm  $\times$  44 cm. Museu das Belas Artes de Basileia, na Suíça.

- Se t = 0, então  $P \equiv A$ , ou seja, os pontos P e A são coincidentes.
- Se t > 0, percorremos o ciclo no sentido anti-horário (positivo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco  $\widehat{AP}$ , de comprimento t.
- Se t < 0, percorremos o ciclo no sentido horário (negativo), a partir de A, e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco ÂP, de comprimento |t|.

Em referência a seu criador – o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) –, essa função é chamada de **função de Euler**.

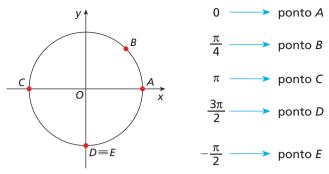
Podemos imaginar que a função de Euler consiste em "enrolar" a reta  $\mathbb{R}$  ao redor da circunferência  $\Omega$ , de modo que o zero da reta coincida com o ponto A(1,0) e que o sentido positivo da "reta enrolada" seja o sentido anti-horário.

A função de Euler é periódica, de período  $2\pi$ , ou seja:

 $E(t) = E(t + 2k\pi)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ 

#### Exemplo

No ciclo trigonométrico, as imagens dos números reais 0,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{2}$  podem ser representadas assim:

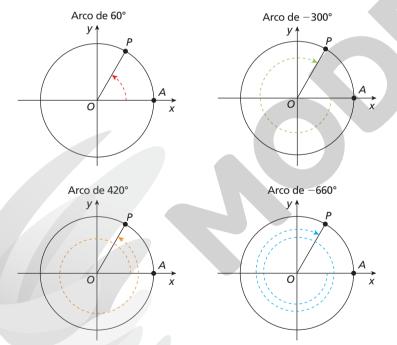


Note que:

- para obter a imagem do número negativo, percorremos o ciclo no sentido horário;
- um mesmo ponto pode representar mais de um número; por exemplo, as imagens dos números  $\frac{3\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{2}$  coincidem ( $E \equiv F$ ).

# 2.2 Arcos côngruos

Arcos que têm a mesma extremidade no ciclo trigonométrico são chamados de **arcos côngruos**. Por exemplo, percorrendo  $60^{\circ}$ ,  $-300^{\circ}$ ,  $420^{\circ}$  e  $-660^{\circ}$ , obtemos o mesmo ponto P, conforme podemos observar nas figuras a seguir.



Por isso, dizemos que esses arcos são côngruos. Indicamos essa congruência da seguinte maneira:

$$60^{\circ} \equiv -300^{\circ} \equiv 420^{\circ} \equiv -660^{\circ}$$

Note que tanto no sentido positivo quanto no negativo existem infinitos arcos associados a um mesmo ponto do ciclo trigonométrico. É possível escrever uma **expressão geral** para representar esses infinitos arcos. Uma expressão geral para esses arcos é:  $60^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Para arcos trigonométricos medidos em radiano, pela função de Euler, se um ponto P é a imagem de um número t, também é a imagem dos números  $t\pm 2\pi$ ,  $t\pm 4\pi$ , ..., ou seja, é a imagem de todos os números  $t+k\cdot 2\pi$ , com  $k\in\mathbb{Z}$ . Essa é a expressão geral de todos os arcos côngruos de extremidade P.

#### Observação

Dada uma função f: A → B: • o conjunto A é chamado de domínio da função f, que indicamos por D ou D(f) (lemos: "domínio de f"), e o conjunto B é chamado de contradomínio da função f, que indicamos por

CD ou CD(f) (lemos: "contrado-

mínio de f''); • para cada  $x \in D(f)$ , o elemento  $f(x) \in B$  é chamado de **imagem** de x pela função f. O conjunto formado por todas as imagens de x é chamado de **conjunto imagem** da função, que indicamos por Im ou Im(f) (lemos: "conjunto imagem de f'').

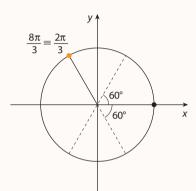
#### Observação

Lembre-se de que no ciclo trigonométrico o raio é 1. Assim, o comprimento de um arco é numericamente igual à sua medida angular, em radiano.

- R2. Marcar no ciclo trigonométrico as imagens dos números a seguir.
  - a)  $\frac{8\pi}{2}$
  - b)  $-\frac{17\pi}{3}$
  - ► Resolução
  - a) Observamos que:

$$\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi$$

Ou seja, para obter  $\frac{8\pi}{3}$ , percorremos uma volta completa mais um arco de  $\frac{2\pi}{3}$ . Então, basta percorrer  $\frac{2\pi}{3}$ , pois  $\frac{8\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}$ .

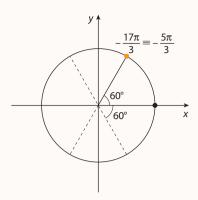


b) Observamos que:

$$-\frac{17\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} =$$
$$= -\frac{5\pi}{3} - 4\pi = -\frac{5\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi$$

Ou seja, para obter  $-\frac{17\pi}{3}$ , percorremos no sentido negativo duas voltas completas mais um arco de  $\frac{5\pi}{3}$ . Então, basta percorrer  $-\frac{5\pi}{3}$ ,

$$pois - \frac{17\pi}{3} \equiv -\frac{5\pi}{3}.$$



- R3. Usando a medida da 1ª volta positiva, escrever a expressão geral dos arcos côngruos a:

  - **b)** 1.105°
  - ▶ Resolução
  - a) Observamos que:

$$\frac{41\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + \frac{36\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi$$

Ou seja,  $\frac{41\pi}{6}$  é côngruo ao arco de medida  $\frac{5\pi}{6}$  na primeira volta positiva.

Logo, a expressão pedida é:

$$\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$
, com  $k \in \mathbb{Z}$ 

b) Dividindo 1.105° por 360°, descobrimos o número de voltas completas na circunferência:

$$1.105^{\circ} = 3 \cdot 360^{\circ} + 25^{\circ}$$

Ou seja, 1.105° é côngruo ao arco de 25° na volta positiva.

Logo, a expressão pedida é:

$$25^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$$
, com  $k \in \mathbb{Z}$ 

- **4. a)**  $60^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$ 
  - **b)**  $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
  - c)  $25^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$
  - d)  $\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$



## Exercícios propostos

#### Registre as respostas em seu caderno.

- 3. Desenhe um ciclo trigonométrico e marque a imagem de cada número abaixo.

- a)  $\frac{\pi}{4}$  b)  $\frac{2\pi}{3}$  c)  $-\frac{4\pi}{3}$  d)  $-\frac{15\pi}{4}$  e)  $-\frac{\pi}{6}$  f)  $\frac{47\pi}{6}$
- 4. Usando a medida da 1ª volta positiva, escreva uma expressão geral dos arcos côngruos a:
  - a) 60°

c) 385°

b)  $\frac{\pi}{6}$ 

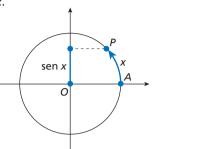
d)  $\frac{25\pi}{7}$ 

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998

# **3** A função seno

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

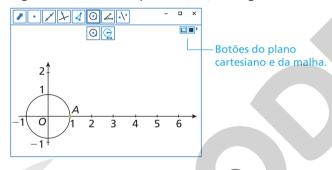
Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada do ponto P é o seno do arco de medida x.



A função **seno** é a função  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  que associa cada número real x ao número real sen x, ou seja,  $f(x) = \operatorname{sen} x$ .

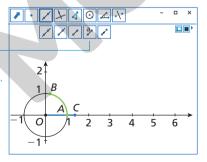
Usando um *software* de Geometria dinâmica, podemos estudar o gráfico da função seno construindo-o a partir do ciclo trigonométrico.

Começamos construindo num plano cartesiano uma circunferência de raio unitário de centro na origem desse sistema. O ponto A(1, 0) é a origem do ciclo trigonométrico.

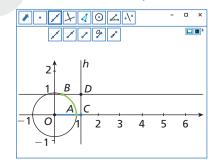


Sobre essa circunferência, construímos um arco  $\widehat{AB}$  qualquer e transportamos a medida desse arco para o eixo das abscissas, determinando o segmento de reta  $\overline{OC}$ .

Pode-se construir o segmento de reta de mesma medida do arco usando a ferramenta "segmento com comprimento fixo".



Traçamos uma reta paralela ao eixo das ordenadas passando pelo ponto C e a projeção ortogonal do ponto B nesse eixo. Marcamos o ponto D, intersecção dessas duas retas.



#### Reflita

Em quais quadrantes a função seno é positiva? E negativa?

positiva no 1º e no 2º quadrante; negativa no 3º e no 4º quadrante

Na internet, há diversos softwares livres de Geometria dinâmica, por exemplo, o Igeom e o Geogebra. Se achar conveniente, escolher um deles ou outro e realizar essa atividade com os alunos. Vale ressaltar que, dependendo do software escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula. A reprodução dessa atividade propicia o desenvolvimento da competência específica 5, já que possibilita a investigação e o estabelecimento de conjecturas, por meio do uso de tecnologia, de um conceito matemático, construindo, verificando e analisando a curva da função seno a partir do rastreamento do ponto que a determina. Essa competência se articula com a competência geral 2 no que diz respeito à investigação, à reflexão, à imaginação e à criatividade para testar hipóteses, formular e resolver problemas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Com a construção acima, é possível conhecer o formato da curva da função seno.

Agora, vamos construir o gráfico dessa função, dada por  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , com base nos dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideramos alguns valores da  $1^a$  volta, para os quais o seno já é conhecido:

х	0	<u>π</u> 4	<u>π</u> 2	<u>3π</u> 4	π	<u>5π</u> 4	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	<u>√2</u> 2	1	<u>√2</u> 2	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Para alguns valores de x maiores que  $2\pi$  ou menores que zero, temos:

х	<u>9π</u> 4	<u>5π</u> 2	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
sen <i>x</i>	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

#### Observações

• 
$$\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$$

$$Logo: sen \frac{9\pi}{4} = sen \frac{\pi}{4}$$

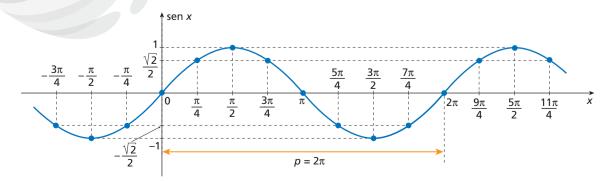
Logo: sen 
$$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
 = sen  $\frac{7\pi}{4}$ 

Observe que, para valores de x maiores que  $2\pi$  ou menores que zero, o seno de x assume os valores do seno de arcos da  $1^a$  volta. Assim, a função seno é periódica, pois, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} (x + 2\pi) = \operatorname{sen} (x + 4\pi) = \dots = \operatorname{sen} (x + 2k\pi), \operatorname{com} k \in \mathbb{Z}$$

Por isso, a curva obtida no intervalo [0,  $2\pi$ ] repete-se para  $x > 2\pi$  e x < 0.

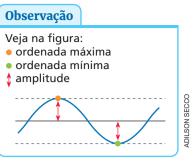
Assim, o gráfico da função seno estende-se por todo o eixo x.



# Características da função seno

Por definição, o domínio e o contradomínio da função seno são iguais a  $\mathbb{R}$ . Pelo seu gráfico, chamado de **senoide**, observamos ainda que a função seno:

- é periódica, de período  $2\pi$  (a curva repete-se a cada intervalo de  $2\pi$ );
- é limitada, pois os valores de sen x estão no intervalo [-1, 1]; logo, seu conjunto imagem é Im = [-1, 1];
- tem amplitude (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos



pontos do gráfico) igual a 1. R5. As funções periódicas são especialmente úteis para modelar situações que se comportam de acordo com algum padrão. Ao lidar com funções periódicas, os alunos colocam em prática um dos pilares do pensamento computacional: o reconhecimento de padrões. Pedir a eles que avaliem e descubram, por meio de um software de desenho de gráficos de funções, quando a população de zebras foi máxima e de quanto em quanto tempo isso

#### Exercícios resolvidos

- **R4.** Determinar os valores reais de m para os quais existe x tal que sen x = 3m 2.
  - ► Resolução

Sabemos que os valores da função  $f(x) = \operatorname{sen} x$  variam no intervalo [-1, 1].

Assim:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$$
 substituindo  $\operatorname{sen} x \operatorname{por} 3m - 2$  adicionando 2 em todos os membros  $1 \leqslant 3m \leqslant 3$  dividindo todos os membros por 3  $\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$ 

Então, m assume valores em  $\mathbb{R}$  tais que  $\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ .

R5. Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com o tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por:

 $Z(t) = 850 + 400 \cdot \text{sen } \frac{\pi t}{4}$ , em que o tempo t é medido, em ano, a partir de janeiro de 2000 (t = 0).



Fotografia mostrando uma leoa caçando uma zebra. Foto de 2005.

Com base no texto, responder às questões.

- a) Quantas zebras havia em janeiro de 2020?
- b) Qual foi a população mínima de zebras atingida nessa região?

- c) De acordo com a função dada, quando foi a primeira vez que a população de zebras foi mínima?
- d) De quanto em quanto tempo a população de zebras se repete?

#### ► Resolução

a) Em janeiro de 2020, temos t = 20. Substituindo t por 20 na equação dada, obtemos:

$$Z(20) = 850 + 400 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot 20}{4}\right)$$
  
 $Z(20) = 850 + 400 \cdot \text{sen}(5\pi)$ 

$$Z(20) = 850 + 400 \cdot 0 = 850$$

Logo, em janeiro de 2020 havia 850 zebras.

b) A população mínima ocorre quando sen  $\frac{\pi t}{4}$  atinge seu valor mínimo, ou seja, quando sen  $\frac{\pi t}{4} = -1$ . Então, para esse valor, temos:

$$Z(t) = 850 + 400 \cdot (-1) = 450$$

Logo, a população mínima foi de 450 zebras.

c) Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, sen x atinge seu valor mínimo (-1) para  $x=\frac{3\pi}{2}$ . Então, a função dada será mínima para:

$$\frac{\pi t}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow t = 6$$

Portanto, a população de zebras atingiu seu valor mínimo, pela primeira vez, 6 anos após janeiro de 2000, ou seja, em janeiro de 2006.

d) A função seno tem período  $2\pi$ . Assim:

$$\frac{\pi t}{4} = 2\pi \Rightarrow \frac{t}{4} = 2 \Rightarrow t = 8$$

Logo, a população de zebras se repete de 8 em 8 anos.

 a) 850 + 400 • 1 = 1.250
 Logo, a população máxima foi de 1.250 zebras.

- a) Qual foi a população máxima de zebras?
- b) Quando isso ocorreu pela primeira vez?

$$\frac{\pi t}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$$

Reflita

Logo, a população máxima foi atingida pela primeira vez em 2002.

## **Exercícios propostos**

#### 5. Calcule:

a) sen  $3.465^{\circ} - \frac{\sqrt{2}}{3}$ 

**b)** sen 
$$\frac{13\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) sen 4.230° -1

d) sen 
$$\left(-\frac{10\pi}{3}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e) sen (-3.465°)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

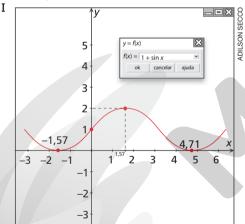
f) sen 
$$\left(-\frac{13\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

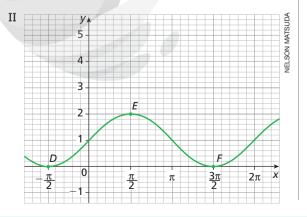
g) sen (-4.230°) 1

h) sen 
$$\frac{10\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

No exercício R12, mostramos como utilizar um software de construção de gráficos para traçar o gráfico de uma função trigonométrica.

- 9. a) Porque no gráfico I os números irracionais foram aproximados para números racionais com duas casas decimais. Assim,  $2\pi$  foi representado por 6,28  $(2\pi \simeq 6,28)$ .
  - d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de f é o gráfico de g deslocado uma unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.
- **6.** Observando os valores encontrados no item anterior, que relação podemos estabelecer entre sen  $\alpha$  e sen  $(-\alpha)$ ? sen  $(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$  ou
- 7. Determine os valores reais de k para os quais existe x tal que sen x = 2k 3.  $1 \le k \le 2$
- 8. Faça um esboço do gráfico de f(x) = sen x para  $x \in [2\pi, 4\pi]$ . Ver resolução no Guia do professor.
- **9.** Foram utilizados dois softwares diferentes de construção de gráficos para representar a função f, de lei f(x) = 1 + sen x, produzindo os gráficos I e II a seguir.





#### Registre as respostas em seu caderno.

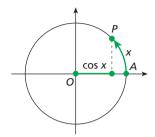
Em grupo, analisem os gráficos e respondam às seguintes questões:

- a) Por que no gráfico I o período da função f é igual a 6,28 e no gráfico II é  $2\pi$ ?
- b) Qual é a amplitude dessa função? 1
- c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função f?  $D(f) = \mathbb{R}$ ; Im(f) = [0, 2]
- d) Compare o gráfico dessa função, f(x) = 1 + sen x, com o da função g(x) = sen x. O que você pode concluir?
- 10. A procura por emprego em certa empresa obedece à função  $f(t) = 2.500 + 1.215 \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ , em que t, em mês, é contado a partir de janeiro de 2019 e f(t) é o número de pessoas. Determine o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa. 3.715 pessoas
- 11. A altura h, em metro, da maré em certo ponto do litoral, em função do tempo, é dada aproximadamente pela expressão  $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} \cdot t \right)$ , em que t é o tempo, medido em hora a partir do meio-dia.
  - a) Qual foi a altura máxima atingida pela maré? E a mínima? 5 m; 1 m
  - b) Com base em uma tabela, esboce o gráfico dessa função. Ver resolução no Guia do professor.
  - c) Em um dia qualquer, que horas ocorre a maré alta? E a maré baixa? maré alta: às 3 h e às 15 h; maré baixa: às 21 h e às 9 h
  - d) De quanto em quanto tempo a altura da maré se repete? de 12 em 12 horas
- **12.** Em uma função do tipo  $f(x) = k \cdot \text{sen } x$ , a presença do parâmetro  $k, k \in \mathbb{R}_+^*$ , modifica o gráfico de g(x) = sen x. Utilizando como exemplo a função  $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$  e realizando, em duplas, os itens propostos a seguir, vamos verificar como isso acontece. Ver resolução no Guia do professor.
  - a) Criem uma tabela com três colunas, intituladas x, sen x e 2 · sen x, e completem-na considerando os valores de x variando no intervalo  $[0, 2\pi]$ .
  - b) Em um sistema de eixos cartesianos, construam o gráfico da função g(x) = sen x.
  - c) No mesmo sistema, construam o gráfico da função  $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$ .
  - d) Comparem a amplitude da função *g* com a amplitude da função f. O que vocês observam?
  - e) Refaçam os procedimentos indicados nos itens a, b, c e d para a função  $h(x) = 3 \cdot \text{sen } x$ . Como vocês generalizariam o resultado do item d para funções do tipo  $i(x) = k \cdot \text{sen } x$ , em que  $k \in \mathbb{R}^*$ ?

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

Considerando a projeção ortogonal de P no eixo horizontal, a abscissa do ponto P é o cosseno do arco de medida x.

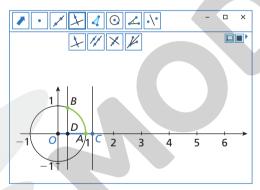
ADILSON SECCO



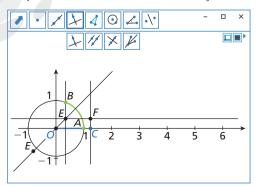
A função **cosseno** é a função  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  que associa cada número real x ao número real cos x, ou seja,  $f(x) = \cos x$ .

Assim como fizemos com a função seno, também podemos estudar o gráfico da função cosseno, construindo-o a partir do ciclo trigonométrico com auxílio de um software de Geometria dinâmica.

Como na função seno, construímos num plano cartesiano uma circunferência de raio unitário de centro na origem desse sistema. Depois, construímos um arco  $\widehat{AB}$  qualquer, com A(1, 0) como origem do ciclo trigonométrico, e transportamos a medida desse arco para o eixo das abscissas, determinando o segmento de reta  $\overline{OC}$ . Traçamos uma reta paralela ao eixo das ordenadas passando pelo ponto C. Em seguida, traçamos a projeção ortogonal do ponto C0 no eixo das abscissas, marcando o ponto C1. A medida do segmento  $\overline{OD}$  corresponde ao cosseno de  $\widehat{AB}$ 1.



Para obter o ponto que desenhará a curva da função cosseno, é preciso transportar a medida de  $\overline{OD}$  para o eixo das ordenadas. Para isso, construímos a bissetriz do 1º e do 3º quadrante do plano cartesiano, marcando o ponto E, intersecção dessa bissetriz com a reta  $\overline{BD}$ , e projetamos o ponto E no eixo das ordenadas. Marcamos, então, o ponto E, intersecção da reta que contém a projeção ortogonal com a reta que passa pelo ponto E. O ponto E é que desenhará a curva dessa função.



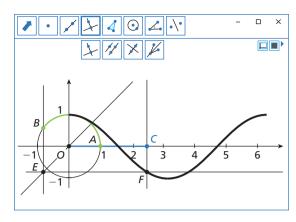
#### Reflita

Em quais quadrantes a função cosseno é positiva? E negativa?

positiva no 1º e no 4º quadrante; negativa no 2º e no 3º quadrante

Se achar conveniente, realizar essa atividade com os alunos, lembrando que, dependendo do software escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. A reprodução dessa atividade propicia o desenvolvimento da competência específica 5, já que possibilita a investigação e o estabelecimento de conjecturas, por meio do uso de tecnologia, de um conceito matemático, construindo, verificando e analisando a curva da função cosseno a partir do rastreamento do ponto que a determina. Essa competência se articula com a competência geral 2 no que diz respeito à investigação, à reflexão, à imaginação e à criatividade para testar hipóteses, formular e resolver problemas.

Movimentando a extremidade B do arco  $\widehat{AB}$  em torno do ciclo trigonométrico, podemos rastrear o movimento do ponto F e observar o desenho da curva da função cosseno.



NELSON

Agora, vamos construir o gráfico dessa função, dada por  $f(x) = \cos x$ , partindo de uma tabela de valores para x. Inicialmente, consideramos alguns valores da  $1^{\frac{a}{2}}$  volta, para os quais o cosseno já é conhecido:

х	0	<u>π</u> 4	<u>π</u> 2	<u>3π</u> 4	π	<u>5π</u> 4	<u>3π</u> 2	<u>7π</u> 4	2π
cos x	1	<u>√2</u> 2	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	<u>√2</u> 2	1

Para alguns valores de x maiores que  $2\pi$  ou menores que zero, temos:

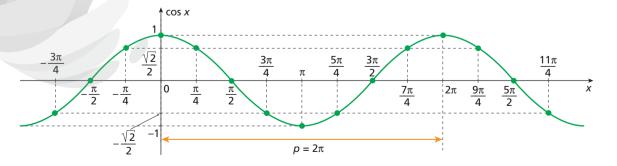
х	$\frac{9\pi}{4}$	<u>5π</u> 2	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
cos x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observe que, para valores de x maiores que  $2\pi$  ou menores que zero, o cosseno de x assume os valores do cosseno de arcos da  $1^a$  volta. Assim, a função cosseno é periódica, pois, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\cos x = \cos (x + 2\pi) = \cos (x + 4\pi) = \dots = \cos (x + 2k\pi), \cos k \in \mathbb{Z}$$

Por isso, a curva obtida no intervalo  $[0, 2\pi]$  repete-se para  $x > 2\pi$  e x < 0.

Assim, o gráfico da função cosseno estende-se por todo o eixo x.



Observe que o gráfico da função cosseno é uma translação (deslocamento) da senoide de  $\frac{\pi}{2}$  rad para a esquerda.

ADILSON SECCO

- é periódica, de período  $2\pi$  (a curva repete-se a cada intervalo de  $2\pi$ );
- é limitada, pois os valores de  $\cos x$  estão no intervalo [-1, 1], o que significa que seu conjunto imagem é Im = [-1, 1];
- tem amplitude iqual a 1.

#### Exercício resolvido

**R6.** Calcular o valor da expressão cos  $x + \cos 2x + \cos 3x + ... + \cos 10x$  para  $x = \frac{\pi}{3}$ .

#### ► Resolução

Substituindo x por  $\frac{\pi}{3}$ , obtemos a expressão:

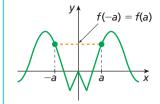
$$\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{3}+...+\cos\frac{10\pi}{3}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

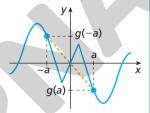
Assim, para  $x = \frac{\pi}{3}$ , a expressão vale  $-\frac{3}{2}$ .

#### Reflita

 Quando f(-x) = f(x) em todo o domínio de uma função f, ela é chamada de função par.



• Quando g(-x) = -g(x) em todo o domínio de uma função g, ela é chamada de **função ímpar**.



 A função cosseno pode ser classificada em função par, ímpar ou nem par nem ímpar? E a função seno?

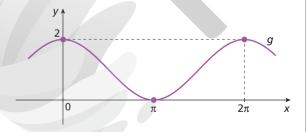
A função cosseno é par, pois, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , cos  $(-x) = \cos x$ . A função seno é impar, pois, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , sen  $(-x) = -\sin x$ .

## **Exercícios propostos**

15. d) Espera-se que os alunos concluam que o gráfico de g é o gráfico de f deslocado uma unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

Registre as respostas em seu caderno.

- 13. Calcule, para  $x = \frac{\pi}{4}$ , o valor da expressão:  $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + ... + \cos 78x + \cos 80x = 0$
- **14.** Faça um esboço do gráfico de f, de lei  $f(x) = \cos x$  para  $x \in [2\pi, 4\pi]$ . Ver resolução no Guia do professor.
- **15.** A curva apresentada abaixo é a representação gráfica da função g, com  $g(x) = 1 + \cos x$ .



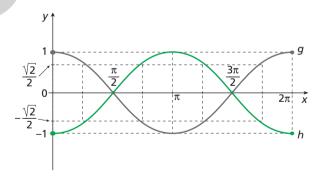
Analisando o gráfico, responda às questões.

- a) Qual é o período da função *q*? 2π
- b) Qual é a amplitude dessa função? 1
- c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função g?  $D(g) = \mathbb{R}$ ; Im(g) = [0, 2]
- d) Compare o gráfico dessa função,  $g(x) = 1 + \cos x$ , com o da função  $f(x) = \cos x$ . O que você pode concluir?

O exercício 15 favorece o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404 da BNCC, já que propõe que, com base na análise gráfica, sejam

identificados o domínio e a imagem da função.

16. Observe que os dois gráficos abaixo, traçados no mesmo sistema cartesiano, representam funções no intervalo  $[0, 2\pi]$  e são simétricos em relação ao eixo x.



São gráficos de funções do tipo  $f(x) = k \cdot \cos x$ :

- o gráfico cinza representa a função dada por q(x) = 1 · cos x;
- o gráfico verde representa a função dada por  $h(x) = -1 \cdot \cos x$ .

Com base nessas considerações, construa os gráficos de  $m(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{e} n(x) = -\operatorname{sen} x \operatorname{em} \operatorname{um}$  mesmo sistema cartesiano no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

17. Diversas doenças são sazonais, ou seja, em determinado período do ano têm maior ocorrência. Esse é o caso da dengue, que tem maior ocorrência no período quente e chuvoso do ano, época que propicia condições mais favoráveis para a proliferação do mosquito transmissor da doença.

O número de casos de dengue, em determinada região, variou aproxima-

damente de acordo com a função  $n(t) = 6.380 + 5.900 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right)$ ,

em que t é o mês do ano, sendo t=1 para janeiro, t=2 para fevereiro, ..., t=12 para dezembro.

Quantos casos ocorreram no pico da doença? Em qual mês ocorreu esse pico? 12.280 casos; em janeiro



Fotografia mostrando água parada em um pneu.

#### Reflita

Analise em quais quadrantes a função tangente é positiva e em quais quadrantes ela é negativa.

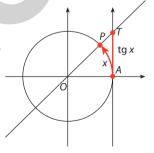
A função tangente é positiva no  $1^{\circ}$  e no  $3^{\circ}$  quadrante e negativa no  $2^{\circ}$  e no  $4^{\circ}$  quadrante.

# **5** A função tangente

Seja P a extremidade de um arco, na circunferência trigonométrica de centro O, correspondente ao número real x.

Consideremos o ponto T de intersecção entre a reta  $\overrightarrow{OP}$  e a reta tangente à circunferência pelo ponto A(1, 0).

Sabemos que a ordenada do ponto T é a tangente do arco de medida x.



CON CELL

A função **tangente** é a função  $f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$  que associa cada número real x do domínio ao número real tg x, ou seja,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

#### Observação

Quando x é a medida de um arco côngruo a  $\frac{\pi}{2}$  rad ou a  $\frac{3\pi}{2}$  rad, não há intersecção da reta  $\overrightarrow{OP}$  com a reta tangente à circunferência pelo ponto A(1, 0). Por isso, a função tangente não está definida para  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Vamos construir o gráfico dessa função, dada por  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , com os dados de uma tabela de valores para x. Inicialmente, vamos considerar x no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

х	0	<u>π</u> 4	<u>π</u> 2	<u>3π</u> 4	π	<u>5π</u> 4	<u>3π</u> 2	<u>7π</u> 4	2π
tg x	0	1	∄	-1	0	1	∄	-1	0

Para alguns valores de x maiores que  $2\pi$  ou menores que zero, temos:

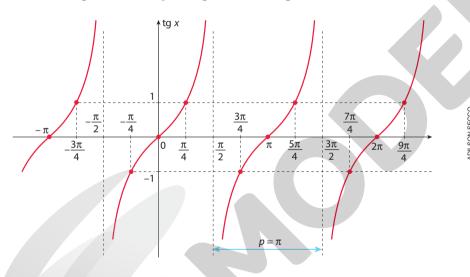
х	<u>9π</u> 4	<u>5π</u> 2	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$
tg x	1	∄	-1	0	-1	∄	1	0

Observe que, para valores de x maiores que  $\pi$  ou menores que zero, a tangente de x assume os valores da tangente de arcos da 1ª meia-volta. Assim, a função tangente é periódica, pois, para todo x do seu domínio, temos:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (x + \pi) = \operatorname{tg} (x + 2\pi) = \dots = \operatorname{tg} (x + k\pi), \operatorname{com} k \in \mathbb{Z}$$

Por isso, a curva obtida no intervalo  $\left| -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right|$  repete-se para  $x > \frac{\pi}{2}$  e  $x < -\frac{\pi}{2}$ .

Assim, o gráfico da função tangente tem o seguinte formato:



# Características da função tangente

Por definição, o domínio da função tangente é  $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ , e o contradomínio é  $\mathbb{R}$ .

Pelo seu gráfico, observamos ainda que a função tangente:

- é periódica, de período π;
- não é limitada, já que seu conjunto imagem é  $\text{Im} = ]-\infty$ ,  $+\infty[$  ou  $\mathbb{R}$ .

As linhas pontilhadas verticais que passam pelos pontos de abscissa  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , são denominadas **assíntotas** da curva que representa a função f, dada por  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Observe que, quando x se aproxima de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , a curva se aproxima das assíntotas, lembrando que a função tangente não existe nesses pontos.

Reflita

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998

A função tangente é uma função ímpar, pois, para todo x pertencente a seu domínio, tg (-x) = -tg (x).

A função tangente pode ser classificada em função par, ímpar ou nem par nem ímpar?

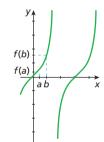
#### **Explore**

Com base nas construções dos pontos que rastreiam as funções seno e cosseno apresentadas nos tópicos 3 e 4, respectivamente, façam, em duplas, uma descrição do passo a passo para obter o ponto que rastreia a função tangente. Com o auxílio de um software de Geometria dinâmica, realize testes para verificar a validade da descrição.

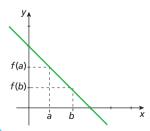
Ver resolução no Guia do professor.

#### Observação

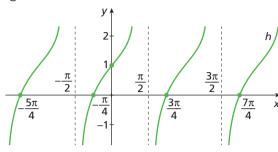
 Uma função f é crescente em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores a e b desse intervalo, com a < b, tem-se f(a) < f(b).</li>



uma função f é decrescente em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores a e b desse intervalo, com a < b, tem-se f(a) > f(b).



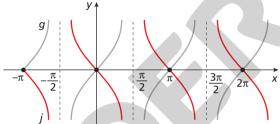
18. A curva abaixo é a representação gráfica da função h, tal que h(x) = 1 + tg x.



favorece o desenvolvimento da habilidade EM13MAT404 da BNCC, já que propõe que, com base na análise gráfica, sejam identificados o domínio e a imagem da funcão.

Analisando o gráfico, responda às questões.

- a) Qual é o período da função h? π
- b) Por quais valores de x passam as assíntotas da função  $h ? \frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$
- c) Quais são o domínio e o conjunto imagem da função h?
- 19. No plano cartesiano abaixo, a curva cinza representa a função q(x) = tg x, e a curva vermelha representa a função  $j(x) = -1 \cdot \lg x$ .



Analisando os gráficos, o que podemos afirmar? j(x) = -tg x são simétricas em relação ao eixo x.

Espera-se que os alunos concluam

## Observação

Equações do tipo  $3x \cdot \cos \pi = 2$  ou

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + x = \frac{1}{2} \operatorname{não} \operatorname{são}$$

equações trigonométricas, pois a incógnita x não representa a medida de um arco.

# Observação

Quando a medida de um arco ou de um ângulo estiver sem unidade de medida, será considerada a medida em radiano.

# **6** Equações trigonométricas

Toda equação em que aparecem razões trigonométricas com arco de medida desconhecida é chamada de equação trigonométrica.

#### **Exemplos**

- a) sen x = 0.5
- **b)**  $\cos 2x = -\frac{3}{4}$
- c)  $tq^2 x + (\sqrt{3} 1) \cdot tg x \sqrt{3} = 0$
- **d)** sen  $\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}$

Na resolução das equações trigonométricas deste capítulo, vamos considerar, para as incógnitas, valores reais que representam as medidas dos arcos em radiano.

# 6.1 Resolução de equações trigonométricas no intervalo $[0, 2\pi]$

Vamos estudar a resolução de equações trigonométricas tendo como conjunto universo o intervalo  $[0, 2\pi]$ .

LUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

# Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

#### **Exercícios resolvidos**

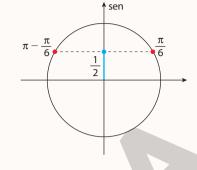
**R7.** Obter os valores de x, com  $0 \le x \le 2\pi$ , para os quais sen  $x = \frac{1}{2}$ .

#### ► Resolução

No ciclo trigonométrico, observamos que, para sen  $x = \frac{1}{2}$ , temos dois arcos:

- no  $1^{\circ}$  quadrante:  $x = \frac{\pi}{6}$
- no  $2^{\circ}$  quadrante:  $x = \pi \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Logo,  $x = \frac{\pi}{6}$  ou  $x = \frac{5\pi}{6}$ .



**R8.** Encontrar o conjunto solução da equação tg  $2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , com  $0 \le 2x \le 2\pi$ .

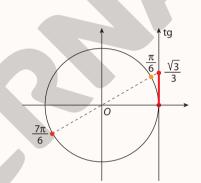
#### ► Resolução

Com tangente igual a  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  existem dois arcos:

- no 1º quadrante:  $\frac{\pi}{6}$
- no  $3^{\circ}$  quadrante:  $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Assim:  $2x = \frac{\pi}{6}$  ou  $2x = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$  ou  $x = \frac{7\pi}{12}$ 

Portanto, o conjunto solução da equação é  $S = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12} \right\}$ 



**R9.** Quais são os valores de x, em radiano, que satisfazem a equação  $\cos x + 1 = \sin^2 x$ ?

#### ► Resolução

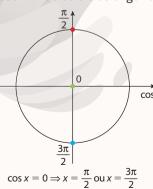
Da relação fundamental da Trigonometria vem:  $sen^2 x = 1 - cos^2 x$  (I) Substituindo (I) na equação dada, obtemos:

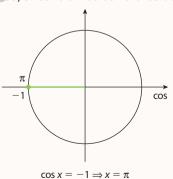
$$\cos x + 1 = \underline{\sec^2 x} \Rightarrow \cos x + 1 = \underline{1 - \cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0$$

Colocando cos x em evidência, temos:  $(\cos x) \cdot (\cos x + 1) = 0$ 

Para um produto ser nulo, um dos fatores deve ser nulo, ou seja:  $\cos x = 0$  ou  $\cos x = -1$ 

Observando os ciclos trigonométricos, encontramos os valores de x:





Portanto, os valores de x, com  $0 \le x \le 2\pi$ , que satisfazem a equação são  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  e  $\pi$ .

**R10.** Determinar o conjunto solução da equação sen<sup>2</sup>  $x - 2 \cdot \text{sen } x = 0$ .

#### ► Resolução

Substituindo sen x por y, obtemos:  $y^2 - 2y = 0$ , com  $-1 \le y \le 1$ .

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$$y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y - 2) = 0$$

$$y = 0$$
 ou  $y = 2$  (não convém, pois  $-1 \le y \le 1$ )

Logo, sen x = 0. Obtemos, assim, x = 0 ou  $x = \pi$ .

Portanto, no intervalo  $0 \le x \le 2\pi$ , temos  $S = \{0, \pi, 2\pi\}$ .

#### **Exercícios propostos**

Registre as respostas em seu caderno.

**20.** Determine o valor de x, em radiano, com  $x \in [0, 2\pi]$ , nas seguintes equações:

a) 
$$\cos x = \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3}$$

a) 
$$\cos x = \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3}$$
 c)  $tg x = -1 \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4}$ 

e) sen 
$$x = 0$$
 o ou  $\pi$  ou  $2\pi$ 

**b)** sen 
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{3}$$
 ou  $\frac{2\pi}{3}$  **d)** sen  $x = 1 \frac{\pi}{2}$ 

**d)** sen 
$$x = 1 \frac{\pi}{2}$$

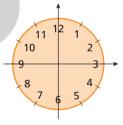
**21.** Determine os possíveis valores de x, com  $0 \le x \le 2\pi$ , nas equações a seguir:

a) sen 
$$x \cdot (\text{sen } x + 1) = 0 \ 0, \pi, 2\pi e^{\frac{3\pi}{2}}$$

b) 
$$2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0$$
  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$  e  $\frac{3\pi}{2}$   
c)  $\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1 = 0$  o e  $2\pi$ 

c) 
$$\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1 = 0 \ 0 \ e^2 \pi$$

22. Imagine o ciclo trigonométrico sobreposto ao mostrador de um relógio analógico, com centros coincidentes. Se o ponteiro das horas aponta para a origem do ciclo às 15 h, que horas o relógio indicará quando esse ponteiro apontar para a extremidade de um arco do ciclo correspondente a um ângulo cujo seno é igual a -0.5? (Dica: considere somente uma volta do ponteiro de horas, iniciando as 15 horas.) 16 h ou 20 h



Considerando o mesmo seno (-0,5), perguntar aos alunos que horas o relógio indicará se o ponteiro das horas continuar girando por mais uma volta. Eles deverão perceber que o relógio marcará 4 h

**23.** Determine x, em radiano, sabendo que  $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$  e que  $0 \le x \le 2\pi$ .

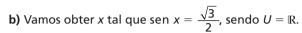
# 6.2 Resolução de equações trigonométricas no conjunto universo $U = \mathbb{R}$

No tópico anterior, estudamos a resolução de equações trigonométricas tendo como conjunto universo o intervalo  $[0, 2\pi]$ . Agora, vamos estudá-las considerando o conjunto universo  $U = \mathbb{R}$ .

Nos exemplos a seguir, veremos que, para obter a solução das equações no universo R, basta resolvê-las como se fosse no intervalo  $[0, 2\pi]$  e, em seguida, escrever a expressão que fornece as medidas dos arcos côngruos, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica. Acompanhe os exemplos a seguir.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

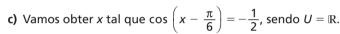




No intervalo [0,  $2\pi$ ], os arcos cujo seno vale  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  medem  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{2\pi}{3}$ .

Logo, no universo real, o conjunto solução é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



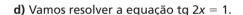
No intervalo  $[0, 2\pi]$ , os arcos cujo cosseno vale  $-\frac{1}{2}$  medem  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$ . Assim:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

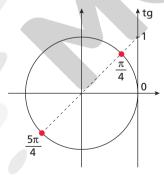
$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{9\pi}{6} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

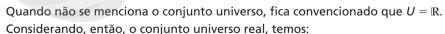
Então, o conjunto solução, no universo real, é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \, | \, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$



Os arcos cuja tangente vale 1, considerando a primeira volta no ciclo trigonométrico, medem  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{5\pi}{4}$ .



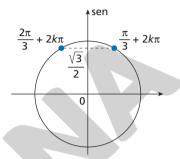


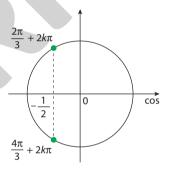
$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Repare que, nesse caso, basta somar um múltiplo de  $\pi$  ao primeiro ponto para obter todos os pontos que são solução da equação.

Assim, o conjunto solução é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \, | \, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$





#### **Exercícios propostos**

**24.** Resolva as equações a seguir, sendo  $U = \mathbb{R}$ .

**a)** sen 
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) 
$$\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

b) sen 
$$x = \text{sen } \frac{2\pi}{3}$$

e) tg x = 
$$-\sqrt{3}$$
 S =  $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ 

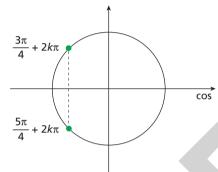
c) 
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

f) 
$$tg x = tg \frac{5\pi}{4} S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**25.** Resolva a equação 
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 em  $\mathbb{R}$ .  $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ 

- **26.** Resolva, em  $\mathbb{R}$ , a equação sen  $x \cdot \cos x = 0$ .  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 27. Observe a figura do ciclo trigonométrico.

Resposta possível: 
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Supondo que a figura destaque as raízes de uma equação trigonométrica, escreva essa equação. Compare sua resposta com a de um colega.

O objetivo deste tópico é possibilitar aos alunos a construção de gráficos mais complexos sem o uso de tabelas. Para isso, é fundamental entender o papel que cada parâmetro desempenha na função trigonométrica em foco.

Se possível, e se julgar oportuno, para que os alunos compreendam melhor esse papel, mostrar mais exemplos de cada um dos casos usando um software de construção de gráficos, assim como feito no exercício R12.

# Construção de gráficos

Até aqui vimos gráficos das funções trigonométricas fundamentais: seno, cosseno e tangente. Agora, vamos aprender a construir gráficos de outras funções a partir desses gráficos. Inicialmente, construiremos o gráfico de uma das funções fundamentais (cor cinza) e, a partir dele, efetuando algumas transformações, obteremos o gráfico pedido.

# Transladando o gráfico

Transladar significa deslocar. A seguir, veremos alguns gráficos de funções que podem ser obtidos por meio de deslocamentos verticais ou horizontais dos gráficos das funções fundamentais. 24. c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ 

Exemplos

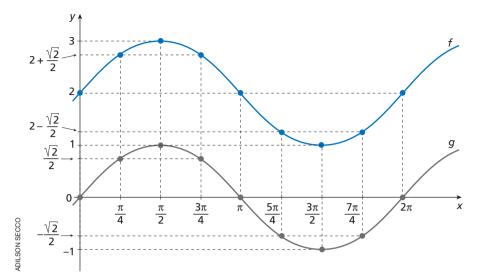
**d)** 
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

a) 
$$f(x) = 2 + \sin x$$

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores entre 0 e  $2\pi$ .

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	<u>5π</u> 4	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
2 + sen <i>x</i>	2	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Construímos, então, os gráficos das funções dadas por  $g(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{e} f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ , em um mesmo sistema de eixos, para efeito comparativo.



Observe que, transladando (deslocando) o gráfico de g, ponto a ponto, duas unidades para cima, obtemos o gráfico de f. Agora, o gráfico oscila entre os valores mínimo 1 e máximo 3. Ou seja, o conjunto imagem de f é [1, 3]. Note que o domínio, o período e a amplitude, em relação à função g, não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções trigonométricas do tipo y = c + sen x são obtidos a partir de uma translação de |c| unidades em relação ao gráfico y = sen x da seguinte forma:

- se c > 0, a translação é para cima;
- se c < 0, a translação é para baixo.

O mesmo vale para funções do tipo  $y = c + \cos x$  e  $y = c + \operatorname{tg} x$ .

No boxe de pensamento computacional será favorecido o desenvolvimento da competência específica 4 e da habilidade EM13MAT315 da BNCC, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.



#### Pensamento computacional

#### **Algoritmo**

A situação do desenho e da translação vertical do gráfico das funções trigonométricas dos tipos  $y = c + \operatorname{sen} x$ ,  $y = c + \cos x$  ou  $y = c + \operatorname{tg} x$  pode ser representada por meio de um algoritmo. Veja o exemplo a seguir, em linguagem corrente, para funções do tipo  $y = c + \operatorname{tg} x$ .

**Passo 1.** Desenha-se o gráfico de y = tq x.

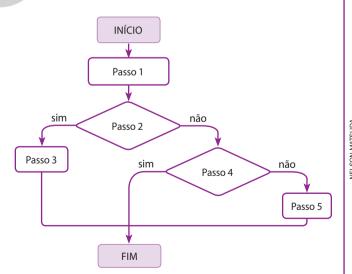
**Passo 2.** Verifica-se o valor de c. Se c > 0, vá para o passo 3. Se não, vá para o passo 4.

**Passo 3.** Como c > 0, então o gráfico é transladado de c unidades para cima. Termina-se o algoritmo.

**Passo 4.** Verifica-se o valor de c. Se c = 0, o gráfico não muda e termina-se o algoritmo. Se não, vá para o passo 5.

**Passo 5.** Como c < 0, então o gráfico é transladado de c unidades para baixo e termina-se o algoritmo.

Esse algoritmo também pode ser representado por meio de um fluxograma. Veja ao lado.



Nesse fluxograma, há duas estruturas de decisão que estão encadeadas. Em geral, uma estrutura de decisão permite dois caminhos: um em caso afirmativo e outro em caso contrário. Para que haja mais de dois caminhos, é preciso encadear estruturas de decisão, como foi feito com os passos 2 e 4. O passo 2 verifica se o valor de c é maior que 0; caso contrário, segue para o passo 4, em que se verifica se c é igual a 0; se não, c é menor que 0.

No boxe de pensamento computacional, os alunos vão representar um algoritmo em um fluxograma, favorecendo o desenvolvimento da competência específica 4 e da habilidade EM13MAT315, da BNCC.

**b)** 
$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Novamente, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores entre 0 e  $2\pi$ .

x	0	<u>π</u> 4	<u>π</u> 2	<u>3π</u> 4	π	<u>5π</u> 4	<u>3π</u> 2	<u>7π</u> 4	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$x + \frac{\pi}{2}$	<u>π</u> 2	<u>3π</u> 4					2π	<u>9π</u> 4	<u>5π</u> 2
$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



# Pensamento computacional

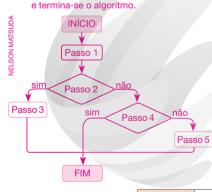
Escreva um algoritmo em linguagem corrente que descreva a translação horizontal do gráfico de uma função trigonométrica de sua escolha. Em seguida, represente esse algoritmo utilizando um fluxograma.

Resposta possível:

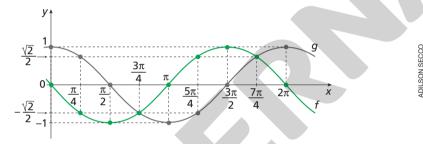
Passo 1. Desenha-se o gráfico de

Passo 2. Verifica-se o valor de *b*. Se *b* > 0, vá para o passo 3. Se não, vá

para o passo 4. **Passo 3.** Como b>0, então o gráfico é transladado de b unidades para a esquerda. Termina-se o algoritmo. **Passo 4.** Verifica-se o valor de b. Se b=0, o gráfico não muda e termina-se o algoritmo. Se não, vá para o passo 5. **Passo 5.** Como b<0, então o gráfico é transladado de b unidades para a direita



Os gráficos das funções dadas por  $g(x) = \cos x \, e \, f(x) = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$  são:



A função f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem, mesmo período e mesma amplitude que g, mas o gráfico de g sofreu uma translação (deslocamento) de  $\frac{\pi}{2}$  para a esquerda.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções do tipo  $y = \cos(x + b)$  são obtidos a partir de uma translação de |b| unidades em relação ao gráfico  $y = \cos x$  de tal modo que:

- se *b* > 0, a translação é para a esquerda;
- se b < 0, a translação é para a direita.

O mesmo pode ser verificado para funções dos tipos y = sen (x + b) ou y = tg (x + b).

# Alterando a amplitude

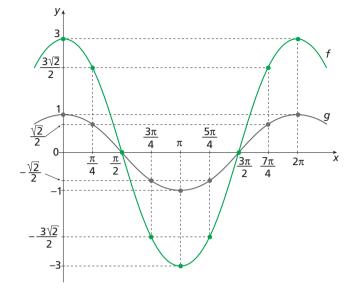
Agora, vamos obter alguns gráficos "esticando" ou "achatando" verticalmente os gráficos das funções fundamentais.

#### Exemplo

Vamos construir o gráfico de  $f(x) = 3 \cdot \cos x$ .

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores entre 0 e  $2\pi$ .

х	0	<u>π</u> 4	<u>π</u> 2	<u>3π</u> 4	π	<u>5π</u> 4	<u>3π</u> 2	<u>7π</u> 4	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
3 • cos <i>x</i>	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3



Observe que, multiplicando  $g(x) = \cos x$  por 3, "esticamos" o gráfico verticalmente: agora, ele oscila entre -3 e 3. Ou seja, a amplitude de f é 3, o triplo da amplitude de g, e o conjunto imagem de f é [-3, 3].

Veja que o domínio e o período não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Gráficos de funções trigonométricas do tipo  $y = d \cdot \cos x$  têm amplitude |d|. O mesmo ocorre para funções do tipo  $y = d \cdot \sin x$ .

#### Observação

Os procedimentos para obter gráficos de funções nas formas f(x) + c, f(x + c) e  $c \cdot f(x)$ , com base nos gráficos de f, podem ser aplicados para as funções em geral.

# Exercícios resolvidos

**R11.** Determinar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude da função dada por  $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

► Resolução

Vamos considerar a função h dada por  $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

O gráfico de h é obtido por meio de uma translação do gráfico da função g, dada por  $g(x) = \cos x$ , de  $\frac{\pi}{4}$  para a direita.

Como a amplitude da função h é 1, igual à amplitude de g, e  $f(x) = 2 \cdot h(x)$ , então a amplitude de f é 2.

Como o conjunto imagem da função  $h \in [-1, 1]$ , igual ao da função g, e  $f(x) = 2 \cdot h(x)$ , podemos obter o conjunto imagem da função f multiplicando por 2 os extremos do intervalo [-1, 1].

Logo, Im(f) = [-2, 2].

O domínio e o período de f são os mesmos de g: D(f) =  $\mathbb{R}$  e  $p = 2\pi$ .

#### Reflita

Qual seria o efeito sobre o gráfico de *g* se tivéssemos:

a) 
$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos x$$
?  
b)  $f(x) = -1 \cdot \cos x$ ?

- a) O gráfico de g seria "achatado" verticalmente. A amplitude seria  $\frac{1}{2}$ 
  - e o conjunto imagem seria  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .
- b) O gráfico de f seria simétrico ao gráfico de g em relação ao eixo x, pois as ordenadas positivas ficariam negativas e as negativas ficariam positivas.

ADILSON SECCO

### Observação

Em alguns softwares, temos de escrever a lei da função de maneira diferente. Observe os exemplos:

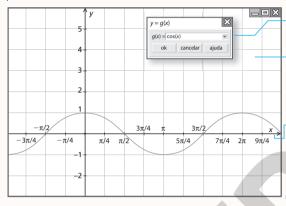
- $\operatorname{sen} x \to \sin(x)$
- 2  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2*\cos(x + \text{pi/4})$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{x+\pi}{2}\right) \to \operatorname{tan}((x+\operatorname{pi})/2)$

Comentar com os alunos que, com o uso de um software de construção de gráficos, poderíamos construir diretamente o gráfico de f sem ter de fazê-lo passo a passo a partir do gráfico da função dada por  $g(x) = \cos x$ . A finalidade de construir o gráfico passo a passo é analisar as mudanças causadas por cada parâmetro.

**R12.** Com o auxílio de um software de construção de gráficos, a partir do gráfico de uma das funções trigonométricas fundamentais, construir passo a passo o gráfico de f, tal que  $f(x) = 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , e analisar o que ocorre com o gráfico a cada passo. Indicar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de f.

#### ▶ Resolução

Primeiro, vamos traçar o gráfico da função trigonométrica dada por  $q(x) = \cos x$ .



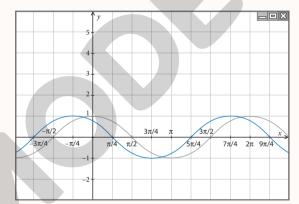
Campo para digitar a lei da função cujo gráfico queremos construir.

Podemos selecionar a opção de exibir linhas de grade para ficar mais fácil visualizar as mudanças no gráfico a cada passo.

É possível escolher a unidade com que graduaremos os eixos. Nesse caso, graduamos o eixo y em intervalos de 1 unidade e o eixo x em intervalos de  $\frac{\pi}{4}$ .

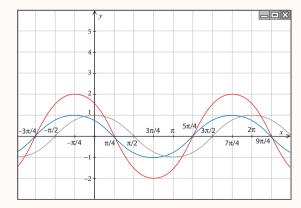
Acompanhe os passos descritos a seguir,

• 1º passo:  $\cos x \rightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 

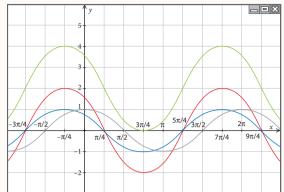


O gráfico de g sofreu uma translação de  $\frac{\pi}{4}$  para a esquerda.

•  $2^{\circ}$  passo:  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 



O gráfico da função tem nova amplitude, igual a 2.



O gráfico sofreu uma translação de duas unidades para cima.

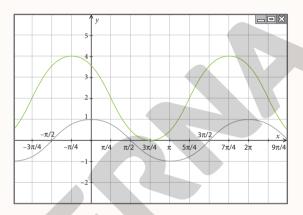
O conjunto imagem da função dada por  $g(x) = \cos x$  é [-1, 1]. Após o  $1^{\circ}$  passo, adicionando  $\frac{\pi}{4}$  a x, o conjunto imagem da nova função continua sendo [-1, 1]. Após o  $2^{\circ}$  e o  $3^{\circ}$  passos, o conjunto imagem se modificou. Quando a função é multiplicada por 2, o conjunto imagem passa a ser

[-2, 2]. Adicionando-se 2, o conjunto imagem da nova função passa a ser [0, 4].

Portanto, Im(f) = [0, 4]. A amplitude de g é 1 e não se modifica após o 1º passo; porém, no 2º passo, a função passa a ter amplitude 2 e permanece assim após o 3º passo.

O domínio e o período de f são os mesmos de g:  $D(f) = \mathbb{R}$  e  $p = 2\pi$ .

Veja a seguir os gráficos das funções f e g.



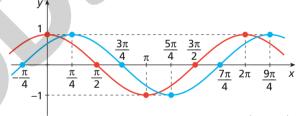
### **Exercícios propostos**

28. Os gráficos ao lado representam as funções:

• 
$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
 vermelho

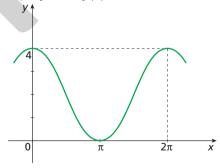
• 
$$g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
 azul

Descubra qual curva representa cada uma das funções.



Registre as respostas em seu caderno.

- **29.** A partir do gráfico da função g de lei  $g(x) = \operatorname{sen} x$ , construa o gráfico de f, tal que  $f(x) = 1 + \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ . Indique o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de f. Ver resolução no Guia do professor.
- **30.** O gráfico abaixo representa a função f de lei  $f(x) = a + b \cdot \cos x$ .



Determine os valores de a e de b. a = 2; b = 2

**31.** Utilizando um software de construção de gráficos, construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções f e g. Ver resolução no Guia do professor.

a) 
$$f(x) = 3 + \sin x e g(x) = -3 - \sin x$$

**b)** 
$$f(x) = -2 + \cos x e g(x) = 2 - \cos x$$

• Em duplas, comparem os gráficos das funções f e q de cada item.

LUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO

# Alterando o período

Estudamos alguns gráficos que são obtidos a partir de translações horizontais ou verticais ou modificação na amplitude dos gráficos das funções trigonométricas fundamentais, embora conservem o período. Agora, veremos exemplos de gráficos que sofrem alteração de período em relação às funções fundamentais.

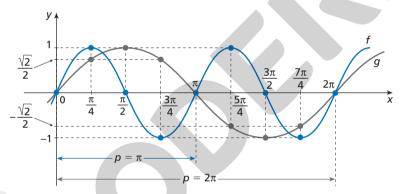
#### **Exemplo**

Vamos construir o gráfico da função f dada por f(x) = sen 2x e compará-lo com o da função g dada por g(x) = sen x.

Primeiro, montamos uma tabela atribuindo a x alguns valores entre 0 e  $2\pi$ .

x	0	<u>π</u> 4	<u>π</u> 2	<u>3π</u> 4	π	<u>5π</u> 4	<u>3π</u> 2	<u>7π</u> 4	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
2 <i>x</i>	0	<u>π</u> 2	π	<u>3π</u> 2	2π	<u>5π</u> 2	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sen 2x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Construímos, então, os gráficos das funções g e f dadas por  $g(x) = \operatorname{sen} x$  e  $f(x) = \operatorname{sen} 2x$  no mesmo sistema de eixos.



Observe que f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem e mesma amplitude que g, porém tem período igual a  $\pi$ , ou seja, metade do período de g.

Analisando casos semelhantes, notamos que:

As funções trigonométricas dos tipos  $y = \text{sen } (ax) \text{ ou } y = \cos (ax) \text{ têm período } \frac{2\pi}{|a|}$ 

No caso das funções do tipo y = tg (ax), podemos verificar que o período é  $\frac{\pi}{|a|}$ 

## **Exercícios propostos**

Registre as respostas em seu caderno.

**32.** Determine o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude das funções indicadas a seguir. Ver resolução dos exercícios **32** e **33** no Guia do professor.

a) 
$$f(x) = 3 \cdot \text{sen } 2x$$

**b)** 
$$f(x) = 5 + 2 \cdot \cos 3x$$

33. Esboce o gráfico de cada função.

a) 
$$f(x) = \cos \frac{x}{2}$$

c) 
$$f(x) = 2 \cdot \text{sen } 2x$$

b) 
$$f(x) = \sin 4x$$

d) 
$$f(x) = -2 \cdot \cos x$$

# **Exercícios complementares**

Os exercícios **4**, **5** e **6** utilizam em seus contextos aplicações de modelos matemáticos envolvendo funções periódicas, contribuindo com o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306** da BNCC.

### **Aplicação**

1. Desenhe um ciclo trigonométrico e represente nele as imagens dos números reais a seguir:

Ver resolução no Guia do professor.

a) 
$$x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) 
$$x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$
,  $k \in \mathbb{Z}$ 

c) 
$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

- 2. Usando uma medida da 1ª volta positiva da circunferência trigonométrica, escreva a expressão geral dos arcos côngruos a:
  - a)  $855^{\circ} 135^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$

b) 
$$\frac{25\pi}{3}$$
  $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ 

- Determine o menor e o maior valor que assume a expressão 4 – sen 10x. 3; 5
- 4. A quantidade de algas, em tonelada, em certa baía varia periodicamente com o tempo e é representada pela função  $A(t) = 850 + 200 \cdot sen \frac{\pi t}{6}$ , com t medido em anos. Se t for medido a partir de janeiro de 2010, qual será a quantidade de algas na baía em janeiro de 2025? 1.050 toneladas
- 5. (FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estimase que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica  $f(x) = 900 800 \cdot \sec \frac{x \cdot \pi}{12}$ , em que f(x) é o número de clientes e x a hora da observação (x é um número inteiro tal que  $0 \le x \le 24$ ). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a:
  - a) 600

d) 1.500

b) 800

e) 1.600

- c) 900
- 6. Em alguns trechos do rio Tietê (SP), verifica-se a formação de notáveis quantidades de espuma, resultante de poluição por resíduos industriais. Em certo dia, a quantidade de espuma variou segundo a função f dada por  $f(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen} \frac{\pi t}{6}$ , em que f(t) é a quantidade de espuma, em metro cúbico por metro de rio, e t é o tempo, em horas contadas a partir da meia-noite. Determine o primeiro momento do dia em que a quantidade de espuma atingiu 5 m³ por metro de rio. às 3 h

#### Registre as respostas em seu caderno.

**9. b)** 
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- 7. Resolva a equação  $\frac{3}{4} \cos^2 x = 0$ , em que  $x \in [0, 2\pi]$  e é medido em radiano.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$
- 8. Calcule a soma das raízes da equação  $4 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos x + 1 = 0$ , em que  $x \in [0, 2\pi]$  e é medido em radiano. $2\pi$
- **9.** Resolva as equações a seguir considerando  $U = \mathbb{R}$ .

a) 
$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**b)** 
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) 
$$tg(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$$
  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ 

- 10 Resolva a equação sen  $x + \cos x = 0$  considerando  $U = \mathbb{R}$ .  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- **11.** Construa o gráfico das funções a seguir e indique o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude.

a) 
$$f(x) = 1 - 2 \cdot \cos x$$

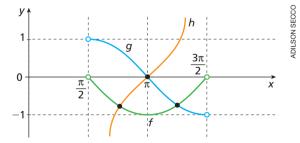
Ver resolução no Guia do professor.

b) 
$$f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

#### **Aprofundamento**

- **12.** Considere a expressão  $y = 1 + 2 \cdot \text{sen } x$ .  $\frac{a}{b} = -2$ ; 1
  - a) Qual é o valor mínimo para sen x? E o máximo?
  - b) Qual é o valor mínimo para 2 sen · x? E o máximo?
  - c) Agora, conclua: quais são os valores mínimo e máximo para y? -1;3
- **13.** Veja o esboço, em um mesmo plano cartesiano, dos gráficos de  $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sin x$  e  $h(x) = \tan x$  para

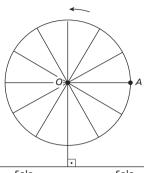
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \quad \text{Comentar com os alunos que as funções seno e cosseno só poderão ser consideradas crescentes ou decrescentes em determinados intervalos.}$$



No intervalo considerado:

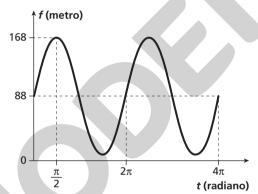
- a) cos x é sempre negativo? sim
- b) sen x é sempre decrescente e negativo? não
- c) tg x é sempre crescente e positiva? não
- d) quais são as coordenadas do ponto em que sen x = tg x? ( $\pi$ , 0)
- e) sabendo que A é o ponto em que  $\cos x = \sin x$  e B é o ponto em que  $\tan x = \cos x$ , a abscissa de A é menor, maior ou igual à abscissa de B? maior

- **14.** (Enem) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High* Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:
- 15. Pedir aos alunos que releiam o tópico 1 deste capítulo antes de iniciarem a pesquisa. No site <a href="https://www.marinha.mil.br/chm/">https://www.marinha.mil.br/chm/</a> tabuas-de-mare> (acesso em: 11 maio 2020), há tábuas de marés do litoral brasileiro e, em <a href="https://tabuademares.com">https://tabuademares.com</a> (acesso em: 11 maio 2020), é possível encontrar tábuas de marés do mundo inteiro. Os alunos podem buscar tábuas de outros países também, mas alerte-os para verificarem as unidades de medida. Além disso, orientar sobre confiabilidade do site pesquisado.



A partir da posição indicada, em que o segmento  $\overline{OA}$  se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam O0 segmento O1 em relação à sua posição inicial e O1 fa função que descreve a altura do ponto O3, em relação ao solo, em função de O4. Após duas voltas completas, O5 fem o seguinte gráfico:

O exercício 15 retoma o tema abordado na abertura do capítulo e é uma outra oportunidade de discutir a preservação dos recursos naturais no contexto de educação ambiental. A atividade propõe a elaboração de um problema utilizando contexto que envolve fenômenos periódicos reais, o que favorece o desenvolvimento da habilidade EM13MAT306 da BNCC. Pode ser interessante pedir aos alunos que apresentem os gráficos construídos para que todos possam observar as diferenças de acordo com a região e o período do ano escolhido. É possível também fazer um trabalho de interdisciplinaridade com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a partir da apresentação, para toda a sala, dos gráficos construídos e das tábuas de marés consultadas, de forma a promover debates em torno do tema e de sua relevância sociocultural e ambiental, favorecendo, assim, o desenvolvimento da habilidade EM13CNT302 que faz parte da competência específica 3.



A expressão da função altura é dada por alternativa a

a) 
$$f(t) = 80 \text{sen}(t) + 88$$

b) 
$$f(t) = 80\cos(t) + 88$$

c) 
$$f(t) = 88\cos(t) + 168$$

d) 
$$f(t) = 168 \text{sen}(t) + 88 \text{cos}(t)$$

e) 
$$f(t) = 88 \text{sen}(t) + 168 \cos(t)$$

15. Em duplas, escolham uma região litorânea e pesquisem a tábua de marés desse local. Escolham um dia e, em um plano cartesiano, construam um gráfico da altura em função do tempo. Em seguida, peçam à outra dupla que responda à questão abaixo, a partir do gráfico que vocês construíram, enquanto vocês deverão responder à mesma questão, de acordo com o gráfico construído pela outra dupla.

Dica: arredondem os horários fornecidos na tábua de marés para facilitar a construção do gráfico; por exemplo, 1 h 6 min pode ser arredondado para 1 h ou 1 h 18 min pode ser arredondado para 1 h 30 min.

 O gráfico obtido pode ser modelado com uma função periódica? Se sim, qual é o período e a amplitude aproximados desse gráfico? resposta pessoal

#### **Desafio**

- **16.** Seja x a medida de um arco, em radiano, com  $0 \le x \le 2\pi$ .
  - a) Quais são os valores de x que satisfazem a equação  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ?  $\frac{2\pi}{3}$  ou  $\frac{4\pi}{3}$
  - b) Agora, observando um ciclo trigonométrico, responda: quais são os valores de x que satisfazem a desigualdade cos  $x \le -\frac{1}{2}$ ?  $\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$

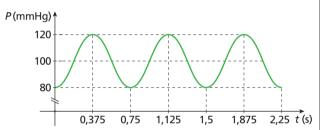
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- **1.** O arco  $\frac{16\pi}{3}$  é côngruo a: alternativa c
  - a)  $\frac{\pi}{3}$

c)  $\frac{4\pi}{3}$ 

b)  $\frac{2\pi}{3}$ 

- d)  $\frac{5\pi}{3}$
- **2.** Sendo  $k \in \mathbb{Z}$ , uma expressão geral dos arcos côngruos a  $\frac{22\pi}{5}$  é: alternativa c
  - a)  $\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi$
- c)  $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi$
- b)  $\frac{\pi}{5} + k \cdot \pi$
- d)  $\frac{2\pi}{5} + k \cdot \pi$
- 3. A variação da pressão sanguínea P, em milímetro de mercúrio, de uma pessoa em função do tempo t, em segundo, pode ser modelada, aproximadamente, pela função trigonométrica representada abaixo, em que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.



Então, o intervalo de um batimento cardíaco é aproximadamente: alternativa d

- **a)** 80 s
- **b)** 120 s
- **c)** 0,375 s
- d) 0,75 s
- **4.** Sabemos que sen  $x = \text{sen } (x + 2\pi)$  para todo x. Logo, a função seno é e tem igual a  $2\pi$ .
  - a) limitada; máximo
  - b) periódica; período
  - c) ilimitada; período
  - d) periódica; mínimo

- **5.** Uma solução da equação  $2 \cdot \cos x = \sqrt{3}$  é:
  - a)  $\frac{\pi}{3}$  rad
- c)  $\frac{\pi}{2}$  rad
- b)  $\frac{\pi}{4}$  rad
- d)  $\frac{11\pi}{6}$  rad
- **6.**  $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  tem o conjunto solução: alternativa b

a) 
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) 
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) 
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- d)  $S = \emptyset$
- 7. A função f, tal que  $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen } (x + \pi)$ , tem amplitude: alternativa a
  - **a)** 3
- -2
- c) 2π
- d) π
- 8. O intervalo é o conjunto imagem da função de lei  $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos(2x + 1)$ . alternativa d
  - a) [-1, 1]
- c) [-1, 5]
- b) [-2, 2]
- **d)** [1, 5]
- 9. A função  $f(x) = \sin 2x$  tem período: alternativa b
  - a)  $0.5\pi$
- b) π
- c) 2π
- **d)** 3π
- **10.** Em certo lago, a massa de algas, medida em quilograma, varia de maneira periódica conforme a função  $m(t) = 4.500 + 3.400 \cdot \text{sen } \frac{\pi t}{60}$ , em que t

é o tempo, em dias, a partir de 1º de janeiro de cada ano. Entre ocorrências sucessivas de massa máxima ( kg) e mínima ( kg) de algas nesse lago, passam-se dias. alternativa c

- a) 4.500; 3.400; 60
- c) 7.900; 1.100; 60
- **b)** 4.500; 3.400; π
- d) 7.900; 1.100; 120

#### Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.			Х	Х						Х
Estender o conceito de ciclo trigonométrico em R.	х	х	Х	х		х	Х	Х	х	
Resolver equações trigonométricas.					х	х				
Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.							Х	Х	Х	
Páginas do livro referentes ao conceito	78 a 82	78 a 82	78 a 80	83 a 86	87 a 96	87 a 96	92 a 102	92 a 102	92 a 102	92 a 102

# Compreensão de texto

#### Som

Som pode ser entendido como uma variação de pressão muito rápida que se propaga na forma de ondas em um meio elástico. Em geral, [ele] é causado por uma vibração de um corpo elástico, o qual gera uma variação de pressão [de acordo com o] meio à sua volta. Qualquer corpo elástico capaz de vibrar rapidamente pode produzir som e, nesse caso, recebe o nome de fonte sonora.

[...] Para que possamos perceber o som é necessário que as variações de pressão que chegam aos nossos ouvidos estejam dentro de certos limites de rapidez e intensidade. Se essas variações ocorrem entre 20 e 20.000 vezes por segundo[,] esse som é potencialmente audível, ainda que a variação de pressão seja de alguns milionésimos de pascal\*.

[...]

Os sons que ocorrem no meio ou que são gerados por instrumentos musicais são geralmente complexos. Entretanto, para se entender a complexidade sonora[,] torna-se útil partir de um caso mais simples e genérico: o som senoidal, chamado som puro [...], representado pelo gráfico de uma função seno. Esse tipo de som não é gerado por instrumentos tradicionais nem é encontrado na natureza, mas pode ser conseguido artificialmente através de um sintetizador eletrônico.

Disponível em: <a href="http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/introducao/som.html">http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/introducao/som.html</a>. Acesso em: 7 maio 2020.

- 1. a) Som é uma variação de pressão muito rápida que se propaga na forma de ondas em um meio elástico.
- b) O som é causado por vibração de um corpo elástico, o qual gera uma variação de pressão de acordo com o meio à sua
- c) Quando ocorre entre 20 e 20.000 vezes por segundo.



c) resposta pessoal d) resposta pessoal Espera-se, com essa atividade, sensibilizar os alunos em relação aos danos causados por ruídos excessivos. Além

80 dB

90 dB

100 dB

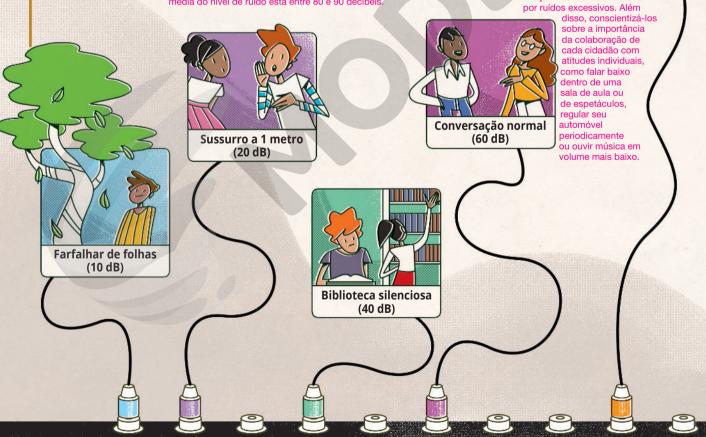
70 dB



\* pascal (Pa): unidade de medida de pressão do Sistema Internacional de Unidades (SI).

4. a) Respostas possíveis: metrô chegando em uma estação; banda de rock; decolagem de avião a jato; alguns metros do lançamento de um foguete.

b) No caso de secadores de cabelos, a média do nível de ruído é cerca de 80 decibéis; nos liquidificadores e nos aspiradores de pó, geralmente a média do nível de ruído está entre 80 e 90 decibéis.



50 dB

60 dB

40 dB

30 dB

0 dB

silêncio absoluto

10 dB

20 dB

Após leitura do texto apresentado na atividade 4, aproveitar a oportunidade para explorar os efeitos colaterais causados pela poluição sonora, recorrendo à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão e a análise crítica para investigar causas, articulando os conhecimentos das áreas de Matemática e de Ciências da Natureza, favorecendo o desenvolvimento da competência deral 2 e da habilidade EM13CNT306 (competência 3) em um trabalho interdisciplinar com essas áreas, avaliando os riscos envolvidos em atividades cotidianas, em que há incidências de sons "que ultrapassam os níveis previstos pelas normas legais e que podem causar problemas auditivos irreversíveis, além de outros problemas também relacionados à saúde", como citado no texto. Com base nesse estudo, pode-se justificar o uso de equipamentos e de recursos, bem como comportamentos de segurança, visando à manutenção da saúde e da integridade física, individual e coletiva (lembrando que saúde é um dos temas contemporâneos que deve ser trabalhado com os alums)

- Responda às questões de acordo com o texto da página anterior.
  - a) O que é som?
  - b) O que gera o som?
  - c) Para qual intervalo de ocorrência da variação de pressão o som é audível para o ser humano?
- 2. Uma onda sonora pode ser representada por um gráfico bidimensional, em que o eixo horizontal representa a passagem do tempo (t) e o eixo vertical representa a variação de pressão ( $\Delta p$ ) em determinado ponto do meio. Qual dos gráficos melhor representa um som senoidal? alternativa c







- Suponha que a variação de pressão de uma onda sonora seja dada por
  - $\Delta p = 1.48 \cdot \text{sen} (1.07\pi x 334\pi t)$ , em que x está expresso em metro, t, em segundo, e  $\Delta p$ , em pascal. Determine a variação máxima de pressão.
- **4.** Leia o texto a seguir e responda às questões.
- [...] Com o passar do tempo, uma pessoa exposta diariamente a sons muito altos pode ter a audição comprometida. [...]

Sons e vibrações que ultrapassam os níveis previstos pelas normas legais e que podem causar problemas auditivos irreversíveis ou perturbar as pessoas é o que se chama de poluição sonora. Apesar das leis e das políticas públicas para controlar o problema e dos alertas feitos por especialistas, a poluição sonora ainda não sensibiliza tanto como a do ar ou a da água.

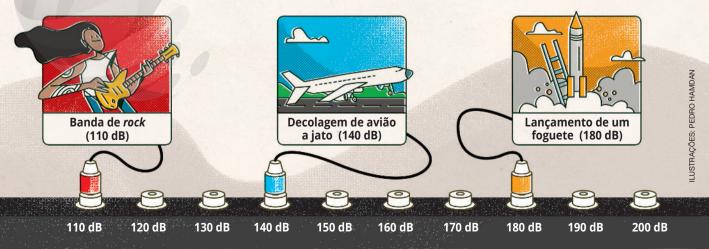
De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), o limite suportável para o ouvido humano é 65 decibéis\*. Acima disso, o organismo começa a sofrer. [...]

A longo prazo, o ruído excessivo pode causar gastrite, insônia, aumento do nível de colesterol, distúrbios psíquicos e perda da audição. Provoca ainda irritabilidade, ansiedade, excitação, desconforto, medo e tensão. [...]

Fonte: JOVER, Ana. Cuidado! Barulho demais faz mal à saúde. Revista *Nova Escola*, n. 179, p. 28-29, jan./fev. 2005.

- a) Com base nas informações destas páginas, cite alguns exemplos de situações que podem gerar sons muito altos e que podem ser prejudiciais à saúde.
- b) Pesquise em livros, revistas ou na internet qual é o nível de ruído, em decibel, atingido por alguns aparelhos eletrodomésticos, como secador de cabelos, aspirador de pó e liquidificador.
- c) Você já sofreu danos causados por ruído excessivo? Se sim, quais foram os sintomas?
- d) Em sua opinião, quais medidas podem amenizar a poluição sonora?

 $<sup>^{\</sup>ast}$  decibel (dB): unidade de medida usada quando se determina o nível de intensidade sonora de uma fonte.



USTRACÕES: ADILSON SECCO

# Educação financeira Bens públicos

#### Para começar e pensar

Cabe ao governo – seja federal, estadual ou municipal – oferecer serviços públicos para atender às necessidades básicas da população, como prover o acesso à saúde, à educação e à segurança. Para cumprir essa função, o governo precisa gerenciar o recolhimento de verbas e decidir a quantia que será investida em cada serviço público.

Em países democráticos, o Poder Executivo – constituído de ministros na esfera federal e de secretários nas esferas estadual e municipal – organiza um orçamento que deve ser aprovado pelo Poder Legislativo – representado pelo Congresso Nacional, em âmbito federal, pela Assembleia Legislativa, em âmbito estadual, e pela Câmara de vereadores, em âmbito municipal. Após aprovação do Legislativo, o orçamento retorna ao Poder Executivo para ser colocado em prática, cabendo aos cidadãos fiscalizar se os principais interesses da população estão sendo atendidos. Por isso, é importante que esses cidadãos exerçam seu voto de maneira consciente.

Cada instituição pública (escolas e hospitais, por exemplo) precisa organizar seu orçamento considerando a verba que recebe e os gastos necessários para a manutenção e o funcionamento do estabelecimento. Em uma escala bem mais ampla, os orçamentos públicos são organizados como um orçamento financeiro familiar: uma tabela destinada para as despesas e outra, para as receitas. A seguir há um recorte mostrando alguns dados do orçamento público da União de 2020.

Orçamento da despesa pública							
Ano	Função (Área de atuação)	Grupo de natureza de despesa	Orçamento atualizado (R\$)				
2020	Educação	Outras despesas correntes	331.520,00				
2020	Previdência social	Pessoal e encargos sociais	34.122,58				
2020	Ciência e tecnologia	Investimentos	7.187.678,00				

Orçamento da receita pública							
Ano	Órgão superior	Origem	Orçamento atualizado (R\$)				
2020	Ministério da Educação	Outras receitas correntes	9.008,00				
2020	Ministério da Economia	Contribuições	606.295.255,00				
2020	Ministério da Defesa	Alienação de bens	200.442,00				

Dados obtidos em: Portal da transparência. Disponível em: <a href="http://www.portaldatransparencia.gov.">http://www.portaldatransparencia.gov.</a> br/orcamento/lista-consultas>. Acesso em: 9 abr. 2020.

Agora, faça o que se pede.

- 1. Você considera importante que serviços básicos sejam oferecidos pelo governo à população? Por quê?
- Cite três serviços públicos oferecidos pelo governo da sua cidade ou do seu estado e discuta com os colegas se as necessidades da população estão sendo atendidas eficazmente.
- **3.** Organize-se em grupos e conversem com funcionários da parte administrativa de sua escola ou de outras do bairro para obter as informações a seguir (e outras que julgarem pertinentes).

#### **Objetivos**

Compreender como funciona o orçamento público de uma escola; estimular os jovens a fiscalizar os serviços públicos e a cuidar, dentro das possibilidades de cada um, dos bens públicos; conhecer a carga tributária praticada no Brasil; discutir direitos, deveres e ética em uma sociedade.

Considerando a BNCC, esta seção isa desenvolver as competências gerais 7, 9 e 10 e a competência específica de Matemática 2. Ela favorece o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais educação financeira, ema desta seção, educação fiscal e educação em direitos humanos. Além disso, é possível, se for conveniente, promover um trabalho interdisciplinar com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas no que diz respeito à competência específica 1. trabalhando a habilidade EM13CHS102 da BNCC. Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998

- a) Quais são os principais gastos da escola?
- b) A verba recebida do governo é suficiente para atender a todas as necessidades?
- c) Além da verba destinada às necessidades da escola, o governo possui outros gastos para garantir o funcionamento da escola? Se sim, qual(is)?
- 4. Ainda em grupos e com base nas informações obtidas na atividade anterior, elaborem um relatório. Nesse relatório, deve constar uma tabela com o orçamento dos valores aproximados das despesas de uma escola durante o mês, bem como a estimativa dos gastos necessários para mantê-la em funcionamento durante um ano.

Para discutir

A principal fonte de arrecadação do governo são os tributos (impostos, taxas e contribuições). Você sabe o que são tributos e de onde eles vêm?

A elaboração de um relatório baseado nas informações obtidas na questão 3, a respeito dos gastos de uma escola, assim como verificar se a verba recebida do governo é suficiente para atender às necessidades para garantir o funcionamento dela, favorece o desenvolvimento da competência geral 7. iá que os alunos trabalham a argumentação com base em informações confiáveis. para formular, negociar e defender ideias e pontos de vista que respeitem e promovam o consumo responsável em âmbito local. Esse trabalho de argumentação também favorece o desenvolvimento da competência geral 9 no exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro.

	Sumiço, 350							
CNPJ 45	5.450.450\0001-45				IDENTIFICA 00000			
Nota Fiscal/	Conta de Energia Elétrica nº		Mês:	07/20	VENCIME			
	ao Fisco: B509.4A0F.E856			07/20	20/07/			
Maria Rua d CPF: 1	Leit. atual: Leit. anterior: Emissão: Apresentação: Data prevista Próx. leitura:	15/06/20 13/07/20 13/07/20 da 13/08/20						
Classificaç	ão: Residencial -		ção Monofásica		Nº dias consun	no: 29		
Medidor	Número Leitura atual	Leitura ar		Consu	mo	FP		
Ativo Reativo	1227845 3948	383	3 1	1	15			
	Neaturo DESCRIÇÃO DO FATURAMENTO 115 kWh × 0,593679 68,27							
IMPORTE COSIP-Co	IMPORTE 68,27 COSIP-Contrib Custeio Serv Ilum Pública 8,46							
	Base de Cálculo	Alíquota	Valor R\$	_	TOTAL A PAG	5AR		
		25%	17.06					
ICMS	68,27	25%						
ICMS PIS	68,27 68,27	1,02%	0,69	R\$	76	,73		

MERCADO NOVO CNPJ: 00.000.000/000-99 AV. DA TECNOLOGIA, 400						
DANFE NFC-e - Documento Auxiliar da Nota Fiscal de Consumidor Eletrônica NFC-e Não permite aproveitamento de crédito de ICMS						
Código   Descrição   Qtde   Un   VI Unit   VI Total						
003277         PRODUTO         1,0000         CX         27,64         27,64           085273         PRODUTO         3,0000         LT         22,00         66,00           807194         PRODUTO         1,0000         CX         15,10         15,10           046281         PRODUTO         1,0000         LT         30,00         30,00						
QTDE. TOTAL DE ITENS         6           VALOR TOTAL R\$         138,74           DESCONTO TOTAL R\$         0,00           FORMA PAGAMENTO         VALOR PAGO R\$           Dinheiro         138,74						
Tributos Totais Incidentes R\$ 65,62						
NFC-e nº 000000001 Série 001 10/03/2020 15:03:53						
Consulte pela Chave de Acesso em  CHAVE DE ACESSO 0000 0000 00000000000000000000000000						

Observe que na conta de energia elétrica e no cupom fiscal acima são cobrados alguns tributos.

Com base nessa conta e nesse cupom, conheça um pouco sobre essa fonte de arrecadação municipal, estadual e federal fazendo o que se pede a seguir.

5. Pesquise os diferentes tipos de tributo existentes. Em seguida, reproduza em seu caderno uma tabela, como a seguinte, e liste alguns impostos, taxas e contribuições. Indique, na última coluna, a esfera governamental responsável pelo tributo pesquisado.

Sigla	Tributo	Esfera responsável
CIP	Contribuição de Iluminação Pública	Governo municipal
ITR	Imposto Territorial Rural	Governo federal
TLIF	Taxa de Fiscalização de Localização, Instalação e Funcionamento	Governo municipal
ODELO	ODELO ODELO	ODETO ODETO

#### Educação financeira

- **6.** Colete algumas notas fiscais e registre o valor total de tributos contidos em cada uma.
  - a) Os tributos cobrados equivalem a qual percentual do total de cada compra?
  - b) Os percentuais cobrados são os mesmos para todas as notas fiscais coletadas? Compare suas notas fiscais com as de seus colegas.
- 7. Por que devemos exigir a nota fiscal sempre que efetuamos uma compra? trabalho interdisciplinar com o professor da Discuta isso com seus colegas.
- 8. Analise a conta de energia elétrica de sua casa.
  - a) Quais são os tributos embutidos na conta de energia elétrica?
  - b) Que esferas governamentais são responsáveis pela arrecadação desses tributos?
  - c) Os tributos equivalem a que percentual do total dessa conta?

### Para finalizar

Por vezes, verbas destinadas a serviços públicos (como obras urbanas, compra de remédios e materiais hospitalares, merenda escolar, entre outros) são desviadas para atender ao interesse pessoal de integrantes dos governos. Essa prática é conhecida como corrupção.

No entanto, não são apenas essas pessoas que agem em benefício próprio em detrimento dos direitos dos cidadãos.

A questão 7 trabalha a educação fiscal quando propõe uma reflexão sobre a necessidade da exigência da nota fiscal, reflexão essa que se encadeia com a destinação dos tributos daí oriundos. Essas questões vêm ao encontro das tomadas de decisões éticas e socialmente responsáveis, já que os tributos arrecadados são utilizados, entre outras coisas, para solucionar problemas sociais como saúde, favorecendo o desenvolvimento da competência específica 2. Se julgar conveniente, é possível fazer um área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade EM13CHS102 (competência específica 1) na discussões sobre as circunstâncias econômicas e sociais que giram em torno desse tema

#### Observação

De acordo com o dicionário Houaiss, corrupção, no sentido empregado no texto, significa:

- ato ou efeito de subornar uma ou mais pessoas em causa própria ou alheia, geralmente com oferecimento de dinheiro, suborno.
- uso de meios ilegais para apropriar-se de informações privilegiadas, em benefício próprio.





- Observe as cenas acima. Você considera errada alguma das atitudes mostradas? Em caso afirmativo, identifique a situação e indique o que deveria ser feito para corrigi-las.
- 10. Você se sente incomodado com atitudes contrárias à ética? Em grupo, conversem a esse respeito. Depois, cada um deve fazer uma lista com atitudes antiéticas presenciadas ou praticadas.

#### Observação

Segundo o dicionário Houaiss, a palavra ética tem os seguintes significados:

- parte da filosofia responsável pela investigação dos princípios que motivam, distorcem, disciplinam ou orientam o comportamento humano, refletindo especialmente a respeito da essência das normas, valores, prescrições e exortações presentes em qualquer realidade social.
- conjunto de regras e preceitos de ordem valorativa e moral de um indivíduo, de um grupo social ou de uma sociedade.
- 11. Algum colega citou alguma atitude antiética que você costuma fazer? Faça uma autorreflexão sobre as atitudes citadas e pense se elas prejudicaram o outro, se foram ilegais ou, ainda, se você teve algum benefício próprio.

As reflexões sobre os temas ética e corrupção promovem as discussões sobre direitos humanos no que diz respeito ao posicionamento ético de cada indivíduo em relação ao outro e aos prejuízos gerados pela corrupção, favorecendo o desenvolvimento da competência geral 7. Nesse contexto, tomadas de decisões com base em princípios éticos e solidários são discutidas e auxiliam na reflexão das atitudes individuais, possibilitando a observação das implicações da falta de ética, de modo geral, e da corrupção, em diferentes grupos, favorecendo, assim, a competência deral 10.

# Pesquisa e ação Maquete

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais 2, 4, 6, 7, 8, 9 e 10, das competências específicas 1, 2 e 3 e das habilidades EM13MAT103, EM13MAT201 e EM13MAT308, além de favorecer o desenvolvimento do tema contemporâneo educação em direitos humanos. Ver comentários e respostas no Guia do Professor.



#### **Objetivos**

Pesquisar sobre o Desenho Universal e a norma técnica NBR 9050; planejar as alterações em espaços da estrutura física escolar para se adaptar à norma; construir uma maquete que represente o espaço escolar; expor a maquete para a comunidade escolar.

As preocupações com questões de acessibilidade estão presentes em diversas áreas responsáveis por construções de escolas, hospitais, calçadas, shopping centers etc., já que é necessário garantir acesso a todos (crianças, cadeirantes, deficientes visuais, idosos, entre outros), respeitando as diferenças das pessoas que circulam nesses espaços. Para isso, recorre-se à abordagem própria da ciência, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para resolver problemas e busca soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas, valorizando a diversidade de saberes e apropriando-se de conhecimentos e experiências para fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania, garantindo liberdade, autonomia e responsabilidade, utilizando dados e informações confiáveis para tomar decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos e favorecendo, assim, o desenvolvimentos das competências gerais 2, 6 e 7.

Observe a estrutura física de sua escola. Você considera que os pisos, a sinalização e a iluminação são adequados a todas as pessoas, respeitando as diferenças entre os que circulam ou poderiam circular nesse espaço?

Para pensar em questões como essas, desenvolveu-se nos Estados Unidos, no final dos anos 1980, o conceito de **Desenho Universal** (*Universal Design*). Trata-se de um conceito ligado à acessibilidade física, isto é, um conjunto de critérios que visam garantir mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa: crianças, adultos, idosos, gestantes, obesos, pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida. Idealizado por profissionais da área de Arquitetura, o Desenho Universal objetiva definir projetos de produtos e ambientes que contemplam a diversidade humana com base em sete princípios:

- 1. Uso igualitário.
- 2. Uso flexível.
- 3. Uso simples e intuitivo.
- 4. Informação de fácil percepção.
- 5. Tolerância ao erro (segurança).
- 6. Esforço físico mínimo.
- **7.** Dimensionamento de espaços para acesso e uso abrangente.

No Brasil, a primeira norma técnica relativa à acessibilidade foi criada em 1985 pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Atualmente denominada NBR 9050 – Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos, a norma foi revisada pela última vez em 2015 e está em vigor até os dias de hoje para regulamentar os parâmetros técnicos de acessibilidade no país.

Nessa atividade, você e seus colegas construirão uma maquete da escola em que estudam, contribuindo com o replanejamento do espaço de acordo com o conceito de Desenho Universal e os parâmetros técnicos da NBR 9050.

#### **Etapa 1: Acessibilidade física**

- 1. Reflita e converse com o professor e os colegas sobre as questões a seguir.
  - a) O que é acessibilidade?
  - b) O que é acessibilidade física? Cite exemplos.
  - c) Por que é preciso pensar em critérios de acessibilidade?

#### **Etapa 2: Desenho Universal e NBR 9050**

- 2. Organize-se em grupos de, no máximo, sete integrantes. Pesquisem informações sobre o Desenho Universal e a NBR 9050. Para nortear a pesquisa, considerem os tópicos a seguir.
  - a) O que é Desenho Universal? Qual é seu propósito?
  - b) Como vocês explicariam cada um dos sete princípios do Desenho Universal? Deem exemplos de como esses princípios podem ser aplicados na prática.
  - c) O público-alvo do Desenho Universal é toda a população, contemplando sua diversidades e as dificuldades permanentes ou temporárias. De acordo com o documento publicado pelo governo do estado de São Paulo, em 2010, intitulado Desenho Universal: habitação de interesse social, os tipos de restrição de mobilidade e de dificuldades mais significativas foram agrupados e classificados da seguinte maneira:
    - Pessoas com mobilidade reduzida ou com deficiência.
    - Usuários de cadeira de rodas.
    - Pessoas com deficiências sensoriais.
    - Pessoas com deficiência cognitiva.

Deem exemplos do público-alvo em cada agrupamento e citem dificuldades enfrentadas por ele.

- d) O que a norma NBR 9050 estabelece? O que ela visa proporcionar?
- e) O que foi considerado para se estabelecerem os critérios e os parâmetros técnicos dessa norma?
- f) O que são os parâmetros antropométricos? Como esses padrões foram determinados na NBR 9050?
- g) Quais são os parâmetros antropométricos apresentados pela norma que vocês consideram mais importantes para o espaço escolar?
- h) Quais são os critérios específicos apresentados na NBR 9050 para os edifícios que abrigam escolas?

Para trabalhar com as etapas 2 e 3, os alunos deverão interpretar e compreender a NBR 9050. Nesse texto, há diversas especificações que empregam unidades de medida de diferentes grandezas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade EM13MAT103 que se articula com as habilidades EM13MAT201 e EM13MAT308, iá que o documento propõe acões adequadas às demandas da comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro e de área e a aplicação de noções de semelhança, que serão utilizadas também na etapa 4. Dessa forma, é possível compreender relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento, possibilitando sua aplicação na busca de soluções de problemas tecnológicos para alicerçar construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho, o que favorecem, também, as competências específicas 1 e 3.

Durante a realização dessas atividades, os alunos vão colocar em prática alguns dos pilares do pensamento computacional: a decomposição, ao dividir o trabalho em etapas claras e objetivas; a abstração, ao identificar as características do ambiente que são de interesse da pesquisa e. também, ao identificar os materiais necessários para construção da maquete. É possível que outros pilares seiam evidenciados durante as discussões com a turma. Se iulgar pertinente, converse com os alunos sobre como os pilares do pensamento computacional podem contribuir para o sucesso do trabalho em sala de aula.

# Etapa 3: Alterações e adequações do espaço físico escolar

3. Com os materiais adequados, incluindo instrumentos de medição, explorem alguns ambientes da escola, fazendo observações e medições a fim de comparar as informações obtidas com o conceito de Desenho Universal e as exigências da NBR 9050.

Observação: Independentemente do tamanho da escola, escolham apenas alguns ambientes, como a sala de aula, o banheiro mais próximo, os corredores centrais e o acesso principal da escola. Não há necessidade de analisar toda a estrutura física da escola.

- **4.** De acordo com os critérios específicos para escolas apresentados na NBR 9050, com o conceito de Desenho Universal e observando as informações obtidas na atividade anterior, quais são as alterações e as adequações necessárias na estrutura física dos espaços explorados?
- **5.** Elaborem uma planta baixa com a escala 1 : 50 para representar os espaços analisados com as alterações

previstas. Caso seja necessário, elaborem outras plantas para mostrar detalhes da estrutura, como uma escada ou rampa. Não se esqueçam de colocar cotas, especificando as medidas.

- **6.** Apresentem as plantas elaboradas para a turma, explicando quais foram as alterações e as adequações feitas e o motivo pelo qual foram realizadas.
- **7.** Após a apresentação de todos os grupos, respondam às questões.
  - a) Os grupos planejaram os novos espaços da mesma maneira?
  - b) Todas as especificações dos ambientes escolhidos foram contempladas? Se não, quais faltaram?
  - c) Para elaborar as plantas, quais foram os conceitos matemáticos usados?
  - d) Há alterações a serem feitas nas plantas apresentadas? Se sim, qual(is)? Realizem as alterações necessárias.

#### **Etapa 4: Maquete**

- **8.** De acordo com as plantas elaboradas na etapa anterior, vocês vão construir uma maquete que representará os espaços escolhidos pelo grupo.
- 9. Antes de iniciar a construção da maquete, vocês precisam definir a escala que vão utilizar.
- **10.** Façam um levantamento dos materiais que serão utilizados e a quantidade necessária de cada um. Busquem escolher materiais recicláveis para a construção da maquete e não se esqueçam de que ela precisa ter uma base de apoio.
- **11.** Após reunirem os materiais e fazerem os cálculos necessários, construam a maquete.

# Etapa 5: Exposição das maquetes e análise coletiva do trabalho

- **12.** Após a definição da data e a escolha de um espaço adequado, organizem a exposição das maguetes.
- 13. Cada grupo também deverá apresentar por escrito o objetivo do trabalho, trazendo informações sobre o Desenho Universal e a NBR 9050, especificando e indicando os critérios adotados.
- **14.** Após a exposição, reúnam-se com toda a turma para avaliarem coletivamente o trabalho realizado com a mediação do professor. Vocês podem discutir os seguintes pontos:
  - As maquetes construídas estavam de acordo com o que foi pesquisado sobre o Desenho Universal e os critérios da NBR 9050?
  - As maquetes representaram espaços que garantem mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa?
  - A exposição das maquetes conseguiu transmitir a importância de garantir acessibilidade física?
  - A turma trabalhou de maneira colaborativa?
  - O que poderia ter sido mais bem executado nesse trabalho?

## Etapa 6: Autoavaliação e relatório do trabalho realizado

- 15. Agora, você fará uma autoavaliação. Para isso, reflita sobre as questões a seguir.
  - O que aprendi sobre acessibilidade física e Desenho Universal?
  - Compreendi a importância da acessibilidade física? Por que ela é importante?
  - Participei dos momentos de pesquisa, de conversa e de organização propostos no decorrer do trabalho?
  - Apresentei ideias, sugestões, mudanças e correções durante a elaboração das plantas e da maquete?
  - Ouvi com atenção e respeito as ideias dos colegas?
  - Houve dificuldades na execução do trabalho? Se sim, qual(is)? Como busquei resolvê-las?
  - O que foi necessário para que nosso grupo cumprisse os prazos estabelecidos e alcançássemos os objetivos do trabalho?
  - Compreendi como as maquetes podem contribuir para planejar um espaço?
     Como isso ocorre?
  - O que aprendi durante a construção da maquete?
  - Quais foram os conteúdos matemáticos utilizados neste trabalho, desde a elaboração das plantas, passando pela escolha dos materiais, até a construção da maquete?
  - Tive dificuldade em aplicar os conteúdos matemáticos? Se sim, qual(is)? O que fiz para suprir essas dificuldades?
- **16.** Agora, escreva um relatório baseado na reflexão das questões anteriores e acrescente outras informações que julgar relevantes. Após finalizar, entregue-o ao professor.

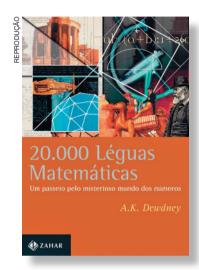
O trabalho da etapa 5 favorece o desenvolvimento da competência geral 4, já que a exposição de maquetes com as adequações para ambientes acessíveis, de acordo com as especificações da NBR 9050, é um modo eficiente de expressar e partilhar informações empregando a linguagem matemática.

O trabalho em grupo requer dos participantes as competências gerais 8, 9 e 10, já que precisam trabalhar no reconhecimento de suas próprias emoções e a dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas, além de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos inclusivos, sustentáveis e solidários.

# Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre tantas outras.

#### Livros

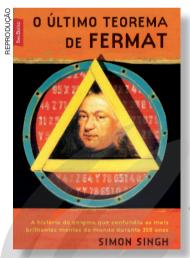


# 20.000 léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números

#### A. K. Dewdney

Rio de Janeiro: Zahar, 2000.

Uma viagem à Grécia e a outros países apresenta ao leitor a discussão e a explicação de alguns dos grandes mistérios matemáticos. Além disso, garante diversão e conhecimentos gerais interessantes para alunos de Ensino Médio. Com um texto bem-humorado, o autor conduz seus estudos sobre teoremas, átomos, equações, Trigonometria e outros assuntos, cativando, informando e, ao mesmo tempo, levando o leitor a ampliar a matemática vista na escola e fora dela. Trata-se de uma leitura que estimula o aprendizado tirando dúvidas e divertindo.



#### O último teorema de Fermat

#### Simon Singh

Rio de Janeiro: BestBolso, 2014.

Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês amador, tinha o hábito de fazer anotações nos livros que lia. Uma das anotações foi a seguinte: "Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito estreita para contê-la". Assim nascia o problema que iria confundir e frustrar os matemáticos mais brilhantes do mundo por mais de 350 anos: a busca da demonstração de que não existe solução, em números inteiros, para  $x^n + y^n = z^n$ , para n maior que 2. Ao narrar a dificuldade de chegar a uma solução, a obra relata a vida e a contribuição dos envolvidos nessa história.



# Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente

#### **Mario Livio**

Rio de Janeiro: Record, 2006.

O que há em comum entre a disposição dos flóculos do girassol, a espiral que delineia a concha de um molusco, a conformação de uma galáxia, a estrutura molecular de cristais e a árvore genealógica de um zangão? Uma razão constante, que há muito tempo intriga a mente humana: a chamada razão áurea. Com uma linguagem acessível e fartamente ilustrada, a obra de Mario Livio fascina os leitores do início ao fim.

Apesar de a visita ao Museu da Matemática Prandiano não ser acessível a todos os alunos (dependendo do local em que este livro estiver sendo usado), é interessante que eles conheçam a existência desse tipo de museu e explorem seu *site* para conhecer parte do acervo de experimentos, pinturas e outros materiais que esse museu oferece. Pesquisar a existência de museus e de espaços de visitação relacionados à matemática em sua cidade e, se possível, levar os alunos a conhecer um ambiente como esse.

#### Museu

#### Museu da Matemática Prandiano

Esse museu dispõe de uma coleção de pinturas que realçam a história da matemática e de diversos experimentos e objetos que materializam ideias abstratas, como máquinas de calcular, experimentos sobre o Teorema de Pitágoras e de Tales, além de máquinas trigonométricas e outros objetos matemáticos interessantes.



Mais informações estão disponíveis em: <a href="https://www.prandiano.com.br/museu">https://www.prandiano.com.br/museu</a>. Acesso em: 11 mar. 2020.

#### **Software**

#### **Desmos**

Desmos é uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line* e que permite aos usuários traçar, de forma simples e intuitiva, gráficos de diferentes tipos de função.

Disponível em: <a href="https://www.desmos.com/calculator">https://www.desmos.com/calculator</a>. Acesso em: 11 mar. 2020.

#### Geogebra

O Geogebra é um software que combina Geometria e Álgebra e possui uma versão que pode ser usada on-line. Entre suas diversas funcionalidades estão a realização de atividades de Geometria dinâmica e a construção e a manipulação de gráficos de funções diversas.

Disponível em: <a href="https://www.geogebra.org/classic">https://www.geogebra.org/classic</a>. Acesso em: 11 mar. 2020.

#### Mathway

A Mathway possui uma calculadora gráfica que pode ser usada *on-line*. Com esse recurso, os usuários podem traçar, de forma simples e rápida, gráficos de diferentes tipos de função.

Disponível em: <a href="https://www.mathway.com/pt/Graph">https://www.mathway.com/pt/Graph</a>. Acesso em: 11 mar. 2020.

#### Vídeos

#### **Desenhando ondas**

Por meio de uma história fictícia, esse vídeo, da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), mostra como a música se relaciona com a matemática por meio do conceito de onda sonora e de funções periódicas e somas de funções periódicas.

Disponível em: <a href="https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086">https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086</a>>. Acesso em: 11 mar. 2020.

### Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista dois profissionais das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da matemática em seu trabalho.

Disponível em: <a href="https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3">https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3</a>. Acesso em: 11 mar. 2020.

#### **Podcasts**

#### Fronteiras da ciência

Esse podcast é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do podcast é divulgar a ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como fake news (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que fala do  $\pi$  (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <a href="http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/">http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/</a>>. Acesso em: 11 mar. 2020.

#### Jornal da USP

O Jornal da USP produz diversos programas no formato de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <a href="https://jornal.usp.br/podcasts/">https://jornal.usp.br/podcasts/</a>. Acesso em: 11 mar. 2020.

#### Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <a href="http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/">http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/</a>. Acesso em: 11 mar. 2020.

# Respostas

#### **CAPÍTULO 1**

- **1.** a) 18
  - **b)** 5
  - c) 15
  - d) Apenas com os dados informados não é possível determinar o valor de x.
- 2. resposta pessoal
- **3.** 1,4 m
- **4.**  $y \approx 24,5 \text{ m e } x = 35,2 \text{ m}$
- **5.** 16,25 cm
- **6. a)** Não, pois triângulos retângulos podem ter formatos diferentes.
  - b) Sim, dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes, pois ambos possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.
- 7. São semelhantes; a razão de semelhança é  $\sqrt{3}$ .
- 8. a) 9 cm
  - b)  $\frac{1}{3}$
  - c)  $\frac{1}{3}$
  - d)  $\frac{1}{9}$
- 9. a) 3 m e 4 m
  - b)  $\frac{1}{10.000}$
- **10.** a)  $\frac{4}{25}$ ; 16%
  - **b)** 230,4 m<sup>2</sup>
- 12. alternativa a
- **13.** a) x = 7,5; y = 9
  - b) x = 2
- **14.** 5,9 m
- **15.** x = 14; y = 6
- 18. alternativa b
- **19.** a)  $8\sqrt{2}$  dm
  - **b)** 20 cm
- **20.** 180 cm
- **21.** a)  $5\sqrt{2}$  cm;  $5\sqrt{3}$  cm
  - **b)**  $d_{\text{cubo}} = a\sqrt{3}$
- **22.** a = 8 cm; b = 6 cm
- **23.**  $\approx$  2,33 m
- **24.** a) Resposta possível: 6, 8, 10 e 5, 12,

- b) Triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.
- **25.** a) PI = 8 cm
  - **b)**  $h \simeq 7,1 \text{ cm}$
  - c)  $m \approx 3.8 \text{ cm e } n \approx 13.2 \text{ cm}$
- **26.** resposta pessoal

#### Exercícios complementares

- 1. alternativa c
- 2. alternativa d
- 3. alternativa a
- 4. alternativa b
- **5.** 8 cm
- 6. alternativa e
- **7**. 4
- 8. alternativa c
- **9.** a) A altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ .
- **10.** 24 cm
- **11.**  $12\sqrt{3}$  cm
- 12. alternativa c
- 13. aproximadamente 44 m
- 14. alternativa a

#### Autoavaliação

- 1. alternativa c
- 2. alternativa a
- 3. alternativa c
- 4. alternativa c
- 5. alternativa d
- 6. alternativa a
- 7. alternativa d
- 8. alternativa d

#### CAPÍTULO 2

- **1.** sen  $\alpha = \frac{12}{13}$ ; cos  $\alpha = \frac{5}{13}$ ; tg  $\alpha = \frac{12}{5}$
- **2.** sen  $\hat{A} = \frac{2}{3}$ ; cos  $\hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ; tg  $\hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- **3.** 36 cm
- **4.**  $\simeq 1.905 \text{ m}$
- **5.** b)  $\approx$  38,3 km
- 6. resposta pessoal
- **8.** a)  $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ ;  $\tan \alpha = \frac{24}{7}$

**b)** 
$$\cos \alpha = \frac{7}{25}$$
;  $tg \alpha = \frac{24}{7}$ 

- **9.** a) x = 5 cm;  $y = 5\sqrt{3}$  cm
  - **b)**  $x = 4\sqrt{3}$  cm;  $y = 30^{\circ}$
- **10.** a) c = 10 m
  - **b)**  $h \approx 8.7 \text{ m}$
- **11.** 1,5 m
- **12.**  $\approx$  20,8 cm
- **13.** ≃ 85 m
- **14.**  $\simeq$  15.6 cm
- 15. alternativa c
- **16.**  $\simeq$  1,026 km
- **17.** a)  $\simeq$  128.000.000 km
  - **b)** ≃ 333
- **18.** a)  $\approx 5^{\circ}$ 
  - b)  $\approx 34,5 \text{ m}$
  - c) resposta pessoal

### **Exercícios complementares**

- **1.**  $\approx$  34,27 m
- **2.**  $\approx$  33,92 m
- 3. alternativa b
- 4. alternativa e
- **5.**  $\approx$  6,34 cm;  $\approx$  8,66 cm
- **6.** x = 40 cm;  $y = 40\sqrt{3}$  cm

#### Autoavaliação

- 1. alternativa c
- 2. alternativa b
- 3. alternativa a
- **4.**  $\simeq 546 \text{ m}$
- **5.**  $\simeq$  50 m
- 6. alternativa a
- 7. alternativa d

### CAPÍTULO 3

- **1. a)** 225°
  - **b)** 210°

c) 90°

- **2.** a)  $\frac{\pi}{6}$  rad
  - b)  $\frac{\pi}{3}$  rad
  - c)  $\frac{2\pi}{3}$  rad
  - d)  $\frac{5\pi}{6}$  rad
  - e)  $\frac{7\pi}{6}$  rad
  - f)  $\frac{4\pi}{3}$  rad

- 3. 144°;  $\frac{4\pi}{5}$  rad
- **4. a)** 120°;  $\frac{2\pi}{3}$  rad
  - **b)**  $\simeq$  14,65 cm
- **5.**  $\simeq$  30,5 cm
- **8.** a)  $A = 160^{\circ}$ ,  $B = 200^{\circ}$  e  $C = 340^{\circ}$ 
  - **b)**  $A = \frac{\pi}{5}$ ,  $B = \frac{4\pi}{5}$  e  $C = \frac{6\pi}{5}$
- **9.** a) 70°
  - b)  $\frac{\pi}{6}$  rad
- 10. a) positivo
  - b) negativo
- **11.**  $\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$
- **12.** a)  $\approx 0.8$ 
  - **b)**  $\simeq -0.8$
  - c)  $\simeq -0.8$
- **13.** a)  $\simeq -0.9$ 
  - b)  $\simeq -0.9$
  - c)  $\approx 0.9$
- **14.** sen  $\alpha \simeq -0.45$ ; sen  $\beta \simeq -0.77$ ; sen  $\theta \simeq 0.98$
- **15.**  $\cos \alpha \simeq -0.67$ ;  $\cos \beta \simeq 0.34$ ;  $\cos \theta \simeq 0.17$
- **16.** sen  $\frac{\pi}{6}$  = sen  $\frac{5\pi}{6}$  =  $\frac{1}{2}$ , sen  $\frac{7\pi}{6}$  = = sen  $\frac{11\pi}{6}$  =  $-\frac{1}{2}$
- **17.** a) 0
  - **b)** 2
  - **c)** 0
  - d)  $\frac{1}{2}$
- **18.** a) 0,342
  - **b)** 0,643
  - c) 0,866
- **19.** a) falsa
  - b) falsa
- **20.**  $1^{\circ}$  quadrante:  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ;  $3^{\circ}$  quadrante:  $\alpha = \frac{5\pi}{4}$
- **21.** a)  $x = 30^{\circ}$  ou  $x = 150^{\circ}$ 
  - **b)**  $x = 135^{\circ}$  ou  $x = 225^{\circ}$
- 22. a) negativo
- b) positivo
- **23.**  $tg \alpha \simeq 0.90$ ;  $tg \beta \simeq -0.36$ ;  $tg \theta \simeq 5.67$
- **24.** a)  $\approx -0.7$ 
  - b)  $\approx 0.7$
  - c)  $\approx -0.7$
- **26.** a) menor que 1
  - **b)**  $\simeq 0.65$
  - c) 1º quadrante
  - d) negativo; positivo; negativo
  - e)  $\simeq -0.65$ ;  $\simeq 0.65$ ;  $\simeq -0.65$

- **27.**  $\frac{12}{13}$
- **28.** a) -0,6
  - **b)** -0,75
- **29.** a) -0,8
  - **b)** -0,6
- **30.** não
- **31.** a)  $x \approx 6.3$  cm;  $y \approx 3.2$  cm
  - **b)**  $x \simeq 40^{\circ}$ ;  $y \simeq 4.5 \text{ m}$
- **32.** a)  $\approx$  17,6 m
  - b) O caminho 1 é o mais curto (aproximadamente 21,4 m contra 24,1 m do caminho 2).
- **33.**  $\approx$  3,95 cm
- **34.**  $\simeq$  36,2 km
- **35.**  $\simeq$  76.36 m
- **36.** a)  $\approx 5.1 \text{ cm}$
- b)  $\simeq 4.8 \text{ cm}$
- **37.**  $\simeq$  17,6 cm
- **38.** a)  $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$ ; obtusângulo
- **39.**  $\simeq$  96 cm;  $\simeq$  74,7 cm
- **40.**  $\simeq$  192,5 km
- **41.** 7 cm
- **42.** 60°

#### Exercícios complementares

- **1.** 225°
- **2.**  $\approx$  38,22 m
- 3.  $\frac{7\pi}{9}$  rad
- 4. 1,4 rad
- **5.** 50°
- **6.** 37°30'
- **7.** a) 0,53
  - **b)** -0,53
  - **c)** -0,53
- **8.**  $tg \frac{7\pi}{6}$ ,  $tg \frac{\pi}{12}$ ,  $tg \frac{23\pi}{12}$ ,  $tg \frac{7\pi}{12}$
- **9.**  $P = 36^{\circ}$  ou  $\frac{\pi}{5}$  rad;  $Q = \frac{4\pi}{5}$  rad;  $R = 216^{\circ}$ 
  - ou  $\frac{6\pi}{5}$  rad;  $S = 324^{\circ}$  ou  $\frac{9\pi}{5}$  rad
- **10.** a)  $\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$ 
  - b)  $\frac{-3-2\sqrt{3}}{6}$
- 11.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- **12.** a) 0,8
  - b) -0.8
  - c) -0.8

- **13.**  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$
- **14.** 15 cm
- **15.**  $\simeq$  55,7 m
- **16.**  $\simeq$  42,75 m
- **17.** a)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 
  - **b)**  $2\sqrt{2}$
- **18.** a)  $\frac{4}{5}$ 
  - b)  $\frac{4}{3}$
- **19.**  $\approx$  8,7 m
- **20.** a) sen  $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 
  - **b)** 60° ou 120°
    - c) 75° ou 15°
- 21. resposta pessoal
- 22. alternativa d

### Autoavaliação

- 1. alternativa d
- 2. alternativa c
- 3. alternativa b
- 4. alternativa b
- 5. alternativa d
- 6. alternativa c
- 7. alternativa a
- 8. alternativa a
- 9. alternativa d
- 10. alternativa c

#### **CAPÍTULO 4**

- **1.** a) p = 4
  - **b)** p = 2
  - c) p = 3
- 2. a) mínimo: 0; máximo: 2
  - b) mínimo: -1; não tem máximo
    - c) mínimo: 8; máximo: 12
- **4.** a)  $60^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$ 
  - b)  $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
  - c)  $25^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$
  - d)  $\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 5. a)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 
  - b)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

### Respostas

- c) -1
- d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- f)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- **g)** 1
- h)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- **6.** sen  $(-\alpha)$  = -sen  $\alpha$  ou sen  $\alpha$  = = -sen  $(-\alpha)$
- **7.**  $1 \le k \le 2$
- 9. a) Porque no gráfico feito no computador o software aproximou os números irracionais para números racionais com duas casas decimais. Assim,  $2\pi$  foi representado por 6,28 ( $2\pi \approx 6,28$ ).
  - **b)** 1
  - c)  $D(f) = \mathbb{R}; Im(f) = [0, 2]$
  - d) resposta pessoal
- **10.** 3.715 pessoas
- 11. a) 5 m; 1 m
  - c) maré alta: às 3 h e às 15 h; maré baixa: às 21 h e às 9 h
  - d) de 12 em 12 horas
- **13.** 0
- **15.** a)  $2\pi$ 
  - **b)** 1
  - c)  $D(g) = \mathbb{R}$ ; Im(g) = [0, 2]
  - d) resposta pessoal
- 17. 12.280 casos; em janeiro
- **18.** a) π
  - b)  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$
  - c)  $D(h) = \mathbb{R} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\};$  $Im(h) = ] -\infty, +\infty[$
- **19.** As funções g(x) e j(x) são simétricas em relação ao eixo x.
- **20.** a)  $\frac{\pi}{3}$  ou  $\frac{5\pi}{3}$ 
  - b)  $\frac{\pi}{3}$  ou  $\frac{2\pi}{3}$
  - c)  $\frac{3\pi}{4}$  ou  $\frac{7\pi}{4}$
  - d)  $\frac{\pi}{2}$
  - e) 0 ou π ou 2π

- **21.** a)  $0, \pi, 2\pi \in \frac{3\pi}{2}$ 
  - b)  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$  e  $\frac{3\pi}{2}$
  - **c)** 0 e 2π
- **22.** 16 h ou 20 h
- **23.**  $\frac{3\pi}{2}$
- **24.** a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ 
  - b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
  - c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
  - d)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
  - e)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
  - f)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- **25.**  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- **26.**  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- **27.** Resposta possível:  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- **28.**  $f(x) \rightarrow \text{gráfico em vermelho}; g(x) \rightarrow \text{gráfico em azul}$
- **30.** a = b = 2

#### Exercícios complementares

- **2.** a)  $135^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ b)  $\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$
- **3.** 3: 5
- **4.** 1.050 toneladas

- 5. alternativa e
- **6.** às 3 h
- 7.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$
- **8.** 2π
- **9.** a)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ 
  - b)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
  - c)  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- **10.**  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
- **12.** a) -1; 1
  - b) -2; 2
  - c) -1; 3
- **13.** a) sim
  - b) não
  - c) não
  - **d)** (π, 0)
  - e) maior
- 14. alternativa a
- 15. resposta pessoal
- **16.** a)  $\frac{2\pi}{3}$  ou  $\frac{4\pi}{3}$ 
  - b)  $\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{4\pi}{3}$

#### Autoavaliação

- 1. alternativa c
- 2. alternativa c
- 3. alternativa d
- 4. alternativa b
- 5. alternativa d
- 6. alternativa b
- 7. alternativa a
- 8. alternativa d
- 9. alternativa b
- 10. alternativa c

# Referências bibliográficas

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <a href="http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol\_pensamento\_computacional.html">http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol\_pensamento\_computacional.html</a>>. Acesso em: 13 maio 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas também para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991. Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <a href="https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo\_de\_Referencia\_em\_Tecnologia\_e\_Computacao.pdf">https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo\_de\_Referencia\_em\_Tecnologia\_e\_Computacao.pdf</a>>. Acesso em: 13 maio 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e de um caderno complementar). Os livros trazem diversos conceitos da Educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os alunos transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <a href="https://ibge.gov.br/">https://ibge.gov.br/</a>. Acesso em: 13 maio 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) oferece diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Esses materiais foram elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria, Números complexos.* 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção do professor de Matemática).

Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro aborda temas como equações e funções trigonométricas, leis do seno e do cosseno, além de números complexos (conteúdo não abordado nesta obra).

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Dominques. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livros conceituados e que são referências em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

LIMA, Elon Lages et al. A Matemática do Ensino Médio. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do professor de Matemática). Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro apresentatópicos como teoria dos conjuntos e funções (afins, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e trigonométricas).

LIMA, Elon Lages et al. Temas e problemas. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção do professor de Matemática).

Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, nesse livro, as teorias são apresentadas de forma simples e acompanhadas de problemas contextuais que permitem mostrar as variadas aplicações de temas como funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, aplicações de Trigonometria, cálculo de volumes, combinatória e Matemática financeira.

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

Destinado a pessoas que se interessam em ter alguma informação sucinta, embora geral, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.





