ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0193P21202
Código da obra: 0193P21202137

CONEXÕES
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Geometria plana e espacial

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Geometria plana e espacial

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: Fabio Simon, Igor Saburo Suga, Jean Rocatelli, José Eduardo de Souza Carrilho Cruz, Magali Bragado, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Rodrigo Terra

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha

Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Cortazzo, Cárita Negromonte, Fernanda Souza, Inaya Oliveira, Leila dos Santos, Mônica Surrage, Rita de Cássia Sam, Sandra G. Cortés, Simone Garcia

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Guia para o professor

PARTE GERAL

Pressupostos teórico-metodológicos IV
- A Base Nacional Comum Curricular IV
- As mudanças no Ensino Médio VIII
- As metodologias ativas IX
- A importância da Matemática XI
- A língua materna e a Matemática XII
- As tecnologias digitais, a computação e a Matemática XIII
- Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade XIV
- A gestão da sala de aula XV
- Um olhar inclusivo XV
- Avaliação XV

Organização e estrutura da obra XVII
- Organização dos volumes XVII
- Sugestão de cronograma XVIII

Sugestões de consulta para o professor XIX
- Livros e artigos XIX

Referências bibliográficas XXI

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume XXIV

Sugestões de ampliação XXIX
Capítulo 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas XXIX
Capítulo 3 Poliedros XXX
Capítulo 4 Corpos redondos XXX

Sugestões de avaliação XXXII
Capítulo 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas XXXII
Capítulo 2 Introdução à Geometria espacial XXXVI
Capítulo 3 Poliedros XLI
Capítulo 4 Corpos redondos XLIV

Resoluções e comentários XLIX
Capítulo 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas XLIX
Capítulo 2 Introdução à Geometria espacial LVI
Capítulo 3 Poliedros LXII
Capítulo 4 Corpos redondos LXV

Educação financeira Economia do país LXXXIV
Pesquisa e ação Feira de empreendedorismo LXXXV

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

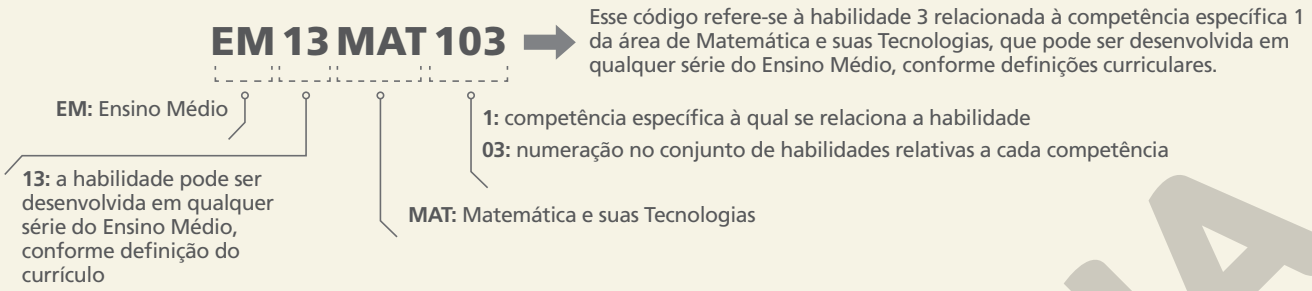
MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "resolver e elaborar problemas" em lugar de "resolver problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

MODERNA

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times,

MODERNA

pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

EM OBRA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

EM MODERNA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

REPRODUÇÃO

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

EM OFERTA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o Scratch trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que: cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu quinze temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

EM MODERNA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

MODERNA

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre *pensamento computacional*.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

EM MODELO

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria analítica
		Transformações geométricas

MODERNA

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.

  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.

- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.

- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.

  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.

- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.

  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.

- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

- LIMA, E. L. *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).

  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.

- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.

  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.

- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).

  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?

- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.

  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.

- PONTE, J. P. *et al*. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.

  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.

- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.

- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.

  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.

- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo.* São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática.* 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/~leo/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM.* Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática.*

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al*. Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática.* Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico "Communications of the ACM", em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

MODERNA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 A abertura do capítulo 2, nas páginas 42 e 43, a situação apresentada na página 50 e os boxes *Observação* e *Explore*, na página 106, do capítulo 4, contribuem para o desenvolvimento dessa competência, pois valorizam o conhecimento historicamente construído para levar o estudante a entender a realidade e a continuar aprendendo sobre os mundos físico, social, cultural e digital.
Competência geral 2 A mobilização dessa competência pode ser observada em momentos que exercitam a curiosidade intelectual e a aplicação da abordagem própria das ciências, como na situação apresentada no capítulo 1, páginas 14 e 15, que propõe ações adequadas às demandas de uma região rural, envolvendo medições e cálculos de perímetro e área, bem como no boxe *Reflita* da página 28. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, do capítulo 3, apresenta um infográfico sobre materiais e formas utilizados em embalagens, com atividades que ajudarão o aluno a perceber que uma simples mudança no formato da embalagem pode levar a uma economia de recursos naturais, favorecendo, assim, o desenvolvimento dessa competência. Na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, é discutido o papel do Estado, que pode variar em diferentes países; e, na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, propõe utilizar a criatividade para pensar em soluções que atendam às necessidades das pessoas, bem como à preservação do meio ambiente.
Competência geral 3 Essa competência, que propõe a valorização de manifestações artísticas e culturais, é favorecida quando se aborda o assunto sobre azulejos decorados, que fazem parte da cultura de países como Portugal e Marrocos, no exercício 6, da página 23, e na seção *Compreensão de texto* das páginas 40 e 41, no capítulo 1, que apresenta aspectos históricos e culturais dos murais.
Competência geral 4 O desenvolvimento da competência é favorecido na página 106, nos boxes *Observação* e *Explore*, em que o foco é a etnomatemática, valorizando e mobilizando diferentes linguagens para expressar e compartilhar informações, experiências e ideias em diversos contextos. A competência também é promovida na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, que propõe a criação de uma feira de empreendedorismo, com a exposição do produto criado, dos relatórios produzidos e a apresentação de todo o processo desenvolvido, de modo que os alunos utilizem linguagens verbais (oral e escrita), bem como o conhecimento das linguagens matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências e ideias no contexto do empreendedorismo.
Competência geral 5 Essa competência é favorecida ao longo do volume, principalmente nos momentos em que os alunos são incentivados a construir, investigar e resolver problemas usando um *software* de Geometria dinâmica, como apresentado no exercício R2, na página 18, do capítulo 1. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, propõe uma pesquisa direcionada e relacionada ao empreendedorismo, o compartilhamento de tais informações com a turma e, em seguida, com a comunidade escolar, contribuindo para o desenvolvimento da competência citada.
Competência geral 6 Essa competência é favorecida no boxe *Reflita*, da página 28, ao valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais, além de favorecer o aluno no apropriar-se de conhecimentos e experiências para entender as relações próprias do mundo do trabalho coletivo no meio rural; na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, em que os estudantes vão refletir sobre a economia de um país, seus setores econômicos, os direitos e as relações trabalhistas e discutir os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro; e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, em que os estudantes vão pesquisar informações sobre empreendedorismo, identificar problemas da comunidade que possam gerar um negócio, definindo um produto, e organizar uma feira de empreendedorismo.

MODERNA

Competência geral 7
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, do capítulo 3, apresenta um infográfico sobre materiais e formas utilizados em embalagens, com atividades que ajudarão o aluno a perceber que uma simples mudança no formato da embalagem pode levar a uma economia de recursos naturais, favorecendo, assim, o desenvolvimento dessa competência.
Essa competência é promovida tanto na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, em que se promove uma reflexão sobre o funcionamento da economia de um país, bem como os mecanismos que promovem o crescimento econômico, quanto na seção *Pesquisa e ação*, páginas 133 a 136, que incentiva o aluno a utilizar a criatividade para pensar em soluções que atendam às necessidades das pessoas, bem como à preservação do meio ambiente.

Competência geral 8
Essa competência é favorecida na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, cujas atividades devem ser feitas, em sua maioria, em grupos, de modo que os alunos desenvolvam competências como autoconhecimento para o cuidado com a saúde emocional, a compreensão da diversidade humana e o reconhecimento das próprias emoções e das dos outros.

Competência geral 9
Essa competência é favorecida em momentos em que os estudantes devem trabalhar em grupos, resolvendo conflitos, cooperando com os colegas, exercitando o respeito e a empatia, como na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, em que o trabalho em grupo é proposto na maioria das atividades.

Competência geral 10
Essa competência é promovida na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, na proposta de discussão a respeito da influência da inflação no orçamento familiar, e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, em que a maioria das atividades propostas deve ser feita em grupo.

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 1

A abertura do capítulo 2, nas páginas 42 e 43, e a seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, procuram valorizar o conhecimento historicamente construído, levando o aluno a fazer uso de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos, favorecendo o desenvolvimento dessa competência específica.

Habilidade EM13MAT104
O desenvolvimento dessa habilidade é favorecido na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, ao propor uma discussão sobre os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro.

Competência específica 2

A competência é promovida na seção *Compreensão do texto*, nas páginas 98 e 99, do capítulo 3, que propõe um trabalho com um infográfico sobre materiais e formas utilizados em embalagens com ações para conscientizar a comunidade.
A seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, também contribui para o desenvolvimento da competência citada ao promover uma reflexão e uma discussão sobre o funcionamento da economia de um país, o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro.
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, propõe a identificação de problemas da comunidade que possam gerar um negócio, definindo um produto e a organização de uma feira de empreendedorismo para apresentar, além do produto criado, o processo de trabalho.

Habilidade EM13MAT201
O texto introdutório, nas páginas 14 e 15, do capítulo 1, que propõe ações adequadas às demandas de uma região rural, envolvendo medições e cálculos de perímetros e áreas; a seção *Compreensão do texto*, nas páginas 40 e 41, que apresenta uma atividade inserida em um contexto de cultura juvenil; e a seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, do capítulo 3, que propõe um trabalho com infográfico sobre materiais e formas utilizados em embalagens, levando o aluno a perceber que uma simples mudança no formato pode levar a uma economia significativa de recursos naturais e incentivando-o a participar de ações para conscientizar a comunidade, contribuem para o desenvolvimento da habilidade citada.

MODERNA

Competência específica 3

Essa competência é desenvolvida em diversos momentos, ao longo de todo o volume, pois textos, atividades, exercícios e seções incentivam os estudantes a utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diferentes contextos e situações.

Habilidade EM13MAT307
A habilidade é promovida em diversos momentos ao longo do volume, como nas páginas 14 e 15, que propõe ações adequadas às demandas de uma região rural, empregando métodos regionais para a obtenção da medida da área de uma superfície em que se deduzem expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais; na página 27, do capítulo 1, que trabalha com diferentes modos de se obter a área de um triângulo; e no boxe *Explore*, da página 29, também no capítulo 1, que trabalha com um método diferenciado de obtenção da área de um trapézio.

Habilidade EM13MAT308
A habilidade é desenvolvida em diversas situações no capítulo 1, como pode ser observado nas páginas 16 e 26, em que o aluno é incentivado a aplicar relações métricas e noções de semelhança para resolver problemas envolvendo triângulos.

Habilidade EM13MAT309
Essa habilidade, que possui grande aplicabilidade em situações práticas, é promovida em vários momentos ao longo do volume. No capítulo 2, são explorados os conceitos e os conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade.
No capítulo 3, nas páginas 79 e 80, o aluno vai resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas em situações reais, como o cálculo do gasto de material para pintura de um imóvel.
No capítulo 4, no estudo do cilindro, do cone e da esfera, os alunos devem lançar mão de definições e procedimentos matemáticos para calcular áreas totais e volumes de corpos redondos em diversas situações.
Na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, os alunos deverão lançar mão de definições e procedimentos matemáticos para construir um protótipo utilizando os conhecimentos de cálculos de áreas totais e volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos para o cálculo da quantidade de material a ser utilizado na embalagem do produto criado, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da habilidade citada.

Habilidade EM13MAT315
O boxe *Pensamento computacional*, da página 77, explica aos estudantes o que é um algoritmo e como registrar um algoritmo por meio de um fluxograma; já o da página 94 solicita aos estudantes que escrevam um algoritmo para calcular o volume do tronco de uma pirâmide regular em linguagem corrente e em um fluxograma.

Competência específica 4

A competência é desenvolvida em diversos momentos ao longo do volume, como no capítulo 1, página 30, na resolução do exercício R7, que envolve diferentes registros de representação matemáticos, bem como nos boxes *Pensamento computacional*, nas páginas 77 e 94.

Competência específica 5

Essa competência é favorecida em diversos momentos ao longo do volume, como no capítulo 1, nas páginas 22 a 24, em que o aluno deve estudar situações envolvendo ladrilhamento, e também no exercício R7, na página 30, em que faz uso de diferentes registros de representação matemáticos.
Em todo o capítulo 2, o aluno investiga e estabelece conjecturas partindo de noções primitivas da Geometria, favorecendo o desenvolvimento da competência específica.
No capítulo 3, a competência também é desenvolvida nas páginas 80 a 84, bem como nas páginas 89 a 94, em que o aluno investiga e estabelece conjecturas a respeito dos processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. A competência também é contemplada no capítulo 4, em que o estudante será levado a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção das medidas da área e do volume de corpos redondos. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 127 a 129, em que o aluno estuda aspectos matemáticos das projeções cartográficas, também propicia o desenvolvimento dessa competência.

Habilidade EM13MAT504
No capítulo 2, são explorados os conceitos e os conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade.
Ao longo das páginas 80 a 84 e 89 a 94, do capítulo 3, o aluno estuda os processos de obtenção da medida para o cálculo do volume de prismas e pirâmides, inclusive o princípio de Cavalieri. Também ao longo de todo o capítulo 4, no estudo do cilindro, do cone e da esfera, a habilidade é promovida.

Habilidade EM13MAT505
Tendo em vista uma situação prática, envolvendo a reforma do piso do quintal de uma casa, na página 22, do capítulo 1, o aluno é levado a resolver problemas sobre ladrilhamento, investigando e elaborando conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas envolvidos, de modo a desenvolver essa importante habilidade.

Habilidade EM13MAT506
Ao propor a representação gráfica do perímetro e da área de um quadrado em função da medida do lado, o exercício R7, da página 30, e o boxe *Reflita* a ele associado, do capítulo 1, contemplam essa habilidade, incentivando o aluno a interpretar as representações, analisando e classificando as funções envolvidas, bem como a distinguir os casos nos quais o comportamento é proporcional.

Habilidade EM13MAT509
Nas páginas 55 a 61, do capítulo 2, são explorados os conceitos e os conteúdos necessários ao desenvolvimento dessa habilidade.
Ao tratar da investigação e do estabelecimento de conjecturas sobre conceitos matemáticos envolvendo diferentes projeções usadas em cartografia, a seção *Compreensão do texto*, nas páginas 127 a 129, do capítulo 4, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade.

Como a competência específica e a habilidade de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Competência específica 3: *Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).*
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, favorece o desenvolvimento dessa competência, pois propõe uma discussão em torno da análise das propriedades e da adequação do material usado nas embalagens de sabão em pó, além de proposições seguras e sustentáveis, considerando o contexto local e cotidiano.

Habilidade EM13CNT307: *Analisar as propriedades dos materiais para avaliar a adequação de seu uso em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e/ou propor soluções seguras e sustentáveis considerando seu contexto local e cotidiano.*
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 98 e 99, favorece o desenvolvimento dessa habilidade, pois propõe a análise das propriedades e da adequação do material usado nas embalagens de sabão em pó, além de discutir proposições seguras e sustentáveis, considerando o contexto local e cotidiano.
A introdução do tópico "Cilindro", na página 101, do capítulo 4, possibilita a discussão sobre propriedades de materiais e avaliação em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e, dessa forma, contribui para o desenvolvimento da habilidade citada.

Como a competência específica e as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume

Habilidade EM13CHS106: *Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.*
A seção *Compreensão do texto*, nas páginas 127 a 129, do capítulo 4, ao utilizar a linguagem cartográfica de forma crítica, significativa e reflexiva para comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos e resolver problemas, favorece o desenvolvimento da habilidade citada.

MODERNA

Habilidade EM13CHS301: *Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.*
A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 133 a 136, ao incentivar a utilização da criatividade para a criação de soluções que atendam às necessidades das pessoas, bem como à preservação do meio ambiente, contribui para o desenvolvimento da habilidade citada.

Competência específica 4: *Analisar as relações de produção, capital e trabalho em diferentes territórios, contextos e culturas, discutindo o papel dessas relações na construção, consolidação e transformação das sociedades.*
A seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, propõe uma reflexão sobre o funcionamento da economia de um país e uma discussão sobre os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro, contribuindo com o desenvolvimento da competência citada.

Habilidade EM13CHS402: *Analisar e comparar indicadores de emprego, trabalho e renda em diferentes espaços, escalas e tempos, associando-os a processos de estratificação e desigualdade socioeconômica.*
O desenvolvimento dessa habilidade é favorecido na seção *Educação financeira*, nas páginas 130 a 132, ao propor uma discussão sobre os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro.

Como a competência específica e as habilidades de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume

Habilidade EM13LGG201: *Utilizar as diversas linguagens (artísticas, corporais e verbais) em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.*
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, favorece a habilidade citada ao utilizar a linguagem artística em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.

Habilidade EM13LGG301: *Participar de processos de produção individual e colaborativa em diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais), levando em conta suas formas e seus funcionamentos, para produzir sentidos em diferentes contextos.*
A atividade proposta na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento da habilidade, pois incentiva a participação do aluno em um processo de produção da linguagem artística, levando em conta suas formas e seus funcionamentos.

Competência específica 6: *Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.*
A seção *Compreensão do texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, favorece o desenvolvimento dessa competência específica ao apresentar um texto sobre a utilização de diferentes murais, tema que atrai a atenção de adolescentes e jovens.

Habilidade EM13LGG601: *Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.*
A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, propicia ao aluno a apreciação de diversos murais, bem como das diversidades que os cercam.

Habilidade EM13LGG602: *Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.*
O texto e a imagem apresentados na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 40 e 41, do capítulo 1, contribuem com a habilidade ao propiciar ao aluno a apreciação de manifestações artísticas e culturais, ao citar os murais de Candido Portinari e ao ilustrar o mural de Eduardo Kobra.

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – Superfícies poligonais, círculo e áreas

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **3** e **4**, da competência específica **6** de Linguagens e suas Tecnologias, das habilidades **EM13LGG601**, **EM13LGG602**, **EM13LGG603** e **EM13LGG704** e da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias.

O exercício proposto **6** propicia um trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias, ao relacionar os polígonos com a técnica de ladrilhamento.

Ao longo da história, os ladrilhos foram criados e recriados por diferentes civilizações, e a Geometria tem um papel importante no desenvolvimento dessa técnica. Ademais, podemos estabelecer um forte paralelo entre a arte e a Geometria no que diz respeito à representação do mundo, uma vez que ambas possuem essa capacidade.

Para iniciar a proposta, aborde a importância de determinadas características e de conceitos da técnica de ladrilhamento, como padronagem, texturas, cores, justaposição, simetria e uso de polígonos. Para somar a essa discussão, fale sobre Athos Bulcão, um importante artista do cenário brasileiro que é referência no assunto.

Nesse momento, apresente aos alunos algumas obras criadas por Athos Bulcão e permita que eles observem e analisem as composições, destacando os padrões utilizados, reconhecendo polígonos e verificando as cores utilizadas. Nos materiais de pesquisa, há um *link* que direciona o leitor às obras do artista. Chame a atenção dos alunos para o impacto desse trabalho na arquitetura. Comente sobre a textura visual criada pela repetição das formas, a importância do uso das cores, entre outros. Se houver disponibilidade, permita que os alunos naveguem na página da Fundação Athos para pesquisar a vida e a importância desse artista para a arte brasileira.

Organize a turma em grupos de quatro ou cinco alunos e peça a cada equipe que construa um *Tangram*, de medida preestabelecida, a seu critério, e recorte as peças. Em seguida, explore as características de cada peça, as relações entre as medidas dos lados de uma peça com as outras e como as peças podem ser encaixadas formando diferentes figuras.

Após a exploração das peças do quebra-cabeça, proponha a cada grupo que elabore um painel com os polígonos do *Tangram*, utilizando técnicas de ladrilhamento. Incentive os alunos na utilização de diferentes cores e texturas. Eles deverão criar um nome para a composição. Por fim, organize uma exposição com os painéis criados.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Portal de revistas da USP**
  <http://www.revistas.usp.br/anaismp/article/view/148057>
- **Fundação Athos Bulcão**
  <https://fundathos.org.br/galeriavirtual>
- **Tangram**
  <http://odin.mat.ufrgs.br/matematicando/tangram.html>
  (Acessos em: 24 maio 2020.)

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2**, **3** e **6**, das competências específicas **1** e **4** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e das habilidades **EM13CHS102**, **EM13CHS104** e **EM13CHS401**.

A seção *Compreensão de texto* aborda um tipo específico de pintura, a de mural, e permite o desenvolvimento de uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Fazendo uma articulação com os murais do artista brasileiro Kobra explorados na seção, aborde os conceitos históricos envolvidos no Muralismo, referência ao movimento de pintura mexicana em painéis e muros, ocorrido na época da Revolução Mexicana – uma das maiores revoluções do século XX.

Inicie a aula conversando com os alunos sobre a parte histórica do surgimento dos murais mexicanos. É importante destacar que foram criados em 1920 como forma de protesto. Esse movimento artístico surgiu para dar voz aos pensamentos críticos e libertários da população, após o maior momento histórico do século XX no país, a Revolução Mexicana (1910). A fim de ter uma renovação cultural, o Ministro da Cultura José Vasconcelos Calderón convidou três grandes artistas para que eles denunciassem as injustiças e desigualdades sociais, além de mostrar a história nacional em forma de arte. A tríade, formada por Diego Rivera (1886-1957), David Alfaro Siqueiros (1896-1974) e José Clemente Orozco (1883-1949), realizou painéis em outros países, como China, Estados Unidos e Polônia. Nesse momento, mostre obras desses três artistas para elucidar o que está sendo discutido e permitir que os alunos visualizem de que maneira essas críticas sociais foram abordadas e trabalhadas por eles.

Para cumprir o papel de movimento cultural de protesto, o Muralismo, está apoiado em alguns pilares, entre os quais o principal é o alcance social. Toda essa contextualização histórica tem por objetivo instigar nos alunos um senso crítico que os faça refletir sobre a sociedade em seus contextos econômicos, culturais, ambientais, políticos etc.

Para estimular a aprendizagem dos alunos, a atividade proposta terá como base a gamificação, uma estratégia de aprendizagem ativa. A proposta consiste em um jogo de perguntas e respostas, elaborado pelos alunos, de modo a abordar o conteúdo sobre o Muralismo, as diferenças e as semelhanças entre os muralistas mexicanos e os murais do Kobra, as críticas sociais, econômicas e ambientais que os artistas carregam em suas obras e outras questões que o professor julgar pertinentes. Podem-se utilizar *sites* ou programas de elaboração de perguntas ou fazê-las em folhas de papel.

Elabore com os alunos, as regras do jogo. Em seguida, organize-os em dois times e peça-lhes que escolham um nome que os represente. Cada time deverá ser dividido em duplas ou em trios. Faça as perguntas de maneira alternada para cada time. Na sua vez, antes de ouvir a pergunta, o time terá que escolher qual será o trio responsável por responder à pergunta daquela rodada. Cada rodada vale um ponto. Finalize o jogo contabilizando os pontos dos times.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Muralismo**
  <https://enciclopedia.itaucultural.org.br/termo3190/muralismo>
- **Kahoot! – Plataforma gratuita de aprendizado baseada em jogos**
  <https://kahoot.com/>
  (Acessos em: 24 maio 2020.)
- ALVES, F. *Gamification*: como criar experiências de aprendizagem engajadoras, um guia completo: do conceito à prática. 2. ed. São Paulo: DVS Editora, 2015.

MODERNA

Capítulo 3 – Poliedros

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2** e **4**, da competência específica **1** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da habilidade **EM13CNT101**.

O tópico "Pirâmides" permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao explorar a geometria molecular. Nessa atividade, os alunos farão a montagem de dois tetraedros regulares: o primeiro, tendo como base a planificação da superfície de um tetraedro, para melhor entendimento e visualização dessa figura geométrica, e o segundo, um modelo vazado feito com varetas, para discussão das geometrias moleculares angular, piramidal e tetraédrica, baseadas na teoria VSEPR (*Valence Shell Electron Pair Repulsion* ou *Teoria da Repulsão dos Pares Eletrônicos da Camada de Valência*). Realize essa atividade explorando as nomenclaturas, as definições e as propriedades dos poliedros abordados nessa atividade.

Etapa 1 – Planificação da superfície de um tetraedro regular

Providencie, com antecedência, folhas de cartolina ou papelão paraná, réguas, lápis, borrachas, transferidores, tesouras, colas ou fitas adesivas. Converse com os alunos sobre as características de um tetraedro regular, verificando se todos reconhecem essa figura. Em seguida, discuta com os alunos a melhor maneira de se construir um molde de um tetraedro regular com os materiais fornecidos. Cada aluno será responsável pela montagem do próprio molde. Não há necessidade de estipular um tamanho único; deixe que eles decidam a melhor maneira de realizar o projeto.

Com o molde em mãos, explore os elementos de um tetraedro, como faces, arestas e vértices, pedindo aos alunos que verifiquem que os triângulos das faces são equiláteros e congruentes. Compreender essa construção é importante para ter uma visão concreta sobre o assunto geometria molecular, considerado bastante abstrato por muitos deles.

Etapa 2 – Montagem de um tetraedro vazado

Antecipadamente, providencie, a cada aluno, seis varetas de palito para churrasco e cola branca. Se não houver disponibilidade de grande quantidade de material, a construção pode ser feita em grupos de três ou quatro alunos.

Peça aos alunos que alinhem as extremidades das varetas para imergir as pontas na cola branca. É importante garantir que todas as varetas tenham o mesmo tamanho e que todas as pontas estejam com cola. Utilizando três varetas, eles devem montar um triângulo, apoiado na mesa e, a partir deste, um segundo triângulo, com duas varetas. Ressalte a eles que um dos lados do primeiro triângulo é comum ao segundo. Para finalizar o tetraedro, com a última vareta, os alunos precisam unir os vértices opostos ao lado em comum dos dois triângulos.

Com a representação pronta, exemplifique moléculas que apresentam quatro nuvens eletrônicas e que, consequentemente, se encaixam na figura tetraédrica. Inicie a discussão tomando como exemplo a molécula da água, que apresenta dois vértices preenchidos com átomos de hidrogênio e outros dois com pares de elétrons não ligantes, sendo o oxigênio o elemento que está no centro do tetraedro, resultando na geometria angular. Em seguida, cite a amônia, que possui três vértices com átomos de hidrogênio e o último vértice com um par de elétrons não ligante, ou seja, geometria piramidal. Por fim, utilize a molécula de metano para demonstrar a geometria tetraédrica, em que todos os vértices estão preenchidos com átomos de hidrogênio. Discuta, também, sobre o ângulo interno do tetraedro regular (109°5') e extrapole para o ângulo de ligação entre os átomos nas moléculas, indicando que esses se desviam do valor do tetraedro regular devido ao volume ocupado pelos pares de elétrons não ligantes e também pela eletronegatividade dos átomos envolvidos nas ligações.

É interessante utilizar diferentes moléculas com essas geometrias para que os alunos observem o padrão existente no preenchimento das arestas com átomos e pares de elétrons não ligantes. Além disso, é importante contextualizar as substâncias citadas em relação a usos e aplicações e também possíveis problemas no meio ambiente e na vida em sociedade, levando-se em consideração que o conhecimento da geometria molecular servirá de base para o entendimento de como as substâncias são encontradas em relação aos seus estados físicos e também das interações com outras substâncias do meio ambiente e dos organismos.

Sugestão de materiais de pesquisa:

- **Vídeo: Poliedros com varetas**
  <https://www.youtube.com/watch?v=AR-aF0JB6ik>
  (Acesso em: 24 maio 2020.)

Capítulo 4 – Corpos redondos

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **4, 6** e **10**, das competências específicas **1**, **3**, **6** e **7** de Linguagens e suas Tecnologias, da habilidade **EM13LGG602**, da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da habilidade **EM13CNT307**.

O tópico "Cilindro" permite um trabalho interdisciplinar com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Linguagens e suas Tecnologias ao explicar os conceitos de reflexão da luz aplicados à fotografia.

Para dar início à atividade, parte-se do princípio de que os alunos já tenham conhecimentos sobre óptica geométrica, como a reflexão e a refração da luz. Sugere-se que os alunos trabalhem em grupos de três ou quatro integrantes, pois durante todo o processo é necessário que realizem pesquisas e amadureçam as ideias, a fim de que o resultado seja o mais efetivo possível.

O professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias pode contextualizar quanto à importância e à utilidade das fibras ópticas, que, por meio da reflexão, ocorre, em seu interior, o transporte da luz. Enfatize que os cabos de fibras ópticas são muito utilizados em diversas áreas, como telecomunicações, artes visuais, medicina e pesquisas espaciais.

De acordo com as áreas do conhecimento, sugere-se que cada professor trabalhe uma vertente da atividade.

O professor da área de Linguagens e suas Tecnologias pode trabalhar com os alunos a linguagem da fotografia incentivando a utilização de *softwares* de edição de imagens. Pode-se utilizar a ferramenta de pesquisa por imagens, de *sites* de busca que tragam referências visuais de artistas, fotógrafos, pintores, atores ou outra manifestação artística. O intuito nesse momento é trazer repertório para que os alunos possam começar a desenvolver suas propostas fotográficas.

O professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias pode trabalhar com os alunos o conceito de reflexão. Para isso, podem

MODERNA

ser usados nas fotografias elementos, como espelhos, materiais refletivos (fitas, pedaços de metal, plásticos, entre outros) e até mesmo poças de água, permitindo a experimentação livre.

Em seguida, durante aproximadamente duas a três horas, os alunos deverão produzir as fotos e a montagem das composições. Sugere-se que os professores responsáveis pelo projeto orientem os alunos com relação aos aspectos técnicos, como iluminação, enquadramento e foco.

Somente depois da parte prática é que os alunos poderão trabalhar com os arquivos das fotos em *softwares* específicos para o tratamento de imagem, caso julgarem ser necessário. Nesse sentido, uma sugestão é o uso do *software* GIMP (*GNU Image Manipulation Program*), que é livre, tem código aberto e pode ser facilmente baixado e instalado em qualquer computador.

Para finalizar, incentive os alunos a produzir uma exposição dos trabalhos com a participação da comunidade escolar. Caso seja possível, imprima as fotos em tamanho A4 coloridas para melhor visualização; se não, a alternativa pode ser projetar os trabalhos produzidos.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Por que ocorre reflexo da paisagem na superfície da água? – Prof. Fernando Lang da Silveira, Instituto de Física da UFRGS**
  <https://www.if.ufrgs.br/novocref/?contact-pergunta=porque-ocorre-reflexo-da-paisagem-na-superficie-da-agua>
- **Miragens – Professor Otaviano, Instituto de Física da USP**
  <http://axpfep1.if.usp.br/~otaviano/miragens.html>
- **Composição fotográfica – Apostila do curso de fotografia de Arte – digital (sob a licença *Creative Commons* 4.0)**
  <http://arte-digital.org/fotografia/composicao.pdf>
- **GIMP – *Software* de edição de imagens**
  <https://www.gimp.org/>
  (Acessos em: 24 maio 2020.)

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1** e **6**; das competências específicas **1** e **3** de Matemática e suas Tecnologias, das habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT307**, e da habilidade **EM13LGG604** de Linguagens e suas Tecnologias.

O boxe *Observação*, na página 106, que explora a Etnomatemática, permite uma atividade de ampliação explorando o assunto apresentado no texto cujo objetivo é valorizar e permitir a compreensão da Matemática presente no cotidiano de diferentes grupos sociais, culturais e regionais, podendo ser desenvolvida em parceria com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias. Ao longo desse trabalho, os alunos terão contato com diferentes noções matemáticas empregadas por pedreiros na construção civil, enquanto discutem a importância de compreender a Matemática por meio de uma visão histórica e cultural.

Após a leitura do texto do boxe, discuta com os alunos o conceito de Etnomatemática. Pode-se sugerir que eles pesquisem o assunto e tragam para a aula as informações obtidas na pesquisa. A Etnomatemática destaca os saberes e as técnicas utilizadas por diferentes grupos, de modo a valorizar esses saberes para cada indivíduo. Os algarismos de uma comunidade indígena, a geometria nas composições de um artista plástico ou as unidades de medida utilizadas por uma bordadeira são exemplos de como a Matemática se manifesta em alguns cenários sem necessariamente ter uma relação direta com os conhecimentos formais aprendidos na escola. Incentive os alunos a pensar em exemplos de conhecimentos matemáticos que alguns grupos de pessoas possam ter, independentemente do que é aprendido na escola. Algumas possibilidades:

- noções de cálculo mental e estimativa ao fazer compras no mercado;
- interpretação de tabelas em jogos de futebol;
- análise de gráficos de crescimento/decrescimento de público em um *site* ou rede social;
- medidas de volume e massa ao cozinhar.

Organize os alunos em grupos de quatro ou cinco integrantes e destaque que o trabalho a ser desenvolvido deve levar em consideração a Matemática empregada por pedreiros e será dividido em três fases:

Fase 1 – Planta baixa

O grupo deve desenvolver uma planta baixa de um cômodo de uma casa, indicando as medidas e a localização de portas, janelas etc. É importante que os grupos se atentem às escalas utilizadas. Nesse momento, ainda não serão estabelecidas conexões entre esse conteúdo e a Etnomatemática; no entanto, é uma etapa importante para o prosseguimento do trabalho.

Fase 2 – Quantidade de materiais

O grupo deve estimar a quantidade de tijolos, areia, cimento e azulejos necessária para a construção desse cômodo. Para isso, deve escolher modelos de tijolos e azulejos, bem como pesquisar as medidas e relacionar essas informações na definição das quantidades finais. Nessa fase, é importante que os alunos tenham liberdade de escolher os métodos utilizados e a maneira como os dados serão apresentados. Em um segundo momento, peça-lhes que compartilhem o modo como efetuaram esses cálculos e relacionem os métodos utilizados aos que pedreiros utilizam no dia a dia – eles podem pesquisar ou conversar com algum pedreiro para descobrir alguns métodos adotados. Algumas possibilidades que podem ser compartilhadas:

- estimativa da quantidade de azulejos e tijolos calculando quantos são necessários para cada metro quadrado;
- medida de volume de cimento e areia tomando como base outras unidades de medida, como uma lata – que equivale a 20 litros ou 0,02 m^3.

Fase 3 – Construção de uma maquete

Nessa fase, o grupo deve se reunir para construir uma maquete do cômodo descrito, com as quatro paredes, mas sem um teto. O professor da área de Linguagens e suas Tecnologias pode envolver-se nessa etapa, incentivando o uso de ferramentas e materiais que privilegiem um produto final firme e criativo. A única restrição na construção é que, para o posicionamento das paredes, os grupos devem garantir o ângulo reto nos cantos; novamente eles devem ter liberdade para definir um método para essa tarefa.

Uma técnica comum utilizada por pedreiros envolve a marcação de dois pontos que distam 30 cm e 40 cm, respectivamente, de um canto em que duas paredes se encontrarão; procura-se então a posição em que a distância entre os dois pontos marcados seja igual a 50 cm para estabelecer a perpendicularidade. Isso é uma aplicação do teorema de Pitágoras e pode ser discutido com todos.

É interessante relacionar os conhecimentos utilizados pelos pedreiros aos conhecimentos escolares, destacando que, apesar de existirem conceitos formais para justificar os métodos utilizados, as técnicas também representam a Matemática que existe no cotidiano desses profissionais. Assim, essas técnicas não são apenas uma representação do que eles já aprenderam, mas sim um conhecimento

MODERNA

sólido que pode ser relacionado ao cenário escolar. Ao final do projeto, se houver disponibilidade, deixe que todos apresentem suas maquetes e encerre com uma discussão sobre a Etnomatemática, listando o que foi aprendido nessas três fases.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Como surgiu a Etnomatemática – Ubiratan D'Ambrosio** <https://www.youtube.com/watch?v=9SNbt5KFq9o>
- **Explorando conteúdos matemáticos envolvidos na construção de uma casa** <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/541-4.pdf> (Acessos em: 24 maio 2020.)

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 – Superfícies poligonais, círculo e áreas

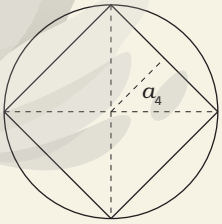
Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.	1
Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.	2, 3, 4 e 5
Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.	5, 6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – (FGV) Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola de seus pés em, aproximadamente,

a) 63 cm.
b) 12,6 m.
c) 6,3 km.
d) 12,6 km.
e) 63 km.

Q2 – (UEG-GO) Observando o desenho a seguir, no qual o círculo tem raio r, e calculando o apótema a_4, obtemos



a) $2r\sqrt{2}$
b) $3r\sqrt{2}$
c) $\frac{3r}{2}\sqrt{2}$
d) $\frac{r}{2}\sqrt{2}$
e) $r\sqrt{2}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Q3 – Determine o raio de uma circunferência circunscrita a um triângulo equilátero de lado medindo 5 dm.

Q4 – (Enem) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

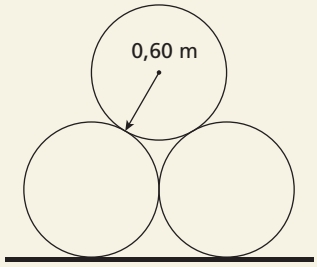
Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

DANIEL SCOLA

Disponível em: <https://www.caminhoes-e-carretas.com/2010/10/caminhao-entala-em-viaduto-no-centro-de.html>. Acesso em: 7 jul. 2020 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

a) 2,82
b) 3,52
c) 3,70
d) 4,02
e) 4,20

MODELO

Q5– (UEL-PR) Algumas figuras geométricas são utilizadas em símbolos, como, por exemplo, a "Estrela de David" (Figura 1).

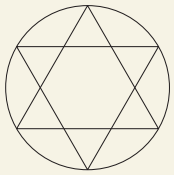


figura 1

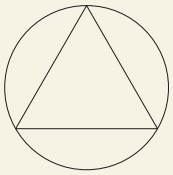


figura 2

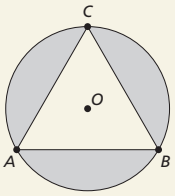


figura 3

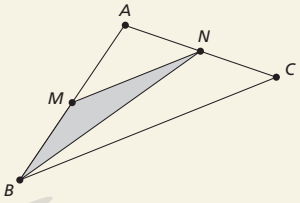
A partir das figuras 1 e 2, desenhou-se um esquema, representado na figura 3, que não obedece a uma escala. Sabe-se que, na figura 3, estão representados uma circunferência de centro no ponto O e um triângulo equilátero (ABC), inscrito nessa circunferência. Considerando que o raio da circunferência é de $\sqrt{48}$ cm, responda aos itens a seguir.

a) Determine a medida do lado do triângulo ABC. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

b) Determine a área representada pela cor cinza na figura 3. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados na resolução deste item.

Q6– O lado de um losango mede 130 mm. Calcule sua área sabendo que a medida de sua diagonal maior é 240 mm.

Q7– (Unicamp-SP) No triângulo ABC exibido na figura a seguir, M é o ponto médio do lado AB e N é o ponto médio de AC.



Se a área do triângulo MBN é igual a t, então a área do triângulo ABC é igual a

a) $3t$ **c)** $4t$

b) $2\sqrt{3}\,t$ **d)** $3\sqrt{2}\,t$

Q8– Calcule a medida da superfície do tampo de uma mesa de formato hexagonal cujo lado mede 40 cm.

Q9– (Enem) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40$ cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60$ cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

a) 16.628 **d)** 41.120

b) 22.280 **e)** 66.240

c) 28.560

Q10– (IFRN) Para explorar assuntos de Matemática, em um trabalho sobre o Comitê Internacional da Cruz Vermelha (CICV), os alunos utilizaram o símbolo oficial desse comitê. Na Figura 1, é possível visualizar as medidas da cruz que compõem o símbolo da entidade escolhida, cujos segmentos são de tamanho x mm e y mm. A expressão algébrica que determina a área sombreada da cruz, em mm², é dada por:

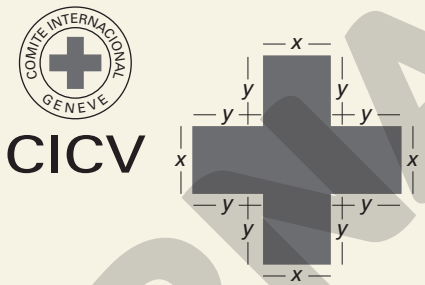


Figura 1

a) $2xy + x^2$. **c)** $4xy + x^2$.

b) $2xy + y^2$. **d)** $4xy + y^2$.

Resoluções da avaliação 1

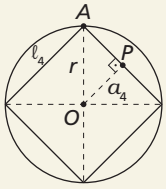
Q1– Seja r a medida do raio da Terra na linha do Equador, em metro. Então, a distância percorrida pelos pés é dada por $2\pi r$ m.

Como a cabeça está a uma distância de 2 m dos pés, o raio da circunferência percorrida por ela é $(r + 2)$ m; logo, a distância percorrida pela cabeça será $(2\pi r + 12{,}6)$ m.

Assim, concluímos que a diferença é 12,6 m.

alternativa b

Q2– Na figura abaixo, observamos o triângulo APO.



O triângulo APO é retângulo; seus catetos medem a_4 e ℓ_4, e a hipotenusa, r. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(a_4)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2$$

Como $a_4 = \frac{\ell_4}{2}$, temos: $\left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{(\ell_4)^2}{2} = r^2$

Logo, a medida do lado do quadrado é: $\ell_4 = r\sqrt{2}$

Assim, a apótema é: $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

alternativa d

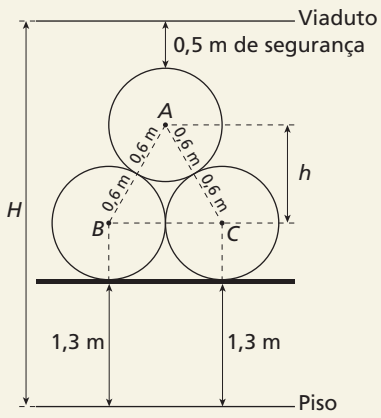
Q3– $\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow 5 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Logo, o raio é $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ dm.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q4 –



A altura mínima do viaduto deverá corresponder, em metro, à soma da altura da carroceria, de dois raios, da altura do triângulo equilátero *ABC* e mais 0,5 de segurança. Assim, a altura mínima do viaduto é:

$H = 1{,}3 + 2 \cdot 0{,}6 + \frac{1{,}2\sqrt{3}}{2} + 0{,}5 = 1{,}3 + 1{,}2 + 0{,}6 \cdot$
$\cdot 1{,}7 + 0{,}5 = 4{,}02$

alternativa d

Q5 – a) Seja h a altura do triângulo e a a medida de seu lado. Como o triângulo é equilátero e está inscrito na circunferência, o raio dessa circunferência é $r = \frac{2}{3}h$; como $r = \sqrt{48}$, então: $h = \frac{3\sqrt{48}}{2} = 6\sqrt{3}$

Assim: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = a^2$

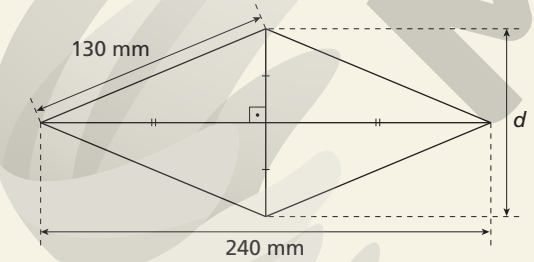
Logo, a medida do lado a do triângulo *ABC* é 12 cm.

b) Seja A_1 a área do triângulo *ABC*; A_2, a área do círculo de centro *O*; e A_3, a área da região acinzentada.
Então: $A_3 = A_2 - A_1$

$A_3 = 48\pi - 36\sqrt{3} = 12(4\pi - 3\sqrt{3}) \simeq 88$

Logo, a área representada pela cor cinza na figura 3 é aproximadamente 88 cm².

Q6 – A área do losango é dada por: $A = \frac{D \cdot d}{2}$



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{240}{2}\right)^2 = 130^2 \Rightarrow \frac{d^2}{4} = 130^2 - 120^2$

$d^2 = 4 \cdot 2.500 \Rightarrow d^2 = 10.000 \Rightarrow d = 100$

Assim, temos:

$A = \frac{240 \cdot 100}{2} \Rightarrow A = 12.000$

Logo, a área do losango é 12.000 mm² ou 120 cm².

Q7 – Sendo *M* o ponto médio de *AB*, temos os triângulos *AMN* e *MBN* com bases e alturas de mesma medida; assim, as áreas de *AMN* e *MBN* são iguais, ou seja, iguais a *t*. De modo análogo, sendo *N* o ponto médio de *AC*, *BCN* e *BAN* possuem a mesma área. Se a área de *BAN* é a soma das áreas de *BMN* e *AMN*, então sua área vale 2*t*.
Logo, a área de *ABC* é a soma de *BAN* com *BCN*, ou seja, $2t + 2t$.
Assim, a área de *ABC* é $4t$.
alternativa c

Q8 – Usando a fórmula da área de superfícies poligonais regulares, temos:

$p = \frac{\ell \cdot 6}{2} \Rightarrow p = \frac{40 \cdot 6}{2} \Rightarrow p = 120$

$a_6 = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = \frac{40 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_6 = 20\sqrt{3}$

$A = p \cdot a \Rightarrow A = 120 \cdot 20\sqrt{3} \Rightarrow A = 2.400\sqrt{3}$

Portanto, a superfície da mesa tem $2.400\sqrt{3}$ cm².

Q9 – Sendo *S* a soma das medidas das áreas, em centímetro quadrado, das dez placas, temos:

$S = 10 \cdot \left(\frac{3{,}14 \cdot 20^2}{2} + 40 \cdot 40\right) = 22.280$

alternativa b

Q10 – A figura 1 pode ser decomposta em quatro retângulos de lados com medidas x mm e y mm e um quadrado central de lados com medida x mm.
A área de cada retângulo é dada por xy mm², e a do quadrado, por x^2 mm².
Portanto, a expressão algébrica que determina a área sombreada da cruz, em mm², é dada por:
$4xy + x^2$
alternativa c

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.	1
Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.	2, 3 e 4
Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.	5, 6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – (IFBA) Foi inaugurada uma praça municipal, de formato circular, com 30 m de raio, toda permeada por 21 refletores à sua volta. Foi projetada para que a distância entre dois refletores vizinhos fosse igual. Adotando o valor de $\pi = 3{,}15$, então a distância, em metro, entre cada dois refletores vizinhos foi de:

a) 7 m
b) 8 m
c) 9 m
d) 10 m
e) 11 m

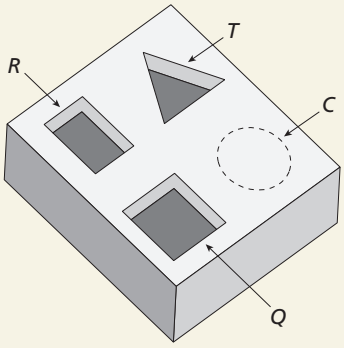
Q2 – Determine a razão entre as medidas dos apótemas de um triângulo equilátero e de um hexágono regular inscritos na mesma circunferência.

Q3 – (Enem) Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

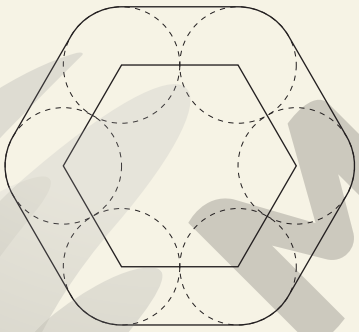
bases distintas: uma quadrada (*Q*), de lado 4 cm, uma retangular (*R*), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (*T*), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (*C*). O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm; (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.



Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente.
Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

a) I **c)** III **e)** V
b) II **d)** IV

Q4 – (ITA-SP) Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo.



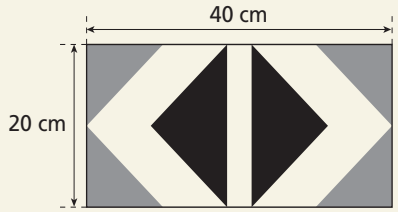
O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm,

a) $18 + 3\pi$ **c)** $18 + 6\pi$ **e)** $36 + 6\pi$
b) $30 + 10\pi$ **d)** $60 + 10\pi$

Q5 – (Uece) A medida da área, em m2, de um hexágono regular inscrito em uma circunferência com raio que mede $\sqrt{2}$m é

a) $3\sqrt{3}$ **c)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $3\sqrt{2}$ **d)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

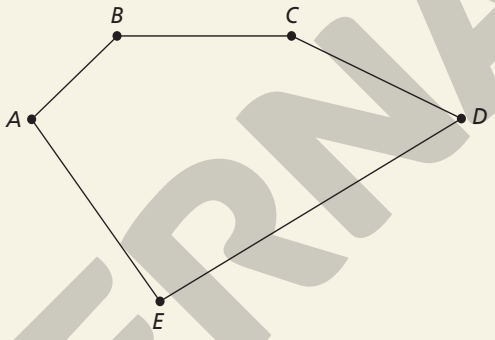
Q6 – (Fatec-SP) Uma artesã borda, com lã, tapetes com desenhos baseados em figuras geométricas. Ela desenvolve um padrão retangular de 20 cm por 40 cm. No padrão, serão bordados dois triângulos pretos e quatro triângulos na cor cinza e o restante será bordado com lã branca, conforme a figura.



Cada triângulo preto é retângulo e isósceles com hipotenusa $12\sqrt{2}$ cm. Cada triângulo cinza é semelhante a um triângulo preto e possui dois lados de medida 10 cm. Assim posto, a área no padrão bordada em branco é, em cm^2,

a) 344 **c)** 582 **e)** 780
b) 456 **d)** 628

Q7 – (Enem) Uma pessoa possui um terreno em forma de um pentágono, como ilustrado na figura.



Sabe-se que a diagonal $\overline{AD}$ mede 50 m e é paralela ao lado $\overline{BC}$, que mede 29 m. A distância do ponto *B* a $\overline{AD}$ é de 8 m e a distância do ponto *E* a $\overline{AD}$ é de 20 m.
A área, em metro quadrado, deste terreno é igual a

a) 658 **c)** 816 **e)** 1.632
b) 700 **d)** 1.132

Q8 – Para a apresentação de uma peça de teatro no colégio, foi montado um palco no formato de um semicírculo. Determine a área ocupada pelo palco, sabendo que o diâmetro do semicírculo mede 10 cm. (Use: $\pi = 3{,}14$)

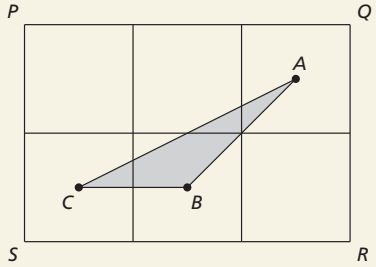
Q9 – (Enem) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6 m, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em 8 m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais 100 m^2 de área. O síndico do condomínio vai avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.
Utilize 3 como aproximação para π.
A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque

a) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 21 m^2.
b) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 24 m^2.
c) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 48 m^2.
d) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 108 m^2.
e) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m^2.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q10– (Uerj) O retângulo *PQRS* é formado por seis quadrados cujos lados medem 2 cm. O triângulo *ABC*, em seu interior, possui os vértices definidos pela intersecção das diagonais de três desses quadrados, conforme ilustra a figura.



Determine a área do triângulo *ABC* tomando como unidade a área de um quadrado de lado igual a 2 cm.

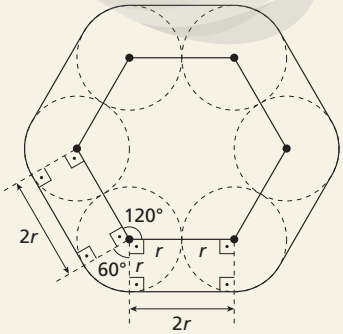
Resoluções da avaliação 2

Q1– Como a praça possui 30 m de raio, calculamos o comprimento da praça e o dividimos pelo número de refletores:
$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}15 \cdot 30 = 189$
São 21 refletores, então: $\frac{189}{21} = 9$
A distância entre cada dois refletores é aproximadamente 9 m.
alternativa c

Q2– Razão: $\frac{a_3}{a_6} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Q3– A circunferência circunscrita no triângulo equilátero tem diâmetro igual a $2R$.
Usando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, cujos os vértices são: o centro da circunferência circunscrita, um dos vértices coincidente com o triângulo equilátero em questão e o vértice formado entre um dos lados e a altura do triângulo equilátero, temos:
$R^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (3{,}4)^2 \Rightarrow R \simeq 3{,}86$
Assim, o diâmetro dessa circunferência é, aproximadamente, 7,72 cm. Já a circunferência inscrita no triângulo tem diâmetro igual ao raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Logo, seu diâmetro mede, aproximadamente, 3,86 cm.
A circunferência que tangencia três lados do retângulo tem diâmetro 3 cm. E a circunferência que circunscreve o retângulo tem diâmetro 5 cm. A circunferência inscrita e a circunscrita ao quadrado têm, respectivamente, diâmetros 4 cm e 5,6 cm.
Para que as peças não caibam na perfuração circular, o diâmetro dela deverá ser menor que 5 cm. Para que a peça da base circular não caiba nas demais perfurações, ela deverá ter diâmetro maior que 4 cm. Assim, a serra copo adequada deverá ter diâmetro de 4,7 cm.
alternativa b

Q4–



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Sejam $r = 5$ cm a medida do raio e C o comprimento, em centímetro, da correia que envolve externamente as seis circunferências. C é dado pela soma de seis segmentos de reta de medidas $2r$ e seis arcos de circunferência de 60° e raio r. Assim:
$C = 6 \cdot 2r + 6 \cdot \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi r$
$C = 6 \cdot 2 \cdot 5 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 5 = 60 + 10\pi$
alternativa d

Q5– Um hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros, cujos lados coincidem com o raio da circunferência circunscrita ao hexágono. Portanto:
$a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}$
$A = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = 3\sqrt{3}$
alternativa a

Q6– Pelo teorema de Pitágoras obtemos a medida dos catetos dos triângulos pretos:
$(12\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = 12$
Assim, cada cateto do triângulo preto mede 12 cm.
A área do padrão pintada em branco, em cm², é:
$A = (20 \cdot 40) - \left[2 \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} + 4 \cdot \frac{10 \cdot 10}{2}\right]$
$A = 800 - [144 + 200] = 800 - 344 = 456$
alternativa b

Q7– A área pedida é dada por:
$A_{ABCD} + A_{ADE} = \frac{(50 + 29)\ 8}{2} + \frac{50 \cdot 20}{2} = 816$
A área do pentágono é 816 m².
alternativa c

Q8– A área do palco é dada por: $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$
$D = 10 \Rightarrow r = \frac{D}{2} \Rightarrow r = 5$
$A = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \Rightarrow A = \frac{3{,}14 \cdot 25}{2} \Rightarrow A = 39{,}25$
Logo, a área ocupada pelo palco é 39,25 m².

Q9– Se o diâmetro do círculo vai ser aumentado de 6 metros para 14 metros, a região a ser pavimentada corresponde a uma coroa circular, cuja área, em metro quadrado, será:
$A = \pi \cdot (7^2 - 3^2) \Rightarrow A = 40 \cdot \pi \Rightarrow A = 40 \cdot 3 \simeq 120$
Logo, o material disponível em estoque para pavimentar 100 m² não será suficiente.
alternativa e

Q10– $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$
Como 1 unidade de área corresponde a 4 cm² (2 cm · 2 cm), então a área equivale a 0,5 u.a. ou $\frac{1}{2}$ u.a.

Capítulo 2 – Introdução à Geometria espacial

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.	7, 8 e 9
Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.	10

MODERNA

Q1 – Responda às questões.

a) Quantas retas passam por um único ponto?

b) Quantas retas passam por dois pontos distintos?

Q2 – (Enem) Um grupo de países criou uma instituição responsável por organizar o Programa Internacional de Nivelamento de Estudos (PINE) com o objetivo de melhorar os índices mundiais de educação. Em sua sede, foi construída uma escultura suspensa, com a logomarca oficial do programa, em três dimensões, que é formada por suas iniciais, conforme mostrado na figura.

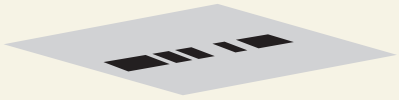
PINE

Essa escultura está suspensa por cabos de aço, de maneira que o espaçamento entre letras adjacentes seja o mesmo. Todas as letras têm igual espessura e ficam dispostas em posição ortogonal ao solo, como ilustrado a seguir.

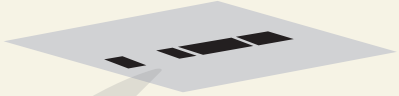
Ao meio-dia, com o sol a pino, as letras que formam essa escultura projetam ortogonalmente suas sombras sobre o solo. A sombra projetada no solo é

a)

b)



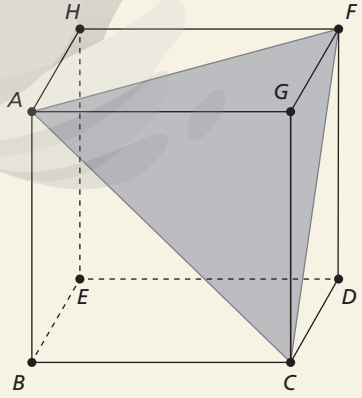
c)



d)

e)

Q3 – (Uerj) A imagem a seguir representa um cubo com aresta de 2 cm. Nele, destaca-se o triângulo *AFC*.



A projeção ortogonal do triângulo *AFC* no plano da base *BCDE* do cubo é um triângulo de área *y*.

O valor de *y*, em cm², é igual a:

a) 1 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 2 **d)** $\frac{5}{2}$

Q4 – (UEM-PR) Sobre geometria espacial, assinale o que for **correto**.

01) Dois planos sempre se interceptam.

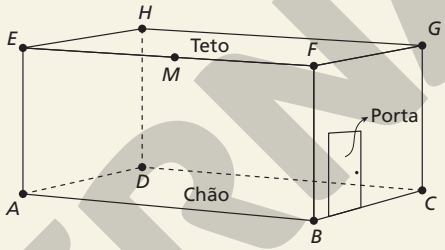
02) Duas retas perpendiculares determinam um único plano.

04) Dado um ponto qualquer *P* e um plano π, existe uma única reta passando por *P* perpendicular ao plano.

08) Se duas retas não são paralelas, então elas são reversas.

16) Se uma reta não intercepta um determinado plano, então necessariamente ela é paralela a ele.

Q5 – (Enem) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura:

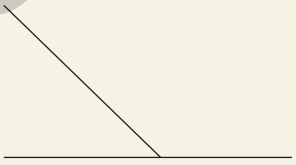


A lagartixa parte do ponto *B* e vai até o ponto *A*. A seguir, de *A* ela se desloca, pela parede, até o ponto *M*, que é o ponto médio do segmento *EF*. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto *M* até o ponto *H*. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

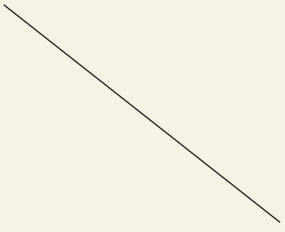
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

a)

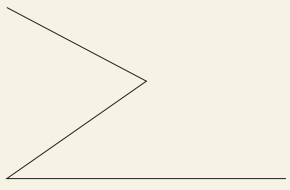
b)



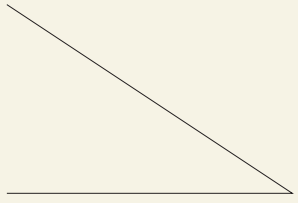
c)



d)



e)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q6– (EsPCEx) Considere as seguintes proposições:

I. Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.
II. Uma reta e um ponto determinam sempre um plano.
III. Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.

Pode-se afirmar que:

a) só I é verdadeira.
b) só III é verdadeira.
c) só I e III são verdadeiras.
d) só III é falsa.
e) só I e III são falsas.

Q7– (IME-RJ) Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância d, um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual é a distância entre esses planos distintos em função de a, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

a) $\frac{a}{2}$ **c)** $\frac{a\sqrt{10}}{8}$ **e)** $\frac{a(4-3\sqrt{2})}{2}$

b) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **d)** $\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$

Q8– (Colégio Naval) Um quadrado $ABCD$, de lado 4 cm, tem os vértices num plano α. Pelos vértices A e C são traçados os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{CQ}$, perpendiculares a α, medindo respectivamente, 3 cm e 7 cm. A distância PQ tem medida, em cm, igual a

a) $2\sqrt{2}$ **c)** $3\sqrt{2}$ **e)** $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3}$

Q9– (Fatec-SP) O ponto A pertence à reta r, contida no plano α. A reta s, perpendicular a α, o intercepta no ponto B. O ponto C pertence a s e dista $2\sqrt{5}$ cm de B. Se a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ em r mede 5 cm e o ponto B dista 6 cm de r, então a distância de A a C, em centímetros, é igual a

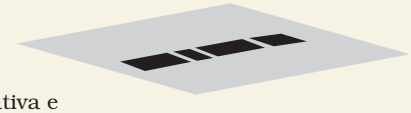
a) $9\sqrt{5}$ **b)** 9 **c)** 7 **d)** 4 **e)** $3\sqrt{5}$

Q10– Seja um diedro de medida 65°. Dê um ponto P externo ao diedro, traçando duas semirretas perpendiculares às faces do diedro. Qual é a medida do ângulo determinado pelas semirretas?

Resoluções da avaliação 1

Q1– a) Infinitas.
b) Uma única reta.

Q2– Fazendo-se a projeção ortogonal, obtém-se:



alternativa e

Q3– A projeção ortogonal corresponde ao triângulo BDC. Portanto: $y = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$

A área do triângulo é 2 cm².
alternativa c

Q4– Analisando as sentenças, temos:

01) Incorreto, pois dois planos podem ser paralelos.
02) Correto, pois duas retas concorrentes determinam um único plano.
04) Correto, pois uma reta perpendicular a um plano o cortará em um único ponto.
08) Incorreto, pois se elas não são paralelas, podem ser concorrentes, além de reversas.
16) Correto, pois retas e planos que não se interceptam são ditos paralelos.

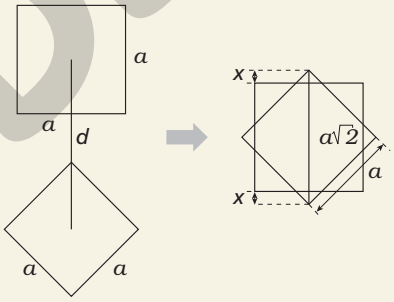
Q5– Sendo B, A e M coplanares, a projeção ortogonal do deslocamento de A para M está contida no segmento $\overline{AB}$. E ainda, a projeção ortogonal do deslocamento de M para H sobre o chão do quarto corresponde a um segmento de reta oblíquo em relação a $\overline{AB}$, cuja origem é o ponto M', médio de $\overline{AB}$, e cuja extremidade é o ponto D, projeção de H sobre o plano ABC.
alternativa b

Q6– Analisando as afirmações, concluímos que:

I. Falsa, pois a reta pode ser paralela ou reversa.
II. Falsa, pois uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.
III. Verdadeira.

Portanto, só a afirmação III é verdadeira.
alternativa b

Q7– Com base nas informações dadas, calculamos a diagonal de cada quadrado, que mede $a\sqrt{2}$, e a altura de cada triângulo equilátero, que mede $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, e podemos fazer o seguinte esquema:



Observando a parte direita do esquema, temos:

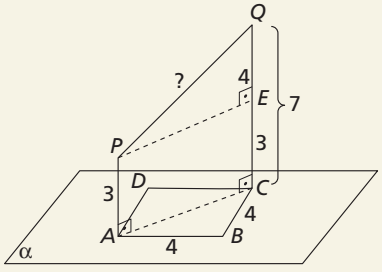
$a + 2x = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$

Considere o triângulo retângulo de catetos d e x e hipotenusa coincidente com a altura de um dos triângulos equiláteros, cuja medida é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Temos: $d^2 + \left(\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$

alternativa d

Q8– Organizando os dados em uma figura, temos:

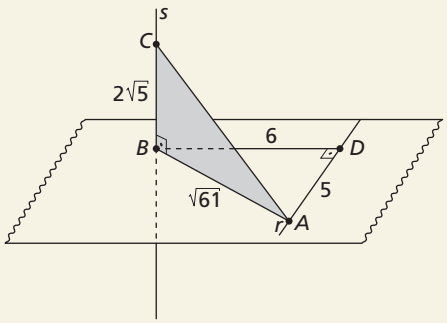


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

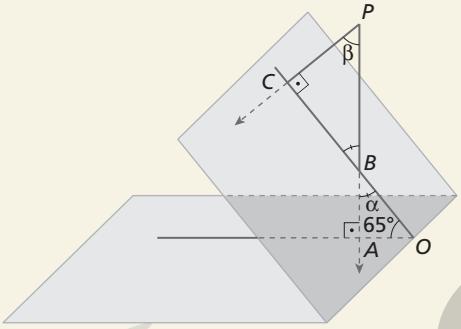
$PE = AC = 4\sqrt{2}$
$QE = 7 - 3 = 4$
Portanto: $PQ^2 = 4^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow PQ = 4\sqrt{3}$
alternativa e

Q9 – Organizando os dados em uma figura, temos:



No triângulo retângulo ADB, temos:
$(AB)^2 = (6)^2 + (5)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 61$
No triângulo retângulo ABC, temos:
$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$
$(AC)^2 = 61 + \left(2\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow AC = 9$
alternativa b

Q10 – O esquema abaixo representa a situação.



ADILSON SECCO

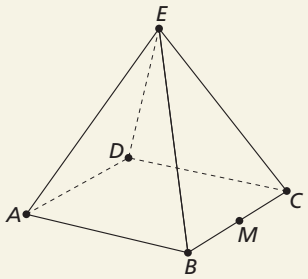
Considerando que o ângulo $A\hat{O}B$ mede 65°, temos:
$\alpha + 65° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 25°$
Como os ângulos $O\hat{B}A$ e $P\hat{B}C$ são opostos pelo vértice, o ângulo $P\hat{B}C$ mede 25°. Assim:
$\beta + 90° + 25° = 180° \Rightarrow \beta = 65°$
Logo, o ângulo $B\hat{P}C$ formado pelas semirretas mede 65°.

Avaliação 2

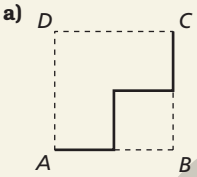
Objetivos do capítulo	Questões
Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.	1, 2, 3, 4 e 5
Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.	6, 7, 8 e 9
Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.	10

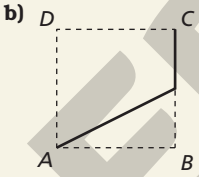
Q1 – Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
a) Duas retas reversas são coplanares.
b) Duas retas concorrentes são coplanares.
c) Duas retas paralelas, não coincidentes, são reversas.
d) Se $r \cap s = \{\ \}$, então r e s são retas paralelas não coincidentes ou reversas.

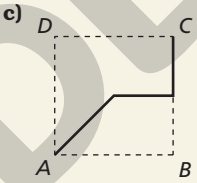
Q2 – (Enem) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

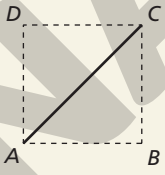


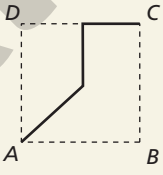
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. O desenho que Bruno deve fazer é

a)


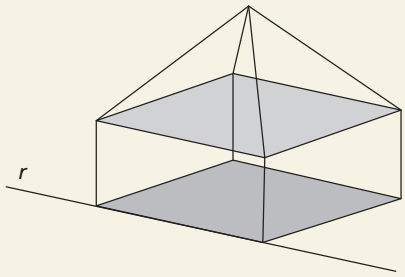
b)


c)


d)


e)


Q3 – (Unifesp) Considere o sólido geométrico exibido na figura, constituído de um paralelepípedo encimado por uma pirâmide. Seja r a reta suporte de uma das arestas do sólido, conforme mostrado.



Quantos pares de retas reversas é possível formar com as retas suportes das arestas do sólido, sendo r uma das arestas do par?
a) 12
b) 10
c) 8
d) 7
e) 6

Q4 – Classifique cada uma das proposições em verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
a) Existem infinitas retas distintas no espaço.
b) Por uma reta passa um único plano.
c) Um plano contém infinitos pontos.
d) Três pontos não colineares são sempre coplanares.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q5– (Mackenzie-SP) r, s e t são retas distintas tais que s é perpendicular a r e t é perpendicular a r. Relativamente às retas s e t, podemos afirmar que:

a) elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.
b) elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.
c) elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.
d) elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.
e) elas podem ser unicamente reversas.

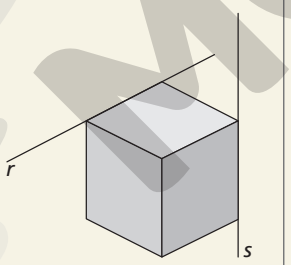
Q6– (UEM-PR) Três fontes luminosas pontuais A, B e C formam um segmento de reta de extremidades A e C em que B é o ponto médio desse segmento $\overline{AC}$. Suponhamos que a reta AC esteja posicionada a 40 cm de um plano π e que $P \in \pi$ é um ponto de incidência de luz. Suponhamos que a reta AC é perpendicular à reta PB e que o meio é homogêneo e transparente.
Assinale o que for **correto**.

01) O raio de luz proveniente do ponto A, e que sofre reflexão em P, atinge o ponto B.
02) Existe ao menos um ponto $Q \in \overline{AC}$ com uma fonte luminosa pontual, cujo raio de luz incide em P, que teria sua reflexão incidindo em $Q' \in \overline{AC}$, de maneira que o triângulo QPQ' seja escaleno.
04) Se o raio de luz proveniente de A sofre reflexão em P e atinge $A' \in AC$, e se o triângulo APA' é um triângulo retângulo, então a distância de A até A' é de 80 cm.
08) Considere duas fontes luminosas, pontuais e distintas, M, $N \in \overline{AB}$, distintas de B, emitindo um raio de luz em P cujas reflexões M' e N' estão na reta $\overline{AC}$, respectivamente. Assim definidos, os triângulos MPM' e NPN' são semelhantes.
16) Sendo a reflexão do raio de luz difusa, a trajetória da luz refletida será parabólica.

Q7– (Fuvest-SP) O ângulo θ formado por dois planos α e β é tal que $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$. O ponto P pertence a α e a distância de P a β vale 1. Então, a distância de P à reta intersecção de α e β é igual a

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{6}$ **d)** $\sqrt{7}$ **e)** $\sqrt{8}$

Q8– (UEL-PR) As retas r e s foram obtidas prolongando-se duas arestas de um cubo, como está representado na figura a seguir.



Sobre a situação dada, assinale a afirmação INCORRETA.

a) r e s são retas paralelas.
b) r e s são retas reversas.
c) r e s são retas ortogonais.
d) Não existe plano contendo r e s.
e) $r \cap s = \varnothing$

Q9– (ITA-SP) Das afirmações:

I. duas retas coplanares são concorrentes;
II. duas retas que não têm ponto em comum são reversas;
III. dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;
IV. os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo;

é (são) verdadeira(s) apenas

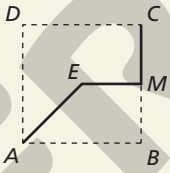
a) III. **c)** II e III. **e)** I, II e IV.
b) I e III. **d)** III e IV.

Q10– Sabendo que a distância de um ponto W a um plano ϕ é 24 cm e que sua projeção ortogonal W' sobre ϕ é o centro de uma circunferência contida nesse plano, se a distância de W a qualquer ponto da circunferência é 30 cm, qual é o raio dessa circunferência?

Resoluções da avaliação 2

Q1– a) Falsa. Pela definição, se duas retas são reversas, não existe um mesmo plano que as contenha. Logo, retas reversas não são coplanares.
b) Verdadeira. Pelo teorema 3, se duas retas são concorrentes em determinado ponto, elas determinam um único plano.
c) Falsa. Pelo teorema 2, duas retas paralelas, não coincidentes, determinam apenas um plano. Como retas reversas não são coplanares, então duas retas paralelas não coincidentes não são reversas.
d) Verdadeira. Um par de retas pode ser paralelo, reverso ou concorrente, e apenas as retas paralelas não coincidentes e as reversas não têm nenhum ponto em comum.

Q2– Seguindo o caminho proposto no enunciado, temos:

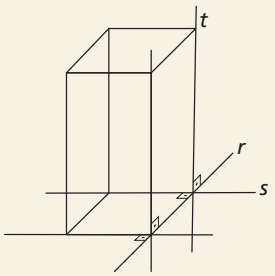


alternativa c

Q3– Analisando as possibilidades, verificamos que há 4 pares formados com as arestas da pirâmide e mais 4 com as outras arestas não adjacentes. Concluímos, assim, que são 8 pares de retas no total.
alternativa c

Q4– a) Verdadeira. Dado um plano α, pelo postulado P3 existe um ponto P, $P \notin \alpha$. Pelo postulado P2, o plano α tem infinitos pontos. Assim, sendo $Q_1 \in \alpha$ e $Q_2 \in \alpha$ tais que $Q_1 \neq Q_2$. Como $P \notin \alpha$, temos $P \neq Q_1$ e $P \neq Q_2$. Logo, pelo postulado P4, existem as retas $\overleftrightarrow{PQ_1}$ e $\overleftrightarrow{PQ_2}$. Por construção, os pontos P, Q_1 e Q_2 não são colineares; logo, $\overleftrightarrow{PQ_1} \neq \overleftrightarrow{PQ_2}$. Desse modo, há infinitas retas $\overleftrightarrow{PQ_n}$ distintas no espaço.
b) Falsa. Pelo postulado P8, sabemos que intersecção de dois planos distintos é uma reta. Logo, por uma reta passam pelo menos dois planos distintos.
c) Verdadeira. Pelo postulado P2, toda reta e todo plano são conjunto de infinitos pontos.
d) Verdadeira. Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um único plano; logo, são sempre coplanares.

Q5– De fato, elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas, pois, organizando os dados do enunciado, temos:



alternativa d

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q6– Correto: 04

01) Incorreto, pois ângulo de incidência e reflexão são congruentes, então o raio de luz atinge o ponto C.

02) Incorreto, pois os ângulos $Q\hat{P}B$ e $B\hat{P}Q$ são congruentes, assim como os lados QB e BQ', então o triângulo QPQ' é isósceles para todo $Q \in \overleftrightarrow{AC}$ e $Q \neq B$.

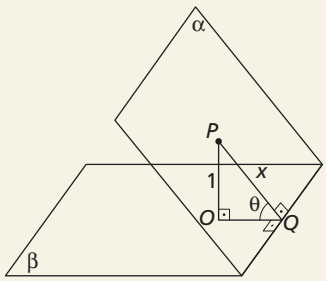
04) Correto. Como $A' = C$, temos que os triângulos APA' e APA' são congruentes. O triângulo APC é formado pelos triângulos APB e BPC. Aplicando Pitágoras no triângulo APC e sendo $AP = PC = x$, obtemos $AC = x\sqrt{2}$. Depois, aplicando Pitágoras novamente em um dos dois triângulos que forma o triângulo APC e sendo $AB = BC = a$, temos $a = 40$. Assim, se $AC = 2a$, concluímos que $AC = 80$ cm.

08) Incorreto. Como $M \neq N$, temos $MPM' \neq NPN'$. Em consequência, os triângulos isósceles MPM' e NPN' não podem ser semelhantes.

16) Incorreto, pois a trajetória será retilínea.

Comentário: Embora o enunciado da questão não utilize a notação de reta adotada na obra, optamos por fazê-la na resolução.

Q7– Seja $x = PQ$ a distância entre o ponto P e a reta de intersecção dos planos α e β. No triângulo retângulo OPQ, tem-se:



$\text{tg}\,\theta = \dfrac{1}{OQ}$

Assim: $\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{1}{OQ} \Rightarrow OQ = \sqrt{5}$

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2$

Assim: $x^2 = 1^2 + (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x = \sqrt{6}$, pois $x > 0$.

alternativa c

Q8– Como as retas r e s não estão no mesmo plano, não podem ser paralelas.

alternativa a

Q9– Sobre as afirmações:

I. Falsa, pois podem ser paralelas distintas, coincidentes ou concorrentes.

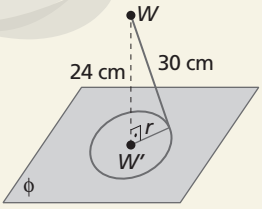
II. Falsa, pois podem ser paralelas distintas ou reversas.

III. Verdadeira.

IV. Verdadeira, pois os lados opostos são paralelos.

alternativa d

Q10– Com base nas informações do enunciado, é possível elaborar o esquema abaixo:



ADILSON SECCO

Representando a medida do raio da circunferência por r, temos:

$30^2 = 24^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 900 - 576 \Rightarrow r^2 = 324 \Rightarrow r = 18$

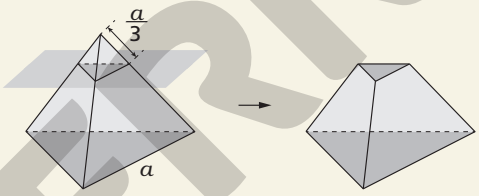
Logo, o raio da circunferência mede 18 cm.

Capítulo 3 – Poliedros

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar poliedros – incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides – e seus elementos.	1 e 2
Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.	3 e 4
Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.	5, 6, 7 e 8
Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).	9 e 10

Q1– (Enem) As luminárias para um laboratório de matemática serão fabricadas em forma de sólidos geométricos. Uma delas terá a forma de um tetraedro truncado. Esse sólido é gerado a partir de secções paralelas a cada uma das faces de um tetraedro regular. Para essa luminária, as secções serão feitas de maneira que, em cada corte, um terço das arestas seccionadas serão removidas. Uma dessas secções está indicada na figura.



Essa luminária terá por faces

a) 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

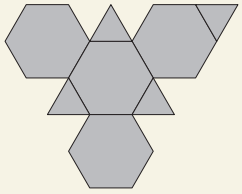
b) 2 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

c) 4 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

d) 3 quadriláteros e 4 triângulos isósceles.

e) 3 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros.

Q2– (UFJF-MG) A figura abaixo corresponde à planificação de um determinado poliedro:



O número de vértices desse poliedro é

a) 12 **b)** 18 **c)** 21 **d)** 30 **e)** 36

Q3– (Enem) É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada. Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

a) Quadrados, apenas.

b) Triângulos e quadrados, apenas.

c) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.

d) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.

e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q4– A soma das medidas das arestas de um cubo é 108 cm. Encontre a medida de cada aresta, da diagonal de uma face e da diagonal desse cubo.

Q5– Seja uma pirâmide de base triangular com área da base igual a $12\sqrt{3}$ cm². Calcule o volume dessa pirâmide, sabendo que sua altura é $2\sqrt{2}$ cm.

Q6– (UFRGS–RS) Um prisma reto de base hexagonal regular tem a mesma altura de um prisma cuja base é um triângulo equilátero. Considere h a medida da aresta da base do prisma hexagonal e t a medida da aresta da base do prisma triangular. Se ambos os prismas têm o mesmo volume, então a razão $\frac{h}{t}$ vale

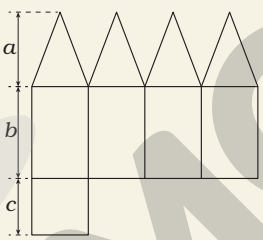
a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** 1 **d)** $\sqrt{6}$ **e)** 6

Q7– Determine a área total e o volume de um prisma hexagonal regular cujas dimensões são: aresta da base 8 cm e altura 15 cm.

Q8– (Enem) Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1.000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina. A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

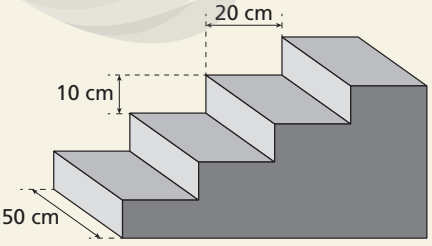
a) 11,25 **c)** 28,80 **e)** 49,50
b) 27,00 **d)** 32,25

Q9– (Unicamp-SP) A figura ao lado exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos a, b e c.



a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.
b) Para $a = 13$ cm, $b = 16$ cm e $c = 10$ cm, calcule o volume desse poliedro.

Q10– (Fuvest-SP) A figura mostra uma escada maciça de quatro degraus, todos eles com formato de um paralelepípedo reto-retângulo. A base de cada degrau é um retângulo de dimensões 20 cm por 50 cm, e a diferença de altura entre o piso e o primeiro degrau e entre os degraus consecutivos é de 10 cm. Se essa escada for prolongada para ter 20 degraus, mantendo o mesmo padrão, seu volume será igual a



a) 2,1 m³ **c)** 3,0 m³ **e)** 6,0 m³
b) 2,3 m³ **d)** 4,2 m³

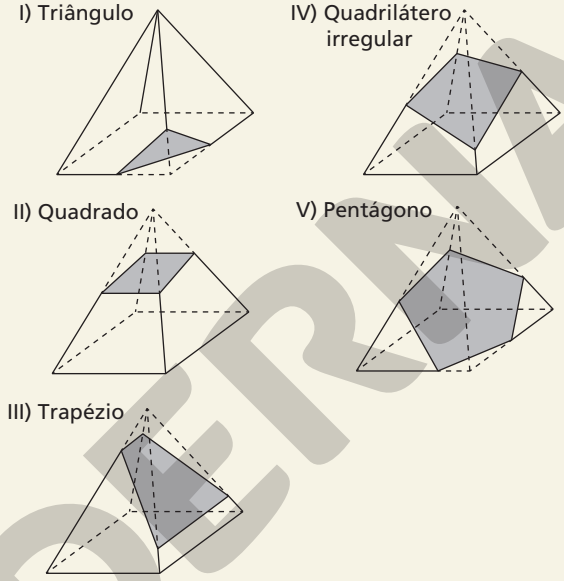
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Resoluções da avaliação 1

Q1– A luminária terá por faces 4 triângulos equiláteros de lado $\frac{a}{3}$ e 4 hexágonos regulares de lado $\frac{a}{3}$.
alternativa a

Q2– $F = 8$ e $A = 18$ (4 hexágonos + 4 triângulos)
$V + F = A + 2 \Rightarrow V + 8 = 18 + 2 \Rightarrow V = 12$
alternativa a

Q3– O artista plástico pode obter: triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, como pode ser observado nas figuras a seguir.



alternativa e

Q4– Como um cubo é um hexaedro, ele tem 12 arestas. Logo:
$12a = 108 \Rightarrow a = 9$
Calculando a diagonal da face e a diagonal do cubo, obtemos, respectivamente: $f = 9\sqrt{2}$ e $d = 9\sqrt{3}$
Portanto, cada aresta mede 9 cm, a diagonal da face mede $9\sqrt{2}$ cm e a do cubo mede $9\sqrt{3}$ cm.

Q5– $V = \frac{12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = 8\sqrt{6}$
O volume da pirâmide é $8\sqrt{6}$ cm³.

Q6– Considerando H a altura dos prismas, temos:

$$V_h = 6 \cdot \frac{h^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H \text{ e } V_t = \frac{t^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H$$

Mas: $V_h = V_t \Rightarrow 6 \cdot \frac{h^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{t^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H \Rightarrow \frac{h}{t} = \frac{1}{\sqrt{6}}$
alternativa a

Q7– $A_{total} = 6 \cdot 8 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 8^2 \sqrt{3}}{4}$

$A_{total} = 720 + 192\sqrt{2}$

$A_{total} = 48(15 + 4\sqrt{3})$

$V = \frac{6 \cdot 8^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 15 \Rightarrow V = 1.440\sqrt{3}$

Logo, a área total do prisma é de $48(15 + 4\sqrt{3})$ cm² e o volume é $1.440\sqrt{3}$ cm³.

Q8– Temos que: 1,5 mL do produto para cada 1.000 L = 1 m³ e o volume de água na piscina = $3 \cdot 5 \cdot (1{,}70 - 0{,}50) = 18$
A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina, é: $18 \times 1{,}5 = 27$
alternativa b

MODERNA

Q9– a) Como os triângulos são congruentes, podemos concluir que o poliedro é formado por uma pirâmide reta, cuja base é um quadrado de lado c e cuja altura da face lateral mede a, apoiada num paralelepípedo reto-retângulo, que tem duas faces quadradas de lado c e quatro faces retangulares de lados b e c. Assim, o poliedro possui 9 vértices e 16 arestas.

b) Sendo h a altura da pirâmide, em centímetro, temos:

$a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$

O volume do poliedro é dado pela soma dos volumes da pirâmide e do paralelepípedo reto-retângulo. Assim, o volume do poliedro, em centímetro cúbico, é dado por:

$V = \frac{1}{3} c^2 \cdot h + c^2 \cdot b$

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 + 10^2 \cdot 16 = 2.000$

Portanto, o volume do poliedro é 2.000 cm³.

Q10– O volume V_E da escada é dado pela soma dos volumes de 20 paralelepípedos reto-retângulos de volumes V_1; V_2; V_3; ...; V_{20} com 50 cm de comprimento, 20 cm de largura e alturas, respectivamente, alturas iguais a: 10 cm, 20 cm, 30 cm, ..., 200 cm.

Assim, o volume da escada, em centímetro cúbico, é dado por:

$V_E = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_{20} = 50 \cdot 20 \cdot 10 + 50 \cdot 20 \cdot 20 +$
$+ 50 \cdot 20 \cdot 30 + ... + 50 \cdot 20 + 200 =$
$= 50 \cdot 20 \cdot (10 + 20 + 30 + ... + 200) =$
$= 1.000 \cdot \frac{(10 + 200) \cdot 20}{2} = 2.100.000$

Logo: $V_E = 2.100.000 \text{ cm}^3 = 2{,}1 \text{ m}^3$

alternativa a

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar poliedros – incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides – e seus elementos.	1
Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.	2, 3 e 4
Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.	5, 6, 7 e 8
Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).	9 e 10

Q1– (Enem) Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

JÄGNEFÄLT MILTON

Figura 1

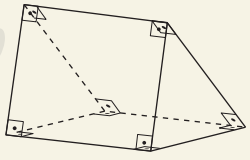


Figura 2

ROMERO. L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

a) tetraedro.
b) pirâmide retangular.
c) tronco de pirâmide retangular.
d) prisma quadrangular reto.
e) prisma triangular reto.

Q2– (Uece) A medida, em metros, de qualquer diagonal de um cubo cuja medida da aresta é 5 m é

a) $5\sqrt{2}$ **b)** $7\sqrt{2}$ **c)** $5\sqrt{3}$ **d)** $7\sqrt{3}$

Q3– (EsPCEx) Um poliedro convexo, com 13 vértices, tem uma face hexagonal e 18 faces formadas por polígonos do tipo P. Com base nessas informações, pode-se concluir que o polígono P é um

a) dodecágono.
b) octógono.
c) pentágono.
d) quadrilátero.
e) triângulo.

Q4– Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem 6 faces quadrangulares e 10 faces triangulares.

Q5– (Enem) Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

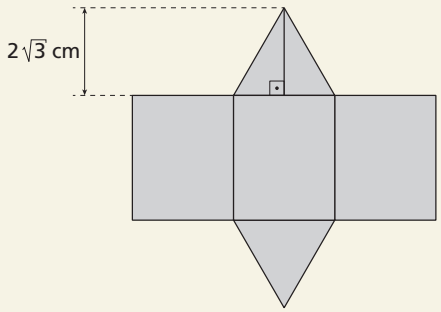
Caixa 1: 86 cm × 86 cm × 86 cm
Caixa 2: 75 cm × 82 cm × 90 cm
Caixa 3: 85 cm × 82 cm × 90 cm
Caixa 4: 82 cm × 95 cm × 82 cm
Caixa 5: 80 cm × 95 cm × 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Q6– Determine a área total e o volume, em litro, de uma embalagem de leite longa-vida cujo formato lembra um paralelepípedo reto-retângulo de arestas medindo 0,95 dm, 0,65 dm e 1,7 dm.

Q7– (UFSC) Uma fábrica precisa embalar seus produtos para comercialização. Para tanto, deve construir caixas no formato de prisma regular reto, conforme a planificação apresentada a seguir.



Seja a cm a medida da aresta da base do prisma. Se a altura do prisma é $a\sqrt{3}$ cm, determine o volume desse prisma, em cm³.

Q8– Encontre o volume de um prisma reto de 18 m de aresta lateral e cuja base é um trapézio isósceles com base menor medindo 8 m, base maior medindo 14 m e altura de 4 m.

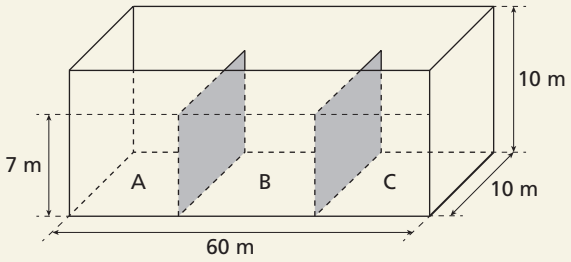
Q9– (Unicamp-SP) Se um tetraedro regular e um cubo têm áreas de superfícies iguais, a razão entre o comprimento das arestas do tetraedro e o comprimento das arestas do cubo é igual a

a) $\sqrt{2}\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[4]{2}\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$ **d)** $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{3}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

EM MODERNA

Q10 – (Enem) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m × 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

a) $1{,}4 \times 10^3\ m^3$
b) $1{,}8 \times 10^3\ m^3$
c) $2{,}0 \times 10^3\ m^3$
d) $3{,}2 \times 10^3\ m^3$
e) $6{,}0 \times 10^3\ m^3$

Resoluções da avaliação 2

Q1 – A figura 2 possui duas bases triangulares paralelas e faces laterais retangulares, então é um prisma triangular reto.
alternativa e

Q2 – A diagonal de um cubo de aresta a é dada por $a\sqrt{3}$. Portanto, se a aresta mede 5 m, sua diagonal mede $5\sqrt{3}$ m.
alternativa c

Q3 – Seja n o número de lados de cada polígono do tipo P. Se $V = 13$ e $F = 19$, então, pela relação de Euler, temos:
$V + F = A + 2 \Rightarrow 13 + 19 = A + 2 \Rightarrow A = 30$
Por outro lado, temos: $2A = 18n + 1 \cdot 6 \Rightarrow A = 9n + 3$
Portanto, $n = 3$, ou seja, P é um triângulo.
alternativa e

Q4 – $A = \dfrac{6 \cdot 4 + 10 \cdot 3}{2} \Rightarrow A = 27$
$V + 16 - 2 = 27 \Rightarrow V = 13$
Portanto, o poliedro tem 13 vértices.

Q5 – Calculando os volumes do objeto e das caixas, temos:
Objeto: $V = 80\ cm \cdot 80\ cm \cdot 80\ cm = 512.000\ cm^3$
Caixa 1: $V_1 = 86\ cm \cdot 86\ cm \cdot 86\ cm = 636.056\ cm^3$
Caixa 2: $V_2 = 75\ cm \cdot 82\ cm \cdot 90\ cm = 553.500\ cm^3$
Caixa 3: $V_3 = 85\ cm \cdot 82\ cm \cdot 90\ cm = 627.300\ cm^3$
Caixa 4: $V_4 = 82\ cm \cdot 95\ cm \cdot 82\ cm = 638.780\ cm^3$
Caixa 5: $V_5 = 80\ cm \cdot 95\ cm \cdot 85\ cm = 646.000\ cm^3$
A caixa 2 não serve, pois uma de suas dimensões é menor que a do objeto. Portanto, a caixa escolhida deve ser a 3.
alternativa c

Q6 – $A_{total} = 2 \cdot (0{,}95 \cdot 0{,}65 + 0.95 \cdot 1{,}7 + 0{,}65 \cdot 1{,}7)$
$A_{total} = 6{,}675$
$V = 0{,}95 \cdot 0.65 \cdot 1{,}7 = 1{,}04975$
Assim, a área total da superfície do paralelepípedo reto-retângulo é 6,675 dm^2, e o volume, 1,04975 dm^3.
Como 1 dm^3 = 1 ℓ, o volume, em litro, é 1,04975 ℓ.

Q7 – Como o prisma é regular reto, então:
$2\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 4\ cm$
O volume é dado por: $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3}{4} = 48$
O volume é 48 cm^3.

Q8 – $A_{base} = \dfrac{(8+14) \cdot 4}{2} \Rightarrow A_{base} = 44$
$V = 44 \cdot 18 \Rightarrow V = 792$
Logo, o volume do prisma é 792 m^3.

Q9 – Sejam a e ℓ as medidas da aresta do cubo e da aresta do tetraedro, respectivamente.
Assim, temos a seguinte relação: $\ell^2\sqrt{3} = 6a^2 \Rightarrow \dfrac{\ell}{a} = \sqrt{2}\sqrt[4]{3}$
alternativa c

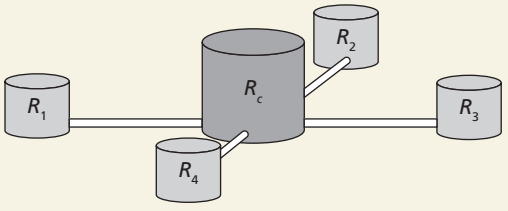
Q10 – O volume de todo o reservatório é:
$V = (60 \cdot 10 \cdot 10) = 6.000$
O petróleo que não será derramado é o que está localizado nos compartimentos A e B e o volume dessa parte de petróleo é: $V = (40 \cdot 10 \cdot 7) = 2.800$
O volume do petróleo derramado é: 6.000 – 2.800 = $= 3.200 = 3{,}2 \cdot 10^3$
Ou seja, o volume derramado é de $3{,}2 \cdot 10^3\ m^3$.
alternativa d

Capítulo 4 – Corpos redondos

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar cilindros, cones, troncos de cones, esferas e seus respectivos elementos.	1
Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.	2, 3, 4 e 5
Determinar o volume desses corpos redondos.	6, 7, 8, 9 e 10

Q1 – (Enem) Uma construtora pretende conectar um reservatório central (R_C) em formato de um cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares (R_1, R_2, R_3 e R_4), os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.



As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximos às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central, há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água. No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes. A medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é

a) 1,44
b) 1,16
c) 1,10
d) 1,00
e) 0,95

Q2– Represente a planificação de um cilindro reto de 4 cm de altura e base com 3 cm de diâmetro. Em seguida, calcule:

a) a área da base;
b) a área lateral;
c) a área da secção meridiana;
d) a área total.

Q3– Em um cone de revolução com 15 m de altura e geratriz de comprimento 17 m, calcule:

a) o raio da base;
b) a área da base;
c) a área lateral;
d) a área total.

Q4– (Udesc) Uma coroa cilíndrica é a região espacial situada entre dois cilindros concêntricos de mesma altura, um com raio R e outro com raio r, sendo $r < R$. Se a altura, o volume e a soma das medidas dos raios dessa coroa cilíndrica são, respectivamente, 4 cm, $4{,}25\pi$ cm³ e 4,25 cm, então a área total de sua superfície é:

a) 34π cm²
b) $18{,}0625\pi$ cm²
c) $20{,}125\pi$ cm²
d) $18{,}125\pi$ cm²
e) $36{,}125\pi$ cm²

Q5– (Uece) A medida, em m², da área da superfície total (área lateral e bases) de um cilindro circular reto tal que a medida da altura e a medida do raio da base são ambas iguais a 2 m é

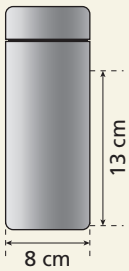
a) 14π
b) 12π
c) 16π
d) 10π

Q6– Sabendo que a diagonal do quadrilátero que representa a secção meridiana de um cilindro reto mede 20 cm e que o raio da base do cilindro é 6 cm, determine a altura e o volume desse cilindro.

Q7– (IFCE) De modo a minimizar custos, um produtor de azeite verificou que é mais rentável armazenar seu estoque em cilindros circulares cuja altura e o diâmetro da base têm as mesmas medidas. Atendendo a essa especificação, ele encomendou reservatórios com 1,5 m de raio na base. Considerando $\pi = 3{,}14$, a capacidade total de armazenamento de cada reservatório encomendado, em litros, é

a) 21,195
b) 14.130
c) 211,95
d) 21.195
e) 14,13

Q8– (Fatec-SP) Uma garrafa térmica tem formato de um cilindro circular reto, fundo plano e diâmetro da base medindo 8,0 cm. Ela está em pé sobre uma mesa e parte do suco em seu interior já foi consumido, sendo que o nível do suco está a 13 cm da base da garrafa, como mostra a figura.

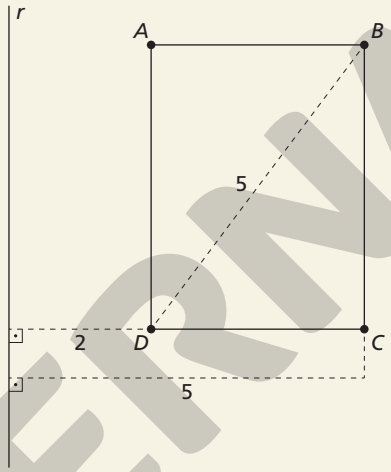


Adote $\pi = 3$. Despreze a espessura do material da garrafa e do copo.

O suco é despejado num copo vazio, também de formato cilíndrico e base plana, cujo diâmetro da base é 4 cm e com altura de 7 cm. O copo fica totalmente cheio de suco, sem desperdício. Nessas condições, o volume de suco restante na garrafa é, em cm³, aproximadamente,

a) 250
b) 380
c) 540
d) 620
e) 800

Q9– (UFRGS–RS) Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo *ABCD* em torno da reta *r*, conforme indicado na figura a seguir.



O volume do sólido obtido é

a) 16π
b) 84
c) 100
d) 84π
e) 100π

Q10– (Mackenzie-SP) Se as áreas laterais de dois cilindros equiláteros são, respectivamente, 16π cm² e 100π cm², então seus volumes são, respectivamente,

a) $16\sqrt{2}\pi$ e $250\sqrt{2}\pi$
b) 32π e 200π
c) 16π e 250π
d) 24π e 150π
e) $24\sqrt{2}\pi$ e $150\sqrt{2}\pi$

Resoluções da avaliação 1

Q1– Resumindo as informações dadas, temos:

	Raio	Altura
Reservatório central (R_c)	2 m	3,3 m
Reservatório auxiliares (R_1, R_2, R_3 e R_4)	1,5 m	1,5 m
Canos	0,05 m	20 m

Sendo h a altura das colunas de água, temos que o volume de reservatório central deve ser igual à soma do volume de água no reservatório central, nos reservatórios auxiliares e nos canos. Portanto:

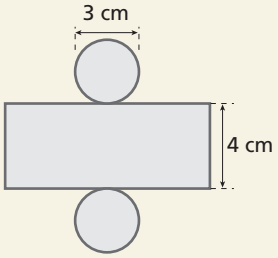
$\pi \cdot 2^2 \cdot 3{,}3 = \pi \cdot 2^2 \cdot h + 4 \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot h + 4 \cdot \pi \cdot 0{,}05^2 \cdot$
$\cdot 20 \Rightarrow 13{,}2 = 4h + 9h + 0{,}2 \Rightarrow 13 = 13h \Rightarrow 1 = h$

alternativa d

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q2– Planificação:



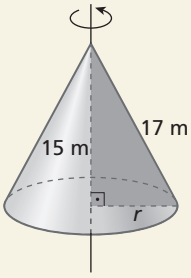
a) $A_{base} = \pi r^2$
$A_{base} = \pi \cdot (1,5)^2 = 2,25\pi$
Logo, a área da base é $2,25\pi$ cm^2.

b) $A_{lateral} = 2\pi rh$
$A_{lateral} = 2\pi \cdot 1,5 \cdot 4 = 12\pi$
Logo, a área lateral é 12π cm^2.

c) $A_{secção} = 2rh$
$A_{secção} = 2 \cdot 1,5 \cdot 4 = 12$
Logo, a área da secção é 12 cm^2.

d) $A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 2,25\pi + 12\pi = 16,5\pi$
Logo, a área total é $16,5\pi$ cm^2.

Q3– a) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo destacado, temos:



$17^2 = 15^2 + r^2$
$r^2 = 17^2 - 15^2$
$r^2 = 289 - 225$
$r^2 = 64$
$r = 8$
Assim, o raio é 8 m.

b) $A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi$
Logo, a área da base é 64π m^2.

c) $A_{lateral} = \pi rg = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 136\pi$
Então, a área lateral é 136π m^2.

d) $A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 64\pi + 136\pi = 200\pi$
Portanto, a área total é 200π m^2.

Q4– Do volume da coroa, temos:
$\pi(R^2 - r^2) \cdot 4 = 4,25\pi \Rightarrow R^2 - r^2 = 1,0625$
Então, a área da superfície é dada por:
$2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi \cdot 4(R + r) = 36,125\pi$
alternativa e

Q5– Sendo $h = R = 2$ m, temos:
$A_{base} = 2\pi \cdot 2^2 = 8\pi$
$A_{lateral} = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$
Portanto, a área total é 16π m^2.
alternativa c

Q6– Se o raio é 6 cm, então o diâmetro é 12 cm.
A diagonal da secção meridiana mede 20 cm; então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$20^2 = 12^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 400 - 144 \Rightarrow h = 16$
$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow \pi \cdot 6^2 \cdot 16 = 576\pi$
Portanto, o cilindro tem 16 cm de altura e volume igual a 576π cm^3.

Q7– O volume do cilindro é dado, por:
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V = 3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 21,195$
Transformando em ℓ, temos: 21,195 m^3 = 21.195 ℓ
alternativa d

Q8– Volume do suco no interior da garrafa, em cm^3:
$3 \cdot 4^2 \cdot 13 = 624$
Volume despejado no copo, em cm^3: $3 \cdot 2^2 \cdot 7 = 84$
Volume de suco restante na garrafa, em cm^3: $624 - 84 = 540$
alternativa c

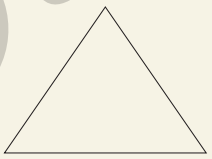
Q9– A medida do lado BC é dado por: $5^2 = 3^2 + BC^2 \Rightarrow BC = 4$
Assim, o volume é dado por:
$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 - \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 100\pi - 16\pi = 84\pi$
alternativa d

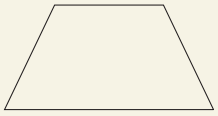
Q10– Considerando r e R, com $r < R$, os raios das bases dos dois cilindros. Então:
$4\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r = 2 \Rightarrow V' = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$
$4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = 5 \Rightarrow V'' = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi$
alternativa c

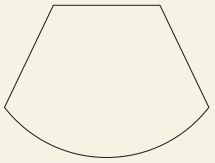
Avaliação 2

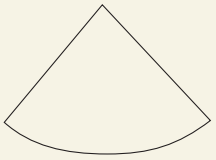
Objetivos do capítulo	Questões
Identificar cilindros, cones, troncos de cones, esferas e seus respectivos elementos.	1
Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.	2, 3, 4 e 5
Determinar o volume desses corpos redondos.	6, 7, 8 e 10

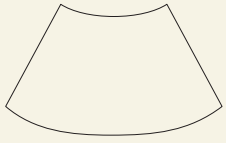
Q1– (Enem) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida. Qual deverá ser a forma do adesivo?

a)


b)


c)


d)


e)


Q2– A altura de um cilindro equilátero é 20 cm. Calcule a área da superfície desse cilindro.

Q3– (UEFS-BA) Se um cone circular reto tem altura igual a 4 cm e base circunscrita a um hexágono regular reto de lado medindo 2 cm, então a sua área lateral, em cm^2, mede, aproximadamente,

a) $4\pi\sqrt{6}$
b) $4\pi\sqrt{5}$
c) 4π
d) $\pi\sqrt{3}$
e) $\pi\sqrt{2}$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

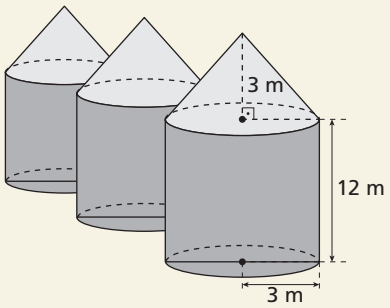
Q4– Considere uma superfície esférica de área 144π dm^2. Sobre essa superfície foi determinado um fuso esférico de 60°. Calcule a área desse fuso.

Q5– (PUC-SP) O volume de um cilindro de 8 cm de altura equivale a 75% do volume de uma esfera com 8 cm de diâmetro. A área lateral do cilindro, em cm^2, é

a) $42\sqrt{2}\pi$ **b)** $36\sqrt{3}\pi$ **c)** $32\sqrt{2}\pi$ **d)** $24\sqrt{3}\pi$

Q6– A altura de um cone circular reto é 24 cm. Calcule o raio da base e o comprimento da geratriz, sabendo que a área total é 360π cm^2 e o volume é 800π cm^3.

Q7– (Enem) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3.



Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 21

Q8– (Unioeste-PR) Coloca-se uma esfera de raio *r* no interior de um recipiente com formato de um cilindro circular reto com raio da base *R*. Em seguida, preenche-se o recipiente com água até que a esfera fique exatamente coberta por água, ou seja, a esfera tangencia a superfície da água. Retira-se, então, a esfera e é observado que o nível da água é reduzido em $\frac{1}{4}$.

O valor da razão $\frac{r}{R}$ é igual a:

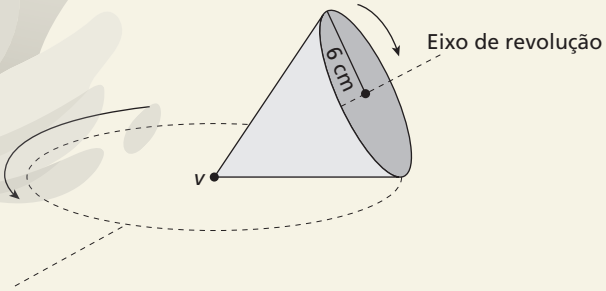
a) $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **e)** $\frac{3}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Q9– (UFRGS-RS) Um tanque no formato de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 2 m, tem o nível da água aumentado em 25 cm após uma forte chuva. Essa quantidade de água corresponde a 5% do volume total de água que cabe no tanque. Assinale a alternativa que melhor aproxima o volume total de água que cabe no tanque, em m^3.

a) 57 **b)** 60 **c)** 63 **d)** 66 **e)** 69

Q10– (Unesp) Um cone circular reto, de vértice *V* e raio da base igual a 6 cm, encontra-se apoiado em uma superfície plana e horizontal sobre uma geratriz. O cone gira sob seu eixo de revolução que passa por *V*, deslocando-se sobre a superfície plana horizontal, sem escorregar, conforme mostra a figura.



O cone retorna à posição inicial após o círculo da sua base ter efetuado duas voltas completas de giro. Considerando que o volume de um cone é calculado pela fórmula $\frac{\pi r^2 h}{3}$, o volume do cone da figura, em cm^3, é igual a

a) $72\sqrt{3}\pi$ **c)** $36\sqrt{3}\pi$ **e)** $12\sqrt{3}\pi$

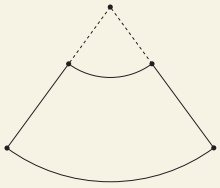
b) $48\sqrt{3}\pi$ **d)** $18\sqrt{3}\pi$

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Resoluções da avaliação 2

Q1– Como a superfície lateral de um cone é obtida a partir de um setor circular, o objetivo do responsável pelo adesivo será alcançado se:



alternativa e

Q2– No cilindro equilátero, a altura é igual a duas vezes o raio.

Portanto: $r = \frac{20}{2} = 10$

$A_{base} = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$

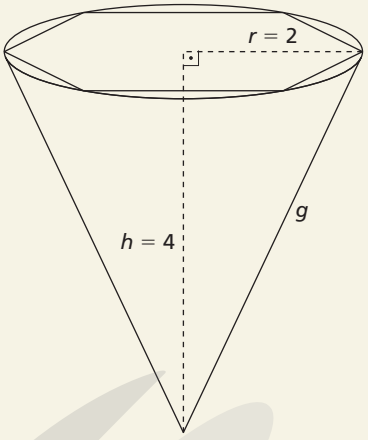
$A_{lateral} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 20 = 400\pi$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot 100\pi + 400\pi = 600\pi$

Logo, a área total é 600π cm^2.

Q3– Representando a situação em uma figura, temos:



Medida da geratriz: $g^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow g = \sqrt{20} \Rightarrow g = 2\sqrt{5}$

Área lateral: $A = \pi rg = \pi \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\pi\sqrt{5}$

alternativa b

Q4– $A_{superfície} = 144\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 144\pi \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$

$A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°} = \frac{36\pi \cdot 60°}{90°} = 24\pi$

Logo, a área do fuso esférico é 24π dm^2.

Q5– $V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h = 8\pi r^2$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r_e^3 = \frac{256}{3}\pi$

$V_{cilindro} = 0{,}75 \cdot V_{esfera} \Rightarrow 8\pi r^2 = 0{,}75 \cdot \frac{256}{3}\pi \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$

$A_{lateral} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 8 = 32\sqrt{2}\,\pi$

alternativa c

Q6– $h = 24$ cm

$A_{total} = \pi r(r + g) \Rightarrow \pi r(r + g) = 360\pi$ (I)

$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow \frac{\pi r^2 \cdot 24}{3} = 800\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 8r^2 = 800 \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow r = 10$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\pi \cdot 10 \cdot (10 + g) = 360\pi \Rightarrow 10 + g = 36 \Rightarrow g = 26$

Logo, o raio é 10 cm, e a geratriz mede 26 cm.

Q7– Para calcularmos o volume total do silo, precisamos adicionar o volume do cilindro com o volume do cone.

Volume total = Volume do cilindro + Volume do cone

$V_{total} = \pi r^2 h_{cilindro} + \frac{1}{3}\pi r^2 h_{cone}$

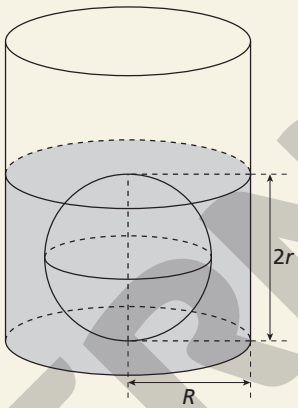
$V_{total} = 3 \cdot 3^2 \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3$

$V_{total} = 351$ m^3

Como o caminhão tem capacidade para 20 m^3, então ele terá que fazer 17,55 viagens (351 : 20). Ou seja, ele fará 17 viagens com carga de 20 m^3 e a 18ª viagem com 11 m^3.

alternativa d

Q8–

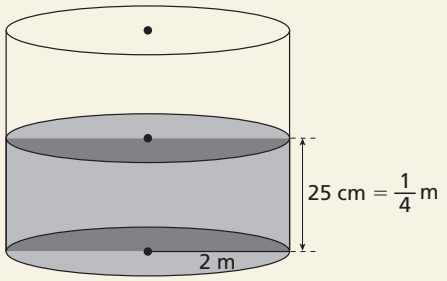


Considerando a informação de que o nível da água se reduz em $\frac{1}{4}$ ao se retirar a esfera, concluímos que o volume da esfera corresponde à quarta parte do volume do cilindro de altura $2r$. Assim:

$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 2r \Rightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

alternativa c

Q9– Ao organizar os dados do enunciado em uma figura, temos:



Considerando V o volume total de água que cabe no tanque, temos:

$\pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{100} V$

$V = 20\pi$

$V \simeq 63$ m^3

alternativa c

Q10– Geratriz: $2\pi \cdot g = 2 \cdot 2\pi \cdot 6 \Rightarrow g = 12$

Altura: $h^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow h = 6\sqrt{3}$

Assim, temos: $V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3}}{3}$

$V = 72\sqrt{3}\,\pi$

alternativa a

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

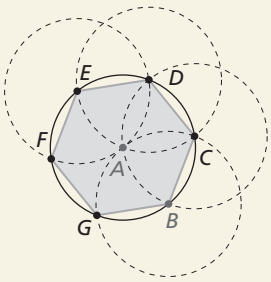
Resoluções e comentários

Capítulo 1 – Superfícies poligonais, círculo e áreas

R2. No passo **1**, comentar com os alunos que, por construção, os segmentos são congruentes e de medida igual à medida do raio das circunferências; portanto, *ABD* é triângulo equilátero. Analogamente, *ABC* também é triângulo equilátero. A consequência disso é que o ângulo interno *CÂD* mede 120°. Relembrar os alunos de que a medida do arco é igual à medida do ângulo central que o determina. No passo **2**, a circunferência de centro *D* e raio determina o ponto *E* na circunferência de centro *A*. Note que os triângulos *CAD* e *DAE* são congruentes pelo caso LLL, pois $AC = AD = AE$ (raios da circunferência de centro *A*) e $DC = DE$ (raios da circunferência de centro *D*). Portanto, *DÂE* é congruente a *CÂD*, iguais a 120°. Por fim, *EÂC*, só pode ser 120°. Esses fatos nos permitem concluir que $DC = DE = EC$, fazendo DCE um triângulo equilátero, que é construído no passo **3**.

Exercícios propostos

1. Uma maneira de desenhar um hexágono regular inscrito em uma circunferência é a partir da construção de ângulos de 60° ao redor da circunferência (360° ÷ 6 = 60°).



2. Em um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio $r = 2$ cm, temos:

$a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow a_3 = 1$

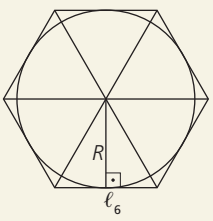
$\ell_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \ell_3 = 2\sqrt{3}$

Portanto, as medidas do apótema e do lado desse triângulo são 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm, respectivamente.

Comentário: Essa questão pode ser aproveitada para que os alunos façam outras descobertas além da pedida; por exemplo, a relação entre o apótema e a altura do triângulo equilátero: a medida do apótema é igual à terça parte da medida da altura do triângulo. Na Geometria, estudamos que essa é uma propriedade do baricentro do triângulo, que divide cada mediana na razão 1 : 3.

3. **a)** $R = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

b) $D = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}R \Rightarrow D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$



ADILSON SECCO

c) $P = 6 \cdot \ell_6 = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}R}{3} \Rightarrow P = 4\sqrt{3}R$

Comentário: Para a resolução dessa questão, basta um esboço do desenho que apresente as diagonais do hexágono que passam pelo centro da circunferência e um raio da circunferência por um ponto de tangência.

Pode-se, porém, aproveitar a atividade para trabalhar a construção pedida usando adequadamente os instrumentos de Desenho geométrico. Caso os alunos apresentem dificuldade com essas construções, pode ser necessária uma orientação prévia para a elaboração do hexágono regular circunscrito. Pode-se usar um procedimento com os seguintes passos:

- traçar uma circunferência e uma reta *r* que passe pelo centro *O* dela;
- com o auxílio de um transferidor, construir 6 ângulos centrais de 60° a partir da reta *r*;
- com uma régua apoiada em um esquadro, traçar por *O* a perpendicular à reta *r*, obtendo um ponto *P* na circunferência;
- por *P* traçar uma paralela à reta *r* obtendo um ponto *A* em um dos lados de um dos ângulos de 60°;
- com centro em *O* e raio $\overline{OA}$, obter nos outros lados dos ângulos de 60° os pontos *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, vértices do hexágono pedido;
- traçar $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.

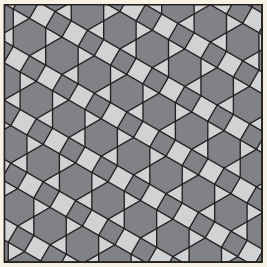
Após os alunos terem feito o desenho pedido, é interessante que eles comparem geometricamente as medidas pedidas.

4. Respostas possíveis: peças de marchetaria, forros de madeira, papéis de parede, estampas de tecidos, vitrais, malharias e crochês.

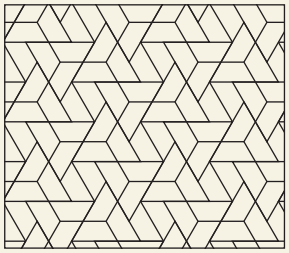
Comentário: Uma atividade interessante que pode ser proposta é pedir aos alunos que, em uma folha com malha quadriculada, desenhem polígonos côncavos ou convexos de modo que todas as quadrículas da folha sejam usadas plenamente. Depois de pintar os polígonos com cores diversas e de recortá-los, os alunos devem, em duplas, trocar seus conjuntos de polígonos para que cada um recomponha a folha do outro.

5. Respostas possíveis:

a) apenas polígonos regulares;



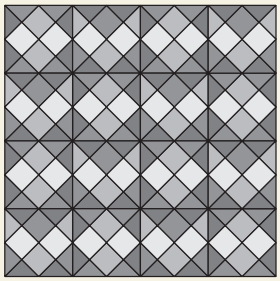
b) apenas polígonos não regulares;



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

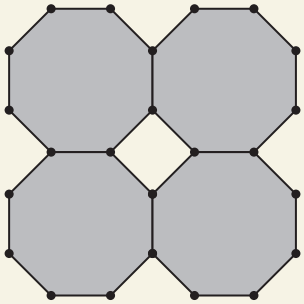
MORENA

c) polígonos não regulares e polígonos regulares.



6. Respostas pessoais.

7. **a)** Sim, pela rotação em torno do ponto B, 150° no sentido horário.
b) Resposta possível: por meio da rotação em torno do ponto *F*, 150° no sentido horário.
c) Resposta possível: por meio da rotação em torno do ponto *A*, 180° no sentido anti-horário.
d) Resposta possível: octógonos regulares e quadrados.



NELSON MATSUDA

8. $2a + 2b = 12$

$a + b = 6$ (I)

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a$

Substituindo em (I), obtemos:
$a + 2a = 6 \Rightarrow a = 2$ e $b = 4$
Área $= a \cdot b = 2 \cdot 4 = 8$
Logo, a área do retângulo é 8 m².

9. **a)** Como $\overline{BC} // \overline{AG} // \overline{EF}$ e $\overline{AB} // \overline{CE} // \overline{GF}$, os polígonos *DCBA* e *DEFG* são paralelogramos.
Logo: $AB = CD = 10$ e $\frac{DE}{AB} = \frac{30}{10} = 3$

b) perímetro (*DEFG*) $= 30 + 78 + 30 + 78 = 216$
perímetro (*DCBA*) $= 10 + 26 + 10 + 26 = 72$
$\frac{\text{perímetro (DEFG)}}{\text{perímetro (DCBA)}} = \frac{216}{72} = 3$

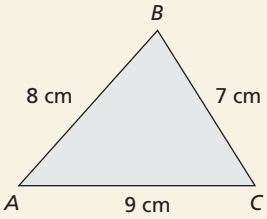
c) *DEFG* e *DCBA*
$A_{DEFG} = 2 \cdot A_{\triangle DEG}$
$A_{\triangle DEG} = \frac{30 \cdot 78 \cdot \text{sen } \alpha}{2}$
$A_{DEFG} = 30 \cdot 78 \cdot \text{sen } \alpha$
$A_{DCBA} = 2 \cdot A_{\triangle ADC}$
$A_{\triangle ADC} = \frac{26 \cdot 10 \cdot \text{sen } \alpha}{2}$
$A_{DCBA} = 26 \cdot 10 \cdot \text{sen } \alpha$
$\frac{A_{DEFG}}{A_{DCBA}} = \frac{30 \cdot 78 \cdot \text{sen } \alpha}{26 \cdot 10 \cdot \text{sen } \alpha} = 9$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Comentário: Essa questão pode ser explorada com os seguintes questionamentos:

- Os paralelogramos *DEFG* e *DCBA* são semelhantes?
- No caso de serem semelhantes, a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão entre as medidas dos lados correspondentes?
- Para resolver essa questão, é necessário que os paralelogramos sejam semelhantes?

10.



$p = \frac{8 + 7 + 9}{2} = 12$

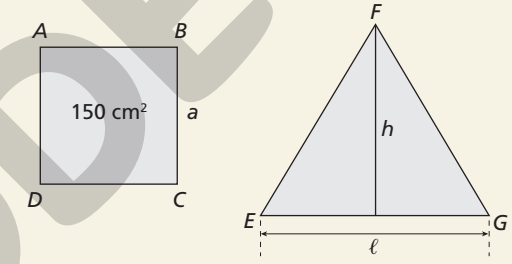
$A_{\triangle ABC} = \sqrt{12(12 - 8) \cdot (12 - 7) \cdot (12 - 9)}$

$A_{\triangle ABC} = 12\sqrt{5}$

Logo, a área do triângulo *ABC* é $12\sqrt{5}$ cm².

Comentário: Dada a diversidade de caminhos para se determinar a área de uma superfície triangular, essa questão faz com que os alunos procurem identificar o meio ou a fórmula mais conveniente em relação às informações do enunciado.

11.



$A_{ABCD} = 150 \Rightarrow a^2 = 150 \Rightarrow a = 5\sqrt{6}$

Seja *d* a medida da diagonal do quadrado. Assim:

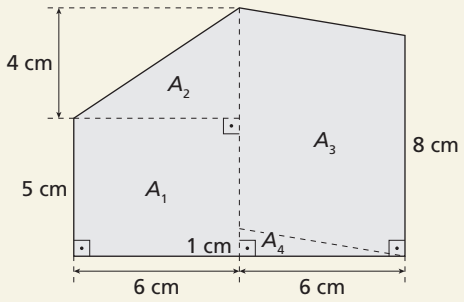
$d = a\sqrt{2} \Rightarrow d = 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow d = 5\sqrt{12} \Rightarrow d = 10\sqrt{3} = h$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 20$

$A_{\triangle EFG} = a^2\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow A_{\triangle EFG} = \frac{20^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{\triangle EFG} = 100\sqrt{3}$

Logo, a área do triângulo equilátero é $100\sqrt{3}$ cm².

12. **a)** A figura dada foi decomposta em quatro outras figuras com áreas A_1, A_2, A_3 e A_4.



Retângulo: $A_1 = 5 \cdot 6 \Rightarrow A_1 = 30$

MODERNA

Triângulo retângulo: $A_2 = \frac{6 \cdot 4}{2} \Rightarrow A_2 = 12$

Paralelogramo: $A_3 = 8 \cdot 6 = 48 \Rightarrow A_3 = 48$

Triângulo retângulo: $A_4 = \frac{6 \cdot 1}{2} \Rightarrow A_4 = 3$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 30 + 12 + 48 + 3 = 93$

Portanto, a área da figura é 93 m².

b) $A_{\text{quadrado}} = 6^2 = 36$

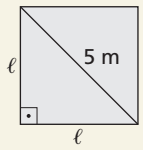
$p_{\text{triângulo}} = \frac{5 + 6 + 7}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$

$A_{\text{total}} = 36 + 6\sqrt{6} = 6\left(6 + \sqrt{6}\right)$

Logo, a área da figura é $6\left(6 + \sqrt{6}\right)$ m².

13.



$\ell\sqrt{2} = 5 \Rightarrow \ell = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$A_{\text{quadrado}} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 12{,}5$

Logo, a área do quadrado é 12,5 m².

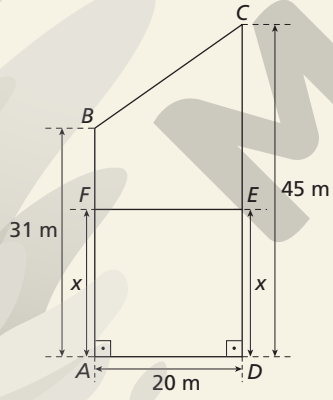
14. $A_{\text{trapézio}} = \frac{(10 + 5) \cdot 10}{2} = 75$

$A_{\text{triângulo}} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$

A área do trapézio é 75 m² e a do triângulo é 50 m².

Comentário: Além da resolução por cálculo numérico com o emprego da fórmula, os alunos também podem decompor o quadrado *ABCD*, cuja área é 100 m², em quatro triângulos retângulos. Assim, podem perceber que o trapézio *AMCD* tem área igual a $\frac{3}{4}$ da área de *ABCD* e a área do triângulo *CDM* corresponde a $\frac{1}{2}$ da área de *ABCD*.

15.



$A_{\text{retângulo}} = A_{\text{trapézio}}$

$A_{ADEF} = A_{BCEF}$

$x \cdot 20 = \frac{(31 - x + 45 - x)20}{2}$

$2x = 76 - 2x$

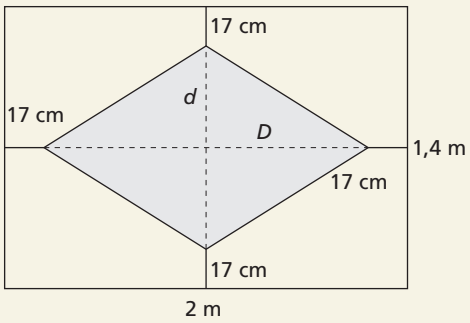
$4x = 76$

$x = 19$

Portanto, a distância do vértice D à cerca deve ser 19 m.

alternativa b

16.



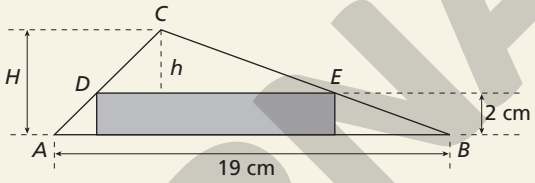
$d = 1{,}4 \text{ m} - 2 \cdot 0{,}17 \text{ m} \Rightarrow d = 1{,}06 \text{ m} = 106 \text{ cm}$

$D = 2 \text{ m} - 2 \cdot 0{,}17 \text{ m} \Rightarrow D = 1{,}66 \text{ m} = 166 \text{ cm}$

$A_{\text{losango}} = \frac{d \cdot D}{2} = 8.798 \text{ cm}^2$

A área do losango é 8.798 cm².

17.



O triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *DEC*.

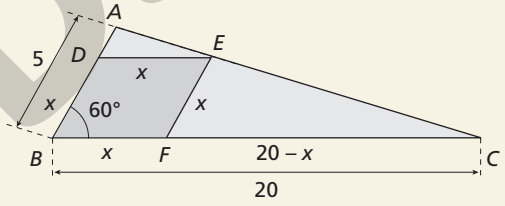
Sendo *H* a altura do triângulo *ABC* e *h* a altura do triângulo *DEC*, temos:

$\frac{AB}{DE} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{19}{DE} = \frac{5}{3} \Rightarrow DE = 11{,}4$

Logo: $A_{\text{retângulo}} = 2 \cdot 11{,}4 = 22{,}8$

Portanto, a área do retângulo é 22,8 cm².

18.



$\triangle ADE \sim \triangle EFC$

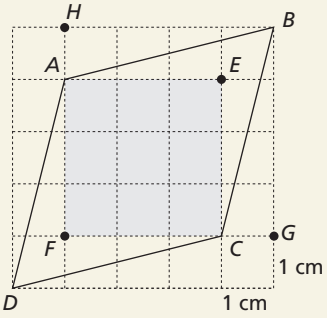
$\frac{x}{20 - x} = \frac{5 - x}{x} \Rightarrow x^2 = 100 - 25x + x^2 \Rightarrow x = 4$

A área do losango *DEFB* é 2 vezes a área do triângulo *BDF*:

$A_{DEFB} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \text{sen } 60°}{2} = \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

Portanto, o lado do losango mede 4 m e sua área é $8\sqrt{3}$ m².

19.



Observe que:

$A_{ABCD} = A_{AECF} + 2 \cdot A_{ABCE}$

AECF é um quadrado: $A_{AECF} = 3 \cdot 3 = 9$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$A_{ABCE} = A_{HFGB} - 2 \cdot A_{BCG} - A_{AECF} = 4^2 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 1}{2} - 9 = 3$

$A_{ABCD} = 9 + 2 \cdot 3 = 15$

Logo, a área do losango é 15 cm².

Comentário: Os alunos podem ser desafiados a buscar resoluções diferentes da apresentada anteriormente. Por exemplo, podem subtrair da área do quadrado maior 4 vezes A_{BCG} e, depois, subtrair 2 cm², correspondente à área de 2 quadradinhos (superior esquerdo e inferior direito).

20. $a_3 = \frac{r}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

$\ell_3 = r\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \Rightarrow \ell_3 = 6$

$A_3 = p \cdot a = 9 \cdot \sqrt{3}$

Logo, a área do triângulo é $9\sqrt{3}$ cm².

21. A soma das áreas dos triângulos (área da região laranja da estrela) é igual à área do hexágono.

$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$

Mas: $a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2 \cdot a_6 \cdot \sqrt{3}}{3}$

Assim:

$A_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot \frac{2 \cdot a_6 \cdot \sqrt{3} \cdot a_6}{3}}{2} = 2 \cdot (a_6)^2 \cdot \sqrt{3}$

$A_{\text{hexágono}} = 72\sqrt{3}$

Logo, a área da região laranja da estrela é $72\sqrt{3}$ cm².

Comentário: Mais do que a aplicação correta de fórmulas, é importante que os alunos estabeleçam estratégias de resolução de problemas. Esta é uma oportunidade de aplicar a decomposição do hexágono central em 6 triângulos equivalentes aos das "pontas" da estrela.

22. De acordo com o enunciado, temos: $\frac{a_6}{a_4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a_4 = \frac{\ell_4}{2}$ e $a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\ell_6}{\ell_4} = \frac{\frac{2a_6}{\sqrt{3}}}{2a_4} = \frac{a_6}{a_4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

Assim:

$\frac{A_6}{A_4} = \frac{\frac{6 \cdot \ell_6 \cdot a_6}{2}}{\frac{4 \cdot \ell_4 \cdot a_4}{2}} = \frac{6}{4} \cdot \frac{\ell_6}{\ell_4} \cdot \frac{a_6}{a_4} =$

$= \frac{6}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

A razão entre a área do hexágono e a do quadrado é $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

23. A medida da diagonal do quadrado é $\ell\sqrt{2}$. Como são 3 quadrados, temos:

$\ell\sqrt{2} = \frac{1{,}20}{3} = 0{,}4 \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$A_{\text{quadrados}} = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 \Rightarrow A_{\text{quadrados}} = 0{,}24$

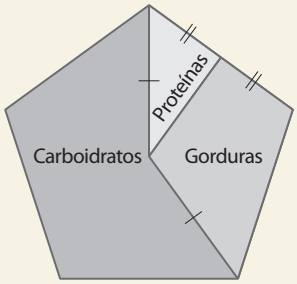
Logo, a área do mosaico é 0,24 m².

Representando por x o valor que o artesão recebeu pelo trabalho, temos:

$\begin{matrix} 1\text{ m}^2 & \text{———} & \text{R\$ } 500{,}00 \\ 0{,}24\text{ m}^2 & \text{———} & x \end{matrix} \Rightarrow x = 500 \cdot 0{,}24 = 120$

Portanto, o artesão recebeu R$ 120,00 pelo trabalho.

24. Um pentágono regular pode ser decomposto em 5 triângulos isósceles (T_i) congruentes, tendo um lado coincidente com um lado do pentágono e dois lados como raios da circunferência circunscrita. A área de cada um desses triângulos corresponde a 20% da área do pentágono.



Se dividirmos um desses triângulos pela altura relativa à base, obtemos um triângulo retângulo (T_r) cuja área corresponde à metade da área do triângulo isósceles, ou seja, corresponde a 10% da área do pentágono.

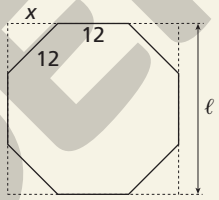
Observando as figuras do enunciado, percebemos que no pentágono:

- as proteínas estão representadas por um T_r de área igual a 10% da área do pentágono;
- as gorduras estão representadas por um T_i mais T_r, ou seja, por 20% + 10% (= 30%) da área do pentágono;
- os carboidratos estão representados por três T_{is}, ou seja, por 3 · 20% (= 60%) da área do pentágono.

Portanto, o pentágono é a figura do enunciado que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimento.

alternativa c

25.



A medida do apótema do octógono (a_8) corresponde à metade da medida do lado do quadrado.

$x^2 + x^2 = 12^2 \Rightarrow 2x^2 = 144 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$

$\ell = 6\sqrt{2} + 12 + 6\sqrt{2} = 12 + 12\sqrt{2}$

$a_8 = \frac{12\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2} = 6\left(1 + \sqrt{2}\right)$

Portanto, a medida do apótema do octógono é $6\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm.

Comentário: Essa questão proporciona aos alunos a comparação entre as medidas dos apótemas do quadrado e do octógono regular.

26. $A_{\text{coroa}} = \pi(R_2)^2 - \pi(R_1)^2 = 75\pi$

$\pi((R_2)^2 - 25) = 75\pi \Rightarrow (R_2)^2 = 100 \Rightarrow R_2 = 10$

Portanto: $R_2 = 10$ cm

alternativa e

27. $A_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi \cdot a^2}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{8A_1}{\pi}$

Analogamente, temos: $b^2 = \frac{8A_2}{\pi}$ e $c^2 = \frac{8A_3}{\pi}$

Do triângulo retângulo, temos:

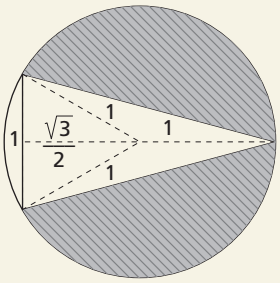
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{\cancel{8}A_3}{\cancel{\pi}} = \frac{\cancel{8}A_1}{\cancel{\pi}} + \frac{\cancel{8}A_2}{\cancel{\pi}} \Rightarrow A_3 = A_1 + A_2$

Assim: $A_1 + A_2 = A_3$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

28. Vamos considerar as medidas da figura em centímetro.



A área da região hachurada é igual à área do círculo menos a área do triângulo isósceles menos a área do segmento circular.

$A_{\text{círculo}} = \pi$

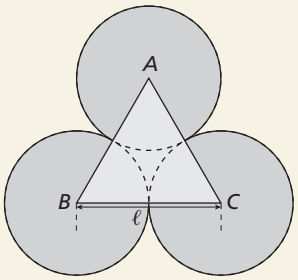
$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)$

$A_{\text{segmento}} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$A_{\text{laranja}} = \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi - 3}{6}$

Logo, a área da região pintada de laranja é $\frac{5\pi - 3}{6}$ cm².

29.



raio de cada círculo: $r = \frac{\ell}{2}$

$A_{\text{triângulo}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ell^2 = 8 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}$

Portanto: $r = \sqrt{2}$

$A_{\text{azul}} = 3 \cdot A_{\text{círculo}} - 3 \cdot A_{\text{setor circular}}$

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi$

$A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$A_{\text{azul}} = 3 \cdot 2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = 5\pi$

A área da região pintada de azul é 5π cm².

Comentário: Caso considere conveniente, essa atividade pode ser explorada pedindo aos alunos que calculem a área da região situada entre as 3 circunferências. Essa área pode ser obtida pela diferença entre a área do triângulo *ABC* e a da semicircunferência, que é igual a $2\sqrt{3} - \pi$.

Exercícios complementares

1. raio da circunferência inscrita:

$R = \frac{\ell_4}{2} \Rightarrow R = \frac{10}{2} \Rightarrow R = 5$

raio da circunferência circunscrita:

$\ell_4 = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\ell_4}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = 5\sqrt{2}$

Assim, o raio da circunferência inscrita e o da circunscrita são 5 cm e $5\sqrt{2}$ cm, respectivamente.

2. $a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2}$

$A_6 = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2} \Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{6 \cdot \ell_6 \cdot \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12\sqrt{3} = 3 \cdot (\ell_6)^2\sqrt{3} \Rightarrow (\ell_6)^2 = \frac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\ell_6)^2 = 4 \Rightarrow \ell_6 = 2$

Como $\ell_6 = r$, temos: $r = 2$ cm

3. $p = \frac{5 + 6 + 7}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{9(9 - 5)(9 - 6)(9 - 7)}$

$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$

A área do triângulo é $6\sqrt{6}$ cm².

$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow 6\sqrt{6} = \frac{6 \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{6}}{6} \Rightarrow h = 2\sqrt{6}$

Logo, a altura relativa ao lado de 8 cm desse triângulo mede $2\sqrt{6}$ cm.

4. $A_{\text{cozinha}} = 300 \cdot 200 = 60.000$

$A_{\text{cerâmica}} = 20^2 = 400$

A área da cozinha é 60.000 cm² e a de cada peça de cerâmica é 400 cm².

Sendo n o número de peças de cerâmica, temos:

$n = \frac{A_{\text{cozinha}}}{A_{\text{cerâmica}}} = \frac{60.000}{400} = 150$

Logo, são necessárias 150 peças de cerâmica.

5. Como os triângulos *BAC* e *MNC* são semelhantes, vamos encontrar a razão de semelhança k: $\frac{AC}{NC} = 2 = k$

Assim, a razão entre as áreas é: $k^2 = 2^2 = 4$

Considerando A a área do triângulo *MNC* e A_C a área a ser calçada, obtemos:

$\frac{A_C + A}{A} = k^2 \Rightarrow \frac{A_C + A}{A} = 4 \Rightarrow A_C = 3A$

alternativa e

6. Pelo enunciado, temos:

área do retângulo = $260 \cdot 400$

$x \cdot 26 = \frac{4}{100} \cdot 260 \cdot 400$

$x = \frac{4 \cdot 260 \cdot 4}{26}$

$x = 160$

alternativa d

7. $(\ell_4)^2 = 64 \Rightarrow \ell_4 = 8$

Logo: $DC = 8$ cm

O triângulo *DMC* é semelhante ao triângulo *PMQ*; assim:

$\frac{DC}{PQ} = \frac{DM}{PM}$

Como $DM = 2 \cdot PM$, temos: $\frac{8}{PQ} = \frac{2 \cdot PM}{PM} \Rightarrow PQ = 4$

$A_{\text{losango}} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$

Logo, a área do polígono *MQNP* é 16 cm².

Comentário: Outra maneira de resolver o exercício **7** é observar que o polígono *MPNQ* corresponde à quarta parte do quadrado *ABCD* de área 64 cm². Logo, a área de *MPNQ* é 16 cm².

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

8. As semicircunferências que estão do lado de fora do quadrado encaixam-se perfeitamente nos espaços em branco dentro do quadrado; portanto, a área da figura sombreada é igual à área do quadrado de lado ℓ_4 e diagonal $15\sqrt{2}$ cm.

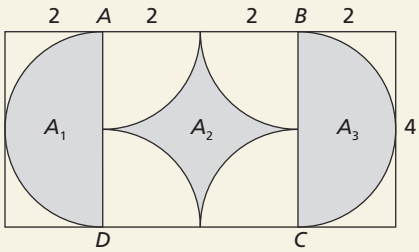
Assim:

$\ell_4\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = 15$

$A_{quadrado} = (\ell_4)^2 = 15^2 = 225$

Logo, a área da figura é 225 cm².

9.



$A_1 = A_3$

$A_1 = \frac{A_{círculo}}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} \Rightarrow A_1 = 2\pi$

$A_3 = 2\pi$

$A_2 = A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{A_{círculo}}{4} \Rightarrow A_2 = 4^2 - \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_2 = 16 - 4\pi$

$A_1 + A_2 + A_3 = 2\pi + 2\pi + 16 - 4\pi$

Assim: $A_1 + A_2 + A_3 = 16$

alternativa c

Comentário: Outra maneira de resolver o exercício **9** é observar que, ao traçar dois segmentos pelo centro de A_2 (vertical e horizontal), obtemos os quatro cantos não pintados do retângulo maior. Então, a área da região pintada é a diferença das áreas do retângulo maior e do quadrado *ABCD*.

10. As regiões alaranjadas interiores ao quadrado *ABCD* e exteriores ao quadrado *MNPQ* encaixam-se perfeitamente nos espaços em branco do quadrado *MNPQ*. Assim, a área da região alaranjada é igual à área do quadrado *MNPQ*.

O dobro do raio dos arcos de circunferência é igual às medidas das diagonais do quadrado *MNPQ*; então, temos:

$d = \ell_4\sqrt{2} \Rightarrow 4 = \ell_4\sqrt{2} \Rightarrow \ell_4 = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell_4 = 2\sqrt{2}$

$A_{MNPQ} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 \cdot 2 = 8$

Logo, a área da região alaranjada é 8 cm².

11. A área da piscina retangular é dada por $50 \cdot 24$, ou seja, 1.200 m².

A área da nova piscina é dada por:

$A = 3 \cdot \frac{60° \cdot 3 \cdot R^2}{360°} = \frac{3 \cdot R^2}{2}$, em que $\mathbb{R} \in \mathbb{N}$

Então, devemos ter:

$\frac{3 \cdot R^2}{2} < 1.200 \Rightarrow R^2 < \frac{2 \cdot 1.200}{3} \Rightarrow R < 20\sqrt{2}$

Como $20\sqrt{2} \simeq 28{,}28$, o maior valor possível para R é 28.

alternativa b

12.

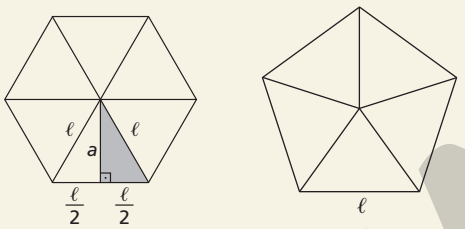
Pizza 1:	*Pizza* 2:
Diâmetro: 40 cm	Diâmetro: 35 cm
Área: 400π cm²	Área: $306{,}25\pi$ cm²
Preço: R$ 40,00	Preço: x

$x = \frac{306{,}25\pi \cdot 40}{400\pi} \Rightarrow x = 30{,}625$

Logo, o preço de uma *pizza* cujo diâmetro é 35 cm deve ser aproximadamente R$ 30,63.

13. A quantidade de couro necessária para confeccionar a bola de futebol será dada pela soma das áreas dos polígonos.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo destacado, temos:



$\ell^2 = (a_6)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

$(a_6)^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$

$\frac{3\ell^2}{4} = (a_6)^2$

$\ell^2 = \frac{4(a_6)^2}{3}$

Como $a_6 = 3{,}8$ (apótema do hexágono), temos:

$\ell = \sqrt{\frac{4 \cdot (3{,}8)^2}{3}} \Rightarrow \ell \simeq 4{,}39$

A área do hexágono é dada por:

$A_6 = 6 \cdot \frac{\ell \cdot a_6}{2} \Rightarrow A_6 = 6 \cdot \frac{4{,}39 \cdot 3{,}80}{2} \Rightarrow A_6 \simeq 50{,}046$

A área do pentágono é dada por:

$A_5 = 5 \cdot \frac{\ell \cdot a_5}{2} \Rightarrow A_5 = 5 \cdot \frac{4{,}39 \cdot 4{,}20}{2} \Rightarrow A_5 \simeq 46{,}095$

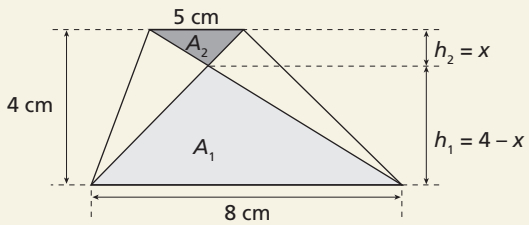
Logo, a área total será:

$A_T = 20 \cdot A_6 + 12 \cdot A_5$

$A_T \simeq 20 \cdot 50{,}046 + 12 \cdot 46{,}095 = 1.554{,}06$

Portanto, a quantidade de couro necessária para confeccionar uma bola de futebol é, aproximadamente, 1.554,06 cm².

14.



Os triângulos de áreas A_1 e A_2 são semelhantes; então:

$\frac{5}{8} = \frac{h_2}{h_1} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{x}{4 - x} \Rightarrow x = \frac{20}{13}$

Assim: $h_1 = \frac{32}{13}$ cm e $h_2 = \frac{20}{13}$ cm

Então:

$A_1 = \frac{8}{2} \cdot \frac{32}{13} = \frac{128}{13}$

$A_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{20}{13} = \frac{50}{13}$

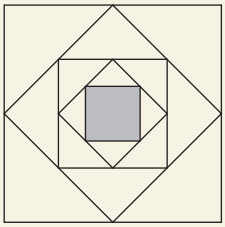
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$A_1 - A_2 = \frac{78}{13} = 6$

Portanto, a diferença entre as áreas A_1 e A_2 é 6 cm².

15. Se o 1º quadrado tem área 4, a medida de seu lado é $\ell_{1º} = 2$ e sua diagonal mede $2\sqrt{2}$. A medida do lado do 2º quadrado é a metade da medida da diagonal do 1º quadrado, ou seja: $\ell_{2º} = \sqrt{2}$



Analogamente, temos: $\ell_{3º} = 1$

Assim, as medidas dos lados dos quadrados formam uma PG de 1º termo 2 e razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

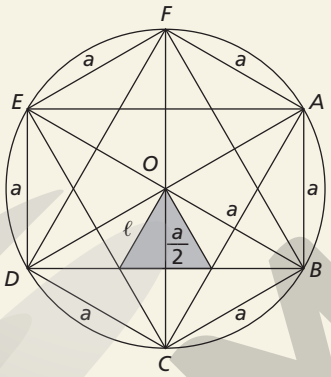
Logo: $\ell_{5º} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = 2 \cdot \frac{2^2}{2^4} = \frac{1}{2}$

Área do 5º quadrado:

$A = (\ell_{5º})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = 0{,}25$

Logo, a área do 5º quadrado é 0,25 cm².

16. Observe a figura.



Se a é a medida do lado do hexágono *ABCDEF*, então o raio da circunferência também mede a.

Observe ainda que, no triângulo destacado, temos:

$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \ell = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Assim, as áreas A_H e A_K são tais que:

$A_H = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$A_K = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Logo: $\frac{A_H}{A_K} = \frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = 3$

alternativa c

Comentário: Assim como em outras questões, os alunos também podem resolver esse exercício por meio da decomposição dos hexágonos em triângulos retângulos. Basta traçar pelo centro *O*, paralelas aos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ e $\overline{EC}$, dividindo o hexágono de área *H* em 36 triângulos retângulos congruentes, dos quais 12 formam o hexágono de área *K*.

Logo: $\frac{\text{área } H}{\text{área } K} = \frac{36}{12} = 3$

Autoavaliação

1. Observando os polígonos, verificamos que o polígono I e o polígono V são regulares.
alternativa d

2. No quadrado, temos: $\ell_4 = 2a_4$
No triângulo equilátero, temos: $\ell_3 = 2a_3\sqrt{3}$
No hexágono regular, temos: $\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_6$
Apótema só é definido em polígono regular, o que não é o caso do triângulo retângulo.
alternativa b

3. Observando as alternativas, verificamos que a correta é a **d**.
alternativa d

4. $A_4 = 4 \cdot \frac{\ell_4 \cdot a_4}{2}$ e $A_6 = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$
Como o quadrado e o hexágono têm o mesmo perímetro, então: $4\ell_4 = 6\ell_6$
Assim:

$\frac{A_6}{A_4} = \frac{\frac{6\ell_6 \cdot a_6}{2}}{\frac{4\ell_4 \cdot a_4}{2}} = \frac{a_6}{a_4}$

alternativa a

5. Considere as medidas $AB = BC = GF = FE = x$ e $AH = HG = CD = DE = y$. Temos:

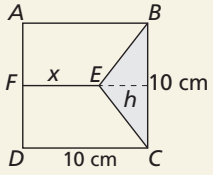
$A_{DBE} = A_{BAH} = \frac{x \cdot y}{2}$; $A_{ABE} = A_{AGF} = \frac{2y \cdot x}{2}$;

$A_{AGF} = \frac{2y \cdot x}{2} \neq A_{DBE} = \frac{x \cdot y}{2}$; $A_{GHF} = A_{DBC} = \frac{x \cdot y}{2}$

$A_{AGF} \neq A_{BDE}$

alternativa c

6.



$h = 10 - x$

$A_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h$

$A_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 - x)$

$A_{EBC} = 5 \cdot (10 - x)$

$A_{ABEF} = \frac{(x + 10) \cdot 5}{2}$

$A_{ABEF} = 2 \cdot A_{EBC}$

$\frac{(x + 10) \cdot 5}{2} = 2 \cdot 5 \cdot (10 - x)$

$x + 10 = 40 - 4x$

$x = 6$

Logo, a medida de $\overline{FE}$ é 6 cm.
alternativa d

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

7. $A_{\text{verde}} = \frac{1}{4} \cdot A_{\text{coroa}} = \frac{1}{4}\pi\left[R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] = \frac{3\pi R^2}{16}$

$A_{\text{círculo menor}} = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi\frac{R^2}{4}$

Logo:

$\frac{A_{\text{verde}}}{A_{\text{círculo menor}}} = \frac{3}{4}$

alternativa a

Compreensão de texto

1. Resposta possível: "arte socialmente engajada" pode ser entendida como aquela que problematiza questões socioambientais com práticas artísticas de caráter participativo e reflete a cultura e os anseios da população na qual está inserida. "Etnia" significa uma coletividade de indivíduos que se diferenciam por suas características socioculturais, refletidas particularmente na língua, na religião e nas ações.

2. Resposta pessoal.

3. Os povos/continentes são: Huli, da Nova Guiné (Oceania); Mursi, da Etiópia (África); Kayin, do Myanmar e da Tailândia (Ásia); Supi, da Lapônia (Europa) e Tapajós, do Brasil (Américas).

4. As dimensões são: altura: 15,5 m; comprimento: mais de 170 m.
Tais dimensões são compatíveis com a área desse mural, descrita no primeiro parágrafo do texto, pois 15,5 · 170 = = 2.635, que é próximo de 2.646,34 m².

5. O mural foi feito por Eduardo Kobra e equipe, inspirado em uma foto feita por Lailson Santos de um nativo transportando cacau em uma canoa. A obra tem área de quase 6.000 m².

6. 2.800 latas de *spray* de tinta: 2.800 · 400 = 1.120.000
1.120.000 mℓ = 1.120 ℓ ou 1,12 m³
180 baldes de tinta acrílica: 180 · 20 = 3.600
3.600 ℓ ou 3,6 m³
Foram gastos 1.120 ℓ ou 1,12 m³ de *spray* de tinta e 3.600 ℓ ou 3,6 m³ de tinta.

7. O mural foi feito em 45 dias e, segundo dados do texto, tem área de 2.646,34 m².
2.646,34 ÷ 45 = 58,8
Em média, foram pintados, 58,8 m² por dia.

8. Sim, triângulos e quadriláteros são mais frequentes.

9. Respostas possíveis: diversidade de cores fortes, emprego de regiões poligonais, tamanho grande.

10. Resposta pessoal.

Capítulo 2 – Introdução à Geometria espacial

Exercícios propostos

1. Consideremos dois pontos distintos *A* e *B*.
Além desses dois pontos, podemos considerar infinitos outros pontos não colineares em relação à *A* e *B*. Assim, cada trio de pontos não colineares determina um plano e, portanto, obtemos infinitos planos que passam por dois pontos distintos.
Se os três pontos distintos forem não colineares, pelo postulado P6, eles determinarão um único plano.
Se os três pontos distintos forem colineares, infinitos planos passarão por eles.

2. Consideremos os pontos *A*, *B*, *C* e *D* não coplanares.
Por serem não coplanares, *A*, *B*, *C* e *D* são não colineares.
Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um único plano.
Então, podemos determinar quatro planos com esses pontos:

- plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *C*;
- plano determinado pelos pontos *A*, *B* e *D*;
- plano determinado pelos pontos *B*, *C* e *D*;
- plano determinado pelos pontos *A*, *C* e *D*.

Assim, temos quatro possibilidades:

I) Os quatro pontos são colineares. Logo, existem infinitos planos que os contêm.

II) Dos quatro pontos, três são colineares. Logo, existe um só plano que os contém.

III e IV) Dos quatro pontos, não há três colineares. Logo, existe um plano α determinado por três desses pontos, segundo dois casos:

- o quarto ponto pertence ao plano α; logo, existe um só plano que contém os quatro pontos;
- o quarto ponto não pertence ao plano α; logo, não existe nenhum plano que contenha os quatro pontos.

3. Considerando os pontos *A*, *B*, *C* e *D*, entre os quais três deles nunca são colineares, podemos formar as seguintes retas:
$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$

Portanto, seis retas são determinadas por esse conjunto de pontos.

4. Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano (postulado P6) e variar o outro ponto, que é coplanar.

5. Considerando três pontos em cujos pés de uma mesa de três pernas tocam o chão, esses pontos determinam um único plano (postulado P6). Assim, a mesa de três pernas está sempre firme.
Agora, considerando quatro pontos em cujos pés de uma mesa de quatro pernas tocam o chão, esses pontos podem determinar mais de um plano (por exemplo, o caso visto no exercício 2) ou podem determinar um único plano, caso os quatro pontos considerados sejam coplanares. Portanto, a mesa de quatro pernas pode, às vezes, não estar firme.

Comentários:

- Se julgar conveniente, peça aos alunos uma pesquisa para saber se os suportes usados para assentar máquinas fotográficas, filmadoras, telescópios etc. são tripés ou quadripés. Solicite que argumentem o porquê da opção pelo tripé.

MODERNA

- Após a resolução desse exercício, é interessante perguntar aos alunos se o fato de a mesa de três pernas nunca ficar manca implica que seu tampo estará sempre na horizontal quando colocada em pé em um chão plano e horizontal. Esse questionamento vai além da determinação de um plano por três pontos distintos e não colineares. Também aborda o conceito de paralelismo entre planos.

6. a) Verdadeira, pois duas retas são reversas quando não existe um mesmo plano que as contenha.

b) Falsa, pois duas retas reversas não são coplanares.

c) Falsa, pois duas retas paralelas são sempre coplanares.

d) Verdadeira, pois dois planos são paralelos se coincidem ou se não têm nenhum ponto comum.

7. a) Falsa, considere dois planos paralelos α e β e duas retas r e s, tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.
Nesse caso, ou r e s são paralelas, ou r e s são reversas.
Portanto, duas retas reversas podem estar em planos paralelos.

b) Verdadeira, sabemos que r é paralela a s e que s é paralela a t e queremos mostrar que r é paralela a t.
Duas retas r e s são paralelas ($r /\!/ s$) quando são coincidentes ($r \equiv s$) ou quando têm intersecção vazia ($r \cap s = \varnothing$) e são coplanares.

Há três casos a se considerar:

- $r \equiv s$ e $s \equiv t$

  Nesse caso, as três retas são coincidentes; logo, r é paralela a t.

- $r \equiv s$ e $s \cap t = \varnothing$ ou $r \cap s = \varnothing$ e $s \equiv t$

  Nesse caso, r e t têm intersecção vazia; logo, r é paralela a t.

- $r \cap s = \varnothing$ e $s \cap t = \varnothing$

  Consideremos os planos α (determinado por r e s) e β (determinado por s e t). A intersecção de α e β é a reta s.

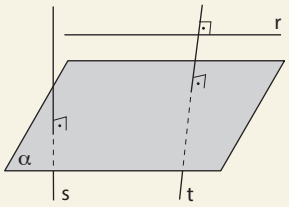
  Seja P um ponto da reta t.

  Por ser um ponto de t, P é um ponto de β, mas não de s (pois $s \cap t = \varnothing$). Como só os pontos de s pertencem a β e também a α, concluímos que P não pertence a α; logo, P também não pertence a r. Se um ponto qualquer de t não pertence a r, então $r \cap t = \varnothing$, ou seja, r é paralela a t.

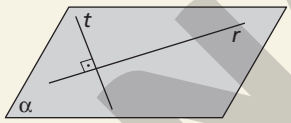
c) Falsa, se uma reta e um plano têm um ponto em comum, a reta r pode ser secante a α.

8. a) Falsa. Considere uma reta t, perpendicular a um plano α por um ponto P, e duas retas r e s de α, concorrentes em P. Assim, r e s são duas retas perpendiculares a uma mesma reta t, e r e s não são paralelas.

b) Falsa, pois, se uma reta r e um plano α são paralelos, toda reta perpendicular ao plano α ou é perpendicular à reta r, ou é reversa à reta r.



c) Falsa, pois, se uma reta r está contida em um plano α, existe pelo menos uma reta t perpendicular a r que está contida em α.



d) Verdadeira, pois, se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todo plano paralelo a α é perpendicular a r.

9. Por um ponto R fora de $\overleftrightarrow{KM}$, traçamos uma paralela a $\overleftrightarrow{KM}$ passando por P.

Como $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{KM}$, então $\overleftrightarrow{RP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PM}$.

Como $\overleftrightarrow{KM} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$ e $\overleftrightarrow{KM} /\!/ \overleftrightarrow{RP}$, então $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$.

Como $\overleftrightarrow{QS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{QS} /\!/ \overleftrightarrow{RP}$, então $\overleftrightarrow{RP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PS}$.

Então $\overleftrightarrow{RP} \perp \alpha$, pois é perpendicular a, pelo menos, duas retas de α.

Como $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{KM}$ e $\overleftrightarrow{RP} /\!/ \overleftrightarrow{QS}$, temos que $\overleftrightarrow{KM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{QS} \perp \alpha$.

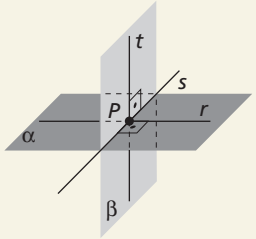
10. a) Não, são perpendiculares.

b) Não, $\overline{HG}$ é paralelo ao plano (EFN).

c) Não, são concorrentes.

d) Sim, pois $\overline{EF} \subset EFN \cap EHG$.

11. a) Esquematizando a situação, temos a figura abaixo.



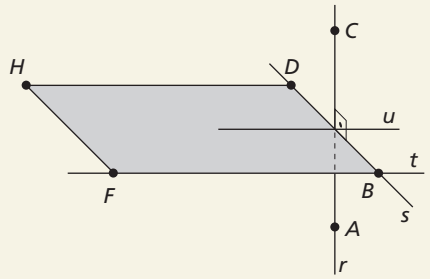
Como os planos α e β são perpendiculares, então β possui uma reta t perpendicular ao plano α.
Como a reta t é perpendicular a α e à reta r no ponto P, temos que a reta r é perpendicular à reta t e à reta s de intersecção entre os planos α e β.
Como a reta r é perpendicular a duas retas no plano β, então r é perpendicular ao plano β.

b) Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

12. Representando o plano (*HFBD*) e a diagonal $\overline{AC}$ de forma conveniente, temos:



Sabemos que, se r e t são retas ortogonais, u é paralela à reta t e perpendicular à reta r.
Como $\overline{AC}$ é a diagonal do quadrado *ABCD*, então $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{DB}$ (que é a outra diagonal do quadrado *ABCD*).
Como $\overline{AC} \subset r$ e $\overline{DB} \subset s$, concluímos que $r \perp s$.
Como $r \perp u$ e $r \perp s$, o teorema fundamental do perpendicularismo garante que r é perpendicular ao plano (*HFBD*).
Logo, $\overline{AC}$ é perpendicular ao plano (*HFBD*).

13. Como *R*, *T* e *V* são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente, então:

- $\overline{TV}$ é paralelo a $\overline{AC}$;
- $\overline{TR}$ é paralelo a $\overline{AB}$;
- $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano (*RTV*).

Como $\overline{PA}$ é perpendicular aos planos α, β e (*RTV*), temos que esses planos são paralelos entre si.
Logo, o plano (*RTV*) é paralelo a β.

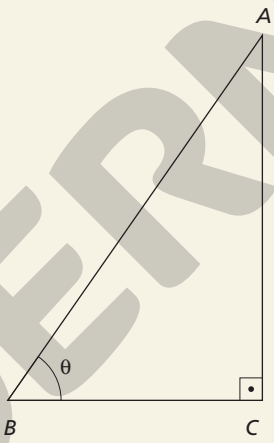
14. **a)** Não, pode resultar em um ponto ou em um segmento de reta.
b) Não, pode resultar em um ponto também.
c) Não, pode resultar em uma reta, em uma semirreta ou em uma parábola.
d) Não, pode resultar em um triângulo ou em um segmento de reta.
e) Sim, quando existe um raio da circunferência tal que sua reta suporte é perpendicular ao plano de projeção.
alternativa e

Comentário: Avaliar a conveniência de passar uma atividade análoga, em formato de gincana ou desafio, para que cada grupo proponha a outro grupo a visualização da projeção ortogonal de três ou quatro formas geométricas em um plano α.
Uma variação dessa atividade é cada grupo apresentar uma figura, que seria a projeção de outra, em um plano α, e propor a outro grupo que descubra uma figura geométrica geradora da figura dada em α.

15. **a)** A distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GC}$ é 2 cm.
b) A distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$ é 2 cm.
c) A distância entre $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ é igual à distância entre os pontos *F* e *C*, podendo ser calculada assim:
$(FC)^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$
$FC = \sqrt{29}$
Logo, a distância entre as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ é $\sqrt{29}$ cm.
d) A distância entre a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (*HGF*) é zero, pois $\overleftrightarrow{EF}$ está contida no plano (*HGF*).
e) A distância entre a reta $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (*ABC*) é 5 cm, pois pode ser medida pela distância entre os pontos *E* e *A*.
f) A distância entre os planos (*EHD*) e (*FGC*) é 3 cm, pois pode ser medida pela distância entre os pontos *E* e *F*.
g) Os planos (*ABC*) e (*HGF*) são paralelos, e a distância entre eles é $CG = FB = EA = HD = 5$ cm.

16. Consideremos os seguintes semiplanos: E_1 contido no plano (*MQK*), E_2 contido no plano (*MTK*), E_3 contido no plano (*MRK*) e E_4 contido no plano (*MPK*). Assim, temos os seguintes diedros:
$E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$
Todos os diedros têm origem $\overleftrightarrow{MK}$.

17. Representando a situação, temos:



Queremos determinar a medida do ângulo $A\hat{B}C$.
No triângulo *ABC*, temos:

$$\cos \theta = \frac{BC}{AB}$$

Como $AB = 2 \cdot (BC)$, temos:

$$\cos \theta = \frac{BC}{2BC} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Logo, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 60°.

18. **a)** Sim, pois, se a medida dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, temos que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pertencem ao plano (*ABC*), que é perpendicular à aresta do diedro. Portanto, $B\hat{A}C$ é um ângulo plano.
b) Não, pois, de acordo com o enunciado do exercício, não podemos garantir que as medidas dos ângulos $Q\hat{P}A$ e $B\hat{A}M$ são iguais.

Exercícios complementares

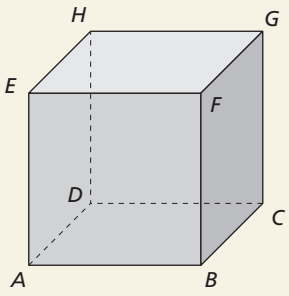
1. Se $A \in r$, então só existe uma reta paralela a *r*, que é a própria reta *r*.
Se $A \notin r$, pelo postulado P5 (postulado de Euclides), por um ponto *A* fora da reta *r*, passa somente uma reta paralela a *r*.
Portanto, em ambos os casos, existe uma única reta paralela.

MODERNA

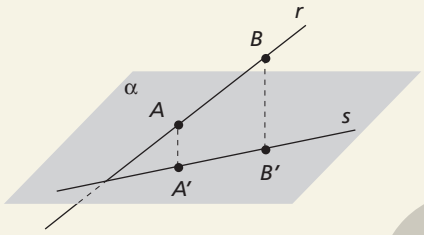
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2. **a)** reversas
b) paralelas
c) perpendiculares
d) paralelos
e) perpendiculares
f) perpendiculares

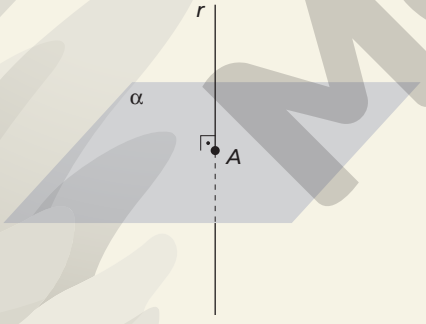
3. A afirmação **a** é falsa, pois os dois planos podem se interceptar.
Como exemplo, consideremos a representação do cubo abaixo.
Nele, a reta $\overleftrightarrow{EH}$ é paralela aos planos (*ABC*) e (*CBF*), que se interceptam na reta $\overleftrightarrow{BC}$.



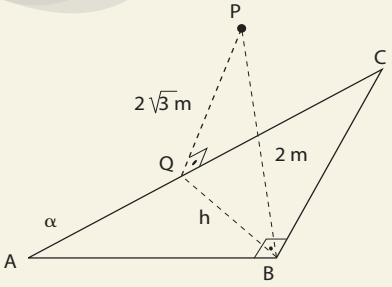
4. • Reta *r* não perpendicular ao plano α:
A projeção ortogonal é uma reta (*s*).



• Reta *r* perpendicular ao plano α, com $r \cap \alpha = \{A\}$:
A projeção ortogonal é um ponto (*A*).



5. Representando a situação, temos:



Usando *h* para representar a medida da altura $\overline{BQ}$ relativa à hipotenusa do triângulo retângulo *ABC* e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *PQB*, obtemos:
$2^2 + h^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$
$h = 2\sqrt{2}$
Logo, a medida da altura *h* é $2\sqrt{2}$ m.

6. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser:
- um segmento, se o plano que contém a circunferência é perpendicular ao plano de projeção;
- uma elipse, se o plano da circunferência é concorrente não perpendicular ao plano de projeção;
- uma circunferência, se o plano da circunferência é paralelo ao plano de projeção.

A projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

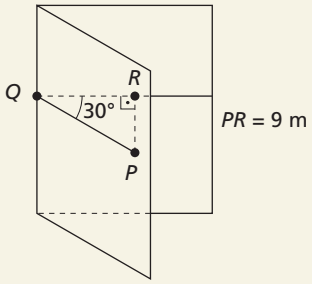
7. Se a reta está contida em um plano, a distância entre a reta e o plano é zero.

8. Representando a situação, temos a figura abaixo.
Queremos determinar a distância *PQ*.
No triângulo retângulo *PQR*, temos:

$\text{sen } 30° = \frac{PR}{PQ}$

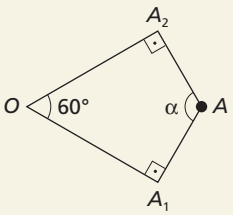
$PQ = \frac{PR}{\text{sen } 30°}$

$PQ = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 9 \cdot \frac{2}{1} = 18$



Logo, esse ponto dista 18 m da aresta do diedro.
Comentário: Esta é uma das muitas questões de Geometria espacial cuja resolução pode ser reduzida à Geometria plana. É importante que os alunos verifiquem a necessidade do uso da Trigonometria para chegar à distância pedida.

9. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, temos:

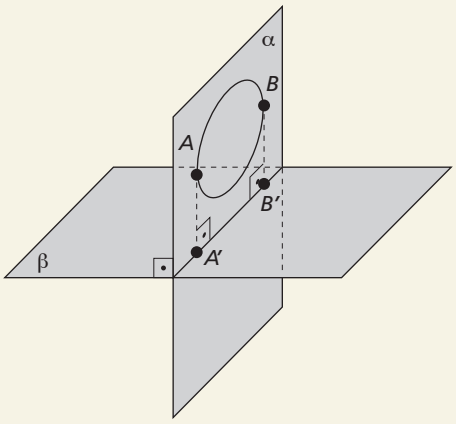


$60° + 90° + 90° + \alpha = 360°$
$\alpha = 120°$
Logo, a medida do ângulo $A_1\hat{A}A_2$ é 120°.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

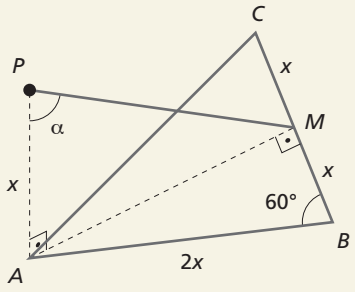
MODERNA

10. Representando a situação, temos:



Nesse caso, a projeção ortogonal é um segmento de reta $\overline{A'B'}$ de mesma medida que o diâmetro $\overline{AB}$ da circunferência.

11. Representando a situação, temos:



Representando AP por x e AB por $2x$, queremos determinar a medida do ângulo α.

Os triângulos ABM e PAM são retângulos.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABM, temos:

$(AB)^2 = (BM)^2 + (AM)^2$

$4x^2 = x^2 + (AM)^2$

$(AM)^2 = 3x^2$

$AM = x\sqrt{3}$

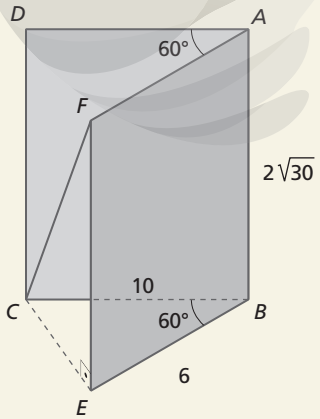
No triângulo retângulo PAM, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{AM}{PA} = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$$

Logo, a medida do ângulo formado pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PM}$ é 60°.

Comentário: A resolução dessa atividade exige dos alunos a construção de um "enunciado gráfico", com a transposição do texto para uma figura geométrica. Além disso, trabalha intradisciplinarmente a Geometria plana e a Trigonometria.

12.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle CBE$, temos:

$CE^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60°$

$CE^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$

$CE^2 = 76$

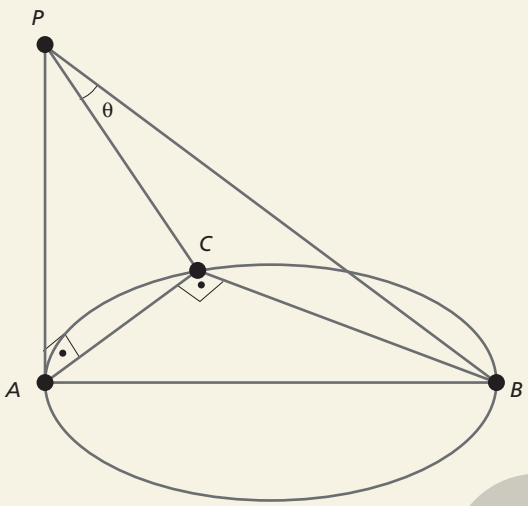
$\overline{EF}$ é perpendicular ao plano (CBE), então o $\triangle EFC$ é retângulo em $\hat{E}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$CF^2 = \left(2\sqrt{30}\right)^2 + 76 \Rightarrow CF^2 = 196 \Rightarrow CF = 14$

Logo, a distância entre os vértices C e F é 14 unidades de comprimento.

13. Representando a situação, temos:



ADILSON SECCO

a) Se $C \equiv A$, obtemos $\overline{BC} \equiv \overline{BA}$ e $\overline{PC} \equiv \overline{PA}$.

Como $\overline{PA}$ é perpendicular a $\overline{BA}$, pois $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano da circunferência, obtemos $\overline{PC}$ perpendicular a $\overline{BC}$.

Se $C \neq A$, o ângulo $A\hat{C}B$ é reto, pois o triângulo ABC está inscrito em um círculo de diâmetro $\overline{AB}$, e, pela propriedade 6 do perpendicularismo, podemos afirmar que $\overline{PC}$ é perpendicular a $\overline{BC}$.

Então, as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ são perpendiculares.

b) Se C é o ponto médio do arco $\overset{\frown}{AB}$, temos $BC = AC$.

Como $AB = 8$, temos $BC = 4\sqrt{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(PB)^2 = 8^2 + 8^2 \Rightarrow PB = 8\sqrt{2}$

Então:

$\operatorname{sen} \theta = \frac{BC}{PB} = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

Logo, $\theta = 30°$.

Autoavaliação

1. Retas paralelas e retas reversas não têm nenhum ponto comum.

alternativa c

2. As retas paralelas são coplanares, e as reversas são não coplanares.

alternativa a

3. $r \perp s$ e $s \subset \alpha$

r é ortogonal a t e $t \subset \alpha$

Então, existe uma reta u paralela a t e perpendicular a r e $u \subset \alpha$.

$r \perp t$ e $r \perp u$, então $r \perp \alpha$

alternativa b

4. $\alpha \parallel r$ e $\alpha \parallel s$; então:

- $r \parallel s$ ou
- r é concorrente a s ou
- r é perpendicular a s ou
- r é reversa a s

alternativa b

5. Se a reta r é não perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é uma reta; se a reta r é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r é um ponto.

alternativa d

6. A distância entre A e C é a diagonal do retângulo $ABCD$ de lados $AB = DC = 4$ cm e $CB = AD = 2$ cm.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$

Portanto, a distância entre os pontos A e C é $2\sqrt{5}$ cm.

alternativa d

7. A distância entre o ponto A e o plano (BCF) é $AB = 4$ cm.

alternativa b

8. A distância entre o ponto A e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é a diagonal AH do quadrado $ADEH$.

$AH = 2\sqrt{2}$ cm

alternativa a

9. O ponto A pertence ao plano (DHE); logo, a distância entre eles é zero.

alternativa d

10. Se o ângulo formado por uma reta r e um plano α é nulo, então:

- a reta r está contida em α $(r \cap \alpha = r)$ ou
- a reta r é paralela a α $(r \cap \alpha = \varnothing)$

alternativa d

11. A figura representa um diedro.

alternativa c

MODERNA

Capítulo 3 – Poliedros

Exercícios propostos

1. O poliedro tem 5 faces; portanto, é um pentaedro.

2. O poliedro tem 7 faces; portanto, é um heptaedro.

3. Analisando o sólido representado, encontramos: 14 faces, 36 arestas e 24 vértices.

4. **a)** Poliedro não convexo.

O poliedro tem 8 faces quadrangulares e 2 faces octogonais (a da frente e a de trás); então, o número de arestas é dado por: $(8 \cdot 4 + 2 \cdot 8) : 2 = 24$

A cada vértice chegam 3 arestas, e em cada aresta há 2 vértices; então: $V = (24 : 3) \cdot 2 = 16$

Assim, $V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$.

b) Poliedro convexo.

O poliedro tem 9 faces: 5 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

Então, o número de arestas é dado por:

$(5 \cdot 4 + 4 \cdot 3) : 2 = 16$

Aplicando a relação de Euler, obtemos o número de vértices: $V + F - A = 2 \Rightarrow V = 16 - 9 + 2 \Rightarrow V = 9$

Assim, $V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$.

5.

Poliedro	V	F	A	$V + F - A = 2$
I	12	8	18	$12 + 8 - 18 = 2$
II	6	8	12	$6 + 8 - 12 = 2$

Logo, os dois poliedros satisfazem a relação de Euler.

Comentário: É interessante mostrar aos alunos que os dois poliedros dados, embora tenham formatos diferentes, são octaedros.

6. Temos:

$F = 6 \cdot 3 + 2 = 20$

$A = 3 \cdot 18 = 54$

$V = 2 \cdot 18 = 36$

Aplicando a relação de Euler, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow 36 + 20 - 54 = 2 \Rightarrow 2 = 2$

Portanto, o poliedro satisfaz a relação de Euler.

7. Temos um poliedro com 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares e queremos calcular o número de vértices. Assim:

$F = 2 + 5 \Rightarrow F = 7$

$A = \dfrac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{2} \Rightarrow A = 15$

$V + F - A = 2 \Rightarrow V = 15 - 7 + 2 \Rightarrow V = 10$

Portanto, o poliedro tem 10 vértices.

8. **a)** O poliedro I é côncavo ou não convexo, pois apresenta reentrâncias.

b) Ambos possuem o mesmo número de faces: $F = 12$

c) Ambos possuem o mesmo número de vértices: $V = 10$

d) Ambos possuem o mesmo número de arestas: $A = 20$

e) $V + F - A = 2$

$10 + 12 - 20 = 2$

Portanto, ambos os poliedros satisfazem a relação de Euler.

Comentário: Esse exercício propicia aos alunos comparar dois poliedros, um convexo e outro não convexo, os quais têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e o mesmo número de faces, além de verificar a validade da relação de Euler.

9. $A = V + 6$

$V + F - A = 2 \Rightarrow V + F - (V + 6) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow F = 6 + 2 \Rightarrow F = 8$

Portanto, o número de faces do poliedro é 8.

10. $V + F - A = 2 \Rightarrow V + F - 2 = A$

$11 + (x + x + 1) - 2 = (3 \cdot x + 4 \cdot x + 5 \cdot 1) : 2$

$2 \cdot (11 + 2x + 1 - 2) = (7x + 5)$

$2 \cdot (2x + 10) = 7x + 5$

$4x + 20 = 7x + 5$

$4x - 7x = 5 - 20$

$-3x = -15$

$x = 5$

Assim, o número de faces é dado por:

$x + x + 1 = 5 + 5 + 1 = 11$

11. $V + F - A = 2 \Rightarrow 10 + F - 20 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow F = 2 + 10 \Rightarrow F = 12$

Sendo x o número de faces triangulares e y o número de faces quadrangulares, temos:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \dfrac{(3x + 4y)}{2} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -36 \\ 3x + 4y = 40 \end{cases}$$

$y = 4$

Assim: $x + 4 = 12 \Rightarrow x = 8$

Logo, são 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

Comentário: Após a aplicação da relação de Euler, é importante que os alunos percebam a necessidade da aplicação de conceitos algébricos.

12. Pelo enunciado, temos: $V = 9$

Seja n o número de faces triangulares e $(n + 1)$ o número de faces quadrangulares, temos:

$F = n + n + 1 = 2n + 1$

$A = \dfrac{3n + 4(n + 1)}{2}$

Aplicando a relação de Euler, temos:

$V + F - A = 2$

$V + F - 2 = A$

$9 + 2n + 1 - 2 = \dfrac{3n + 4n + 4}{2}$

$18 + 4n - 2 = 7n + 4$

$n = 4$

Assim:

$F = 4 + 5 = 9$

$A = \dfrac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4}{2} = 16$

Portanto, o poliedro tem 4 faces triangulares, 5 faces quadrangulares, totalizando 9 faces e 16 arestas.

MODERNA

Comentário: A resposta anterior é única. O enunciado possibilita que se considere n faces quadrangulares e $(n + 1)$ faces triangulares; porém, nesse caso, obtém-se como valor de n uma fração irredutível.

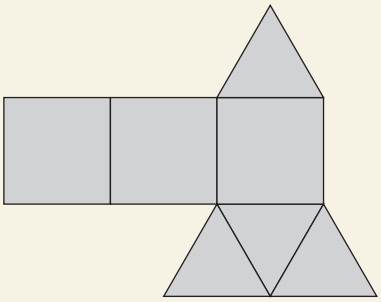
13. Um poliedro regular de faces pentagonais tem 12 faces. Como foram retiradas 3, restaram 9. O poliedro completo tinha $(5 \cdot 12) : 2$ arestas, ou seja, 30 arestas. Como foram retiradas 3, restaram 27. Aplicando a relação de Euler, no poliedro completo, encontramos o número de vértices:
$V = 2 - F + A \Rightarrow V = 2 - 12 + 30 \Rightarrow V = 20$

Como foi retirado 1, restaram 19.

Logo, a superfície poliédrica que restou tem 27 arestas, 9 faces e 19 vértices.

Comentário: É interessante que os alunos sejam levados a concluir que o poliedro regular com faces pentagonais é o dodecaedro.

14. **a)** Resposta possível:



b) Resposta pessoal.

15. $A = \frac{6 \cdot 4 + 2 \cdot 6}{2} = \frac{36}{2} = 18$

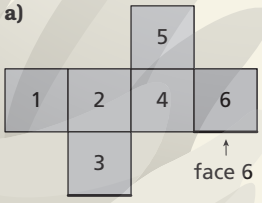
$F = 8$

$V + F - A = 2$

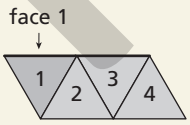
$V + 8 - 18 = 2 \Rightarrow V = 12$

Portanto, o poliedro tem 18 arestas e 12 vértices.

16. **a)**



b)



Comentário: Avaliar a conveniência de, na planificação do cubo, propor aos alunos que renumerem as faces de modo que a soma dos números de quaisquer duas faces opostas seja constante. Uma resposta possível é obtida com a troca de lugar dos números 2 e 3 e dos números 4 e 6.

17. Vamos calcular o número de arestas da figura:

$A = \frac{3 \cdot 8 + 4 \cdot 4}{2} = \frac{24 + 16}{2} = 20$

$F = 4 + 4 + 4 = 12$

Aplicando a relação de Euler, obtemos:

$V + F - A = 2$

$V + 12 - 20 = 2$

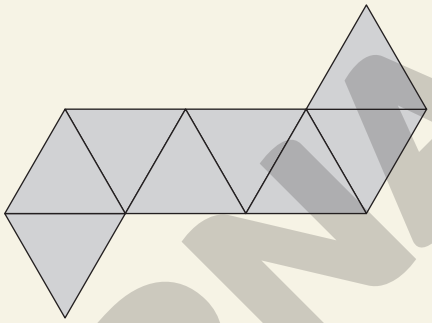
$V = 10$

Assim:

$V + A = 10 + 20 = 30$

Portanto, a soma do número de arestas e do número de vértices do poliedro é 30.

18. Resposta possível:



19. **a)** Sabemos que $d = a\sqrt{3}$; assim:

$d = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow d = 15$

Logo, a diagonal mede 15 cm.

b) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} =$

$= \sqrt{\frac{36 + 9 + 16}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$

Logo, a diagonal mede $\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm.

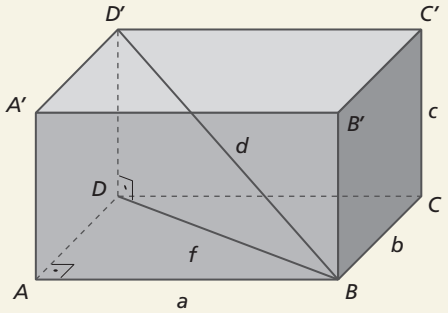
20. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow 3\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + 4^2 + 7^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + 65} \Rightarrow 9 \cdot 10 = a^2 + 65 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 90 - 65 \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5$

Logo, a vale 5 cm.

21. A figura representa a carroceria do caminhão, em que $a = 5$ m, $b = 2$ m e $c = 3$ m. Inicialmente, calculamos f e d. Depois, comparamos d com a medida 5,9 m do mastro de bandeira.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Pelo teorema de Pitágoras:

$f^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 2^2 = 29$

$d^2 = f^2 + c^2 = 29 + 3^2 = 38 \Rightarrow d = \sqrt{38} \simeq 6{,}16$

Como d é 6,16 m, maior do que a medida 5,9 m do mastro, Rafael pode aceitar a encomenda.

22. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12} = k \Rightarrow x = 3k$, $y = 4k$ e $z = 12k$

Assim:

$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$130 = \sqrt{9k^2 + 16k^2 + 144k^2}$

$130 = \sqrt{169k^2} = 13k$

$k = 10$

Então: $x = 30$, $y = 40$ e $z = 120$

Portanto, as medidas das arestas são 30 cm, 40 cm e 120 cm.

Comentário: Avaliar a conveniência de relembrar os alunos da representação prática da relação entre números diretamente proporcionais.

23. Observe que o $\triangle ABH$ é retângulo em $\hat{B}$.

Logo, $S = \frac{1}{2} b \cdot h$, em que BH e AB podem ser considerados b e h, respectivamente.

Assim:

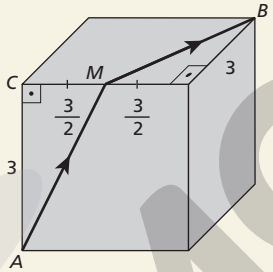
$BH = d = 4\sqrt{2}$

$AB = \ell = 4$

$S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2}$

Portanto, a área do triângulo ABH é $8\sqrt{2}$ cm².

24. **a)** Considere as medidas apresentadas na figura em centímetro.



$AM = MB$

$(AM)^2 = (CM)^2 + (AC)^2$

$(AM)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2$

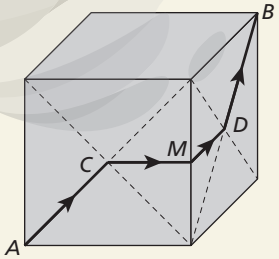
$(AM)^2 = \frac{45}{4}$

$AM = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$AM + MB = 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$

Portanto, a medida do caminho de A a B é $3\sqrt{5}$ cm.

b) Seja d a medida da diagonal de cada face e a a medida da aresta do cubo, temos:



$AC = DB = \frac{d}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$CM = MD = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$

$AC + CM + MD + DB =$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3 + 3\sqrt{2}$

Portanto, a medida do caminho de A a B é $3\left(\sqrt{2} + 1\right)$ cm.

25. $AJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (metade da diagonal de uma face)

$AE = a = 20$

O $\triangle AEJ$ é retângulo em $\hat{A}$. Assim:

$(EJ)^2 = (AJ)^2 + (AE)^2$

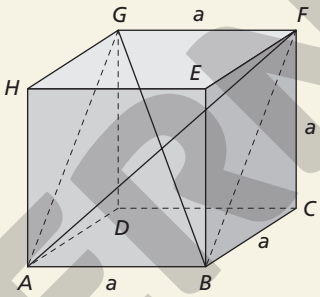
$(EJ^2) = \left(\frac{20\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 20^2$

$(EJ)^2 = 200 + 400 = 600$

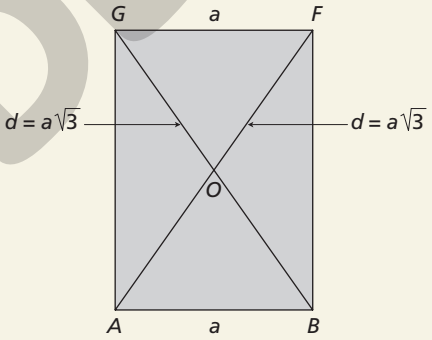
$EJ = 10\sqrt{6}$

Portanto, o segmento $\overline{EJ}$ mede $10\sqrt{6}$ cm.

26.



O plano que contém as duas diagonais é $ABFG$.



O ponto O divide o segmento $\overline{AF}$ ao meio; então: $OF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Se as diagonais fossem perpendiculares, o $\triangle OGF$ seria retângulo e, portanto, poderíamos aplicar o teorema de Pitágoras. Assim:

$(OG)^2 + (OF)^2 = (GF)^2$

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2$

$2 \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} = a^2$

$\frac{a^2 \cdot 3}{2} = a^2$ (sentença falsa)

Portanto, o $\triangle OGF$ não é retângulo em O, e as diagonais não se cruzam perpendicularmente.

Comentário: Avaliar a conveniência de a resolução ser feita em grupo. Após fazer o desenho, espera-se que os alunos observem que a questão espacial foi reduzida a um problema de Geometria plana em que é possível aplicar o teorema de Pitágoras.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

27. A resolução é obtida por meio da observação das figuras.
alternativa d

28. A resolução é obtida por meio da observação das figuras.
alternativa b

29. $A_{total} = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot (ab + ac + bc) =$
$= 2 \cdot (20 \cdot 10 + 20 \cdot 15 + 10 \cdot 15) =$
$= 2 \cdot 650 = 1.300$

Logo, serão necessários 1.300 cm² de papelão.

Comentário: Nesse caso, é interessante que os alunos percebam a importância do uso dos poliedros nas produções industriais e nas construções presentes na sociedade em que vivem.

30. **a)** $A_{base} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

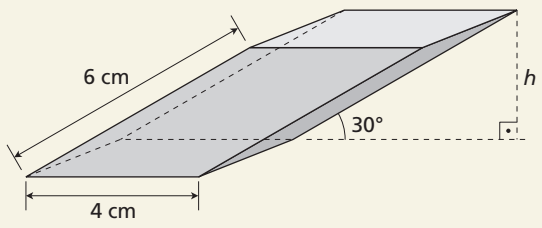
$A_{lateral} = 6 \cdot b \cdot h = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} + 12\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$

Logo, a área total é $21\sqrt{3}$ m².

b)

ADILSON SECCO



O prisma tem base quadrada. Assim:

$A_{base} = 4^2 = 16$

Para calcular a área lateral, vamos obter a altura h.

$\text{sen } 30° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3$

A área lateral é formada por dois retângulos, de dimensões 4 cm e 6 cm, e por dois paralelogramos cuja medida da base é 4 cm e cuja medida da altura é 3. Assim, temos:

$A_{lateral} = 4 \cdot A_{paralelogramo} = 4 \cdot b \cdot h =$
$= 2 \cdot (4 \cdot 6) + 2 \cdot (4 \cdot 3) = 72$

Logo, a área total é dada por:

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 16 + 72 = 104$

Logo, a área total é 104 cm².

Comentário: Nesse exercício, os alunos têm a possibilidade de perceber a diferença entre os cálculos das alturas do prisma reto e do prisma oblíquo e a necessidade da aplicação da Trigonometria.

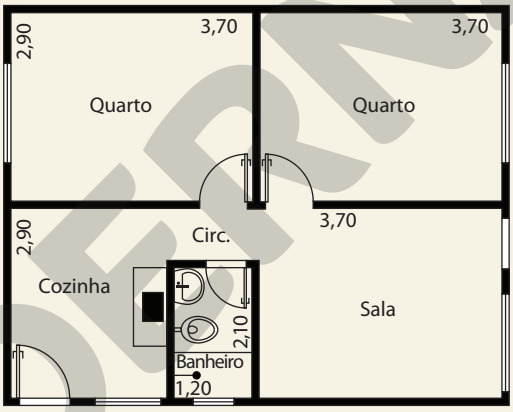
31. Como o maior segmento, cujas extremidades são vértices de um cubo, é a diagonal do cubo, e o menor é a aresta, o cubo de superfície de menor área é o B, porque, tendo diagonal de mesma medida da aresta do cubo A e diagonal de mesma medida da face do C, ele terá menor aresta que os outros e, portanto, a superfície de menor área.

32. **a)** Como $A_{total} = 6 \cdot a^2$, temos, em unidades de área:
Cubo I: $A_{total} = 6 \cdot 1^2 = 6$
Cubo II: $A_{total} = 6 \cdot 2^2 = 24$
Cubo III: $A_{total} = 6 \cdot 3^2 = 54$
Cubo IV: $A_{total} = 6 \cdot 4^2 = 96$

b) medida da aresta $= a \Rightarrow A_{total} = 6a^2$
medida da aresta $= 2a \Rightarrow A_{total} = 6 \cdot (2a)^2 = 4 \cdot 6a^2$
medida da aresta $= 3a \Rightarrow A_{total} = 6 \cdot (3a)^2 = 9 \cdot 6a^2$
Portanto, quando a medida da aresta dobra, a área total fica multiplicada por 4, ou seja, quadruplica, e, quando a medida da aresta triplica, a área total fica multiplicada por 9.

c) Em um cubo de arestas medindo 2, cabem 8 cubos de aresta unitária, pois: $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8$
Em um cubo de arestas medindo 3, cabem 27 cubos de aresta unitária, pois: $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = 27$
Em um cubo de arestas medindo 4, cabem 64 cubos de aresta unitária, pois: $4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 64$

33.



NELSON MATSUDA

a) Para um cálculo aproximado, podemos considerar um teto único, total, para a casa. Ele teria a forma de retângulo com lados medindo 7,4 m e 5,8 m. Logo, a sua área é dada por $7,4 \cdot 5,8 = 42,92$, aproximadamente 43 m². Carlos consome 43 m² com uma demão e 86 m² com duas demãos. Portanto, ele consegue dar duas demãos.

b) Lembrando que o pé direito tem 2,70 m, podemos calcular as áreas das paredes como se não houvesse porta, janela etc. e depois subtrair as áreas das portas, janelas etc.

dois quartos: $2 \cdot 2 \cdot 2,70 \cdot (2,90 + 3,70) = 71,28 \simeq 71$

banheiro: $2 \cdot 2,70 \cdot (2,10 + 1,20) = 17,82 \simeq 18$

cozinha e sala: $2 \cdot 2,70 \cdot (2,90 + 3,70 + 3,70 + 2,10) =$
$= 66,96 \simeq 67$

área das portas, janelas e vitrôs $= 14$ m²

área a ser pintada em m² $= (71 + 18 + 67 - 14) + 43 =$
$= 185 < 225$

Uma demão Carlos consegue, pois a área total das paredes internas é, aproximadamente, 142 m²; adicionando o teto, fica 185 m². Duas demãos não são possíveis, pois 370 m² é maior que o rendimento máximo.

c) Duas demãos no teto (86 m²) mais uma demão nas paredes internas (142 m²) é 228 m².

Como 228 m² é maior do que 225 m² (rendimento mínimo) e menor do que 325 m² (rendimento máximo), talvez Carlos consiga fazer essa pintura.

MODERNA

34. Resposta pessoal.

35. $A_{base} = \frac{(7,5 + 10) \cdot 5}{2} = 43,75$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 43,75 \cdot 32 = 1.400$

Assim:

$1.400 \cdot 10,5 = 14.700$

Portanto, a massa da barra será 14.700 g.

Comentário: Além de verificar a importância da aplicação do volume na indústria, os alunos têm a oportunidade de comparar a relação entre medidas de volume e medidas de massa.

36. $A_{total} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow 216 = 6 \cdot a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{216}{6} \Rightarrow a = \sqrt{36} \Rightarrow a = 6$

$V_{cubo} = a^3 \Rightarrow V_{cubo} = 6^3 \Rightarrow V_{cubo} = 216$

Logo, o volume do cubo é 216 m³.

37. $A_{base\ tanque} = 15 \cdot 20 \Rightarrow A_{base\ tanque} = 300$

$V_{peça\ de\ metal} = 300 \cdot 0,35 \Rightarrow V_{peça\ de\ metal} = 105$

Logo, o volume da peça de metal é 105 cm³.

Comentário: Conta a história que o rei Hierão de Siracusa incumbiu Arquimedes (287 a.C.–212 a.C.) de verificar se a sua coroa era toda de ouro, conforme encomendara ao ourives. Ele sabia que deveria determinar a densidade da coroa e comparar com a densidade do ouro. Mas como medir o volume da coroa sem a derreter? Arquimedes descobriu a solução quando, ao entrar em uma banheira com água, observou que o nível da água subia. Concluiu então que, para medir o volume da coroa, bastava mergulhar a coroa em água e calcular o volume de água deslocado, que deveria ser equivalente. Exultante, Arquimedes teria saltado do banho e corrido para casa nu, exclamando "Eureka!" (eu achei!).

38. Por observação, tem-se 9 cubinhos na camada superior e 2 na camada inferior. Entre as alternativas a e e, prevalece a alternativa a.

39. $A_{paralelepípedo} = 2(ab + ac + bc)$

$A_{cubo} = 6x^2$

$A_{paralelepípedo} = A_{cubo}$

$2(ab + ac + bc) = 6x^2$

$2(3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 7) = 6x^2$

$15 + 21 + 35 = 3x^2$

$x^2 = \frac{71}{3}$

$x = \sqrt{\frac{71}{3}}$

Assim:

$d_{cubo} = x\sqrt{3} = \frac{\sqrt{71}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{71}$

Portanto, a diagonal do cubo mede $\sqrt{71}$ unidades de comprimento.

40. Sabemos que:

$$\begin{cases} V = a \cdot b \cdot c = 240 & \text{(I)} \\ a \cdot c = 48 \Rightarrow a = \frac{48}{c} & \text{(II)} \\ b \cdot c = 30 \Rightarrow b = \frac{30}{c} & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$a \cdot b \cdot c = 240 \Rightarrow \frac{48}{c} \cdot \frac{30}{c} \cdot c = 240 \Rightarrow c = 6$

Assim:

$a = \frac{48}{6} = 8$ e $b = \frac{30}{6} = 5$

Logo:

$A_{total} = 2(ab + ac + bc)$

$A_{total} = 2 \cdot (8 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 5 \cdot 6)$

$A_{total} = 236$

Portanto, a área total da superfície do paralelepípedo é 236 cm².

41. Sabemos que:

$$\begin{cases} h = 8 \\ A_{total} = 3 \cdot A_{lateral} \end{cases}$$

Assim:

$3a \cdot (2h + a\sqrt{3}) = 3 \cdot 6 \cdot a \cdot h$

$3a \cdot (2 \cdot 8 + a\sqrt{3}) = 18 \cdot a \cdot 8$

$3a \cdot (16 + a\sqrt{3}) = 144a$

$48a + 3a^2\sqrt{3} - 144a = 0$

$3\sqrt{3}a^2 - 96a = 0$

$3a \cdot (\sqrt{3}a - 32) = 0$

$a = \frac{32\sqrt{3}}{3}$

$A_{base} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \left(\frac{32\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 512\sqrt{3}$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 512\sqrt{3} \cdot 8 = 4.096\sqrt{3}$

Portanto, o volume do prisma é $4.096\sqrt{3}$ cm³.

42. Para que a vara seja a maior possível, ela deverá ter o comprimento da diagonal do cubo; assim:

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2 \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Logo, $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m.

$V_{cubo} = a^3 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 \Rightarrow V_{cubo} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$

Logo, $V_{cubo} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ m³.

Como 1 dm³ = 1 ℓ, temos:

$V_{cubo} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ m³ ⇒

$\Rightarrow V_{cubo} = \frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ dm³ $\Rightarrow V_{cubo} = \frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ ℓ

Comentário: Analogamente à questão 35, após a resolução, os alunos podem ser levados a uma reflexão sobre a relação entre medidas de volume e medidas de capacidade.

43. $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{2b}{3} \\ \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = \frac{4b}{3} \end{cases}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 4\sqrt{29}$

$a^2 + b^2 + c^2 = 16 \cdot 29 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 464 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{4b}{3}\right)^2 = 464 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4b^2}{9} + b^2 + \frac{16b^2}{9} = 464 \Rightarrow b = \sqrt{144} \Rightarrow b = 12$

MODERNA

Assim:

$a = \frac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow a = 8$ e $c = \frac{4 \cdot 12}{3} \Rightarrow c = 16$

$A_{\text{paralelepípedo}} = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

$A_{\text{paralelepípedo}} = 2 \cdot (8 \cdot 12 + 8 \cdot 16 + 12 \cdot 16)$

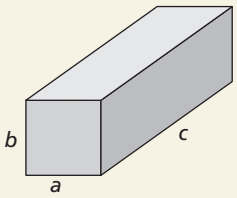
$A_{\text{paralelepípedo}} = 832$

Portanto, a área do paralelepípedo é 832 cm².

$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 1.536$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 1.536 cm³.

44. Um cubo de aresta 4 cm é composto de 64 cubinhos com arestas de 1 cm.



Consideremos um paralelepípedo de dimensões a, b e c formado por esses 64 cubinhos.

Os divisores de 64 (possíveis valores de a, b e c) são: 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Como $a \cdot b \cdot c = 64$, há somente 7 paralelepípedos formados pelos 64 cubinhos cujas dimensões e área total são dadas no quadro abaixo.

a	1	1	1	1	2	2	4
b	1	2	4	8	2	4	4
c	64	32	16	8	16	8	4
A_{total}	258	196	168	160	136	112	96

a) O paralelepípedo de menor área tem, portanto, dimensões 4 cm, 4 cm e 4 cm.

b) O paralelepípedo de maior área tem dimensões 1 cm, 1 cm e 64 cm.

45. Como o cubo tem 2 cm de aresta, temos:

a) $V_{\text{cubo}} = a^3 = 2^3 = 8$

Assim, $V_{\text{cubo}} = 8$ cm³.

b) $A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 2^2 = 24$

Assim, $A_{\text{cubo}} = 24$ cm².

c) $V_{\text{cubo}} = a^3$; se dobrar a medida da aresta:

$V_{\text{cubo}} = (2a)^3 = 8 \cdot a^3$

Então, o volume fica multiplicado por 8.

d) $A_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2$; se dobrar a medida da aresta:

$A_{\text{cubo}} = 6 \cdot (2a)^2 = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2$

Então, a área fica multiplicada por 4.

Comentário: Avaliar a conveniência de propor uma questão inversa da proposta no item **c**: "O que ocorre com a medida x da aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de outro cubo de aresta a?".

Espera-se que os alunos concluam que $x = a\sqrt[3]{2}$.

Seria, então, interessante comentar com eles que essa questão, sobre a duplicação do cubo, quando proposta para resolução usando régua e compasso, constituiu um dos três problemas mais famosos da história da Matemática, chamado "problema deliano". Diz-se que sua origem remonta à época da morte de Péricles por uma peste que dizimou um quarto da população de Atenas, e que teria sido proposto pelo oráculo de Apolo em Delos a uma delegação de atenienses como forma de acabar com o surto da doença. Para mais informações, consultar a obra *História da Matemática*, de Carl B. Boyer. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 64 e 65. Caso seja possível, professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas podem ser convidados a participar, a fim de tornar a atividade interdisciplinar.

46. Se uma pirâmide tem uma base de 8 vértices, então ela tem 16 arestas, sendo 8 arestas da base e 8 arestas laterais. Ela tem, ainda, 1 vértice fora da base, totalizando 9 vértices.

Assim, aplicando a relação de Euler, temos:

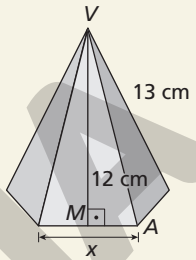
$V + F - A = 2 \Rightarrow 9 + F - 16 = 2 \Rightarrow F = 9$

Logo, essa pirâmide tem 9 faces.

47. Se uma pirâmide tem n faces laterais, então ela tem $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices.

48. Apenas as planificações (I) e (II) são de superfícies de pirâmides.

49. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMV, obtemos:



$13^2 = 12^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$169 = 144 + \frac{x^2}{4}$

$\frac{x^2}{4} = 25$

$x^2 = 100$

$x = 10$

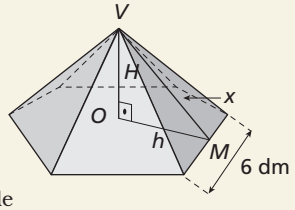
Logo, a aresta da base mede 10 cm.

Comentário: Essa questão pode propiciar aos alunos a oportunidade de retomar as fórmulas dos apótemas dos polígonos e verificar a relação entre arestas e apótemas.

50. Como $H = 4$ dm e $\ell = 6$ dm, temos:

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OVM, temos:



$x^2 = H^2 + h^2$

$x^2 = 16 + \frac{36 \cdot 3}{4}$

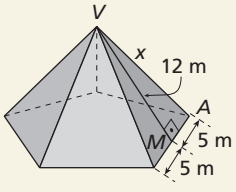
$x^2 = 16 + 27$

$x^2 = 43$

$x = \sqrt{43}$

Logo, o apótema da pirâmide mede $\sqrt{43}$ dm.

51. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMV, temos:



$x^2 = 12^2 + 5^2$

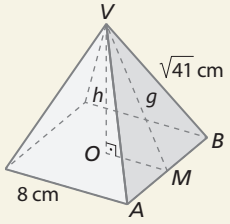
$x^2 = 144 + 25$

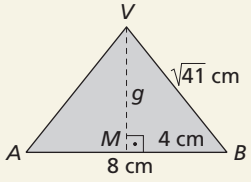
$x^2 = 169$

$x = 13$

Portanto, a aresta lateral da pirâmide mede 13 m.

52.





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Aplicando o teorema de Pitágoras:

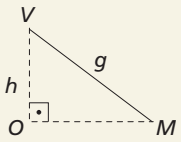
• No triângulo *VMB*:

$\left(\sqrt{41}\right)^2 = g^2 + 4^2$

$g^2 = 41 - 16$

$g = \sqrt{25}$

$g = 5$



• No triângulo *VOM*:

$g^2 = h^2 + m^2$

$5^2 = h^2 + 4^2$

$h = \sqrt{25 - 16} = 3$

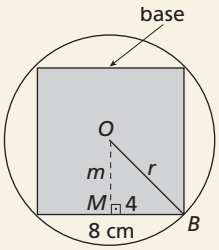
$m = \frac{8}{2} = 4$

• No triângulo *OMB*:

$r^2 = m^2 + 4^2$

$r = \sqrt{4^2 + 4^2}$

$r = 4\sqrt{2}$



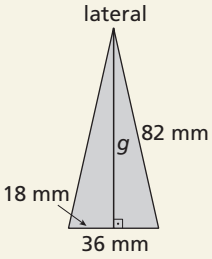
Assim, $g = 5$ cm, $h = 3$ cm e $r = 4\sqrt{2}$ cm.

53. $g^2 = 82^2 - 18^2$

$g^2 = 6.724 - 324$

$g^2 = \sqrt{6.400}$

$g = 80$



$A_{lateral} = 3 \cdot \frac{80 \cdot 36}{2} = 4.320$

$A_{base} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36^2\sqrt{3}}{4}$

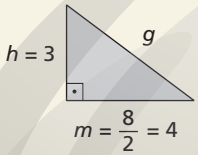
$A_{base} = 324\sqrt{3}$

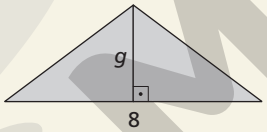
$A_{total} = 324\sqrt{3} + 4.320$

$A_{total} = 108 \cdot \left(40 + 3\sqrt{3}\right)$

Portanto, a área total da superfície da pirâmide é $108 \cdot \left(40 + 3\sqrt{3}\right)$ mm².

54. $A_{base} = a^2 = 8^2 = 64$





$g^2 = h^2 + m^2$

$g^2 = 3^2 + 4^2$

$g = \sqrt{9 + 16}$

$g = 5$

$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{8 \cdot g}{2} = 4 \cdot \frac{8 \cdot 5}{2} = 80$

$A_{total} = 64 + 80 \Rightarrow A_{total} = 144$

Logo, a área da base é 64 cm², a área lateral é 80 cm² e a área total é 144 cm².

55. Como $A_{total\ tetraedro} = 16\sqrt{3}$ cm², temos:

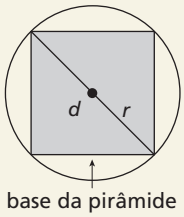
$A_{total\ tetraedro} = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 16\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4$

Logo, a medida da aresta é 4 cm.

56. Como $r = 6\sqrt{2}$, temos que a diagonal da base mede:

$2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$



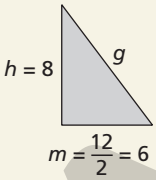
Como $d = a\sqrt{2}$, temos:

$12\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow a = 12$

$A_{base} = a^2 = 12^2 = 144$

A área da base é 144 cm².

$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = \sqrt{100} \Rightarrow g = 10$

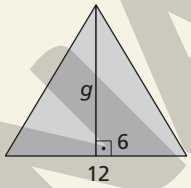


$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{12 \cdot g}{2}$

$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{12 \cdot 10}{2}$

$A_{lateral} = 240$

A área lateral é 240 cm².



$A_{total} = 144 + 240 = 384$

Logo, a área total da superfície é 384 cm².

57. $A_{base} = a^2 = 6^2 = 36$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{pirâmide} = 48$

Logo, o volume da pirâmide é 48 cm³.

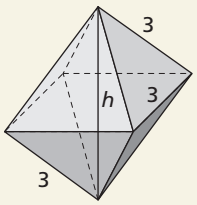
58. $V_{tetraedro} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{8\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Logo, o volume do tetraedro é $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³.

59. $A_{total} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$A_{total} = 8 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4}$

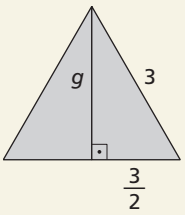
$A_{total} = 18\sqrt{3}$



$3^2 = g^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

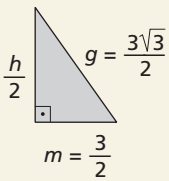
$g^2 = 9 - \frac{9}{4}$

$g = \frac{3\sqrt{3}}{2}$



Altura do octaedro:

$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$



$\frac{h^2}{4} = \frac{27}{4} - \frac{9}{4}$

$\frac{h}{2} = \sqrt{\frac{18}{4}}$

$h = 3\sqrt{2}$

O octaedro é formado por duas pirâmides quadrangulares regulares. Assim:

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$A_{\text{base pirâmide}} = a^2 = 3^2 \Rightarrow A_{\text{base pirâmide}} = 9$

$V_{\text{octaedro}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

Portanto, a área total da superfície do octaedro é $18\sqrt{3}$ cm² e o volume é $9\sqrt{2}$ cm³.

60. $A_{\text{base}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

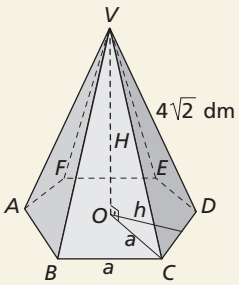
$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 8 = 24\sqrt{3}$

Portanto, o volume da pirâmide é $24\sqrt{3}$ cm³.

61. $P_{\text{base}} = 24$ dm

$a = \frac{24}{6} = 4$

O $\triangle VOC$ é retângulo em O, e seus lados medem H, a e $4\sqrt{2}$ dm.



$VC^2 = OC^2 + H^2$

$32 = 4^2 + H^2$

$H^2 = 16 \Rightarrow H = 4$

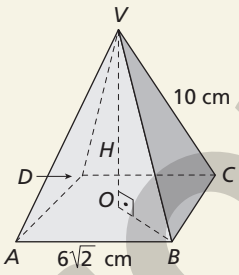
$A_{\text{base}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 4 = 32\sqrt{3}$

Logo, o volume da pirâmide é $32\sqrt{3}$ dm³.

62. O $\triangle OVB$ é retângulo em O.

Como OB é a metade da medida da diagonal do quadrado $ABCD$, temos:



$OB = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$VB = 10$

$10^2 = 6^2 + H^2 \Rightarrow H = 8$

$A_{\text{base}} = (6\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 2 = 72$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H =$

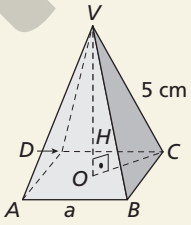
$= \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 8 = 192$

Portanto, o volume da pirâmide é 192 cm³.

63. $4a = 12\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

$OC = \frac{d}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 3$

Como o $\triangle VOC$ é retângulo em O, temos:



$VC^2 = VO^2 + OC^2$

$25 = H^2 + 3^2$

$H^2 = 16$

$H = 4$

$A_{\text{base}} = a^2 = 18$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H$

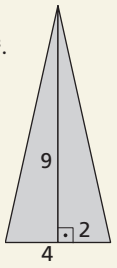
$V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 4$

$V = 24$

Logo, o volume da pirâmide é 24 cm³.

64. **a)** $A_{\text{base}} = a^2 = 4^2 = 16$

Logo, a área da base da pirâmide é 16 cm².



b) $A_{\text{lateral}} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 9}{2}$

$A_{\text{lateral}} = 72$

Logo, a área lateral é 72 cm².

c) $A_{\text{total}} = A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 16 + 72 = 88$

Logo, a área total da pirâmide é 88 cm².

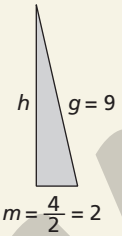
d) $g^2 = h^2 + m^2$

$9^2 = h^2 + 2^2$

$h^2 = 81 - 4$

$h = \sqrt{77}$

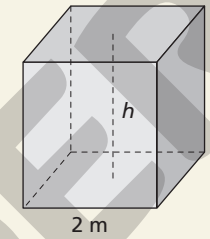
Logo, a altura da pirâmide é $\sqrt{77}$ cm.

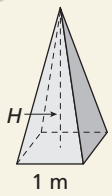


e) $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow V_{\text{pirâmide}} = 16\frac{\sqrt{77}}{3}$

Logo, o volume da pirâmide é $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm³.

65.





$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 2^2 \cdot h$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot H}{3} = \frac{1^2 \cdot H}{3}$

$V_{\text{prisma}} = V_{\text{pirâmide}}$

$4h = \frac{H}{3} \Rightarrow \frac{H}{h} = \frac{12}{1}$

A razão entre as alturas do prisma e da pirâmide é, portanto, 1 para 12.

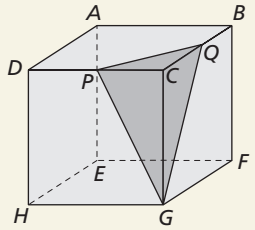
66. $V_{\text{prisma}} = 6 \cdot V_{\text{pirâmide}}$ e A_{base} iguais.

$A_{\text{base}} \cdot h = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H$

$h = 2 \cdot H$

Portanto, a altura do prisma é o dobro da altura da pirâmide.

67. A pirâmide $PQCG$ tem um triedro trirretangular em que o triângulo PQC pode ser considerado base e $\overline{CG}$ altura da pirâmide.



$A_{\text{base}} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$

$h = 10$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} \cdot 10 = \frac{125}{3}$

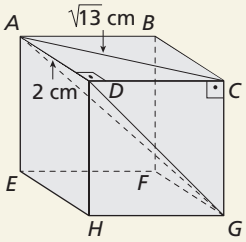
Portanto, o volume da pirâmide $PQCG$ é $\frac{125}{3}$ cm³.

Comentário: Na resolução desse exercício, espera-se que os alunos percebam a diversidade de conceitos utilizados para determinar o volume.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

68. Temos:



$AC = \sqrt{13}$ cm

$AD = 2$ cm

$CG = 3$ cm

No $\triangle ADC$:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$13 = 2^2 + DC^2$

$DC = 3$

$\overline{CG}$ é perpendicular ao plano que contém o $\triangle ADC$; logo, pode ser considerado altura da pirâmide *ADCG*, com base no triângulo *ADC*.

$$A_{base} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ e } h = 3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 = 3$$

Portanto, o volume da pirâmide *ACDG* é 3 cm³.

69. $V_{prisma} = A_{base} \cdot H$

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot H}{3}$$

$$V_{ABCDE} = V_{prisma} - V_{CEFC}$$

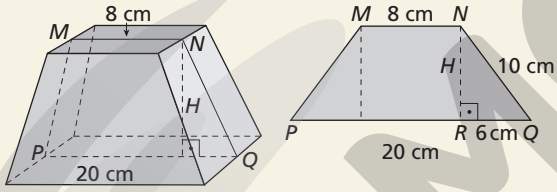
$$V_{ABCDE} = A_{base} \cdot H - \frac{A_{base} \cdot H}{3} = \frac{2A_{base} \cdot H}{3}$$

$$\frac{V_{ABCDE}}{V_{DEFC}} = \frac{\frac{2}{3}A_{base} \cdot H}{\frac{A_{base} \cdot H}{3}} = \frac{2}{1}$$

Portanto, a razão entre os volumes de *ABCDE* e *DEFC* é 2 para 1.

Comentário: Esta é uma maneira de os alunos confirmarem o fato de que o volume de uma pirâmide corresponde à terça parte do volume do prisma de mesma base e de mesma altura.

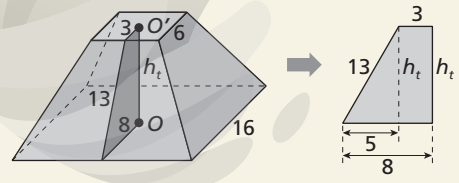
70.



No $\triangle NQR$, temos: $10^2 = 6^2 + H^2 \Rightarrow H = 8$

Logo, a altura do tronco é 8 cm.

71.



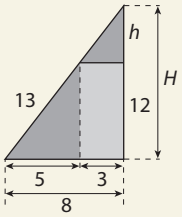
$13^2 = h_t^2 + 5^2 \Rightarrow h_t^2 = 169 - 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_t = \sqrt{144} \Rightarrow h_t = 12$

Os triângulos em destaque são semelhantes; logo:

$$\frac{h}{12} = \frac{3}{5} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 12}{5} \Rightarrow h = \frac{36}{5}$$

$$H = h_t + h = 12 + \frac{36}{5} = \frac{96}{5}$$



Então, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

$$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

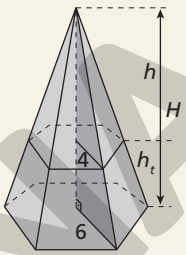
$$V_t = \left(\frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot \frac{96}{5} - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot \frac{36}{5}\right)$$

$$V_t = \frac{24.576 - 1.296}{15} = 1.552$$

Logo, a altura do tronco é 12 cm e o volume é 1.552 cm3.

72. Sabemos que:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \text{ m} \\ a_2 = 6 \text{ m} \\ V_{tronco} = 342\sqrt{3} \text{ m}^3 \end{cases}$$



$$A_b = 6 \cdot \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$$

$$A_B = 6 \cdot \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$$

O volume do tronco é dado por:

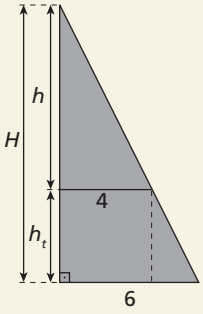
$$V_t = \frac{1}{3}A_B \cdot H - \frac{1}{3}A_b \cdot h$$

$$342\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot H - \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot h$$

$$342 \cdot 3 = 54 \cdot H - 24 \cdot h$$

$$1.026 = 54 \cdot H - 24 \cdot h \quad \text{(I)}$$

Pela figura ao lado, temos:



$$\frac{h}{H} = \frac{4}{6} \Rightarrow h = \frac{2}{3}H \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$1.026 = 54 \cdot H - 24 \cdot \frac{2}{3}H$$

$$H = \frac{1.026}{38} \Rightarrow H = 27$$

Assim: $h = 18$

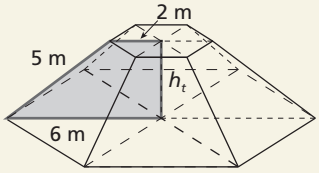
Como $h_t = H - h$, temos:

$h_t = 27 - 18 \Rightarrow h_t = 9$

Logo, a altura do tronco é 9 m.

73. $A_b = 6\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

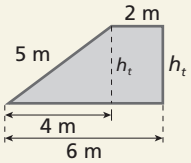
$A_B = 54\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$

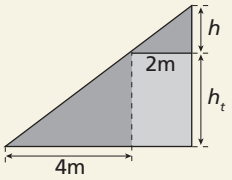


$5^2 = h_t^2 + 4^2$

$h_t = \sqrt{25 - 16}$

$h_t = 3$





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Pela figura, temos:

$\frac{h}{h_t} = \frac{2}{4} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot 3}{4} \Rightarrow h = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$H = h_t + h \Rightarrow H = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

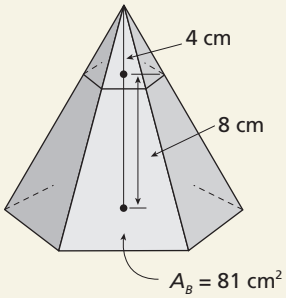
Assim:

$V_t = \frac{1}{3} A_B \cdot H - \frac{1}{3} A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V_t = \frac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} - \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow V_t = 78\sqrt{3}$

Portanto, o volume do tronco é $78\sqrt{3}$ m³.

74. $\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_b}{A_B}$



$\left(\frac{4}{12}\right)^2 = \frac{A_b}{81}$

$\frac{1}{9} = \frac{A_b}{81}$

$A_b = 9$

$V_t = \frac{1}{3} A_B \cdot H - \frac{1}{3} A_b \cdot h$

$V_t = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4$

$V_t = 312$

Logo, o volume do tronco é 312 cm³.

Exercícios complementares

1. Pela figura, observamos 4 faces triângulares, mas a parte de trás é simétrica à parte da frente; então, há mais 4 faces triangulares; portanto, temos 8 faces triangulares ao todo. Observamos também 3 faces quadradas, 2 nas laterais e 1 na face superior. Como o poliedro é simétrico, temos uma face quadrada na parte inferior e mais duas na parte de trás. Ao todo, há 6 faces quadradas.

alternativa b

2. **a)** não convexo
b) convexo
c) convexo

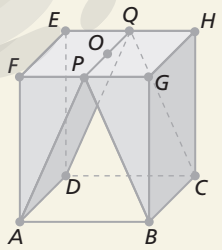
3. O número de faces do poliedro é 14 (8 + 6), em que 8 faces são triangulares, então 24 lados (8 · 3), e 6 faces são octogonais, então 48 lados (6 · 8). Assim, o número de arestas é dado por: (24 + 48) : 2 = 36

Aplicando a relação de Euler, temos o número de vértices:

$V + F - A = 2 \Rightarrow V = 36 - 14 + 2 \Rightarrow V = 24$

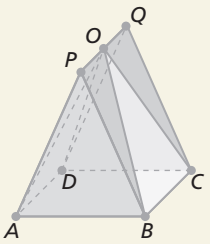
Portanto, o poliedro tem 24 vértices.

4. Observe a figura abaixo.



Após os cortes, partindo de O em direção às retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, obtemos dois prismas triangulares congruentes: *AFPQED* e *BGPQHC*

Agora, com os cortes de O em direção às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, temos:

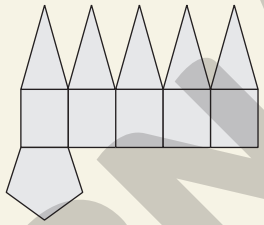


Formando dois tetraedros congruentes: *ABOP* e *CDOQ*.

Logo, os sólidos descartados são iguais dois a dois.

alternativa e

5. Resposta possível:



Comentário: Analogamente às questões 14 e 18 dos exercícios propostos, após o traçado da planificação, compará-lo com os dos colegas, verificando a possibilidade de diferentes planificações.

6. $V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{8 \cdot 2}{2} \cdot 5 \Rightarrow V = 40$

Assim, o volume de madeira necessário é 40 cm³.

7. $A_{base} = 25 \cdot 25 = 625$

$A_{lateral} = 4 \cdot 25 \cdot 50 = 5.000$

$A_{base} + A_{lateral} = 625 + 5.000 = 5.625$

Logo, a área a ser forrada é 5.625 cm².

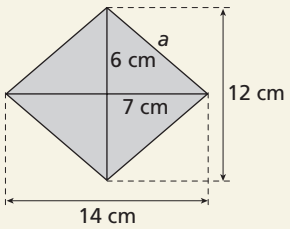
Seja x o menor comprimento de tecido, então:

$x = \frac{5.625}{50}$

Portanto, $x = 112{,}5$ cm ou $x = 1{,}125$ m.

alternativa e

8.



Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$a^2 = 6^2 + 7^2$

$a = \sqrt{36 + 49} \Rightarrow a = \sqrt{85}$

Assim:

$A_{base} = \frac{12 \cdot 14}{2} \Rightarrow A_{base} = 84$

$A_{lateral} = 4 \cdot a \cdot h = 4 \cdot \sqrt{85} \cdot 6 = 24\sqrt{85}$

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 84 + 24\sqrt{85}$

$A_{total} = 24\left(7 + \sqrt{85}\right)$

Logo, a área total da superfície do paralelepípedo é $24\left(7 + \sqrt{85}\right)$ cm².

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

9. $A_{cubo} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{96}{6} \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4$

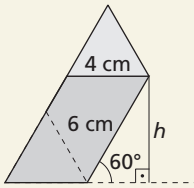
$V_{cubo} = (a + x)^3 = 125 \Rightarrow (4 + x)^3 = 5^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + x = 5 \Rightarrow x = 5 - 4 \Rightarrow x = 1$

Portanto, a aresta deve ser aumentada em 1 m.

10. O prisma tem como base um triângulo equilátero; assim:

$A_{base} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$



Cálculo da altura h:

$\text{sen } 60° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$

Logo:

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 36$

Portanto, o volume do prisma é 36 cm³.

11. Como $a = 20$, $b = 25$ e $c = 6 \cdot 1{,}5 = 9$, temos:

$A_{papel} = 1{,}2 \cdot 2 \cdot (20 \cdot 25 + 20 \cdot 9 + 25 \cdot 9)$

$A_{papel} = 2{,}4 \cdot (500 + 180 + 225)$

$A_{papel} = 2{,}4 \cdot 905$

$A_{papel} = 2.172$

Logo, o balconista gastará 2.172 cm² de papel.

12. Perímetro da base: 60 m

$\ell = \frac{60}{4} = 15$

$A_{base} = 15^2 = 225$

$V_{reservatório} = A_{base} \cdot h = 225 \cdot 35 = 7.875$

60% de 7.875 = 4.725

Assim: 7.875 − 4.725 = 3.150

Logo, restam 3.150 m³ do reservatório.

13. Sendo S, em centímetro, a soma das dimensões a, b e c do paralelepípedo reto-retângulo, temos:

$S = a + b + c \Rightarrow S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \Rightarrow$

$\Rightarrow S^2 = 21 + 28 \Rightarrow S = 7$

alternativa a

14. $h = 2\sqrt{5}$

$A_{base} = \frac{(2\sqrt{5})^2}{2} = 10$

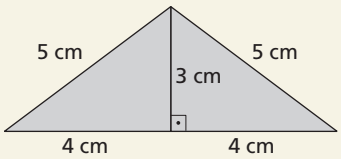
$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{20\sqrt{5}}{3}$

Logo, o volume da pirâmide é $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm³.

15. O volume do tetraedro é igual ao volume do cubo de aresta 3 menos 4 vezes o volume de um tetraedro trirretângulo, ou seja: $3^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9$

alternativa c

16.



$A_B = \frac{8 \cdot 3}{2} \Rightarrow A_B = 12$

$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_b}{12} = \frac{3^2}{9^2} \Rightarrow A_b = \frac{4}{3}$

$V_{nova\ pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 = \frac{4}{3}$

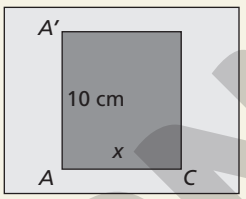
Logo, o volume da nova pirâmide é $\frac{4}{3}$ cm³.

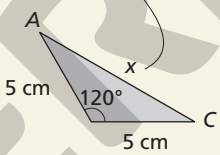
17. a) $A_{base} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 37{,}5\sqrt{3}$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 37{,}5\sqrt{3} \cdot 10 = 375\sqrt{3}$

Logo, o volume do prisma é $375\sqrt{3}$ cm³.

b)





$x^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 50 - 50 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 50 + 25$

$x = \sqrt{75}$

$x = 5\sqrt{3}$

Assim:

Área $= 10 \cdot x = 10 \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$

Logo, a área da secção é $50\sqrt{3}$ cm².

18. $A_{base} = 96\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{96\sqrt{3} \cdot 4}{6\sqrt{3}} \Rightarrow a = \sqrt{64} \Rightarrow a = 8$

Apótema da base:

$m^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow m = \sqrt{64 - 16} \Rightarrow m = 4\sqrt{3}$

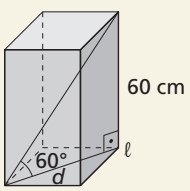
Como $h = m$, temos: $h = 4\sqrt{3}$.

Assim:

$A_{lateral} = 6 \cdot a \cdot h = 6 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$

Portanto, a área lateral do prisma é $192\sqrt{3}$ cm².

19.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$\text{tg } 60° = \frac{60}{d} \Rightarrow d = \frac{60}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = 20\sqrt{3}$

Como $d = \ell\sqrt{2}$, temos:

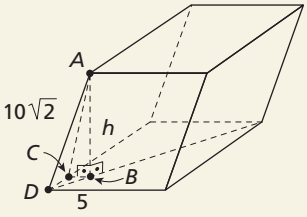
$20\sqrt{3} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell = 10\sqrt{6}$

Assim:

$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \cdot h = \left(10\sqrt{6}\right)^2 \cdot 60 = 36.000$

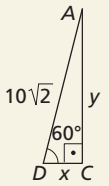
Portanto, o volume do paralelepípedo é 36.000 cm³.

20.

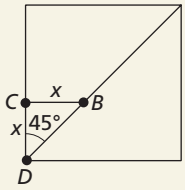


$\text{sen } 60° = \frac{y}{10\sqrt{2}} \Rightarrow y = 5\sqrt{6}$

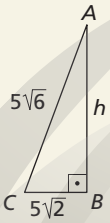
$\cos 60° = \frac{x}{10\sqrt{2}} \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$



$CD = CB = x = 5\sqrt{2}$



$h^2 = \left(5\sqrt{6}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2$
$h^2 = 150 - 50$
$h^2 = 100$
$h = 10$



Assim:

$V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}} \cdot h$
$V_{\text{paralelepípedo}} = 5^2 \cdot 10$
$V_{\text{paralelepípedo}} = 250$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 250 cm³.

Autoavaliação

1. Entre as figuras, os poliedros são as figuras dos itens **a** e **d**, pois as demais figuras são corpos redondos.
alternativas a, d

2. 80 faces triangulares: 240 lados (80 · 3)
12 faces pentagonais: 60 lados (12 · 5)
Logo, o número de arestas é dado por:
(240 + 60) : 2 = 150

Assim, como $V + F - A = 2$, temos:
$V + 92 - 150 = 2$
$V = 150 - 92 + 2$
$V = 60$
alternativa b

3. $A = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{2} = 16$

$F = 4 + 5 = 9$
$V + F - A \neq 2$
$V + 9 - 16 \neq 2$
$V \neq 9$
alternativa d

4. $F = 10$

$A = \frac{4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4}{2} = 19$

$V + F - A = 2$
$V + 10 - 19 = 2$
$V = 11$
alternativa d

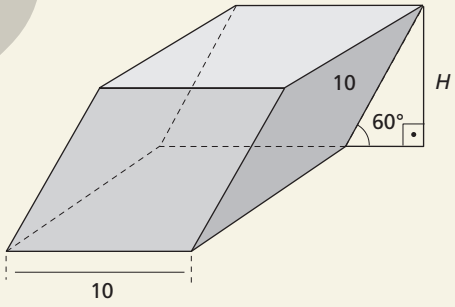
5. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} =$

$= \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

alternativa c

6.

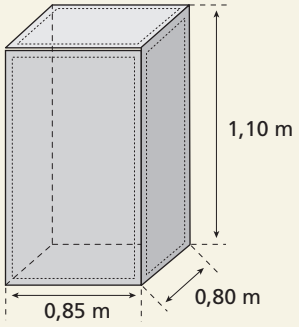


$\text{sen } 60° = \frac{H}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{10} \Rightarrow H = 5\sqrt{3}$

$V = A_{\text{base}} \cdot H = 10^2 \cdot 5\sqrt{3} = 500\sqrt{3}$

alternativa c

7.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Se a espessura é 5 cm, devemos tirar 10 cm de cada dimensão externa para calcular o volume. Assim:

0,85 m − 0,1 m = 0,75 m = 7,5 dm

0,80 m − 0,1 m = 0,7 m = 7 dm

1,10 m − 0,1 m = 1,0 m = 10 dm

$V = 7{,}5 \text{ dm} \cdot 7 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 525 \text{ dm}^3$

Como $1 \text{ dm}^3 = 1\ell$, temos 525 ℓ.

alternativa c

8. $A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$

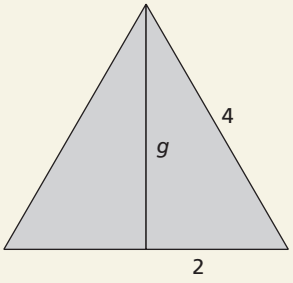
$A_{total} = 8\sqrt{3}$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

$V_{prisma} = 3$

alternativa d

9.

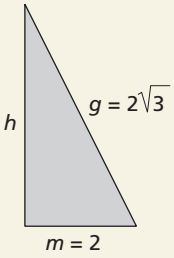


$4^2 = g^2 + 2^2$

$g = \sqrt{16 - 4}$

$g = \sqrt{12}$

$g = 2\sqrt{3}$



$\left(2\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + 2^2$

$h = \sqrt{12 - 4}$

$h = \sqrt{8}$

$h = 2\sqrt{2}$

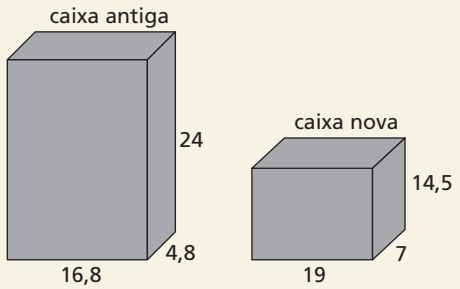
$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow V = \frac{32\sqrt{2}}{3}$

alternativa b

Compreensão de texto

1.



$A_{antiga} = 2 \cdot (16{,}8 \cdot 4{,}8 + 16{,}8 \cdot 24 + 4{,}8 \cdot 24) = 1.198{,}08$

$V_{antiga} = 16{,}8 \cdot 4{,}8 \cdot 24 = 1.935{,}36$

$A_{nova} = 2 \cdot (19 \cdot 7 + 19 \cdot 14{,}5 + 7 \cdot 14{,}5) = 1.020$

$V_{nova} = 19 \cdot 7 \cdot 14{,}5 = 1.928{,}5$

A área da caixa antiga é 1.198,08 cm^2, e o volume é 1.935,36 cm^3 a área da caixa nova é 1.020 cm^2 e o volume é 1.928,5 cm^3.

A caixa nova realmente utiliza menos papel-cartão e, apesar de a capacidade ser menor, ela comporta 1 kg de detergente em pó.

2. **a)** 17,68 milhões de metros quadrados

b) Na confecção de cada caixa nova são utilizados 1.020 cm^2, ou seja, 0,102 m^2.

Logo: 17.680.000 : 0,102 ≃ 173.000.000

Portanto, poderiam ser produzidas aproximadamente 173 milhões de caixas.

3. Respostas possíveis: embalagens menores com produtos concentrados, venda de produtos em refil, uso de materiais reciclados etc.

4. **a)** Podem ser reciclados papéis, plásticos, vidros e metais.

b) Cooperativas de catadores; indústrias relacionadas ao material que vai ser reciclado; setores da tecnologia.

c) Respostas possíveis: geração de emprego e de renda por meio da criação de cooperativas de catadores; redução dos gastos das indústrias com a aquisição de matérias-primas; preservação ambiental por meio da redução da exploração de recursos naturais e diminuição das áreas destinadas a aterros sanitários.

5. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Capítulo 4 – Corpos redondos

Exercícios propostos

1. $A_{lateral} = 2\pi rh$

$A_{secção\ meridiana} = 2rh$

$\frac{A_{lateral}}{A_{secção\ meridiana}} = \frac{2\pi rh}{2rh} = \pi$

Portanto, a razão pedida é π.

Comentário: É interessante que os alunos verifiquem se a razão é válida para todos os cilindros. Podem-se utilizar valores numéricos para verificar na prática.

2. $A_{total} = 2\pi r(r + h)$

$A_{total} = 2\pi \cdot 1 \cdot (1 + 0{,}5)$

$A_{total} = 3\pi$

Portanto, a área total da superfície do comprimido é 3π cm^2.

3. Cálculo da altura: $h = 2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$

Assim:

$A_{total} = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 5 \cdot (5 + 10\pi) = (100\pi^2 + 50\pi)$

Portanto, a área total da superfície do cilindro é $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm^2.

4. Sejam A, x e y, respectivamente, a área, a medida da base e a altura da secção meridiana.

Como a base do cilindro tem 2 cm de raio, temos $x = 4$ cm.

Assim: $A = x \cdot y \Rightarrow 20 = 4 \cdot y \Rightarrow y = 5$

Como a altura da secção meridiana é igual à altura do cilindro, temos: $y = h = 5$

Portanto:

$A_{total} = 2\pi r(r + h) = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 + 5) = 28\pi$

Logo, a área total da superfície do cilindro é 28π cm^2.

5. Como $h = \frac{3}{2} \cdot r$ e $A_{lateral} = 108\pi$ cm^2, temos:

$A_{lateral} = 2\pi rh \Rightarrow 108\pi = 2\pi \cdot r \cdot \frac{3}{2} \cdot r \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$

$h = \frac{3}{2} \cdot r \Rightarrow h = \frac{3}{2} \cdot 6 \Rightarrow h = 9$

Logo, a altura é 9 cm, e o raio é 6 cm.

6. Resposta pessoal.

7. Sendo A_1 a área da superfície externa da peça e A_2 a área da superfície interna da peça, temos:

$A_{1_{base}} = \pi(r_1)^2 = 10^2\pi = 100\pi$

$A_{2_{base}} = \pi(r_2)^2 = 5^2\pi = 25\pi$

$A_{base\ da\ peça} = 100\pi - 25\pi = 75\pi$

Como são duas bases, temos: $2 \cdot 75\pi = 150\pi$

$A_{1_{lateral}} = 2\pi r_1 h = 2\pi \cdot 10 \cdot 30 = 600\pi$

$A_{2_{lateral}} = 2\pi r_2 h = 2\pi \cdot 5 \cdot 30 = 300\pi$

Assim:

$A_{total\ da\ peça} = 150\pi + 600\pi + 300\pi = 1.050\pi$

Logo, a área total da superfície da peça é 1.050π cm^2.

8. Como $h = 2$ cm, temos:

$\pi(r + 4)^2 h = \pi r^2(h + 4) \Rightarrow 2\pi(r + 4)^2 = 6\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (r^2 + 8r + 16) = 3r^2 \Rightarrow r^2 - 4r - 8 = 0$

Assim:

$r = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2}$

Portanto, como $r > 0$, temos $r = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

Logo, o raio da base do cilindro inicial é $\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$ cm.

9. Como o cilindro é equilátero, temos que: $h = 2r$

$A_{total} = 2A_{base} + A_{lateral}$

$A_{base} = \pi r^2$

$A_{lateral} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$

Assim:

$A_{total} = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$

Como $A_{total} = 24\pi$, temos:

$24\pi = 6\pi r^2 \Rightarrow r = 2$

$h = 2r = 4$

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$

Logo, o volume do cilindro é 16π dm^3.

10. $r = 1$ mm

$h = 10$ cm $= 100$ mm

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 100 = 314$

Assim, o volume é 314 mm^3.

314 mm^3 = 0,314 dm^3 = 0,314 mℓ

Logo, cabe 0,314 mℓ de tinta no reservatório da caneta.

11. De acordo com o esquema, temos:

$b_{secção} = 2x$

$x^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow x = 8$

$A_{secção} = b_{secção} \cdot h$

$80 = 16 \cdot h$

$h = 5$

$V_{cilindro} = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 500\pi$

Logo, o volume do cilindro é 500π cm^3.

12. Como $r = 20$ cm e $h = 60$ cm, temos:

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 20^2 \cdot 60 = 74.400$

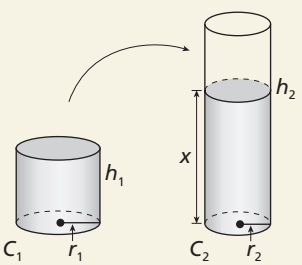
Logo, o volume do botijão é 74.400 cm^3.

74.400 cm^3 = 74,400 dm^3 = 74,400 ℓ

Duração do gás: $\frac{74{,}400}{3{,}1} = 24$

Portanto, o gás durará 24 dias.

13. Sendo C_1 o cilindro cheio de líquido e C_2 o cilindro para o qual o líquido será transferido, em que x é a altura que o líquido atingirá, temos:



$r_1 = 10$ cm

$h_1 = 40$ cm

$r_2 = 6$ cm

$h_2 = 125$ cm

$V_{cilindro\ C_1} = \pi(r_1)^2 h_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 40 = 4.000\pi$

$4.000\pi = \pi(r_2)^2 x \Rightarrow 4.000\pi = \pi \cdot 6^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{4.000}{36} \Rightarrow x = \frac{1.000}{9}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Portanto, o líquido transferido atingirá $\frac{1.000}{9}$ cm no cilindro C_2. Seja f a fração procurada, temos:

h_2 ——— 125 cm

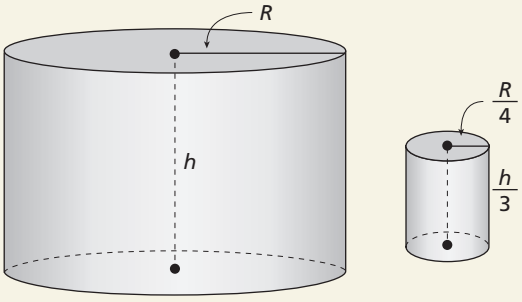
f ——— $\frac{1.000}{9}$ cm

$f = \frac{1.000 \cdot h_2}{9 \cdot 125} = \frac{8}{9}h_2$

Logo, o líquido transferido ocupará $\frac{8}{9}$ da altura do novo cilindro.

14. As figuras a seguir representam os recipientes.

ADILSON SECCO



Considerando V o volume do recipiente maior e v o volume do recipiente menor, temos:

$V = \pi R^2 h$

$v = \frac{\pi R^2}{16} \cdot \frac{h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{48}$

$\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 h}{\frac{\pi R^2 h}{48}} \Rightarrow V = 48v$

Logo, serão necessários 48 recipientes menores.

15. Sendo r o raio da cisterna, V o volume de água consumido e H a altura que a água baixará, temos:

$r = 0{,}5$ m $= 5$ dm

$V = 310\ \ell = 310$ dm^3

$V = \pi r^2 H \Rightarrow 310 = 3{,}1 \cdot 5^2 H \Rightarrow 100 = 25H \Rightarrow H = 4$

Logo, o nível de água baixará 4 dm, ou seja, 40 cm.

16. Calculando a área e a capacidade de cada tanque e a relação entre elas, temos:

Tanque I: $A_I = \pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi$

$V_I = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi$

$\frac{A_I}{V_I} = \frac{24\pi}{24\pi} = 1$

Tanque II: $A_{II} = \pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$

$V_{II} = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi$

$\frac{A_{II}}{V_{II}} = \frac{32\pi}{32\pi} = 1$

Tanque III: $A_{III} = \pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi$

$V_{III} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi$

$\frac{A_{III}}{V_{III}} = \frac{48\pi}{72\pi} = \frac{2}{3}$

Logo, o tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade é o III.

alternativa d

17. Sendo α a medida do ângulo central, temos:

$\alpha = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 180° \cdot 10}{60} \Rightarrow \alpha = 60°$

18. $\alpha = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow 60° = \frac{2 \cdot 180° \cdot r}{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \frac{360° r}{60°} \Rightarrow g = 6r$

Sendo C o comprimento da circunferência da base e g a medida da geratriz do cone, a razão k é:

$k = \frac{C}{g} \Rightarrow k = \frac{2\pi r}{6r} \Rightarrow k = \frac{\pi}{3}$

19. $\alpha = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow 120° = \frac{2 \cdot 180° \cdot 10}{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \frac{3.600°}{120°} \Rightarrow g = 30$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 30^2 - 10^2 \Rightarrow h = \sqrt{800} \Rightarrow h = 20\sqrt{2}$

Logo, a altura do cone é $20\sqrt{2}$ cm.

20. O cone formado por um semicírculo é equilátero. Assim, Como $g = 2r$, temos:

$g = 2r \Rightarrow 20 = 2r \Rightarrow r = 10$

Portanto, o cone tem 10 cm de raio.

A secção meridiana é um triângulo equilátero de lado 20 cm. A distância do vértice até a mesa é a altura do triângulo equilátero.

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

Logo, a distância do vértice até a mesa será $10\sqrt{3}$ cm.

21. **a)** $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow g = \sqrt{225} \Rightarrow g = 15$

$A_{lateral} = \pi r g = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$

$A_{total} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 9 \cdot (9 + 15) = 216\pi$

Logo, a área lateral é 135π cm^2 e a área total é 216π cm^2.

b) $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 26^2 = 24^2 + r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{100} \Rightarrow r = 10$

$A_{lateral} = \pi r g = \pi \cdot 10 \cdot 26 = 260\pi$

$A_{total} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 26) = 360\pi$

Logo, a área lateral é 260π cm^2 e a área total é 360π cm^2.

22. Considerando que cada chapéu lembra um cone reto sem a base, para calcular a quantidade total de papel usado para confeccionar todos os chapéus fazemos: $34 \cdot A_{lateral\ cone}$

Sendo $h = 12$ cm e $r = 8$ cm, temos:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 8^2 \Rightarrow g = \sqrt{208} \Rightarrow g = 4\sqrt{13}$

Assim:

$34 \cdot A_{lateral} = 34 \cdot \pi r g = 34 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 4\sqrt{13} = 1.088\pi\sqrt{13}$

Portanto, são necessários $1.088\pi\sqrt{13}$ cm^2 de papel para fazer todos os chapéus.

23. A altura e o raio do cilindro são iguais à altura e ao raio do cone nele inscrito. Então:

$h_{cone} = 5$ cm e $r_{cone} = 2$ cm

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow g = \sqrt{29}$

Área total da superfície do cone:

$A_{total} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 2 \cdot \left(2 + \sqrt{29}\right) = 2\pi\left(2 + \sqrt{29}\right)$

Portanto, a área total da superfície do cone é $2\pi\left(2 + \sqrt{29}\right)$ cm^2.

24. O cone é equilátero com $r = 5$ cm e $g = 10$ cm.

$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{total} = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 10 \Rightarrow A_{total} = 75\pi$

Portanto, a área total da superfície é 75π cm^2.

MODERNA

25. Como $A_{lateral} = 600\pi$ cm² e $g = 30$ cm, temos:
$A_{lateral} = 600\pi = \pi rg \Rightarrow 600\pi = \pi \cdot r \cdot 30 \Rightarrow r = 20$
Assim:
$A_{total} = \pi r^2 + A_{lateral} = \pi \cdot 20^2 + 600\pi = 1.000\pi$
Portanto, a área total da superfície é 1.000π cm².

26. $\text{tg } 30° = \frac{h}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{10} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 10^2 + \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$

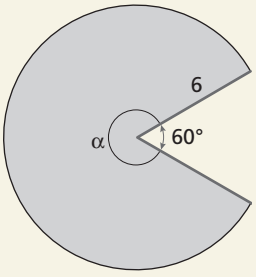
$\Rightarrow g^2 = 100 + \frac{300}{9} \Rightarrow g^2 = \frac{1.200}{9} \Rightarrow g = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

$A_{lateral} = \pi rg = \pi \cdot 10 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$

Portanto, a área lateral do cone é $\frac{200\sqrt{3}}{3}\pi$ cm².

27. Resposta pessoal.

28. Para determinar o comprimento C deste arco cujo ângulo central α é 300°, temos:

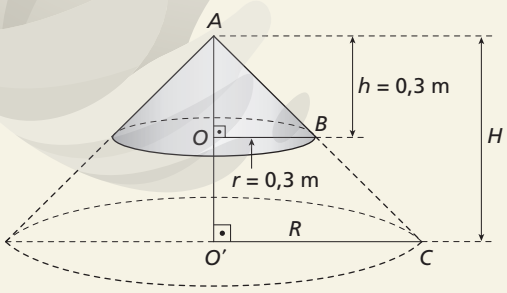


$360° \text{ —— } 2\pi \cdot 6$
$300° \text{ —— } C$

$C = \frac{300°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6 = 10\pi$

Como o comprimento da circunferência da base é $2\pi r$, temos:
$2\pi r = 10\pi \Rightarrow r = 5$
Portanto, o raio da base do cone é 5 cm.
Comentário: Avaliar a conveniência de pedir aos alunos que desenhem e recortem três setores circulares de mesmo raio e ângulo central medindo α: um com α menor que 180°, outro com α igual a 180° e outro com α maior que 180°. Para cada setor recortado, após unirem os lados do ângulo central, pedir a eles que comparem os respectivos raios r da base do cone com sua geratriz g. Espera-se que eles percebam que os raios terão, respectivamente, $r < 2g$, $r = 2g$ e $r > 2g$.

29. Representando a situação, temos:

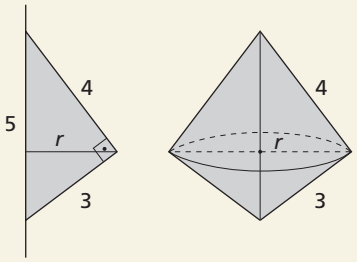


Sendo R o raio da forma circular iluminada pelo lustre:
$\pi R^2 = 6{,}25\pi \Rightarrow R = 2{,}5$
Os triângulos AOB e $AO'C$ são semelhantes; então:

$\frac{h}{H} = \frac{r}{R} \Rightarrow H = \frac{R \cdot h}{r} = \frac{2{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}3} \Rightarrow H = 2{,}5$

Logo, o lustre deve ser pendurado a 2,5 m do chão.

30.



$r \cdot 5 = 4 \cdot 3 \Rightarrow r = \frac{12}{5}$

A área da superfície do sólido é dada pela soma das áreas laterais de dois cones; assim:

$A_{L_1} = \pi rg_1 = \pi \cdot \frac{12}{5} \cdot 4 = \frac{48}{5}\pi$

$A_{L_2} = \pi rg_2 = \pi \cdot \frac{12}{5} \cdot 3 = \frac{36}{5}\pi$

$A = A_{L_1} + A_{L_2}$

$A = \frac{48}{5}\pi + \frac{36}{5}\pi = \frac{84}{5}\pi$

Portanto, a área da superfície do sólido é $\frac{84}{5}\pi$ dm².

31. $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 18\sqrt{2}\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{18\sqrt{2}\pi}{3\pi} \Rightarrow h = 6\sqrt{2}$

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow g = \sqrt{81} \Rightarrow g = 9$
$A_{total} = \pi r(r + g) = \pi \cdot 3 \cdot (3 + 9) = 36\pi$
Portanto, a área total da superfície do cone é 36π cm².

32. O lápis é composto de um cone e um cilindro.

- Cone: raio $r_1 = \frac{1}{2}$ cm e altura $h_1 = 1$ cm
- Cilindro: raio $r_2 = \frac{1}{2}$ cm e altura $h_2 = 15$ cm

Então:

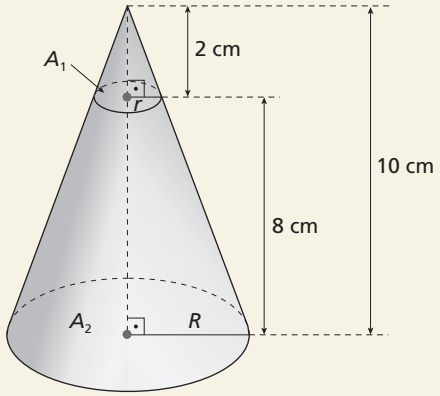
$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r_1)^2 \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{12}\pi$

$V_{cilindro} = \pi \cdot (r_2)^2 \cdot h_2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 15 = \frac{15}{4}\pi$

$V_{lápis} = V_{cone} + V_{cilindro} = \frac{1}{12}\pi + \frac{15}{4}\pi = \frac{23}{6}\pi$

Portanto, o volume do lápis é $\frac{23}{6}\pi$ cm³.

33. Representando a situação, temos:



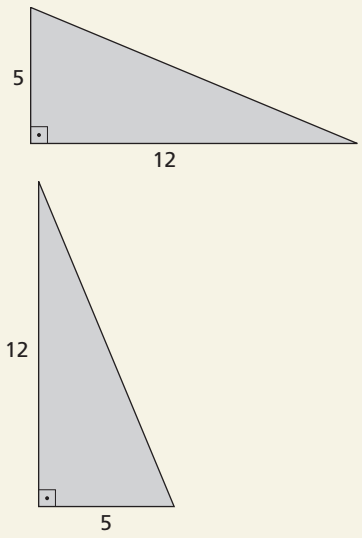
Para calcular o raio R do cone, temos:
$\frac{r}{R} = \frac{2}{10} \Rightarrow R = 5r$ (I)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Sabemos que:
$A_2 = A_1 + 216\pi \Rightarrow \pi R^2 = \pi r^2 + 216\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow R^2 = r^2 + 216$ (II)
Substituindo R por $5r$ em (II), obtemos:
$25r^2 = r^2 + 216 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$
Assim:
$R = 5 \cdot 3 = 15$
O volume do cone é dado por:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 10 = 750\pi$
Portanto, o volume do cone é 750π cm³.

34. a)

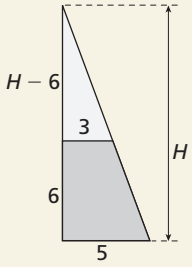


$V_1 = \frac{1}{3}\pi(r_1)^2 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 5$
Logo, $V_1 = 240\pi$ cm³.
$V_2 = \frac{1}{3}\pi(r_2)^2 h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12$
Logo, $V_2 = 100\pi$ cm³.
Assim:
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{240\pi \text{ cm}^3}{100\pi \text{ cm}^3} = \frac{240}{100} = 240\%$
Portanto, a razão percentual entre V_1 e V_2 é 240%.

b) Para o triângulo retângulo de catetos que medem x e y, temos: $V_1 = \frac{1}{3}\pi y^2 x$ e $V_2 = \frac{1}{3}\pi x^2 y$
Portanto:
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi y^2 x}{\frac{1}{3}\pi x^2 y} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$

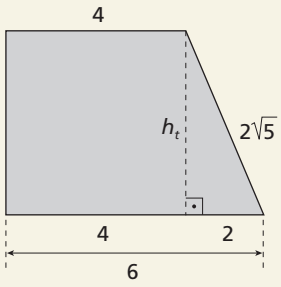
Comentário: Esse exercício pode ser explorado e ampliado pedindo aos alunos que elaborem um quadro em que se represente o cálculo da razão $\frac{V_1}{V_2}$, atribuindo para y os valores $2x$, $3x$, $4x$, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$ e $\frac{x}{4}$.

35. Representando a situação, temos:



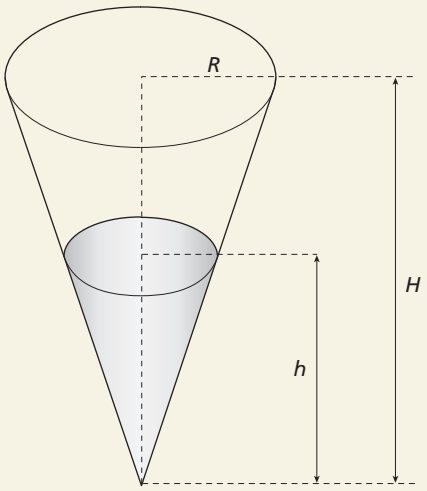
Considerando a proporção
$\frac{H}{5} = \frac{H-6}{3}$, temos
$H = 15$ cm.
O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior. Assim:
$V_{\text{tronco}} = V_M - V_m$
$V_{\text{tronco}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot (15 - 6)$
$V_{\text{tronco}} = 125\pi - 27\pi = 98\pi$
Portanto, o volume do tronco de cone é 98π cm³.

36.



$A_1 = \pi r^2 = 16\pi \Rightarrow r = \sqrt{16} \Rightarrow r = 4$
$A_2 = \pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R = \sqrt{36} \Rightarrow R = 6$
$g_t = (h_t)^2 + 2^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2 = (h_t)^2 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (h_t)^2 = 20 - 4 \Rightarrow h_t = \sqrt{16} \Rightarrow h_t = 4$
Considerando que H é a altura do triângulo formado pelo prolongamento da geratriz e da altura do tronco, temos a proporção:
$\frac{H}{6} = \frac{H-4}{4} \Rightarrow H = 12$
O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior, gerado pelo triângulo maior. Assim:
$V_{\text{tronco}} = V_M - V_m$
$V_{\text{tronco}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8$
$V_{\text{tronco}} = 144\pi - \frac{128}{3}\pi$
$V_{\text{tronco}} = \frac{304}{3}\pi$
Portanto, o volume do tronco é $\frac{304}{3}\pi$ cm³.

37.



$H = 4R$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Como h é metade de H, temos:

$h = 2R$

Sendo V o volume de água que havia na taça cheia e V' o volume de água que restou na taça, temos:

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 = \left(\frac{4R}{2R}\right)^3$$

$$\frac{V}{V'} = 8$$

$$V' = \frac{V}{8}$$

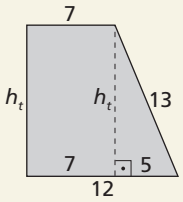
Cálculo do volume da água bebida: $V - \frac{V}{8} = \frac{7}{8}V$

Portanto, foram bebidos $\frac{7}{8}$ da quantidade de água que havia na taça.

Comentário: É interessante pedir aos alunos uma estimativa do resultado antes de eles resolverem esse exercício. Certamente muitos se mostrarão surpresos com o resultado, o que deverá gerar interesse pela continuidade do estudo desse tema.

Um desdobramento interessante desse exercício é pedir aos alunos que calculem a porcentagem da altura da água tomada em relação à altura da taça para que os volumes da água tomada e da água que sobrou na taça sejam iguais. A porcentagem a ser obtida deve ser aproximadamente 20,6%.

38. Para calcular a altura da peça (h_t), temos:



$13^2 = (h_t)^2 + 5^2$

$h_t = \sqrt{144}$

$h_t = 12$

Considerando que H é a altura do triângulo formado pelo prolongamento da geratriz e da altura do tronco, temos a proporção: $\frac{H}{12} = \frac{H - 12}{7} \Rightarrow H = \frac{144}{5}$

O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume do cone menor do volume do cone maior, gerado pelo triângulo maior. Assim:

$V_{\text{tronco de cone}} = V_M - V_m$

$V_{\text{tronco de cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot \frac{144}{5} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot \frac{84}{5}$

$V_{\text{tronco de cone}} = 1.108\pi$

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 7^2 \cdot 12$

$V_{\text{cilindro}} = 588\pi$

Logo:

$V_{\text{peça}} = V_{\text{tronco de cone}} - V_{\text{cilindro}}$

$V_{\text{peça}} = 1.108\pi - 588\pi$

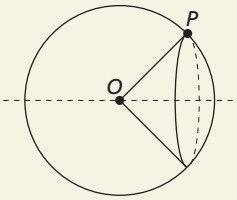
$V_{\text{peça}} = 520\pi$

Portanto, o volume da peça é 520π cm³.

39. **a)** circunferência

b) superfície lateral de um cone

c) superfície esférica



Comentário: Esse exercício proporciona aos alunos a oportunidade de imaginar a obtenção de figuras geométricas por meio da rotação de outros elementos geométricos.

40. Se as superfícies são externas, temos:

$d = r_1 + r_2$

Se uma superfície for interna à outra, teremos dois casos:

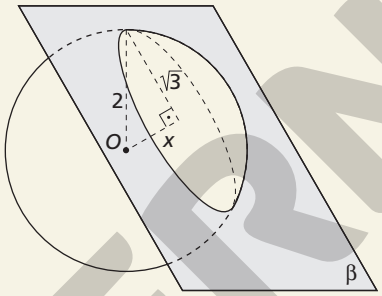
- $r_1 \geqslant r_2 \Rightarrow d = r_1 - r_2$
- $r_2 \geqslant r_1 \Rightarrow d = r_2 - r_1$

Logo, a distância entre O_1 e O_2 é $r_1 + r_2$ ou $r_1 - r_2$ ou $r_2 - r_1$.

41. $(r_1)^2 = 3^2 - 1 \Rightarrow (r_1)^2 = 9 - 1 \Rightarrow r_1 = \sqrt{8} \Rightarrow r_1 = 2\sqrt{2}$

Portanto, o raio r_1 do círculo é $2\sqrt{2}$ cm.

42.



Assim:

$2^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + x^2$

$x^2 = 4 - 3$

$x^2 = 1$

$x = 1$

Logo, a distância entre o plano β e o centro da esfera é 1 cm.

43. **a)** $A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi$

Portanto, a área da superfície esférica é 36π cm² e o volume da esfera é 36π cm³.

b) Como a esfera tem 18 cm de diâmetro, temos $r = 9$ cm.

Assim:

$A_{\text{superfície esférica}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 = 324\pi$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 972\pi$

Portanto, a área da superfície esférica é 324π cm² e o volume da esfera é 972π cm³.

44. $V_{\text{queijo}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = \frac{4.000}{3}\pi$

$V_{\text{cilindro}} = \frac{4.000}{3}\pi \Rightarrow \pi \cdot 10^2 h = \frac{4.000}{3}\pi \Rightarrow h = \frac{40}{3}$

Portanto, a altura da panela é $h = \frac{40}{3}$ cm.

45. A altura e o comprimento do paralelepípedo são iguais a $4r$, a largura é igual a $2r$, e r é o raio de cada esfera.

Portanto:

$V_{\text{paralelepípedo}} = 4r \cdot 4r \cdot 2r = 32r^3$

Como o volume de cada esfera é $\frac{4}{3}\pi$ cm³, temos:

$\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Logo:

$V_{\text{paralelepípedo}} = 32 \cdot 1^3 \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 32$

Portanto, o volume do paralelepípedo é 32 cm³.

Comentário: Pode-se ampliar esse exercício pedindo aos alunos que calculem a quantidade mínima de centímetros quadrados de papelão necessária para uma indústria de embalagens fabricar uma caixa que contenha quatro bolas do tamanho dessas esferas.

46. Como $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$, temos:

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90°}$

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 45°}{90°} = 18\pi$

$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \alpha}{270°}$

$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot 6^3 \cdot 45°}{270°} = 36\pi$

Portanto, a área do fuso esférico é 18π cm² e o volume da cunha esférica é 36π cm³.

47. Cada gomo pode ser considerado uma cunha esférica segundo um ângulo de medida $\frac{360°}{12} = 30°$.

A medida da superfície total de cada gomo é igual à área do círculo da face lateral mais a área do fuso esférico. Assim:

$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 30°}{90°} = \frac{\pi r^2}{3}$

$A_{\text{lateral}} = \pi r^2$

$A_{\text{total}} = \frac{\pi r^2}{3} + \pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^2$

Portanto, a medida da superfície total de cada gomo será $\frac{4}{3}\pi r^2$ unidades de área.

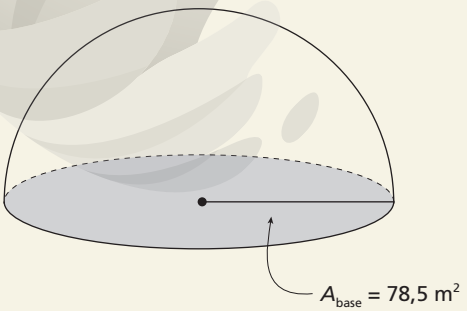
48. $V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°} = \frac{\pi \cdot 1^3 \cdot \alpha}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2\alpha}{3}$

Como a cunha esférica tem 1 m³ de volume, temos:

$1 = \frac{2\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

Assim, o ângulo que determina a cunha esférica mede $\frac{3}{2}$ radiano.

49. A estrutura coberta em forma de um hemisfério é um fuso esférico segundo um ângulo de 180°.



$A_{\text{base}} = \pi r^2 = 78{,}5 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$

$A_{\text{fuso}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 180°}{90°} = 50\pi \simeq 157$

Logo, foram utilizados, aproximadamente, 157 m² de lona na cobertura toda.

50. Vamos determinar o volume de sorvete que cabe em um copinho de acordo com o descrito no enunciado.

$V_{\text{copinho}} = \frac{1}{3}A_B h$, em que $A_B = \pi \cdot 2^2$ e $h = 10$

$V_{\text{copinho}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 10 = \frac{40}{3}\pi$

Duas conchas semiesféricas de sorvete equivalem a uma bola esférica de sorvete. Portanto, vamos determinar o volume de uma bola.

$V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$

Como $\frac{32}{3}\pi < \frac{40}{3}\pi$, o sorvete não transbordará, mesmo que derreta.

Exercícios complementares

1. Sendo C_A a circunferência da base do barril A e C_B a circunferência da base do barril B, temos:

$C_A = 2a = 2\pi R$ e $C_B = a = 2\pi r$

Portanto: $R = \frac{a}{\pi}$ e $r = \frac{a}{2\pi}$

Assim:

$V_A = a \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{\pi}$

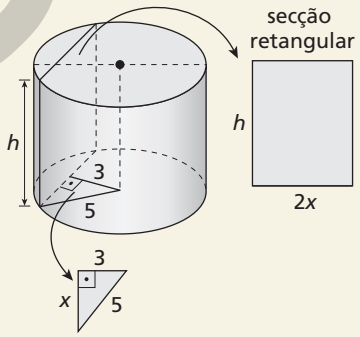
$V_B = 2a \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^3}{2\pi}$

Portanto: $V_A = 2V_B$

alternativa a

Comentário: Avaliar a conveniência de ampliar esse exercício substituindo o fator 2 por *k*. Assim, como os barris seriam construídos com chapas retangulares de dimensões *a* e *ka*, espera-se que os alunos concluam que: $V_A = k \cdot V_B$

2.



$x^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow x = 4$

Sendo A_s a área da secção retangular e A_b a área da base do cilindro, temos:

$A_s = A_b \Rightarrow 2x \cdot h = 25\pi \Rightarrow h = \frac{25\pi}{2 \cdot 4} \Rightarrow h = \frac{25}{8}\pi$

Como *h* também é a altura do cilindro, temos:

$V = \frac{25}{8}\pi \cdot \pi \cdot 25 \Rightarrow V = \frac{625}{8}\pi^2$

Logo, o volume do cilindro é $\frac{625}{8}\pi^2$ cm³.

3. **a)** Pelo enunciado, temos: $x = 3y$ e $V_{\text{cilindro}} = 243$ cm³

Assim:

$243 = x \cdot \pi \cdot y^2 \Rightarrow 243 = 3y \cdot 3 \cdot y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^3 = 243 \Rightarrow y = \sqrt[3]{27} \Rightarrow y = 3$

$x = 3y \Rightarrow x = 3 \cdot 3 \Rightarrow x = 9$

Logo, $x = 9$ e $y = 3$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

b) Pelo enunciado, temos: $x = y + 10$ e $A_{lateral} = 450\ cm^2$
Assim:
$450 = x \cdot 2 \cdot 3y \Rightarrow 450 = 6 \cdot (y + 10) \cdot y \Rightarrow$
$\Rightarrow 75 = y^2 + 10y \Rightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1 = 5$ ou $y_2 = -15$ (não convém)
$x = y + 10 \Rightarrow x = 5 + 10 = 15$
Logo, $y = 5$ e $x = 15$.

4. $V_{lata} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{lata} = \pi \cdot 4^2 \cdot 19 \Rightarrow V_{lata} \simeq 954{,}6$
Assim, o volume da lata é, aproximadamente, 954,6 cm^3.
Então, $V_{lata} \simeq 954{,}6\ m\ell$, pois $1\ cm^3 = 1\ m\ell$.
$V_{ar} \simeq 954{,}6 - 900 \Rightarrow V_{ar} \simeq 54{,}6$
Portanto, o volume de ar contido na lata é, aproximadamente, 54,6 $m\ell$.

5. O volume pedido é a diferença entre o volume total e o volume do cone. Assim:
$V_T - V_C = \frac{2}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 2x = \frac{4\pi x^3}{3}$
alternativa b

6. Como $135° = \frac{3\pi}{4}$, temos:

$g = \frac{2\pi \cdot 10}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{80}{3}$

$h^2 = \left(\frac{80}{3}\right)^2 - 10^2 \Rightarrow h^2 = \frac{6.400 - 900}{9} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{55}}{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{10\sqrt{55}}{3} \Rightarrow V = \frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$

Portanto, o volume do cone é $\frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}\ cm^3$.

7. Sendo R o raio do cone maior e r o raio do cone menor, temos a proporção $\frac{20}{R} = \frac{16}{r}$ se $r = R \cdot \frac{16}{20}$. Assim, a relação entre o volume do cone menor e o volume do cone maior (volume total) é:

$\frac{V_m}{V_T} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(R \cdot \frac{16}{20}\right)^2 \cdot 16}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 20} = \frac{16^3}{20^3} =$

$= \left(\frac{16}{20}\right)^3 = \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{512}{1.000} = 51{,}2\%$

Portanto, o volume do copo ocupado pela espuma equivale a 48,8% do volume total, aproximadamente 50%.
alternativa c

8. Temos a proporção:

$\frac{160°}{360°} = \frac{C_{cone}}{C_{setor}} = \frac{2\pi r}{2\pi 18} \Rightarrow r = 18 \cdot \frac{4}{9} = 8$

Portanto, o raio da base do cone é 8 cm. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pela geratriz, pelo raio e pela altura do cone, temos:
$h^2 + 8^2 = 18^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{65} \Rightarrow h \simeq 16$
alternativa d

9. Prolongando a altura e a geratriz do tronco, obtemos dois cones: C_1, que contém o tronco, e C_2, complementar do tronco com relação a C_1. Se H é a altura de C_1 e h é a altura de C_2, temos a proporção:

$\frac{h}{2} = \frac{H}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{3}H$

O volume do tronco pode ser obtido subtraindo o volume de C_2 de C_1. Assim:

$V_{tronco} = V_{C_1} - V_{C_2} = \frac{1}{3} \cdot \pi 3^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \pi 2^2 \cdot \frac{2}{3}H = \frac{19}{9}\pi H$

Como $V_{tronco} = 20\pi$, temos:

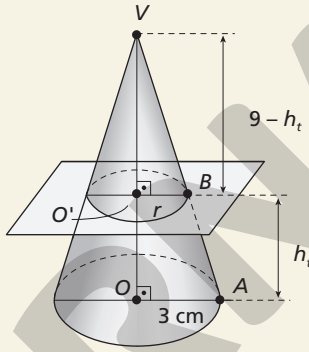
$\frac{19}{9}\pi H = 20\pi \Rightarrow H = \frac{180}{19}$

Portanto: $h_{tronco} = H - \frac{2}{3}H = \frac{1}{3}H = \frac{60}{19}$

Logo, a altura do tronco de cone é $\frac{60}{19}$ m.

10. Pelo enunciado, podemos construir uma figura. Observe:

ADILSON SECCO



Como os triângulos VOA e $VO'B$ são semelhantes, temos:

$\frac{9 - h_t}{r} = \frac{9}{3} \Rightarrow h_t = 9 - 3r$ (I)

Então, devemos ter:

$V_{tronco\ de\ cone} = \frac{2}{3} \cdot V_{cone\ maior}$

$V_{cone\ maior} = \frac{3}{2} \cdot V_{tronco\ de\ cone}$

$V_{cone\ menor} = V_{cone\ maior} - V_{tronco\ de\ cone} = \frac{1}{3} \cdot V_{cone\ maior}$

$V_{cone\ maior} = 3 \cdot V_{cone\ menor}$

Assim:

$\frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 9 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (9 - h_t)$

$h_t = 9 - \frac{27}{r^2}$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos $r = \sqrt[3]{9}$ cm e $h_t = 9 - 3\sqrt[3]{9}$ cm.
Portanto, a altura do cone menor, ou seja, a distância do vértice ao plano paralelo à base, é $9 - h_t$, que é igual a $9 - \left(9 - 3\sqrt[3]{9}\right)$, ou seja, $3\sqrt[3]{9}$ cm.

11. $V_{cunha\ esférica} = \frac{972\pi \cdot 30°}{360°} \Rightarrow V_{cunha\ esférica} = 81\pi$

Assim, o volume da cunha esférica é $81\pi\ cm^3$.

12. $r^2_{secção} = 17^2 - 8^2 \Rightarrow r_{secção} = 15$
$A_{secção} = \pi \cdot 15^2 \Rightarrow A_{secção} = 225\pi$
Logo, a área da secção é $225\pi\ cm^2$.

13. $r^2_{secção} = 15^2 - 8^2 \Rightarrow r_{secção} = \sqrt{161}$

$A_{secção} = \pi r^2_{secção} = \pi \cdot \left(\sqrt{161}\right)^2$

$A_{secção} = 161\pi$
Portanto, a área da secção é $161\pi\ cm^2$.

MODERNA

14. Considerando que *densidade* · *volume* = *massa*, temos:

$v = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi\left(\frac{10,5}{2}\right)^3 + \pi \cdot 0,7^2 \cdot 50 = \frac{3.283}{8}\pi$

Então, calculando o produto $d \cdot v$, temos:

$m = d \cdot v = 7,8\ \frac{g}{cm} \cdot \frac{3.283}{8}\pi\ cm =$

$= 10.060,05\ g \simeq 10\ kg$

alternativa e

15. $V_{cilindro} = V_{cubo}$

$\pi r^2 h = 9^3$ (I)

$A_{lateral\ cilindro} = A_{total\ do\ cubo}$

$2\pi r \cdot h = 6 \cdot 9^2 \Rightarrow h = \frac{6 \cdot 81}{2\pi r}$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\pi \cdot r^2 \cdot \frac{486}{2\pi r} = 729 \Rightarrow r = \frac{729}{243} \Rightarrow r = 3$

Logo:

$h = \frac{486}{6\pi} = \frac{81}{\pi}$

Assim:

$A_{total\ cilindro} = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{81}{\pi} = (486 + 18\pi)$

Logo, a área total da superfície é $(486 + 18\pi)\ cm^2$.

16. $V_{tronco} = \frac{\pi h_t}{3}(11^2 + 11 \cdot 2 + 2^2)$

$V_{cilindro} = \pi r^2 h_t$

Como $V_{tronco} = V_{cilindro}$, obtemos:

$\pi r^2 \cdot h_t = \frac{\pi h_t}{3} \cdot (147) \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$

Logo, o diâmetro do cilindro é 14 m.

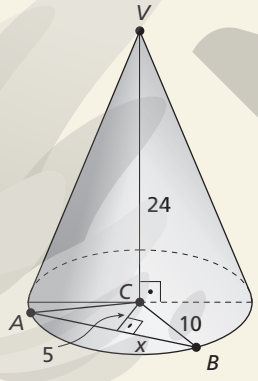
17. O raio r da esfera é metade da diagonal d do cubo. Assim:

$r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$

$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^3 \Rightarrow V_{esfera} = 32\pi\sqrt{3}$

Portanto, o volume da esfera é $32\pi\sqrt{3}\ m^3$.

18.



$x^2 = 10^2 - 5^2 \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

$A_{triângulo\ ABC} = 25\sqrt{3}$

$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot A_{triângulo\ ABC} \cdot h$

$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3} \cdot 24$

$V_{tetraedro} = 200\sqrt{3}$

alternativa a

19. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 4.500\pi$

Assim:

95% de $4.500\pi = \frac{95}{100} \cdot 4.500\pi = 4.275\pi$

Logo, o volume de água é $4.275\pi\ cm^3$.

20. $V_{tronco\ de\ cone} = \frac{\pi \cdot 6}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = 168$

Portanto, o volume máximo de líquido que a xícara pode conter é $168\ cm^3$.

alternativa a

21. $V_{pião} = \frac{V_{esfera}}{2} + V_{cone}$

$V_{pião} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4$

$V_{pião} = \frac{32}{3}\pi$

Portanto, o volume de cada pião é $\frac{32}{3}\pi\ cm^3$.

22. Vamos determinar os volumes dos dois tipos de taça.

- A taça da figura 1 tem o formato de uma semiesfera; assim: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi 3^3}{3} = 18\pi$
- A taça da figura 2 tem o formato de um cone; assim: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot h = 3\pi h$

Para ter volumes iguais, basta igualar os volumes das taças; então: $18\pi = 3\pi h \Rightarrow h = 6$

alternativa b

23. $V_{fatia} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot 25^2 \cdot 30 \cdot 30°}{360°} = 1.562,5\pi$

Portanto, o volume de cada fatia é $1.562,5\pi\ cm^3$.

Autoavaliação

1. $A_{lateral} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 6 = 120\pi$

Portanto, a área da superfície lateral do cilindro é $120\pi\ cm^2$.

alternativa b

2. No cilindro equilátero, temos $h = 2r$. Assim:

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} =$

$= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h =$

$= 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 2r =$

$= 2\pi r^2 + 4\pi r^2$

alternativa d

3. $A_{lateral} = \pi rg$

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g^2 = 225 \Rightarrow g = 15$

$A_{lateral} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi$

Portanto, a área da superfície lateral do cone é $135\pi\ cm^2$.

alternativa a

4. Como $r = 3 \cdot h$, temos:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (3h)^2 \cdot h =$

$= \pi \cdot 9h^2 \cdot h = 9\pi h^3$

alternativa a

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

5. Como $g = 2r$, temos $r = \frac{g}{2}$. Assim:

$A_{total} = \pi r(r + g)$

$A_{total} = \pi \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{g}{2} + g\right) = \frac{3\pi g^2}{4}$

alternativa b

6. $A_{superfície\ esférica} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 4\pi$

alternativa b

7. $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \pi^3 = \frac{4}{3}\pi^4$

alternativa a

8. $V_A = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V_B = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 h = \frac{4\pi r^2 h}{3}$

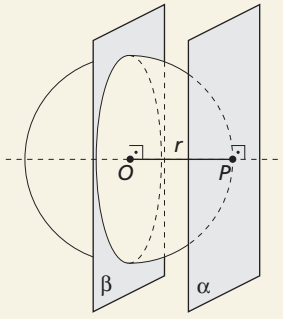
Assim: $V_B = 4V_A$

Na embalagem B cabe o quádruplo do conteúdo da embalagem A.

alternativa d

9. Representando a situação, temos:

ADILSON SECCO



Pela observação da figura, concluímos que a distância entre os planos α e β é *r*.

alternativa c

10. $12 \cdot A_{bola\ maior} = x \cdot A_{bola\ menor}$

$12 \cdot 4\pi(2r)^2 = x \cdot 4\pi r^2$

$48 \cdot 4\pi r^2 = x \cdot 4\pi r^2$

$x = 48$

Logo, podem-se fazer 48 bolas menores.

alternativa c

Compreensão de texto

1. Pela classificação dada no texto e nas imagens, temos a seguir as posições relativas das retas suportes.

a) paralelas **b)** paralelas **c)** perpendiculares

2. Na projeção cônica, os paralelos são arcos de circunferências concêntricas.

alternativa d

3. Na projeção azimutal polar, os meridianos convergem para um polo.

alternativa c

4. Por observação do logotipo da ONU, a figura que ilustra o modelo da projeção empregada é a da alternativa a.

5. Os planisférios de Mercator e de Peters empregam como base da projeção o modelo indicado na alternativa c (projeção cilíndrica).

6. No mapa-múndi reproduzido na projeção de Mercator, os meridianos e paralelos se cruzam formando ângulos de 90°, o que distorce mais as porções terrestres próximas aos polos e menos as porções próximas ao equador.

alternativa b

7. As áreas dos países do hemisfério Norte estão superestimadas em relação às do hemisfério Sul.

MODERNA

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Economia do país

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2**, da habilidade **EM13MAT104** e das competências gerais **2**, **6**, **7** e **10**. Além disso, a seção trabalha com os temas contemporâneos **educação financeira** e **trabalho**.

Os assuntos abordados nesta seção podem ser explorados de maneira interdisciplinar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo a competência específica **4** e a habilidade **EM13CHS402** da BNCC no que diz respeito à produção, à distribuição e ao consumo dentro dos setores econômicos, assim como seus impactos na economia e a análise das relações de produção, capital e trabalho.

Nas questões, são sugeridas algumas discussões a fim de oferecer subsídios para o trabalho em sala de aula, bem como um conjunto de caminhos possíveis a ser percorrido.

Para iniciar o trabalho, pode-se fazer um levantamento sobre o conhecimento prévio dos alunos acerca dos temas com base nas questões apresentadas inicialmente: Como é regida a economia do Brasil? Quais são os setores econômicos? Você já ouviu falar em livre mercado ou lei da oferta e da procura (ou demanda)? E em renda *per capita*? Já ouviu falar ou sabe o que é inflação? O que tudo isso tem a ver com você?

Para começar a pensar:

Se for possível, após o levantamento dos conhecimentos prévios, apresente aos alunos o vídeo *Eu, o lápis* (disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=fQnG7AGHHFI>; acesso em: 25 abr. 2020). O vídeo pode ser usado como disparador da discussão desta seção, mostrando o processo de produção de um lápis com a preparação de cada material necessário para a confecção dele: borracha, madeira, grafite.

1. Alguns exemplos desse processo:

- Feijão: no setor primário, o produto é plantado, colhido e, depois, vendido para as agroindústrias (setor secundário); a agroindústria seleciona, limpa, verifica a qualidade, embala e transporta o produto para os supermercados (setor terciário); os supermercados vendem o produto aos consumidores finais.
- Combustível: no caso da gasolina, o petróleo é extraído (setor primário) e refinado (setor secundário). No caso do álcool, a cana-de-açúcar é extraída na primeira etapa e fermentada na segunda. Ambos são distribuídos e vendidos pelo setor terciário.
- Roupas: do setor primário temos a produção do algodão e do petróleo. Após a colheita e a extração, ambos os produtos são transportados para as respectivas indústrias de transformação, no setor secundário. O petróleo vai para as refinarias e destas para fábricas que trabalham com petroquímicos, como adesivos e poliéster. O algodão também segue seu caminho, sendo transformado em fios e destinado às fábricas de tecidos. Nessas fábricas, o tecido é tingido algumas vezes com tintas à base de petróleo (indústria petroquímica). Após essa etapa, as várias cores de tecidos são transportadas (comercializadas) para fábricas de roupas. Estas, por sua vez, modelam as peças inserindo, algumas vezes, adesivos em *silk screen* (produto que também é à base de petróleo). Com o produto pronto e embalado, as roupas são enviadas por meios de transporte para o terceiro setor, onde são comercializadas.

2. A partir do século XIX, com a Revolução Industrial, o mundo progrediu tecnologicamente, a saúde foi modernizada, novos modelos de construção civil foram desenvolvidos, os potenciais da eletricidade foram e ainda são largamente explorados, os meios de comunicação foram amplamente renovados e os meios de transporte e locomoção se expandiram. Contudo, ainda há áreas no interior do país que não possuem acesso às tecnologias disponíveis nas capitais. Algumas cidades não têm sequer energia elétrica e saneamento básico.

No decorrer dos séculos, com a concorrência, as inovações foram eliminando postos de trabalho e criando funções novas. Os *smartphones* podem nos ajudar a compreender essa situação, uma vez que o setor de comunicação e telefonia vem evoluindo ano a ano. Profissões desapareceram e outras surgiram. Até o final do século XX, a telefonista era muito requisitada; hoje, parte desse serviço já é realizada por máquinas virtuais. As redes foram modernizadas e os próprios aparelhos mudaram. Nas ruas, os orelhões não deixaram sucessores, mas a vida ficou mais prática com os aplicativos, *apps*, de que dispomos nos *smartphones*. Para criar os *apps*, hoje há desenvolvedores espalhados pelo Brasil e pelo exterior. Os profissionais que trabalhavam com tecnologias

MODERNA

e funções obsoletas precisaram se adequar às novas tecnologias, e muitos mudaram de função ou se aposentaram.

Pergunte aos alunos se seus pais, tios e avós passaram pelo processo de adequação em suas profissões, como citado, e proponha um debate sobre o impacto da modernização dos setores na vida do trabalhador.

3. Os alunos podem se guiar pelo gráfico da questão anterior para identificar o setor no qual seus familiares estão inseridos.

Para discutir:

4. A lista de compras é importante para que não se esqueça dos itens que estão faltando em casa e para auxiliar no controle das compras, evitando a compra de itens desnecessários.

5. Segundo o Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese), os alimentos que compõem a cesta básica são: carne, leite, feijão, arroz, farinha, batata, legumes (ou tomate), pão francês, café em pó, frutas (banana), açúcar, óleo (ou gordura) e manteiga. A quantidade de cada produto varia de acordo com as regiões do Brasil.

6. Resposta pessoal. É importante notar que os alunos poderão priorizar itens diferentes em suas listas de acordo com a realidade de cada um.

7. **a)** Explique aos alunos que, para calcular a renda *per capita* domiciliar, somamos os rendimentos mensais dos moradores do domicílio e dividimos esse valor pelo número de moradores.

b) A renda familiar influencia diretamente o poder de compra de uma família e o acesso a produtos e serviços. Os itens considerados básicos no consumo das famílias, bem como suas prioridades, podem variar bastante de acordo com o poder aquisitivo.

Para finalizar:

O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é importante para o cálculo da inflação e um dos fatores que contribuem para o cálculo do reajuste do salário mínimo. Sugerimos que algumas questões de grande relevância para o planejamento financeiro sejam abordadas, como a variação do poder de compra, a influência da inflação no reajuste do salário mínimo e como isso influencia, ou deveria influenciar, o reajuste dos demais salários.

O vídeo "IBGE Explica: INPC e IPCA", disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=JVcDZOllMBk> (acesso em: 25 abr. 2020), discute o que é uma cesta de produtos e serviços, inflação e como ela influencia o poder de compra da população. Por isso, sugerimos que seja utilizado como disparador para as discussões desse tema.

8. Conforme a inflação aumenta, o poder de compra da população tende a diminuir, caso os salários não sejam ajustados adequadamente. Ou seja, as pessoas tendem a não ter acesso à mesma quantidade de produtos e serviços.

9. Nos questionamentos realizados durante essa seção, os alunos estudaram e investigaram informações sobre o setor da economia em que a família trabalha, os itens de alimentação que consomem, a renda domiciliar *per capita* etc. Baseando-se nessas informações e na discussão realizada com cada grupo, oriente os alunos na elaboração do texto.

PESQUISA E AÇÃO

Feira de empreendedorismo

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9** e **10**, das competências específicas de Matemática e suas Tecnologias **2** e **3**, da habilidade **EM13MAT309**, da habilidade da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas **EM13CHS301** e dos temas contemporâneos **educação ambiental**, **educação para o consumo**, **trabalho**, **educação financeira** e **educação fiscal**.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a atividade desta seção é dividida em etapas, que podem ser realizadas no decorrer do período escolar. Mesmo que algumas etapas, como a pesquisa e a elaboração do produto, possam ser realizadas fora da sala de aula, é importante orientar os alunos com relação ao planejamento, ao prazo, ao material necessário e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, selecionando algumas aulas (momentos presenciais) para as orientações, as discussões e o acompanhamento do trabalho.

MODERNA

Ao propor a realização de uma feira de empreendedorismo, os alunos tornam-se disseminadores de informações que podem ajudar pessoas a estabelecer objetivos de vida, por exemplo, iniciando seu próprio negócio e determinando os meios mais adequados para alcançar seus objetivos.

Inicie a discussão com uma roda de conversa em que os alunos possam partilhar seus conhecimentos prévios sobre empreendedorismo, educação financeira e responsabilidade socioambiental, entre outros. Também é possível perguntar aos alunos se eles conhecem pessoas que começaram seu próprio negócio, qual o tipo de negócio e por que acreditam que elas tomaram essa atitude. É interessante que eles percebam que o empreendedorismo pode ser uma alternativa para superar dificuldades econômicas e sociais e para enfrentar o problema do desemprego; assim, é importante oferecer apoio para que as pessoas possam empreender.

Etapa 1:

Oriente os alunos a realizar a pesquisa em fontes de informação confiáveis e especializadas no tema. O Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (Sebrae), por exemplo, oferece informações e cursos que podem auxiliar o empreendedor. O Sebrae disponibiliza diversas informações em seu *site*: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae> (acesso em: 26 abr. 2020).

1. **a)** Empreendedorismo é a disposição para criar novos negócios, novos produtos e novas técnicas de produção ou modificar o que já existe. O empreendedor é aquele que vê além do que já existe e cria algo usando imaginação e criatividade.
   b) Algumas características e habilidades para se tornar um empreendedor: otimismo; autoconfiança; criatividade; independência; ousadia; resistência diante das dificuldades; flexibilidade para mudar; capacidade de lidar com frustrações, de analisar informações e acontecimentos, de organizar pessoas, de liderar, de relacionar informações e de argumentar. O empreendedor reconhece a importância do esforço e da resistência para o sucesso de seu negócio; está sempre aberto a novas ideias. É preciso ressaltar aos alunos que essas características e atitudes necessárias ao empreendedor não são inatas, mas desenvolvidas durante a vida com base nas experiências e nas relações estabelecidas pelas pessoas.

2. Sugira aos alunos que anotem informações e reflexões que possam surgir nesse momento de conversa e que considerem importantes.

   Algumas informações específicas sobre "O que é ser empreendedor" podem ser encontradas em: <https://m.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/bis/o-que-e-ser-empreendedor,ad17080a3e107410VgnVCM1000003b74010aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).

Etapa 2:

Auxilie os alunos a fazer a escolha considerando a viabilidade da criação do produto na escola. Dependendo do produto escolhido, sugere-se desenvolver a etapa de criação dele em parceria com professores de outras áreas do conhecimento.

3. Para o momento de levantamento de ideias, pode ser feito um *brainstorming*. O termo, que vem do inglês, sugere que o grupo exponha suas ideias evitando-se avaliações e críticas, para que se possa recolher o maior número possível de ideias. Essas ideias podem ser anotadas no quadro ou em uma folha de papel e, posteriormente, devem ser retomadas e discutidas com os alunos, para que se defina um bom negócio.
4. Nesse momento é importante estimular os alunos a refletir sobre o que seria um bom negócio. Considerando a importância do desenvolvimento sustentável, auxilie-os a escolher um negócio ambientalmente responsável e que ajude a promover o consumo ético e consciente. Alguns exemplos de negócios: brechó de roupas, de sapatos e de brinquedos; sebo de livros; confecção de camisetas; fábrica de bijuterias; loja de artesanato. É possível obter algumas ideias na página do Sebrae, na seção Ideias de negócio. Disponível em: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/ideias>. (acesso em: 26 abr. 2020).

Etapa 3:

5. Auxilie os alunos a se organizar de modo que os grupos tenham uma quantidade adequada de integrantes, de acordo com as atividades que deve realizar. Para viabilizar o desenvolvimento de suas atividades, os grupos devem realizar pesquisas sobre informações necessárias para o planejamento, organização e formalização de um negócio. Pode-se sugerir aos grupos o *link* a seguir: <https://m.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/sebraeaz/6-passos-para-iniciar-bem-o-seu-novo-negocio,a28b5e24d0905410VgnVCM2000003c74010aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).

MODERNA

Grupo 1:

Nesta etapa da atividade, os alunos são estimulados a verificar tipos de recursos necessários para a abertura e a operação do negócio escolhido, cotar custos, fazer projeções de venda e lucro e descontar tributos. Desse modo, são mobilizados a elaborar planejamento financeiro em curto, médio e longo prazos.

- Com relação à necessidade de empréstimo ou financiamento, os alunos devem realizar uma pesquisa para responder a essa questão. Pode-se sugerir que também busquem informações no *site* do Sebrae, na seção Financiamento ou empréstimo: como avaliar a necessidade e contratar. Disponível em: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/financiamento-ou-emprestimo-como-avaliar-a-necessidade-e-contratar,b76e047f76801510VgnVCM2000004d00210aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).

Esse momento da atividade é oportuno para estimular os alunos a analisar alternativas de prevenção em longo prazo. Além disso, por tratar do uso consciente de produtos do mercado financeiro, a questão possibilita que se aborde o tema contemporâneo **educação financeira**.

Grupo 2:

Os alunos devem pesquisar as informações necessárias para o registro de uma empresa; assim, o objetivo dessa pesquisa é reunir as informações necessárias para isso.

- O registro de uma empresa funciona como uma Certidão de Nascimento. A partir desse registro, a empresa está oficialmente criada e legalizada.
- A sigla CNPJ significa Cadastro Nacional da Pessoa Jurídica. É um número que identifica uma pessoa jurídica; cada empresa possui um número único, assim como cada cidadão possui um único número de CPF (Cadastro de Pessoa Física).
- Alguns exemplos são os direitos e benefícios previdenciários: aposentadoria por idade, aposentadoria por invalidez, auxílio-doença, salário-maternidade, entre outros.
- Para escolher o nome da empresa, pode-se pensar no seu objetivo, no público que busca atender e nas características do negócio que podem estar presentes no nome. É recomendável escolher um nome breve e simples para que as pessoas possam pronunciá-lo com facilidade.
- Algumas modalidades de empresa são: Empresário Individual, Microempreendedor Individual (MEI), Empresa Individual de Responsabilidade Limitada (EIRELI), Sociedade Empresária e Sociedade Simples.

Algumas informações sobre a documentação necessária e as taxas para o registro de uma empresa podem ser obtidas no *site* do Sebrae:

- Guia prático para a formalização de empresas. Disponível em: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/guia-pratico-para-a-formalizacao-de-empresas,8f8a634e2ca62410VgnVCM100000b272010aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).
- Como abrir uma empresa. Disponível em: <https://m.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/sebraeaz/6-passos-para-iniciar-bem-o-seu-novo-negocio,a28b5e24d0905410VgnVCM2000003c74010aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020).

Grupo 3:

- Pesquisa de mercado é uma pesquisa que pode ser feita com clientes, fornecedores e concorrentes. O objetivo dela é coletar informações sobre opiniões, comportamentos, valores e necessidades para tomar decisões de *marketing*, por exemplo: lançar um produto ou serviço, definir o melhor meio de divulgação do produto, ajustar preços etc.

Para responder às questões, os alunos podem buscar informações no *site* do Sebrae, na seção "Entenda o que é uma pesquisa de mercado". Disponível em: <https://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/bis/entenda-o-que-e-uma-pesquisa-de-mercado,284836627a963410VgnVCM1000003b74010aRCRD> (acesso em: 26 abr. 2020).

Grupo 4:

- O plano de *marketing* é um planejamento que ajuda a empresa a definir seus objetivos, suas metas e suas estratégias em relação ao produto que irá vender, ao preço dele e aos pontos de venda.

MODERNA

- Para criar um plano de *marketing*, é necessário definir os objetivos para alcançar as metas; identificar os pontos fortes e fracos do negócio; avaliar oportunidades e ameaças dele; identificar o público-alvo e buscar atender as necessidades desse público.

Sugira aos alunos que realizem uma pesquisa no *site* do Sebrae, na seção "Como elaborar um plano de *marketing*". Disponível em: <https://bibliotecas.sebrae.com.br/chronus/ARQUIVOS_CHRONUS/bds/bds.nsf/1947E3304928A275032571FE00630FB1/$File/NT00032296.pdf> (acesso em: 26 abr. 2020).

Grupo 5:

- *Slogan* é uma frase curta e fácil de ser lembrada, utilizada para lançar uma marca ou um produto. O *slogan* busca representar a empresa ou o produto, trazendo à memória das pessoas ideias e emoções relacionadas a eles. Nesta atividade, o mote do produto que será criado pela turma é a responsabilidade socioambiental; por isso, o *slogan* pode estar relacionado a essa temática.

Etapa 4:

Nessa etapa, todas as informações levantadas pelos grupos na etapa anterior serão compartilhadas. É importante ressaltar as informações mais relevantes, mediando as discussões e auxiliando nas definições finais de nome e modalidade da empresa e na escolha do *slogan*.

Também é importante que os alunos sejam conscientizados de que o trabalho é coletivo e, por isso, os grupos devem se reunir para compartilhar as informações pesquisadas e atualizar os colegas sobre o andamento das atividades.

Etapa 5:

Durante a criação do produto, é importante mobilizar os alunos a refletir sobre responsabilidade socioambiental e sustentabilidade. Promova momentos de conversa em que possam refletir sobre a importância do consumo ético, responsável e consciente, tanto do ponto de vista do consumidor como das empresas que vendem os produtos.

Para ajudar os alunos, pode-se sugerir que leiam e conversem sobre conteúdos disponibilizados no *site* Sebrae, na seção Publicações. Disponível em: <https://m.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/sustentabilidade-para-os-pequenos-negocios,b6ad6ca28e87e510VgnVCM1000004c00210aRCRD> (acesso em: 29 maio 2020). No *site* há cartilhas, guias e manuais sobre sustentabilidade, além de modelos de negócios pautados na sustentabilidade.

Etapa 6:

Assim como na etapa anterior, deve-se mobilizar os alunos a refletir sobre responsabilidade socioambiental e sustentabilidade. Se possível, antes de iniciar esta etapa, peça aos alunos que assistam ao vídeo *3ª DICA – Design sustentável*, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=x8DlsqyGG_o> (acesso em: 29 maio 2020).

Nessa etapa, os alunos vão mobilizar alguns conceitos matemáticos estudados nesse volume. Se necessário, relembre a maneira de realizar as planificações e o cálculo da área e do volume de poliedros e corpos redondos, conforme a necessidade do produto que será embalado.

Etapa 7:

Essa é a etapa culminante do projeto proposto na seção. É importante viabilizar o acontecimento do evento, garantindo, por exemplo, a reserva do espaço onde será realizada a feira. É importante também que você esteja disponível para auxiliar os alunos na organização do evento, orientando-os a estar presentes na totalidade para a sua abertura e auxiliando-os na organização dos turnos de horários para que sempre tenha alunos em quantidade suficiente para atender e orientar os visitantes, atentando também para possíveis horários de pico.

Etapa 8:

15. Nessa última etapa, será preciso mediar a discussão. É importante deixar que os alunos coloquem suas opiniões, ouçam as dos colegas e reflitam sobre todo o processo.

16. Oriente os alunos na realização da autoavaliação. Eles devem se basear nas perguntas propostas, nas experiências que tiveram no decorrer da realização das etapas, nas pesquisas, nas discussões durante as atividades e na experiência de produzir uma feira de empreendedorismo. A ideia é que avaliem se alcançaram os objetivos propostos, se sentiram dificuldades durante as etapas, como lidaram com elas e de que modo a atividade contribuiu para a formação deles.

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Geometria plana e espacial

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro

Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial

Assessoria pedagógica: José Eduardo de Souza Carrilho Cruz, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho

Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula

Coordenação de produção: Patricia Costa

Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues

Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite

Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa

Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock

Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho

Edição de arte: Elaine Cristina da Silva

Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica

Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo

Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco

Revisão: Ana Maria C. Tavares, Cárita Negromonte, Frederico Hartje, Inaya Oliveira, Leila dos Santos, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Simone S. Garcia

Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron

Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues

Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro

Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa

Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro

Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto, Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, as competências, trabalhadas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

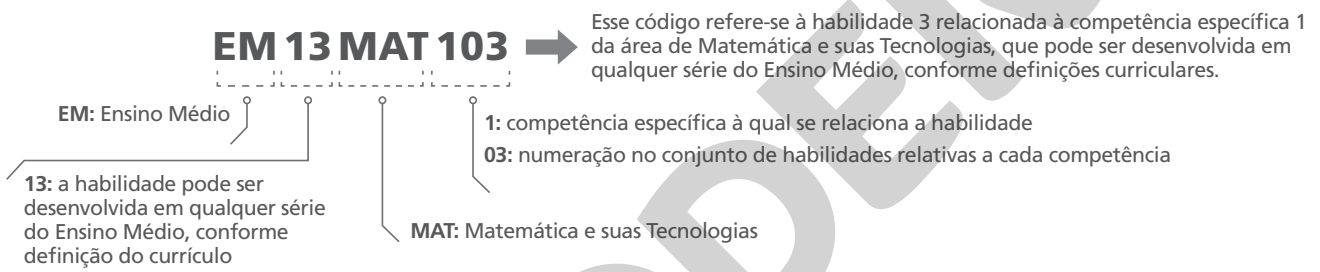
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(**EM13MAT104**) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13MAT201**) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13MAT307**) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT308**) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(**EM13MAT309**) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(**EM13MAT504**) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(**EM13MAT505**) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(**EM13MAT506**) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(**EM13MAT509**) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT307**) Analisar as propriedades dos materiais para avaliar a adequação de seu uso em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e/ou propor soluções seguras e sustentáveis considerando seu contexto local e cotidiano.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 1 E 3
(**EM13CHS106**) Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
(**EM13CHS301**) Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Analisar as relações de produção, capital e trabalho em diferentes territórios, contextos e culturas, discutindo o papel dessas relações na construção, consolidação e transformação das sociedades.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(**EM13CHS402**) Analisar e comparar indicadores de emprego, trabalho e renda em diferentes espaços, escalas e tempos, associando-os a processos de estratificação e desigualdade socioeconômica.

Linguagens e suas Tecnologias

HABILIDADES RELACIONADAS ÀS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS 2 E 3
(**EM13LGG201**) Utilizar as diversas linguagens (artísticas, corporais e verbais) em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.
(**EM13LGG301**) Participar de processos de produção individual e colaborativa em diferentes linguagens (artísticas, corporais e verbais), levando em conta suas formas e seus funcionamentos, para produzir sentidos em diferentes contextos.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6: Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6
(**EM13LGG601**) Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.
(**EM13LGG602**) Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo do volume.

CAPÍTULO 1 – Superfícies poligonais, círculo e áreas	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos e estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles, além de resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.	O mundo físico real em que vivemos delineia-se diante de nossos olhos por meio das suas formas geométricas. Para entendermos e aplicarmos as propriedades dessas formas, é imprescindível o estudo das formas geométricas das superfícies poligonais, do círculo e de suas respectivas áreas.
CAPÍTULO 2 – Introdução à Geometria espacial	
Objetivo	**Justificativa**
O capítulo tem como fim efetuar cálculos de distâncias entre: pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos; preliminarmente identificando a posição relativa entre tais elementos, além de determinar a medida de um ângulo diedro.	A resolução de inúmeros problemas cotidianos pressupõe o saber calcular distâncias. Situações reais são, então, representadas por elementos ideais como ponto, reta, plano, ângulo etc., cujas posições relativas devem ser identificadas para a posterior definição e cálculo da distância entre eles.
CAPÍTULO 3 – Poliedros	
Objetivo	**Justificativa**
Como objetivo desse capítulo, temos a identificação, o reconhecimento e a aplicação de propriedades dos poliedros, dos prismas, das pirâmides, dos troncos de pirâmides e das relações entre seus elementos. Também é objetivo do capítulo o cálculo de áreas, de volumes e de medidas de comprimento de elementos de poliedros.	Poliedros, prismas, pirâmides e troncos de pirâmides constituem o formato geométrico de muitos objetos do mundo real que precisamos reconhecer e dos quais precisamos obter a área da superfície e o volume para a resolução de diversos problemas cotidianos.
CAPÍTULO 4 – Corpos redondos	
Objetivo	**Justificativa**
Esse capítulo objetiva identificar cilindros, cones, troncos de cones, esferas e seus respectivos elementos. Também pretende calcular a área da superfície e o volume de alguns desses corpos redondos.	Cilindros, cones, troncos de cones e esferas também constituem o formato geométrico de muitos objetos do mundo real que precisamos reconhecer e dos quais precisamos obter a área da superfície e o volume para a resolução de diversos problemas cotidianos na área de Matemática e suas Tecnologias ou outras, como Ciências Humanas e Sociais Aplicadas na planificação cartográfica da Terra, por exemplo.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pilares do *pensamento computacional*.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara, para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 2 \\ -2 & 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ -2 & 13 \\ \hline 06 & \\ -6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

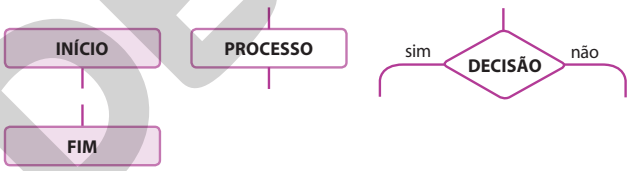
Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

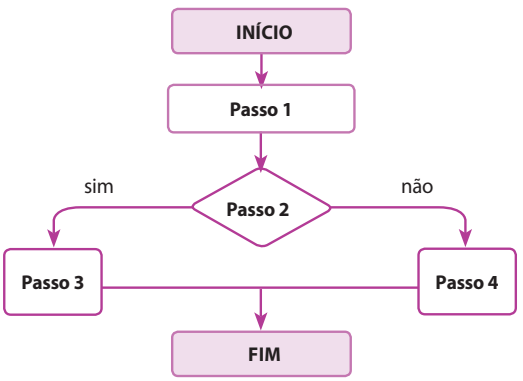
Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.

Símbolos terminais | Símbolo de processo | Símbolo de estrutura de decisão



O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

Nesta obra você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Organização da obra

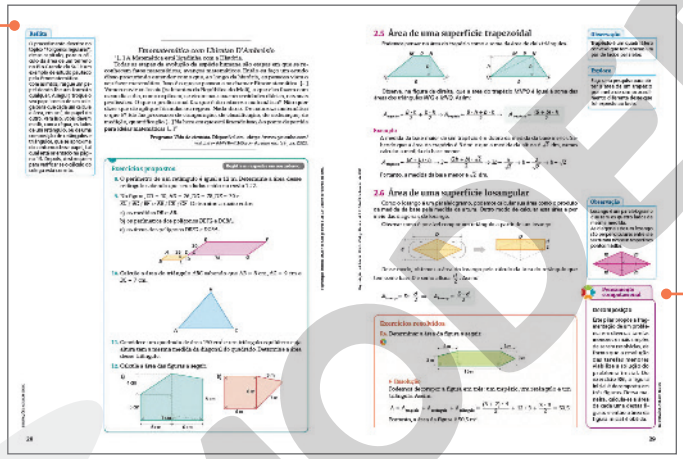
Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.

Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

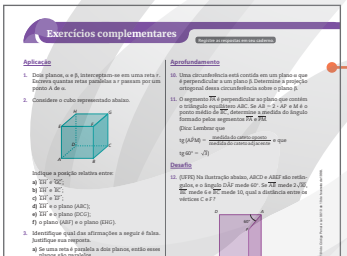
Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.



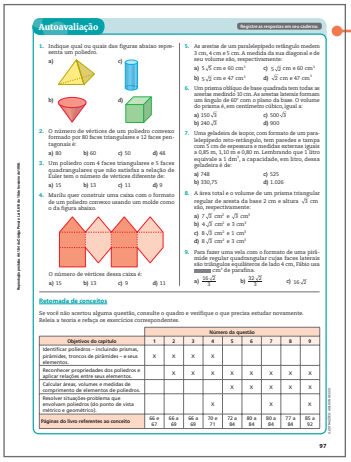
Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:



Exercícios complementares

- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.



Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.

Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

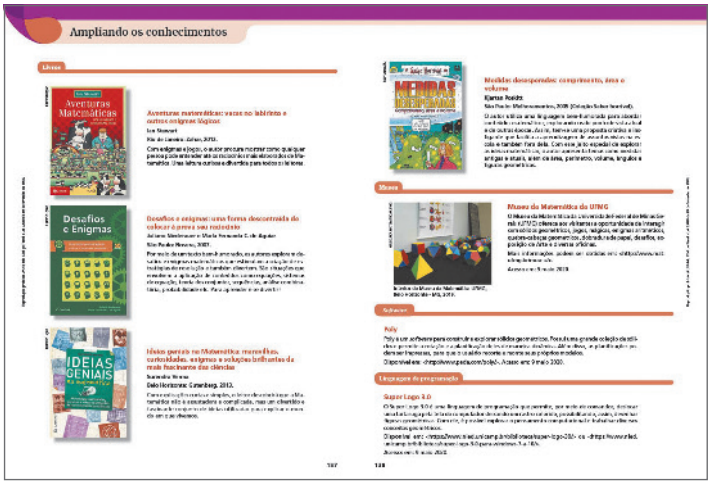
Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.

Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sumário

CAPÍTULO 1 Superfícies poligonais, círculo e áreas **14**

1. Polígonos regulares 14
1.1. Segmentos congruentes e ângulos congruentes 15
1.2. Definição de polígono regular 16
1.3. Polígono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência 16
1.4. Ladrilhamento 22

2. Área de algumas superfícies poligonais planas 24
2.1. Área de uma superfície quadrada 24
2.2. Área de uma superfície retangular 25
2.3. Área de uma superfície limitada por um paralelogramo não retângulo 26
2.4. Área de uma superfície triangular 26
2.5. Área de uma superfície trapezoidal 29
2.6. Área de uma superfície losangular 29
2.7. Área de superfícies poligonais regulares 31

3. Círculo e circunferência 32
3.1. Comprimento da circunferência 33
3.2. Área do círculo 33

Exercícios complementares 37

Autoavaliação 39

Compreensão de texto 40

CAPÍTULO 2 Introdução à Geometria espacial **42**

1. A Geometria euclidiana 44
1.1. Noções primitivas 44
1.2. Sistema dedutivo 45

2. Posições relativas 47
2.1. Paralelismo 47
2.2. Perpendicularismo 50

3. Projeção ortogonal e distância 55
3.1. Projeções ortogonais 55
3.2. Distâncias 56

4. Ângulos e diedros 59

Exercícios complementares 62

Autoavaliação 63

CAPÍTULO 3 Poliedros **64**

1. Sólidos geométricos 65
1.1. Sólidos geométricos e figuras planas 66

2. Poliedros 66
2.1. Superfície poliédrica fechada e poliedros 66
2.2. Poliedro convexo e poliedro não convexo 68
2.3. Planificação da superfície de um poliedro 70

3. Prismas 72
3.1. Definição de prisma 72

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3.2. Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo 74
3.3. Planificação da superfície de um prisma 76
3.4. Área da superfície de um prisma 77
3.5. Volume de um prisma 80
4. Pirâmides 85
4.1. Definição de pirâmide 85
4.2. Planificação da superfície de uma pirâmide 86
4.3. Pirâmides regulares 86
4.4. Área da superfície de uma pirâmide 88
4.5. Volume de uma pirâmide 89
4.6. Tronco de pirâmide de bases paralelas 93
Exercícios complementares 95
Autoavaliação 97
Compreensão de texto 98

CAPÍTULO 4 **Corpos redondos** **100**

1. Corpos redondos 100
2. Cilindro 101
2.1. Classificação dos cilindros 102
2.2. Secções de um cilindro 102
2.3. Área da superfície de um cilindro reto 103
2.4. Volume de um cilindro 105
3. Cone 107
3.1. Classificação dos cones 108
3.2. Secções de um cone 109
3.3. Planificação da superfície de um cone reto 109
3.4. Área da superfície de um cone reto 112
3.5. Volume de um cone 114
3.6 Tronco de cone de bases paralelas 116
4. Esfera 118
4.1. Secção de uma esfera 119
4.2. Área da superfície esférica e volume da esfera 120
4.3. Cunha esférica e fuso esférico 122
Exercícios complementares 124
Autoavaliação 126
Compreensão de texto 127

Educação financeira 130
Pesquisa e ação 133
Ampliando os conhecimentos 137
Respostas 140
Referências bibliográficas 143

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

1

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT201**, **EM13MAT307**, **EM13MAT308**, **EM13MAT505** e **EM13MAT506**.

Superfícies poligonais, círculo e áreas

CHRISTIE'S IMAGES/BRIDGEMAN IMAGES/KEYSTONE BRASIL - COLEÇÃO PARTICULAR

Objeto feito com a técnica da marchetaria.

Objetivos do capítulo

- Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.
- Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.
- Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.

Criada na Mesopotâmia por volta de 3000 a.C., a marchetaria é considerada a arte de ornamentar superfícies planas por meio da técnica de embutir ou incrustar materiais diversos, principalmente pedaços de madeira de diferentes cores e texturas. Esses materiais justapostos formam um desenho.

A técnica difundiu-se pelo mundo e chegou à Europa. Após a queda do Império Romano do Ocidente, essa arte quase se extinguiu, mas ressurgiu nos séculos XIV e XV com as escolas de marchetaria na cidade italiana de Florença, região da Toscana.

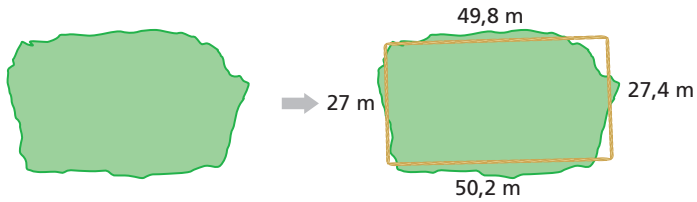
As imagens obtidas na marchetaria podem ser geométricas, figurativas ou abstratas.

1 Polígonos regulares

No meio rural, há necessidade de determinar áreas de terrenos com contornos não muito "alinhados" para fins de plantio, aplicação de adubos e previsão de colheita. Para se obter a área desses terrenos, pode-se usar modelos matemáticos regionais bastante peculiares, aprendidos por meio de cultura popular e transmitidos entre as famílias dos agricultores através das gerações.

Para medir a superfície de um pasto, por exemplo, alguns agricultores empregam o cálculo da área do retângulo. Parte deles, com um pouco mais de conhecimento da matemática escolar, usa também a área do triângulo. Quando o terreno não tem formato retangular nem triangular, é dividido em partes que reproduzem aproximadamente essas figuras.

Veja, nas figuras a seguir, um exemplo do tipo de cálculo de área de terreno usado no interior do Rio Grande do Sul e as medidas obtidas com cordas esticadas e trena. Note que se procura obter um quadrilátero próximo de um retângulo e aplicar uma compensação com partes que sobram e com partes que faltam para cobri-lo.



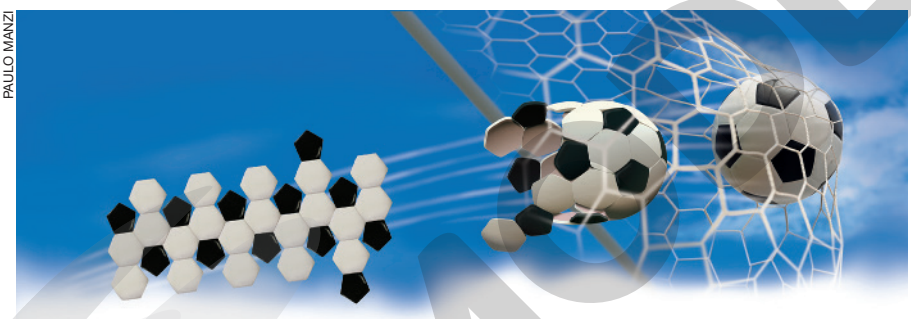
A medida da base do retângulo será dada pela média aritmética de 49,8 e 50,2. A medida da altura será dada pela média aritmética de 27 e 27,4. Assim:

$$\frac{49,8 + 50,2}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ e } \frac{27 + 27,4}{2} = \frac{54,4}{2} = 27,2$$

A área é dada pelo produto dessas médias aritméticas: $50 \cdot 27,2 = 1.360$

Portanto, no cálculo da área do terreno, os agricultores chegaram a 1.360 m^2 que, dado o método utilizado para o cálculo da área, é um valor aproximado o suficiente para alguns fins.

Agora, observe na ilustração a seguir que na superfície planificada de uma bola de futebol podemos identificar figuras pentagonais e hexagonais.



PAULO MANZI

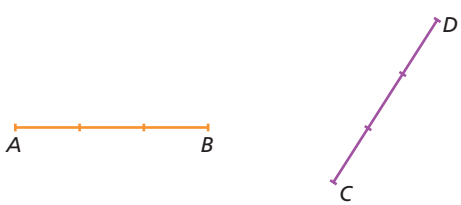
KAMONRAT MEUNKLAD/EYEEM/GETTY IMAGES

O cálculo de áreas de superfícies poligonais é importante tanto para a agricultura quanto para a indústria e demais profissões, como a de engenheiro, por exemplo. Neste capítulo, vamos aprender a calcular a área de superfícies e de figuras presentes em nosso cotidiano, para assim conseguirmos responder a perguntas como: qual é a quantidade de couro necessária para a confecção de uma bola de futebol oficial? Qual é a quantidade de tinta necessária para pintar uma parede? Para isso, vamos estudar alguns conceitos importantes relacionados aos polígonos regulares.

1.1 Segmentos congruentes e ângulos congruentes

Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem a mesma medida, considerando uma mesma unidade de medida de comprimento.

Exemplo



Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **2** e das habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT307** da BNCC, pois propõe ações adequadas às demandas de uma região rural, envolvendo medições e cálculos de perímetro e de área. Dessa maneira, o tema contemporâneo **diversidade cultural** também é favorecido.

Explore

Na atualidade, há aplicativos tecnológicos que tornam o trabalho de medir áreas bem mais fácil. Basta ter um celular ou computador para obter a área de grandes terrenos. Faça uma pesquisa na internet e descubra um aplicativo que ofereça esse serviço. Depois, escreva um texto explicando o passo a passo para obter a área de um terreno por meio desse aplicativo.

Os aplicativos trabalham com GPS ou mapas por satélite. O usuário deve digitar o endereço e, com uma caneta digitalizadora ou por meio de toque na tela, desenhar o contorno do terreno observado na tela. Feito isso, deve-se clicar na ferramenta para calcular a área.

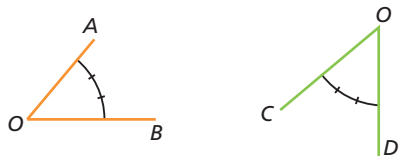
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODELO

Indicamos a congruência dos segmentos por: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida, considerando uma mesma unidade de medida.

Exemplo

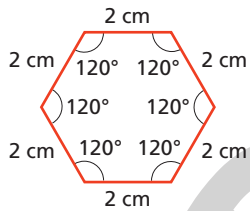


Indicamos a congruência dos ângulos por: $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$

1.2 Definição de polígono regular

Um polígono é **regular** se, e somente se, tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

Exemplos



polígono regular

polígono não regular

Explore

Com um colega, consulte livros do Ensino Fundamental que tratem de:

- número de diagonais de um polígono de n lados;
- soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados.

Para o desenvolvimento deste tópico, não é imprescindível, porém é desejável, que os alunos recordem ideias referentes a polígonos convexos de n lados, como: decomposição em $(n - 2)$ triângulos a partir de um vértice, cálculo do número de diagonais e cálculo da soma das medidas dos ângulos internos.

Observação

Raio de uma circunferência é qualquer segmento cujas extremidades são o centro e um ponto da circunferência.

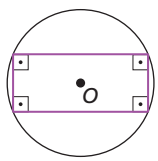
1.3 Polígono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência

Antes de falarmos sobre os polígonos regulares inscritos em uma circunferência e circunscritos a ela, é preciso definir circunferência.

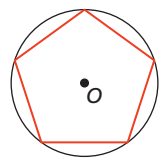
Circunferência é a figura formada por todos os pontos de um plano que distam r de um ponto O fixo desse plano. A distância r é a medida do **raio** da circunferência, e o ponto O é o **centro** da circunferência.

Quando todos os vértices de um polígono pertencem a uma circunferência, dizemos que ele é um **polígono inscrito** nessa circunferência ou que a circunferência é **circunscrita** ao polígono.

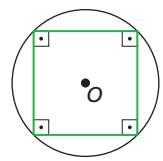
Exemplos



retângulo inscrito



pentágono regular inscrito



quadrado inscrito

Esse tópico possibilita ao aluno usar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos, verificar coerência de resultados, elaborar argumentação plausível e, assim, desenvolver a competência específica **3**, bem como a habilidade **EM13MAT308**, pois ele deve aplicar relações métricas e noções de congruência e de semelhança para resolver problemas que envolvem triângulos.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nos exercícios **R1** e **R2**, é possível observar mais de uma maneira de resolver o mesmo tipo de problema.

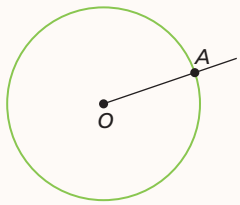
Exercícios resolvidos

R1. Construir com o auxílio de uma régua e de um transferidor um pentágono regular inscrito em uma circunferência.

▸ Resolução

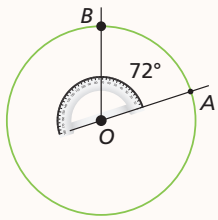
• 1º passo

Traçamos uma circunferência de centro O e uma semirreta qualquer com origem O que corta a circunferência em um ponto A.



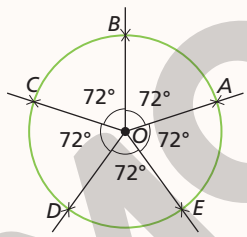
• 2º passo

Com o transferidor centrado em O e com 0° na semirreta $\overrightarrow{OA}$, marcamos 72° e traçamos $\overline{OB}$.



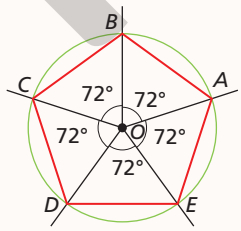
• 3º passo

Repetimos o segundo passo por três vezes, adotando a última semirreta construída como se fosse a primeira, na circunferência os outros vértices C, D e E.

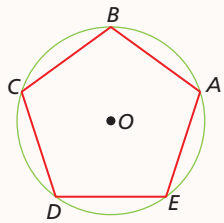


• 4º passo

Traçamos os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$.



E, finalmente, apagamos as construções auxiliares, obtendo assim o pentágono $ABCDE$ inscrito em uma circunferência.



Observação

No exercício **R1**, pode-se raciocinar partindo do final para o início da construção, ou seja, fazendo um esboço gráfico da resposta, imaginando o problema já resolvido.
Nesse esboço, podem ser verificadas informações tais como a medida dos ângulos centrais que contêm os lados do pentágono. Note que: $360° \div 5 = 72°$

Explore

Faça uma pesquisa na internet para verificar se é possível construir um pentágono regular utilizando somente régua não graduada e compasso. Se for possível, escreva a sequência de passos para essa construção.

Sim, é possível construir um pentágono regular utilizando somente régua e compasso. Ver no Guia do professor uma sequência de passos para essa construção.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

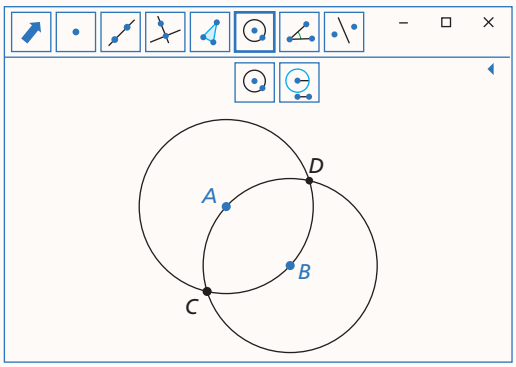
O exercício **R2** favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC ao fazer uso de um *software* de Geometria dinâmica. Caso não seja possível utilizar um *software* de Geometria dinâmica, as construções podem ser realizadas com régua e compasso. Se julgar necessário, utilizar um esquadro para ângulos retos.

R2. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construir um triângulo equilátero e um quadrado inscritos em uma circunferência.

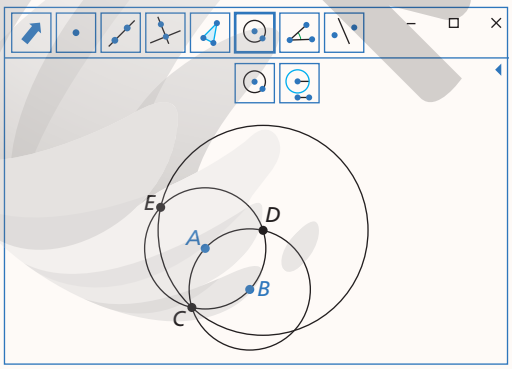
▸ Resolução

Observe os passos a seguir para a construção do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

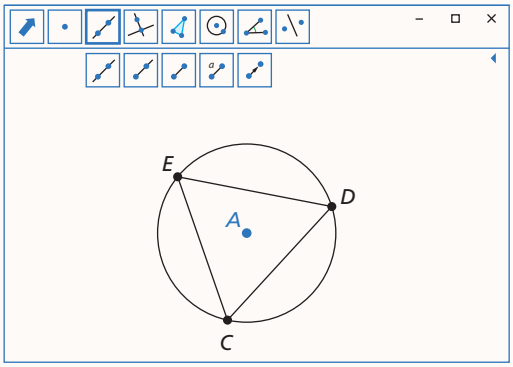
1. Desenhamos uma circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$ qualquer para inscrever o triângulo. Nessa circunferência, marcamos um arco medindo 120° (360° ÷ 3 = 120°). Para isso, traçamos outra circunferência com centro em B e raio $\overline{BA}$. Marcamos os pontos C e D, intersecções das duas circunferências, obtendo o arco $\overset{\frown}{CBD}$, medindo 120°.



2. Construímos uma circunferência de centro em D e raio $\overline{DC}$. Marcamos o ponto E, uma das intersecções entre a circunferência de centro D e a de centro A (a outra intersecção é o ponto C). Dessa forma, dividimos a circunferência de centro A em três arcos de medida igual a 120°.

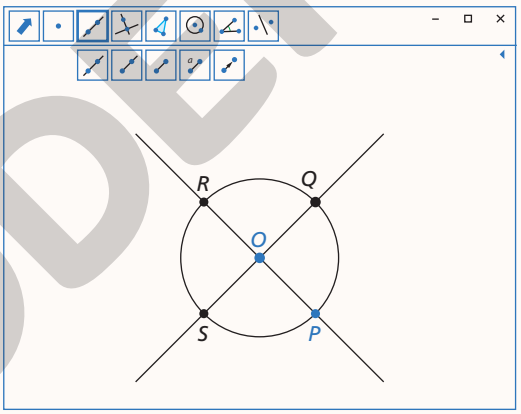


3. Escondemos as construções auxiliares e, com os segmentos de reta $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EC}$, construímos um triângulo equilátero inscrito na circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$.

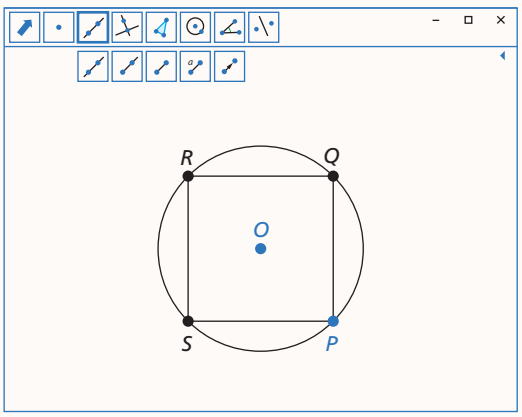


Agora, para construir o quadrado inscrito na circunferência, realizamos os passos a seguir.

1. Desenhamos uma circunferência de centro em O e raio $\overline{OP}$ para inscrever o quadrado, e construímos, nessa circunferência, quatro ângulos centrais medindo 90° cada um. Para isso, traçamos a reta $\overline{OP}$ e uma perpendicular a $\overline{OP}$ passando por O. Marcamos os pontos Q, R e S, intersecções das retas com a circunferência, determinando, assim, os ângulos centrais $P\hat{O}Q$, $Q\hat{O}R$, $R\hat{O}S$ e $S\hat{O}P$.



2. Escondemos as construções auxiliares e, com os segmentos de reta $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SP}$, determinamos um quadrado inscrito na circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$.



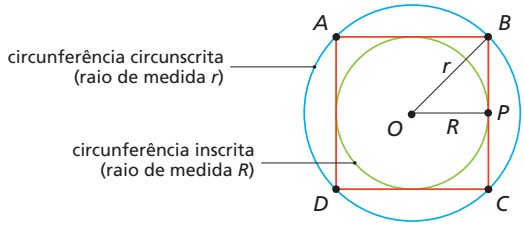
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ver as justificativas dos passos da construção no Guia do professor.

Quando um polígono regular é inscrito em uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*, todo segmento cujas extremidades são o centro da circunferência e o ponto médio de um lado do polígono é chamado de **apótema** do polígono. A medida do apótema de um polígono regular é a medida do raio da circunferência inscrita no polígono.



Observe que $\overline{OP}$ é o apótema de cada polígono inscrito em uma circunferência.

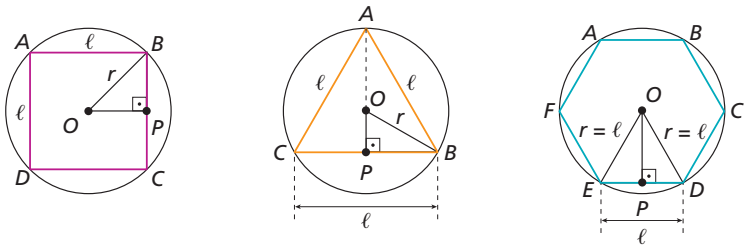


figura I figura II figura III

Na figura I, a medida do apótema é metade da medida do lado do quadrado.

Na figura II, a medida do apótema do triângulo equilátero é uma parte da medida da altura desse triângulo.

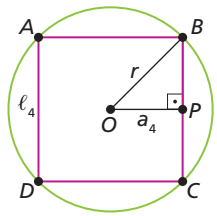
Na figura III, a medida do apótema do hexágono regular é a medida da altura do triângulo equilátero de lado *r*, em que *r* é o raio da circunferência circunscrita ao polígono e também a medida do lado do hexágono.

Relações métricas

As medidas do lado e do apótema de um polígono regular podem ser escritas em função da medida do raio da circunferência em que esse polígono está inscrito. Acompanhe como podemos escrever essas relações métricas para um quadrado e para um triângulo equilátero.

- **Quadrado inscrito em uma circunferência**

Observe o quadrado *ABCD* de lado ℓ_4 e apótema a_4, que está inscrito na circunferência de centro *O* e raio *r*.



O triângulo *OBP* é retângulo; seus catetos medem a_4 e $\frac{\ell_4}{2}$, e a hipotenusa, *r*.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OBP*, temos: $(a_4)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2$

Note que $\overline{OB}$ está contido na diagonal do quadrado; logo, $O\hat{B}P$ mede 45° e *BOP* também. Como o $\triangle B\hat{O}P$ é isósceles: $a_4 = BP = \frac{\ell_4}{2}$

Como $a_4 = \frac{\ell_4}{2}$, temos: $\left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{(\ell_4)^2}{2} = r^2$

Logo, a medida do lado do quadrado é dada por: $\ell_4 = r\sqrt{2}$

Assim, a medida do apótema do quadrado é dada por: $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

Observação

O quadrado *ABCD* da figura ao lado é inscrito na circunferência de raio *r* e é circunscrito à circunferência de raio *R*.
Quando todos os lados de um polígono tangenciam uma circunferência, dizemos que ele é um **polígono circunscrito** a essa circunferência ou que a circunferência é inscrita no polígono.

Reflita

Quantos apótemas tem um polígono regular de *n* lados?

O ponto médio de cada lado de um polígono regular determina um apótema; logo, um polígono regular de *n* lados tem *n* apótemas.

Observação

Daqui em diante, não distinguiremos alguns segmentos de suas respectivas medidas quando essa opção não causar dificuldade ao entendimento do texto. Assim, empregaremos com o mesmo significado: circunferência com raio de medida *r* e circunferência de raio *r*; polígono com lado de medida ℓ e polígono de lado ℓ; apótema de medida *a* e apótema *a*.

Observação

Usaremos ℓ_n e a_n para indicar, respectivamente, a medida do lado e do apótema do polígono regular de *n* lados inscrito em uma circunferência.

Reflita

Considerando o triângulo retângulo *ABD*, de que outra maneira ℓ_4 poderia ser obtido em função de *r*?

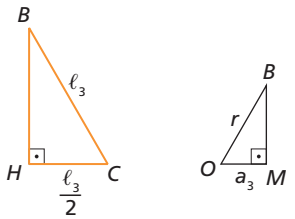
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABD*, temos:
$(\ell_4)^2 + (\ell_4)^2 = (2r)^2$
$2(\ell_4)^2 = 4r^2$
$\ell_4 = r\sqrt{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Triângulos semelhantes têm lados proporcionais.



$$\frac{OM}{OB} = \frac{HC}{BC}$$

$$\frac{a_3}{r} = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{\ell_3}$$

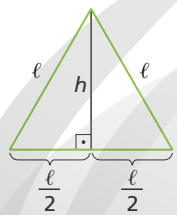
Reflita

Observe a altura do triângulo *ABC* e o segmento $\overline{HO}$, um dos apótemas. Sabendo que $HO = \frac{r}{2}$, o que é possível concluir da relação entre o apótema e a altura do triângulo *ABC*?

Espera-se que os alunos percebam que a medida do apótema é $\frac{1}{3}$ da medida da altura.

Observação

Seja *h* a altura de um triângulo equilátero de lado ℓ:



ADILSON SECCO

Assim, temos:

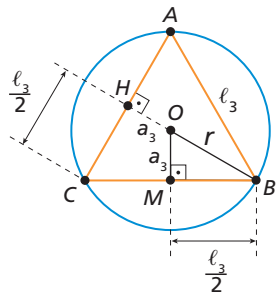
$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$4\ell^2 = 4h^2 + \ell^2$$

$$3\ell^2 = 4h^2 \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

- **Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência**

Observe o triângulo *ABC* de lado ℓ_3 e apótema a_3, que está inscrito na circunferência de centro *O* e raio *r*.



O triângulo *OMB* é retângulo; seus catetos medem a_3 e $\frac{\ell_3}{2}$, e a hipotenusa, *r*.

O triângulo *CHB* é retângulo; seus catetos medem $\frac{\ell_3}{2}$ e $a_3 + r$, e a hipotenusa, ℓ_3.

Os triângulos *OMB* e *CHB* são semelhantes, pois têm um ângulo reto e um ângulo comum. Portanto: $\frac{a_3}{r} = \frac{\frac{\ell_3}{2}}{\ell_3} \Rightarrow a_3 = \frac{r}{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *CHB*, temos:

$$\left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 + (a_3 + r)^2 = (\ell_3)^2 \Rightarrow \left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2} + r\right)^2 = (\ell_3)^2$$

Obtendo ℓ_3 em função de *r*, temos:

$$\frac{(\ell_3)^2}{4} + \frac{9r^2}{4} = \frac{4(\ell_3)^2}{4} \Rightarrow 3(\ell_3)^2 = 9r^2 \Rightarrow (\ell_3)^2 = 3r^2 \Rightarrow \ell_3 = r\sqrt{3}$$

Exercícios resolvidos

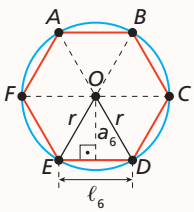
R3. O apótema de um hexágono regular mede 3 cm.

a) Determinar o perímetro desse hexágono.

b) Determinar o raio da circunferência circunscrita a ele.

▸ **Resolução**

a) Traçando as diagonais de um hexágono regular, que passam pelo centro da circunferência circunscrita, obtemos 6 triângulos equiláteros.



O apótema do hexágono é a altura do triângulo equilátero. Assim, temos:

$$a_6 = \frac{\ell_6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = \frac{2 \cdot a_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Portanto, o perímetro do hexágono regular é: $6 \cdot 2\sqrt{3}$ cm $= 12\sqrt{3}$ cm

b) Como $\ell_6 = r$, temos: $r = 2\sqrt{3}$ cm

R4. (Enem) O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm. Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa. Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetro, é igual a:

a) 18 b) 26 c) 30 d) 35 e) 60

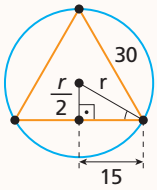
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

▸ **Resolução**

Como o proprietário da mesa deseja adquirir o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa, vamos considerar a situação limite ilustrada na figura ao lado.



Como $\ell = 30$ cm, aplicando a expressão $\ell_3 = r\sqrt{3}$, temos:

$$30 = r\sqrt{3} \Rightarrow \frac{30}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = 10\sqrt{3} \Rightarrow r \simeq 10 \cdot 1{,}7 = 17$$

Logo, o menor raio do círculo suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa deve ter aproximadamente 17 cm. Assim, entre as alternativas, deve ser escolhida aquela que indica o tampo de vidro com 18 cm de raio.

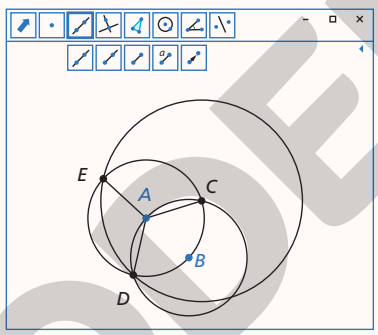
Portanto, alternativa a.

R5. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construir um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência.

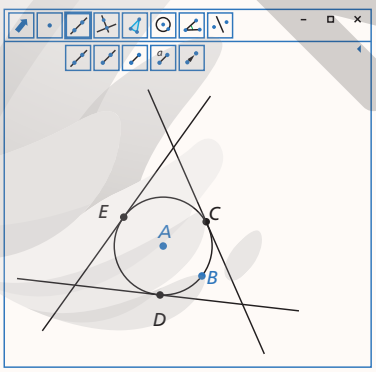
▸ **Resolução** Caso não seja possível utilizar um *software* de Geometria dinâmica, essa construção poderá ser realizada utilizando somente régua e compasso.

Como a apótema de um polígono regular tem a mesma medida do raio da circunferência que o inscreve, podemos iniciar a construção traçando os apótemas do triângulo equilátero. Observe os passos a seguir.

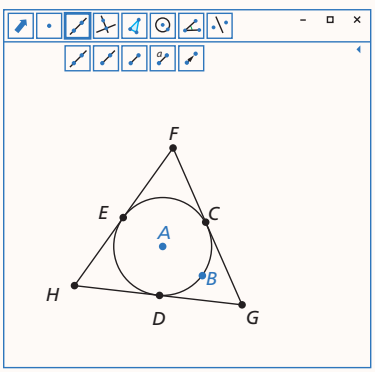
1. Desenhamos uma circunferência de centro em A e raio AB à qual circunscreveremos o triângulo equilátero. Depois, dividimos a circunferência em três arcos iguais ($360° \div 3 = 120°$), marcando os pontos C, D e E. Os apótemas do triângulo circunscrito à circunferência têm medida igual à do raio da circunferência que o inscreve. Assim, construímos os apótemas $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ do triângulo em construção.



2. Escondemos as construções auxiliares e construímos uma perpendicular a cada apótema passando pelos pontos C, D e E, respectivamente. Essas perpendiculares são tangentes à circunferência de centro A e raio $\overline{AB}$ nos pontos C, D e E.



3. Marcamos os pontos F, G e H, intersecções entre as perpendiculares, e traçamos os segmentos de reta $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HF}$, determinando um triângulo equilátero circunscrito à circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Pensamento computacional

Abstração

Esse pilar do *pensamento computacional* está relacionado à identificação das informações relevantes para modelagem e resolução de problemas.

Observe as informações apresentadas no exercício **R4**. Para resolvê-lo, é preciso selecionar apenas as informações pertinentes para modelar a situação. Note que o primeiro passo, nessa resolução, é representar o tampo de vidro e o suporte de apoio da mesa por uma circunferência e um triângulo, respectivamente. Em seguida, são extraídas as medidas necessárias para a resolução do problema. E, por fim, de acordo com o resultado obtido, o tampo de vidro é escolhido (com base nos modelos comercializados).

Se julgar interessante, perguntar aos alunos se havia alguma informação irrelevante à resolução do exercício **R4**. Espera-se que eles respondam que o material de que eram feitos o tampo e a base não são importantes para a resolução.

Observação

Para dividir a circunferência em três arcos iguais, pode-se utilizar a mesma sequência de passos do exercício **R2**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1. Comentar com os alunos que, para a construção do hexágono regular, podem-se seguir os procedimentos iniciais da construção do triângulo equilátero, como realizado no exercício **R2**, e depois traçar as bissetrizes dos ângulos de 120°, dividindo-os em ângulos de 60°, ou traçar diretamente ângulos de 60°.

3. a) $\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

b) $D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$

c) $P = 4\sqrt{3}R$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica ou instrumentos de desenho (régua e compasso), construa um hexágono regular inscrito em uma circunferência. Ver resolução no Guia do professor.

2. Determine a medida do apótema e a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 2 cm. 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm

3. Construa um hexágono regular circunscrito a uma circunferência e escreva: Ver resolução no Guia do professor.

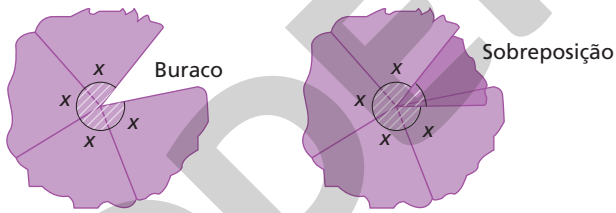
a) a medida ℓ_6 do lado do hexágono em função do raio R da circunferência.
b) a medida D de uma diagonal do hexágono, que passa pelo centro da circunferência, em função do raio R dessa circunferência.
c) o perímetro P do hexágono em função do raio R da circunferência.

Este tópico, em que o aluno resolve problemas de ladrilhamento, investiga e elabora conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas, em particular sobre quais polígonos recobrem o plano, favorece o desenvolvimento da competência específica **5**, bem como da habilidade **EM13MAT505** da BNCC.

1.4 Ladrilhamento

Para reformar o piso do quintal de sua casa, Elis quer usar um único tipo de revestimento cerâmico com o formato de um polígono regular. Então, ela se perguntou quantas e quais são as possibilidades que pode escolher.

Para ajudá-la, Elis consultou um azulejista. Ele lhe explicou que, para cobrir a superfície plana com peças cerâmicas poligonais, justapondo-as em torno de um vértice comum em que os ângulos têm a mesma medida x, não pode haver buraco nem sobreposição. Veja o desenho que ele fez.



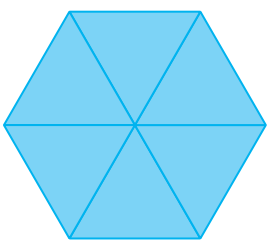
Para não haver buraco nem sobreposição, a medida x dos ângulos deve ser um divisor de 360°.

O azulejista construiu, então, o seguinte quadro.

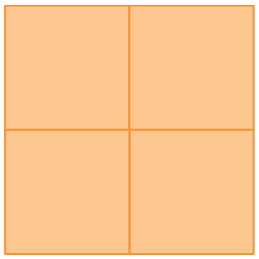
Polígono regular	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Heptágono
Medida do ângulo interno	60°	90°	108°	120°	≃128,6°
Número de peças em torno de um ponto	6 (360° ÷ 60°)	4 (360° ÷ 90°)	3 (buraco) 4 (sobreposição)	3 (320° ÷ 120°)	2 (buraco) 3 (sobreposição)

Com base no quadro, Elis percebeu que recobrem o plano em torno de um vértice comum:

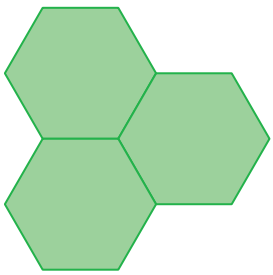
• 6 triângulos equiláteros



• 4 quadrados



• 3 hexágonos regulares



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

4. A técnica do ladrilhamento consiste no preenchimento do plano com polígonos, sem buracos ou sobreposições. Além de ser usada em pisos cerâmicos, onde mais ela pode ser aplicada? Respostas possíveis: peças de marchetaria, forros de madeira, papéis de parede, estampas de tecido, vitrais, malharias e crochês.

5. Com um colega, construam vários polígonos regulares congruentes e polígonos não regulares congruentes em cartolinas ou EVA (etil, vinil, acetato) de cores diversas e recorte-os. Depois, construam um painel, sem buracos ou sobreposição, usando: respostas pessoais

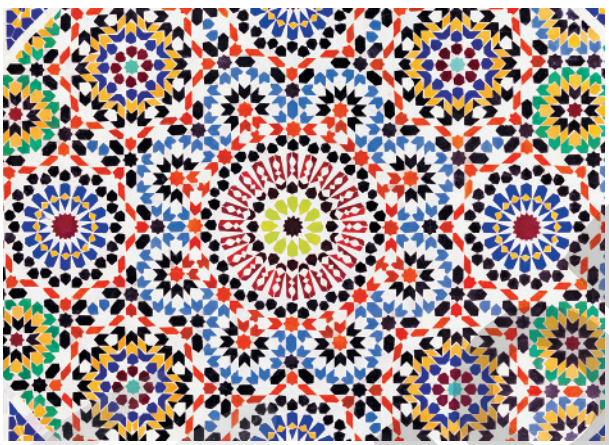
a) apenas polígonos regulares;

b) apenas polígonos não regulares;

c) polígonos não regulares e polígonos regulares.

6. Os azulejos decorados com mosaicos fazem parte da cultura de muitos países, como Portugal, por causa da influência árabe no território português. Em Marrocos e na Espanha, também há azulejos de influência árabe. No Brasil, em decorrência da colonização portuguesa, é possível encontrar azulejos semelhantes aos de Portugal.

Os mosaicos são constituídos de figuras geométricas que se repetem, formando determinado padrão. Veja os dois exemplos a seguir.



NICK FIELDING/ALAMY/GLOW IMAGES

Detalhe de mosaico em Marrocos, 2015.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Detalhe de azulejo português, Alcântara, MA, 2014.

a) Reúna-se com quatro colegas e pesquisem informações sobre azulejos em Portugal, no Brasil e em Marrocos. Redijam um texto relatando a história e as características geométricas de alguns azulejos pesquisados. resposta pessoal

b) Usando tintas, lápis ou papéis coloridos, construam um mosaico de 6×8 azulejos, definindo, antes, os polígonos a serem usados na composição da imagem dos azulejos e a imagem geral do mosaico. resposta pessoal

Reflita

Se, em torno de um vértice comum, justapusermos:

- dois polígonos regulares com mais de 6 ângulos internos congruentes, teremos um buraco ou uma sobreposição? Justifique.
- três polígonos regulares com mais de 6 ângulos internos congruentes, teremos um buraco ou uma sobreposição? Justifique.

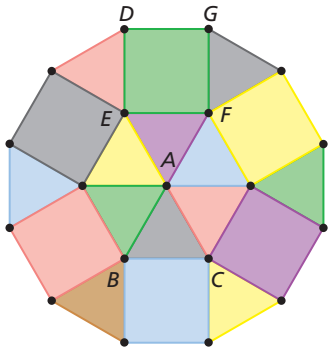
- Buraco, pois cada ângulo interno tem menos que 180°; então, dois desses ângulos, justapostos, têm menos que 360°.
- Sobreposição, pois cada ângulo interno tem mais que 120°; então, três desses ângulos, justapostos, têm mais que 360°.

A atividade **6** trata do tema contemporâneo **diversidade cultural**, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **3**, devido ao reconhecimento e à apreciação do mosaico como arte. Avaliar a conveniência de organizar uma mostra dos painéis de azulejos produzidos e contar um pouco a trajetória do trabalho, destacando os *sites* e os livros utilizados como referência.
Sugestão de *site* de pesquisa: <http://cvc.instituto-camoes.pt/conhecer/exposicoes-virtuais/a-arte-do-azulejo-em-portugal.html> (acesso em: 23 jun. 2020).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CÓPIA

7. O mosaico reproduzido abaixo foi construído com o auxílio de ferramentas de transformação no plano, de um *software* de Geometria dinâmica, a partir de um triângulo equilátero e um quadrado, ambos com lados de mesma medida. Foram realizadas diversas rotações, gerando outros triângulos e quadrados, mas poderíamos utilizar outras transformações ou mesmo uma combinação de transformações para obter o mesmo resultado. Nessa construção, por exemplo, para gerar o triângulo marrom, efetuamos uma rotação do triângulo ABC em torno do ponto B, 210° no sentido anti-horário.



c) Resposta possível: pela rotação em torno do ponto *A*, 180° no sentido anti-horário.

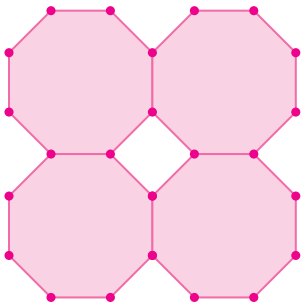
a) É possível gerar o mesmo triângulo marrom do exemplo com outra rotação? Sim, pela rotação em torno do ponto *B*, 150° no sentido horário.

b) Por meio da rotação do quadrado *DEFG*, como podemos obter o quadrado amarelo? Resposta possível: pela rotação em torno do ponto *F*, 150° no sentido horário.

c) Como podemos obter o triângulo lilás a partir do triângulo *ABC*?

d) Com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica e a ferramenta de transformações do plano, construa um mosaico utilizando dois tipos de polígonos regulares diferentes.

d) Resposta possível: octógonos regulares e quadrados. Orientar os alunos a esconder os rótulos na construção do mosaico.



NELSON MATSUDA

Comentar com os alunos que eles podem utilizar as ferramentas de um *software* de Geometria dinâmica para fazer testes com diferentes polígonos, regulares ou não, e verificar a possibilidade de fazer um ladrilhamento.

2 Área de algumas superfícies poligonais planas

Um polígono divide o plano que o contém em duas regiões distintas, uma interna e outra externa. A figura formada pela união do polígono com sua região interna é denominada **superfície poligonal** ou **região poligonal**.

Veremos, a seguir, como calcular a área de algumas superfícies poligonais planas.

2.1 Área de uma superfície quadrada

A porção do plano ocupada por uma superfície poligonal corresponde a um único número A real positivo chamado de **área**, obtido pela comparação da porção ocupada pela superfície poligonal com a porção ocupada por uma unidade de medida de área.

A unidade de medida de área que geralmente consideramos é a área delimitada por um quadrado unitário, isto é, um quadrado de lado 1 u, sendo u uma unidade de comprimento. Dizemos que a área desse quadrado unitário é 1 u^2.

A área de uma superfície quadrada de lado ℓ é dada por:

$$A_{quadrado} = \ell^2$$

Observação

Se uma região poligonal é composta de n regiões poligonais justapostas, então sua área é igual à soma das áreas das n regiões.

Considerando a unidade u^2:

a área da região poligonal abaixo é igual a 5 u^2.

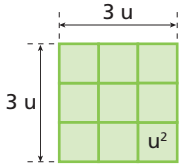
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo

Considere uma superfície quadrada R, com lados medindo 3 u. A área de R pode ser determinada por $\ell^2 = (3)^2 = 9$, resultando em 9 u². Note que a superfície R pode ser decomposta em n^2 superfícies quadradas justapostas com área unitária.



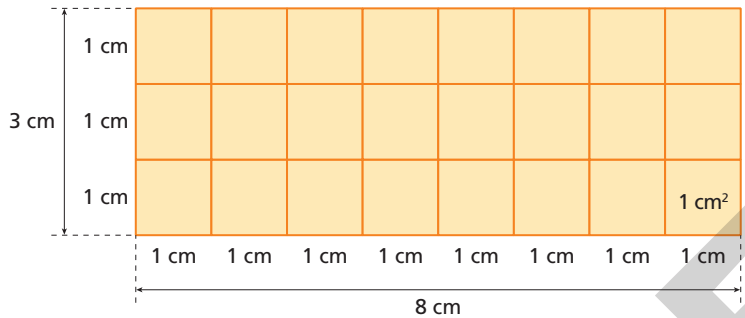
Área de R é 9 u².

Nesse exemplo, consideramos o lado cuja medida é indicada por um número natural. No entanto, a relação é válida para qualquer valor real de ℓ (racional ou irracional).

2.2 Área de uma superfície retangular

Muitas vezes, há situações em que é preciso determinar a área de uma superfície plana, como para estimar o gasto com a pintura das paredes de uma casa, já que a mão de obra a ser cobrada para esse trabalho e o material utilizado são proporcionais à área da obra.

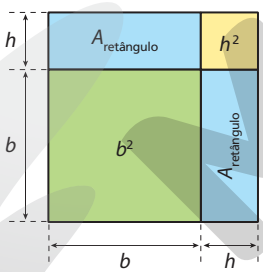
Vamos calcular a área delimitada pelo retângulo abaixo, considerando um quadrado de lado 1 cm como unidade.



Nesse caso, multiplicamos a quantidade de quadrados de lado 1 cm de uma coluna pela quantidade de quadrados de uma linha (3 · 8). Portanto, a área do retângulo é 24 cm².

Agora, vamos calcular a área de um retângulo qualquer de base medindo b e altura medindo h, com b e h não necessariamente naturais.

Para isso, consideremos um quadrado com lados medindo $(b + h)$. A área desse quadrado é $(b + h)^2$, e ele pode ser decomposto em dois retângulos e dois quadrados menores, conforme a figura abaixo.



b^2 é a área do quadrado verde.

h^2 é a área do quadrado amarelo.

$A_{retângulo}$ é a área desconhecida de cada retângulo de base medindo b e altura medindo h.

Assim, a área do quadrado de lados de medida $(b + h)$ pode ser expressa também por: $b^2 + 2 \cdot A_{retângulo} + h^2$

Igualando as expressões que representam a área do quadrado, temos:

$(b + h)^2 = b^2 + 2 \cdot A_{retângulo} + h^2 \Rightarrow b^2 + 2 \cdot b \cdot h + h^2 = b^2 + 2 \cdot A_{retângulo} + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot b \cdot h = 2 \cdot A_{retângulo}$

Portanto, a área do retângulo é dada por:

$$A_{retângulo} = b \cdot h$$

Exemplo

Para determinar a medida da altura do retângulo de área $\pi\sqrt{3}$ cm² e cuja medida da base é π cm, fazemos:

$A_{retângulo} = b \cdot h \Rightarrow \pi\sqrt{3} = \pi \cdot h \Rightarrow h = \sqrt{3}$

Portanto, a medida da altura do retângulo é $\sqrt{3}$ cm.

Observação

Em alguns contextos que envolvem áreas, a superfície poligonal será chamada pelo nome do polígono que a determina. Por exemplo, em vez de dizer "a área da superfície retangular", diremos "a área do retângulo".

Reflita

A fórmula da área do retângulo também pode ser usada para calcular a área de um quadrado? Justifique.

Sim, uma vez que todo quadrado é retângulo, pois tem quatro ângulos retos e lados congruentes dois a dois. Mas vale lembrar que nem todo retângulo é quadrado.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se achar conveniente, relembrar com os alunos o que são polígonos convexos e não convexos: se a reta que passa por qualquer par de vértices consecutivos mantiver todos os demais vértices no mesmo semiplano, então tal polígono será convexo; caso contrário, tem-se um polígono não convexo.

Observação

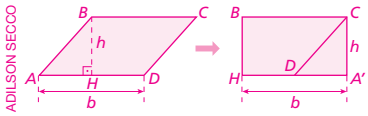
Paralelogramo é um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos.

Reflita

Na decomposição do paralelogramo inicial e na composição do retângulo final, o que garante que o triângulo retângulo se justaponha perfeitamente ao outro lado do paralelogramo?

Explorar com os alunos maneiras de demonstrar esse fato. Uma delas consiste em usar o conceito de paralelismo e a semelhança de triângulos.

ADILSON SECCO



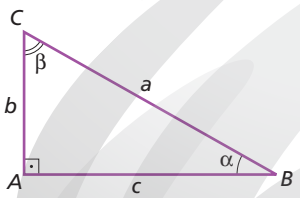
Como $ABCD$ é paralelogramo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; então, os ângulos $B\hat{A}H$ e $C\hat{D}A'$ são congruentes.
Como os ângulos $B\hat{H}A$ e $C\hat{A}'D$ são retos, concluímos que os triângulos ABH e DCA' são semelhantes, e sua razão de semelhança é:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AH}{DA'} = \frac{BH}{CA'} = \frac{h}{h} = 1$$

Como a razão de semelhança é 1, os triângulos ABH e DCA' são congruentes, por isso eles se justapõem.

Observação

Dado um triângulo ABC, retângulo em A, valem as relações a seguir.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \text{ e } \cos\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a} \text{ e } \cos\beta = \frac{b}{a}$$

Reflita

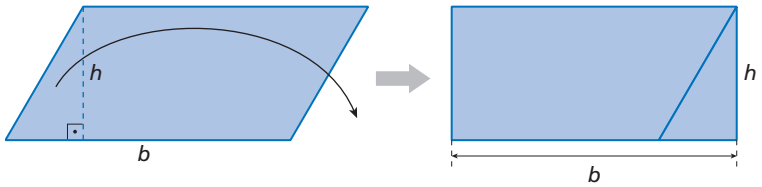
Obtenha a área de um triângulo equilátero apenas em função da medida do lado ℓ.

Orientar os alunos a usar o teorema de Pitágoras para obter a altura em função do lado. Área: $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.3 Área de uma superfície limitada por um paralelogramo não retângulo

É possível compor um retângulo valendo-se de um paralelogramo não retangular.

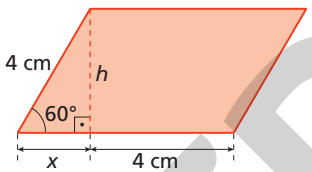


O paralelogramo e o retângulo são **equivalentes**, ou seja, têm a mesma área. Assim:

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

Exemplo

Vamos calcular a área do paralelogramo representado a seguir.



A medida da altura do paralelogramo satisfaz:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular x:

$$4^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + x^2 \Rightarrow 16 = 12 + x^2 \Rightarrow x = 2$$

Assim, a medida da base do paralelogramo é $2 + 4 = 6$.

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

Portanto, a área do paralelogramo é $12\sqrt{3}$ cm^2.

Resposta possível:

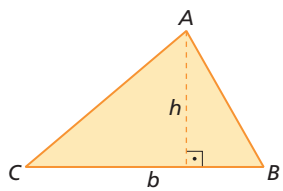
$$\cos 60° = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2$$

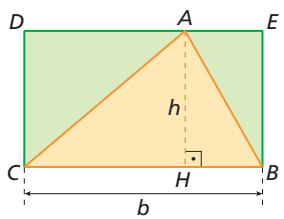
Reflita

O valor de x poderia ser obtido de outra maneira?

2.4 Área de uma superfície triangular

Podemos pensar na área do triângulo como metade da área de um retângulo.





Observe, na figura da direita, que os triângulos ACD e CAH são congruentes (pois os lados correspondentes são congruentes), da mesma maneira que os triângulos ABE e BAH o são. Portanto, a área do triângulo ABC é metade da área do retângulo $BCDE$:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

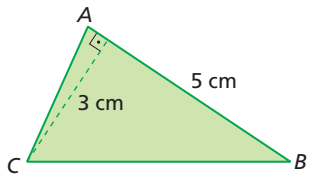
Esse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** da BNCC, pois propõe a aplicação de relações métricas, incluindo noções de congruência e de semelhança para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo

Vamos calcular a área do triângulo ABC a seguir.



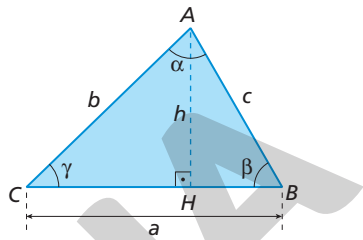
Consideremos como base o lado $\overline{AB}$, que mede 5 cm. A medida da altura relativa a esse lado é 3 cm. Assim:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7{,}5$$

Portanto, a área do triângulo é 7,5 cm^2.

Outros modos de obter a área de uma superfície triangular

Vamos determinar a área de um triângulo em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo formado por eles. Depois, vamos determinar essa área em função das medidas dos três lados. Observe a figura ao lado e acompanhe os cálculos.



A abordagem desenvolvida neste tópico leva o aluno a empregar mais de um método para a obtenção da área de uma superfície e acompanhar a dedução de expressões de cálculo para aplicar em situações concretas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307** da BNCC.

1. A área do triângulo é:

$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ (I)

Como o $\triangle ABH$ é retângulo, temos:

$\text{sen } \beta = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen } \beta$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen } \beta$$

2. O perímetro do triângulo é $2p = a + b + c$; então, o semiperímetro é $p = \frac{a + b + c}{2}$.

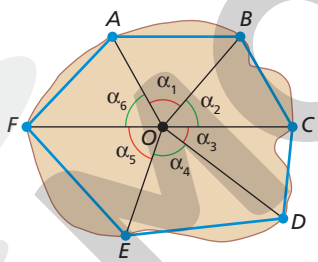
Demonstra-se que a área do $\triangle ABC$ também pode ser dada pela **fórmula de Heron**:

$$A_{\text{triângulo}} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Se julgar oportuno, ao explorar a fórmula de Heron, apresentar aos alunos a demonstração disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/formula-de-herao-deducao-1/>. Acesso: 23 jun. 2020.

Reflita

Uma aplicação da primeira fórmula acima está no cálculo aproximado da área de terrenos irregulares. Observe a figura.



Com um teodolito, obtêm-se, a partir de um ponto O do terreno, as medidas α_1, ..., α_6. Medem-se também $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$. Supondo $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_6$, calcule as áreas dos seis triângulos e adicione-as.

Reflita

$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360° \end{cases}$

$6\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 60°$

$$\text{Área} = \left(\frac{OA \cdot OB}{2} + \frac{OB \cdot OC}{2} + \frac{OC \cdot OD}{2} + \frac{OD \cdot OE}{2} + \frac{OE \cdot OF}{2} + \frac{OF \cdot OA}{2} \right) \cdot \text{sen } 60°$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4} [OA \cdot (OB + OF) + OC \cdot (OB + OD) + OE \cdot (OD + OF)]$$

Esta atividade propõe uma aplicação da Matemática na agrimensura. Seria interessante solicitar aos alunos uma pesquisa sobre esse ramo de atividade. Quanto ao cálculo, convém propor um questionamento sobre a precisão desse procedimento e o que poderia ser feito para obter resultados mais próximos do real. Espera-se que os alunos concluam que a precisão do cálculo torna-se maior com o aumento da quantidade de repartições da superfície com o vértice no ponto O.

Exemplo

Para determinar a área do triângulo retângulo com catetos de medidas 3 cm e 4 cm e hipotenusa 5 cm, podemos empregar três modos diferentes:

- Considerando os lados $a = 3$ cm, $c = 4$ cm e o ângulo $\beta = 90°$:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{sen } 90° = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 6$$

- Aplicando a fórmula de Heron: $A_{\text{triângulo}} = \sqrt{6(6 - 5)(6 - 3)(6 - 4)} = \sqrt{36} = 6$
- Considerando que, em um triângulo retângulo, um cateto é a altura relativa ao outro: $A_{\text{triângulo}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Portanto, a área do triângulo é 6 cm^2.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

O procedimento descrito no tópico "Polígonos regulares", desse capítulo, para o cálculo da área de um terreno no Rio Grande do Sul é um exemplo de estudo pautado pela Etnomatemática.
Com as mãos, rasgue um papel dando-lhe um formato qualquer. A seguir, troque o seu papel com o de um colega para que cada um calcule a área, em cm^2, do papel do outro. Para isso, vocês devem medir, com a régua, os lados de um retângulo, ou de uma composição de retângulos e triângulos, que se aproxime do contorno desse papel, tal qual está orientado na página 15. Depois, destroquem para verificar se o cálculo do colega está correto. resposta pessoal

A atividade proposta no boxe **Reflita** favorece o desenvolvimento da competência geral **2**, na medida em que leva o aluno a exercitar a curiosidade intelectual para, segundo uma abordagem científica, crítica e reflexiva, investigar e testar a hipótese levantada no início desse capítulo, formular e resolver problemas. Também trabalha com a competência geral **6**, pois valoriza a diversidade de saberes e vivências culturais, além de favorecer o aluno no apropriar-se de conhecimentos e experiências para entender as relações próprias do mundo do trabalho coletivo no meio rural.

Etnomatemática com Ubiratan D'Ambrósio

"[...] A Matemática está ligadinha com a História.

Todas as etapas da evolução da espécie humana são etapas em que se reconhecem fatos matemáticos, avanços matemáticos. Então eu faço um estudo disso procurando entender como que, ao longo da história, as pessoas viam o seu fazer matemático. Isso é o que se passou a se chamar Etnomatemática. [...] Vamos ouvir os locais [habitantes da República do Mali], o que eles fazem com o seu dia a dia, como explicam, se viram nas suas necessidades diárias, nas suas profissões. O que o profissional faz que é de natureza matemática? Não quer dizer que ele aplique fórmulas ou regras. Nada disso. De natureza matemática o que é? Ele faz processos de comparação, de classificação, de ordenação, de medição, quantificação [...] Na hora em que está fazendo isso, é o ponto de partida para ideias matemáticas [...]"

Programa *Vida de cientista*. (Transcrição.) Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=A4WRwftHXeo> Acesso em: 23 jun. 2020.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

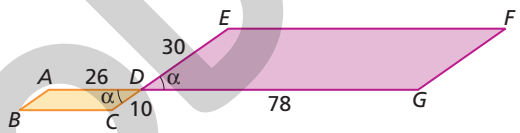
8. O perímetro de um retângulo é igual a 12 m. Determine a área desse retângulo sabendo que seus lados estão na razão 1 : 2. $8\ m^2$

9. Na figura, $CD = 10$, $AD = 26$, $DG = 78$, $DE = 30$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AG} \parallel \overline{EF}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{CE} \parallel \overline{GF}$. Determine a razão entre:

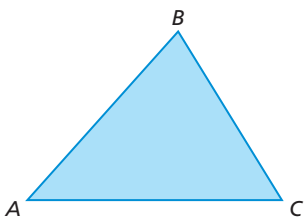
a) as medidas DE e AB. 3

b) os perímetros dos polígonos $DEFG$ e $DCBA$. 3

c) as áreas dos polígonos $DEFG$ e $DCBA$. 9



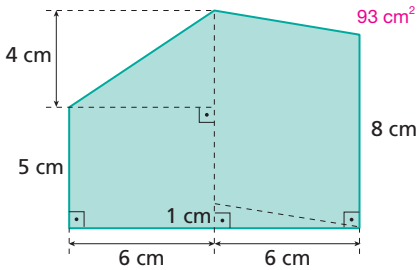
10. Calcule a área do triângulo ABC sabendo que $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm e $BC = 7$ cm. $12\sqrt{5}\ cm^2$



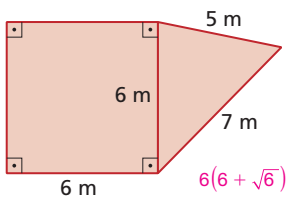
11. Considere um quadrado de área 150 cm^2 e um triângulo equilátero cuja altura tem a mesma medida da diagonal do quadrado. Determine a área desse triângulo. $100\sqrt{3}\ cm^2$

12. Calcule a área das figuras a seguir.

a) $93\ cm^2$



b) $6(6 + \sqrt{6})\ m^2$

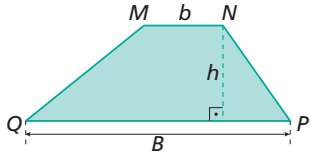


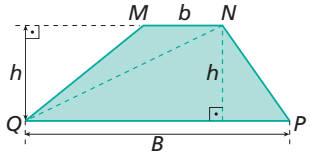
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2.5 Área de uma superfície trapezoidal

Podemos pensar na área do trapézio como a soma da área de dois triângulos.





Observe, na figura da direita, que a área do trapézio *MNPQ* é igual à soma das áreas dos triângulos *NPQ* e *MNQ*. Assim:

$$A_{trapézio} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{trapézio} = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Exemplo

A medida da base maior de um trapézio é o dobro da medida da base menor. Sabendo que a área do trapézio é 3 dm² e que a medida da altura é $\sqrt{2}$ dm, vamos calcular a medida da base menor.

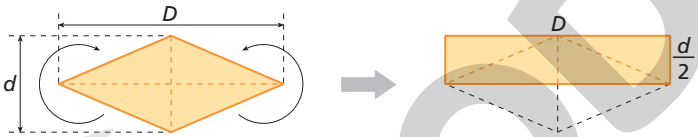
$$A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow 3 = \frac{(2b + b) \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3b = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

Portanto, a medida da base menor é $\sqrt{2}$ dm.

2.6 Área de uma superfície losangular

Como o losango é um paralelogramo, podemos calcular sua área como o produto da medida da base pela medida da altura. Outro modo de calcular essa área é por meio das diagonais do losango.

Observe como é possível compor um retângulo a partir de um losango:

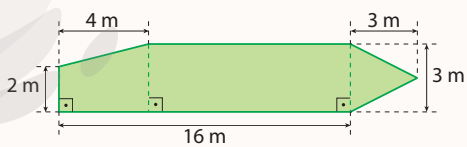


Desse modo, obtemos a área do losango pelo cálculo da área do retângulo que tem como base *D* e como altura $\frac{d}{2}$. Assim:

$$A_{losango} = D \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Exercícios resolvidos

R6. Determinar a área da figura a seguir.



Resolução

Podemos decompor a figura em três: um trapézio, um retângulo e um triângulo. Assim:

$$A = A_{trapézio} + A_{retângulo} + A_{triângulo} = \frac{(3 + 2) \cdot 4}{2} + 12 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 3}{2} = 50{,}5$$

Portanto, a área da figura é 50,5 m².

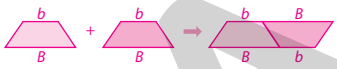
Observação

Trapézio é um quadrilátero convexo que tem apenas um par de lados paralelos.

Explore

Faça uma pesquisa para obter a área de um trapézio por meio de um procedimento diferente desse que foi exposto ao lado.

Resposta possível:



LUIZ RUBIO

$2 \cdot A_{trapézio} = A_{paralelogramo}$

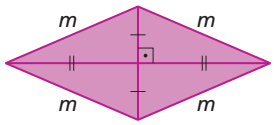
$2 \cdot A_{trapézio} = (B + b) \cdot h$

$A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

A atividade proposta no boxe **Explore** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307** da BNCC, pois leva o aluno a empregar outro método para a obtenção da área de uma superfície.

Observação

Losango é um paralelogramo que tem os quatro lados de mesma medida.
As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e se cruzam nos seus respectivos pontos médios.



Pensamento computacional

Decomposição

Este pilar propõe a fragmentação de um problema em diversas tarefas menores e mais simples de serem resolvidas, de forma que a resolução das tarefas menores viabilize a solução do problema inicial. Do exercício **R6**, a figura inicial é decomposta em três figuras. Dessa maneira, calcula-se a área de cada uma destas figuras e então a área da figura inicial é obtida.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ao se trabalhar diferentes registros de representação matemáticos na solução e na comunicação de resultados, o exercício **R7** e o boxe **Reflita**, a ele associado, favorecem o trabalho com as competências específicas **4** e **5** e com a habilidade **EM13MAT506** da BNCC. No boxe **Reflita**, o aluno, além de interpretar as representações gráficas da variação do perímetro e da área de um polígono regular em função da medida de seus lados, analisando e classificando as funções envolvidas, deve distinguir os casos nos quais o comportamento é proporcional.

Reflita

- Se os dois gráficos do exercício **R7** fossem construídos em um mesmo plano cartesiano, qual seria o ponto comum?
- Em qual dos gráficos do exercício **R7** pode ser observado um comportamento proporcional em relação à medida do lado?

- Uma resolução algébrica seria: $x^2 = 4 \cdot x \Rightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = 4$ $x = 4 \Rightarrow P(4) = 4 \cdot 4 = 16$ ou $A(4) = 4^2 = 16$ Portanto, o ponto comum é (4, 16).
- O perímetro tem variação diretamente proporcional à variação da medida do lado do quadrado, mas a área não.

R7. Construir os gráficos que representam o perímetro e a área de um quadrado em função da medida do lado.

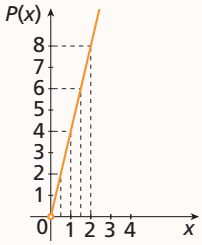
▸ Resolução

Vamos considerar todos os quadrados com lados de medida x, perímetro P e área A.

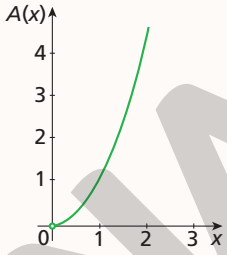
Sabemos que P e A são funções de x, com x real e positivo, dadas, respectivamente, por $P(x) = 4 \cdot x$ e $A(x) = x^2$.

Atribuindo valores a x, calculando os respectivos valores de $P(x)$ e de $A(x)$ e representando no plano cartesiano o par $(x, P(x))$ e o par $(x, A(x))$, temos:

x	$P(x)$
0,5	2
1	4
1,5	6
2	8



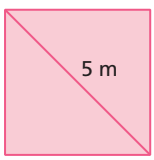
x	$A(x)$
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4



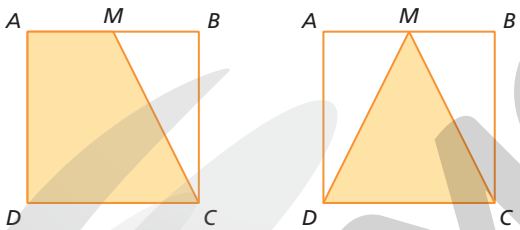
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. Calcule a área do quadrado representado a seguir. 12,5 m²

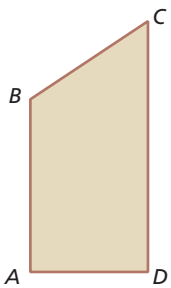


14. O quadrado $ABCD$ tem 10 m de lado. Em cada caso, foi pintada uma superfície poligonal.



Sabendo que $AM = MB$, calcule a área de cada figura pintada. 75 m² e 50 m²

15. (UFJF-MG) Um terreno tem a forma de um trapézio $ABCD$, com ângulos retos nos vértices A e D, como mostra a figura. Sabe-se que $AB = 31$ m, $AD = 20$ m e $DC = 45$ m.

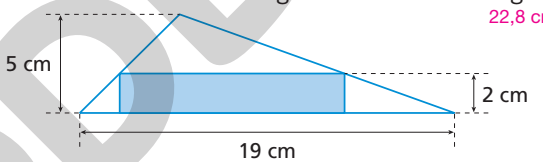


Deseja-se construir uma cerca, paralela ao lado $\overline{AD}$, dividindo esse terreno em dois terrenos de mesma área. A distância do vértice D a essa cerca deve ser, em metro, igual a: alternativa b

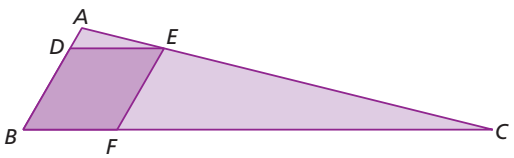
a) 12 **b)** 19 **c)** 20 **d)** 22 **e)** 26

16. Para confeccionar uma bandeira do Brasil, um artista plástico colou, sobre um tecido retangular verde de medidas 2 m × 1,4 m, um tecido amarelo com formato de losango. Cada um dos vértices do losango dista 17 cm do lado do retângulo que está mais próximo. Qual é a área do losango, em centímetro quadrado? 8.798 cm²

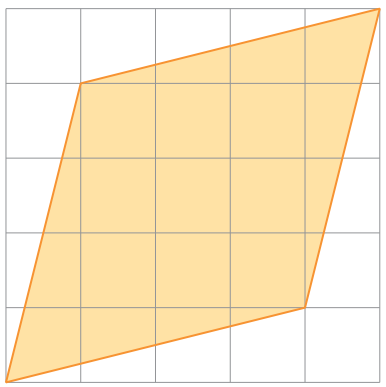
17. Obtenha a área do retângulo inscrito no triângulo. 22,8 cm²



18. Na figura, $DEFB$ é um losango inscrito no triângulo ABC, em que $AB = 5$ m, $BC = 20$ m e o ângulo ABC mede 60°. Determine a medida do lado e a área desse losango. 4 m; $8\sqrt{3}$ m²



19. Considere uma malha composta de quadrados de lados medindo 1 cm e determine a área do losango. 15 cm²



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

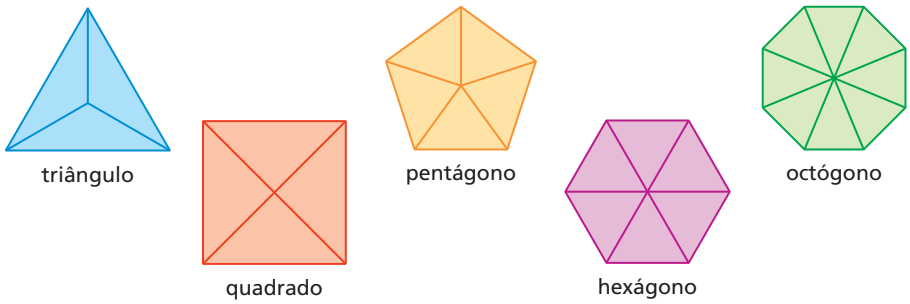
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ao trabalhar o exercício **16**, avaliar a conveniência de pedir aos alunos que pesquisem as especificações legais da construção da bandeira brasileira. No exercício **19**, incentivar os alunos a buscar mais de uma forma de resolução. Além das resoluções oferecidas no Guia do professor, o aluno pode, por exemplo, pensar em subtrair da área do quadrado maior (25) a área de 2 trapézios (de bases 1 e 5 e altura 1) e a área de 2 triângulos retângulos de catetos 1 e 4.

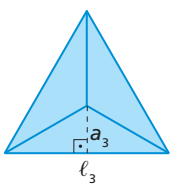
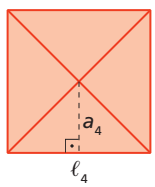
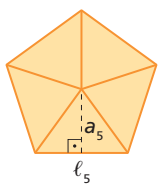
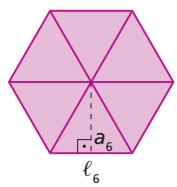
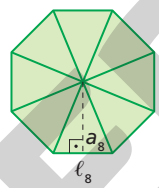
2.7 Área de superfícies poligonais regulares

Sempre é possível decompor um polígono regular de n lados em n triângulos isósceles congruentes entre si.



Cada um desses triângulos tem pelo menos dois lados congruentes, de medida igual ao raio da circunferência circunscrita ao polígono.

A base e a altura de cada um desses triângulos são, respectivamente, o lado e o apótema do polígono regular. Como a área de cada um desses polígonos regulares é igual à soma das áreas dos triângulos que os compõem, podemos chegar às seguintes igualdades:

				
$A_3 = 3 \cdot \frac{\ell_3 \cdot a_3}{2}$	$A_4 = 4 \cdot \frac{\ell_4 \cdot a_4}{2}$	$A_5 = 5 \cdot \frac{\ell_5 \cdot a_5}{2}$	$A_6 = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2}$	$A_8 = 8 \cdot \frac{\ell_8 \cdot a_8}{2}$

Dessa maneira, concluímos que, se um polígono regular tem n lados de medida ℓ_n e apótema medindo a_n, sua área pode ser dada por:

$$A_n = n \cdot \frac{\ell_n \cdot a_n}{2} \Rightarrow A_n = \frac{n \cdot \ell_n}{2} \cdot a_n \Rightarrow \boxed{A_n = p \cdot a_n}$$

Observação

A variável p representa o semiperímetro do polígono.

Exercícios resolvidos

R8. Determinar a área de um hexágono regular sabendo que $a_6 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

▸ **Resolução**

Como $a_6 = \frac{\ell_6 \sqrt{3}}{2}$, então: $\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell_6 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_6 = 5$

Sabendo que $p = \frac{6 \cdot \ell_6}{2}$, então: $p = \frac{6 \cdot 5}{2} \Rightarrow p = 15$

Substituindo o valor do semiperímetro encontrado na expressão $A_6 = p \cdot a_6$, obtemos:

$A_6 = 15 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $A_6 = \frac{75\sqrt{3}}{2}$ cm²

R9. A área de um triângulo equilátero é $\frac{\sqrt{3}}{16}$ m², e seu perímetro é $\frac{3}{2}$ m. Calcular o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

▸ **Resolução**

Se o perímetro do triângulo é $\frac{3}{2}$ m, seu semiperímetro é $p = \frac{3}{4}$ m.

Sendo $A_3 = p \cdot a_3$, temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3}{4} \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 16} \Rightarrow a_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Como a medida do apótema de um triângulo equilátero é metade do raio da circunferência circunscrita a ele, temos:

$$a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Portanto, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo é $\frac{\sqrt{3}}{6}$ m.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

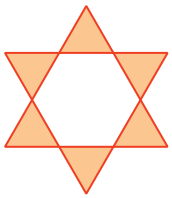
24. Incentivar os alunos a visualizar previamente decomposições das figuras em triângulos isósceles e descartar pelo menos duas alternativas mais evidentes (losango e octógono).

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

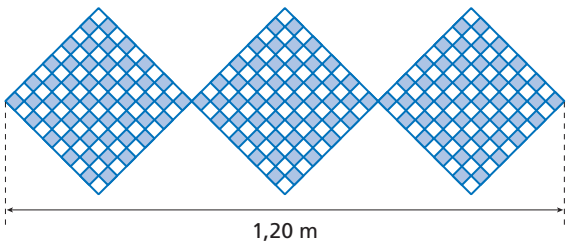
20. Qual é a área de um triângulo equilátero cujo apótema mede $\sqrt{3}$ cm? $9\sqrt{3}$ cm²

21. Determine a área da região laranja da estrela representada ao lado sabendo que os triângulos e o hexágono que a formam são regulares e que o apótema do hexágono mede 6 cm. $72\sqrt{3}$ cm²

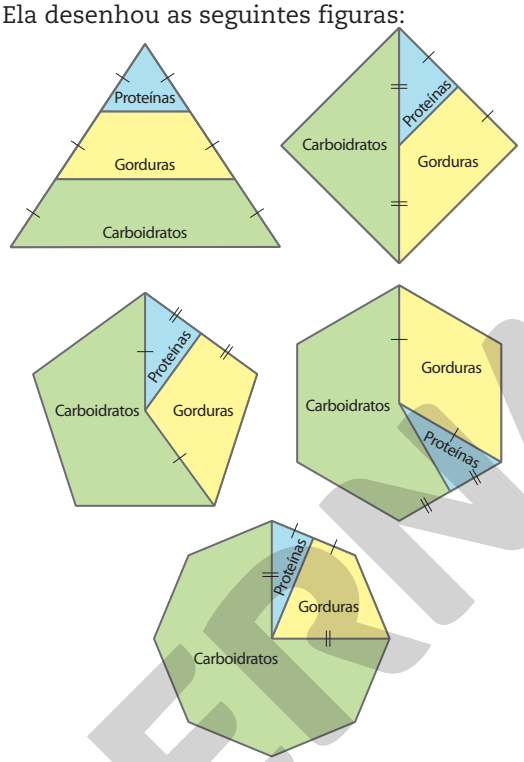


22. A razão entre a medida do apótema de um hexágono regular e a medida do apótema de um quadrado é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Determine a razão entre as áreas do hexágono e do quadrado. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

23. Um artesão montou um mosaico de 1,20 m de largura, composto de três placas quadradas idênticas. Sabendo que ele cobra R$ 500,00 o metro quadrado de mão de obra, quanto ele recebeu por esse trabalho? R$ 120,00



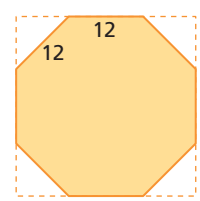
24. (Enem) Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:



Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o: alternativa c

a) triângulo.
b) losango.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) octógono.

25. Cortando os cantos de um quadrado, como mostra a figura, obtém-se um octógono regular de lados que medem 12 cm. Qual é a medida do apótema desse octógono? $6(1 + \sqrt{2})$ cm

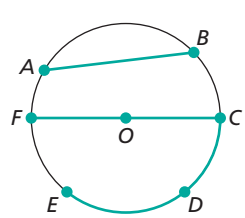


3 Círculo e circunferência

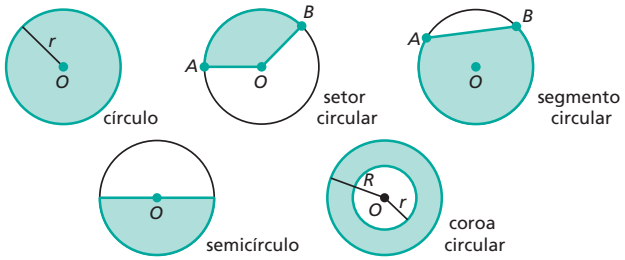
O **círculo** é formado pela união de uma circunferência com sua região interna.

Circunferência e seus elementos

- O é o centro da circunferência.
- $\overline{AB}$ é uma corda.
- $\overline{CF}$ é um diâmetro.
- $\overline{OC}$ é um raio.
- $\overset{\frown}{CE}$ é um arco (há dois arcos $\overset{\frown}{CE}$: um que passa por D, outro que passa por A).



Círculo e suas partes



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3.1 Comprimento da circunferência

Você conhece algum método para determinar o valor do número irracional π?

Provavelmente, os primeiros valores para π foram obtidos por meio de medidas. Por exemplo, no papiro de Rhind (documento egípcio escrito por volta de 1650 a.C.), a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro da circunferência apresenta o valor 3,1604, que seria uma aproximação do número π.

Mais tarde, o matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.) apresentou um cálculo teórico que resultou na aproximação $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Para isso, ele considerou uma circunferência de raio de medida 1. Então, percebeu que o comprimento da circunferência estava entre os perímetros de polígonos regulares, com *n* lados cada um, inscritos em uma circunferência e circunscritos a ela.

Hoje, com o emprego da tecnologia, é possível determinar uma aproximação tão boa quanto quisermos para o π.

Sabe-se que a razão entre o comprimento *C* de uma circunferência de raio *r* e a medida do seu diâmetro é constante, ou seja, a razão é sempre a mesma, qualquer que seja a circunferência. Essa constante é denotada por π. Então, o comprimento da circunferência pode ser determinado por:

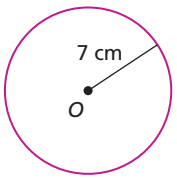
$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2\pi r$$

BIBLIOTECA NACIONAL DA FRANÇA, PARIS

Arquimedes em gravura do século XVII.

Exemplos

a) Vamos calcular o comprimento da circunferência a seguir.



$C = 2\pi r$

$C = 2 \cdot \pi \cdot 7$

$C = 14\pi$

Portanto, o comprimento dessa circunferência é 14π cm.

b) Vamos determinar o raio da circunferência cujo comprimento é $\pi\sqrt{5}$ m.

$C = 2\pi r \Rightarrow \pi\sqrt{5} = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Portanto, o raio da circunferência é $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m.

Reflita

Se multiplicarmos o raio de uma circunferência por *k*, por quanto será multiplicado seu comprimento?

$C_1 = 2\pi r$
$C_2 = 2\pi(r \cdot k) = C_1 \cdot k$
Logo, o comprimento também será multiplicado por *k*.

Reflita

Se, em uma circunferência de comprimento *C* e raio *r*, aumentarmos em uma unidade:

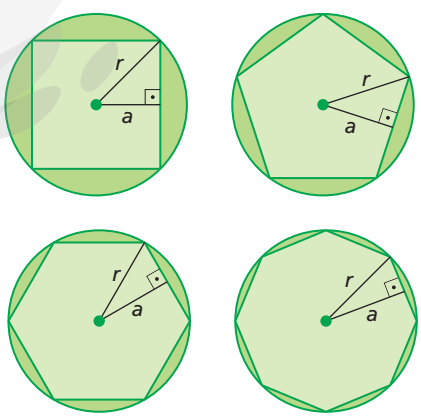
- seu raio, em quanto aumentará seu comprimento?
- seu comprimento, em quanto aumentará seu raio?

$C = 2\pi r$

- Aumentando em 1 unidade seu raio:
  $C_2 = 2\pi(r + 1) = 2\pi r + 2\pi$
  $C_2 = C + 2\pi$
  Logo, o comprimento aumentará em 2π unidades.
- Aumentando em 1 unidade seu comprimento:
  $C + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow 2\pi r + 1 = 2\pi r_2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \frac{2\pi r}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = r_2 \Rightarrow r_2 = r + \frac{1}{2\pi}$
  Portanto, seu raio aumentará em $\frac{1}{2\pi}$ unidade.

3.2 Área do círculo

Observe cada circunferência a seguir, na qual foi inscrito um polígono regular.



Se julgar oportuno, pedir aos alunos que imaginem uma corda circundando a Terra, sem folga, em torno da linha do Equador. Depois, essa corda é retirada e seu comprimento de cerca de 40.000 km é aumentado em apenas 1 km. A seguir, ela é recolocada em torno da Terra, formando uma circunferência coplanar e concêntrica com a da posição anterior. Questionar: a nova corda passaria por cima de um monumento de 150 m de altura?

Os alunos devem obter $\frac{1}{2\pi}$ km, isto é, cerca de 0,16 km ou 160 m para a altura que a corda aumentada ficou do chão. Logo, a corda passaria por cima de um monumento de 150 m de altura.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

Como podemos expressar a área de um círculo de raio r em função da medida d do diâmetro da circunferência desse círculo?

$A_{círculo} = \pi \cdot r^2$

Como $r = \frac{d}{2}$, temos:

$A_{círculo} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow A_{círculo} = \frac{\pi d^2}{4}$

Comentar com os alunos que é importante que todas as circunferências tenham a mesma medida de raio, mesmo quando forem ampliadas ou reduzidas. A maioria dos *softwares* de Geometria dinâmica possui essa funcionalidade.
Explicar aos alunos que, a partir da construção do quadrado, pode-se, utilizando a bissetriz, construir o octógono regular, o hexadecágono regular (polígono com 16 lados), e assim sucessivamente.
Pedir aos alunos que observem o que acontece com a área de cada polígono conforme aumentamos o número de lados. Eles devem perceber que as medidas das áreas dos polígonos vão se aproximando da medida da área do círculo.
Comentar que é possível demonstrar esse fato, porém a observação feita por meio das construções realizadas com o *software* de Geometria dinâmica não constitui prova, embora possa ser utilizada como ferramenta facilitadora na realização de testes e conjecturas.

Note que, quanto maior é o número de lados do polígono inscrito, mais a área dele se aproxima da área do círculo, além de a medida do apótema a se aproximar cada vez mais da medida do raio r do círculo.

Já vimos que a área de um polígono regular é dada pelo produto de seu semiperímetro pela medida do apótema ($A = p \cdot a$). Podemos estender essa ideia para a área do círculo, ao considerar que, quando o número de lados do polígono tende a infinito, o apótema do polígono tende a r.

Assim: $A_{círculo} = \frac{2\pi r}{2} \cdot r$

Portanto, a área do círculo é dada por: $A_{círculo} = \pi r^2$

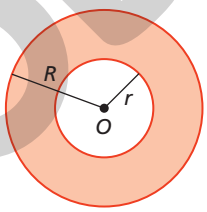
Explore

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, realize os passos indicados a seguir.

1. Construa cinco circunferências com raios de mesma medida.
2. Em cada circunferência, construa um dos polígonos regulares inscritos com 3, 4, 6, 8 e 16 lados.
3. Calcule a área de cada polígono construído e compare-as. O que acontece com essas áreas à medida que o número de lados do polígono aumenta?
4. Construa um círculo com o mesmo raio e calcule sua área.
5. Se possível, construa um polígono regular com 32 lados, inscrito em uma circunferência de mesmo raio das circunferências anteriores. Calcule sua área e compare essa nova medida com as medidas dos outros polígonos e com a área do círculo.
6. Se construíssemos um polígono regular com 64 lados, o que aconteceria com a medida de sua área?

Área da coroa circular

Observe a coroa circular representada abaixo.



A área da coroa circular é a diferença entre a área do círculo de maior raio e a área do círculo de menor raio:

$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)$

Área do setor circular

A área do setor circular é diretamente proporcional à medida α do ângulo central que o determina, ou seja, quando sua medida é duplicada ou triplicada, a área correspondente também duplica ou triplica.

Reflita

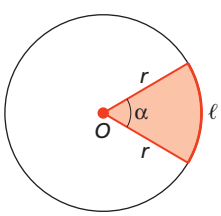
Como podemos expressar a área de um setor circular de raio r em função do comprimento ℓ do arco determinado pelo mesmo ângulo central que determina o setor circular?

$2\pi r$ ——— $360°$
ℓ ——— α

$\alpha = \frac{360° \cdot \ell}{2\pi r}$

$A_{setor} = \frac{\alpha \pi r^2}{360°} = \frac{\frac{360° \cdot \ell}{2\pi r} \cdot \pi r^2}{360°}$

$A_{setor} = \frac{\ell r}{2}$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sabendo disso e considerando que o círculo de raio r é um setor circular determinado por um ângulo de 360°, podemos escrever, para α em grau:

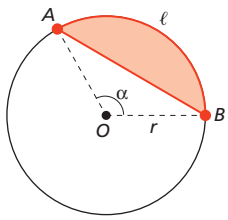
$$\frac{A_{setor}}{A_{círculo}} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{A_{setor}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\alpha \pi r^2}{360°}$$

Para α em radiano, temos:

$$\frac{A_{setor}}{A_{círculo}} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \frac{A_{setor}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\alpha r^2}{2}$$

Área do segmento circular

Observe o segmento circular representado abaixo, em que $\alpha < 180°$.

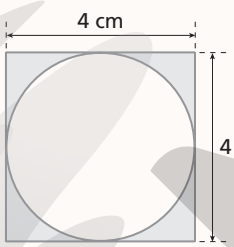


Note que a área do segmento circular é a diferença entre a área do setor circular determinado pelo ângulo α e a área do triângulo AOB:

$$A_{segmento} = A_{setor} - A_{triângulo}$$

Exercícios resolvidos

R10. Um serralheiro recortou um disco circular de uma chapa quadrada de metal com 4 cm de lado, conforme mostra a figura a seguir. Determinar a área da chapa que sobrou. (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)



▸ **Resolução**

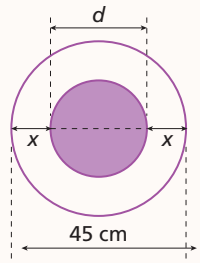
Vamos chamar, respectivamente, de A_1, A_2 e A_3 a área de chapa que sobrou, a área do quadrado e a área do círculo.

Sabendo que o raio do círculo é metade da medida do lado do quadrado ($r = 2$ cm) e que $A_1 = A_2 - A_3$, temos:

$A_1 = 4^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_1 = 16 - 3{,}14 \cdot 2^2 \Rightarrow A_1 = 3{,}44$

Logo, a área da chapa que sobrou é 3,44 cm^2.

R11. Segundo as regras do jogo de basquete, a bola deve ter circunferência máxima entre 74,9 cm e 78 cm de comprimento. Se uma bola de basquete, com circunferência máxima de 78 cm, for centralizada no aro de uma cesta com 45 cm de diâmetro, de quanto será a folga x entre a bola e o aro em toda a volta? (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)



▸ **Resolução**

Sendo d a medida do diâmetro da circunferência máxima da bola, temos:

$C = d \cdot \pi \Rightarrow 78 = d \cdot 3{,}14 \Rightarrow d = \frac{78}{3{,}14} \Rightarrow$

$\Rightarrow d \simeq 24{,}84$

Observando o esquema da vista superior da bola e do aro, temos:

$2x = 45 - d$

$2x \simeq 45 - 24{,}84$

$x \simeq \frac{20{,}16}{2}$

$x \simeq 10{,}08$

Portanto, a folga entre a bola e o aro é de aproximadamente 10,08 cm.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

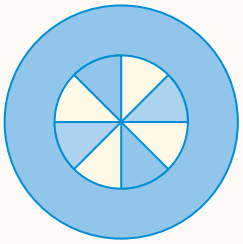
Como seria a resolução do exercício **R12** aplicando apenas a fórmula da área de um círculo?

Observando que a soma das áreas dos 4 setores circulares é igual à área do semicírculo menor, a área da região pintada de azul é a diferença das áreas do círculo maior e do semicírculo menor.

$\pi \cdot 7^2 - \pi \cdot \frac{4^2}{2} = 41\pi = 128{,}74$

A área da região pintada de azul é 128,74 cm².

R12. A figura abaixo é formada por quatro setores circulares de 45° e por uma coroa circular. As circunferências que limitam a coroa têm raios iguais a 4 cm e 7 cm. Determinar a área da região pintada de azul. (*Adotar*: $\pi = 3{,}14$)



▸ **Resolução**

Área de um setor circular: $\frac{45° \cdot \pi \cdot 4^2}{360°} = \frac{3{,}14 \cdot 16}{8} = 6{,}28$

Área dos quatro setores: $4 \cdot 6{,}28 = 25{,}12$

Área da coroa circular: $\pi \cdot (7^2 - 4^2) = 3{,}14 \cdot (49 - 16) = 103{,}62$

Portanto, a área da região pintada de azul é:

$25{,}12\ \text{cm}^2 + 103{,}62\ \text{cm}^2 = 128{,}74\ \text{cm}^2$

27.

$A_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{\pi \cdot a^2}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{8A_1}{\pi}$

Analogamente: $b^2 = \frac{8A_2}{\pi}$ e $c^2 = \frac{8A_3}{\pi}$

Do triângulo retângulo, temos:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

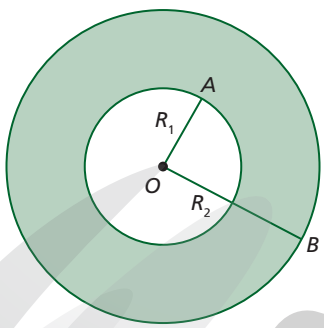
$\Rightarrow \frac{\cancel{8}A_3}{\cancel{\pi}} = \frac{\cancel{8}A_1}{\cancel{\pi}} + \frac{\cancel{8}A_2}{\cancel{\pi}} \Rightarrow A_3 = A_1 + A_2$

Assim: $A_1 + A_2 = A_3$

Exercícios propostos

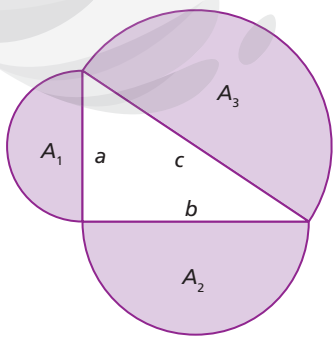
Registre as respostas em seu caderno.

26. (FCC-SP) Se, na figura abaixo, R_1 mede 5 cm e a área da coroa circular é 75π cm², então R_2, em centímetro, é igual a: alternativa e



a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

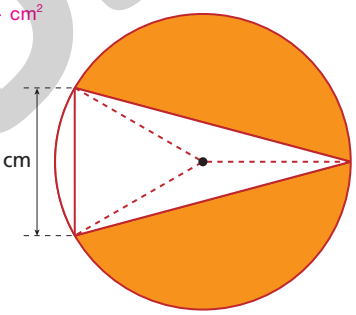
27. Os catetos de um triângulo retângulo medem *a* e *b*, e a hipotenusa, *c*. Sobre esses lados foram construídos os semicírculos de áreas A_1, A_2 e A_3.



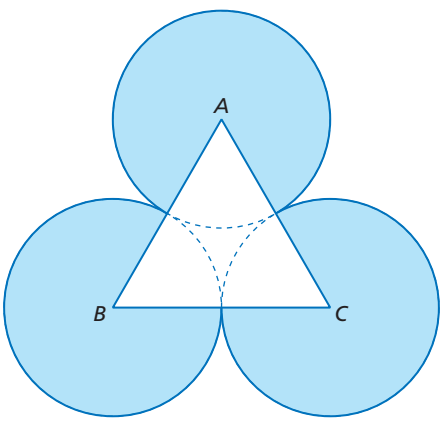
Mostre que $A_1 + A_2 = A_3$.

28. O triângulo inscrito na circunferência da figura abaixo de raio 1 cm é isósceles e sua base mede 1 cm. Calcule a área da região pintada de laranja.

$\frac{5\pi - 3}{6}$ cm²



29. O triângulo *ABC* representado abaixo é equilátero e tem área $2\sqrt{3}$ cm². As circunferências têm centro em *A*, *B* e *C*.



Calcule a área da região pintada de azul. 5π cm²

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

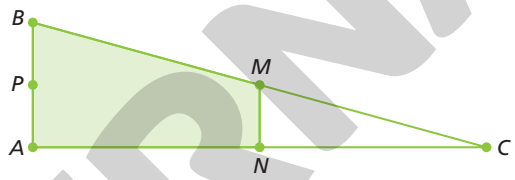
1. Calcule o raio da circunferência inscrita e o raio da circunferência circunscrita a um quadrado com 10 cm de lado. 5 cm e $5\sqrt{2}$ cm

2. Qual é o raio de uma circunferência circunscrita ao hexágono regular de área $6\sqrt{3}$ cm²? 2 cm

3. Calcule a área de um triângulo cujos lados medem 5 cm, 6 cm e 7 cm. Depois, determine a medida da altura relativa ao lado de 6 cm desse triângulo. $6\sqrt{6}$ cm²; $2\sqrt{6}$ cm

4. O piso de uma cozinha retangular de 3 m de comprimento por 2 m de largura deverá ser revestido por cerâmicas quadradas de 20 cm de lado. Quantas peças de cerâmica serão necessárias para cobrir todo o piso? 150 peças

5. (Enem) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.

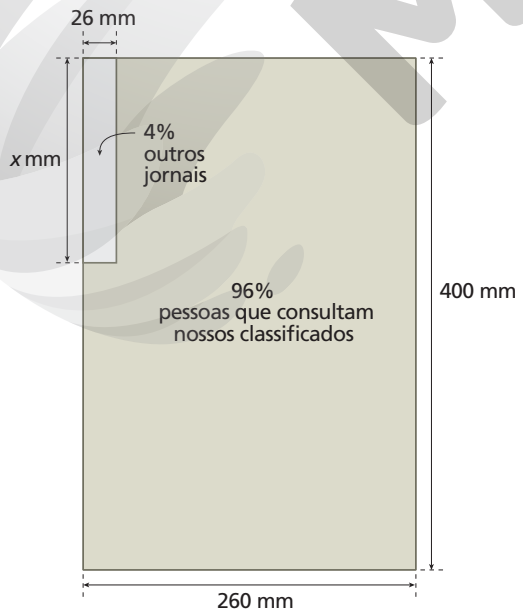


A região demarcada pelas estacas *A*, *B*, *M* e *N* deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde: alternativa e

a) à mesma área do triângulo *AMC*.
b) à mesma área do triângulo *BNC*.
c) à metade da área formada pelo triângulo *ABC*.
d) ao dobro da área do triângulo *MNC*.
e) ao triplo da área do triângulo *MNC*.

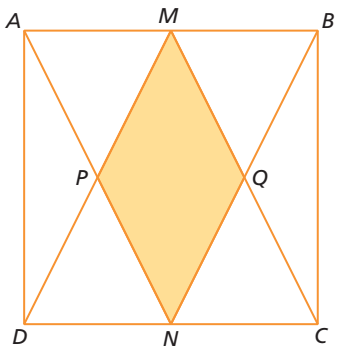
6. (Enem) O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados:



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4% deve ser de aproximadamente: alternativa d

a) 1 mm
b) 10 mm
c) 17 mm
d) 160 mm
e) 167 mm

7. O quadrado *ABCD* tem área 64 cm². Se *M* e *N* são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, determine a área do polígono *MQNP*. 16 cm²



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

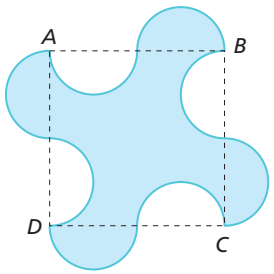
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

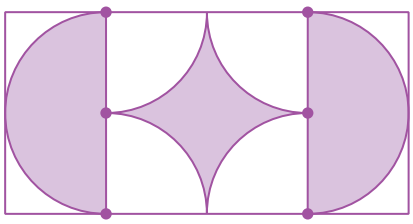
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

8. Calcule a área da figura sabendo que *ABCD* é um quadrado de diagonal $15\sqrt{2}$ cm e que a figura é limitada por semicircunferências congruentes. 225 cm²



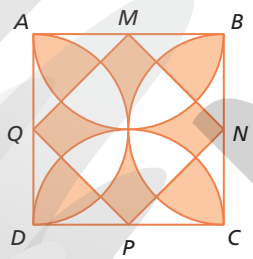
9. (Ibmec) Considere que os ângulos de todos os cantos da figura abaixo são retos e que todos os arcos são arcos de circunferências de raio 2, com centros sobre os pontos em destaque.



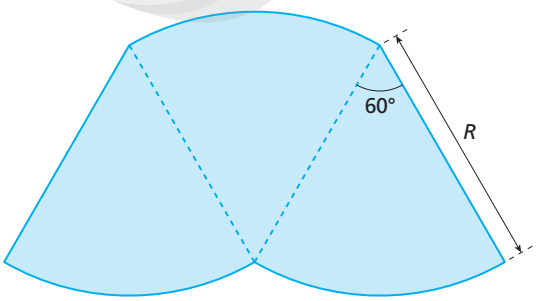
A área da região sombreada é igual a: alternativa c

a) 4 **c)** 16 **e)** 64
b) 4π **d)** 16π

10. Calcule a área da região alaranjada, sendo *ABCD* e *MNPQ* quadrados e *M*, *N*, *P* e *Q* centro dos arcos de circunferência de raio 2 cm. 8 cm²



11. (Enem) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio *R* deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m × 24 m.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

Considere 3,0 como aproximação para π.

O maior valor possível para *R*, em metros, deverá ser:

a) 16 **c)** 29 **e)** 49 alternativa b
b) 28 **d)** 31

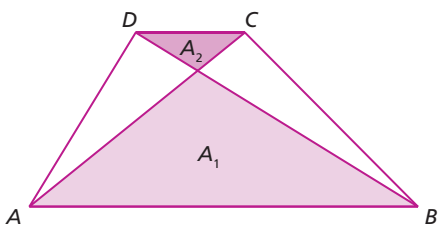
12. Em certa pizzaria, uma *pizza* cujo diâmetro mede 40 cm custa R$ 40,00. Qual deve ser o preço de uma *pizza* cujo diâmetro mede 35 cm, se o preço da *pizza* é sempre proporcional à sua área? ≃ R$ 30,63

13. Uma bola de futebol com medida oficial, como a ilustrada na página 15 desse capítulo, é composta de 20 hexágonos e 12 pentágonos, todos regulares. Sabendo que o apótema do hexágono mede aproximadamente 3,8 centímetros, e o do pentágono, 4,2 centímetros, com o auxílio de uma calculadora, calcule quanto couro é necessário para confeccionar uma bola de futebol desconsiderando a área utilizada para a costura.

(Observe que, nesse caso, os lados dos polígonos são iguais.) 1.554,06 cm²

Aprofundamento

14. Seja o trapézio *ABCD*, cujas bases medem 8 cm e 5 cm, respectivamente, e a altura mede 4 cm. Determine a diferença entre as áreas A_1 e A_2. 6 cm²



15. Um quadrado tem área igual a 4 cm². Formando-se infinitos quadrados que têm como vértices os pontos médios dos lados do quadrado anterior, qual será a área do quinto quadrado assim formado? 0,25 cm²

Desafio

16. (UFC-CE) A razão $\frac{\text{área } H}{\text{área } K}$, em que *H* é um hexágono regular *ABCDEF* (com vértices nomeados no sentido horário) e *K* é o hexágono obtido pela intersecção dos triângulos *ACE* e *BDF*, é igual a: alternativa c

a) 2 **c)** 3 **e)** 4
b) 2,5 **d)** 3,5

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

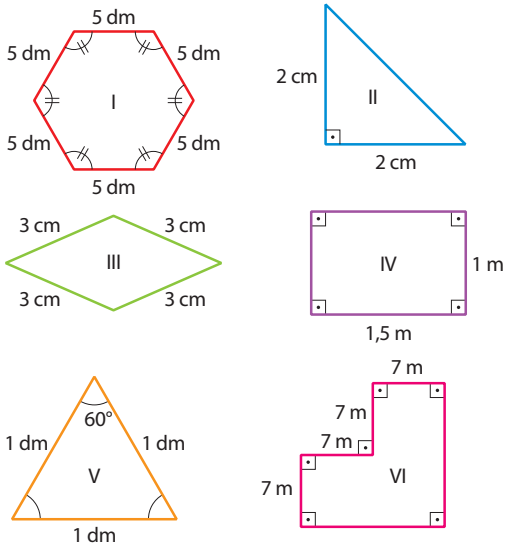
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Observe os polígonos reproduzidos a seguir.



São regulares os polígonos: alternativa d

a) III e V **b)** IV e VI **c)** I e III **d)** I e V

2. Em um [redacted] inscrito em uma circunferência, a medida do lado é dada pela relação $\ell = 2a\sqrt{3}$, em que a é a medida do apótema. alternativa b

a) quadrado **c)** hexágono regular
b) triângulo equilátero **d)** triângulo retângulo

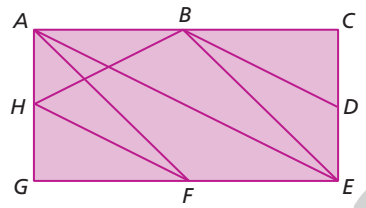
3. A área de um paralelogramo é igual à área de um [redacted] de mesma base e altura. alternativa d

a) polígono qualquer **c)** trapézio
b) triângulo **d)** retângulo

4. Um quadrado e um hexágono regular têm o mesmo perímetro e medidas dos respectivos apótemas iguais a a_4 e a_6; então, a razão entre as áreas do hexágono e do quadrado, nessa ordem, é: alternativa a

a) $\frac{a_6}{a_4}$ **b)** a_6 **c)** $\frac{a_4}{a_6}$ **d)** $a_4 \cdot a_6$

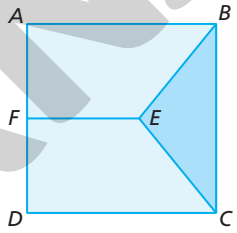
5. Sabendo que $ACEG$ é um retângulo e B, D, F e H são pontos médios dos lados $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EG}$ e $\overline{GA}$, respectivamente, podemos afirmar que as áreas dos triângulos [redacted] **não** são iguais. alternativa c



a) BDE e BAH **c)** AGF e BDE
b) ABE e AGF **d)** GHF e DBC

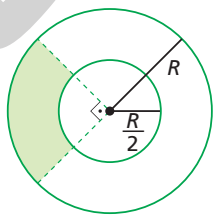
6. Considere um quadrado $ABCD$ com lado 10 cm.

A área de cada trapézio ($ABEF$ e $DCEF$) é igual ao dobro da área de $\overline{BCE}$. Qual é a medida de $\overline{FE}$?



a) 3 cm **c)** 5 cm
b) 4 cm **d)** 6 cm
alternativa d

7. Observe a figura.



A área pintada de verde corresponde a [redacted] da área do círculo menor, de raio R. alternativa a

a) $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{16}$
b) $\frac{3}{8}$ **d)** $\frac{1}{8}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão						
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7
Identificar superfícies poligonais, circunferências e círculos.	X				X	X	X
Estabelecer relações métricas entre os elementos dos polígonos regulares e o raio da circunferência circunscrita a eles.		X		X			
Resolver situações-problema que envolvam o cálculo de áreas de superfícies poligonais e do círculo.			X	X	X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	14 a 16	17 a 21	24 a 26	24 a 32	26 a 28	26 a 32	32 a 36

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

© KOBRA, EDUARDO/AUTVIS BRASIL 2020/LUIZ SOUZA/NURPHOTO/GETTY IMAGES

Kobra, Eduardo, *Etnias*. 2016, Mural no Rio de Janeiro, 15,5 m X 170 m

Murais

Murais são pinturas feitas na superfície de uma parede ou muro e que muitas vezes podem servir a exposições permanentes em espaços públicos. Historicamente, remontam aos afrescos gregos e romanos – o teto da Capela Sistina no Vaticano, por exemplo. Esse tipo de pintura ressurgiu como arte socialmente engajada à época da Revolução mexicana no início do século XX. No Brasil, em meados do século XX, brilharam os murais de Candido Portinari (1903-1962), entre outros artistas. Hoje, um dos grandes nomes nessa arte é o do brasileiro Eduardo Kobra (1975-), com seus murais gigantescos.

Cor, estilo e dinamismo cultural. Três adjetivos que descrevem a cidade do Rio de Janeiro e o mural com mais de 2.646,34 metros quadrados, que agora possui* um recorde mundial do *Guinness World Records*.

O artista Eduardo Kobra criou um enorme desenho com muita cor e história para conseguir o recorde mundial do Maior mural de tinta *spray* feito por uma equipe.

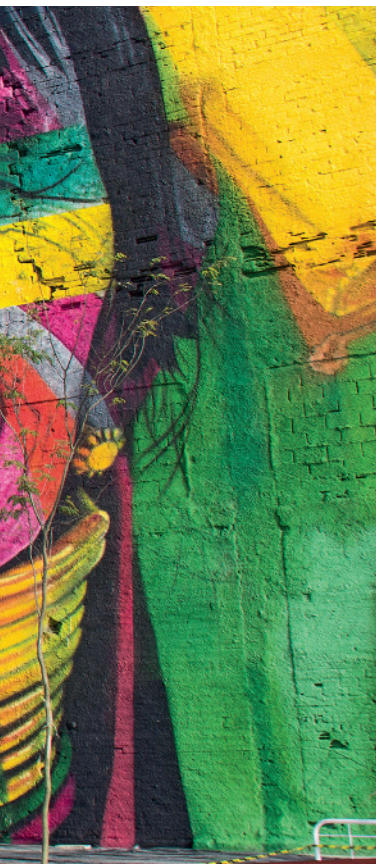
Intitulado *Etnias*, o incrível mural abrange a parede de um armazém abandonado na zona portuária.

O trabalho realizado exigiu uma combinação de habilidade técnica e talento artístico. Localizado no Boulevard Olímpico do Porto Maravilha, o mural retrata cinco rostos indígenas de vários continentes [Huli, da Nova Guiné (Oceania); Mursi, da Etiópia (África); Kayin, do Myanmar e da Tailândia (Ásia); Supi, da Lapônia (Europa) e Tapajós, do Brasil (Américas)], os quais representam os cinco anéis do símbolo dos Jogos Olímpicos.

Com uma altura de 15,5 metros e um comprimento de mais de 170 metros, os rostos "observam" a música, os bares e os fogos de artifício do Boulevard Olímpico durante os Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro.

Esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **3** e permite uma abordagem interdisciplinar com as áreas de Linguagens e suas Tecnologias, pois pode-se favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13LGG201** ao utilizar a linguagem artística em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso. É também favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13LGG301**, pois, com a atividade **10**, o aluno participa de um processo de produção da linguagem artística, levando em conta suas formas e funcionamentos.
Também pode ser favorecido o desenvolvimento da competência específica **6** dessa área, como as habilidades **EM13LGG601**, **EM13LGG602**.
Essa seção trabalha ainda o tema contemporâneo **diversidade cultural** (atividade **1**) e contempla a habilidade **EM13MAT201** da BNCC; por ser um tema que atrai a atenção de muitos adolescentes e jovens, a atividade se insere em um contexto de cultura juvenil.

1. Resposta possível: "arte socialmente engajada" pode ser entendida como aquela que problematiza questões socioambientais com práticas artísticas de caráter participativo e reflete a cultura e os anseios da população na qual está inserida. *Etnia* significa uma coletividade de indivíduos que se diferenciam por suas características socioculturais, refletidas particularmente na língua, na religião e nas ações.



"Eu queria mostrar que todos nós estamos unidos, estamos conectados", disse Kobra. O mural tem recebido uma grande atenção da mídia devido à sua grandeza e mensagem de integração.

Para a criação do mural, o artista e a sua equipe preparam a parede do edifício com tinta branca, fizeram uma base quadriculada para delinear o desenho e a pulverizaram com tinta *spray* de várias cores, o que acabou fazendo com que a arte final fosse hipnotizadora.

Foram utilizados 180 baldes de tinta acrílica, 2.800 latas de *spray* de tinta e 7 plataformas aéreas para criar o mural.

Para que pudessem terminar o mural a tempo para os Jogos Olímpicos, Kobra e a sua equipe trabalharam por 45 dias.

Apesar do grande esforço do artista em promover a paz por meio da arte, este mural é somente uma parte de um grande cenário.

Etnias é na verdade parte de uma série de murais que o artista Kobra vem pintando. Por exemplo, o mural chamado *Olhar a paz* retrata grandes figuras como Madre Teresa de Calcutá, Nelson Mandela e Martin Luther King Jr.

Kobra tem produzido obras em grafite em 20 países, incluindo retratos de Bob Dylan, Dalai Lama, Yoda e John Lennon.

Este impressionante mural com certeza não será a última pintura em grafite feita pelo artista.

Artista brasileiro lidera uma equipe para pintar um mural inspirado nas Olimpíadas Rio 2016. *Guinness World Records*, 22 ago. 2016. Disponível em: <http://www.guinnessworldrecords.com.br/news/2016/8/brazilian-artist-paints-his-way-into-a-new-record-440451>. Acesso em: 14 ago. 2020.

* Algum tempo depois, Kobra superou seu próprio recorde com um mural de quase 6.000 m², inspirado em uma foto feita por Lailson Santos de um nativo transportando cacau em uma canoa. A obra encontra-se às margens da Rodovia Castello Branco, em São Paulo.

4. Altura: 15,5 m, comprimento: mais de 170 m; Sim, pois 15,5 · 170 = 2.635, que é próximo de 2.646,34 m².

Atividades

3. Huli, da Nova Guiné (Oceania); Mursi, da Etiópia (África); Kayin, do Myanmar e da Tailândia (Ásia); Supi, da Lapônia (Europa) e Tapajós, do Brasil (Américas).

Registre as respostas em seu caderno.

1. Discuta com um colega e expliquem, por escrito, o que vocês entendem por "arte socialmente engajada" e por "etnia".
2. Você conhece algum mural de Candido Portinari? E de outros artistas da pintura mural do seu estado ou da região geográfica brasileira em que mora? Com um colega, façam uma pesquisa em livros, revistas, jornais, *sites* etc. e construam um cartaz sobre a obra de algum desses artistas. resposta pessoal
3. Quais são os povos, um em cada continente, representados no mural *Etnia*? Com os demais colegas, organizem-se em cinco grupos para fazer uma pesquisa (um grupo por continente), construir um painel com as principais características desses povos e depois realizar uma exposição na sala.
4. Segundo o texto, quais são as dimensões, em metro, do mural *Etnias*? Essas dimensões são compatíveis com a área desse mural descrita no primeiro parágrafo do texto?
5. Que mural recordista mundial, registrado no *Guinness*, superou o *Etnia*? Qual é a área que ele ocupa?
6. Supondo que cada lata de tinta *spray* tenha 400 mℓ e que cada balde de tinta acrílica tenha 20 ℓ, quantos litros e quantos metros cúbicos de tinta *spray* e de tinta acrílica foram gastos no mural *Etnia*? (Lembrem-se de que 1.000 ℓ = 1 m³.) 1.120 ℓ ou 1,12 m³ (*spray*); 3.600 ℓ ou 3,6 m³ (tinta acrílica).
7. Aproximadamente, quantos metros quadrados do mural *Etnia* foram pintados, em média, por dia? 58,8 m²
8. Nos murais de Kobra e sua equipe, é comum o emprego de regiões poligonais? Quais? Sim; triângulos e quadriláteros são mais frequentes.
9. Faça uma pesquisa na internet sobre murais feitos por Kobra e cite características que podem ser observadas nesses murais.
10. Experimente se sentir um muralista! Com um colega, escolham uma figura quadriculada em uma revista, com quadrados de lados medindo 1 cm. Depois, em uma folha de cartolina, façam uma tela quadriculada com quadrados medindo 10 cm de lado e reproduzam a figura escolhida na escala 1 : 10. Dependendo do tamanho da figura escolhida, pode ser conveniente usar outra escala (indique a escala na reprodução). Combinem com o professor uma exposição dos trabalhos da classe. resposta pessoal

5. O mural feito por Eduardo Kobra e equipe, inspirado em uma foto feita por Lailson Santos de um nativo transportando cacau em uma canoa. A obra tem área de quase 6.000 m².

9. Respostas possíveis: diversidade de cores fortes, emprego de regiões poligonais, tamanho grande.

MODERNA

CAPÍTULO

2

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1** e **5**; habilidades **EM13MAT309**, **EM13MAT504** e **EM13MAT509**.

Introdução à Geometria espacial

Múmia egípcia que estava em museu de Cerro Largo ganha rosto

Iret-Neferet, o crânio pertencente a uma mulher de 40 anos que viveu no Egito entre 768-476 antes de Cristo, ganhou um rosto com a ajuda da técnica de reconstrução facial em imagem tridimensional (3-D). Identificada oficialmente em maio deste ano [2019], depois de passar as últimas décadas preservada numa caixa de vidro no museu do Centro Cultural 25 de Julho, na cidade de Cerro Largo, no noroeste do Rio Grande do Sul, a múmia terá a face apresentada na próxima quinta-feira (15), durante o evento "Achados sobre a Múmia Iret-Neferet", no auditório Irmão José Otão, no Hospital São Lucas da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS).

[...]

Disponível em: <https://gauchazh.clicrbs.com.br/tecnologia/noticia/2019/08/video-mumia-egipcia-que-estava-em-museu-de-cerro-largo-ganha-rosto-cjz8y1p7f01vh01paoes1zd7g.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.

Em 2 de setembro de 2018, um incêndio de grandes proporções destruiu grande parte do acervo do Museu Nacional, na Quinta da Boa Vista, no Rio de Janeiro. Entre as perdas contam-se seis múmias egípcias – cinco trazidas por Dom Pedro I, em 1826, e uma trazida por Dom Pedro II, em 1875. Nesse contexto, a identificação do crânio de Iret-Neferet e a reconstrução de sua imagem facial ganham extrema relevância para que se conheça a história dos povos antigos do norte da África.

Hoje, graças a programas em 3-D, é possível recuperar imagens de quem viveu há milênios – como no caso de Iret-Neferet.

A base para essa reconstrução facial passa pela modelagem, com o uso de uma malha de linhas. Essa é mais uma evidência da importância da Geometria espacial, assunto a ser desenvolvido neste capítulo.

Essa abertura do capítulo valoriza o conhecimento historicamente construído para entender a realidade e continuar aprendendo sobre o mundo físico, social, cultural e digital (competência geral **1**), levando o aluno a fazer uso de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em mais de um contexto e desenvolvendo, dessa forma, a competência específica **1**. Também trata do tema contemporâneo **diversidade cultural**.

CICERO MORAES/GRUPO DE ESTUDO IDENTIDADE AFRO-EGÍPCIAS (PUCRS)

Fases da reconstrução facial em 3-D da múmia Iret-Neferet.

PROIBIDA

Objetivos do capítulo

- Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.
- Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.
- Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.

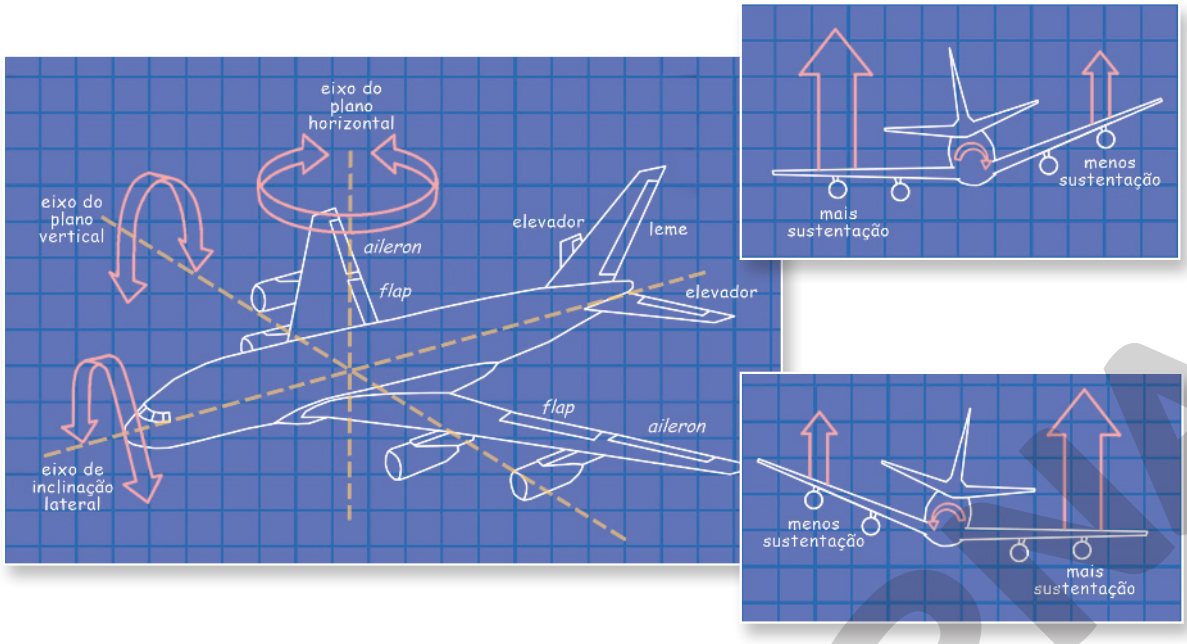
CICERO MORAES/GRUPO DE ESTUDO IDENTIDADE AFRO-EGÍPCIAS (PUCRS)

Fase final da reconstrução facial em 3-D da múmia Iret-Neferet.

MODERNA

Esse capítulo apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento das habilidades **EM13MAT309** e **EM13MAT504** da BNCC, que serão objeto de estudo nos próximos capítulos, além de favorecer a competência específica **5**.

1 A Geometria euclidiana



ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI

A sustentabilidade no ar e a forma aerodinâmica de um avião são frutos do conhecimento humano construído durante milhares de anos. A forma da fuselagem e das asas e a posição relativa do plano do leme e do plano das pequenas asas traseiras exemplificam o uso de conceitos e de relações geométricas na aerodinâmica de um avião. As asas do avião formam um ângulo que, na Geometria, é conhecido por **ângulo diedro**; graças a ele, quando o avião se inclina, a asa na posição inferior adquire maior sustentação, o que o leva de volta à posição horizontal em uma manobra de estabilização durante o voo. Neste capítulo, vamos estudar alguns elementos constitutivos da Geometria no espaço tridimensional.

Vamos conhecer um pouco sobre Euclides de Alexandria, matemático grego que viveu por volta de 300 a.C. e que teve grande importância no desenvolvimento da Geometria. Euclides é reconhecido, sobretudo, por sua obra *Os elementos*, composta de 13 livros (ou capítulos), na qual está organizado todo o conhecimento geométrico até então acumulado. Neste capítulo, veremos alguns tópicos da **Geometria euclidiana**.

1.1 Noções primitivas

Na Geometria, ponto, reta e plano são algumas noções aceitas sem definição e, por isso, chamadas de **noções primitivas**. Como são produtos da mente humana, elas funcionam como modelos para explicar a realidade.

- Um **ponto** não tem dimensão, nem massa, nem volume.

- Uma **reta** não tem espessura, nem começo, nem fim.

- Um **plano** não tem espessura nem fronteiras.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Podemos imaginar um ponto ao ver um pequeno furo em um papel, uma reta ao ver uma linha fina esticada ou um plano ao ver as águas tranquilas de um lago.

Essas três noções fazem parte do **espaço**, conjunto dos infinitos pontos existentes.

Observação

Nesta obra, representaremos os pontos por letras latinas maiúsculas (*A*, *B*, *C*, ...), as retas por letras latinas minúsculas (*r*, *s*, *t*, ...) e os planos por letras gregas minúsculas (α, β, γ, ...).

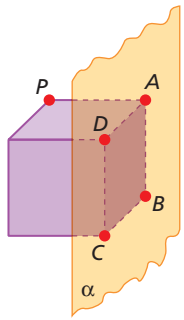
Comentar com os alunos que ao definirmos um objeto, recorremos a palavras e definições já existentes, as quais podem ter sido criadas de outras palavras e de definições também já existentes. Mas como foram definidas as primeiras palavras em Geometria?
Para responder a essa questão, parte-se de conceitos não definidos, chamados noções primitivas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Qualquer conjunto de pontos considerado no espaço, que tenha pelo menos um ponto, é chamado de **figura**.

Convém lembrar que dois ou mais pontos são denominados **coplanares** se existe um plano que contém todos eles.



- Na figura ao lado, os pontos A, B, C e D são coplanares, pois pertencem ao plano α. Em linguagem simbólica, indicamos: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ e $D \in \alpha$
- O ponto P não é coplanar com A, B, C e D, pois P não pertence ao plano α. Em linguagem simbólica, escrevemos: $P \notin \alpha$

Observe, a seguir, alguns exemplos de figura.

figura I

figura III

figura II

figura IV

Com exceção da figura I, que tem apenas quatro pontos coplanares, as demais têm infinitos pontos. Essas figuras apresentam ainda as seguintes diferenças:

- enquanto as figuras I, II e III são **planas**, pois existe um único plano que as contém, a figura IV é **não plana**, porque, considerando a perspectiva, não existe um plano que contenha todos os pontos da figura;
- a figura II representa uma **linha**; a III, uma **superfície**; a IV, um **sólido**. A figura I, que não representa nenhum desses tipos de figura, não recebe nome especial.

1.2 Sistema dedutivo

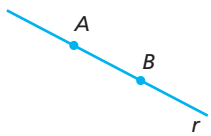
Em Geometria, além das noções primitivas, são estabelecidas verdades iniciais aceitas sem demonstração: os **postulados**, proposições fundamentais que descrevem relações entre os conceitos primitivos (noções primitivas). Com base nos postulados, demonstramos, por meio de deduções lógicas, outros fatos ou propriedades denominados **teoremas**.

O conjunto de noções primitivas, postulados e teoremas constitui o **sistema dedutivo**.

Postulados: um ponto de partida da Geometria

Iniciamos nossa reflexão a respeito das bases sobre as quais se assenta o desenvolvimento da Geometria com as noções primitivas de ponto, reta e plano. Dando continuidade, foram estabelecidos como propriedades fundamentais desses elementos alguns postulados, os quais são apresentados a seguir.

P1 O espaço tem infinitos pontos.
P2 Toda reta e todo plano são conjuntos de infinitos pontos.
P3 Fora de uma reta, bem como fora de um plano, há infinitos pontos.
P4 Dois pontos distintos determinam uma única reta.



Observação

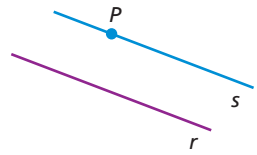
Embora, em Geometria, o termo **determinar** signifique **existir** e **ser único**, há situações em que achamos conveniente enfatizar essas ideias. Nesses casos, usamos, por exemplo: **determinam** uma **única** reta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

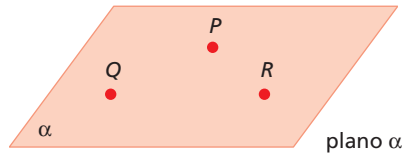
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

P5 Por um ponto *P* fora de uma reta *r* passa somente uma reta *s* paralela a *r*. (**Postulado de Euclides**.)

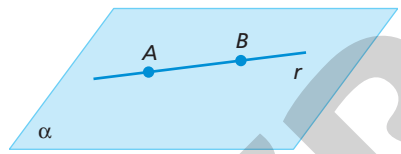


P6 Três pontos não colineares determinam um único plano.

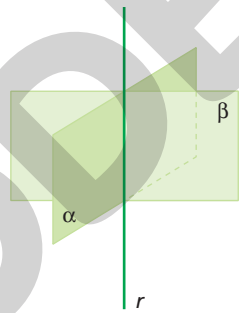


plano α ou plano (*PQR*)

P7 Se dois pontos distintos estão em um plano, a reta que passa por eles está contida nesse plano.



P8 Se dois planos distintos, α e β, interceptam-se, a intersecção é uma reta.

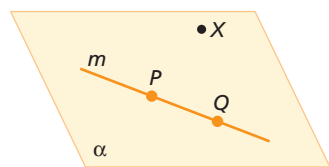


Com esses postulados, é possível demonstrar vários teoremas. No decorrer deste capítulo, vamos analisar alguns deles.

Teorema 1: Dada uma reta *m* e um ponto *X* fora dela, existe um único plano que contém o ponto *X* e a reta *m*.

Demonstração

Pelos postulados P2 e P3, a reta *m* tem dois pontos distintos, *P* e *Q*, que não são colineares com *X*, pois $X \notin m$.
Pelo postulado P6, três pontos não colineares determinam um único plano, ou seja, existe um único plano que passa por *P*, *Q* e *X*, sendo α esse plano.
A reta *m* tem dois pontos em α; então, pelo postulado P7, ela está contida em α.
Portanto, α é o único plano que contém a reta *m* e o ponto *X*.

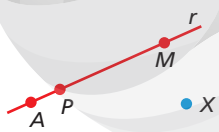


Observações

- Quando uma reta está contida em um plano, significa que todos os pontos que pertencem à reta também pertencem ao plano.
- Uma reta que passa por dois pontos distintos, *A* e *B*, como na figura ao lado, pode ser representada por *r* ou $\overleftrightarrow{AB}$.

Observação

Dois ou mais pontos são ditos **colineares** quando existe uma reta que contém todos eles.



- Na figura, os pontos *A*, *P* e *M* são colineares, pois pertencem à reta *r*. Em linguagem simbólica, indicamos: $A \in r$, $P \in r$ e $M \in r$
- O ponto *X* não é colinear com *A*, *P* e *M*, pois *X* não pertence à reta *r*. Em linguagem simbólica, escrevemos: $X \notin r$

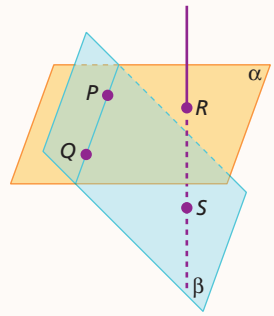
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R1. Quantos planos podem passar por um ponto P dado?



▸ **Resolução**

Em um sistema dedutivo, certas resoluções, como a que exemplificaremos aqui, necessitam de um desenvolvimento e de uma linguagem estritamente formal.

Além do ponto P, o espaço tem infinitos pontos (postulado P1). Portanto, existe um ponto Q, distinto de P, e uma reta $\overleftrightarrow{PQ}$ (postulado P4).

Vamos considerar um ponto R, fora da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ (postulado P3), que determina com ela um plano α (teorema 1). Logo, o plano α passa por P.

Agora, vamos considerar um ponto S, fora de α (postulado P3). Como $S \notin \alpha$, $S \notin \overleftrightarrow{PQ}$ e, novamente pelo teorema 1, existe um plano β, com $\beta \neq \alpha$, que passa por P.

Continuando a fazer construções análogas, podemos construir infinitos planos que passam pelo ponto P.

5. Chamar a atenção dos alunos para a **abstração**, um dos pilares do *pensamento computacional*, empregada nesse exercício. Ressaltar a relação da situação real com o conceito matemático estudado no postulado P6.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Quantos planos podem passar por dois pontos distintos? E quantos planos podem passar por três pontos distintos que não estejam alinhados? E se os três pontos estiverem alinhados?
infinitos; um único; infinitos
2. Quantos são os planos que contêm quatro pontos distintos? infinitos planos, um só plano ou nenhum plano
3. Dados quatro pontos, dos quais três deles nunca são colineares, quantas retas são determinadas por esse conjunto de pontos? seis retas
4. Indique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.
   - Se F é uma figura tal que quatro quaisquer de seus pontos são coplanares, então F é uma figura plana, isto é, está contida em um plano.

   Verdadeira. Basta fixar três pontos da figura por onde passa um único plano e variar o outro ponto, que é coplanar.
5. Uma mesa de quatro pernas às vezes pode oscilar, enquanto uma mesa de três pernas está sempre firme. Explique esse fato segundo a teoria estudada.
Três pontos (três pés da mesa) determinam um único plano (do chão); quatro pontos podem determinar mais de um plano.

COSTELETA DE PORCO/SHUTTERSTOCK

CAP/SHUTTERSTOCK

2 Posições relativas

2.1 Paralelismo

O paralelismo está muito presente em nosso dia a dia.

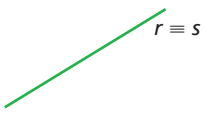
A seguir, veremos como as retas e os planos se relacionam por meio dessa ideia.

A concepção de paralelismo implícita nessa definição tem por base a noção de direção. Grosso modo, associamos duas retas paralelas como retas que têm a mesma direção, dois planos paralelos como planos que têm a mesma jazitura.

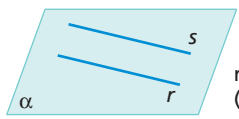
Retas paralelas

Duas **retas**, *r* e *s*, são **paralelas** se têm todos os pontos comuns (coincidem) ou se estão em um mesmo plano α e não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r /\!/ s \Leftrightarrow r \equiv s$ ou $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$ e $r \cap s = \varnothing$



retas coincidentes



retas paralelas distintas (não coincidentes)

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

Considere a imagem que o seguinte trecho da letra da música "Paralelas", de Belchior, sugere:

"E as paralelas dos pneus n'água das ruas
São duas estradas nuas
Em que foges do que é teu"

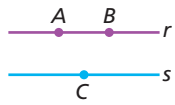
- Como são formadas as referidas linhas paralelas?
- Essas linhas podem se cruzar, podem ter ponto comum?

- Essas linhas são formadas pelos rastros dos pneus na lâmina de água de chuva do chão da rua.
- Essas linhas não se cruzam pois os sulcos dos pneus de um lado do carro mantém sempre a mesma distância dos sulcos dos pneus do outro lado do carro.

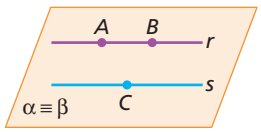
Teorema 2: Duas retas paralelas, não coincidentes, determinam um único plano.

Demonstração

Por definição, existe pelo menos um plano α que contém as retas r e s, já que elas são paralelas e não coincidentes. Vamos mostrar que α é único.
Pelo postulado P2, consideremos A e B (distintos) em r e o ponto C em s.



Pelo postulado P6, os pontos A, B e C determinam um plano β. Logo, $A \in \beta$, $B \in \beta$ e $C \in \beta$. Vamos mostrar que β coincide com α.



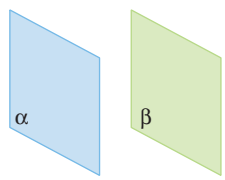
Como o plano α contém as retas r e s, α contém todos os pontos dessas retas, isto é, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$, que, por não serem colineares, determinam um único plano. Logo, os planos α e β coincidem ($\alpha \equiv \beta$).

Planos paralelos

Dois **planos**, α e β, são **paralelos** se coincidem (têm todos os pontos comuns) ou se não têm nenhum ponto comum (intersecção vazia).

Em linguagem simbólica, escrevemos: $\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$ ou $\alpha \cap \beta = \varnothing$

planos coincidentes

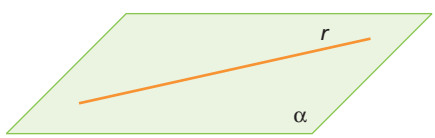


planos paralelos distintos
(não coincidentes)

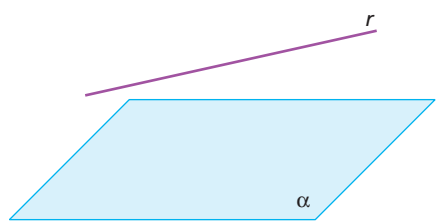
Reta e plano paralelos

Uma **reta** r e um **plano** α são **paralelos** se a reta r está contida no plano α ou se a reta r e o plano α não têm nenhum ponto comum.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r /\!/ \alpha \Leftrightarrow r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$



$r \subset \alpha$



$r \cap \alpha = \varnothing$

MODERNA

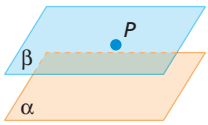
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

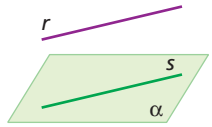
Propriedades do paralelismo

Observe a seguir algumas propriedades do paralelismo. Todas podem ser demonstradas.

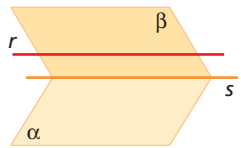
1. Por P não pertencente a α passa um único plano β paralelo a α.



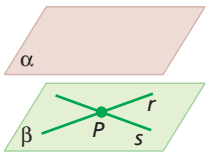
2. Se r não está contida em α, r é paralela a s, com s contida em α, então, r é paralela a α.



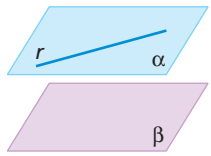
3. Se r é paralela a α e β, sendo $\alpha \cap \beta = s$, então r é paralela a s.



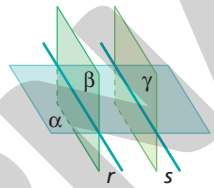
4. Se α é um plano paralelo a duas retas, r e s, contidas em um plano β, tais que $r \cap s = \{P\}$, então α é paralelo a β.



5. Se dois planos são paralelos e distintos, então qualquer reta contida em um deles é paralela ao outro.



6. Se α intercepta β e γ, com β paralelo a γ, então as intersecções r e s de α com esses planos são retas paralelas.



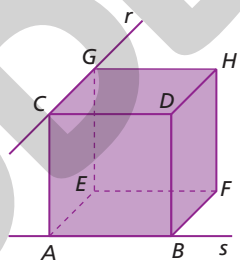
Retas reversas

Duas **retas**, r e s, são **reversas** quando não existe um mesmo plano que as contenha.

Na figura ao lado, considerando a perspectiva, é possível visualizar que não existe um mesmo plano que contenha as retas r e s; portanto, elas são reversas.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $\nexists\ \alpha$ tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$

Observe, ainda, que as retas r e s não têm nenhum ponto comum, ou seja, $r \cap s = \varnothing$.



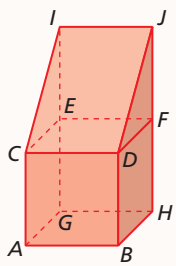
Se achar necessário, explicar aos alunos que os planos (*ABE*) e (*CDG*) que contêm faces paralelas do cubo são paralelos não coincidentes, ou seja, os planos não têm nenhum ponto comum e, por isso, a reta s contida no plano (*ABE*) e a reta r contida no plano (*CDG*) não têm nenhum ponto comum. Além disso, s é paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ e r é perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$; portanto, r e s não são paralelas; logo, r e s são reversas.

Observação

Duas retas distintas, r e s, podem ser coplanares ou reversas.
Se forem coplanares, poderão ser paralelas distintas (não têm nenhum ponto comum) ou concorrentes (têm um único ponto comum).

Exercício resolvido

R2. Considerando o cubo *ABCDEFGH* e o prisma *CDEFIJ* representados ao lado, fazer o que se pede.



a) Identificar um par de retas paralelas, um par de retas reversas e um par de retas que não sejam paralelas nem reversas.

b) Indicar a posição relativa entre a reta $\overleftrightarrow{CJ}$ e o plano que contém a face *CDJI*.

c) Identificar dois planos paralelos por meio de três pontos não colineares.

Resolução

a) Respostas possíveis: retas paralelas: $\overleftrightarrow{CI}$ e $\overleftrightarrow{DJ}$; retas reversas: $\overleftrightarrow{IJ}$ e $\overleftrightarrow{DF}$; retas que não são paralelas nem reversas: $\overleftrightarrow{JH}$ e $\overleftrightarrow{DF}$.

b) A reta $\overleftrightarrow{CJ}$ é paralela ao plano que contém a face *CDJI*, pois está contida nele.

c) Resposta possível: os planos (*ABG*) e (*EFD*).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

6. Classifique cada uma das afirmações a seguir em verdadeira ou falsa.

a) Se duas retas não são coplanares, elas são reversas. verdadeira

b) Duas retas reversas podem ser coplanares. falsa

c) Duas retas paralelas podem não ser coplanares. falsa

d) Se dois planos, α e β, são coincidentes, então são paralelos. verdadeira

7. Registre quais das afirmações a seguir são falsas. afirmações a, c

a) Duas retas reversas nunca estão em planos paralelos.

b) Se uma reta r é paralela à reta s e uma reta t é paralela à reta s, então t é paralela a r.

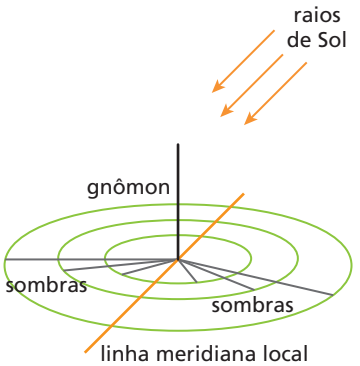
c) Se uma reta r e um plano α têm ponto comum, então r está contida em α.

Essa abordagem sobre perpendicularismo valoriza o conhecimento historicamente construído para entender a realidade e continuar aprendendo, contemplando, assim, a competência geral **1**.

2.2 Perpendicularismo

Além do paralelismo, podemos identificar ao nosso redor inúmeras situações nas quais é notável o **perpendicularismo**. Acompanhe, a seguir, uma delas.

Para traçar a direção da linha meridiana de um local, fincamos, perpendicularmente ao solo, uma vareta (denominada **gnômon**), marcamos suas sombras no decorrer do dia e traçamos a bissetriz de todos os ângulos formados por sombras de mesmo comprimento. A direção da linha meridiana local coincide com a das bissetrizes.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Nessa situação, como podemos garantir que a vareta fique perpendicular ao solo?

O estudo do perpendicularismo entre retas, entre planos e entre retas e planos nos ajudará a responder a questões como essa.

Retas concorrentes

Duas **retas**, r e s, são **concorrentes** quando têm apenas um ponto P comum.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $r \cap s = \{P\}$

Veja as figuras I e II.

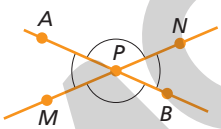


figura I

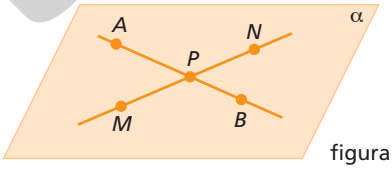


figura II

Na figura I, observamos duas retas concorrentes, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN}$, que se interceptam no ponto P. Nelas, identificamos os ângulos $A\hat{P}M$, $M\hat{P}B$, $B\hat{P}N$ e $N\hat{P}A$.

Além de determinar esses ângulos, duas retas concorrentes também determinam um plano (figura II).

Teorema 3: Se duas retas, r e s, são concorrentes em um ponto P, então elas determinam um único plano α.

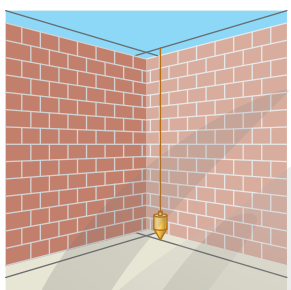
Demonstração

Pelo postulado P2, existem os pontos A em s e C em r, tais que $A \neq P$ e $C \neq P$.
Assim, os pontos A, P e C não são colineares.
Pelo postulado P6, concluímos que A, P e C determinam um plano α; logo:
α = plano (APC) (I)
Pelo postulado P7, o plano α contém r e s, pois contém dois pontos de cada reta.
Vamos mostrar que α é único.
Suponhamos que exista outro plano β que contenha r e s.
Pelo postulado P7, os pontos P, A e C pertencem a β; logo: β = plano (APC) (II)
De (I) e (II), concluímos que $\alpha \equiv \beta$ e que, portanto, α é único.

Reflita

Na construção civil, qual é a função:

- do fio de prumo?

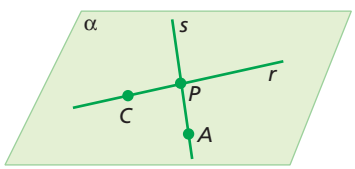


- do nível de bolha?

PHOTODISC/GETTY IMAGES

O fio de prumo serve para verificar a perpendicularidade de uma parede em relação ao solo; e o nível de bolha, além dessa função, serve para verificar a horizontalidade de uma superfície.

Essa atividade propicia um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, relacionando a ação da força gravitacional com a perpendicularidade do fio de prumo e com a horizontalidade da superfície da água dentro do nível de bolha.

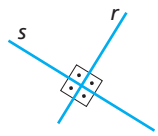


MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Retas perpendiculares

Duas **retas**, *r* e *s*, são **perpendiculares** quando são concorrentes e determinam quatro ângulos retos.

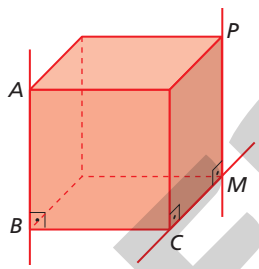


$r \perp s$ (lemos: "a reta *r* é perpendicular à reta *s*")

Retas ortogonais

Duas **retas** reversas, *r* e *s*, são **ortogonais** quando existe uma reta *t* que é paralela (não coincidente) a *s* e perpendicular a *r*.

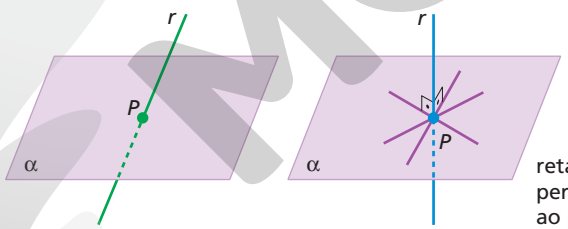
Na figura ao lado, em que os pontos *A*, *B*, *C*, *M* e *P* são vértices de um cubo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CM}$ são ortogonais, pois a reta $\overleftrightarrow{PM}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ e é perpendicular a $\overleftrightarrow{CM}$.



Reta e plano perpendiculares

Quando uma reta *r* e um plano α têm somente um ponto comum, dizemos que *r* e α são **secantes** (ou **concorrentes**). Uma situação particular de reta e plano secantes é o caso em que a reta é perpendicular ao plano.

Dados uma reta *r* e um plano α, concorrentes no ponto *P*, dizemos que *r* é **perpendicular** a α quando *r* é perpendicular a todas as retas de α que passam por *P*.



reta *r*: secante não perpendicular ao plano α

reta *r*: secante e perpendicular ao plano α

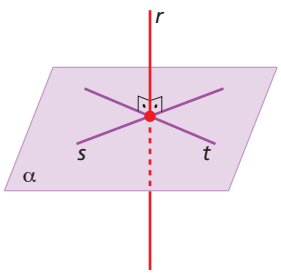
Teorema fundamental do perpendicularismo

O teorema enunciado a seguir, conhecido como **teorema fundamental do perpendicularismo**, é muito importante para a Geometria.

Teorema 4: Se *r* é uma reta perpendicular a duas retas concorrentes, *s* e *t*, então *r* é perpendicular ao plano α determinado por essas retas.

Em linguagem simbólica, escrevemos: $s \subset \alpha$, $t \subset \alpha$, $r \perp s$, $r \perp t \Rightarrow r \perp \alpha$

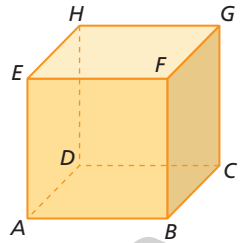
A definição de perpendicularismo entre reta e plano nos remete à questão sobre o meridiano astronômico: como ter certeza de que a vareta fincada no solo é perpendicular a ele? Na verdade, não é preciso verificar se ela é perpendicular a todas as retas contidas no plano do solo, pois isso seria impossível, já que são infinitas retas; basta verificar se é perpendicular a duas retas não coincidentes desse plano que passam pelo ponto em que a vareta foi fincada. O teorema fundamental do perpendicularismo garante isso.



A reta *r* é perpendicular ao plano α, pois é perpendicular a duas retas concorrentes contidas nesse plano.

Reflita

Observe os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$, $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{EH}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{HG}$ do cubo representado abaixo.



- Quantos pares desses segmentos são perpendiculares?
- Quantos pares desses segmentos são paralelos?

- Cada vértice do cubo é extremo de 3 segmentos perpendiculares dois a dois.
O cubo tem 8 vértices; logo, são 24 (8 · 3) pares de segmentos perpendiculares.
- Há 3 conjuntos de 4 segmentos paralelos:
  - $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$
  - $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$
  - $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$

Cada conjunto forma 3 pares de segmentos paralelos; então, temos:
$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$
Mas cada par foi contado duas vezes; logo, 18 (36 : 2) pares de segmentos são paralelos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

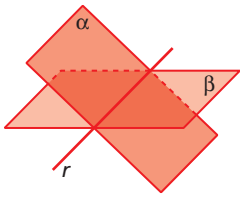
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

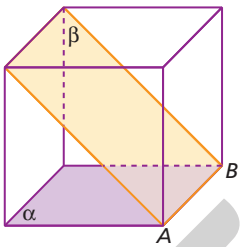
Planos concorrentes

Dois **planos** distintos, α e β, são **concorrentes** (ou **secantes**) quando têm pelo menos um ponto comum (intersecção não vazia).

Como, pelo postulado P8, a intersecção de dois planos distintos não paralelos é uma reta, podemos escrever: $\alpha \cap \beta = r$



Considere o cubo representado abaixo.



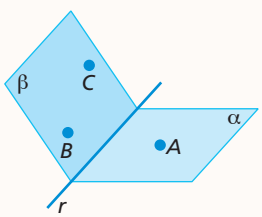
A intersecção dos planos α e β é a reta que contém o segmento $\overline{AB}$, ou seja, a reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é: $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$

Exercício resolvido

R3. Sejam α e β dois planos secantes cuja intersecção é a reta r. Se A é um ponto em α, B e C são dois pontos distintos em β tais que A, B e C não pertencem à reta r,

a) mostrar que A, B e C não são pontos colineares.

b) determinar a intersecção do plano α com o plano dado por A, B e C.



▸ **Resolução**

a) Suponhamos que A, B e C sejam pontos colineares. Mostremos que isso gera uma contradição.

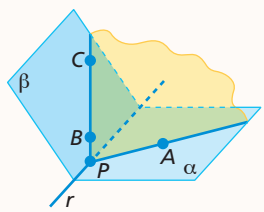
Se o ponto A pertence à reta $\overleftrightarrow{BC}$, então A pertence ao plano β. Como A pertence a α, temos $A \in \alpha \cap \beta$, isto é, $A \in r$, o que gera contradição, pois, pelo enunciado, sabemos que $A \notin r$. Essa contradição veio da suposição da colinearidade dos três pontos.

Logo, A, B e C não são colineares.

b) Existem dois casos para analisar. O primeiro, quando as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e r são concorrentes; o segundo, quando as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e r são paralelas.

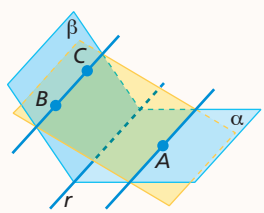
- $\overleftrightarrow{BC}$ e r concorrentes

  Seja P o ponto comum a $\overleftrightarrow{BC}$ e r. Como $P \in \overleftrightarrow{BC}$, sabemos que P pertence ao plano (ABC). Mas $P \in \alpha$, pois $P \in r$ e $r \subset \alpha$. Como os pontos A e P pertencem ao plano α e ao plano (ABC), concluímos que a reta $\overleftrightarrow{AP}$ é a reta procurada.



- $\overleftrightarrow{BC}$ e r paralelas

  Se $\overleftrightarrow{BC} \parallel r$, então $\overleftrightarrow{BC} \parallel \alpha$. O plano (ABC) intercepta o plano α em uma reta que contém o ponto A e é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e, portanto, paralela a r.



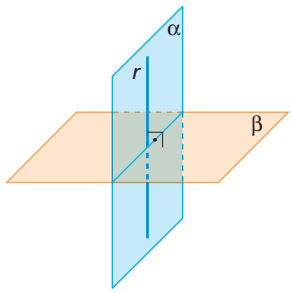
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Planos perpendiculares

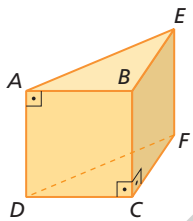
Dois **planos**, α e β, são **perpendiculares** quando um deles contém uma reta r perpendicular ao outro plano.



Exemplo

Observe o prisma representado ao lado. Nele:

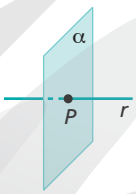
- o plano (*ABC*) é perpendicular ao plano (*DCF*), pois contém a reta $\overleftrightarrow{BC}$, que é perpendicular ao plano (*DCF*);
- não se pode afirmar que os planos (*ABC*) e (*BFC*) são perpendiculares entre si, pois não há indicação de que algum deles contenha uma reta perpendicular a duas retas do outro.



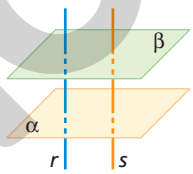
Propriedades do perpendicularismo

Observe a seguir algumas propriedades do perpendicularismo. Todas elas podem ser demonstradas.

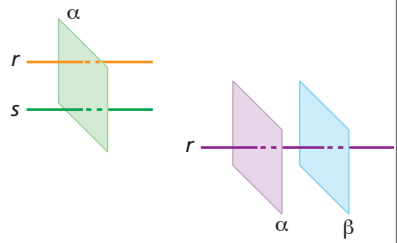
1. Por um ponto de uma reta passa somente um plano perpendicular a essa reta.



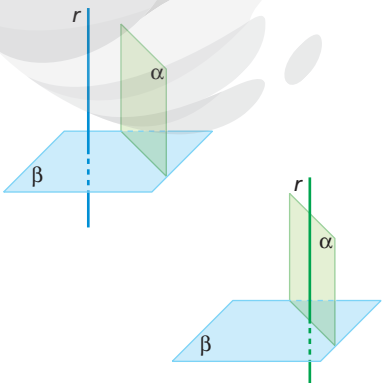
2. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então toda reta paralela a r é perpendicular ao plano α e todo plano paralelo a α é perpendicular a r.



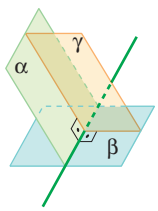
3. Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas. Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.



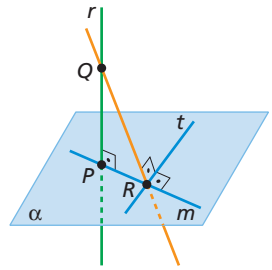
4. Se uma reta r e um plano α são perpendiculares a um plano β, então a reta r é paralela a α.



5. Se os planos α e β são concorrentes e γ é um plano perpendicular a α e a β, então γ é perpendicular à reta de intersecção entre α e β.



6. Se uma reta r é perpendicular a um plano α em um ponto P, uma reta t está contida em α e não passa por P, uma reta m está contida em α, passa por P e m é perpendicular a t no ponto R, então a reta $\overleftrightarrow{QR}$, em que Q pertence a r, é perpendicular a t.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

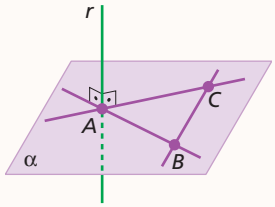
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R4. Dados três pontos não colineares, A, B e C, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são perpendiculares a uma reta r, demonstrar que as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais.

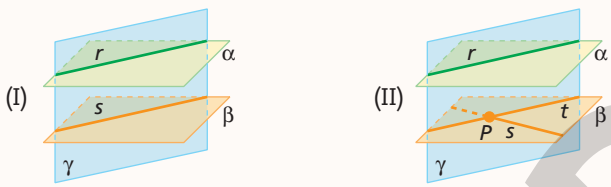
▸ **Resolução**



Seja α o plano determinado por A, B e C (postulado P6). Assim, pelo postulado P7, as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ estão contidas em α. Como r é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, que são concorrentes, r é perpendicular ao plano que as contém, isto é, $r \perp \alpha$ (teorema 4). Portanto, r é ortogonal a qualquer reta de α que não passe pelo ponto A. Logo, as retas r e $\overleftrightarrow{BC}$ são ortogonais entre si.

R5. Considerando dois planos paralelos distintos, α e β, e duas retas, r e s, com $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, indicar todas as possíveis posições entre r e s.

▸ **Resolução**



Observação

No caso (II), se as retas t e s forem perpendiculares, então r e s serão retas ortogonais.

Existem duas possibilidades:

(I) As retas r e s estão contidas em um plano γ, sendo $\gamma \neq \alpha$ e $\gamma \neq \beta$. Nesse caso, o plano γ intercepta α e β, respectivamente, em r e s, que são paralelas distintas.

(II) Não há um plano que contenha as retas r e s. Nesse caso, vamos considerar uma reta t de β que seja paralela a r. A reta t determina com r um plano γ, tal como o do item (I). A reta t determina com s um plano que coincide com β. Assim, temos: $r \parallel t$, $t \cap s = \{P\}$, $r \cap s = \varnothing$; logo, r e s são retas reversas.

R6. Demonstrar que duas retas reversas têm uma única reta perpendicular comum.

▸ **Resolução**

Sejam r e s duas retas reversas e α e β dois planos paralelos que contêm r e s, respectivamente.

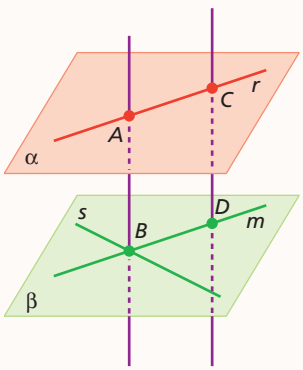
Por um ponto C de r passa uma perpendicular ao plano β. Seja D o ponto de intersecção dessa reta ($\overleftrightarrow{CD}$) com β.

Por D passa uma única paralela (m) à reta r (postulado de Euclides). Essa reta está contida em β. Seja B a intersecção da reta m com a reta s.

Por B passa uma única paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$ (postulado de Euclides), que intercepta a reta r no ponto A. É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular aos planos α e β, pois é paralela à reta $\overleftrightarrow{CD}$; portanto, $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a todas as retas de α e de β que passam por suas intersecções com esses planos.

Logo, $\overleftrightarrow{AB}$ é a única perpendicular comum às retas r e s.



MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Ver resoluções dos exercícios **8** a **13** no Guia do professor.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

8. Quais das afirmações abaixo são falsas? Justifique. a, b, c

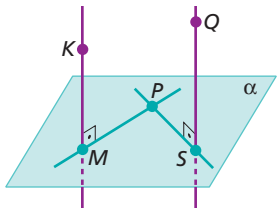
a) Duas retas perpendiculares a uma mesma reta são paralelas entre si.

b) Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular ao plano α é perpendicular à reta r.

c) Se uma reta r está contida em um plano α, então toda perpendicular a r é perpendicular a α.

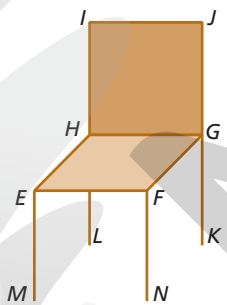
d) Se uma reta r é perpendicular a um plano α e esse plano é paralelo a outro plano β, então r é perpendicular a β.

9. Sejam P, M e S três pontos não colineares, tais que $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{PS}$ estão contidas no plano α. Sejam $\overleftrightarrow{KM} \perp \overleftrightarrow{PM}$, $\overleftrightarrow{QS} \perp \overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{KM} \parallel \overleftrightarrow{QS}$, como mostra a figura abaixo.



Com um colega, mostrem que $\overleftrightarrow{KM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{QS} \perp \alpha$. (*Dica*: Construam por P uma paralela à $\overleftrightarrow{KM}$.)

10. (UFRN) Na cadeira representada na figura, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



Sendo assim, responda às questões a seguir.

a) Os planos (EFN) e (FGJ) são paralelos? não

b) $\overline{HG}$ é um segmento de reta comum aos planos (EFN) e (EFH)? não

c) Os planos (HIJ) e (EGN) são paralelos? não

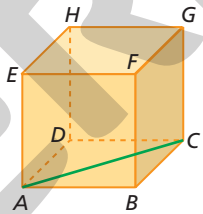
d) $\overline{EF}$ é um segmento de reta comum aos planos (EFN) e (EHG)? sim

11. Considere que um plano α é perpendicular a um plano β, r é uma reta contida em α e r é perpendicular à reta de intersecção entre os planos α e β.

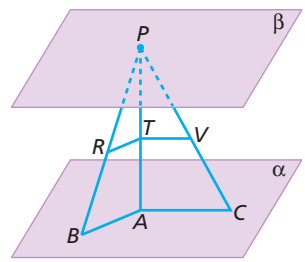
a) Mostre que r é perpendicular ao plano β.

b) Compare a demonstração que você elaborou com a de um colega.

12. Mostre que, no cubo representado a seguir, a diagonal $\overline{AC}$ da face $ABCD$ é perpendicular ao plano $(HFBD)$.



13. Sejam α e β planos paralelos distintos, A, B e C pontos não colineares de α e P um ponto de β, tais que $\overline{PA} \perp \beta$. Se R, T e V são pontos médios de $\overline{PB}$, $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$, respectivamente, prove que o plano (RTV) é paralelo a β.



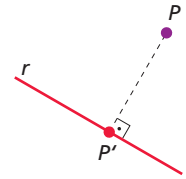
3 Projeção ortogonal e distância

Esse tópico apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento da habilidade **EM13MAT509**, que será objeto de estudo no capítulo "Corpos redondos".

3.1 Projeções ortogonais

Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta

A projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r é o ponto P', que é a intersecção de r com a reta perpendicular a r que passa por P.



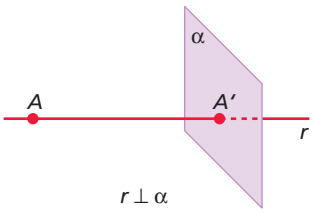
Em particular, se P pertencer a r, sua projeção ortogonal sobre r será o próprio P.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano



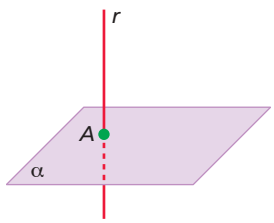
A projeção ortogonal de um ponto A sobre um plano α é o ponto A', que é a intersecção, com esse plano, da reta que passa por A e é perpendicular a α.

Em particular, se A pertencer a α, sua projeção ortogonal sobre α será o próprio A.

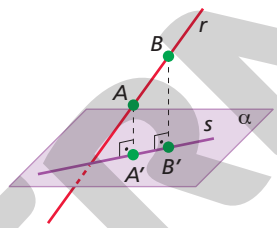
Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

Consideremos uma reta r e um plano α.

Se $r \perp \alpha$, com $r \cap \alpha = \{A\}$, então a projeção ortogonal de r sobre α é o ponto A.



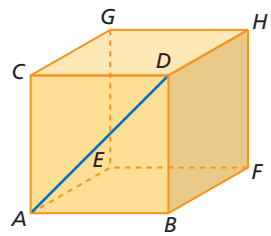
Se a reta r não é perpendicular ao plano α, então a projeção ortogonal de r sobre α é a reta s determinada pela projeção ortogonal de dois pontos distintos de r sobre α.



Exemplo

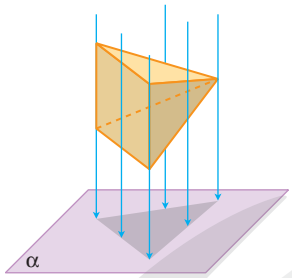
Observe o cubo representado a seguir. Nele, temos que a projeção ortogonal do:

- ponto C sobre o plano (ABE) é o ponto A;
- ponto C sobre o plano (ACE) é o próprio ponto C;
- segmento $\overline{CD}$ sobre o plano (ABE) é o segmento $\overline{AB}$;
- segmento $\overline{AD}$ sobre o plano (ABE) é o segmento $\overline{AB}$;
- segmento $\overline{AC}$ sobre o plano (ABE) é o ponto A.



Observação

A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é a figura formada pelas projeções ortogonais dos pontos dessa figura sobre esse plano.



Observação

O **módulo**, ou **valor absoluto**, de um número real x, indicado por $|x|$, é definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Observação

$d_{B,A} = BA = |(1) - (-2)| = |1 + 2| = |3| = 3$
Assim: $d_{B,A} = BA = d_{A,B} = AB = 3$

3.2 Distâncias

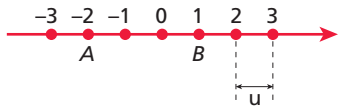
Distância entre dois pontos

Se A e B são dois pontos do espaço, a distância entre eles é a medida do segmento de reta $\overline{AB}$, em certa unidade de medida.

Indicamos a distância de A a B (ou distância de B a A) assim: $d_{A,B}$ (ou $d_{B,A}$)

Exemplo

Na reta numérica, se o ponto A representa o número real -2 e B, o número real 1, então a distância de A a B, ou a distância AB, é 3, que é a medida do segmento $\overline{AB}$, determinada pelo valor absoluto da diferença dos números -2 e 1.



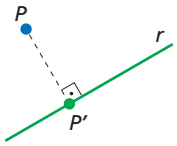
Simbolicamente, temos: $d_{A,B} = AB = |(-2) - (1)| = |-3| = 3$
Nesse caso, a unidade de medida de comprimento utilizada (u) é o comprimento do segmento cujos extremos representam dois números inteiros consecutivos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Distância entre um ponto e uma reta

A distância entre um ponto P e uma reta r é a distância entre P e sua projeção ortogonal P' sobre r.



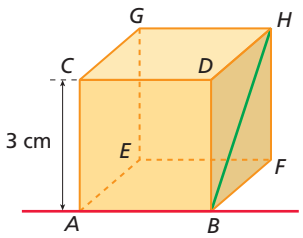
Indicamos a distância de P a r assim: $d_{P,r} = PP'$

Exemplo

A distância do ponto C, de um cubo de aresta 3 cm, à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é 3 cm. A distância HB, do ponto H à reta $\overleftrightarrow{AB}$, é $3\sqrt{2}$ cm, pois o triângulo BHD é retângulo. Portanto, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(HB)^2 = (DH)^2 + (DB)^2 \Rightarrow (HB)^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow$

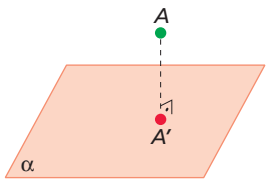
$\Rightarrow HB = 3\sqrt{2}$



Se achar necessário, explicar aos alunos que, no cubo, os planos (ABC) e (BDH) são perpendiculares e, por isso, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ que está contida no plano (ABC) é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BH}$ que está contida no plano (BDH); logo, HB é a distância do ponto H à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Distância entre um ponto e um plano

A distância entre um ponto A e um plano α é a distância entre o ponto A e a sua projeção ortogonal A' sobre α.

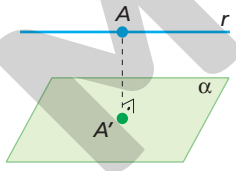


Indicamos a distância de A a α assim: $d_{A,\alpha} = AA'$

Distância entre uma reta e um plano paralelos

Dados um plano α e uma reta r paralelos, a distância entre a reta r e o plano α é a distância entre um ponto A qualquer de r e o plano α.

É interessante enfatizar que o fato de qualquer ponto da reta r estar à mesma distância do plano α não implica que todo ponto de α esteja à mesma distância de r. Observar ainda que aquela distância é o limite inferior desta.



Indicamos a distância de r a α assim: $d_{r,\alpha} = AA'$ (sendo A' a projeção ortogonal de A sobre α).

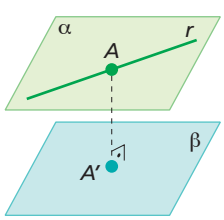
Reflita

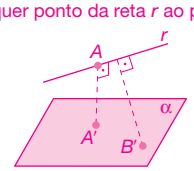
- Se a distância de um ponto A a um plano α é zero, o que podemos afirmar sobre a posição de A em relação a α?
- Se uma reta r é paralela a um plano α, a distância de qualquer ponto de r ao plano α é sempre a mesma. Nessa situação, o que podemos dizer sobre a distância de qualquer ponto de α em relação à reta r?

- Podemos afirmar que o ponto A pertence ao plano α.
- Podemos dizer que a distância de qualquer ponto do plano α à reta r é maior ou igual à distância de qualquer ponto da reta r ao plano α.

Distância entre dois planos paralelos

Dados dois planos paralelos, α e β, a distância entre eles é a distância entre qualquer ponto de α e o plano β ou vice-versa.





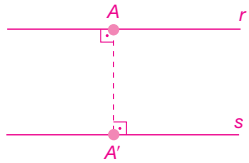
ADILSON SECCO

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

• Dadas duas retas paralelas distintas r e s, a distância entre elas é a distância entre qualquer ponto de r e a projeção ortogonal desse ponto sobre a reta s ou vice-versa.



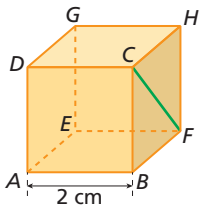
ADILSON SECCO

• A distância entre duas retas coincidentes é zero.

Exemplo

No cubo representado ao lado, temos:

- a distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é igual à distância entre um ponto de uma delas e a outra, por exemplo, entre C e $\overleftrightarrow{EF}$, que é $2\sqrt{2}$ cm;
- a distância entre os planos (CDG) e (ABE) é 2 cm.



Reflita

- Como se obtém a distância entre duas retas paralelas distintas?
- Qual é a distância entre duas retas coincidentes?

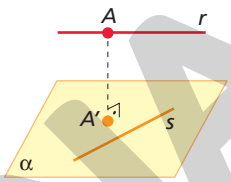
Reflita

A distância entre duas retas reversas pode ser nula? Por quê?

Não, pois elas não têm nenhum ponto comum, ou seja, não se cruzam.

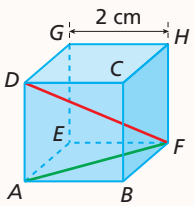
Distância entre duas retas reversas

Dadas duas retas reversas, r e s, a distância entre elas é a distância entre qualquer ponto de r e o plano que contém s e é paralelo a r ou vice-versa.



Exercício resolvido

R7. Considerando o cubo representado ao lado, mostrar que:



a) a distância entre os pontos F e D é $2\sqrt{3}$ cm;

b) a distância entre a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é $\sqrt{2}$ cm.

▸ **Resolução**

a) O $\triangle ABF$ é retângulo em B, que é ângulo interno do quadrado $ABFE$. Como $AB = BF = 2$ cm, pelo teorema de Pitágoras, temos: $(AF)^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AF = 2\sqrt{2}$

O $\triangle DAF$ é retângulo, pois $\overline{DA} \perp$ plano (ABE). Logo, $\overline{DA}$ é perpendicular a todas as retas desse plano que passam por A e, portanto, $\overline{DA} \perp \overline{AF}$.

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle DAF$, temos:

$(DF)^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2$

$(DF)^2 = 4 + 8 = 12 \Rightarrow DF = 2\sqrt{3}$

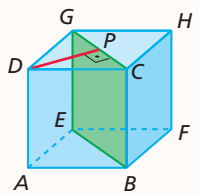
Logo, a distância entre os pontos F e D é $2\sqrt{3}$ cm.

b) A distância entre $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é DP, que é metade da medida da diagonal de uma face do cubo. Assim:

$DP = (2\sqrt{2}) : 2$

$DP = \sqrt{2}$

Logo, a distância entre a reta $\overleftrightarrow{AD}$ e o plano (EBC) é $\sqrt{2}$ cm.



Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

14. (UFSCar-SP) Considere um plano α e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçamos a reta perpendicular a α, a intersecção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre α. No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos. Com relação a um plano qualquer fixado, pode-se dizer que: alternativa e

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semirreta.

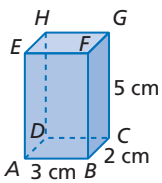
b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.

c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.

d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.

e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

15. Considerando o paralelepípedo representado a seguir, determine a distância entre:



a) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GC}$; 2 cm

b) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG}$; 2 cm

c) $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{DC}$; $\sqrt{29}$ cm

d) $\overleftrightarrow{EF}$ e o plano (HGF); zero

e) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (ABC); 5 cm

f) o plano (EHD) e o plano (FGC); 3 cm

g) o plano (ABC) e o plano (HGF). 5 cm

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

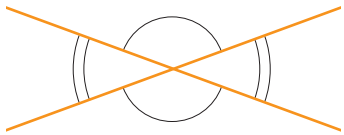
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Ângulos e diedros

Esse tópico apresenta conceitos e conteúdos necessários ao desenvolvimento da habilidade **EM13MAT509**, que será objeto de estudo no capítulo "Corpos redondos".

Ângulo entre duas retas concorrentes

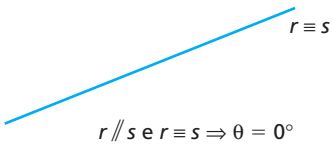
Já vimos que duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice (o.p.v.) e, portanto, congruentes dois a dois.



A partir de agora, fica estabelecido que, quando nos referimos ao ângulo entre duas retas concorrentes não perpendiculares, consideramos aquele de menor medida (se elas forem perpendiculares, o ângulo entre elas mede 90°, por definição de retas perpendiculares). É claro que, conhecida a medida do menor dos quatro ângulos, podemos determinar as medidas dos demais.

Ângulo entre duas retas paralelas

O ângulo entre duas retas paralelas (extensão da ideia de ângulo, de medida θ) tem medida igual a 0°.



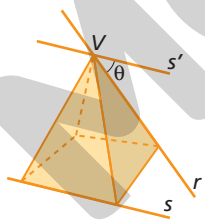
$r \parallel s$ e $r \equiv s \Rightarrow \theta = 0°$

$r \parallel s$ e $r \cap s = \varnothing \Rightarrow \theta = 0°$

Ângulo entre duas retas reversas

O ângulo entre duas retas reversas, r e s (medida θ), é o ângulo formado entre r e s', sendo s' uma reta paralela a s e concorrente com r.

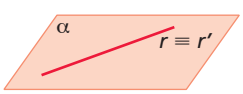
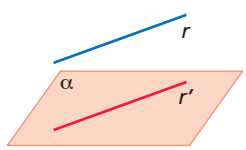
Em linguagem simbólica, escrevemos:
r e s reversas, $s \parallel s'$, $s' \cap r = \{V\}$, ângulo entre r e s' mede $\theta \Rightarrow$ ângulo entre r e s mede θ



Ângulo entre uma reta e um plano

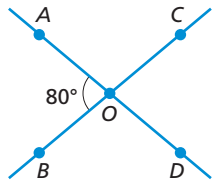
Se uma reta r não é perpendicular a um plano α, o ângulo entre r e α, de medida θ, é o ângulo formado por r e r', sendo r' a projeção ortogonal de r sobre α.

No caso em que r é perpendicular ao plano α, o ângulo mede 90°.

Reta r não concorrente com o plano α ($r \subset \alpha$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$)	
	
$r \subset \alpha \Rightarrow r \equiv r'$ e $\theta = 0°$	$r \parallel \alpha$ e $r \not\subset \alpha \Rightarrow r \parallel r'$ e $\theta = 0°$

Observação

Veja a figura abaixo.

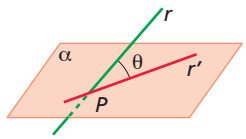
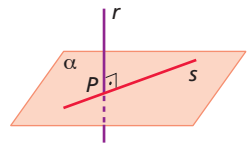


Como os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são o.p.v., temos $m(A\hat{O}B) = m(C\hat{O}D)$, isto é, $m(C\hat{O}D) = 80°$.
Os ângulos $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ são suplementares; então $m(A\hat{O}C) = 100°$. Portanto, $m(A\hat{O}C) = m(B\hat{O}D) = 100°$, pois $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são o.p.v.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reta r concorrente com o plano α ($r \cap \alpha = \{P\}$)	
	
$r \cap \alpha = \{P\} \Rightarrow r \cap r' = \{P\}$ O ângulo entre r e α é o ângulo entre r e r'.	r e α são perpendiculares; então, r e s são perpendiculares. Os ângulos entre r e s e entre r e α medem 90°.

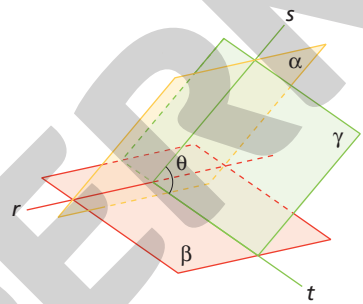
Observação

Quando nos referimos ao ângulo formado por dois planos concorrentes não perpendiculares, consideramos aquele de menor medida, entre as retas s e t.

Ângulo entre dois planos

Se dois planos, α e β, são concorrentes, r é a reta de intersecção deles, γ é um plano perpendicular à reta r e as retas s e t são as intersecções de α e β com γ, então o ângulo entre os planos α e β é o ângulo formado entre as retas s e t.

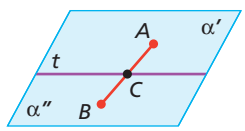
Se dois planos, α e β, são paralelos, então o ângulo entre eles é nulo (mede 0°).



Diedro

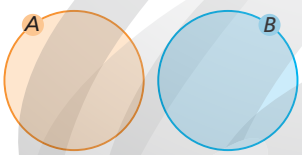
Antes de falarmos sobre diedro, será necessário apresentar um novo postulado, conhecido por **postulado da separação de planos**.

P9 Dada uma reta t contida em um plano α, essa reta divide o plano em dois conjuntos de pontos convexos e disjuntos, α' e α'', de tal modo que o segmento de reta que liga um ponto qualquer pertencente a α' a um ponto qualquer de α'' tem um único ponto em comum com a reta t.



Observação

Quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

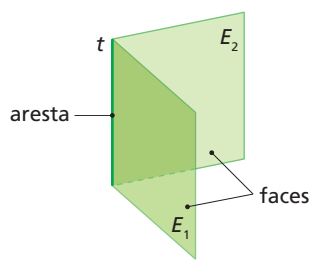


Com base nesse postulado, podemos definir semiplano:

Seja um plano α e uma reta t, contida nesse plano, de tal modo que o plano fique dividido em dois conjuntos de pontos, α' e α'': cada um dos conjuntos $\alpha' \cup t$ e $\alpha'' \cup t$ é chamado de **semiplano**, sendo a reta t a sua origem.

Agora, com base no postulado P9 e na definição de semiplano, vamos definir diedro.

Sejam E_1 e E_2 dois semiplanos de mesma origem t, não contidos em um mesmo plano. Chama-se **diedro** ou **ângulo diedro** a figura formada pela reunião dos semiplanos E_1 e E_2.



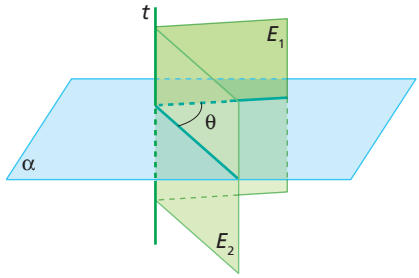
diedro $E_1 \cup E_2$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

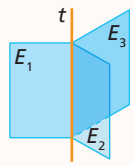
Dado um diedro e um plano α perpendicular à aresta do diedro, chama-se **ângulo plano** a intersecção do plano α com o diedro. A medida θ desse ângulo é considerada a medida do diedro.



Observação

Para medida de diedro, consideraremos $0° < \theta < 180°$.

Exercícios resolvidos

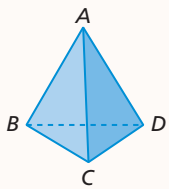


R8. Identificar os diedros representados na figura ao lado.

▸ **Resolução**

$E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_1 \cup E_3$

R9. Nomear os seis diedros do tetraedro representado abaixo.



▸ **Resolução**

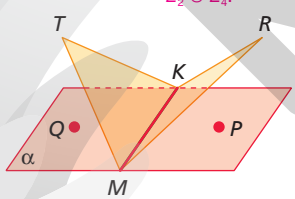
Consideremos os semiplanos E_1 contido no plano (ABC), E_2 contido no plano (ACD), E_3 contido no plano (ADB) e E_4 contido no plano (BCD). Assim, temos:

- $E_1 \cup E_4$ (origem $\overleftrightarrow{BC}$)
- $E_1 \cup E_2$ (origem $\overleftrightarrow{AC}$)
- $E_1 \cup E_3$ (origem $\overleftrightarrow{AB}$)
- $E_2 \cup E_4$ (origem $\overleftrightarrow{CD}$)
- $E_2 \cup E_3$ (origem $\overleftrightarrow{AD}$)
- $E_3 \cup E_4$ (origem $\overleftrightarrow{BD}$)

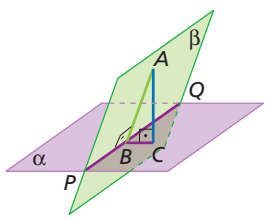
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

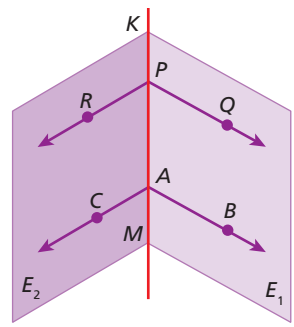
16. Nomeie todos os diedros da figura. (*Dica*: Existem mais de três diedros.) $E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$.



17. Na figura abaixo, a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α é $\overline{BC}$ tal que $AB = 2 \cdot BC$. O segmento $\overline{PQ}$ é perpendicular ao plano (ABC). Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$. 60°



18. Seja $E_1 \cup E_2$ um diedro de aresta $\overleftrightarrow{KM}$, tal que as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{PQ}$ estão em E_1 e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{PR}$ estão em E_2.



Ver resolução no Guia do professor.

a) Se a medida dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, podemos afirmar que $B\hat{A}C$ é um ângulo plano do diedro? Justifique. sim

b) Se a medida do ângulo $R\hat{P}Q$ é 90°, podemos afirmar que $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AB}$? Justifique. não

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

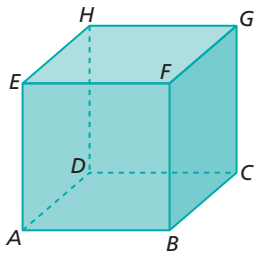
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. Dois planos, α e β, interceptam-se em uma reta r. Escreva quantas retas paralelas a r passam por um ponto A de α. uma reta paralela

2. Considere o cubo representado abaixo.



Indique a posição relativa entre:

a) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{GC}$; reversas

b) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; paralelas

c) $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{EF}$; perpendiculares

d) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (ABC); paralelos

e) $\overleftrightarrow{EH}$ e o plano (DCG); perpendiculares

f) o plano (ABF) e o plano (EHG). perpendiculares

3. Identifique qual das afirmações a seguir é falsa. Justifique sua resposta. afirmação a

a) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.

b) Se dois planos são paralelos, então toda reta de um é paralela a uma reta do outro.

c) Se duas retas são reversas, então existe uma única perpendicular comum a elas.

4. Escreva como pode ser a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano. uma reta ou um ponto

5. A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo contido em α. Se P dista $2\sqrt{3}$ m da hipotenusa desse triângulo e 2 m do plano α, determine a medida da altura relativa à hipotenusa. $2\sqrt{2}$ m

6. Quais são as possíveis projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano? E de uma esfera?

7. Qual é a distância entre um plano e uma reta nele contida? zero

8. Um ponto contido em uma face de um diedro de 30° dista 9 m da outra face desse diedro. Determine quanto esse ponto dista da aresta do diedro. 18 m

9. A projeção ortogonal de um ponto A interior a um diedro de 60° determina os pontos A_1 e A_2 em cada uma das faces desse diedro. Calcule a medida do ângulo $A_1\hat{A}A_2$. 120°

Aprofundamento

10. Uma circunferência está contida em um plano α que é perpendicular a um plano β. Determine a projeção ortogonal dessa circunferência sobre o plano β.

10. A projeção ortogonal é um segmento de reta de mesma medida que o diâmetro da circunferência.

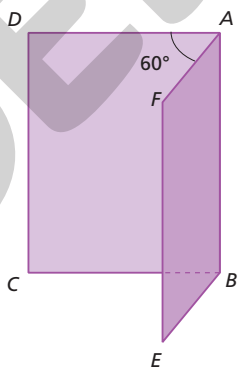
11. O segmento $\overline{PA}$ é perpendicular ao plano que contém o triângulo equilátero ABC. Se $AB = 2 \cdot AP$ e M é o ponto médio de $\overline{BC}$, determine a medida do ângulo formado pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PM}$. 60°

Lembre que:

$$\text{tg}\,(A\hat{P}M) = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} \text{ e } \text{tg}\,60° = \sqrt{3}.$$

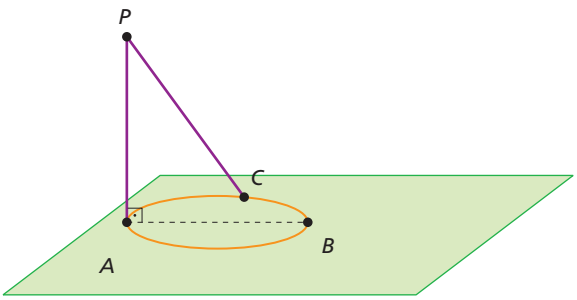
Desafio

12. (UFPE) Na ilustração abaixo, $ABCD$ e $ABEF$ são retângulos, e o ângulo $D\hat{A}F$ mede 60°. Se $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{30}$, $\overline{BE}$ mede 6 e $\overline{BC}$ mede 10, qual a distância entre os vértices C e F? 14 unidades de comprimento



(*Dica*: Lembrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$.)

13. De uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ levanta-se por A um segmento $\overline{AP}$ perpendicular ao plano da circunferência. Une-se P a um ponto C qualquer da circunferência, distinto de B.



Ver resolução no Guia do professor.

a) Prove que as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ são perpendiculares.

b) Sabendo que $AB = AP = 8$ cm e C é o ponto médio do arco $\overset{\frown}{AB}$, determine a medida do ângulo $C\hat{P}B$. 30°

6. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser: um segmento, uma elipse ou uma circunferência; a projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Dados dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r \parallel s$ e t e m são reversas, a semelhança que existe entre esses dois pares é que as retas de cada par: alternativa c

a) são coplanares.

b) não são coplanares.

c) não têm nenhum ponto comum.

d) têm apenas um ponto comum.

2. Dados dois pares de retas distintas, (r, s) e (t, m), tais que $r \parallel s$ e t e m são reversas, a diferença que existe entre esses dois pares é que: alternativa a

a) r e s são coplanares, mas m e t não são.

b) r e s não são coplanares, mas m e t são.

c) r e s, bem como m e t, não têm ponto comum.

d) nenhuma das anteriores.

3. Uma reta r é perpendicular a uma reta s, contida em um plano α, e r é ortogonal a uma reta t, contida em α e concorrente com s. Portanto, podemos afirmar que: alternativa b

a) r não pode ser perpendicular a α.

b) r é necessariamente perpendicular a α.

c) r pode ser paralela a α.

d) nenhuma das anteriores.

4. Um plano α é paralelo a duas retas distintas, r e s. Assim, pode-se afirmar que r e s: alternativa b

a) são paralelas, necessariamente.

b) podem ser perpendiculares.

c) são reversas, necessariamente.

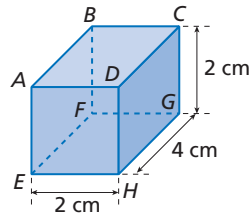
d) não são perpendiculares.

5. Se a projeção ortogonal de uma reta r sobre um plano α é um ponto P, então: alternativa d

a) $r \parallel \alpha$ **c)** $r \cap \alpha \neq P$

b) $r \cap \alpha = \varnothing$ **d)** $r \perp \alpha$

Considere a figura ao lado para responder às questões **6** a **9**.



6. A distância entre os pontos A e C é: alternativa d

a) 2 cm **c)** 20 cm

b) 4 cm **d)** $2\sqrt{5}$ cm

7. A distância entre o ponto A e o plano (BCF) é: alternativa b

a) 2 cm **c)** 20 cm

b) 4 cm **d)** $5\sqrt{2}$ cm

8. A distância entre o ponto A e a reta $\overleftrightarrow{GH}$ é: alternativa a

a) $2\sqrt{2}$ cm **c)** 20 cm

b) 4 cm **d)** $5\sqrt{2}$ cm

9. A distância entre o ponto A e o plano (DHE) é: alternativa d

a) 2 cm **b)** 4 cm **c)** 20 cm **d)** 0 cm

10. O ângulo entre a reta r e o plano α é nulo. Então, podemos afirmar que: alternativa d

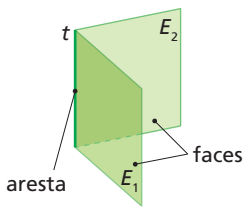
a) existe um ponto P tal que $r \cap \alpha = \{P\}$.

b) existe uma reta $s \subset \alpha$ tal que $r \perp s$.

c) a reta r é perpendicular ao plano α.

d) $r \cap \alpha = r$ ou $r \cap \alpha = \varnothing$.

11. A figura ao lado, formada pela reunião dos semiplanos de mesma origem e não coincidentes E_1 e E_2, é denominada: alternativa c



a) projeção.

b) sólido.

c) diedro.

d) plano.

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente.

Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão										
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Identificar a posição relativa entre retas; planos; retas e planos; e aplicá-las na resolução de problemas.	X	X	X	X	X					X	
Identificar e calcular distâncias entre pontos; ponto e reta; ponto e plano; retas; reta e plano; planos.						X	X	X	X		
Identificar um ângulo diedro e determinar sua medida.											X
Páginas do livro referentes ao conceito	44 a 50	44 a 50	50 a 55	50 a 55	55 e 56	56	57	57	57	47 a 56	59 a 61

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

3

Poliedros

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **2**, **3**, **4** e **5**; habilidades **EM13MAT201**, **EM13MAT309**, **EM13MAT315** e **EM13MAT504**.

Jogos eletrônicos despertam a atenção e são de interesse de muitos jovens e adolescentes; por isso, esta abertura se insere em um contexto de cultura juvenil.

Objetivos do capítulo

- Identificar poliedros – incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides – e seus elementos.
- Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.
- Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.
- Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).

Além de desenvolver a criatividade, a matemática também pode ser recreativa.

Nos celulares e em outras plataformas da informática, jogos eletrônicos aplicam conceitos matemáticos não só na estrutura lógica de seus programas, ao gerenciar a animação do enredo e da trama, mas também como objeto principal do entretenimento a que se destina.

Por exemplo, imagine um jogo no qual a construção em perspectiva de cenários e de adereços é feita por meio da composição e da justaposição de cubos e de aglomerados de cubos que formam outros poliedros. Essa construção está inserida em um contexto animado com perigos, armadilhas e disputa entre personagens, também compostos de cubos, com restrições de prazos e com outros desafios a serem superados na busca de um bom desempenho dos melhores competidores.

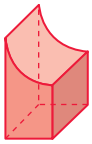
Um jogo como esse, que tem tratamento gráfico com poliedros, além de ampliar a visão espacial do usuário, desenvolve habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Neste capítulo, vamos estudar um pouco mais sobre poliedros.

1 Sólidos geométricos

O estudo das mais variadas formas geométricas sempre instigou a mente humana. Um destaque nesse campo de interesse são as figuras que hoje denominamos **sólidos geométricos**. Um dos motivos para a importância desse estudo é a constante aplicabilidade das propriedades dos sólidos geométricos a situações do mundo físico tratadas em diversas áreas do conhecimento, como a Arquitetura, a Engenharia e as Artes.

Observação

O sólido a seguir não é do grupo dos corpos redondos nem do grupo dos poliedros.



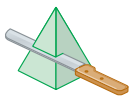
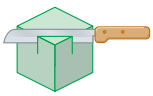
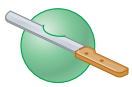
1.1 Sólidos geométricos e figuras planas

Olhando ao redor, observamos diversos objetos que lembram figuras geométricas planas e não planas. As superfícies podem ser planas ou não planas, ao passo que os sólidos são sempre não planos.

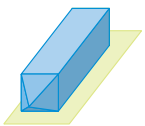
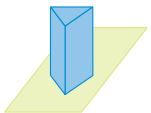
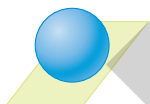
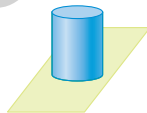
Embora os sólidos geométricos exibam formas bastante diversas, é possível classificá-los em três grandes grupos: os **poliedros**, os **corpos redondos** e outros (aqueles que não se encaixam na categoria dos poliedros nem dos corpos redondos).

Veja nos quadros a seguir algumas figuras planas que podem ser obtidas de alguns sólidos geométricos.

- Secção dos sólidos por planos:

	Poliedros		Corpos redondos		
Sólido					
Região de corte (figuras planas)					

- Apoiando os sólidos em um plano:

	Poliedros		Corpos redondos		
Sólido					
Região de apoio (figuras planas)	retângulo	triângulo	ponto	segmento	círculo

Neste capítulo, vamos estudar um dos tipos de sólidos geométricos: os poliedros.

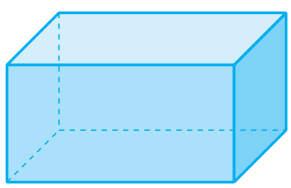
2 Poliedros

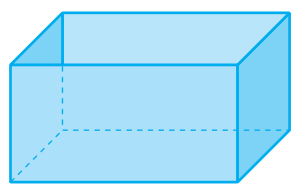
2.1 Superfície poliédrica fechada e poliedros

Todo poliedro apresenta uma superfície chamada superfície poliédrica fechada.

Uma **superfície poliédrica fechada** é composta de um número finito (maior ou igual a quatro) de superfícies poligonais planas, de modo que cada lado de uma dessas superfícies coincida com apenas um lado da outra.

Observe as figuras abaixo.





Entre essas duas figuras apenas a da esquerda representa uma superfície poliédrica fechada.

Considerando que uma superfície poliédrica fechada delimita uma porção do espaço em seu interior, vamos definir poliedro.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

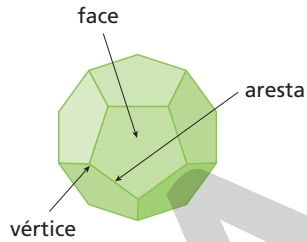
MODERNA

Poliedro (do grego *poli*, "muitas, várias", e *edro*, "face") é o sólido geométrico formado pela reunião de uma superfície poliédrica fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela.

Elementos de um poliedro

Em um poliedro, podemos destacar os seguintes elementos:

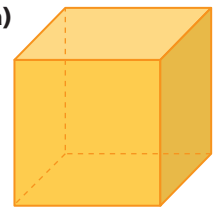
- **Face** – cada uma das superfícies poligonais que compõem a superfície do poliedro.
- **Aresta** – lado comum a duas faces.
- **Vértice** – ponto comum a três ou mais arestas.



Um poliedro costuma ser nomeado de acordo com o número de faces que possui. Para isso, justapõem-se dois elementos: um de origem grega, indicativo do número de faces, e o elemento de composição *edro*. Por exemplo, um poliedro de 4 faces chama-se tetraedro: *tetra* (4) + *edro* (face).

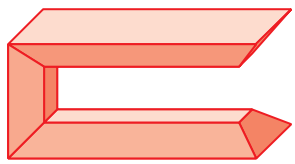
Exemplos

a)



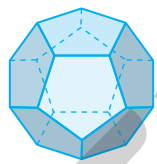
hexaedro { 6 faces; 8 vértices; 12 arestas }

b)



tetradecaedro { 14 faces; 16 vértices; 28 arestas }

c)



dodecaedro { 12 faces; 20 vértices; 30 arestas }

Observação

As arestas do poliedro são os lados dos polígonos que determinam as faces.
Os vértices do poliedro são os vértices desses polígonos.

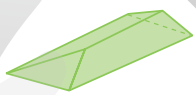
Veja no quadro abaixo alguns dos nomes de poliedros.

Número de faces	4	5	6	7	8	12	20
Nome do poliedro	tetraedro	pentaedro	hexaedro	heptaedro	octaedro	dodecaedro	icosaedro

Exercícios propostos

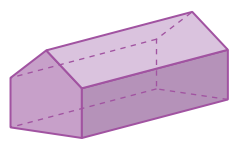
Registre as respostas em seu caderno.

1. Escreva o nome do poliedro representado abaixo.



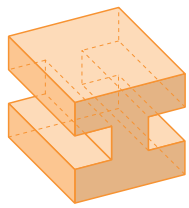
pentaedro

2. Um galpão tem o formato representado pela figura ao lado. Qual é o nome do poliedro correspondente?



heptaedro

3. Analise o sólido abaixo para responder à questão.



Quantas faces, arestas e vértices esse sólido tem? 14 faces, 36 arestas e 24 vértices

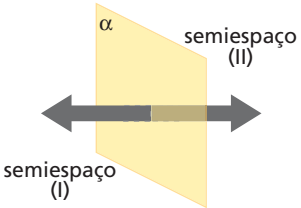
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Um plano α divide o espaço em dois **semiespaços** de mesma origem α.

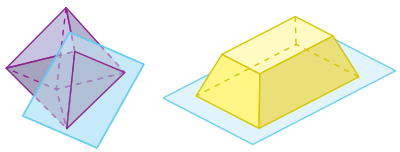
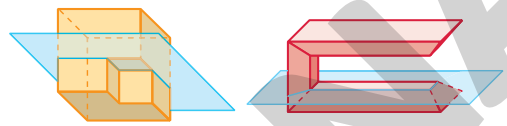


2.2 Poliedro convexo e poliedro não convexo

Os poliedros que não apresentam "reentrâncias" em sua superfície são denominados **convexos**; os que têm "reentrâncias" são denominados **não convexos** (ou **côncavos**). De maneira mais precisa:

> Se cada plano que contém uma face de um poliedro posiciona as demais faces em um mesmo semiespaço, então o poliedro em questão é **convexo**; caso contrário, é **não convexo** (ou **côncavo**).

Em cada figura abaixo, foi destacado um plano que contém uma das faces do poliedro. Observe.

Poliedros convexos	Poliedros não convexos
	

COLEÇÃO PARTICULAR

Esse selo comemorativo, de 1983, mostra a importância da descoberta da relação de Euler, matemático suíço que viveu no século XVIII.

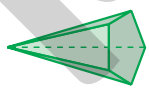
Relação de Euler

Os elementos dos poliedros mantêm entre si muitas relações geométricas, numéricas e métricas. Entre as relações numéricas uma das mais importantes é denominada **relação de Euler**, que relaciona o número de vértices (V), de arestas (A) e de faces (F) de qualquer poliedro convexo. Essa relação pode ser escrita assim:

$$V + F - A = 2$$

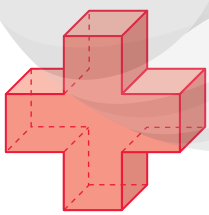
Exemplos

Vamos verificar a validade da relação de Euler para os poliedros convexos representados abaixo.

Poliedro	Vértice (V)	Face (F)	Aresta (A)	$V + F - A$
	8	6	12	2
	6	6	10	2
	6	5	9	2

Observação

Embora todo poliedro convexo satisfaça a relação de Euler, nem sempre um poliedro que satisfaz essa relação é convexo. Observe, como exemplo, o poliedro representado abaixo.



Ele tem 24 vértices, 14 faces e 36 arestas. Assim:
$24 + 14 - 36 = 2$
$V + F - A = 2$
Logo, esse poliedro satisfaz a relação de Euler, mas não é convexo.

Exercícios resolvidos

R1. Obter o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 8 vértices.

▸ **Resolução**

Como a relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow A = 8 + 6 - 2 \Rightarrow A = 12$

Portanto, esse poliedro possui 12 arestas.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2. Quantos vértices tem um poliedro convexo com 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares?

▸ **Resolução**

O número de faces do poliedro é 4 + 5, ou seja, 9.

As 4 faces triangulares têm 12 lados (4 · 3), e as 5 faces quadrangulares têm 20 lados (5 · 4). Então, o número de arestas é dado por (12 + 20) : 2 = 16, pois cada aresta é lado comum de exatamente duas faces (portanto, cada aresta foi contada duas vezes). Assim, o poliedro tem 16 arestas e 9 faces. Logo:

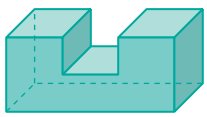
$V + 9 - 16 = 2 \Rightarrow V = 9$

Portanto, esse poliedro tem 9 vértices.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

4. Determine o número de vértices, de faces e de arestas de cada poliedro e, depois, classifique-os em convexo ou não convexo.

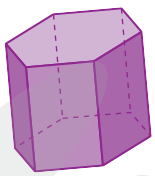
a) 

$V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$; não convexo

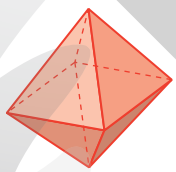
b)

$V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$; convexo

5. Verifique a validade da relação de Euler para cada poliedro.

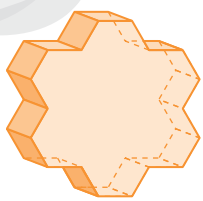


poliedro I



poliedro II

6. Alberto é torneiro mecânico e deve construir uma peça maciça de acordo com o modelo abaixo.

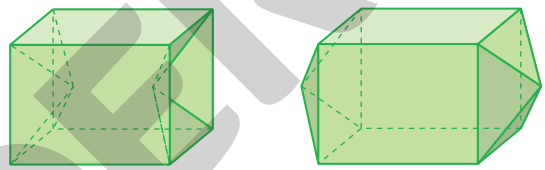


Verifique se o poliedro que essa peça lembra satisfaz a relação de Euler.

sim; $V = 36$, $F = 20$, $A = 54$ e $36 + 20 - 54 = 2$

7. Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem apenas 2 faces pentagonais e 5 faces quadrangulares. 10 vértices

8. Observe os poliedros e, em seguida, responda às questões.



poliedro I poliedro II

Qual desses poliedros:

a) é um poliedro côncavo? poliedro I

b) têm mais faces? Ambos têm 12 faces.

c) têm menos vértices? Ambos têm 10 vértices.

d) têm mais arestas? Ambos têm 20 arestas.

e) satisfaz a relação de Euler? Ambos satisfazem a relação de Euler.

9. Em um poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro. 8 faces

10. Um poliedro convexo com 11 vértices tem o número de faces triangulares igual ao número de faces quadrangulares e 1 face pentagonal. Calcule o número de faces desse poliedro. 11 faces

11. Calcule o número de faces triangulares e quadrangulares de um poliedro convexo (que só tem esses dois tipos de face) com 20 arestas e 10 vértices. 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares

12. Um poliedro convexo de 9 vértices é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. O número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares são números inteiros consecutivos. Determine o número de faces e de arestas. 9 faces e 16 arestas

5.

Poliedro	V	F	A	$V + F - A$
I	12	8	18	$12 + 8 - 18 = 2$
II	6	8	12	$6 + 8 - 12 = 2$

A relação de Euler é válida para os dois poliedros indicados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observações

- Uma superfície poligonal plana é regular se o polígono que a compõe é regular.
- Um polígono é regular se tem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes entre si.
  Veja um exemplo:

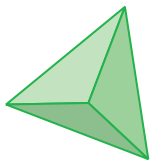
pentágono regular

Poliedros regulares

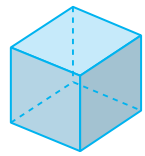
Um poliedro convexo é **regular** quando satisfaz as seguintes condições:

- apresenta todas as faces poligonais regulares e congruentes entre si;
- de todos os vértices parte o mesmo número de arestas.

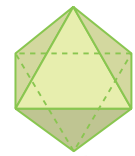
Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares. Observe abaixo um exemplo de cada uma dessas classes.



tetraedro regular

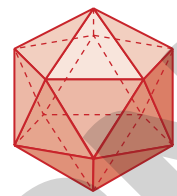


hexaedro regular (ou cubo)

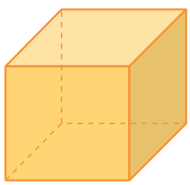


octaedro regular

dodecaedro regular



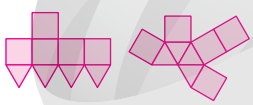
icosaedro regular



Reflita

- Com um colega, obtenham pelo menos outras duas planificações da superfície do sólido do exemplo **a**.
- Agora, respondam: é possível obter outra planificação do sólido do exemplo **b**?

- Respostas possíveis:



- Não é possível, pois qualquer outro posicionamento das quatro faces triangulares resultaria em um triângulo equilátero ou em um paralelogramo respectivamente congruentes às planificações já representadas.

NELSON MATSUDA

2.3 Planificação da superfície de um poliedro

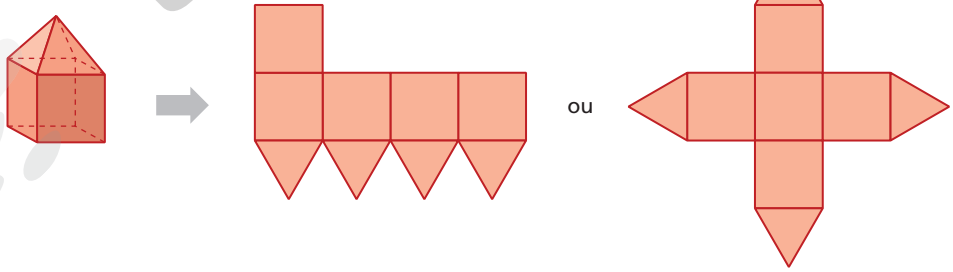
Os poliedros podem ser representados de diferentes maneiras; por exemplo, em perspectiva ou pela planificação de sua superfície. Até agora, você tem observado a representação de alguns poliedros em perspectiva, como o cubo representado ao lado.

Entretanto, a superfície de um poliedro, que é formada de superfícies poligonais planas, pode ser colocada sobre um plano de tal modo que cada uma das faces do poliedro tenha pelo menos um lado em comum com outra face. Obtemos, assim, uma figura plana, que costuma ser chamada de **molde do poliedro**, ou **planificação da superfície do poliedro**, ou simplesmente **planificação do poliedro**.

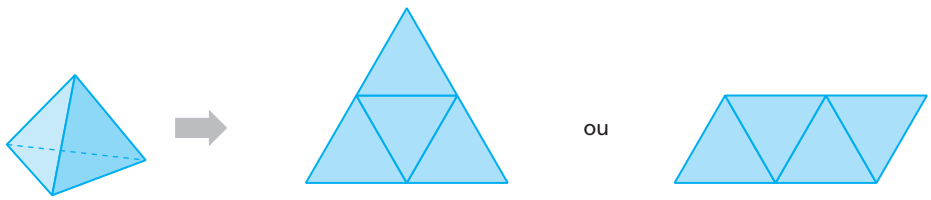
De modo geral, as faces de um poliedro podem ser arranjadas de vários modos diferentes, desde que cada face esteja ligada a outra por pelo menos um de seus lados.

Exemplos

a)



b)



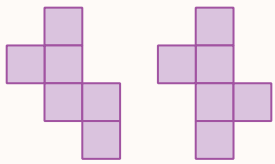
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

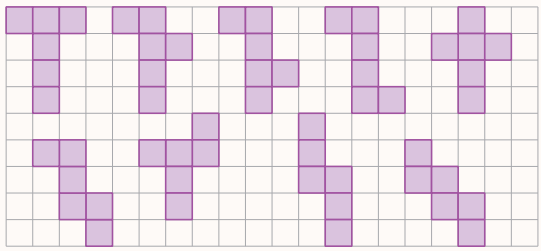
Exercícios resolvidos

R3. Existem 11 diferentes planificações para o cubo. Duas delas estão representadas abaixo; desenhar as outras 9 planificações.

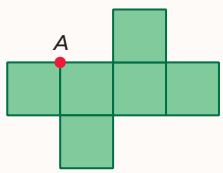


▸ **Resolução**

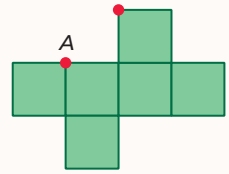
A resolução desta questão fica facilitada se usarmos uma malha quadriculada. Estas são as outras possibilidades:



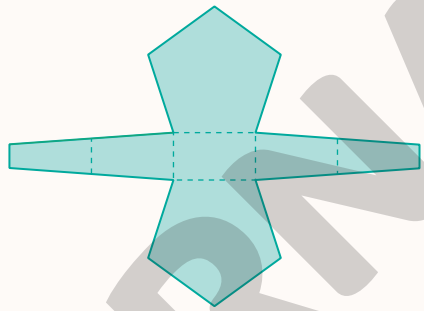
R4. Na planificação da superfície de um cubo foi assinalado um ponto A. Marcar nessa planificação o ponto que coincidirá com A depois de montado o cubo.



▸ **Resolução**



R5. Qual é o número de vértices do sólido obtido ao dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas da figura abaixo?



▸ **Resolução**

O sólido obtido é um heptaedro; logo, o número de faces é 7.

Como há 5 faces quadrangulares e 2 faces pentagonais, o número de arestas é:

$$A = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{2} = 15$$

Uma vez que o sólido obtido é convexo, a relação de Euler é válida. Desse modo, temos:

$V + F - A = 2 \Rightarrow V + 7 - 15 = 2 \Rightarrow V = 10$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

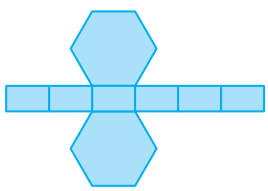
13. Da superfície de um poliedro regular de faces pentagonais foram retiradas as três faces adjacentes a um vértice comum. Calcule o número de arestas, de faces e de vértices da superfície poliédrica que restou. 27 arestas, 9 faces e 19 vértices

14. Faça o que se pede.

a) Represente a planificação da superfície de um poliedro que tem 3 faces quadradas e 4 faces triangulares.

b) Compare a planificação que você elaborou com a de um colega. resposta pessoal

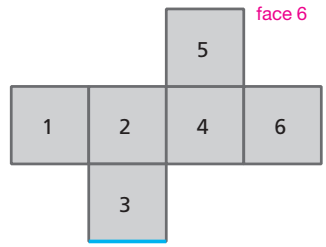
15. Determine o número de arestas e de vértices do poliedro cuja planificação está indicada ao lado.



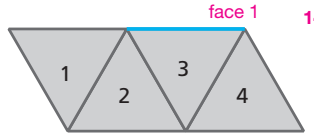
18 arestas e 12 vértices

16. Em cada uma das planificações abaixo, anote o número da face que coincidirá com a face que tem o lado destacado em azul depois que o sólido for montado.

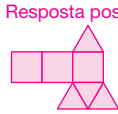
a)



b)



14. a) Resposta possível:



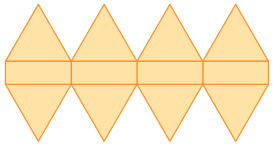
ADILSON SECCO

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

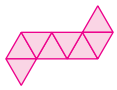
MODERNA

17. Considere que a figura ao lado seja a planificação da superfície de um poliedro convexo. Qual é a soma do número de arestas e do número de vértices do poliedro? 30



18. Represente a planificação de um octaedro regular.

18. Resposta possível:

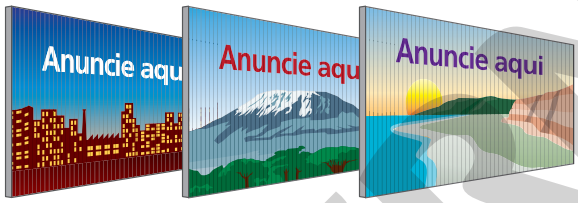


ADILSON SECCO

3 Prismas

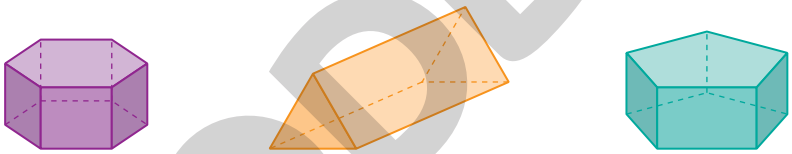
Vários objetos do espaço em que vivemos têm o formato de poliedros, entre os quais destacamos os **prismas**.

Até mesmo painéis publicitários (*outdoors* triédricos), construídos com prismas, são empregados para otimizar espaços de propaganda. Os prismas verticais fazem rotação sincronizada de 120° e apresentam três imagens em um só painel.



Desde as mais simples embalagens até as mais elaboradas edificações, muitos são os exemplos da presença dos prismas no dia a dia.

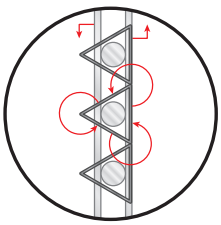
Observe os prismas representados abaixo.



Note que todos eles possuem pelo menos um par de faces paralelas e congruentes e pelo menos três faces paralelogrâmicas (lados paralelos dois a dois). Esse fato, embora não seja exclusivo dos prismas, ocorre em todos eles.

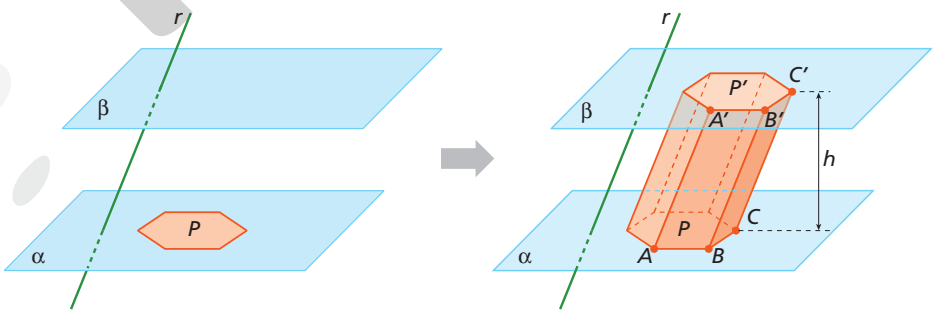
Observação

Detalhe de vista de cima do funcionamento do *outdoor* triédrico.



3.1 Definição de prisma

Consideremos dois planos paralelos distintos, α e β, uma região poligonal convexa P contida em α e uma reta r que intercepta os planos α e β.



Chama-se **prisma** o poliedro formado por todos os segmentos de reta paralelos a r tais que uma de suas extremidades é um ponto da região P e a outra extremidade é um ponto no plano β.

Se a reta r é perpendicular aos planos α e β, dizemos que o prisma é **reto**; caso contrário, ele é **oblíquo**. Observe que o prisma representado anteriormente é oblíquo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Elementos de um prisma

Considerando o prisma da página anterior, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Bases** – as regiões poligonais P e P', que são congruentes e estão situadas em planos paralelos (α e β, respectivamente).
- **Faces laterais** – as regiões poligonais $AA'B'B$, $BB'C'C$ etc.
- **Arestas das bases** – os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ etc.
- **Arestas laterais** – os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ etc.
- **Altura do prisma** – a distância h entre os planos das bases (α e β).

Reflita

Que tipo de polígono compõe as faces laterais de um prisma reto? Justifique sua resposta.

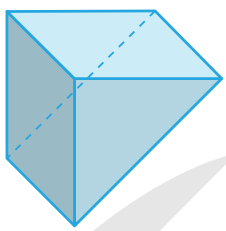
O retângulo, pois o fato de a reta r ser perpendicular aos planos garante os quatro ângulos internos retos para as faces laterais.

Classificação dos prismas

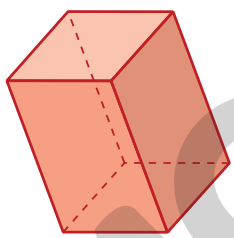
Os prismas podem ser classificados de acordo com alguns critérios. Um deles você já conhece: a inclinação da reta r em relação aos planos α e β que contêm as bases. É essa reta que define a inclinação das arestas laterais dos prismas em relação às bases. Nos prismas retos, as arestas laterais são perpendiculares às bases; nos oblíquos, não.

Outro critério para classificar os prismas é o que considera o polígono que determina as bases. Se esse polígono é um triângulo, o prisma é **triangular**; se é um quadrilátero, o prisma é **quadrangular**; se é um pentágono, o prisma é **pentagonal**; e assim por diante.

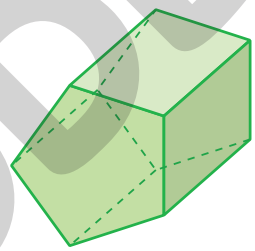
Exemplos



prisma triangular

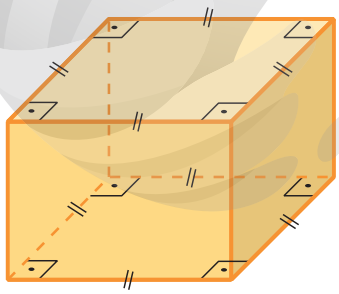


prisma quadrangular

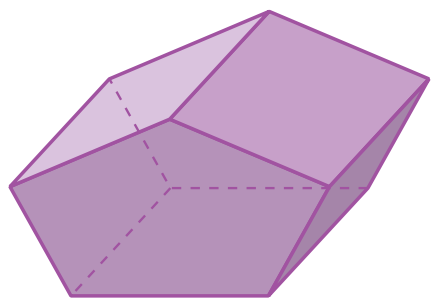


prisma pentagonal

Um prisma reto cujas bases são superfícies poligonais regulares é denominado **prisma regular**.



Esse prisma é regular, pois as bases são quadradas e ele é reto.



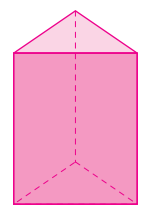
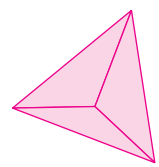
Esse prisma não é regular, pois as bases não são polígonos regulares.

Entre os prismas quadrangulares, aqueles que têm bases paralelogrâmicas são chamados de **paralelepípedos**; esses, por sua vez, podem ser retos ou oblíquos.

Reflita

- Todo prisma regular é um poliedro regular? não
- Todo poliedro regular é um prisma regular? não

Veja os contraexemplos:

Prisma regular que não é poliedro regular	Poliedro regular que não é prisma regular
	

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Nessa atividade, os alunos têm a oportunidade de verificar, por meio das definições de poliedro regular e de prisma regular, quais dos poliedros regulares são prismas, além de produzir contraexemplos para fundamentar sua resposta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

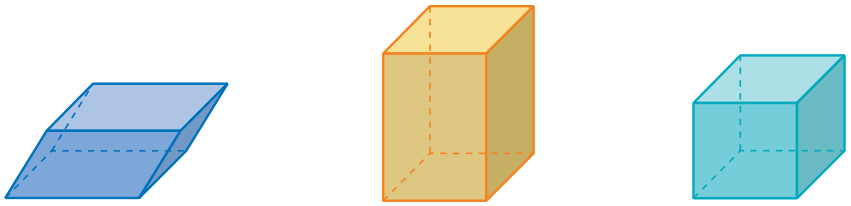
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Verificar a conveniência de questionar por que a maioria dos objetos, em particular as embalagens, tem o formato de um paralelepípedo.

Se um paralelepípedo reto tem bases retangulares, é chamado de **paralelepípedo reto-retângulo** ou **bloco retangular**; se tem todas as faces congruentes, denomina-se **cubo**.

Exemplos



paralelepípedo oblíquo | paralelepípedo reto-retângulo | cubo

3.2 Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

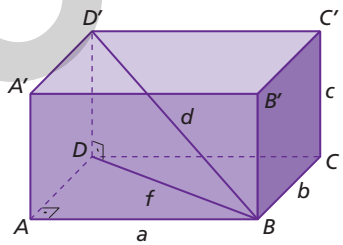
Rafael faz carretos com seu caminhão-baú. Para fechar o contrato de uma encomenda para o transporte de um mastro de bandeira com 5,9 m de comprimento, ele precisa saber antecipadamente se esse mastro caberá dentro da carroceria, cujas dimensões internas são 2 m, 3 m e 5 m. Rafael poderá aceitar a encomenda?

SUPERTROOPER/SHUTTERSTOCK

Observe que a carroceria lembra um paralelepípedo reto-retângulo. A maior medida linear interna dela é a da diagonal desse paralelepípedo. Logo, para saber se pode aceitar a encomenda, Rafael deve calcular a diagonal e comparar com o comprimento do mastro.

Diagonal de um paralelepípedo é todo segmento cujas extremidades são vértices desse paralelepípedo que não pertencem a uma mesma face.

Considere um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c.



Reflita

Quantas diagonais tem um paralelepípedo reto-retângulo?

Todo paralelepípedo reto-retângulo tem quatro diagonais. Na figura ao lado, por exemplo, são: $\overline{BD'}$, $\overline{DB'}$, $\overline{AC'}$ e $\overline{CA'}$.

Para obter a medida d da diagonal desse paralelepípedo, podem ser considerados os triângulos retângulos ABD, retângulo em A e DBD', retângulo em D.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ADB, temos:

$f^2 = a^2 + b^2$ (I)

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo DBD', temos:

$d^2 = f^2 + c^2$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

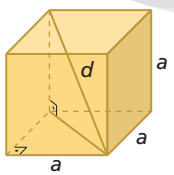
$d^2 = (a^2 + b^2) + c^2$

Portanto, a medida d da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Reflita

Se o paralelepípedo reto-retângulo é um cubo, todas as suas arestas são congruentes.



Qual é a medida das diagonais em função da medida das arestas?

$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$

$d = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{3}$

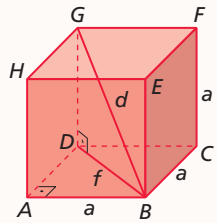
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercício resolvido

R6. Calcular a medida da aresta de um cubo cuja medida da diagonal excede em $\sqrt{2}$ cm a medida da diagonal da base.



▸ Resolução

Sendo d a medida da diagonal do cubo e f a medida da diagonal da base, temos, pelos dados do problema:
$d = f + \sqrt{2} \Rightarrow d - f = \sqrt{2}$ (I)

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABD, temos:
$f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}$ (II)

Por se tratar de um cubo, sabemos que: $d = a\sqrt{3}$ (III)

Assim, substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$d - f = \sqrt{2} \Rightarrow a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow a \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{6} + 2}{3 - 2} \Rightarrow a = \sqrt{6} + 2$$

Portanto, a aresta do cubo mede $(2 + \sqrt{6})$ cm.

Reflita

Qual é o maior segmento cujas extremidades são vértices de um cubo? E qual é o menor?

Observar a figura do exercício **R6** e considerar:
- o triângulo ABD, isósceles, retângulo, de catetos medindo a e hipotenusa medindo f; então, $a < f$;
- o triângulo BDG, retângulo, de catetos medindo a e f e hipotenusa medindo d; então, $a < f < d$.

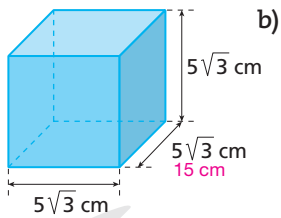
Portanto, o maior segmento é uma diagonal do cubo; o menor é uma aresta.
Esta atividade permite os alunos ampliarem o estabelecimento de relações métricas entre elementos de um cubo, além de exercitar um procedimento de análise.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

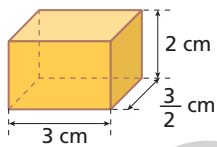
19. Calcule a medida das diagonais dos paralelepípedos reto-retângulos representados abaixo.

a)



15 cm

b)



$\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm

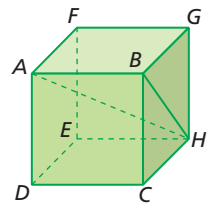
20. Um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a cm, 4 cm e 7 cm tem diagonal medindo $3\sqrt{10}$ cm. Calcule o valor de a. 5 cm

21. Calcule a medida da diagonal interna da carroceria do caminhão de Rafael, citado na página anterior, e conclua se Rafael pode aceitar a encomenda do carreto do mastro de bandeira.

SUPERTROOPER/SHUTTERSTOCK

22. As medidas das arestas de um paralelepípedo reto-retângulo são proporcionais a 3, 4 e 12. Se a diagonal mede 130 cm, então quais são essas medidas? 30 cm, 40 cm e 120 cm

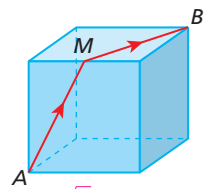
23. O sólido representado ao lado é um cubo cujas arestas medem 4 cm. Calcule a área do triângulo ABH.



$8\sqrt{2}$ cm²

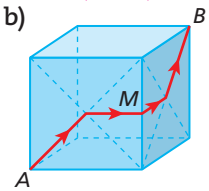
24. Em cada item, calcule a medida do caminho de A a B destacado sobre a superfície do cubo de aresta medindo 3 cm. O ponto M é o ponto médio de uma aresta.

a)



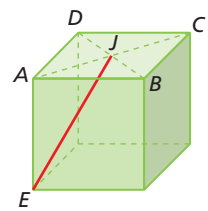
$3\sqrt{5}$ cm

b)



$3(\sqrt{2} + 1)$ cm

25. A medida da aresta do cubo representado abaixo é 20 cm. Se J é a intersecção dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, então qual é a medida do segmento $\overline{EJ}$?



$10\sqrt{6}$ cm

26. Desenhe um cubo e trace duas de suas diagonais. Mostre que duas diagonais de um cubo não são perpendiculares entre si. Ver resolução no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

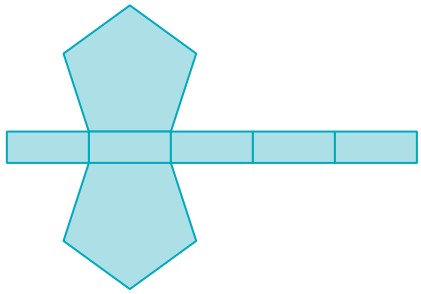
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

21. Aproximadamente 6,16 m. Sim, Rafael pode aceitar a encomenda, pois o mastro tem 5,9 m.

3.3 Planificação da superfície de um prisma

Observe a planificação a seguir.



Pela planificação, é possível identificar muitas características desse prisma:

- tem 7 faces, já que a planificação de sua superfície apresenta 7 regiões poligonais;
- tem bases pentagonais, pois faces desse tipo não podem ser faces laterais de um prisma, as quais necessariamente são quadriláteros;
- tem 5 faces laterais retangulares, já que as pentagonais são bases;
- tem 10 vértices, uma vez que cada base contém metade dos vértices do prisma;
- é reto, já que suas faces laterais são retangulares;
- tem altura igual ao comprimento de uma aresta lateral, já que é reto.

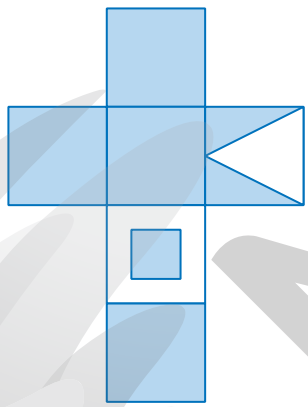
Observação

As faces laterais de um prisma reto são sempre retangulares. Mesmo que o prisma seja um cubo, podemos dizer que sua face lateral é retangular, porque todo quadrado é um retângulo.

Exercícios propostos

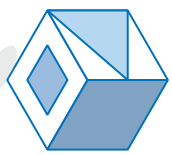
Registre as respostas em seu caderno.

27. Registre a alternativa que corresponde à seguinte planificação: alternativa d



a)

c)

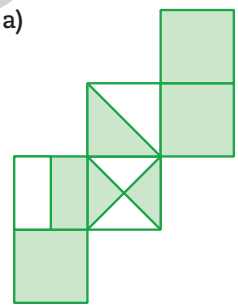


b)

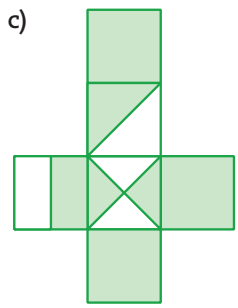
d)

28. Registre a alternativa que corresponde ao cubo representado a seguir. alternativa b

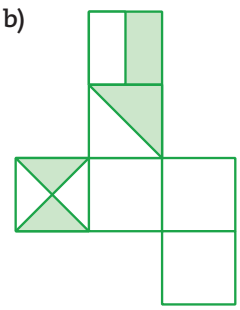
a)



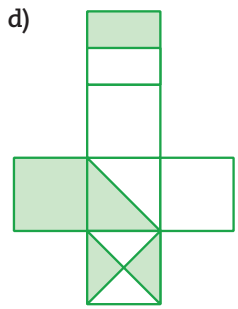
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3.4 Área da superfície de um prisma

Dado um prisma qualquer, definimos:

- **Área da base** (A_{base}) – área de uma das faces que é base.
- **Área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das áreas das faces laterais.
- **Área total** (A_{total}) – soma da área lateral com as áreas das duas bases.

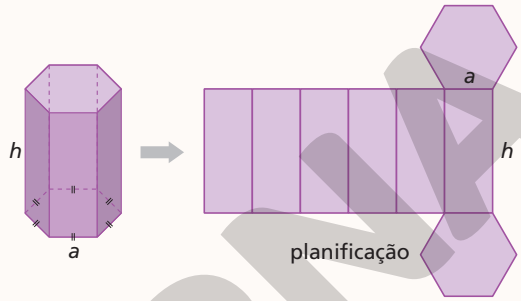
$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

Observação

Para simplificar a comunicação, sempre que possível, vamos usar "área do polígono" em vez de "área da superfície poligonal".

Exercícios resolvidos

R7. Calcular a área total da superfície do prisma hexagonal regular representado ao lado.



▸ **Resolução**

Como vimos, um prisma regular é um prisma reto e, portanto, suas faces laterais são retangulares e congruentes, de dimensões a e h.

Assim, a área lateral é dada por:

$A_{lateral} = 6 \cdot \overbrace{a \cdot h}^{\text{área da face retangular lateral}}$

A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado a.

Portanto, a área da base é dada por: $A_{base} = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Logo, a área total da superfície desse prisma hexagonal é:

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 6ah + 2 \cdot \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6ah + 3a^2 \cdot \sqrt{3}$

$A_{total} = 3a(2h + a\sqrt{3})$ unidades de área

Observação

Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros. A área de um triângulo equilátero de lado ℓ é dada por:

$A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Assim, a área de um hexágono regular de lado ℓ é dada por:

$A = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

Pensamento computacional

Algoritmo

O **algoritmo**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita de passos para resolver um problema. Para escrever um algoritmo, com início e fim, é preciso ter clareza para ordenar a execução detalhada das tarefas.

Para calcular a área total da superfície do prisma hexagonal regular representado no exercício resolvido 7, observe a decomposição do problema inicial em tarefas menores. Com base nessa decomposição, representamos o algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

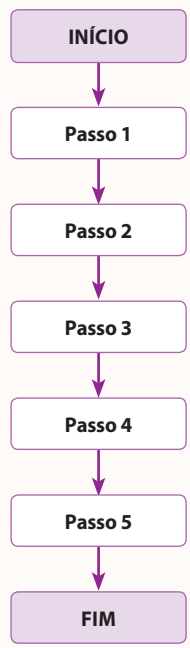
Passo 1. Dados a e h, dimensões das faces laterais do prisma, calcula-se a área de uma face lateral do prisma.

Passo 2. Multiplica-se por 6 o valor obtido no passo 1 para calcular a área lateral do prisma.

Passo 3. Dado a, dimensão da base do prisma hexagonal, calcula-se a área da base.

Passo 4. Multiplica-se por 2 o valor obtido no passo 3 para calcular a área das bases desse prisma.

Passo 5. Calcula-se a soma dos valores obtidos nos passos 2 e 4 para determinar a área total da superfície do prisma hexagonal regular e encerra-se o algoritmo.



NELSON MATSUDA

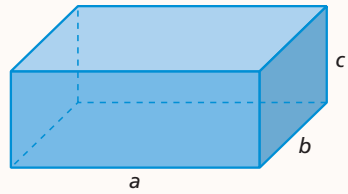
Nesse boxe, será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315** da BNCC, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R8. Calcular a área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c (medidas dadas em uma mesma unidade).

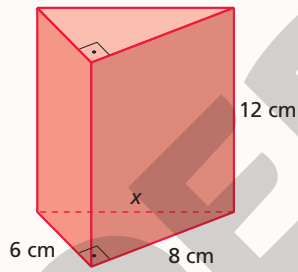


▸ **Resolução**

Nesse caso, quaisquer pares de faces paralelas podem ser as bases do prisma. Assim, a área total é a soma das áreas de seis retângulos congruentes dois a dois:

$A_{total} = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow A_{total} = 2(ab + ac + bc)$ unidades de área

R9. Calcular a área total da superfície de um prisma triangular reto, de altura 12 cm, sabendo que as arestas da base formam um triângulo retângulo de catetos que medem 6 cm e 8 cm.



▸ **Resolução**

Como a base do prisma é um triângulo retângulo, temos:

$$A_{base} = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow A_{base} = 24$$

Para calcular a área lateral, vamos obter a medida da hipotenusa do triângulo retângulo da base. Temos, então:

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10$

A área lateral é dada pela soma das áreas das faces retangulares que compõem a superfície lateral. Assim:

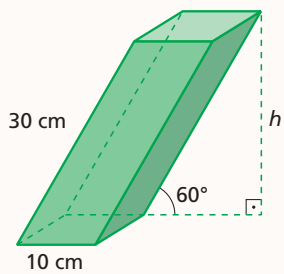
$A_{lateral} = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 288$

Logo, a área total é dada por:

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 288 + 2 \cdot 24 = 336$

Portanto, a área total da superfície do prisma é 336 cm^2.

R10. Calcular a área total da superfície do prisma oblíquo de base quadrada representado a seguir.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

▸ **Resolução**

O prisma tem base quadrada. Assim: $A_{base} = 10^2 \Rightarrow A_{base} = 100$

Para calcular a área lateral, vamos obter a altura h.

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 15\sqrt{3}$$

A área lateral é formado por dois retângulos, de dimensões 10 cm e 30 cm, e dois paralelogramos cuja medida da base é 10 cm e cuja altura é $15\sqrt{3}$. Assim, temos:

$$A_{lateral} = 2 \cdot (10 \cdot 30) + 2 \cdot (10 \cdot 15\sqrt{3}) \Rightarrow A_{lateral} = 600 + 300\sqrt{3}$$

Logo, a área total é dada por:

$$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base}$$

$$A_{total} = 600 + 300\sqrt{3} + 2 \cdot 100 = 100(8 + 3\sqrt{3})$$

Portanto, a área total da superfície do prisma é $100(8 + 3\sqrt{3})$ cm².

Com esse bloco de exercícios propostos será favorecido o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT309** da BNCC, pois os alunos vão resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas em situações reais, como o cálculo do gasto de material para pintura de um imóvel.

33. b) Uma demão Carlos consegue, pois a área total das paredes internas é aproximadamente 142 m²; adicionando o teto, fica 185 m². Duas demãos não são possíveis, pois 370 m² é maior que o rendimento máximo.

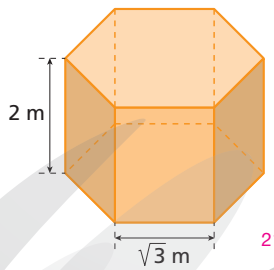
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

29. Uma indústria de embalagens produz caixas de papelão em formato de paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 20 cm, 10 cm e 15 cm. Calcule quantos centímetros quadrados de papelão são necessários para fazer a planificação de uma dessas caixas (despreze as abas). 1.300 cm²

30. Calcule a área total da superfície dos sólidos.

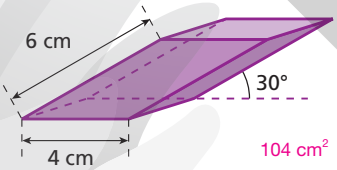
a)



$21\sqrt{3}$ m²

prisma hexagonal regular

b)



104 cm²

prisma oblíquo de base quadrada

31. Considere três cubos: cubo A com 12 cm de aresta, cubo B com 12 cm de diagonal e cubo C com diagonal da face quadrada medindo 12 cm. Escreva qual deles tem a superfície de menor área. cubo B

32. Sabendo que quatro cubos têm arestas medindo 1, 2, 3 e 4 unidades, respectivamente, faça o que se pede.

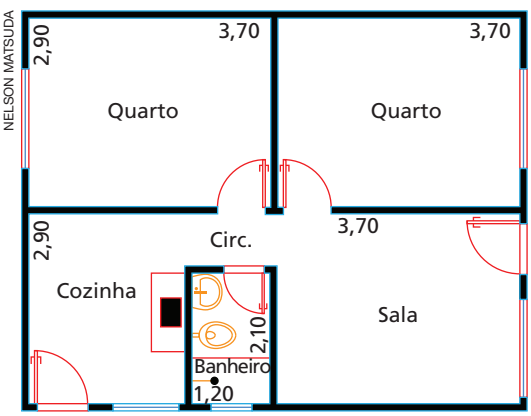
a) Determine a área total da superfície de cada cubo. 6; 24; 54; 96 (unidades de área)

b) O que acontece com a área total se o comprimento da aresta dobra? E se triplica? Fica multiplicada por 4; fica multiplicada por 9.

c) Quantos cubos de aresta unitária cabem dentro dos cubos de arestas medindo 2, 3 e 4 unidades, respectivamente? 8, 27 e 64, respectivamente

33. Carlos comprou uma lata de 18 litros de tinta para pintar a parede, cujo rendimento previsto pelo fabricante é de 225 m² a 325 m². Veja a seguir a planta baixa da casa dele, cujo pé-direito tem 2,70 m. Considerando o conteúdo dessa lata, responda às questões.

NELSON MATSUDA



a) Carlos consegue dar duas demãos no teto interno da casa?

b) Sabendo que deve descontar 14 m² das áreas referentes às portas, às janelas e aos vitrôs, Carlos consegue dar uma demão no teto e nas paredes internas? E duas demãos em tudo?

c) Carlos consegue dar duas demãos no teto e uma demão nas paredes internas da casa? Talvez consiga, pois a área total pintada seria aproximadamente 228 m², maior que o rendimento mínimo e menor que o rendimento máximo.

33. a) Consegue, pois a área total do teto é aproximadamente 43 m², e duas demãos equivalem a aproximadamente 86 m².

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

34. Desenhe uma planta baixa de um apartamento ou de uma casa; para isso, obtenha modelos em *sites* de construtoras ou em propaganda de vendas de apartamento. Depois, elabore um exercício, para que um colega da turma resolva, sobre o cálculo da quantidade de tinta necessária para pintar todo o imóvel. Nessa situação-problema, além da quantidade de tinta, podem ser solicitadas a pesquisa de valor real a ser gasto e a quantidade de outros materiais a serem usados, como pincéis, rolos, lixas etc. Mencione que o rendimento de tinta pode ser obtido na embalagem do produto. Se necessário, use no enunciado a dica de altura da parede interna do imóvel a ser considerado (pé-direito) entre 2,5 m e 2,8 m, que é a medida padrão para apartamentos simples.

Depois de elaborar o exercício, você deve resolver o de um colega.

resposta pessoal

Este tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **5** e da habilidade **EM13MAT504** da BNCC, pois leva o aluno a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

3.5 Volume de um prisma

Como todo sólido, um prisma ocupa uma porção do espaço. Adotando uma unidade de volume, podemos medir a porção do espaço ocupada por um prisma.

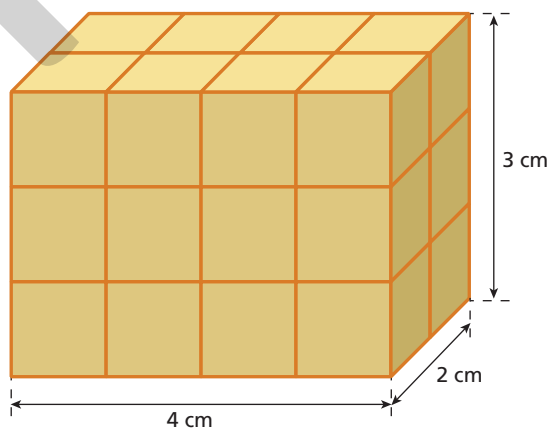
O **volume** de um prisma corresponde a um único número real *V* positivo obtido pela comparação da porção do espaço ocupado pelo prisma com a porção do espaço ocupado por uma unidade de volume.

A unidade de volume que usualmente consideramos é o volume de um cubo unitário, isto é, de um cubo de aresta 1 u, sendo u certa unidade de comprimento. Assim, dizemos que o volume desse cubo unitário é 1 u^3.

Se a aresta do cubo unitário mede 1 m, seu volume é 1 m^3; se a aresta do cubo unitário mede 1 mm, o volume desse cubo é 1 mm^3; e assim por diante.

Exemplo

Vamos calcular quantas vezes o cubo unitário de aresta 1 cm cabe em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 4 cm, 2 cm e 3 cm.



Analisando a figura, vemos que o paralelepípedo é formado por 8 cubos unitários na base e tem 3 camadas iguais à camada da base.

Logo, há 24 cubos unitários no total; portanto, o paralelepípedo é formado por 24 cubos (4 · 2 · 3) de 1 cm^3 de volume. Dizemos, então, que o volume do paralelepípedo dado é 24 cm^3.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

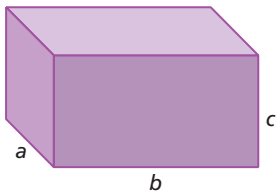
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

No exemplo anterior, verificamos que um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são dadas por números inteiros tem volume igual ao produto desses três números. Esse fato pode ser demonstrado, concluindo-se que ele é válido para qualquer paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são dadas por números reais.

Desse modo, temos:



$V_{paralelepípedo} = a \cdot b \cdot c$

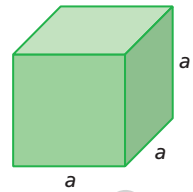
Note que o volume do paralelepípedo também pode ser expresso assim:

V = área da base $\times$ altura

Observação

Como o cubo é um caso particular de paralelepípedo reto-retângulo com todas as arestas de mesma medida, seu volume é:

$V_{cubo} = a^3$



Exercício resolvido

R11. Deseja-se cimentar um quintal quadrado, com lados medindo 8 m, com 4 cm de espessura de massa de cimento. Calcular o volume necessário de massa para revestir essa área.

▸ **Resolução**

A camada de cimento terá o formato de um paralelepípedo reto-retângulo de base quadrada, com 8 m de aresta e 4 cm de altura.

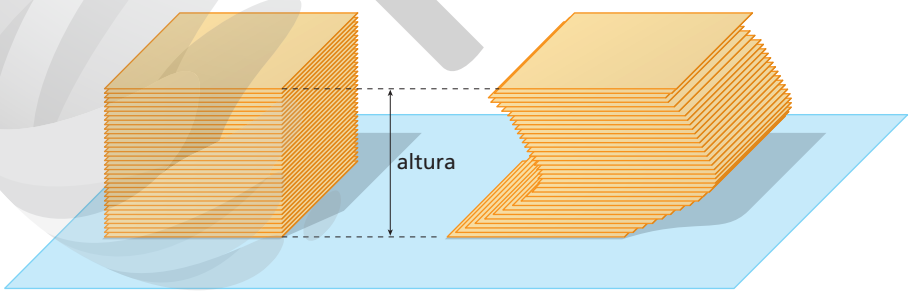
Como a espessura do revestimento é de 4 cm ou 0,04 m, o volume necessário de massa é:

$V = 8 \cdot 8 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 64 \cdot 0{,}04 \Rightarrow V = 2{,}56$

Logo, são necessários 2,56 m^3 de massa para fazer o revestimento.

Princípio de Cavalieri

Sobre uma mesa, formamos duas pilhas com a mesma quantidade de cartões retangulares idênticos. Vamos modificar a forma de uma das pilhas sem retirar nem pôr nenhum cartão. Veja a possível situação das pilhas formadas na ilustração abaixo.



Observando as pilhas, é possível notar que:

- a altura das duas pilhas é a mesma, pois elas têm a mesma quantidade de cartões de mesma espessura;
- os cartões das duas pilhas que ficam à mesma distância da mesa têm a mesma área, pois eles são idênticos;
- a segunda pilha tem o mesmo volume que a primeira, já que é formada por cartões idênticos e, portanto, ocupa a mesma porção do espaço.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

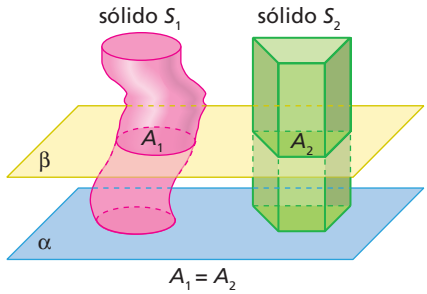
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado, porém vamos considerá-lo verdadeiro sem fazer sua demonstração neste livro.

Essa situação ilustra o **princípio de Cavalieri**, ou **postulado de Cavalieri**, que afirma que:

Dois sólidos, S_1 e S_2, apoiados em um plano α e contidos em um mesmo semiespaço, terão o mesmo volume V se todo plano β, paralelo a α, secciona os dois sólidos segundo regiões planas de mesma área (A).

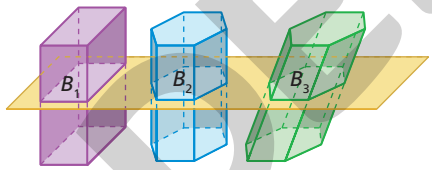


Secção transversal de um prisma

Um plano intercepta um sólido segundo uma superfície chamada de **secção plana**. No caso em que a secção plana é paralela à base do prisma, ela é denominada **secção transversal**.

Exemplo

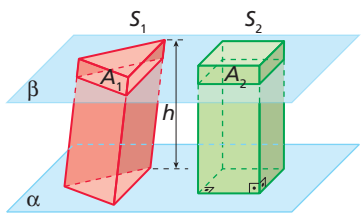
Observe uma secção transversal de cada prisma representado abaixo.



Qualquer secção transversal de um prisma é congruente à base desse prisma e, portanto, tem a mesma área que essa base.

Volume de um prisma qualquer

Considere um prisma S_1 e um paralelepípedo reto-retângulo S_2 de mesma altura h e de bases equivalentes (de mesma área), apoiados em um plano α e situados em um mesmo semiespaço.



Como qualquer secção transversal de cada prisma possui a mesma área que a base desse prisma e as áreas das bases de S_1 e S_2 são iguais, qualquer plano β paralelo a α que intercepte os dois prismas determina secções transversais de mesma área: $A_1 = A_2$

Assim, pelo princípio de Cavalieri, os dois prismas têm volumes iguais, isto é, $V_1 = V_2$, em que V_1 é o volume do prisma S_1 e V_2 é o volume do prisma S_2.

Como S_2 é um paralelepípedo reto-retângulo, seu volume pode ser calculado por:

V_2 = área da base de $S_2 \times$ altura

Como as áreas das bases de S_1 e de S_2 são iguais e $V_1 = V_2$, temos:

V_1 = área da base de $S_1 \times$ altura

Assim, o volume de um prisma qualquer pode ser obtido por:

$$V_{prisma} = \text{área da base} \times \text{altura}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

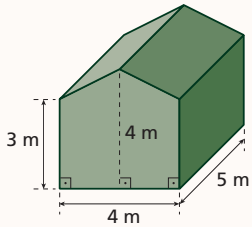
MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R12. Chamar a atenção dos alunos para a **abstração** e a **decomposição**, pilares do *pensamento computacional*, empregadas no exercício resolvido, em que, para calcular o volume de ar em um galpão, representa-se o galpão por uma figura (prisma) e propõe-se a decomposição da figura em outros dois prismas, para então calcular o volume de cada um deles.

Exercícios resolvidos

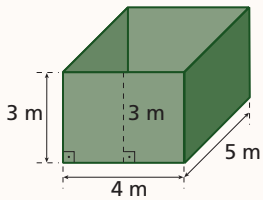
R12. Calcular o volume de ar contido em um galpão que tem o formato do prisma representado abaixo.



▸ Resolução

Vamos decompor a figura do galpão em duas partes com formatos de prisma.

Formato de paralelepípedo reto-retângulo

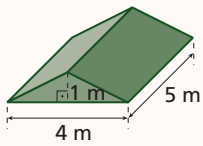


$V_1 = A_{base} \cdot \text{altura}$

$V_1 = 4 \cdot 5 \cdot 3$

$V_1 = 60$

Formato de prisma reto de base triangular



$V_2 = A_{base} \cdot \text{altura}$

$V_2 = \frac{4 \cdot 1}{2} \cdot 5$

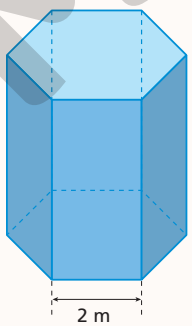
$V_2 = 10$

Logo, o volume total de ar contido no galpão é dado por $V_1 + V_2$, ou seja, 70 m^3.

Reflita

- Que tipo de prisma corresponde ao formato do galpão?
- Explique como você determinaria o volume de ar contido no galpão calculando o volume desse prisma sem decompô-lo.

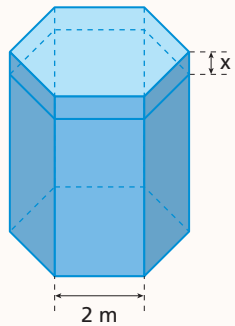
R13. O reservatório cheio de água de um condomínio residencial tem o formato de um prisma hexagonal regular, como representado ao lado. Por causa de um vazamento, foram desperdiçados $3.000\sqrt{3}$ litros. Quanto baixou, em metro, o nível de água desse reservatório?



▸ Resolução

Vamos representar por x, em metro, quanto baixou o nível da água no reservatório.

Os $3.000\sqrt{3}$ litros perdidos ocupam o volume do prisma hexagonal regular de mesma base do prisma da figura e altura de x metro.



Observação

Lembre que 1 litro corresponde a 1 dm^3 e que 1 dm = $\frac{1}{10}$ m. Então:

1 dm^3 = $\frac{1}{1.000}$ m^3

Portanto, 1 litro corresponde a $\frac{1}{1.000}$ m^3.

A base do prisma é uma região hexagonal regular de lado 2 m, cuja área é dada por:

$A_{base} = \frac{6 \cdot \ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{base} = \frac{6 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{base} = 6\sqrt{3}$

O volume da parte do prisma correspondente aos $3.000\sqrt{3}$ litros é:

$V = A_{base} \cdot x = 6\sqrt{3} \cdot x$

Como $3.000\sqrt{3}$ litros $= 3\sqrt{3}$ m^3, temos:

$6\sqrt{3} \cdot x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 0{,}5$

Portanto, o nível de água baixou 0,5 m.

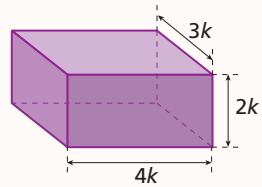
R14. Uma caixa de isopor tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo, com arestas de medidas proporcionais a 2, 3 e 4 e com 192 cm^3 de volume. Ela será revestida por uma película protetora de plástico. Quantos centímetros quadrados de plástico serão necessários para revestir essa caixa?

▸ Resolução

Vamos considerar que as medidas da caixa, dadas em centímetro, sejam a, b e c.

Se elas são proporcionais a 2, 3 e 4, temos:

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \\ c = 4k \end{cases}$



Se o volume da caixa é 192 cm^3, então:

$2k \cdot 3k \cdot 4k = 192 \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$

Logo, $a = 4$ cm, $b = 6$ cm e $c = 8$ cm.

Como a área total da caixa é dada por $A_{total} = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$, temos:

$A_{total} = 2 \cdot (4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 8) = 208$

Portanto, serão necessários 208 cm^2 de plástico para revestir a caixa.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita:
- prisma pentagonal

- Resposta possível: determinar a área da base pentagonal (que é dada por um triângulo isósceles e por um retângulo) e, em seguida, calcular o volume:
$A_{base} = 2 + 12 = 14 \Rightarrow A_{base} = 14$ m^2 $V_{ar} = A_{base} \times$ altura $= 70$ m^3

Ver, na resolução do exercício **37**, comentário de história da Matemática sobre Arquimedes, no Guia do professor.

Exercícios propostos

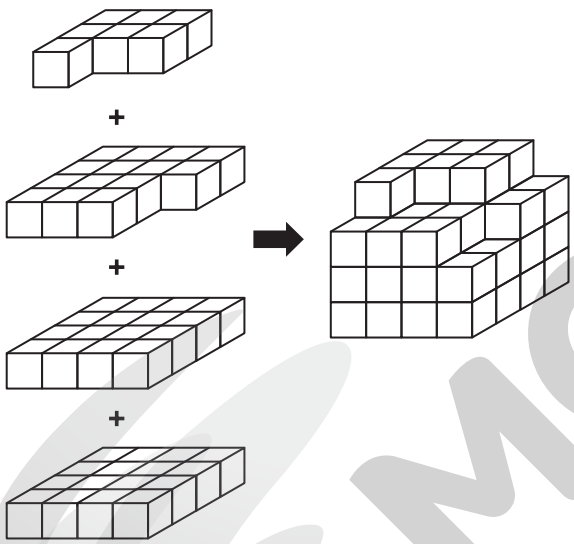
Registre as respostas em seu caderno.

35. Uma barra de prata é fundida no formato de um prisma reto de altura 32 cm e base trapezoidal. A altura do trapézio mede 5 cm, e as bases medem 7,5 cm e 10 cm. Se a prata tem 10,5 g por cm^3, qual será a massa da barra? 14.700 g

36. Sabe-se que a superfície de um cubo tem 216 m^2 de área total. Calcule o volume desse cubo. 216 m^3

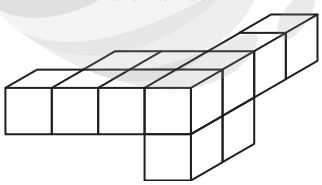
37. Quando uma amostra de metal é mergulhada em um tanque de água com formato retangular, cuja base mede 15 cm por 20 cm, o nível de água se eleva 0,35 cm. Calcule o volume dessa peça. 105 cm^3

38. (Enem) *Minecraft* é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos. Um jogador deseja construir um cubo com dimensões $4 \times 4 \times 4$. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários, conforme a figura.

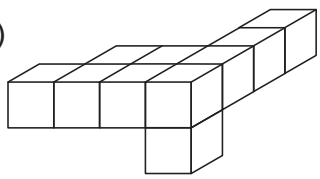


Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa. O formato da peça capaz de completar o cubo $4 \times 4 \times 4$ é: alternativa a

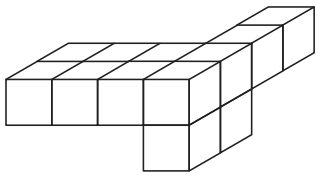
a)



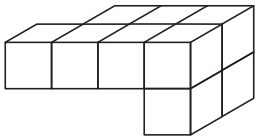
b)



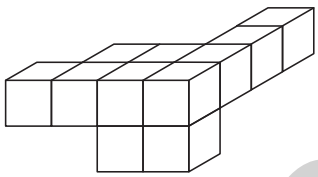
c)



d)



e)



39. A área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo é igual à área total da superfície de um cubo. Se as medidas de três arestas que concorrem em um mesmo vértice do paralelepípedo são 3, 5 e 7, respectivamente, quanto mede a diagonal do cubo? $\sqrt{71}$ unidades de comprimento

40. Calcule a área total da superfície de um paralelepípedo reto-retângulo, cujo volume é 240 cm^3, sabendo que as áreas de duas faces são 30 cm^2 e 48 cm^2. 236 cm^2

41. Calcule o volume de um prisma regular hexagonal de 8 cm de altura, sabendo que a área total de sua superfície é o triplo da área lateral. $4.096\sqrt{3}$ cm^3

42. Determine a capacidade, em litro, de um reservatório cúbico, sabendo que a maior vara de pesca que nele cabe inteiramente, sem envergar, tem 2 m de comprimento. $\frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ ℓ

43. As arestas de um paralelepípedo estão na razão 2 : 3 : 4, e sua diagonal mede $4\sqrt{29}$ cm. Qual é a área total e o volume desse paralelepípedo? 832 cm^2 e 1.536 cm^3

44. Um cubo de aresta 4 cm é formado de cubinhos independentes com aresta de 1 cm. Deseja-se construir com esses cubinhos um paralelepípedo.

a) Que dimensões tem o paralelepípedo de menor área que se pode formar? 4 cm, 4 cm e 4 cm

b) E o paralelepípedo de maior área? 1 cm, 1 cm e 64 cm

45. Considerando um cubo de aresta 2 cm, responda às questões a seguir.

a) Qual é o volume desse cubo? 8 cm^3

b) Qual é a área da superfície desse cubo? 24 cm^2

c) O que ocorre com o volume se a medida da aresta é dobrada? Fica multiplicado por 8.

d) E com a área da superfície? Fica multiplicada por 4.

Ver, na resolução do exercício **45**, comentário de história da Matemática sobre o problema deliano, no Guia do professor.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 Pirâmides

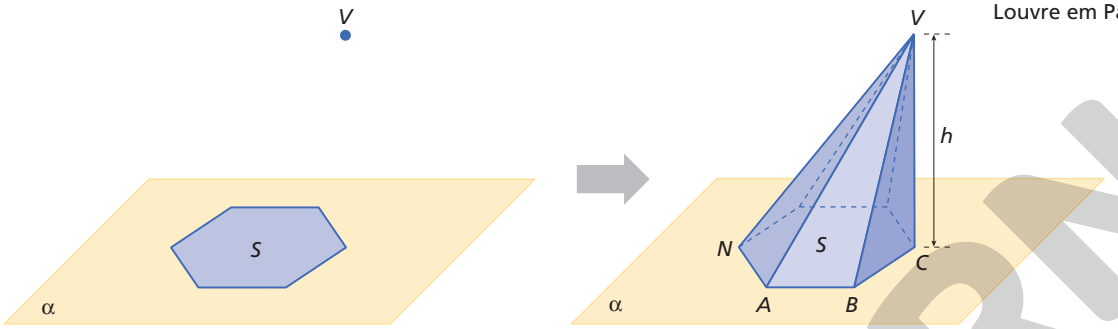
Além dos prismas, as **pirâmides** constituem outro importante tipo de poliedro. Exercendo fascínio sobre o ser humano desde a Antiguidade, a forma piramidal tem ressurgido na arquitetura moderna em edifícios de grande imponência. As pirâmides do Egito e a pirâmide de vidro do Museu do Louvre são belos exemplos de monumentos que têm o formato desse sólido.

JEROME LABOUYRIE/SHUTTERSTOCK

Monumento que lembra uma pirâmide, construída em vidro e metal no pátio do Palácio do Louvre em Paris, França, 2019.

4.1 Definição de pirâmide

Consideremos um plano α, uma região poligonal convexa S contida em α e um ponto V fora de α.



Chama-se **pirâmide** o poliedro convexo formado por todos os segmentos de reta cujas extremidades são o ponto V e um ponto da região S.

Reflita

A relação de Euler é válida para as pirâmides? Por quê?

Sim, pois uma pirâmide é um poliedro convexo.

Elementos de uma pirâmide

Considerando a pirâmide desenhada anteriormente, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Base** – a região poligonal S.
- **Vértice da pirâmide** – o ponto V.
- **Faces laterais** – as superfícies triangulares AVB, BVC, ..., NVA.
- **Arestas da base** – os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{NA}$.
- **Arestas laterais** – os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, ..., $\overline{VN}$.
- **Altura da pirâmide** – a distância h entre o vértice V e o plano α.

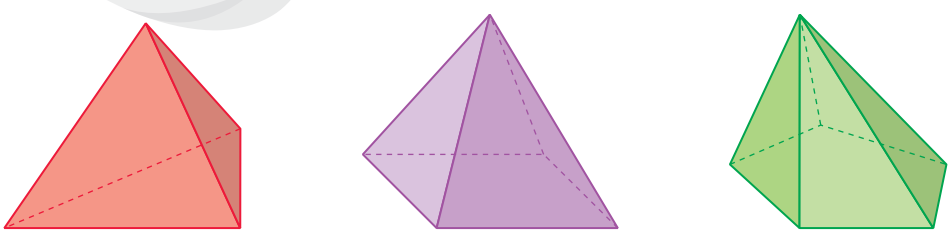
Observação

A denominação **vértice da pirâmide** é dada ao único vértice que não pertence à base.

Classificação das pirâmides

As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o número de arestas da base. Se a base tiver três arestas, a pirâmide é **triangular**; se tiver quatro arestas, a pirâmide é **quadrangular**; se tiver cinco arestas, a pirâmide é **pentagonal**; e assim por diante.

Exemplos



pirâmide triangular (tetraedro)

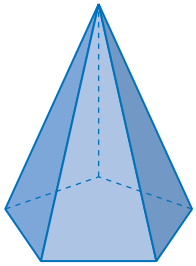
pirâmide quadrangular

pirâmide pentagonal

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

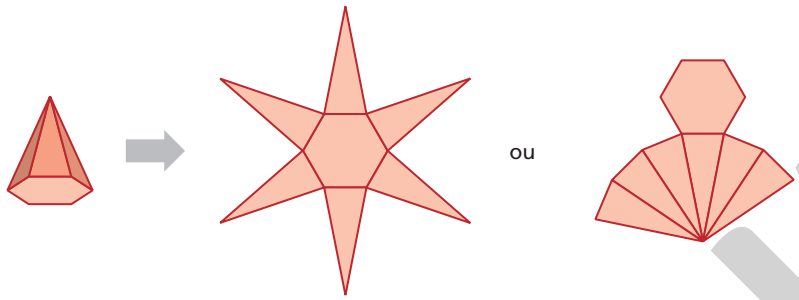
MODERNA



4.2 Planificação da superfície de uma pirâmide

Até aqui, temos representado pirâmides em perspectiva, como esta ao lado. Como os demais poliedros, uma pirâmide também pode ser representada por planificações de sua superfície: é possível, em um plano, justapor as faces de uma pirâmide de modos diferentes, desde que cada uma delas tenha pelo menos uma aresta em comum com outra.

Como exemplo, observe a seguir duas planificações de uma pirâmide hexagonal.

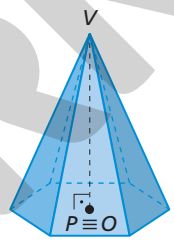


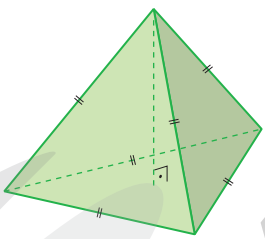
4.3 Pirâmides regulares

Observação

O centro de um polígono regular é o centro da circunferência circunscrita ao polígono e da circunferência inscrita nele.

Uma pirâmide cuja base é uma superfície poligonal regular e cuja projeção ortogonal P do vértice sobre o plano da base coincide com o centro O do polígono da base é chamada de **pirâmide regular**.





As faces laterais de uma pirâmide regular são determinadas por triângulos isósceles congruentes.

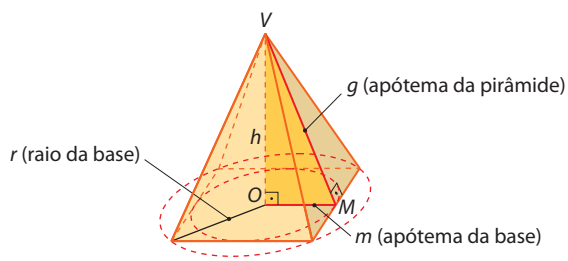
Assim, uma pirâmide triangular regular tem quatro faces: uma é a base (um triângulo equilátero) e as outras três são as faces laterais (triângulos isósceles congruentes).

Um importante exemplo desse tipo de pirâmide regular é o **tetraedro regular**, que tem as quatro faces constituídas por triângulos equiláteros congruentes. No tetraedro regular, qualquer uma das faces pode ser considerada base da pirâmide.

Elementos das pirâmides regulares

Em uma pirâmide regular, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Apótema da pirâmide** – altura relativa à base de qualquer face lateral (seu comprimento será identificado por g).
- **Apótema da base** – segmento que determina o raio da circunferência inscrita no polígono da base (seu comprimento será identificado por m).
- **Raio da base** – raio da circunferência circunscrita ao polígono da base (será identificado por r).



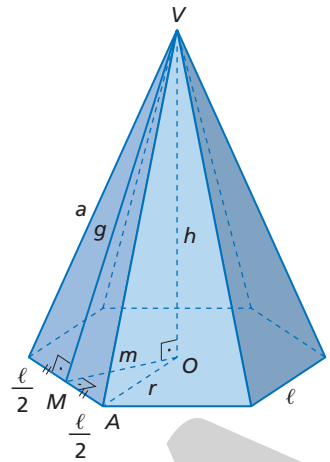
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Algumas relações métricas

Podemos destacar algumas relações métricas nas pirâmides regulares. Observe a pirâmide regular representada ao lado de altura h, aresta da base medindo ℓ, apótema da pirâmide medindo g, apótema da base medindo m, raio da base medindo r e arestas laterais medindo a.

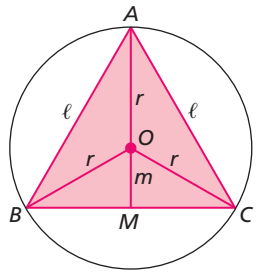


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo:

- VOA, temos: $a^2 = h^2 + r^2$
- MOA, temos: $r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$
- VMO, temos: $g^2 = h^2 + m^2$
- VMA, temos: $a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

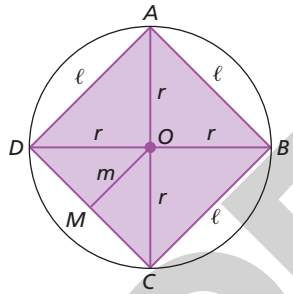
Essas relações métricas são válidas para qualquer pirâmide regular, independentemente do polígono que forma a base. Além disso, há a relação entre as medidas da aresta da base e as do apótema da base de algumas pirâmides regulares.

- A base é um triângulo equilátero.



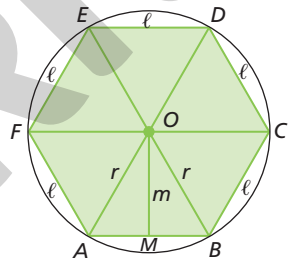
$m = \frac{r}{2}$ ou $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

- A base é um quadrado.



$m = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ ou $m = \frac{\ell}{2}$

- A base é um hexágono regular.



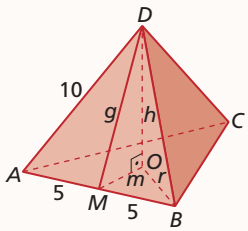
$m = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ ou $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Reflita

Demonstre a relação entre as medidas da aresta da base e do apótema da base de cada uma das pirâmides regulares referentes às figuras acima.

Exercícios resolvidos

R15. Um tetraedro regular tem arestas medindo 10 cm. Calcular a medida do apótema da pirâmide (g), a medida do apótema da base (m) e a altura da pirâmide (h).



▸ **Resolução**

No $\triangle DMA$, temos: $10^2 = g^2 + 5^2 \Rightarrow g^2 = 75 \Rightarrow$
$\Rightarrow g = 5\sqrt{3}$

Como a base é triangular, obtemos:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m = \frac{10\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

No $\triangle DMO$, temos:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 75 = h^2 + \frac{25}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{200}{3} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

Portanto, $g = 5\sqrt{3}$ cm, $m = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm e $h = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ cm.

- Base: triângulo equilátero
Como o triângulo ABC é equilátero, O é o baricentro.
Logo: $m = \frac{1}{3}AM$ e $BM = \frac{\ell}{2}$
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AMB$, temos:
$(AM)^2 = (AB)^2 - (BM)^2$
$(AM)^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$
$(AM)^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$
$m = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$
- Base: quadrado
$\triangle OMC \sim \triangle ADC$
$\frac{OM}{AD} = \frac{MC}{DC} \Rightarrow \frac{m}{\ell} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Rightarrow m = \frac{\ell}{2}$
- Base: hexágono regular
O triângulo OAB é equilátero e $\overline{OM}$ é a altura.
Então: $AO = r = \ell$ e $AM = \frac{\ell}{2}$
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AMO$, temos:
$(OM)^2 = (OA)^2 - (AM)^2$
$m^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$
$m^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

O propósito da retomada das relações métricas, estudadas no capítulo "Superfícies poligonais, círculo e áreas", é auxiliar os alunos nos cálculos de áreas e de volume de pirâmides.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

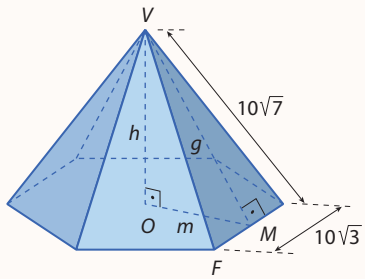
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R16. Uma pirâmide regular hexagonal tem arestas da base medindo $10\sqrt{3}$ cm e arestas laterais medindo $10\sqrt{7}$ cm. Calcular a medida do apótema da base (m), a medida do apótema da pirâmide (g) e a altura da pirâmide (h).

▸ **Resolução**

Observe a figura abaixo.



Na base hexagonal, o apótema mede:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 15$$

No triângulo VMF, temos:

$$g^2 + (5\sqrt{3})^2 = (10\sqrt{7})^2 \Rightarrow g^2 + 75 = 700 \Rightarrow g^2 = 625 \Rightarrow g = 25$$

No triângulo VMO, temos:

$$m^2 + h^2 = g^2 \Rightarrow 15^2 + h^2 = 25^2 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow h = 20$$

Portanto, $m = 15$ cm, $g = 25$ cm e $h = 20$ cm.

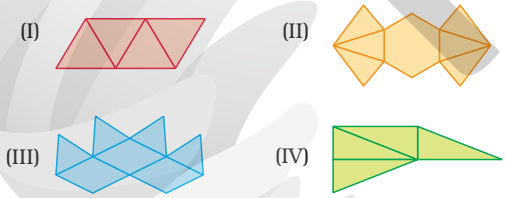
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

46. Determine o número de faces de uma pirâmide cuja base tem 8 vértices. 9 faces

47. Determine o número de vértices, de faces e de arestas de uma pirâmide que tem n faces laterais, sendo n um número natural maior que 2. $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices

48. Registre quais das planificações a seguir são de superfícies de pirâmides. I e II



49. O apótema de uma pirâmide regular tem 12 cm e a aresta lateral tem 13 cm. Determine a medida da aresta da base. 10 cm

50. Uma pirâmide regular tem 4 dm de altura. A base é um hexágono que tem 6 dm de lado. Determine a medida do apótema da pirâmide. $\sqrt{43}$ dm

51. Qual é a medida da aresta lateral de uma pirâmide regular de base pentagonal se o apótema da pirâmide mede 12 m e o lado do pentágono mede 10 m? 13 m

52. Calcule a medida do raio da base, a altura e a medida do apótema de uma pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base mede 8 cm e a aresta lateral mede $\sqrt{41}$ cm. $g = 5$ cm, $h = 3$ cm e $r = 4\sqrt{2}$ cm

4.4 Área da superfície de uma pirâmide

Dada uma pirâmide qualquer, definimos:

- **Área da base** (A_{base}) – área da superfície poligonal que constitui a base.
- **Área lateral** ($A_{lateral}$) – soma das áreas das faces laterais (superfícies triangulares).
- **Área total** (A_{total}) – soma da área lateral com a área da base.

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

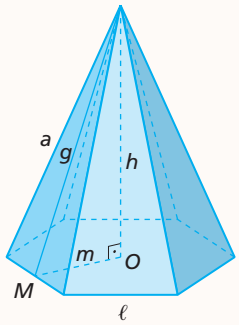
R17. Determinar a área total da superfície de uma pirâmide regular hexagonal sabendo que a aresta da base mede ℓ e o apótema da pirâmide mede g.

▸ Resolução

A base da pirâmide é uma superfície hexagonal regular de lado ℓ. Portanto, a área da base é dada por:

$$A_{base} = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{base} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$



Como a pirâmide é regular, as faces laterais são formadas por triângulos isósceles e congruentes, que, nesse caso, têm base ℓ e altura g.

Assim, a área lateral é dada por:

$$A_{lateral} = 6 \cdot A_{triângulo\ isósceles}$$

$$A_{lateral} = 6 \cdot \left(\frac{\ell g}{2}\right)$$

$$A_{lateral} = 3\ell g$$

Logo, a área total é dada por:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$$

$$A_{total} = 3\ell g + \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{total} = 3\ell \cdot \left(g + \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

53. Calcule a área total da superfície de uma pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede 82 mm e a aresta da base mede 36 mm. $108\left(40 + 3\sqrt{3}\right)$ mm²

54. Calcule a área da base, a área lateral e a área total da superfície de uma pirâmide quadrangular regular que tem 3 cm de altura e cuja aresta da base mede 8 cm. 64 cm², 80 cm² e 144 cm²

55. Sabendo que a área total da superfície de um tetraedro regular é $16\sqrt{3}$ cm², calcule a medida da aresta desse tetraedro. 4 cm

56. A base de uma pirâmide quadrangular regular está inscrita em uma circunferência de $6\sqrt{2}$ cm de raio. Sabendo que a pirâmide tem 8 cm de altura, calcule a área total da sua superfície. 384 cm²

4.5 Volume de uma pirâmide

Este tópico contempla a competência específica **5** e a habilidade **EM13MAT504** da BNCC, pois leva o aluno a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

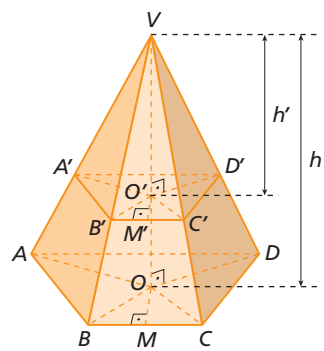
Antes de estudar o volume de uma pirâmide qualquer, vamos conhecer duas propriedades das pirâmides e demonstrá-las.

Propriedade 1: A razão entre a área S' de uma secção transversal de uma pirâmide, feita a uma altura h' em relação ao vértice, e a área S da base dessa pirâmide de altura h é $\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

Demonstração

Vamos considerar uma pirâmide de altura $VO = h$ cuja base tem área S. Seja uma secção transversal dessa pirâmide, de área S', a uma distância $VO' = h'$ do vértice.

Vamos decompor a base da pirâmide e a secção transversal nos triângulos OAB, OBC etc. e $O'A'B'$, $O'B'C'$ etc., respectivamente.



$$\overline{O'C'} \parallel \overline{OC} \Rightarrow \triangle VO'C' \sim \triangle VOC \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{VO'}{VO} \Rightarrow \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

$$\overline{B'C'} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \triangle VB'C' \sim \triangle VBC \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{VC'}{VC} = \frac{h'}{h}$$

Com o mesmo raciocínio, chegamos a: $\frac{O'M'}{OM} = \frac{h'}{h}$

Área do $\triangle OBC$: $S_{OBC} = \frac{(BC) \cdot (OM)}{2}$

Área do $\triangle O'B'C'$: $S_{O'B'C'} = \frac{(B'C') \cdot (O'M')}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

Em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para seu consequente, ou seja:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \frac{\frac{(B'C') \cdot (O'M')}{2}}{\frac{(BC) \cdot (OM)}{2}} = \frac{B'C'}{BC} \cdot \frac{O'M'}{OM} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Analogamente, mostra-se que: $\frac{S_{O'C'D'}}{S_{OCD}} = \frac{S_{O'D'A'}}{S_{ODA}} = \frac{S_{O'A'B'}}{S_{OAB}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$

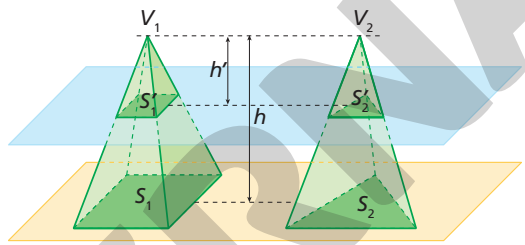
Temos: $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}$ e $S' = S_{O'A'B'} + S_{O'B'C'} + S_{O'C'D'} + S_{O'D'A'}$

Assim: $\frac{S'}{S} = \frac{S_{O'A'B'} + S_{O'B'C'} + S_{O'C'D'} + S_{O'D'A'}}{S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}} = \frac{S_{O'B'C'}}{S_{OBC}} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$

Propriedade 2: Se duas pirâmides têm mesma altura e mesma área de base, então elas têm mesmo volume.

Demonstração

Vamos considerar as pirâmides de vértices V_1 e V_2 ao lado.



Chamaremos de:

- S_1 e S_2 as áreas das bases dessas pirâmides, tais que $S_1 = S_2$;
- S'_1 e S'_2 as áreas das secções transversais;
- h a altura das duas pirâmides e h' a distância das secções transversais aos vértices V_1 e V_2, respectivamente.

Pela propriedade 1, obtemos:

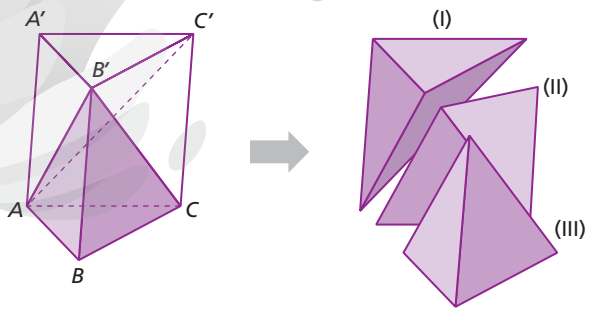
$$\frac{S'_1}{S_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } \frac{S'_2}{S_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$S'_1 = S_1 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ e } S'_2 = S_2 \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Como $S_1 = S_2$, temos $S'_1 = S'_2$ e, portanto, pelo princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume.

Volume de uma pirâmide de base triangular

Considere um prisma triangular de volume V_{prisma}. Vamos decompô-lo em três pirâmides triangulares.



A pirâmide I tem por base o triângulo $AA'C'$ e por altura a distância de B' ao plano que contém a face $AA'C'C$ do prisma.

A pirâmide II tem por base o triângulo $AC'C$ e por altura a distância de B' ao plano que contém a face $AA'C'C$ do prisma.

$AA'C'C$ é um paralelogramo; logo, os triângulos $AA'C'$ e ACC' têm mesma área. Assim, as pirâmides I e II têm bases de mesma área; como têm também mesma altura, concluímos que elas têm volumes iguais.

Entretanto, a pirâmide I é também aquela que tem por base o triângulo $A'B'C'$ e por altura a distância de A ao plano que contém a base $A'B'C'$ do prisma (altura do prisma).

A pirâmide III tem por base o triângulo ABC e por altura a distância de B' ao plano que contém a base ABC do prisma (altura do prisma).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Os triângulos $A'B'C'$ e ABC têm mesma área (são bases do prisma). Assim, as pirâmides I e III têm bases de mesma área; como também têm mesma altura (altura do prisma), concluímos que elas têm volumes iguais.

Se V_1, V_2 e V_3 são, respectivamente, os volumes dessas três pirâmides triangulares, temos: $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{V_{prisma}}{3}$

Como V_{prisma} = área da base × altura, vem:

$$V_{pirâmide\ triangular} = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$$

Volume de uma pirâmide qualquer

Para uma pirâmide qualquer, podemos dividir o polígono de sua base em triângulos justapostos por meio de diagonais. Assim, a pirâmide fica dividida em pirâmides triangulares de mesma altura.

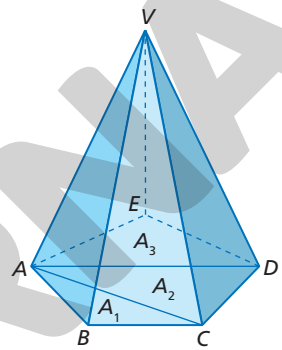
Se a base foi dividida em n triângulos de áreas A_1, A_2, ..., A_n, então a área da base é dada por: $A_{base} = A_1 + A_2 + ... + A_n$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h + ... + \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot h$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{(A_1 + A_2 + ... + A_n)}_{A_{base}} \cdot h$$

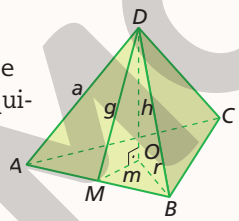
$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{altura}$$



Pirâmide pentagonal dividida em três pirâmides triangulares: *VABC*, *VACD* e *VADE*.

Exercícios resolvidos

R18. Calcular o volume do tetraedro regular de aresta a.



▸ **Resolução**

A área da base é a área de uma superfície triangular equilátera de lado a. Logo:

$$A_{base} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

A altura h é tal que: $h^2 = g^2 - m^2$

Pelo $\triangle ADM$: $g^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow g^2 = \frac{3a^2}{4}$

Como o $\triangle ABC$ é equilátero, temos:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow m^2 = \frac{3a^2}{36} \Rightarrow m^2 = \frac{a^2}{12}$$

Assim: $h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

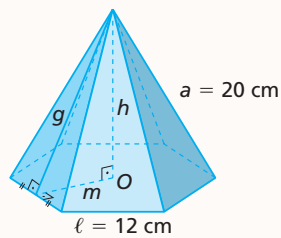
Portanto:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

R19. Determinar o volume de uma pirâmide regular hexagonal de 12 cm de aresta da base e 20 cm de aresta lateral.



▸ **Resolução**

Inicialmente, vamos calcular a medida g do apótema da pirâmide.

$$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow 20^2 = g^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 = g^2 + 36 \Rightarrow g = \sqrt{364} \Rightarrow g = 2\sqrt{91}$$

Agora, vamos determinar a medida m do apótema da base. Como a base é um hexágono regular, temos:

$$m = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 6\sqrt{3}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Cálculo da altura h da pirâmide:

$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow (2\sqrt{91})^2 = h^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 256 \Rightarrow h = 16$

Cálculo da área da base:

$A_{base} = 6 \cdot \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2}$

$A_{base} = 6 \cdot 36\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$

Cálculo do volume da pirâmide:

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 216\sqrt{3} \cdot 16$

$V_{pirâmide} = 1.152\sqrt{3}$

Portanto, o volume da pirâmide é $1.152\sqrt{3}$ cm³.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

57. Uma pirâmide regular de base quadrada e 4 cm de altura possui aresta da base com 6 cm de comprimento. Calcule o volume dessa pirâmide. 48 cm³

58. Determine o volume de um tetraedro regular cuja aresta mede 2 cm. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³

59. Calcule a área total da superfície e o volume de um octaedro regular de aresta 3 cm. área = $18\sqrt{3}$ cm²; volume = $9\sqrt{2}$ cm³

60. Dê o volume de uma pirâmide triangular regular de 8 cm de altura e aresta da base medindo 6 cm. $24\sqrt{3}$ cm³

61. Uma pirâmide regular hexagonal tem aresta lateral de medida $4\sqrt{2}$ dm. Se o perímetro da base tem 24 dm, qual é seu volume? $32\sqrt{3}$ dm³

62. Em uma pirâmide regular, a base é um quadrado de lado de medida $6\sqrt{2}$ cm e as arestas laterais medem 10 cm. Determine o volume dessa pirâmide. 192 cm³

63. A aresta lateral de uma pirâmide regular quadrangular mede 5 cm e o perímetro da base tem $12\sqrt{2}$ cm. Determine o volume dessa pirâmide. 24 cm³

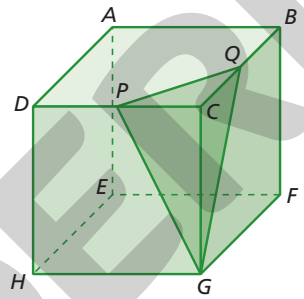
64. O apótema de uma pirâmide regular quadrangular mede $g = 9$ cm. Sabendo que a aresta da base mede 4 cm, calcule:

a) a área da base; 16 cm²
b) a área lateral; 72 cm²
c) a área total; 88 cm²
d) a altura; $\sqrt{77}$ cm
e) o volume. $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm³

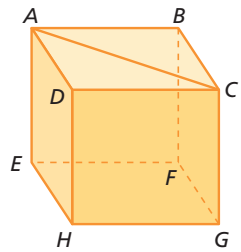
65. A base de um prisma é um quadrado de lado de medida 2 m, e a base de uma pirâmide é um quadrado de lado de medida 1 m. Se o prisma e a pirâmide têm mesmo volume, qual é a razão entre suas alturas? 1 para 12

66. Um prisma e uma pirâmide têm bases com mesma área, e o volume do prisma é o sêxtuplo do volume da pirâmide. Qual é a relação entre suas alturas? A altura do prisma é o dobro da altura da pirâmide.

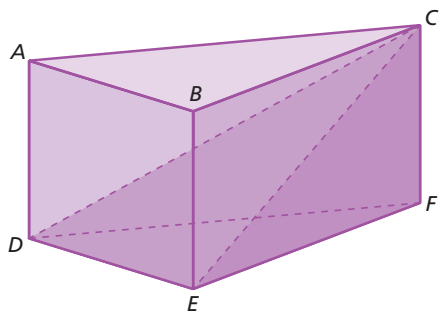
67. Sabendo que P e Q são os pontos médios das arestas $\overline{DC}$ e $\overline{CB}$, respectivamente, de medida 10 cm, do cubo $ABCDEFGH$, determine o volume da pirâmide $PQCG$ da figura a seguir. $\frac{125}{3}$ cm³



68. No paralelepípedo reto-retângulo representado abaixo, tem-se $AC = \sqrt{13}$ cm, $AD = 2$ cm e $CG = 3$ cm. Determine o volume da pirâmide $ACDG$. 3 cm³



69. A figura a seguir representa um prisma de base triangular decomposto em duas pirâmides. Determine a razão entre os volumes de $ABCDE$ e de $DEFC$. 2 para 1



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

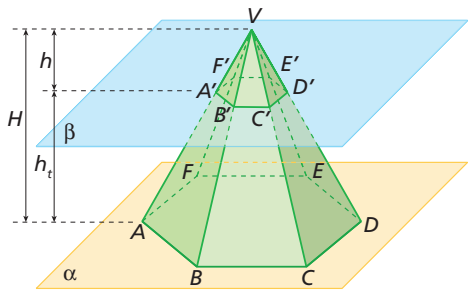
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4.6 Tronco de pirâmide de bases paralelas

Alguns sólidos, embora chamados de pirâmides, são **troncos de pirâmide**, pois falta-lhes a parte superior para ser uma pirâmide. A foto ao lado é de um monumento que lembra um tronco de pirâmide.

Considere uma pirâmide de vértice V, altura H e base contida em um plano α.



ARCHIVIO J. LANGE/DE AGOSTINI EDITORIAL/GETTY IMAGES

Pirâmide de Kukulcán (987 d.C.) da cidade maia de Chichén Itzá, México, 2015.

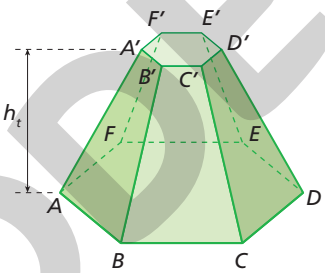
Seccionando-a com um plano β, paralelo a α, separamos essa figura em dois sólidos:

- o que contém o vértice V, que é uma nova pirâmide de altura h e base contida no plano β;
- o que contém a base da pirâmide maior, que é um **tronco de pirâmide de bases paralelas**.

Elementos de um tronco de pirâmide

Em um tronco de pirâmide, como o representado na figura ao lado, temos os seguintes elementos:

- **Base maior** – a superfície poligonal $ABCDEF$.
- **Base menor** – a superfície poligonal $A'B'C'D'E'F'$.
- **Faces laterais** – as superfícies trapezoidais $AA'B'B$, $BB'C'C$ etc.
- **Altura do tronco (h_t)** – a distância entre a base maior e a base menor ($h_t = H - h$).

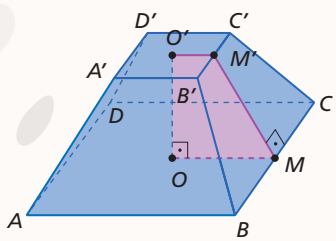


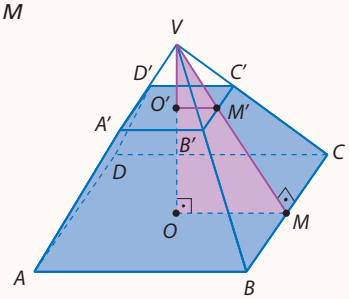
Observação

Para calcular o volume de um tronco de pirâmide, basta subtrair, do volume da pirâmide original, o volume da pirâmide de mesmo vértice, altura h e base congruente à base menor do tronco.

Exercício resolvido

R20. Um tronco de pirâmide regular tem a aresta lateral medindo $\sqrt{34}$ dm e bases quadradas cujos lados medem 4 dm e 10 dm. Calcular o volume do tronco.





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

▸ **Resolução**

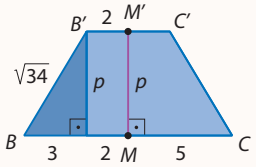
Inicialmente, vamos imaginar a pirâmide $ABCDV$ que deu origem a esse tronco de pirâmide pela secção com o plano que contém a base menor do tronco.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Para calcular o volume do tronco, é necessário obter o volume da pirâmide $ABCDV$, de altura H, e o volume da pirâmide $A'B'C'D'V$, de altura h.

Vamos calcular a medida do segmento $\overline{M'M}$, altura da face lateral do tronco.

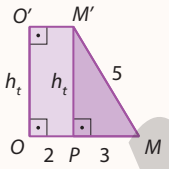


Pela figura ao lado, temos:

$p^2 + 3^2 = \left(\sqrt{34}\right)^2$

$p = 5$

Agora, vamos calcular a altura h_t do tronco; para isso, consideremos o trapézio $OO'M'M$, destacado ao lado.

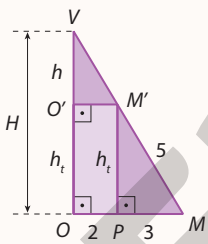


Pela figura, temos:

$h_t^2 + 3^2 = 5^2$

$h_t = 4$

Observando o triângulo VMO, podemos destacar os triângulos $M'MP$ e $VM'O'$. Note que esses triângulos são semelhantes; logo:



$\frac{h}{h_t} = \frac{O'M'}{PM}$

$\frac{h}{4} = \frac{2}{3}$

$h = \frac{8}{3}$

Assim:

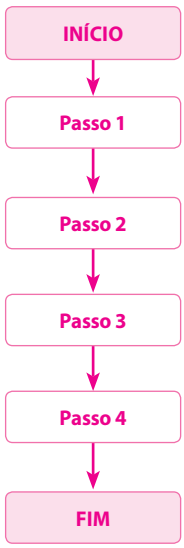
$H = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$

Então, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \frac{20}{3} - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \frac{8}{3} = 208$

Portanto, o volume do tronco de pirâmide é 208 dm^3.

Resposta possível:
Passo 1. Dadas as dimensões da aresta lateral e das bases quadradas do tronco da pirâmide regular, calcula-se a altura da face lateral do tronco.
Passo 2. Calcula-se a altura do tronco da pirâmide regular.
Passo 3. Calcula-se a altura da pirâmide regular.
Passo 4. Calcula-se o volume do tronco da pirâmide e encerra-se o algoritmo.



NELSON MATSUDA

Nesse boxe, será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315** da BNCC, uma vez que os alunos terão de escrever um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma para calcular o volume do tronco de uma pirâmide regular.

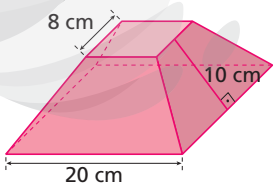
Pensamento computacional

Escreva um algoritmo, em linguagem corrente e em um fluxograma, para calcular o volume do tronco de uma pirâmide regular, conforme a resolução do exercício **R21**.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

70. Observe as medidas do tronco de pirâmide regular e, em seguida, calcule a altura do tronco. 8 cm



71. Um tronco de pirâmide regular tem como bases dois quadrados de lados 6 cm e 16 cm. Sabendo que a altura de uma face lateral do tronco mede 13 cm, calcule a altura do tronco e seu volume. altura = 12 cm; volume = 1.552 cm^3

72. Um tronco de pirâmide regular tem por bases dois hexágonos de lados 4 m e 6 m. Sabendo que o volume é $342\sqrt{3}$ m^3, calcule a altura do tronco. 9 m

73. Determine o volume de um tronco de pirâmide regular hexagonal de aresta lateral com 5 m de comprimento e áreas das bases de $54\sqrt{3}$ m^2 e $6\sqrt{3}$ m^2. $78\sqrt{3}$ m^3

74. Uma pirâmide tem 12 cm de altura e base com área de 81 cm^2. Seccionando-se a pirâmide por um plano paralelo ao plano da base, exatamente à distância de 8 cm da base, obtemos um tronco de pirâmide. Calcule o volume desse tronco. 312 cm^3

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

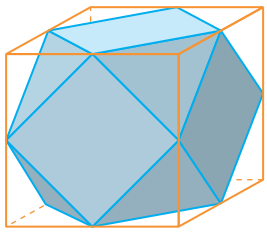
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

1. (Unifesp) Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.

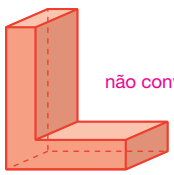


O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente: alternativa b

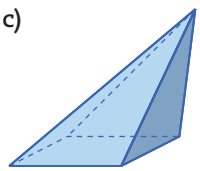
a) 8 e 8
b) 8 e 6
c) 6 e 8
d) 8 e 4
e) 6 e 6

2. Classifique os poliedros abaixo em convexo ou não convexo.

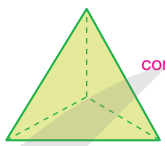
a) não convexo



c) convexo

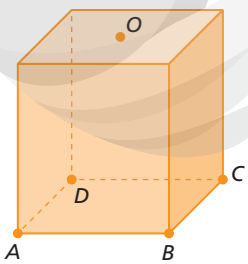


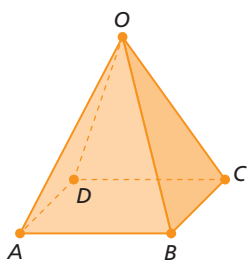
b) convexo



3. Um poliedro convexo tem 8 faces triangulares e 6 faces octogonais. Quantos vértices tem esse poliedro? 24 vértices

4. (Enem) Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.





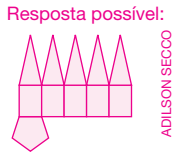
Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são: alternativa e

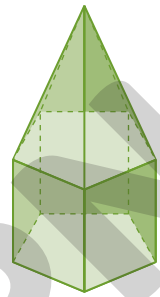
a) todos iguais.
b) todos diferentes.
c) três iguais e um diferente.
d) apenas dois iguais.
e) iguais dois a dois.

5. Represente uma possível planificação do sólido representado abaixo.

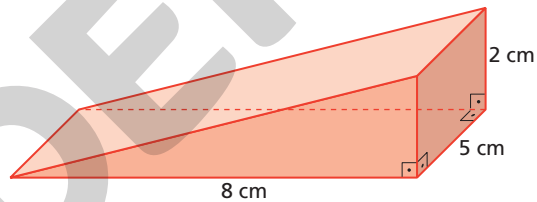
Resposta possível:



ADILSON SECCO

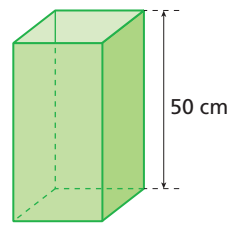


6. Uma cunha utilizada para prender uma porta tem o formato de um prisma, conforme mostra a figura.



Calcule o volume de madeira necessário para fazer essa cunha. 40 cm³

7. (Mackenzie-SP) A base do cesto reto da figura é um quadrado de lado 25 cm.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Se a parte lateral externa e o fundo externo do cesto devem ser forrados com um tecido que é vendido com 50 cm de largura, o menor comprimento de tecido necessário para a forração é: alternativa e

a) 1,115 m
b) 1,105 m
c) 1,350 m
d) 1,250 m
e) 1,125 m

8. Determine a área total da superfície de um paralelepípedo reto com 6 cm de altura cuja base é um losango de diagonais medindo 12 cm e 14 cm. $24\left(7+\sqrt{85}\right)$ cm²

9. (PUC-RJ) Um cubo tem 96 m² de área total. Em quantos metros deve ser aumentada sua aresta para que seu volume se torne igual a 125 m³? 1 m

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

10. Calcule o volume de um prisma triangular cuja base é um triângulo equilátero de lado 4 cm, sabendo que a aresta lateral mede 6 cm e forma com a base desse prisma um ângulo de 60°. 36 cm³

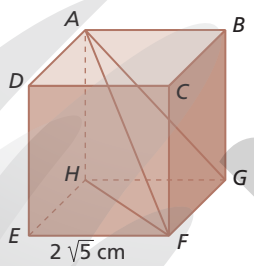
11. Um balconista vai empacotar 6 livros de formatos idênticos e de dimensões 20 cm, 25 cm e 1,5 cm. Para empacotar esses livros, colocando-os um em cima do outro, na menor dimensão, gasta-se, para o acabamento, 20% a mais de papel que a área da superfície a ser empacotada.
Determine quanto de papel o balconista gastará para embrulhar os 6 livros juntos. 2.172 cm²

12. Um reservatório para armazenar soja tem o formato de um paralelepípedo reto-retângulo com 35 m de altura e base quadrada com 60 m de perímetro. Depois de parte da colheita de soja ser armazenada, o reservatório ficou com 60% de sua capacidade ocupada. Quantos metros cúbicos do reservatório ainda restam para que ele fique com a capacidade total ocupada? 3.150 m³

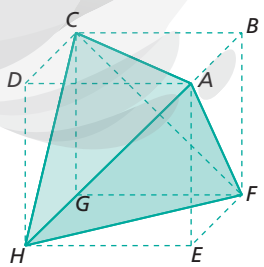
13. (FEI-SP) Num paralelepípedo reto-retângulo a área total mede 28 cm² e a diagonal $\sqrt{21}$ cm. A soma das dimensões mede: alternativa a

a) 7 cm **c)** 9 cm **e)** 12 cm
b) 8 cm **d)** 10 cm

14. Calcule o volume da pirâmide *AHFG* inscrita no cubo, conforme mostra a figura abaixo. $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm³



15. (UFSCar-SP) Na figura, os pontos *ACFH* são vértices de um tetraedro inscrito em um cubo de lado 3.



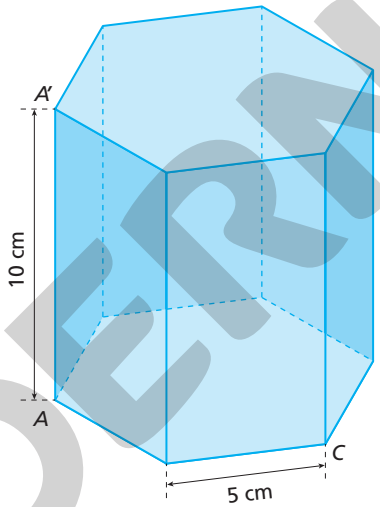
O volume do tetraedro é: alternativa c

a) $\frac{27}{8}$ **c)** 9 **e)** 18
b) $\frac{9\sqrt{39}}{8}$ **d)** $\frac{27\sqrt{13}}{18}$

16. Uma pirâmide triangular tem 9 cm de altura e a base é um triângulo isósceles cujos lados medem 5 cm, 5 cm e 8 cm. Determine o volume de uma nova pirâmide triangular, de 3 cm de altura, obtida pela secção de um plano paralelo à base da primeira pirâmide. $\frac{4}{3}$ cm³

Aprofundamento

17. (Unicamp-SP) A figura abaixo representa um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares.



Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma é 10 cm.

a) Calcule o volume do prisma. $375\sqrt{3}$ cm³

b) Encontre a área da secção desse prisma pelo plano que passa pelos pontos *A*, *C* e *A'*. $50\sqrt{3}$ cm²

(*Dica*: Lembrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$.)

18. Um prisma hexagonal regular tem $A_{base} = 96\sqrt{3}$ cm². Calcule a área lateral sabendo que a altura do prisma é igual à medida do apótema da base. $192\sqrt{3}$ cm²

19. Determine o volume de um paralelepípedo reto-retângulo com 60 cm de altura e bases quadradas, sabendo que a diagonal desse paralelepípedo forma um ângulo de 60° com o plano da base. 36.000 cm³

$\left(\text{Lembrar que } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}.\right)$

Desafio

20. A base de um paralelepípedo oblíquo é um quadrado cujo lado mede 5 cm. Sabendo que uma das arestas laterais mede $10\sqrt{2}$ cm e forma um ângulo de 60° com os lados adjacentes da base, determine seu volume. 250 cm³

MODERNA

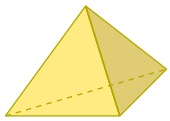
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

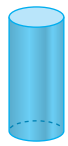
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

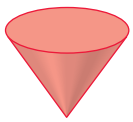
Autoavaliação

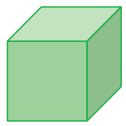
Registre as respostas em seu caderno.

1. Indique qual ou quais das figuras abaixo representa um poliedro. alternativas a, d

a) 

c) 

b) 

d) 

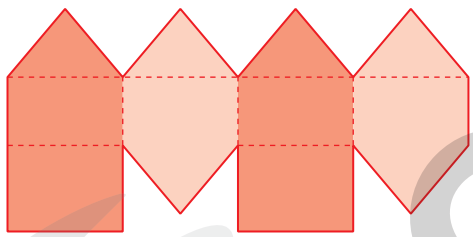
2. O número de vértices de um poliedro convexo formado por 80 faces triangulares e 12 faces pentagonais é: alternativa b

a) 80 b) 60 c) 50 d) 48

3. Um poliedro com 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares que não satisfaz a relação de Euler tem o número de vértices diferente de: alternativa d

a) 15 b) 13 c) 11 d) 9

4. Marilu quer construir uma caixa com o formato de um poliedro convexo usando um molde como o da figura abaixo.



O número de vértices dessa caixa é: alternativa d

a) 15 b) 13 c) 9 d) 11

5. As arestas de um paralelepípedo retângulo medem 3 cm, 4 cm e 5 cm. A medida da sua diagonal e de seu volume são, respectivamente: alternativa c

a) $5\sqrt{5}$ cm e 60 cm^3
b) $5\sqrt{2}$ cm e 47 cm^3
c) $5\sqrt{2}$ cm e 60 cm^3
d) $\sqrt{2}$ cm e 47 cm^3

6. Um prisma oblíquo de base quadrada tem todas as arestas medindo 10 cm. As arestas laterais formam um ângulo de 60° com o plano da base. O volume do prisma é, em centímetro cúbico, igual a: alternativa c

a) $150\sqrt{3}$
b) $240\sqrt{3}$
c) $500\sqrt{3}$
d) 900

7. Uma geladeira de isopor, com formato de um paralelepípedo reto-retângulo, tem paredes e tampa com 5 cm de espessura e medidas externas iguais a 0,85 m, 1,10 m e 0,80 m. Lembrando que 1 litro equivale a 1 dm^3, a capacidade, em litro, dessa geladeira é de: alternativa c

a) 748
b) 330,75
c) 525
d) 1.026

8. A área total e o volume de um prisma triangular regular de aresta da base 2 cm e altura $\sqrt{3}$ cm são, respectivamente: alternativa d

a) $7\sqrt{3}$ cm^2 e $\sqrt{3}$ cm^3
b) $4\sqrt{3}$ cm^2 e 3 cm^3
c) $8\sqrt{3}$ cm^2 e 1 cm^3
d) $8\sqrt{3}$ cm^2 e 3 cm^3

9. Para fazer uma vela com o formato de uma pirâmide regular quadrangular cujas faces laterais são triângulos equiláteros de lado 4 cm, Fábio usa [redacted] cm^3 de parafina. alternativa b

a) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ c) $16\sqrt{2}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Identificar poliedros – incluindo prismas, pirâmides, troncos de pirâmides – e seus elementos.	X	X	X	X					
Reconhecer propriedades dos poliedros e aplicar relações entre seus elementos.		X	X	X	X	X	X	X	X
Calcular áreas, volumes e medidas de comprimento de elementos de poliedros.					X	X	X	X	X
Resolver situações-problema que envolvam poliedros (do ponto de vista métrico e geométrico).				X			X		X
Páginas do livro referentes ao conceito	66 e 67	66 a 69	66 a 69	70 e 71	72 a 84	80 a 84	80 a 84	77 a 84	85 a 92

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

O trabalho com esse infográfico e com suas atividades possibilitam o desenvolvimento da competência específica **2** e da habilidade **EM13MAT201**, além das competências gerais **2** e **7** da BNCC, pois os alunos perceberão como uma simples mudança pode levar a uma economia de recursos naturais, além de participar de ações para conscientizar a comunidade. Trata também dos temas contemporâneos **educação ambiental** e **educação para o consumo.**

Compreensão de texto

Essa seção permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois é favorecido o desenvolvimento da competência **3** e da habilidade **EM13CNT307** da BNCC, quanto à discussão proposta em torno da análise das propriedades e da adequação do material usado nas embalagens de sabão em pó, além de proposições seguras e sustentáveis, considerando o contexto local e cotidiano.

Economia das formas

Embalagens mais eficientes poupam dinheiro e o meio ambiente.

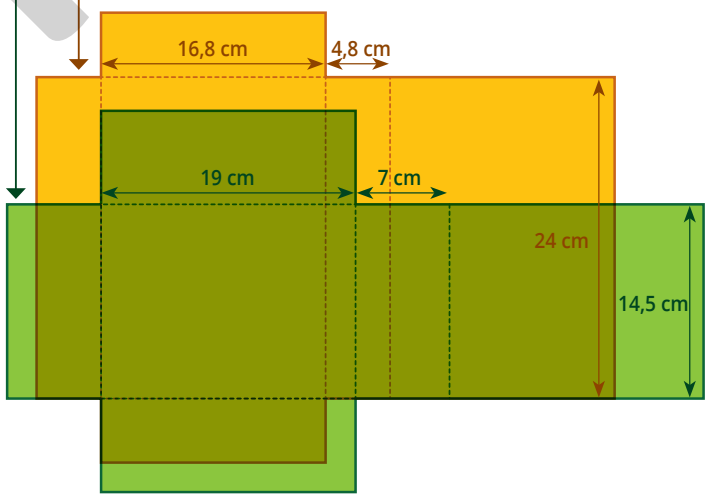
Do desenvolvimento de novos produtos ao transporte, à venda e à reciclagem, a embalagem de um produto influencia toda a cadeia produtiva. Observe a seguir como uma mudança aparentemente pequena no projeto das caixas de sabão em pó para roupas permite melhor aproveitamento de matérias-primas e de recursos preciosos, como a água.

O tema da eficiência das embalagens será retomado na seção *Pesquisa e ação*, ao fim deste volume.

Os sabões em pó para roupas começaram a ser produzidos no Brasil nos anos 1950. Por meio século, esse mercado foi dominado por embalagens em formato de paralelepípedos de papel-cartão, substituídos nos últimos anos por paralelepípedos mais compactos.

Caixa antiga

Caixa nova



Economia de papel

Apesar da diferença de quase **15%** na área, ambas as caixas contêm 1 kg de produto e algum espaço vazio. Se as **993 mil** toneladas de sabão em pó consumidas pelos brasileiros em 2018 fossem embaladas apenas em caixas de 1 kg, a troca do modelo antigo pelo novo pouparia **17,68 milhões** de metros quadrados de papel-cartão por ano.

Dados obtidos em: Ministério do Meio Ambiente. *Análise da eficiência energética em segmentos industriais selecionados* – segmento celulose e papel, maio 2018; Associação Brasileira das Indústrias de Produtos de Higiene, Limpeza e Saneantes para Uso Doméstico e de Uso Profissional (Abipla). *Anuário Abipla 2019*. 14. ed.

ILUSTRAÇÕES: MARCUS PENNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Caixa antiga: 1.198,08 cm^2 e 1.935,36 cm^3, respectivamente; caixa nova: 1.020 cm^2 e 1.928,5 cm^3, respectivamente. A caixa nova realmente utiliza menos papel-cartão e, apesar de a capacidade ser menor, ela comporta 1 kg de sabão em pó.
3. Respostas possíveis: embalagens menores com produtos concentrados, venda de produtos em refil, uso de materiais reciclados etc.
4. a) Podem ser reciclados papéis, plásticos, vidros e metais. **b)** Cooperativas de catadores; indústrias relacionadas ao material que vai ser reciclado; setores da tecnologia. **c)** Respostas possíveis: geração de emprego e de renda por meio da criação de cooperativas de catadores; redução dos gastos das indústrias com a aquisição de matérias-primas; preservação ambiental por meio da redução da exploração de recursos naturais e diminuição das áreas destinadas a aterros sanitários.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Calcule a área total e o volume correspondente a cada modelo de paralelepípedo usado nos dois tipos de caixa de sabão em pó. Compare-os e conclua se realmente a mudança foi válida.

2. Com relação à troca do modelo antigo pelo novo, responda às questões.

a) Se em 2018 fossem utilizadas apenas as caixas do modelo novo, de quanto seria a economia de papel-cartão? de 17,68 milhões de metros quadrados

b) Com essa economia, quantas caixas do modelo novo poderiam ser produzidas? aproximadamente 173 milhões de caixas

3. Pesquise em jornais, revistas, *sites* etc. quais medidas as indústrias estão tomando para reduzir o custo de fabricação de determinado produto, visando diminuir o valor de venda para o consumidor.

4. O infográfico traz dados interessantes e muito importantes sobre a economia de matéria-prima e melhor aproveitamento de recursos naturais com a simples mudança no projeto de algumas embalagens. Uma importante iniciativa para essa economia é a reciclagem.

a) Quais materiais podem ser reciclados?

b) Quais são os principais agentes envolvidos em um processo de reciclagem?

c) A reciclagem de materiais traz muitos benefícios tanto do ponto de vista socioeconômico como ambiental. Cite alguns desses benefícios.

5. Em seu município, bairro ou condomínio, existe algum programa de reciclagem de lixo doméstico? Elabore cartazes e uma cartilha sobre a reciclagem de materiais e faça uma campanha, com seus colegas, para conscientizar as pessoas de sua comunidade sobre os benefícios dessa atitude. Lembre-se de usar materiais recicláveis para a confecção dos cartazes e da cartilha. resposta pessoal

Economia de matéria-prima e recursos naturais

O papel economizado com a troca equivaleria a aproximadamente 6,36 mil toneladas por ano. Como a produção de uma tonelada de papel pode requerer 2,3 m^3 de madeira e 100 mil litros de água, essa simples mudança de projeto das embalagens evitaria o **consumo anual** de cerca de:

Energia também é poupada na fabricação e no transporte. A diferença anual no peso do papel equivale a 255 viagens de caminhão, por exemplo.

ILUSTRAÇÕES: MARCUS PENNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3** e **5**; habilidades **EM13MAT309**, **EM13MAT504** e **EM13MAT509**.

4 Corpos redondos

GUALTIERO BOFFI/SHUTTERSTOCK

O jogo de boliche é um esporte cujo objetivo é derrubar os pinos que estão dispostos num formato triangular com uma bola que desliza sobre uma pista.

Objetivos do capítulo

- Identificar cilindros, cones, troncos de cones, esferas e seus respectivos elementos.
- Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.
- Determinar o volume desses corpos redondos.

Jogos como o boliche despertam a atenção e são de interesse de muitos jovens e adolescentes; por isso, esta abertura se insere em um contexto de cultura juvenil.

Boliche é um jogo que não escolhe idade. Muito simples de ser jogado, é cada vez mais procurado. Há quem diga que é o segundo esporte mais praticado no mundo, perdendo apenas para o futebol; em uma hora de jogo, é possível "queimar" até 200 calorias.

No boliche, o objetivo é derrubar a maior quantidade de pinos com uma bola em cada arremesso. Para cada jogador, são dois arremessos por jogada e dez jogadas por partida. Cada pino derrubado vale 1 ponto. Há bônus para quem derruba todos os dez pinos – *strike* – no primeiro arremesso e *spare* juntando os dois arremessos de uma mesma jogada.

Observe as formas arredondadas das peças que compõem o boliche. Neste capítulo, vamos estudar os corpos redondos, como os cilindros, os cones e as esferas.

1 Corpos redondos

No capítulo anterior, vimos que muitas das formas dos objetos que nos cercam podem ser estudadas matematicamente por meio de representações chamadas de **sólidos geométricos**. Vimos também que os sólidos geométricos compreendem grandes grupos, como os **poliedros** e os **corpos redondos**.

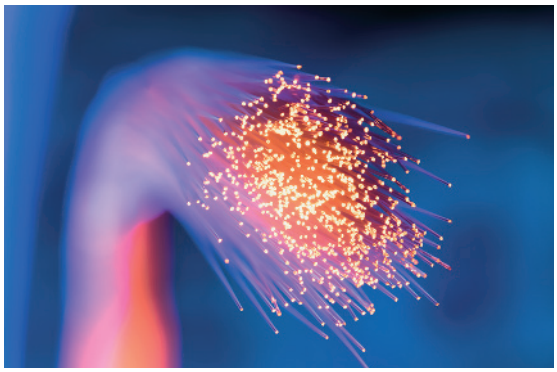
Entre os corpos redondos distinguimos o cilindro, o cone, a esfera e os corpos obtidos a partir deles.

A seguir, vamos estudar as propriedades geométricas e métricas dos corpos redondos.

2 Cilindro

Ao longo desse capítulo, as competências específicas **3** e **5** e as habilidades **EM13MAT309** e **EM13MAT504** da BNCC são favorecidas, pois leva o estudante a estabelecer conjecturas sobre conceitos e propriedades matemáticas e a investigar processos de obtenção das medidas da área e do volume de corpos redondos, incluindo o princípio de Cavalieri.

Milhares de artefatos com formato cilíndrico, como fibras ópticas, seringas de injeção, tubos diversos, entre outros servem para as mais diversas necessidades humanas. Cilindros hidráulicos, por exemplo, são componentes responsáveis pela geração de força mecânica em máquinas e equipamentos de distintos ramos da indústria: metalúrgico, automobilístico, siderúrgico, plástico, celulose etc. Nos vários projetos de peças como essas, é preciso realizar o cálculo exato de suas medidas lineares, de superfície e de volume.



ASHARKYU/SHUTTERSTOCK

Fibra óptica é um filamento flexível e transparente fabricado a partir de vidro ou de plástico extrudido com diâmetro de alguns micrometros. É um excelente condutor de luz, de imagens ou de impulsos codificados.

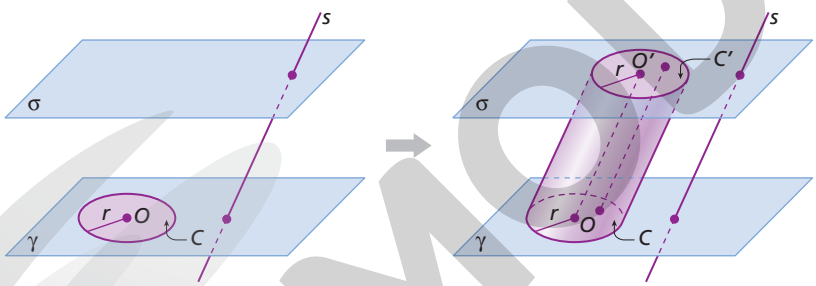
RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Edifício do Tribunal de Justiça do Estado de São Paulo, tombado pelo patrimônio histórico, localizado na cidade de São Paulo. Foto tirada em fevereiro de 2018.

Essa introdução possibilita a discussão sobre propriedades de materiais e avaliação em diferentes aplicações (industriais, cotidianas, arquitetônicas ou tecnológicas) e, dessa forma, favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT307** da BNCC.

No capítulo anterior, definimos prisma indicando um procedimento de construção. Neste capítulo, o primeiro corpo redondo que vamos estudar é o cilindro e, em seguida, vamos apresentar uma definição análoga à do prisma.

Consideremos dois planos paralelos distintos, γ e σ, um círculo C de raio r contido em γ e uma reta s secante aos planos γ e σ.



Chama-se **cilindro circular**, ou apenas **cilindro**, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta s, com uma extremidade no círculo C e a outra no plano σ.

Observe que as extremidades que pertencem ao plano σ formam um círculo C', congruente a C.

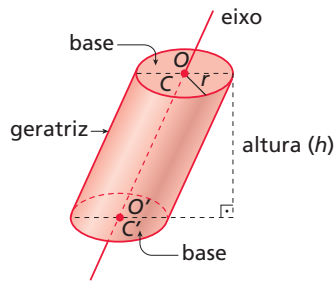
Observação

Embora exista uma definição de cilindro mais ampla, estudaremos aqui apenas os cilindros circulares.

Elementos de um cilindro

Considerando o cilindro desenhado ao lado, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Bases** – os círculos C e C', de raio r e centros O e O'.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- **Geratrizes** – os segmentos paralelos ao eixo do cilindro cujas extremidades são os pontos correspondentes das circunferências limítrofes das bases do cilindro. Indicaremos por g o comprimento da geratriz.
- **Altura do cilindro** – a distância h entre os planos que contêm as bases.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

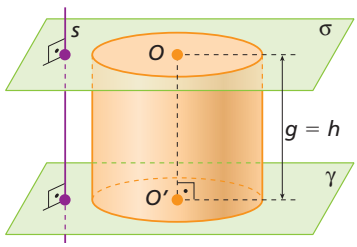
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

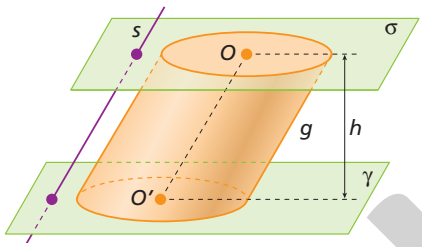
2.1 Classificação dos cilindros

Podemos classificar um cilindro de acordo com a inclinação da reta s em relação aos planos γ e σ que contêm as bases.

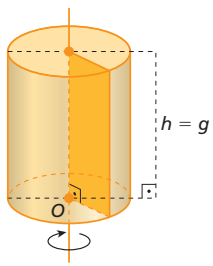
- Se a reta s é perpendicular aos planos γ e σ, então o cilindro é **reto**. Nesse caso, tanto o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ quanto as geratrizes do cilindro são perpendiculares aos planos das bases. Dessa maneira, o comprimento da geratriz é igual à altura do cilindro ($g = h$).



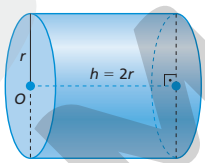
- Se a reta s não é perpendicular aos planos γ e σ, então o cilindro é **oblíquo**. Nesse caso, nem o eixo $\overleftrightarrow{OO'}$ nem as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Assim, o comprimento da geratriz é maior que a altura do cilindro ($g > h$).



Um cilindro circular reto também é denominado **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de uma superfície retangular em torno da reta que contém um dos lados dessa superfície. A medida desse lado é igual à altura h do cilindro, e a medida do lado perpendicular a este é igual ao raio r da base do cilindro.



Se um cilindro reto tem altura igual ao dobro do raio da base ($h = 2r$), ele é chamado de **cilindro equilátero**.



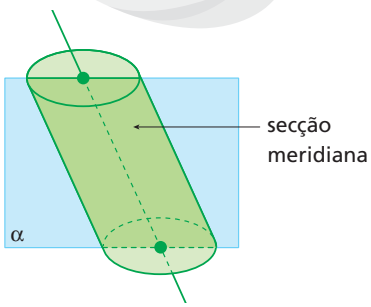
Reflita

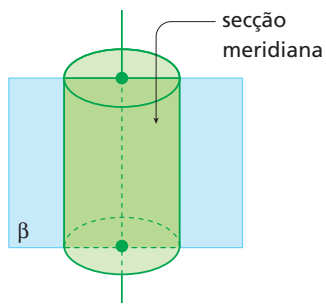
- Que quadrilátero é determinado pela secção meridiana de um cilindro qualquer?
- Em um cilindro equilátero, qual é a razão entre as medidas da geratriz e do raio?

2.2 Secções de um cilindro

Secção meridiana de um cilindro

Uma **secção meridiana** de um cilindro é determinada pela intersecção do cilindro com um plano que contenha seu eixo.





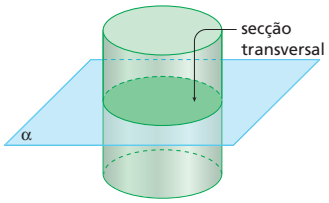
- Um paralelogramo. Em particular, se o cilindro for reto, o quadrilátero será um retângulo. Se o cilindro for equilátero, podemos particularizar ainda mais: o quadrilátero será um quadrado.
- Resolução algébrica: de $h = 2r$, temos $\frac{h}{r} = 2$. A razão é 2.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

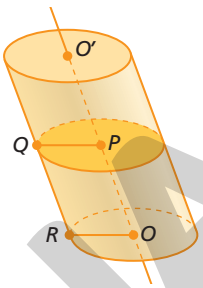
Secção transversal de um cilindro



Uma **secção transversal** de um cilindro é determinada pela intersecção do cilindro com um plano paralelo ao plano da base.

Propriedade: As secções transversais de um cilindro são círculos congruentes à base.

Demonstração



Considere uma secção transversal qualquer de um cilindro.

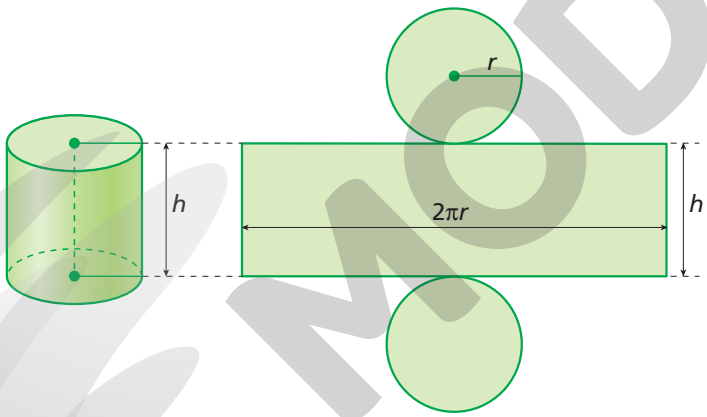
Como o eixo do cilindro é paralelo a qualquer geratriz, concluímos que $\overline{PO}$ é paralelo a $\overline{QR}$. A secção transversal é paralela ao plano da base; então, o plano (*PQRO*) corta essa secção e a base, determinando as retas paralelas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Logo, o segmento $\overline{PQ}$ é paralelo ao segmento $\overline{OR}$.

Como o quadrilátero *PQRO* é um paralelogramo, seus lados opostos têm medidas iguais. Daí, temos $PQ = OR$. Então, a secção transversal e a base têm raios de mesma medida e, portanto, são congruentes.

2.3 Área da superfície de um cilindro reto

Imagine que a superfície de um cilindro reto seja revestida de papel. Recortando o papel nas circunferências das bases e ao longo de uma geratriz, obtemos a **planificação** da superfície do cilindro.

A planificação é composta de dois círculos e de uma superfície retangular, em que a medida de um dos lados é igual ao comprimento da circunferência da base ($2\pi r$), e a medida do outro lado é igual à altura do cilindro (h).



Reflita

Imagine um cilindro cortado por um plano α não paralelo às suas bases e que não tem ponto comum com essas bases. A intersecção de α com o cilindro seria um círculo?

Não. Avaliar a conveniência de abordar o conceito de elipse que esta atividade propicia (ver o tópico 3.2: Secções de um cone).

Dado um cilindro reto de altura h e raio da base r, definimos:

- **Área da base** (A_{base}) é a área de um círculo de raio r.

$$A_{base} = \pi r^2$$

- **Área lateral** ($A_{lateral}$) é a área do retângulo de lados $2\pi r$ e h.

$$A_{lateral} = 2\pi rh$$

- **Área total** (A_{total}) da superfície do cilindro é a soma da área das bases com a área lateral.

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow$ $A_{total} = 2\pi r(r + h)$

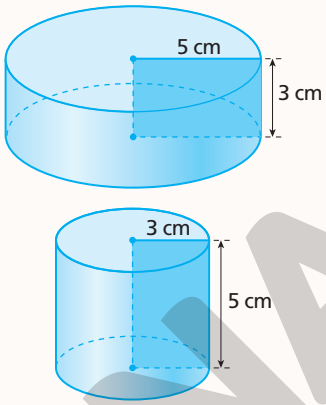
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R1. Dado um retângulo de dimensões 3 cm e 5 cm, comparar a área lateral e a área total da superfície dos cilindros de revolução dele obtidos.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

▸ **Resolução**

Fazendo a rotação do retângulo em torno do lado que mede 3 cm, obtemos um cilindro reto de raio 5 cm e altura 3 cm. Então:

$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 3 = 30\pi$

$A_{total} = 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot (5 + 3) = 80\pi$

Logo, esse cilindro tem área lateral de 30π cm^2 e área total de 80π cm^2.

O outro cilindro de revolução tem raio de 3 cm e altura 5 cm. Então:

$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi$

$A_{total} = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot (3 + 5) = 48\pi$

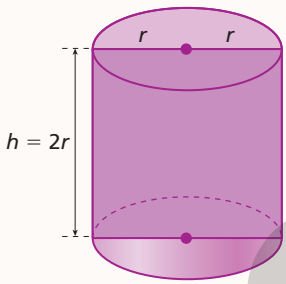
Logo, esse cilindro tem área lateral de 30π cm^2 e área total de 48π cm^2.

Portanto, as áreas laterais dos cilindros obtidos são iguais. No entanto, quando fazemos a rotação do retângulo em torno do lado menor, a área total da superfície do cilindro é maior.

R2. Calcular a razão entre a área da base e a área da secção meridiana de um cilindro equilátero.

▸ **Resolução**

Vamos considerar um cilindro equilátero de altura h, cuja base é um círculo de raio r.



A área da base é: $A_{base} = \pi \cdot r^2$

Como um cilindro equilátero tem altura igual ao dobro do raio ($h = 2r$), a secção meridiana é um quadrado de lado $2r$.

A área da secção meridiana é: $A_{secção\ meridiana} = 2r \cdot 2r = 4r^2$

Assim, temos: $\frac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4}$

Portanto, a razão entre a área da base e a área da secção meridiana é $\frac{\pi}{4}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Qual é a razão entre a área lateral e a área da secção meridiana de um cilindro circular reto? π

2. Uma indústria farmacêutica quer produzir comprimidos efervescentes de vitamina C em forma cilíndrica de 0,5 cm de altura e raio da base de 1 cm. Determine a área total da superfície desse comprimido. (Quanto maior a área de um comprimido efervescente, mais rapidamente ele se dissolve na água.) 3π cm^2

FABIO YOSHIHITO MATSUURA

3. O raio da base de um cilindro de revolução gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados mede 5 cm. A altura desse cilindro é igual ao comprimento da circunferência da base. Calcule a área total da superfície do cilindro. $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm^2

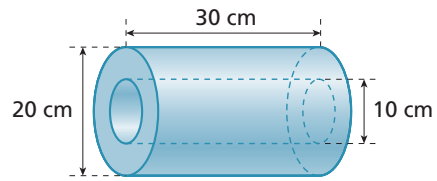
4. Sabendo que o raio da base de um cilindro reto mede 2 cm e que a área da secção meridiana é 20 cm^2, calcule a área total da superfície do cilindro. 28π cm^2

MODERNA

5. Se a altura de um cilindro reto é igual a $\frac{3}{2}$ do raio da base, calcule a altura e o raio, sabendo que a área lateral do cilindro é $108\pi\ cm^2$.
altura: 9 cm; raio: 6 cm

6. Elabore um exercício que envolva área total da superfície de um cilindro equilátero. Em seguida, peça a um colega que resolva o exercício elaborado por você. Feita a resolução, discutam os resultados obtidos. resposta pessoal

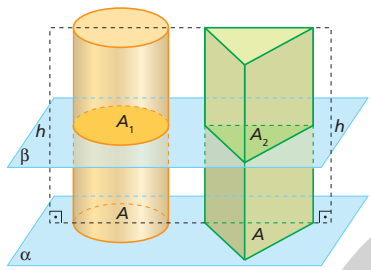
7. Um empresário recebeu um pedido para fabricar a peça representada ao lado, que tem a forma de um cilindro circular reto com um furo cilíndrico no sentido longitudinal. Para cobrar pelo serviço, o dono da indústria precisa calcular a quantidade de matéria-prima necessária para a fabricação de cada unidade. Calcule a área total da superfície da peça, de acordo com as dimensões indicadas. $1.050\pi\ cm^2$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.4 Volume de um cilindro

Considere um cilindro e um prisma situados em um mesmo semiespaço, de mesma altura h e cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, sendo a área da base do cilindro igual à da base do prisma.



Observe que cada plano β, paralelo a α, que secciona o cilindro também secciona o prisma, determinando as secções do cilindro e do prisma, ambas de mesma área, já que $A_1 = A$ e $A_2 = A$.

Assim, pelo princípio de Cavalieri, o volume do cilindro é igual ao volume do prisma: $V_{cilindro} = V_{prisma} = A_{base} \cdot h$

Portanto, o volume de um cilindro de raio r e altura h é dado por:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

Esse pilar do *pensamento computacional* auxilia tanto a resolução de problemas similares quanto a identificação de padrões que geram um problema. Dessa maneira, podemos considerar que uma solução pode ser aplicada em outras situações. Nesse tópico, é possível reconhecer o padrão, com base no Princípio de Cavalieri (estudado no capítulo anterior) ao relacionar os volumes de cilindros e prismas, de mesma altura h, cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, ambas de mesma área.

Exercício resolvido

R3. Considerar três cilindros circulares retos: C, de altura h e base de raio r; C′, de altura h e base de raio $2r$; e C″, de altura $2h$ e base de raio r.

a) Comparar o volume de C′ com o de C.

b) Comparar o volume de C″ com o de C.

c) Comparar o volume de C′ com o de C″.

▸ **Resolução**

Primeiro, calculamos o volume de C: $V = \pi r^2 h$

a) Cálculo do volume de C′:

$V' = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4(\pi r^2 h)$, ou seja: $V' = 4V$

Portanto, o volume de C′ é o quádruplo do volume de C.

b) Cálculo do volume de C″: $V'' = \pi \cdot r^2 \cdot (2h) = 2(\pi r^2 h)$, ou seja: $V'' = 2V$

Portanto, o volume de C″ é o dobro do volume de C.

c) Dos itens anteriores, temos: $V' = 4\pi r^2 h = 2(2\pi r^2 h)$, ou seja: $V' = 2V''$

Portanto, o volume de C′ é o dobro do volume de C″.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nos boxes **Observação** e **Explore** destaca-se a valorização e a aplicação, em situação real para a construção de uma sociedade inclusiva, de conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural, favorecendo, assim, a competência geral **1**. Também a competência geral **4** é favorecida, na medida em que diferentes linguagens são mobilizadas para expressar e compartilhar informações, experiências, ideias em diferentes contextos.

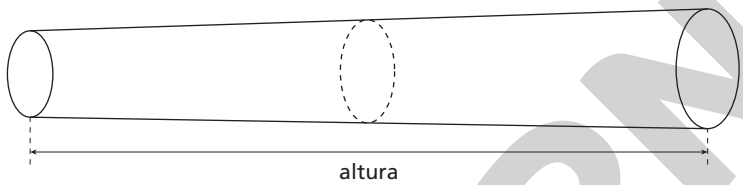
Observação

Comentar com os alunos que cubagem da madeira se refere ao processo de obtenção do volume de toras de madeira.

"É amplamente aceita a percepção de que a matemática está presente em diferentes contextos culturais. Fala-se na "matemática do pedreiro", na "matemática do marceneiro", na "matemática dos camponeses", e assim por diante. Decorre, portanto, que há saberes e fazeres matemáticos (sim, no plural!) para além daqueles que circulam na academia e na escola.

Este entendimento levou pesquisadores em Educação Matemática a constituírem um programa de pesquisa, iniciado em meados dos anos 70 e 80, chamado de **Etnomatemática**, do qual o brasileiro Ubiratan D'Ambrósio foi um dos mais destacados pioneiros. [...]

Um possível exemplo é discutir [...] como um marceneiro realiza a cubagem da madeira. [...] marceneiros no sul do país usam o seguinte procedimento: passam uma linha de cordel contornando o tronco na metade da altura estimada; dobram a linha em quatro partes iguais, elevando ao quadrado a medida do $\frac{1}{4}$ da linha do contorno; e finalmente, multiplicam pela medida da altura do tronco."



NELSON MATSUDA

Jonei Cerqueira Barbosa. Iede e Nova Escola. Disponível em: <https://www.portaliede.com.br/3551-2/>. Acesso em: 2 abr. 2020.

A Etnomatemática procura discutir o seu saber e fazer a partir do ponto de vista de sua cultura, de suas necessidades e de seu instrumental.

Orientar os alunos para que se organizem, dividam as tarefas e elaborem um cronograma. Se possível, organizar uma mostra dos trabalhos para toda a escola. Se necessário, sugerir algumas atividades a serem pesquisadas, como: uso de esquadro com linhas de pedreiro para determinar paredes perpendiculares; construção das tesouras na sustentação de telhado; determinação do nível de um terreno; cálculos de contabilidade, de produção agrícola, de área de terreno; construção de moldes para peças cerâmicas, metálicas ou plásticas.

Explore

Reúnam-se em grupos de quatro ou cinco alunos e pesquisem mais sobre a Etnomatemática. Essa atividade deve ser composta de:

- uma parte teórica que apresente o histórico e os objetivos da Etnomatemática. Para isso, consulte livros, *sites* e revistas. Depois, elaborem um resumo do que consideram importante para explicar para outra pessoa.
- uma parte prática que resulte de entrevistas com profissionais em geral: construção civil, campo, indústria, administração etc. Questionem que saberes matemáticos eles empregam na sua prática trabalhista.

Registrem tudo em texto, áudio ou vídeo, editem e apresentem ao professor.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

$(2 + 2\sqrt{3})$ cm

8. Se aumentarmos o raio da base ou a altura de um cilindro reto em 4 cm, os volumes dos novos cilindros coincidirão. Calcule o raio da base do cilindro inicial sabendo que sua altura é 2 cm.

9. Determine o volume de um cilindro equilátero cuja área total é igual a 24π dm^2. 16π dm^3

10. Quantos mililitros (mℓ) de tinta cabem no reservatório cilíndrico de uma caneta cujo diâmetro é 2 mm e o comprimento é 10 cm? (*Adote*: $\pi = 3{,}14$) 0,314 mℓ

11. Um cilindro de revolução, com 10 cm de raio da base, foi cortado por um plano paralelo a seu eixo e distante 6 cm dele. Sabendo que a área da secção determinada pelo plano é 80 cm^2, calcule o volume do cilindro. 500π cm^3

12. A parte interna de um botijão de gás de cozinha tem a forma cilíndrica com 40 cm de diâmetro e 60 cm de altura. Quantos dias o gás de um botijão cheio durará se forem consumidos diariamente 3,1 litros? (*Considere*: $\pi = 3{,}1$) 24 dias

13. O líquido que ocupa completamente um cilindro com 20 cm de diâmetro e 40 cm de altura será transferido para outro cilindro com 12 cm de diâmetro e 125 cm de altura. Que fração da altura do novo cilindro será ocupada pelo líquido transferido? $\frac{8}{9}$

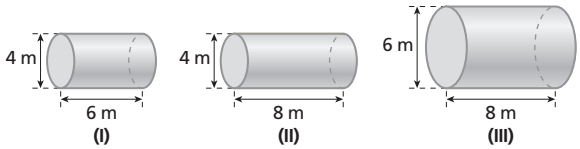
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

14. Para atender consumidores não profissionais em vendas a varejo, uma indústria de tintas encomendou estudos para a produção de novas embalagens, de maneira que um produto que ocupa completamente um recipiente cilíndrico seja dividido em recipientes menores, também cilíndricos, cujo diâmetro se reduz a $\frac{1}{4}$ e cuja altura se reduz a $\frac{1}{3}$ da do recipiente maior. Qual é a quantidade de recipientes menores necessários? 48 recipientes menores

15. Uma cisterna cilíndrica para armazenar água tem 1 m de diâmetro. Se forem consumidos 310 litros, quantos centímetros o nível de água baixará? (*Considere*: $\pi = 3{,}1$) 40 cm

16. (Enem) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com as medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.



ADILSON SECCO

Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (*Considere*: $\pi \simeq 3$)
alternativa d

a) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.

b) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

c) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

d) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

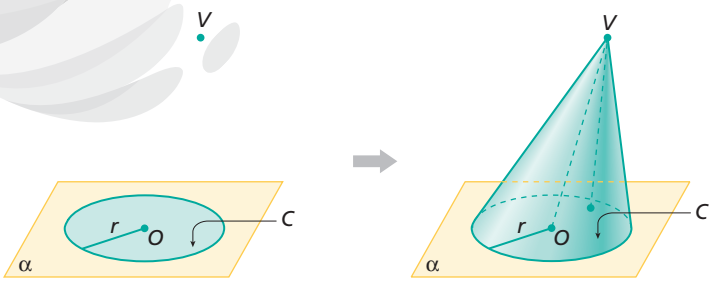
e) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

3 Cone

A forma cônica aparece em muitos objetos do dia a dia, como a casquinha de sorvete ou o cone de sinalização de trânsito.

A seguir, observe a definição geométrica de cone.

Consideremos um círculo C, de centro O e raio r, em um plano α, e um ponto V não pertencente ao plano α.



SAKARIN SAWASDINAKA/SHUTTERSTOCK

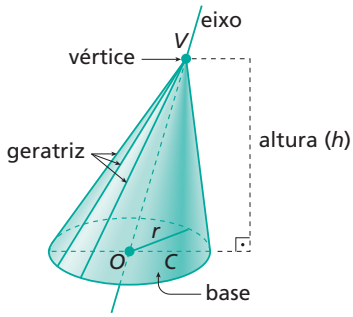
A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra no círculo C é denominada **cone circular**, ou simplesmente **cone**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Elementos de um cone

Considerando o cone desenhado abaixo, podemos destacar os seguintes elementos:

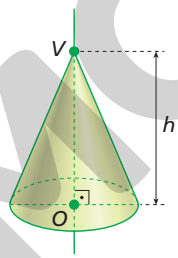


- **Base** – o círculo C de raio r e centro O.
- **Vértice** – o ponto V.
- **Eixo** – a reta $\overleftrightarrow{VO}$.
- **Geratrizes** – os segmentos com extremidades em V e na circunferência da base do cone. No cone reto (que veremos a seguir), indicaremos o comprimento da geratriz por g.
- **Altura do cone** – a distância h do vértice V ao plano que contém a base.

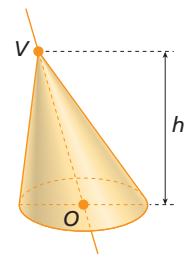
3.1 Classificação dos cones

Podemos classificar um cone de acordo com a inclinação do eixo $\overleftrightarrow{VO}$ em relação ao plano que contém a base.

- Se o eixo $\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular ao plano que contém a base, então o cone é **reto**. Nesse caso, a altura é igual a $\overline{VO}$.



- Se o eixo $\overleftrightarrow{VO}$ não é perpendicular ao plano que contém a base, então o cone é **oblíquo**. Nesse caso, a altura é menor que $\overline{VO}$.



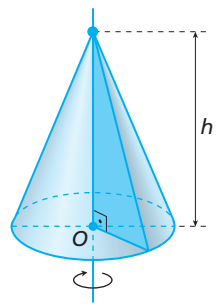
Reflita

Como podemos provar que, em um cone oblíquo, a altura é menor que a distância do vértice ao centro da base?

Uma possibilidade é pensar no triângulo VOP, retângulo em P, tal que P pertence ao plano que contém a base e $VP = h$.
Como $\overline{VO}$ é a hipotenusa, $\overline{OP}$ e $\overline{VP}$ são catetos; então, $VP < VO$.

Novamente, temos a resolução de uma questão de Geometria espacial reduzida à Geometria plana.
Na análise desenvolvida nesta resolução, optou-se pelo emprego da propriedade dos triângulos, que afirma que ao maior ângulo se opõe o maior lado.

Um cone circular reto também é denominado **cone de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de uma superfície triangular, determinada por um triângulo retângulo, em torno de uma reta que contém um de seus catetos. O comprimento do outro cateto será o raio da base do cone.

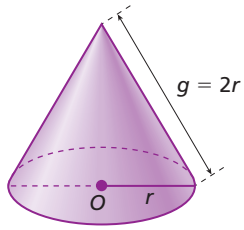


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

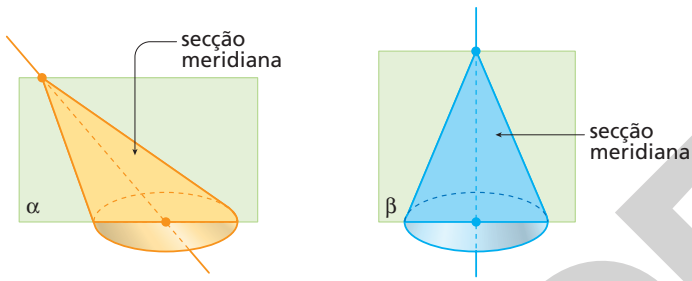
Se um cone reto tem a medida da geratriz igual ao dobro do raio da base ($g = 2r$), ele é chamado de **cone equilátero**.



3.2 Secções de um cone

Secção meridiana de um cone

Uma **secção meridiana** de um cone é determinada pela intersecção do cone com um plano que contenha seu eixo.



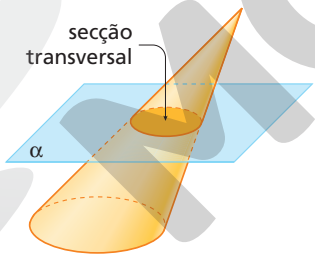
Reflita

Imagine um cone cortado por um plano α não paralelo à sua base e sem ponto comum com essa base. A intersecção de α com o cone seria um círculo?

Não. Avaliar a conveniência de abordar o conceito de elipse e de demais linhas obtidas pelas secções de um plano α em duplo cone (parábola e hipérbole).

Secção transversal de um cone

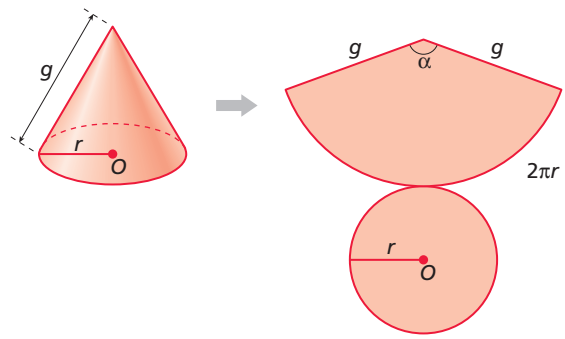
Uma **secção transversal** de um cone é a intersecção do cone com um plano paralelo ao plano da base.



3.3 Planificação da superfície de um cone reto

Assim como fizemos com o cilindro, vamos supor que a superfície de um cone reto seja revestida de papel. Para obter a planificação dessa superfície, vamos imaginar um recorte do papel na circunferência da base e, em seguida, um recorte ao longo de uma de suas geratrizes.

A planificação da superfície de um cone reto é composta de um círculo de raio r e centro O e de um setor circular de raio g, ângulo α e arco de comprimento $2\pi r$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Se considerar oportuno, demonstrar que a figura planificada da superfície lateral de um cone reto é um setor circular; basta lembrar que todos os pontos de seu arco são também pontos da circunferência da base. Logo, todos estão à mesma distância do vértice.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

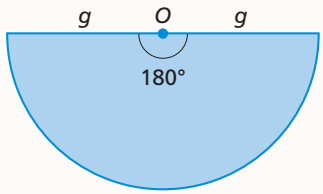
MODERNA

Exercício resolvido

R4. A planificação da superfície lateral de um cone reto é um semicírculo. Como se chama esse cone?

▸ **Resolução**

Vamos considerar um cone reto de raio da base r, comprimento da geratriz g e altura h.



O semicírculo de raio g é o setor circular da planificação da superfície lateral desse cone reto; logo, o comprimento do arco do setor deve ser igual ao comprimento da circunferência correspondente ao círculo da base do cone.

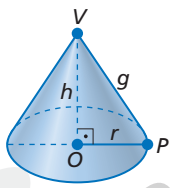
Assim: $\pi \cdot g = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow g = 2r$

Portanto, o cone em questão é um cone equilátero.

Observação: Pode-se verificar também que a secção meridiana desse cone é um triângulo equilátero.

Relações métricas entre os elementos de um cone reto

Considere um cone reto de raio da base r, comprimento da geratriz g e altura h.



O triângulo VOP é retângulo em O.

Daí, temos: $VO^2 + OP^2 = VP^2$

Portanto:

$$h^2 + r^2 = g^2$$

O setor circular a seguir representa a planificação da superfície lateral do cone.

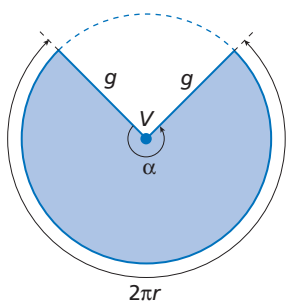
Então, podemos estabelecer a seguinte relação:

comprimento do arco		medida do ângulo (em grau)
$2\pi g$	———	$360°$
$2\pi r$	———	α

Logo: $2\pi g \cdot \alpha = 2\pi r \cdot 360°$

Portanto, α, em grau, é dado por:

$$\alpha = \frac{360° \cdot r}{g}$$



Espera-se que os alunos percebam que, quando $\alpha = 180°$, temos $g = 2r$; portanto, o cone é equilátero. Então, nesse caso, $h = r\sqrt{3}$.

Reflita

Como podemos escrever h em função de r quando $\alpha = 180°$?

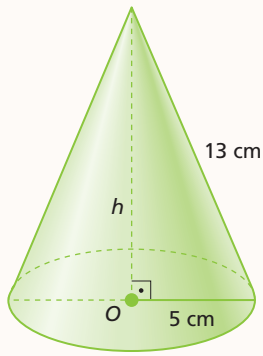
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R5. Calcular o comprimento da circunferência da base e a altura de um cone reto com 13 cm de geratriz e 5 cm de raio.



ADILSON SECCO

▸ **Resolução**

O comprimento da circunferência da base é dado por $C = 2\pi r$. Sabemos que o cone tem raio $r = 5$ cm. Assim:

$C = 2 \cdot \pi \cdot 5 \Rightarrow C = 10\pi \Rightarrow C \simeq 31{,}4$

Portanto, o comprimento da circunferência da base é aproximadamente 31,4 cm.

Sabendo que o cone é reto, podemos obter a altura por meio de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é a geratriz, e as medidas dos catetos são a altura e o raio da base do cone. Assim:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

Portanto, o cone tem 12 cm de altura.

R6. Um cone reto de 10 cm de altura tem por planificação da superfície lateral um setor circular de ângulo α medindo 150°. Determinar o raio da base e o comprimento da geratriz.

▸ **Resolução**

Como $r^2 + h^2 = g^2$, temos: $r^2 + 10^2 = g^2 \Rightarrow g^2 - r^2 = 100$ (I)

Como $\alpha = \dfrac{360° \cdot r}{g}$, temos:

$150° = \dfrac{360° \cdot r}{g} \Rightarrow g = \dfrac{12r}{5}$ (II)

De (I) e (II), concluímos que:

$\left(\dfrac{12r}{5}\right)^2 - r^2 = 100 \Rightarrow \dfrac{144r^2}{25} - r^2 = 100 \Rightarrow 144r^2 - 25r^2 = 2.500 \Rightarrow r^2 = \dfrac{2.500}{119} \Rightarrow r \simeq 4{,}58$

Portanto, o raio da base do cone é aproximadamente 4,58 cm.

Como $g = \dfrac{12r}{5}$, o comprimento da geratriz é aproximadamente 11 cm.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

17. Determine a medida do ângulo central de um setor circular obtido pela planificação da superfície lateral de um cone reto com 60 cm de geratriz e 10 cm de raio da base. 60°

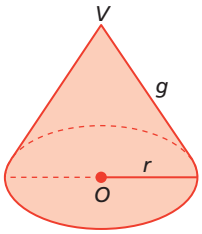
18. A planificação da superfície lateral de um cone reto é um setor circular com ângulo central medindo 60°. Calcule a razão k entre o comprimento da circunferência da base e o comprimento da geratriz do cone. $\frac{\pi}{3}$

19. Determine a altura de um cone reto, sabendo que a planificação da superfície lateral é um setor circular com ângulo central medindo 120° e o raio da base é igual a 10 cm. $20\sqrt{2}$ cm

20. Um pedaço de cartolina tem a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Construindo um cone reto com essa cartolina e colocando-o sobre uma mesa, qual será a distância do vértice até a mesa? $10\sqrt{3}$ cm

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

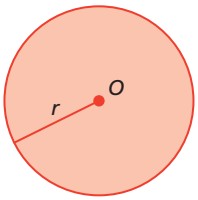
MODERNA



3.4 Área da superfície de um cone reto

Pela planificação da superfície de um cone, podemos obter a área total dessa superfície. Para isso, vamos considerar um cone reto de raio da base r e comprimento da geratriz g.

A **área da base** (A_{base}) é a área de um círculo de raio r e centro O.



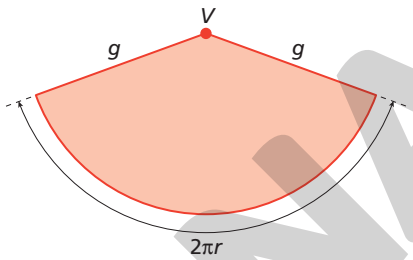
$$A_{base} = \pi r^2$$

Explore

Em uma cartolina, recorte círculos de raio 12 cm. Neles, recorte setores circulares de ângulos 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 320° e 340°. Usando fita adesiva, obtenha a superfície lateral dos respectivos cones. Como seria uma dessas superfícies quando a medida do ângulo tendesse a 360°? Para qual valor tenderia a área dessa superfície lateral?

A superfície lateral tende a coincidir com a base do cone; a área dessa superfície tende a ser igual à área da base do cone.

A **área lateral** ($A_{lateral}$) é a área de um setor circular tal que o raio é o comprimento g da geratriz e o arco tem comprimento igual a $2\pi r$ (o comprimento da circunferência da base do cone).



Como a área desse setor é diretamente proporcional ao comprimento $2\pi r$ do arco que o define, temos:

$$\frac{\text{comprimento do arco do setor}}{\text{comprimento da circunferência de raio } g} = \frac{\text{área do setor}}{\text{área do círculo}}$$

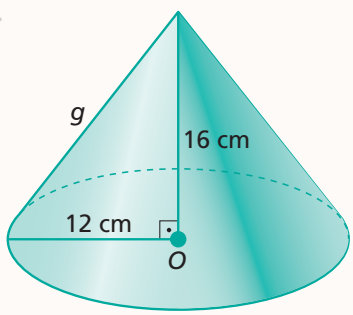
$$\frac{2\pi r}{2\pi g} = \frac{A_{lateral}}{\pi g^2} \Rightarrow A_{lateral} = \frac{(2\pi r) \cdot (\pi g^2)}{2\pi g} \Rightarrow A_{lateral} = \pi r g$$

A **área total** (A_{total}) da superfície do cone reto é a soma da área da base com a área lateral.

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = \pi r^2 + \pi r g \Rightarrow A_{total} = \pi r (r + g)$$

Exercício resolvido

R7. Determinar a área lateral de um cone reto com 16 cm de altura e 12 cm de raio da base.



▸ **Resolução**

Temos:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow g^2 = 400 \Rightarrow g = 20$

Portanto, o comprimento da geratriz do cone é 20 cm.

A área lateral do cone é:

$A_{lateral} = \pi r g \Rightarrow A_{lateral} = \pi \cdot 12 \cdot 20 \Rightarrow A_{lateral} = 240\pi \Rightarrow A_{lateral} \simeq 753{,}6$

Logo, a área lateral do cone é 240π cm^2 ou, aproximadamente, 753,6 cm^2.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

21. Determine a área lateral e a área total da superfície de um cone reto conforme os dados a seguir.

a) A altura é 12 cm, e o raio da base, 9 cm. $135\pi\ cm^2$; $216\pi\ cm^2$

b) O comprimento da geratriz é 26 cm, e a altura, 24 cm. $260\pi\ cm^2$; $360\pi\ cm^2$

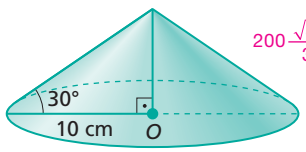
22. Uma escola infantil realizará a Festa do Circo. Uma professora ficou de confeccionar 34 chapéus cônicos de palhaço. Sabendo que cada chapéu terá 12 cm de altura e 8 cm de raio, calcule a quantidade total de papel usado para fazer todos os chapéus. $1.088\pi\sqrt{13}\ cm^2$

23. Calcule a área total da superfície de um cone reto inscrito em um cilindro reto de 5 cm de altura e 2 cm de raio da base. $2\pi\left(2+\sqrt{29}\right)\ cm^2$

24. Calcule a área total da superfície de um cone circular reto cuja secção meridiana é um triângulo equilátero de 10 cm de lado. $75\pi\ cm^2$

25. A área lateral da superfície de um cone reto é $600\pi\ cm^2$. Sabendo que a geratriz mede 30 cm, calcule a área total da superfície. $1.000\pi\ cm^2$

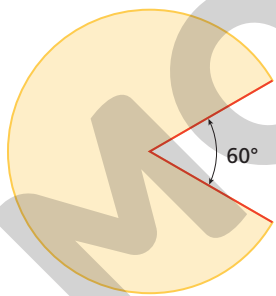
26. Determine a área lateral do cone representado a seguir.



$200\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\ cm^2$

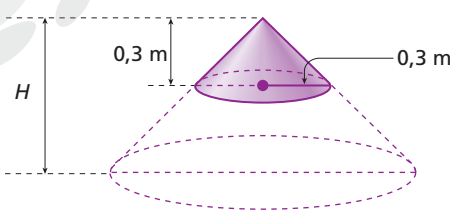
27. Elabore um exercício sobre a área total de um cone equilátero. Em seguida, peça a um colega que resolva o exercício elaborado por você. Após a resolução, conversem sobre os resultados obtidos. resposta pessoal

28. O setor circular representado pela figura tem 6 cm de raio. Após a união das bordas vermelhas, ele é transformado na superfície lateral de um cone reto.



Determine o raio da base do cone. 5 cm

29. Uma lâmpada pontual é colocada em um lustre na forma de um cone com altura e raio da base igual a 0,3 m. A que altura *H* do chão esse lustre deve ser pendurado para obter uma forma circular iluminada com área de $6{,}25\pi\ m^2$? 2,5 m



30. Um triângulo retângulo tem catetos medindo 3 dm e 4 dm. Determine a área da superfície do sólido de revolução gerado pela rotação do triângulo em torno de sua hipotenusa. $\left(\frac{84}{5}\right)\pi\ dm^2$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

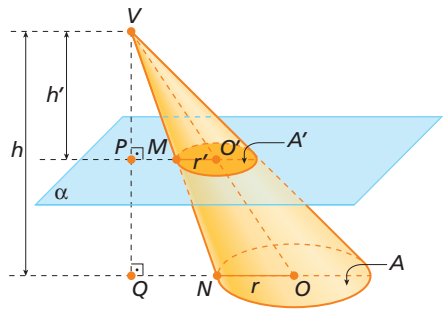
MODERNA

3.5 Volume de um cone

Antes de tratar do volume de um cone qualquer, vamos estudar duas propriedades dos cones.

Para isso, considere um plano α que secciona um cone a uma distância h' do vértice, paralelamente à base, determinando uma secção de área A'.

Sejam h a altura do cone, r o raio da base e A a área da base do cone.



ADILSON SECCO

Propriedade 1: A razão entre a distância h' de uma secção transversal ao vértice do cone e a altura h do cone é igual à razão entre o raio r' da secção transversal e o raio r da base, isto é:

$$\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$$

Demonstração

Os triângulos VMO' e VNO são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes). Assim, temos: $\frac{VM}{VN} = \frac{r'}{r}$ (I)

Os triângulos VPM e VQN são semelhantes (têm ângulos correspondentes congruentes). Assim, temos: $\frac{VP}{VQ} = \frac{VM}{VN}$ (II)

De (I) e (II), podemos concluir que: $\frac{VP}{VQ} = \frac{r'}{r}$

Como $VP = h'$ e $VQ = h$, temos: $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$

Propriedade 2: A razão entre a área A' de uma secção transversal de um cone, feita a uma altura h' em relação ao vértice V, e a área A da base desse cone de altura h é igual ao quadrado da razão entre h' e h, isto é:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Demonstração

A área da secção transversal do cone é $A' = \pi(r')^2$, e a área da base do cone é $A = \pi r^2$. Assim, temos:

$$\frac{A'}{A} = \frac{\pi(r')^2}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{(r')^2}{r^2}$$

Mas sabemos, pela propriedade **1**, que $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$; portanto:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{A'}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Determinação do volume de um cone

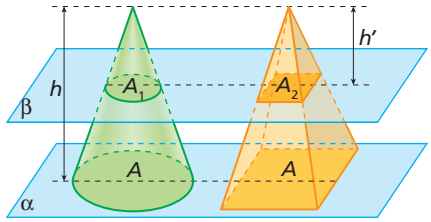
Considere um cone e uma pirâmide em um mesmo semiespaço, de mesma altura h e cujas bases estejam contidas no mesmo plano α, sendo a área da base do cone igual à da base da pirâmide.

Observe que cada plano β, paralelo a α, que secciona o cone também secciona a pirâmide, determinando as secções do cone e da pirâmide, de áreas A_1 e A_2, respectivamente.

Pelas propriedades já vistas, temos:

$\frac{A_1}{A} = \frac{(h')^2}{h^2}$ e $\frac{A_2}{A} = \frac{(h')^2}{h^2}$

Portanto: $\frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$



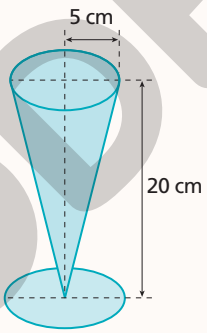
Assim, pelo princípio de Cavalieri, o volume do cone é igual ao volume da pirâmide: $V_{cone} = V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$

Portanto, o volume do cone é dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Exercício resolvido

R8. Calcular a quantidade máxima de líquido, em litro, que a taça representada na figura abaixo pode comportar.



▸ **Resolução**

Vamos calcular o volume da taça:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3}$

Assim: $V \simeq 523{,}3\ cm^3$

Sabemos que $1\ \ell = 1\ dm^3$ e $1\ dm^3 = 1.000\ cm^3$.

Logo: $1\ \ell = 1.000\ cm^3$

Então:

$V \simeq 523{,}3\ cm^3 = 523{,}3 \cdot \frac{1}{1.000}\ \ell = 0{,}5233\ \ell$

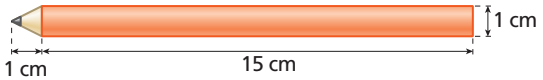
Portanto, a taça pode conter até $0{,}5233\ \ell$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

31. Um cone reto de 3 cm de raio da base tem volume $18\sqrt{2}\,\pi\ cm^3$. Calcule a área total da superfície desse cone. $36\pi\ cm^2$

32. Calcule o volume do lápis representado na figura a seguir. $\frac{23}{6}\pi\ cm^3$



33. Em um cone de revolução de 10 cm de altura, a área da base excede em $216\pi\ cm^2$ a área de uma secção paralela à base, feita a 2 cm do vértice. Calcule o volume do cone. $750\pi\ cm^3$

34. Dois cones, 1 e 2, são gerados pela rotação da superfície determinada por um triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm. Para obter o cone 1, o giro se dá em torno do cateto menor; para obter o cone 2, em torno do cateto maior.

a) Determine a razão percentual entre os volumes dos cones 1 e 2. 240%

b) Se as medidas dos catetos desse triângulo fossem x e y, em torno dos quais se fizessem rotações para gerar, respectivamente, os cones 1 e 2, qual seria a razão entre os volumes dos cones 1 e 2? $\frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

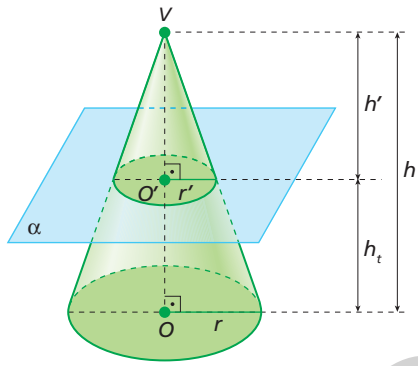
LIFESTYLE TRAVEL PHOTO/SHUTTERSTOCK

3.6 Tronco de cone de bases paralelas

Vários objetos do nosso cotidiano têm a forma que lembra um tronco de cone, como copas de abajur, canecas, vasos, entre outros.

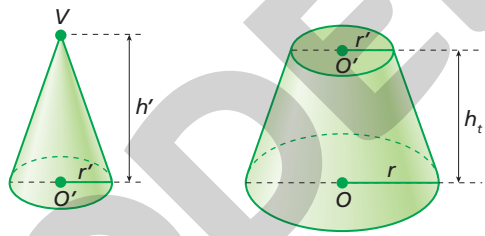
Observe a definição de tronco de cone a seguir.

Considere um cone reto de vértice V, altura h e raio da base r, seccionado por um plano α, paralelo ao plano da base, a uma distância h_t dela ($h_t < h$), que determina uma secção transversal de centro O' e raio r'.



Ao seccionar o cone original, o plano α determina dois sólidos:

- um cone menor, de mesmo vértice V e altura $h' = h - h_t$;
- um sólido denominado **tronco de cone de bases paralelas**.



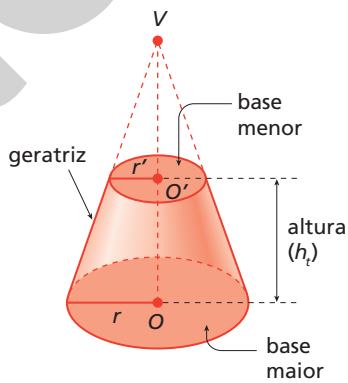
Reflita

Que figura geométrica é determinada pela secção meridiana de um tronco de cone de bases paralelas?

A figura determinada pela secção meridiana de um tronco de cone é um trapézio, pois:
- tem dois lados paralelos determinados pelos diâmetros da base do cone e da base da secção transversal paralela à base do cone;
- tem dois lados não paralelos.

(E o quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos é um trapézio.)

Elementos de um tronco de cone



Considerando o tronco de cone desenhado acima, podemos destacar os seguintes elementos:

- **Base maior** – o círculo de centro O e raio r.
- **Base menor** – a secção transversal obtida por meio do plano α, ou seja, o círculo de centro O' e raio r'.
- **Geratrizes** – os segmentos cujas extremidades são pontos correspondentes das circunferências das bases e que estão contidos em retas que passam pelo vértice V do tronco do cone.
- **Altura** – a distância h_t entre os planos que contêm as bases do tronco de cone.

Observação

Para calcular o volume de um tronco de cone, basta subtrair, do volume do cone original, o volume do cone de mesmo vértice, altura h' e base congruente à base menor do tronco.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

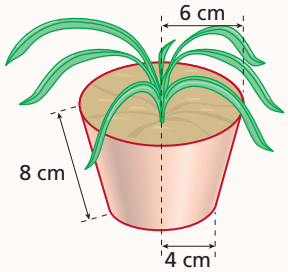
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R9. Destacar os pilares do *pensamento computacional* empregados na resolução: **abstração** (ao representar a situação real matematicamente e fazer uso dos dados e cálculos pertinentes à resolução), **decomposição** (ao dividir o problema em tarefas menores e mais simples de serem resolvidas) e **reconhecimento de padrões** (ao empregar resolução semelhante à utilizada em troncos de pirâmides).

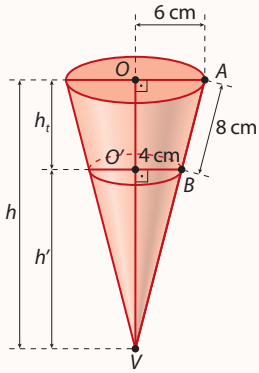
Exercícios resolvidos

R9. Calcular a quantidade máxima de terra que o vaso representado na figura pode comportar.

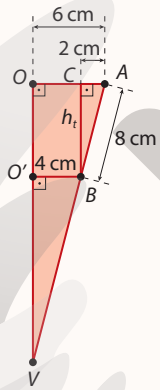


▸ Resolução

O exercício consiste em obter o volume do tronco de cone reto que representa o vaso. Para isso, vamos considerar o cone que deu origem a esse tronco:



Destacando o triângulo *AVO*, temos:



Usando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, vamos calcular a altura do tronco de cone:

$8^2 = 2^2 + h_t^2 \Rightarrow h_t = \sqrt{60} \Rightarrow h_t = 2\sqrt{15}$

Note que os triângulos *AVO* e *ABC* são semelhantes; então:

$\frac{6}{2} = \frac{h}{h_t} \Rightarrow 3 = \frac{h}{2\sqrt{15}} \Rightarrow h = 6\sqrt{15}$

Assim: $h' = 6\sqrt{15} - 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

Logo, o volume do tronco de cone é:

$V_{tronco} = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{15} - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{15}\right)$

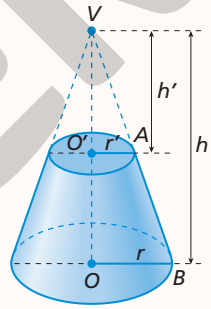
$V_{tronco} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(216\sqrt{15} - 64\sqrt{15}\right) = \frac{152\sqrt{15}}{3} \cdot \pi$

Portanto, o vaso comporta, no máximo, $\frac{152\sqrt{15}}{3}\ \pi\ cm^3$, aproximadamente $616\ cm^3$ de terra.

R10. Dado um tronco de cone reto de bases paralelas, calcular a razão entre os volumes V'_{cone}, do cone menor, e V_{cone}, do cone maior, que determinam esse tronco, em função da razão entre as respectivas alturas, h' e h.

▸ Resolução

O volume do tronco de cone é obtido do volume V'_{cone} do cone menor (de altura h' e raio da base r') e do volume V do cone maior (de altura h e raio da base r), conforme a figura abaixo.



Os triângulos *VO′A* e *VOB* são semelhantes; portanto:

$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h}$ (I)

Como os volumes dos cones são dados por $V'_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r')^2 \cdot h'$ e $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, a razão entre os volumes é:

$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r')^2 \cdot h'}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}$

$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \frac{(r')^2 \cdot h'}{r^2 \cdot h} = \frac{(r')^2}{r^2} \cdot \frac{h'}{h}$

$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \frac{h'}{h}$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos a razão solicitada:

$\frac{V'_{cone}}{V_{cone}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

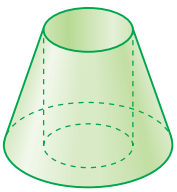
Registre as respostas em seu caderno.

35. Os raios das circunferências das bases paralelas de um tronco de cone reto são 5 cm e 3 cm. Sabendo que a altura do tronco é 6 cm, calcule seu volume. $98\pi\ cm^3$

36. As áreas das bases de um tronco de cone reto de bases paralelas medem $36\pi\ cm^2$ e $16\pi\ cm^2$. Sabendo que sua geratriz mede $2\sqrt{5}$ cm, determine o volume desse tronco. $\frac{304\pi}{3}\ cm^3$

37. Uma taça tem a forma cônica e a altura é o dobro da medida do diâmetro da base. A taça estava cheia de água, mas alguém bebeu até que o restante da água ficasse exatamente com a metade da altura da taça. Que fração da água foi bebida? $\frac{7}{8}$

38. Observe o desenho de uma peça com o formato de um tronco de cone reto. Note que, no centro, há uma cavidade em formato cilíndrico. A altura do cilindro coincide com a altura do tronco de cone. Sabendo que os raios das circunferências das bases paralelas do tronco de cone medem 7 cm e 12 cm e que a geratriz do tronco mede 13 cm, calcule o volume da peça. $520\pi\ cm^3$



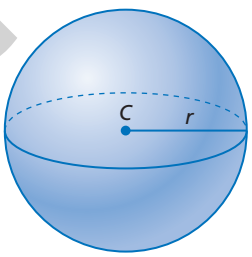
ROBERT ANTON IUHAS/ ALAMY/FOTOARENA

Biosfera de Montreal de Buckminster Fuller, Montreal, Canadá, 2012.

4 Esfera

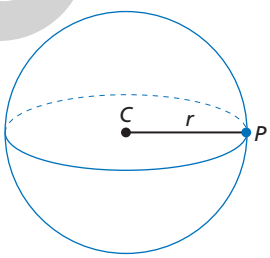
Vários objetos do dia a dia têm forma esférica (como a bolinha de gude) ou aproximadamente esférica (como uma laranja). Para estudar esse tipo de forma, vamos analisar o sólido denominado esfera.

Consideremos um ponto C do espaço e um número real e positivo r.



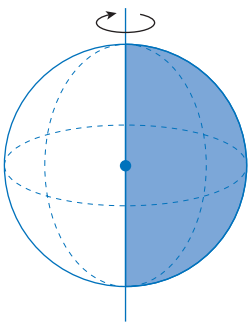
Chama-se **esfera** de centro C e raio r o sólido formado por todos os pontos P do espaço que estão a uma distância de C menor ou igual a r.

Chamamos de **superfície esférica** a "casca" da esfera, ou seja, o conjunto de pontos P do espaço que estão a uma distância de C igual a r.



O estudo dos cilindros, dos cones e das esferas permite uma abordagem interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, com relação à cartografia. Para mais detalhes sobre esse assunto, sugerir a consulta ao *site* <http://www.cartografiaescolar.ufsc.br/index.htm>. Acesso em: 15 fev. 2020. Ver também a seção *Compreensão de texto* no final deste capítulo.

Assim como o cilindro e o cone, a esfera também pode ser considerada um sólido de revolução, pois pode ser obtida pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que passa por seu diâmetro.



Efetuando a rotação completa de uma semicircunferência em torno do eixo que passa por seu diâmetro, obtemos uma superfície esférica.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reflita

Fazendo a rotação completa de uma semicircunferência em torno do eixo que passa por seu diâmetro, que figura geométrica obtemos?

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4.1 Secção de uma esfera

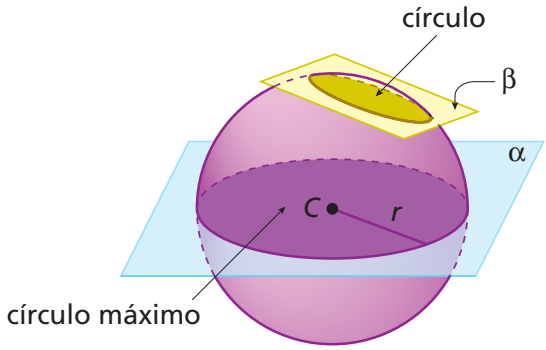
Secção plana de uma esfera

Toda **secção plana** de uma esfera, ou intersecção de uma esfera com um plano, é um ponto ou é um círculo. Se o plano de intersecção contiver o centro da esfera, então a secção obtida será chamada de **círculo máximo**.

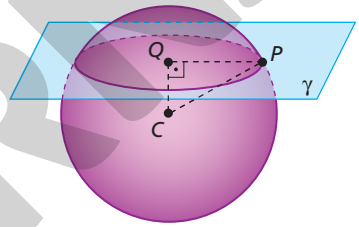
Reflita

Qual área máxima uma secção plana de uma esfera pode atingir?

A área máxima será igual à área do círculo máximo. Para uma esfera de raio r, essa área máxima é igual a πr^2.



A afirmação de que a intersecção de um plano com uma esfera pode ser um círculo é explicada de maneira simples. Observe, na figura ao lado, a secção determinada pelo plano γ. Considere o ponto Q de γ tal que $\overline{CQ} \perp \gamma$ e também um ponto P qualquer de γ e da superfície esférica. Sendo o triângulo CQP um triângulo retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras: $(QP)^2 + (QC)^2 = (PC)^2$

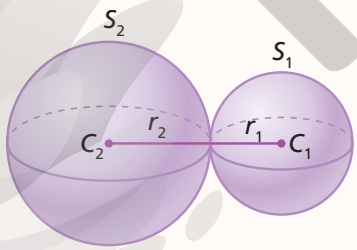


Assim, temos: $(QP)^2 = (PC)^2 - (QC)^2$

Como as medidas QC (distância de C a Q) e PC (raio da esfera) são constantes, $QP = \sqrt{(PC)^2 - (QC)^2}$ também é constante, e a linha formada pelos pontos P da intersecção da secção com a superfície esférica é uma circunferência de centro Q e raio $\overline{QP}$, ou seja, a secção é um círculo.

Exercícios resolvidos

R11. As esferas S_1 e S_2 representadas abaixo, de raio 3 cm e 4 cm, respectivamente, têm somente um ponto em comum. Calcular a distância entre seus centros.



▸ **Resolução**

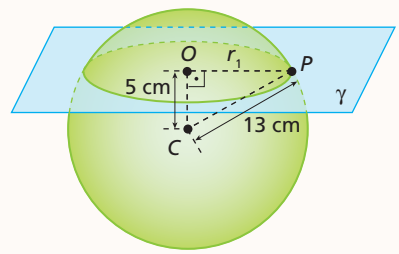
Como as esferas são tangentes, ou seja, têm somente um ponto em comum, o segmento que une seus centros tem medida $r_1 + r_2$; nesse caso, $3 + 4 = 7$.

Então, a distância entre os centros das esferas é 7 cm.

R12. Calcular o raio r_1 de uma secção plana de uma esfera sabendo que o raio da esfera é igual a 13 cm e que a distância dessa secção ao centro da esfera é 5 cm.

▸ **Resolução**

Observe a figura abaixo.



Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle COP$, obtemos:

$13^2 = 5^2 + r_1^2 \Rightarrow r_1^2 = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_1 = 12$

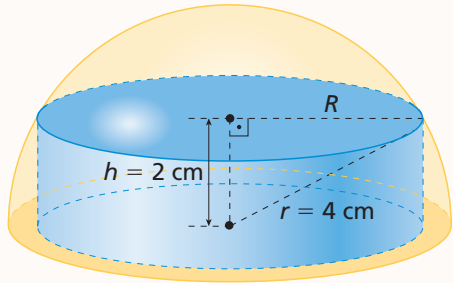
Portanto, o raio r_1 é igual a 12 cm.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R13. Calcular o volume do cilindro inscrito na semiesfera representada abaixo.



▸ **Resolução**

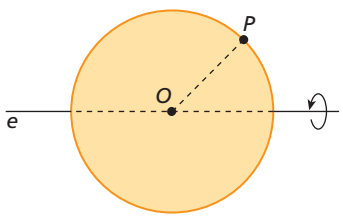
$V_{\text{cilindro}} = \pi R^2 h = \pi \cdot (r^2 - h^2) \cdot h = \pi \cdot (4^2 - 2^2) \cdot 2 = 24\pi$

Portanto, o volume do cilindro é 24π cm^3.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

39. A figura representada abaixo gira em torno do eixo *e*.



Escreva que figura é descrita com esse giro:

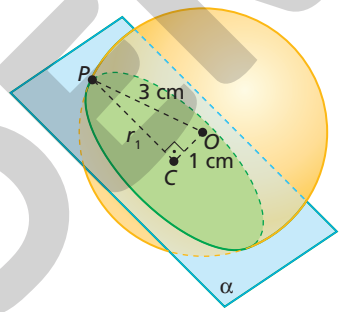
a) pelo ponto *P*; circunferência

b) pelo segmento $\overline{OP}$; superfície lateral de um cone

c) pela circunferência de centro *O* e raio $\overline{OP}$. superfície esférica

40. Uma superfície esférica, de centro O_1 e raio r_1, tem somente um ponto em comum com outra superfície esférica, de centro O_2 e raio r_2. Qual é a distância entre O_1 e O_2? $r_1 + r_2$, ou $r_1 - r_2$, ou $r_2 - r_1$

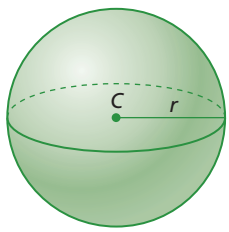
41. Calcule o raio r_1 do círculo determinado pela intersecção do plano α com a esfera, conforme a figura abaixo. $2\sqrt{2}$ cm



42. Considere uma esfera de 2 cm de raio e um plano β interceptando a esfera de maneira que determine uma secção plana de raio $\sqrt{3}$ cm. Calcule a distância entre o plano β e o centro da esfera. 1 cm

4.2 Área da superfície esférica e volume da esfera

Consideremos uma esfera de centro *C* e raio *r*.



Pode-se demonstrar que a **área da superfície esférica** e o volume da esfera são dados por:

$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2 \qquad V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

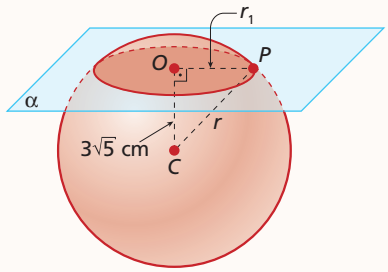
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R14. Uma secção plana de uma esfera, distante $3\sqrt{5}$ cm do centro da esfera, tem 36π cm^2 de área. Calcular o volume da esfera e a área de sua superfície.



▸ **Resolução**

Como toda secção plana de uma esfera é um círculo, a área é dada por $A_1 = \pi r_1^2$. Assim:

$36\pi = \pi r_1^2 \Rightarrow r_1 = 6$ (raio da secção plana)

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle COP$, calculamos o raio da esfera:

$r^2 = 6^2 + (3\sqrt{5})^2 \Rightarrow r^2 = 36 + 45 \Rightarrow r^2 = 81 \Rightarrow r = 9$

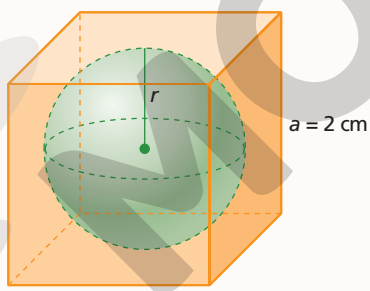
Então, podemos calcular o volume V da esfera e a área A de sua superfície:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 \Rightarrow V = 972\pi \Rightarrow V \simeq 3.052$

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 9^2 \Rightarrow A = 324\pi \Rightarrow A \simeq 1.017$

Portanto, o volume da esfera é, aproximadamente, 3.052 cm^3, e a área da sua superfície é, aproximadamente, 1.017 cm^2.

R15. Uma esfera foi inscrita em um cubo, conforme mostra a figura abaixo. Calcular o volume dessa esfera e determinar a razão entre as áreas da superfície cúbica e da superfície esférica.



▸ **Resolução**

Pela figura, temos $a = 2r$. Como a aresta do cubo é igual a 2 cm, temos $r = 1$ cm.

Volume da esfera: $V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \Rightarrow V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi$

Área da superfície cúbica: $A_{cubo} = 6 \cdot 2^2 \Rightarrow A_{cubo} = 24$

Área da superfície esférica: $A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_{esfera} = 4\pi$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos: $A_{esfera} = 4 \cdot 3{,}14 \Rightarrow A_{esfera} = 12{,}56$

A razão entre as áreas é: $\frac{24}{12{,}56} \simeq 1{,}91$

Logo, o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi$ cm^3, e a área do cubo é quase o dobro da área da superfície esférica.

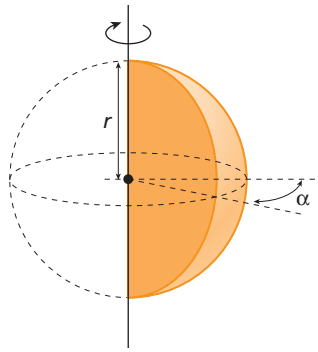
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

4.3 Cunha esférica e fuso esférico

Chama-se **cunha esférica** o sólido gerado pela rotação, por um ângulo de medida α, de um semicírculo de raio r em torno de um eixo que contém seu diâmetro.



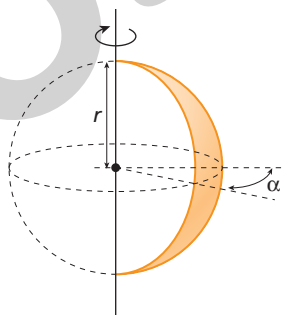
O **volume de uma cunha esférica** é proporcional à medida α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculado usando uma regra de três simples.

volume		medida do ângulo (em grau)
$\frac{4}{3}\pi r^3$	———	360°
$V_{\text{cunha esférica}}$	———	α

Resolvendo essa regra de três, obtemos o volume da cunha esférica:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \alpha}{270°}$$

Pela rotação, por um ângulo de medida α, de uma semicircunferência de raio r em torno de um eixo que contém seu diâmetro, obtemos um **fuso esférico**.



A **área de um fuso esférico** é proporcional à medida α (em grau) do ângulo de rotação e pode ser calculada usando uma regra de três simples.

área		medida do ângulo (em grau)
$4\pi r^2$	———	360°
$A_{\text{fuso esférico}}$	———	α

Resolvendo essa regra de três, obtemos a área do fuso esférico:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90°}$$

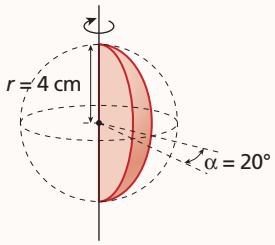
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercício resolvido

R16. Calcular o volume da cunha esférica e a área do fuso esférico da figura abaixo.



▸ **Resolução**

O volume da cunha esférica é dado por:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{\pi \cdot 4^3 \cdot 20^\circ}{270^\circ} \Rightarrow V_{\text{cunha esférica}} = \frac{128\pi}{27}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$V_{\text{cunha esférica}} = \frac{128 \cdot 3{,}14}{27} \simeq 14{,}9$$

A área do fuso esférico é dada por:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 20^\circ}{90^\circ} \Rightarrow A_{\text{fuso esférico}} = \frac{32\pi}{9}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$A_{\text{fuso esférico}} = \frac{32 \cdot 3{,}14}{9} \simeq 11{,}2$$

Portanto, o volume da cunha esférica é, aproximadamente, 14,9 cm^3, e a área do fuso esférico é, aproximadamente, 11,2 cm^2.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

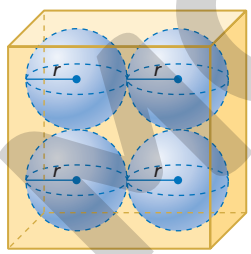
43. Determine a área da superfície esférica e o volume de cada esfera descrita.

a) A esfera tem 3 cm de raio. $36\pi\ cm^2$; $36\pi\ cm^3$

b) A esfera tem 18 cm de diâmetro. $324\pi\ cm^2$; $972\pi\ cm^3$

44. Um queijo moldado na forma esférica tem 10 cm de raio. Derretido, ele cabe exatamente em uma panela cilíndrica de raio 10 cm. Qual é a altura dessa panela? $\frac{40}{3}$ cm

45. Calcule o volume do paralelepípedo representado abaixo sabendo que cada esfera tangencia quatro faces do paralelepípedo e outras duas esferas. Além disso, o volume de cada esfera é $\frac{4}{3}\pi\ cm^3$. $32\ cm^3$



46. Calcule a área do fuso esférico e o volume da cunha esférica de 45° contidos em uma esfera de raio 6 cm. $18\pi\ cm^2$; $36\pi\ cm^3$

47. Se considerarmos uma laranja como uma esfera de raio r composta de 12 gomos exatamente iguais, qual será a medida da superfície total de cada gomo? $\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^2$

48. Uma cunha esférica de raio 1 m tem volume 1 m^3. Qual é a medida α, em radiano, do ângulo que a determina? $\frac{3}{2}$ radiano

49. Para abrigar uma exposição, construiu-se uma estrutura coberta em forma de um hemisfério. Se o revestimento do piso totalizou 78,5 m^2, quantos metros quadrados de lona foram utilizados na cobertura toda? (*Use*: $\pi = 3{,}14$) $157\ m^2$

50. Um copinho de sorvete cônico tem 10 cm de altura (profundidade) e "boca" com 4 cm de diâmetro. Mostre que, se forem colocadas nesse copinho duas conchas semiesféricas de sorvete, também de 4 cm de diâmetro, o sorvete não transbordará, mesmo que derreta. Ver resolução no Guia do professor.

Explicar aos alunos que hemisfério corresponde a cada uma das metades de uma esfera determinadas por um plano que passa por seu centro.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

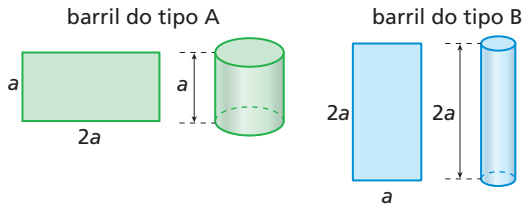
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. (Fuvest-SP) Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e $2a$, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado.



Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se: alternativa a

a) $V_A = 2V_B$
b) $V_B = 2V_A$
c) $V_A = V_B$
d) $V_A = 4V_B$
e) $V_B = 4V_A$

2. Um cilindro de revolução é cortado por um plano paralelo ao eixo e a 3 cm desse eixo, determinando uma secção retangular cuja área é igual à área da base do cilindro. Calcule o volume desse cilindro sabendo que o raio da base é 5 cm. $\frac{625\pi^2}{8}$ cm³

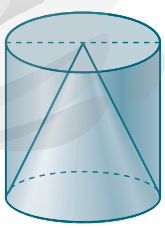
3. (Vunesp) Considere um cilindro circular reto de altura x cm e raio da base igual a y cm. Usando a aproximação $\pi = 3$, determine x e y nos seguintes casos:

a) o volume do cilindro é 243 cm³, e a altura é igual ao triplo do raio; $x = 9$ e $y = 3$

b) a área da superfície lateral do cilindro é 450 cm², e a altura tem 10 cm a mais que o raio. $x = 15$ e $y = 5$

4. Uma lata cilíndrica de óleo, com 4 cm de raio da base e 19 cm de altura, indica ter conteúdo de 900 mℓ. Qual é o volume de ar contido nessa lata se ela tiver exatamente a quantidade de óleo especificada na embalagem? 54,6 mℓ

5. (PUC) A figura abaixo mostra um cone inscrito num cilindro. Ambos têm raio da base x e altura $2x$.



Retirando-se o cone do cilindro, o volume do sólido resultante é: alternativa b

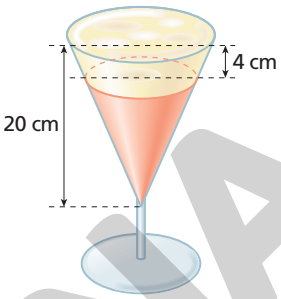
a) $\frac{2\pi x^3}{3}$
b) $\frac{4\pi x^3}{3}$
c) $\frac{5\pi x^3}{3}$
d) $\frac{7\pi x^3}{3}$
e) $\frac{8\pi x^3}{3}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

7. Antes de os alunos efetuarem os cálculos, perguntar qual é a estimativa deles para essa situação: menos de 50%, 50% ou mais de 50%.

6. Um cone circular reto tem raio da base igual a 10 cm. Sabendo que a medida do ângulo central do setor circular, que representa sua superfície lateral, é igual a 135°, determine o volume desse cone. $\frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$ cm³

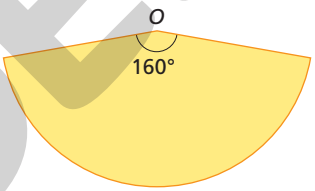
7. (Mackenzie-SP) Uma mistura de leite batido com sorvete é servida em um copo, como na figura.



Se na parte superior do copo há uma camada de espuma de 4 cm de altura, então a porcentagem do volume do copo ocupada pela espuma está mais bem aproximada na alternativa: alternativa c

a) 65%
b) 60%
c) 50%
d) 45%
e) 70%

8. (Mackenzie-SP) Planificando a superfície lateral de um cone, obtém-se o setor circular da figura, de centro O e raio 18 cm.



Dos valores abaixo, o mais próximo da altura desse cone é: alternativa d

a) 12 cm
b) 18 cm
c) 14 cm
d) 16 cm
e) 20 cm

9. Determine a altura de um tronco de cone de bases paralelas sabendo que os raios da base são 3 m e 2 m e que seu volume é 20π m³. $\frac{60}{19}$ m

10. Considere um cone circular reto com 3 cm de raio da base e 9 cm de altura. A que distância do vértice um plano paralelo à base do cone deve cortá-lo de modo que o volume do tronco, assim determinado, seja $\frac{2}{3}$ do volume do cone? $3\sqrt[3]{9}$ cm

11. Calcule o volume de uma cunha esférica de 30° de uma esfera de volume igual a 972π m³. 81π cm³

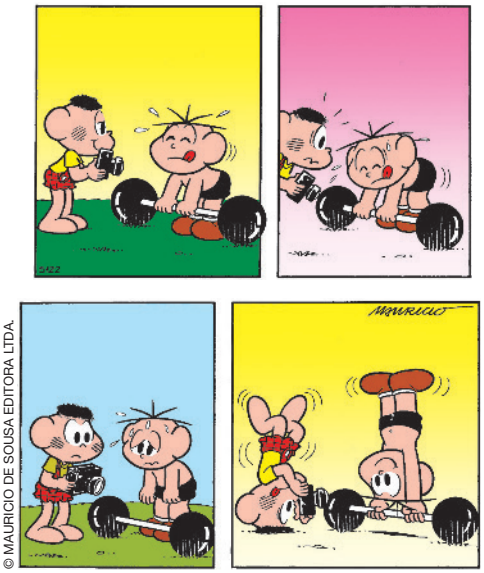
12. Um plano secciona uma esfera cujo diâmetro é 34 cm. Determine a área da secção obtida sabendo que a distância do centro da esfera ao plano é 8 cm. 225π cm²

13. Os raios de duas esferas concêntricas são 15 cm e 8 cm. Calcule a área determinada pela intersecção da esfera maior por um plano tangente à esfera menor. 161π cm²

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

14. (PUC) A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.



© MAURICIO DE SOUSA EDITORA LTDA.

Suponha que cada esfera tenha 10,5 cm de diâmetro e que o bastão tenha 50 cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4 cm. Se a densidade do ferro é 7,8 g/cm³, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use: $\pi = \frac{22}{7}$.) alternativa e

a) 18 **c)** 15 **e)** 10
b) 16 **d)** 12

Aprofundamento

15. Calcule a área total da superfície de um cilindro circular reto que tem volume igual ao de um cubo de aresta de 9 cm e área lateral igual à área total da superfície do cubo. $(486 + 18\pi)$ cm²

16. Os diâmetros das bases de um tronco de cone de revolução medem 22 m e 4 m. Qual é a medida do diâmetro da base de um cilindro de mesma altura do tronco e de mesmo volume? 14 m

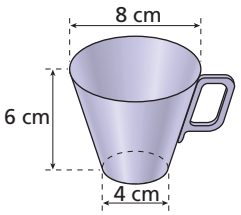
17. Calcule o volume de uma esfera circunscrita a um cubo de aresta medindo 4 m. $32\pi\sqrt{3}$ m³

18. (Ibmec) Considere um cone circular reto de altura 24 e raio da base 10. Suponha que o segmento $\overline{AB}$ seja uma corda da circunferência da base que diste 5 do seu centro C. Então, sendo V o vértice do cone, o volume do tetraedro ABCV é igual a: alternativa a

a) $200\sqrt{3}$ **d)** $800\sqrt{3}$
b) $400\sqrt{3}$ **e)** $1.000\sqrt{3}$
c) $600\sqrt{3}$

19. Uma melancia é composta de 95% de água. Calcule o volume de água existente em uma melancia esférica de 15 cm de raio. 4.275π cm³

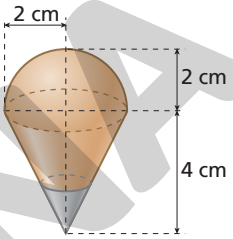
20. (Mackenzie-SP) Uma xícara de chá tem a forma de um tronco de cone reto, conforme a figura.



Supondo $\pi = 3$, o volume máximo de líquido que ela pode conter é: alternativa a

a) 168 cm³ **d)** 176 cm³
b) 172 cm³ **e)** 164 cm³
c) 166 cm³

21. Um ludologista fabrica piões usando as medidas indicadas na figura ao lado. Determine o volume de cada pião fabricado.



$\frac{32\pi}{3}$ cm³

22. (Enem) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1); porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

figura 1

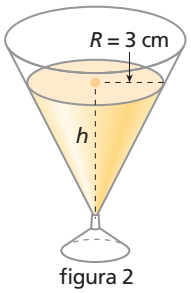


figura 2

Considere:

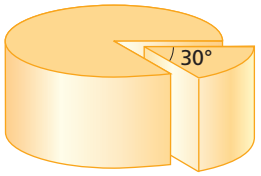
$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetro, é de: alternativa b

a) 1,33 **b)** 6,00 **c)** 12,00 **d)** 56,52 **e)** 113,04

Desafio

23. Um queijo com formato cilíndrico tem 30 cm de altura e base com 25 cm de raio. Um supermercado vende esse queijo em fatias, conforme mostra a figura.



$1.562{,}5\pi$ cm³

Determine o volume de cada uma dessas fatias.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. A área, em centímetro quadrado, da superfície lateral de um cilindro reto de 6 cm de altura e 10 cm de raio da base é: alternativa b

a) 25π b) 120π c) 100π d) 125π

2. A área total da superfície de um cilindro equilátero é [redacted], sendo r o raio da base desse cilindro. alternativa d

a) $\frac{\pi r^2}{2}$ c) $2\pi r^2 + r^2$

b) $2\pi r^2 + 2r^2$ d) $2\pi r^2 + 4\pi r^2$

3. A área da superfície lateral de um cone reto de 12 cm de altura e com raio da base medindo 9 cm é [redacted] cm^2. alternativa a

a) 135π c) 180π

b) 200π d) 250π

4. Considere um cilindro cujo raio r da base é o triplo da altura h. O volume desse cilindro é: alternativa a

a) $9\pi h^3$ c) $9\pi h^2$

b) $3\pi h^4$ d) $\frac{\pi h^3}{3}$

5. A área total da superfície de um cone reto, cujo comprimento g da geratriz é igual a duas vezes o raio r ($g = 2r$), é: alternativa b

a) $\frac{\pi g^2}{2}$ c) $\frac{\pi g^3}{2}$

b) $\frac{3\pi g^2}{4}$ d) πg^2

6. Se o raio de uma esfera é 1, então a área da superfície dessa esfera é [redacted] unidades de área. alternativa b

a) $\frac{4\pi^2}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$

b) 4π d) $4\pi^2$

7. O volume de uma esfera de raio π é [redacted] unidades de volume. alternativa a

a) $\frac{4\pi^4}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$

b) $4\pi^2$ d) 4

8. Uma indústria de processamento de suco de uva usa dois tipos de embalagem, ambos com formato cônico e de mesma altura. O raio da base da embalagem A é metade do raio da embalagem B, na qual cabe [redacted] do conteúdo da embalagem A. alternativa d

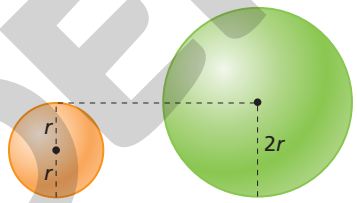
a) a metade c) o triplo

b) o dobro d) o quádruplo

9. Um plano α tangencia uma esfera de centro O e raio r, isto é, α tem só um ponto em comum com a esfera. Outro plano β, paralelo a α, contém o centro O. A distância entre os planos α e β é [redacted]. alternativa c

a) π b) πr c) r d) $2r$

10. As bolas de borracha representadas na figura abaixo são esféricas e não maciças.



ADILSON SECCO

Com a quantidade de borracha usada para fazer 12 bolas maiores, podem-se fazer [redacted] bolas menores. alternativa c

a) 4 b) 8 c) 48 d) 96

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Identificar cilindros, cones, troncos de cone, esferas e seus respectivos elementos.	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Calcular a área da superfície de alguns desses corpos redondos.	X	X	X		X	X				X
Determinar o volume desses corpos redondos.				X			X	X		
Páginas do livro referentes ao conceito	101 a 105	101 a 105	107 a 113	105 a 107	107 a 113	118 a 123	118 a 123	114 e 115	118 a 123	118 a 123

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Projeções cartográficas

A palavra cartografia tem origem na língua portuguesa, tendo sido registrada pela primeira vez em 1839 numa correspondência, indicando a ideia de um traçado de mapas e cartas. Hoje entendemos cartografia como a representação geométrica plana, simplificada e convencional de toda a superfície terrestre ou de parte desta, apresentada através de mapas, cartas ou plantas.

Por meio da cartografia, quaisquer levantamentos (ambientais, socioeconômicos, educacionais, de saúde etc.) podem ser representados espacialmente, retratando a dimensão territorial, facilitando e tornando mais eficaz a sua compreensão.

Não se pode esquecer, no entanto, de que os mapas, como meios de representação, traduzem os interesses e objetivos de quem os propõe, podendo se aproximar ou se afastar da realidade representada. [...]

Diferentes projeções cartográficas foram desenvolvidas para permitir a representação da esfericidade terrestre num plano (mapas e cartas), cada uma priorizando determinado aspecto da representação (dimensão, forma etc.).

É importante ressaltar que não existe uma projeção cartográfica livre de deformações, devido à impossibilidade de se representar uma superfície esférica em uma superfície plana sem que ocorram extensões e/ou contrações.

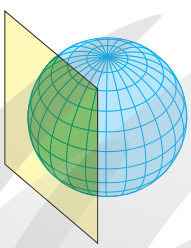
As projeções cartográficas são classificadas, principalmente, quanto à superfície de projeção e às propriedades:

• Quanto à superfície de projeção

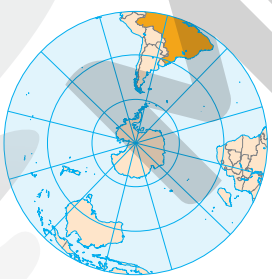
Podem ser projeções planas, cônicas ou cilíndricas, quando forem utilizadas as superfícies de um plano, cone ou cilindro como base para planificar a esfera terrestre. Os exemplos abaixo demonstram a transformação da superfície terrestre em uma superfície plana com auxílio das superfícies de projeção.

Ao utilizar a linguagem cartográfica de forma crítica, significativa e reflexiva para comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas, esta seção favorece um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, e o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS106** da BNCC. Além disso, proporciona também o desenvolvimento da competência específica **5** de Matemática e suas Tecnologias, bem como da habilidade **EM13MAT509** da BNCC, pois trata da investigação e do estabelecimento de conjectura sobre conceitos matemáticos da deformação de ângulos e de áreas provocados pelas diferentes projeções usadas em cartografia.

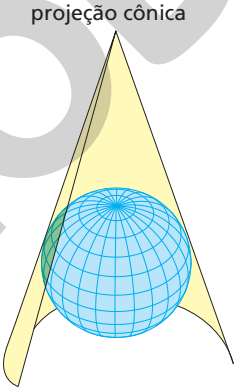
projeção plana ou azimutal



projeção plana polar

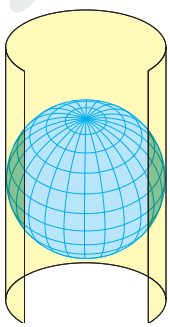


projeção cônica

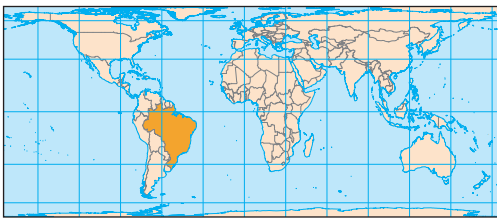


projeção cônica de Albers

projeção cilíndrica



projeção cilíndrica de Peters



ILUSTRAÇÕES: CATHERINE A. SCOTTON

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

• Quanto às propriedades

Podemos minimizar as deformações ocorridas pela planificação da superfície terrestre no que diz respeito às áreas, aos ângulos ou às distâncias, mas nunca aos três simultaneamente. Os exemplos abaixo mostram a possibilidade de alterar as projeções para o Brasil de acordo com as propriedades.

projeção conforme

Não há deformação dos ângulos em torno de quaisquer pontos.

projeção equivalente

Não altera as áreas, conservando, assim, uma relação constante com a sua correspondência na superfície terrestre.

projeção equidistante

Os comprimentos são representados em escala uniforme.

Fonte: <https://atlasescolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia>. Acesso em: 30 mar. 2020.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Na projeção cilíndrica, os paralelos e os meridianos são representados por segmentos de reta. Dê as posições relativas das retas suportes dos:

a) paralelos; paralelas

b) meridianos; paralelas

c) paralelos em relação aos meridianos. perpendiculares

2. Na projeção cônica, os paralelos são: alternativa d

a) círculos concêntricos.

b) circunferências concêntricas.

c) raios de circunferências concêntricas.

d) arcos de circunferências concêntricas.

3. Na projeção azimutal polar, os meridianos: alternativa c

a) não convergem para um polo.

b) são circunferências concêntricas.

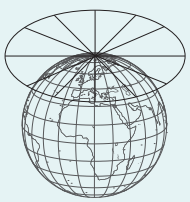
c) convergem para um polo.

d) são raios paralelos.

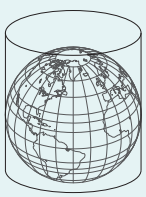
4. (Enem) A ONU faz referência a uma projeção cartográfica em seu logotipo. A figura que ilustra o modelo dessa projeção é: alternativa a

REPRODUÇÃO/ONU

a)

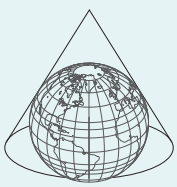


c)



e)

b)



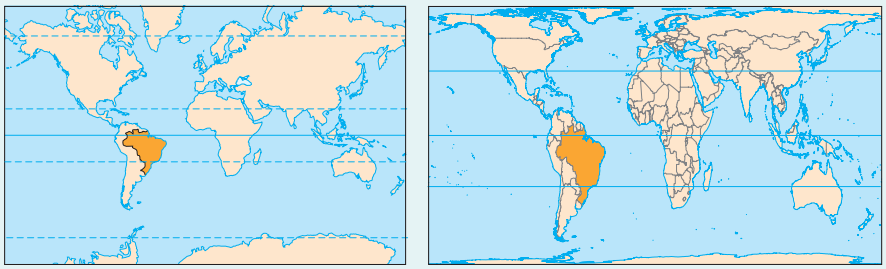
d)

ILUSTRAÇÕES: CATHERINE A. SCOTTON

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

5. (Enem) Existem diferentes formas de representação plana da superfície da Terra (planisfério). Os planisférios de Mercator e de Peters são atualmente os mais utilizados.

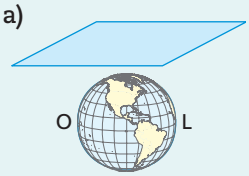


Mercator

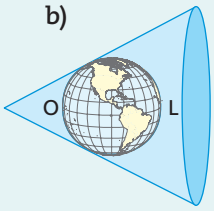
Peters

Apesar de usarem projeções, respectivamente, conforme e equivalente, ambas utilizam como base da projeção o modelo: alternativa c

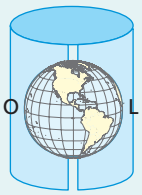
a)



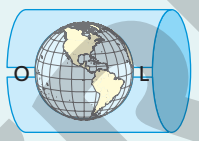
b)



c)



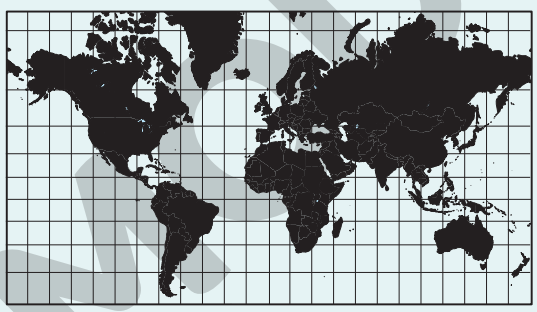
d)



e)

Discuta com um colega as resoluções das atividades 6 e 7.

6. (Unicamp-SP) Abaixo é reproduzido um mapa-múndi na projeção de Mercator.



Mapa com a Projeção de Mercator

É possível afirmar que, nesta projeção: alternativa b

a) os meridianos e paralelos não se cruzam formando ângulos de 90°, o que promove um aumento das massas continentais em latitudes elevadas.

b) os meridianos e paralelos se cruzam formando ângulos de 90°, o que distorce mais as porções terrestres próximas aos polos e menos as porções próximas ao equador.

c) não há distorções nas massas continentais e oceanos em nenhuma latitude, possibilitando o uso deste mapa para a navegação marítima até os dias atuais.

d) os meridianos e paralelos se cruzam formando ângulos perfeitos de 90°, o que possibilita a representação da Terra sem deformações.

7. Considerando o item **b** da atividade anterior e o terceiro parágrafo do texto inicial "Não se pode esquecer, no entanto, de que os mapas, como meios de representação, traduzem os interesses e objetivos de quem os propõe, podendo se aproximar ou se afastar da realidade representada", comentem a distorção que a projeção de Mercator provoca entre os países do hemisfério Sul com os do hemisfério Norte.

Espera-se que os alunos concluam que as áreas dos países do hemisfério Norte estão superestimadas em relação às do hemisfério Sul.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: CATHERINE A. SCOTTON

Para começar e pensar

A economia no sistema capitalista (sistema vigente no Brasil) tem como agentes estruturais: o **setor produtivo**, que corresponde às empresas das diversas áreas; os **assalariados**, que são os grandes consumidores; e o **setor público**, que controla e organiza a economia. Nesse sistema, a economia é de mercado; logo, a circulação do dinheiro é o que move os agentes econômicos e a economia de maneira geral.

Capitalismo é um sistema econômico baseado na legitimidade dos bens privados e na irrestrita liberdade de comércio e indústria, com o principal objetivo de adquirir lucro.

Fonte: *Dicionário Houaiss da língua portuguesa*, 2009.

Para que os produtos de que necessitamos estejam disponíveis para uso, eles precisam ser produzidos. O setor produtivo envolve três setores da economia: primário, secundário e terciário. No **setor primário**, ou primeiro setor, são extraídas da natureza as matérias-primas, que depois serão utilizadas no segundo setor, o **setor secundário**, constituído pelas indústrias. Nessa fase, a matéria-prima é transformada em produtos prontos, os quais, para chegar ao consumidor final, seguem para o terceiro setor, o **setor terciário**, que é o comércio.

A conexão entre os setores econômicos é feita pelos meios de comunicação e de transporte, que são importantes para agilizar os processos. Os custos de transporte, comunicação, tributos, produtividade da mão de obra, entre outros, interferem nos custos finais dos produtos.

Em uma economia capitalista, os princípios básicos para garantir a economia de mercado são a **livre concorrência** e a **lei da oferta e da demanda**. A livre concorrência tenta garantir melhores preços aos consumidores, uma vez que, para se manter no mercado, os agentes econômicos precisam competir, diversificando a oferta dos itens para atrair os clientes. Já a lei da oferta e da demanda relaciona-se à própria demanda do mercado consumidor.

Podemos exemplificar esses dois princípios utilizando os *smartphones*. Todos os anos, diversas marcas lançam novos modelos com novas funcionalidades e com preços, normalmente, mais caros. Mas não é interessante que o fabricante pratique sempre preços muito altos, pois o concorrente pode lançar seu produto com preços mais acessíveis e, com isso, o primeiro fabricante acaba perdendo a venda de seus produtos. Além disso, com o surgimento dos lançamentos, a procura pelos modelos antigos pode diminuir, fazendo com que os preços desses seja menor. Nesse caso, menor procura pode implicar menor preço.

A competição entre as empresas e as ações do consumidor fazem da economia uma ciência dinâmica em constante mudança.

1. Você consegue pensar em algum produto que "passe" pelos três setores econômicos (primário, secundário e terciário)? Escolha um produto e descreva o processo em cada um desses setores.
2. O gráfico abaixo mostra a quantidade de pessoas com 15 anos ou mais ocupadas no período da pesquisa nos diversos setores da economia brasileira de 2012 a 2015.

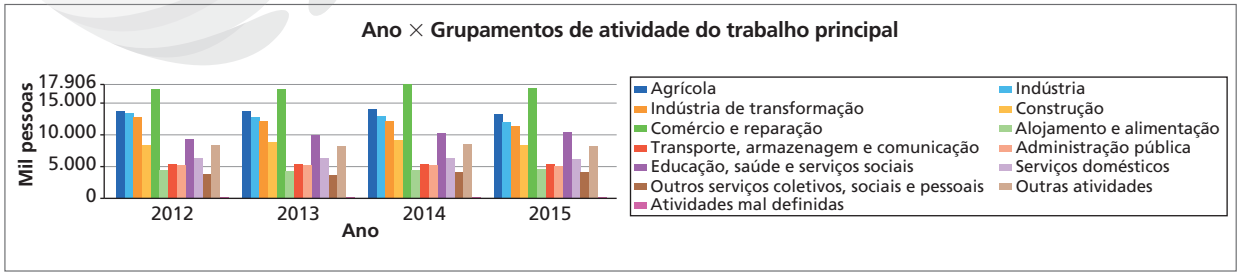
Objetivos

Promover uma reflexão introdutória sobre o funcionamento da economia de um país e de seus setores econômicos; discutir os mecanismos que promovem o crescimento econômico e o impacto da inflação nos salários, no consumo e no planejamento financeiro.

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2**; da habilidade **EM13MAT104** e das competências gerais **2**, **6, 7 e 10.** Além disso, favorece o desenvolvimento dos temas contemporâneos **educação financeira** e **trabalho**.
Os assuntos abordados nesta seção podem ser explorados de maneira interdisciplinar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo a competência específica **4** e a habilidade **EM13CHS402** da BNCC no que diz respeito à produção, à distribuição e ao consumo dentro dos setores econômicos, assim como seus impactos na economia e a análise das relações de produção, capital e trabalho.

STUDIOZEVS/SHUTTERSTOCK

Ver comentários e respostas no Guia do professor.



NELSON MATSUDA

Fonte: IBGE. *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.*

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No Brasil Colônia e no Império, a economia brasileira era baseada em atividades do setor primário: agricultura, pecuária e extrativismo. Somente no século XX o cenário começou a se modificar. Pesquise informações sobre esse tema para responder aos itens a seguir.

- O que mudou em relação à taxa de ocupação nos setores primário, secundário e terciário?
- Que fatores podem ter influenciado essa mudança?
- Essa mudança alcançou todo o país ou se restringiu a algumas regiões?
- Quais foram as mudanças que afetaram os trabalhadores?

3. Seus familiares que moram com você trabalham em qual setor econômico?

Para discutir

Observe a situação apresentada a seguir.

ILUSTRAÇÕES: EDNEI MARX

4. Qual é a importância de se fazer uma lista de compras antes de ir ao supermercado?

5. Quais são os produtos que compõem a cesta básica no Brasil?

6. Se você fosse fazer uma lista de compras do mês, quais seriam os dez principais produtos que incluiria?

Observe a manchete do jornal a seguir.

O JORNAL

Quarta-feira, 22 de janeiro de 2020 — Edição Semanal - São Paulo

Em 2019, o rendimento mensal domiciliar *per capita* no Brasil foi de R$ 1.438,67

12% 7% 10% 11%

Em fevereiro de 2020, o IBGE também divulgou os valores dos rendimentos domiciliares *per capita* referentes a 2019 de cada uma das Unidades de Federação (UF) do Brasil. Os valores divulgados, calculados com base nas informações da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (Pnad Contínua), variam muito entre uma localidade e outra. No Maranhão, por exemplo, o valor foi de R$ 635,59; já no Distrito Federal, o valor registrado foi de R$ 2.685,76; Mato Grosso registrou o valor mais próximo à média do Brasil, R$ 1.402,87.

Dados obtidos em: Agência IBGE Notícias. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/26956-ibge-divulga-o-rendimento-domiciliar-per-capita-2019>. Acesso em: 2 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CÓPIA

Para calcular a renda *per capita* domiciliar, somamos os rendimentos mensais dos moradores do domicílio e dividimos esse valor pelo número de moradores.

7. Agora, faça o que se pede.

a) Pesquise a renda *per capita* domiciliar da Unidade de Federação em que você reside e compare com o valor médio do Brasil.

b) Você acredita que a diferença entre os valores das rendas domiciliares *per capita* em cada UF influencia o consumo de produtos e serviços de uma família?

Para finalizar

Observe o diálogo a seguir.

EDNEI MARX

A inflação ocorre quando há um aumento nos preços de produtos e serviços em decorrência da variação dos índices de preços, conhecidos como índices de inflação. Uma consequência do aumento da inflação é a redução do poder de compra do consumidor.

Dois importantes índices de preços são o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC) e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O IPCA considera uma parcela maior da população, que considera família com renda mensal entre 1 e 40 salários mínimos, enquanto o INPC considera famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos, grupos mais sensíveis às variações de preços, pois acabam utilizando todo o seu rendimento em itens básicos, como alimentação, transporte, entre outros.

Explicar aos alunos que o poder de compra é a capacidade de adquirir bens e serviços e está diretamente vinculado à inflação. Se, no decorrer do ano, o salário não sofre correções de acordo com a inflação, naturalmente ele se torna defasado diante dos aumentos nos preços que a inflação trouxe ao mercado de produtos e serviços. Mesmo considerando aumentos percentuais relativamente baixos, o montante acaba acumulando e causando um impacto negativo significativo.

8. De que maneira a variação de preço de itens básicos influencia o orçamento financeiro familiar?

9. Em grupo, discutam os temas abordados nesta seção. Depois, individualmente, produza um texto que relate o papel de sua família na economia do país.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Considerando a BNCC, esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9** e **10**, das competências específicas de Matemática e suas Tecnologias **2** e **3**, da habilidade **EM13MAT309**, da habilidade da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas **EM13CHS301** e dos temas contemporâneos **educação ambiental**, **educação para o consumo**, **trabalho**, **educação financeira** e **educação fiscal**. Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Registre as respostas em seu caderno.

Pesquisa e ação

Feira de empreendedorismo

GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

O brechó é um tipo de negócio que envolve a venda de roupas, sapatos e acessórios usados, o que torna os preços mais acessíveis. Além do preço atrativo, o brechó é uma maneira de prolongar o uso de produtos, sendo uma alternativa sustentável de empreender.

Alguma vez você já observou um problema na cidade onde mora, no bairro ou na escola em que estuda e pensou em como poderia resolvê-lo? Se já fez isso, você teve uma atitude empreendedora. Um empreendedor observa tudo à sua volta e usa a criatividade para pensar em soluções para os problemas que encontra.

A preservação do meio ambiente, por exemplo, tem sido uma preocupação constante no mundo inteiro, e com ela surgem novos produtos e serviços ambientalmente responsáveis. Atitudes empreendedoras como essas preservam o meio ambiente, além de atenderem às necessidades da população.

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

No Brasil, muitos empreendedores construíram seu próprio negócio. Além da criatividade, eles precisaram adquirir conhecimentos para organizar e operacionalizar uma empresa.

Nessa seção, vocês vão pesquisar informações sobre o tema empreendedorismo e sobre o que é necessário para iniciar um negócio. Também vão simular a criação de uma empresa, escolhendo um produto que atenda a uma necessidade específica e que seja ambientalmente sustentável. As informações pesquisadas e o produto criado serão apresentados para a comunidade escolar em uma feira de empreendedorismo.

Utilizar a criatividade para pensar em soluções que atendam às necessidades das pessoas, bem como a preservação do meio ambiente, vem ao encontro do que propõem as competências gerais **2** e **7** da BNCC, já que elas ressaltam o uso da imaginação e da criatividade para resolver problemas e criar soluções por meio de conhecimentos de diferentes áreas e tomadas de decisão que respeitem e promovam a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global.

Objetivos

Pesquisar informações sobre empreendedorismo; identificar problemas da comunidade que possam gerar um negócio, definindo um produto; pesquisar informações sobre como começar, formalizar e operar um negócio; criar um produto; organizar uma feira de empreendedorismo para apresentar, além do produto criado, o processo de trabalho.

Etapa 1: Pesquisa sobre empreendedorismo

1. Pesquise sobre o tema empreendedorismo e responda aos itens a seguir.
   a) O que é empreendedorismo?
   b) Quais são as principais características de um empreendedor?
2. Em uma roda de conversa com os colegas e o professor, discutam sobre as respostas da questão anterior e reflitam acerca da importância de compartilhar essas informações para auxiliar outras pessoas que desejam empreender.

Etapa 2: Escolha de um produto

3. Neste momento, você e seus colegas vão escolher um produto que apresentarão na feira de empreendedorismo. Conversem sobre ideias de negócios que podem ser criados. Pensem em algo que atenda às necessidades da comunidade e que seja ambientalmente responsável, ou seja, que se relacione com a preservação do meio ambiente para as atuais e as futuras gerações. Anotem as ideias discutidas para que, em seguida, possam escolher uma delas.
4. Conversem sobre as propostas apresentadas e definam o produto. Vocês podem selecionar algumas das melhores ideias e, depois, fazer uma votação para decidir.

Isso também favorece a competência específica **2** de Matemáticas e suas Tecnologias e a habilidade **EM13CHS301** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, no que diz respeito à participação em ações do mundo contemporâneo, especialmente na tomada de decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados à sustentabilidade. Ações como as propostas nessa seção abordam os temas contemporâneos **educação ambiental** e **educação para o consumo**. Essas competências e habilidades são exploradas nas etapas **2**, **5** e **6**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELIA

Etapa 3: Criação de uma empresa

5. Definido o tipo de negócio, é o momento de criar a empresa. Negócios são acordos comerciais que, quando formalizados, podem se tornar uma empresa. Para formalizar o negócio, vocês vão se organizar em cinco grupos para a realização das atividades a seguir. Para isso, os integrantes de cada grupo devem realizar pesquisas e conversar para responder às questões propostas. Em seguida, cada grupo deverá elaborar um relatório com as respostas das questões para serem discutidas na próxima etapa.

Grupo 1: Será responsável pela organização da empresa.

- Quantos clientes a empresa pretende atender por mês?
- Quantos colaboradores serão necessários?
- Quais serão as tarefas de cada colaborador?
- Qual valor deverá ser investido no negócio?
- Quais serão as despesas iniciais para que a empresa comece a funcionar (aluguel, móveis, equipamentos, materiais)?
- Quais são as estimativas de despesas e receitas da empresa no primeiro ano? E no segundo ano?
- Qual recurso será utilizado para criar e operacionalizar a empresa? Será necessário obter empréstimo ou financiamento? Caso seja necessário, como proceder?

Grupo 2: Será responsável por buscar as informações necessárias para formalizar o negócio.

- O que significa registrar uma empresa?
- O que é CNPJ?
- Quais direitos o empreendedor conquista ao formalizar a empresa? E deveres?
- Como escolher um nome para a empresa? Qual será o nome dessa empresa? (*)
- Quais modalidades de empresa existem? Qual modalidade será escolhida para esse negócio? (*)
- Quais documentos são necessários para registrar a empresa na modalidade escolhida?
- Quais taxas deverão ser pagas para o registro da empresa?

Grupo 3: Será responsável por realizar a pesquisa de mercado, ou seja, buscar informações que ajudem a lançar um produto no mercado.

- O que é uma pesquisa de mercado?
- Qual é o objetivo da pesquisa para esse empreendimento: lançar um produto? Escolher como divulgar o produto?
- Qual será a **população** pesquisada? Serão feitas entrevistas com possíveis clientes? Visitas a futuros concorrentes?
- Realizem a pesquisa de mercado da empresa.

Grupo 4: Será responsável por criar o plano de *marketing*. Esse plano é utilizado pela empresa para decidir, por exemplo, o preço de um produto ou onde ele será vendido.

- O que é plano de *marketing*?
- Como criar um plano de *marketing*?
- Criem o plano de *marketing* da empresa.

Grupo 5: Será responsável por criar o *slogan* do produto.

- O que é *slogan*?
- Quais *slogans* vocês conhecem?
- Pesquisem alguns *slogans* e conversem sobre eles. Quais ideias e sentimentos eles despertam?
- Criem algumas opções de *slogan* para o produto da empresa. Observem que o *slogan* deve ser breve e fácil de lembrar, além de provocar as ideias e/ou emoções desejadas. (*)

(*) Para esses itens, os grupos responsáveis devem levar algumas opções para decidirem com toda a turma.

Observação

População é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação em uma pesquisa.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Etapa 4: Compartilhamento de informações

6. Com base no relatório elaborado por cada grupo, a turma deverá compartilhar e discutir as informações obtidas na etapa anterior. Em algumas tarefas relacionadas ao nome, modalidade e registro da empresa e *slogan* (Grupos 2 e 5, respectivamente), foram realizadas pesquisas, alguns levantamentos e sugestões; no entanto, a escolha final será feita nessa etapa.

7. Após as discussões e as escolhas finais, registre, nos respectivos relatórios, as decisões das questões que estavam em aberto.

Etapa 5: Criação do produto

Vocês já definiram o produto e formalizaram a empresa. Agora, reúnam-se com o professor para criar o produto.

8. Para a preservação do meio ambiente, é essencial consumir os produtos de forma consciente e responsável. Além disso, é importante que as empresas sejam sustentáveis. Uma empresa sustentável, ao criar seu produto, pensa no melhor aproveitamento das matérias-primas e dos recursos naturais. Por isso, ao criarem o produto, pensem na economia e na sustentabilidade. Antes de começar a criação do produto, discutam sobre os seguintes pontos:

- Quais materiais serão necessários para criar o produto definido na etapa 2?
- Quais recursos naturais serão necessários?
- Onde o produto será criado?
- Será necessário pedir auxílio a professores de outras áreas? Quais? Como essa parceria poderá ser realizada?

9. Criem o produto escolhido. O produto será apresentado na feira de empreendedorismo.

Etapa 6: Escolha da embalagem

10. A embalagem tem a função de armazenar o produto, mas, muitas vezes, pode ter outras utilidades, como fazer sua divulgação. Em alguns casos, a embalagem pode ser reutilizada para outros fins. Usar uma embalagem versátil, com outras funções e que pode ser reutilizada depois, também é uma forma de praticar a sustentabilidade. Antes de escolher a embalagem, discutam os pontos a seguir.

- Como será a embalagem do produto? Lembrem-se de que é possível criar embalagens com medidas diferentes e que comportem a mesma quantidade de produto. Por isso, escolham a embalagem menor, que utilize menos material em sua produção.
- Para decidir a melhor embalagem para o produto, levem para a sala de aula diferentes embalagens de um produto semelhante ao que vão produzir. Vocês podem criar embalagens com formatos e medidas diferentes. Calculem a área total e o volume das embalagens e definam qual delas é mais econômica, ou seja, utiliza menos material em sua produção.

11. Criem a embalagem do produto usando as medidas da embalagem mais econômica. Vocês também podem pensar em mais alternativas para tornar o produto ambientalmente sustentável, por exemplo, utilizar materiais recicláveis na embalagem e criar refil para a venda do produto.

Os capítulos **3** e **4** deste volume tratam de poliedros e corpos redondos, respectivamente. Revejam os formatos apresentados nesses capítulos e suas correspondentes planificações e analisem a possibilidade de usá-los nas embalagens. Mesmo que vocês optem por comprar as embalagens de um fornecedor, para essa atividade construam alguns protótipos de embalagens, orientando-se pelos capítulos mencionados e fazendo as devidas adaptações de modo a contemplar as especificidades e as necessidades do produto escolhido.

Para a escolha da embalagem, os critérios de sustentabilidade também devem ser considerados. Assim, é possível lançar mão de definições e procedimentos matemáticos para construir um protótipo utilizando os conhecimentos de cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos para cálculo da quantidade de material que será utilizado, favorecendo a competência específica **3** de Matemática e suas Tecnologias e a habilidade **EM13MAT309** da BNCC.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Etapa 7: Organização da feira de empreendedorismo

12. Escolham um local adequado para realizar a feira de empreendedorismo. O local deve ter espaço para que cada grupo da etapa **3** exponha as informações dos relatórios produzidos. Além disso, o produto criado pela turma e sua embalagem também deverão ser apresentados. O espaço também deve permitir que os visitantes da feira vejam tudo o que está exposto.

13. Alguns alunos da turma podem ser escolhidos para realizar a abertura da feira de empreendedorismo. Eles podem preparar uma apresentação falando sobre o objetivo da feira, a criação da empresa e o produto produzido.

A feira de empreendedorismo, com a exposição do produto e dos relatórios produzidos na etapa **3** e a apresentação de todo o processo descrito nas etapas, favorece o desenvolvimento da competência geral **4** da BNCC, já que utiliza linguagens verbais (oral e escrita), bem como conhecimento das linguagens matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências e ideias no contexto do empreendedorismo.

14. Façam cartazes convidando a comunidade escolar para participar da feira. Informem o objetivo, a data, o horário e o local. Vocês também podem criar convites digitais e divulgá-los no *site* da escola.

Iniciem a feira de empreendedorismo de acordo com o que foi planejado. Convidem os participantes para conhecer o produto criado e todo o processo que possibilitou a realização do evento. Caso algum participante da feira tenha dúvidas, procurem respondê-las de acordo com as pesquisas e as discussões realizadas. Caso não saibam responder a alguma pergunta, peçam orientação aos professores envolvidos.

Etapa 8: Análise da atividade

Nessa seção, a maioria das atividades é realizada em grupos. Realizar esse tipo de atividade requer competências como: autoconhecimento, para cuidado com a saúde emocional; compreensão da diversidade humana; reconhecimento das próprias emoções e das dos outros; autocrítica e capacidade para lidar com ela; exercício da empatia, do diálogo, da resolução de conflitos e da cooperação; capacidade de fazer-se respeitar e de promover o respeito ao outro; disposição para acolher e valorizar a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza; capacidade de agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários, favorecendo o desenvolvimento das competências gerais **8**, **9** e **10** da BNCC.

15. Após a feira de empreendedorismo, em conjunto com os colegas, avaliem o trabalho realizado. Nesse momento, vocês podem conversar sobre os seguintes pontos:

- Gostaram de pesquisar sobre empreendedorismo e sobre como formalizar e organizar um negócio?
- Como foi a experiência de participar de uma feira de empreendedorismo?
- Gostaram de compartilhar informações com as pessoas que visitaram a feira?
- Vocês acham que a exposição ajudou, de alguma forma, os visitantes?
- A feira apresentou informações importantes sobre o que é empreendedorismo e sobre como empreender?
- Vocês conseguiram trabalhar de maneira colaborativa durante as atividades?
- O que poderia ter sido melhor?

16. Agora, você fará uma autoavaliação que será entregue ao professor em formato de relatório. Para fazer a autoavaliação, pense nas questões a seguir.

- Ouvi com atenção as orientações do professor durante as atividades?
- Participei dos momentos de conversa e de pesquisa de informações?
- Auxiliei os colegas e o professor na organização da feira de empreendedorismo?
- Ouvi as falas dos colegas e do professor com atenção e respeito?
- Compreendi o que é empreendedorismo?
- Consegui compreender quais atitudes e características o empreendedor deve ter?
- Percebi qual é a importância de organizar uma feira de empreendedorismo para a comunidade escolar?
- Houve dificuldades durante as atividades propostas? Quais foram? Como busquei resolvê-las?
- O que aprendi durante a criação do produto?
- O que aprendi durante a organização e a realização da feira de empreendedorismo?

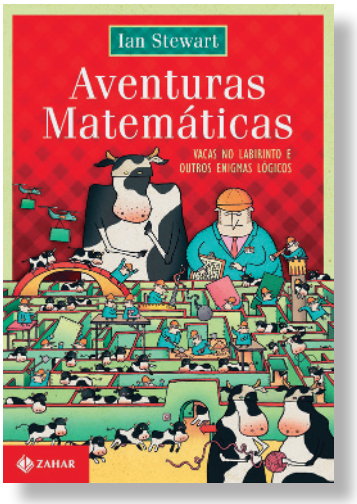
MODERNA

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral, ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre tantas outras.

Livros

REPRODUÇÃO



Aventuras matemáticas: vacas no labirinto e outros enigmas lógicos

Ian Stewart

Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Com enigmas e jogos, o autor procura mostrar como qualquer pessoa pode entender até os raciocínios mais elaborados de Matemática. Uma leitura curiosa e divertida para todos os leitores.

REPRODUÇÃO

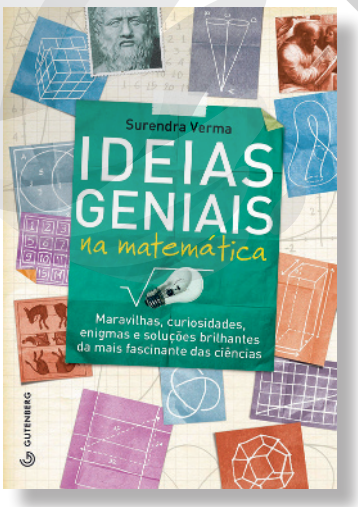
Desafios e enigmas: uma forma descontraída de colocar à prova seu raciocínio

Juliano Niederauer e Marla Fernanda C. de Aguiar

São Paulo: Novera, 2007.

Por meio de um texto bem-humorado, os autores exploram desafios e enigmas matemáticos que estimulam a criação de estratégias de resolução e também divertem. São situações que envolvem a aplicação de conteúdos como equações, sistemas de equação, teoria dos conjuntos, sequências, análise combinatória, probabilidade etc. Para aprender e se divertir!

REPRODUÇÃO



Ideias geniais na Matemática: maravilhas, curiosidades, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências

Surendra Verma

Belo Horizonte: Gutenberg, 2013.

Com explicações curtas e simples, o leitor descobrirá que a Matemática não é assustadora e complicada, mas um divertido e fascinante conjunto de ideias utilizadas para explicar o mundo em que vivemos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

REPRODUÇÃO

Medidas desesperadas: comprimento, área e volume

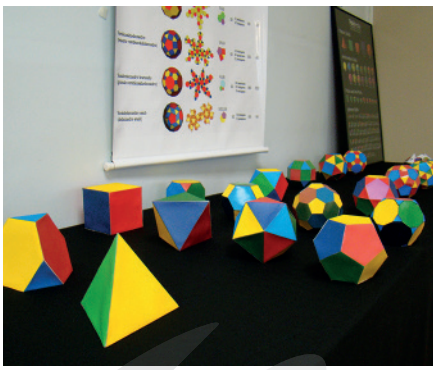
Kjartan Poskitt

São Paulo: Melhoramentos, 2005 (Coleção Saber horrível).

O autor utiliza uma linguagem bem-humorada para abordar conteúdos matemáticos, explorando-os do ponto de vista atual e de outras épocas. Assim, tem-se uma proposta criativa e instigante que facilita a aprendizagem de assuntos vistos na escola e também fora dela. Com esse jeito especial de explorar as ideias matemáticas, o autor apresenta temas como medidas antigas e atuais, além de área, perímetro, volume, ângulos e figuras geométricas.

Museu

MUSEU DA MATEMÁTICA UFMG



Interior do Museu da Matemática UFMG, Belo Horizonte – MG, 2019.

Museu da Matemática da UFMG

O Museu da Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) oferece aos visitantes a oportunidade de interagir com sólidos geométricos, jogos, mágicas, enigmas aritméticos, quebra-cabeças geométricos, dobradura de papel, desafios, exposição de Arte e diversas oficinas.

Mais informações podem ser obtidas em: <http://www.mat.ufmg.br/museu/>. Acesso em: 9 maio 2020.

Apesar de a visita ao museu indicado não ser acessível a todos os alunos (dependendo do local em que este livro estiver sendo usado), é interessante que conheçam a existência desse tipo de ambiente e explorem o *site* do museu, as atividades e as exposições que ele oferece. No caso do Museu da Matemática da UFMG, o *site* disponibiliza materiais para reproduzir em sala de aula algumas das atividades de Matemática desenvolvidas no museu, com moldes, instruções e orientações para a aplicação. Pesquise a existência de museus e espaços de visitação relacionados à Matemática em sua cidade e, se possível, leve os alunos para um ambiente como esse.

Software

Poly

Poly é um *software* para construir e explorar sólidos geométricos. Possui uma grande coleção de sólidos e permite a rotação e a planificação deles de maneira dinâmica. Além disso, as planificações podem ser impressas, para que o usuário recorte e monte seus próprios modelos.

Disponível em: <http://www.peda.com/poly/>. Acesso em: 9 maio 2020.

Linguagem de programação

Super Logo 3.0

Na internet, há disponíveis vários tutoriais e sugestões de atividades gratuitos usando o Super Logo.

O Super Logo 3.0 é uma linguagem de programação que permite, por meio de comandos, deslocar uma tartaruga pela tela do computador deixando um rastro colorido, possibilitando, assim, desenhar figuras geométricas. Com ele, é possível explorar o pensamento computacional e trabalhar diversos conceitos geométricos.

Disponível em: <https://www.nied.unicamp.br/biblioteca/super-logo-30/> ou <https://www.nied.unicamp.br/biblioteca/super-logo-3-0-para-windows-7-a-10/>. Acessos em: 9 maio 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Vídeos

Série "Qual é a sua profissão?"

A série "Qual é a sua profissão?", da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), apresenta 25 vídeos nos quais um jovem entrevista dois profissionais das mais diversas áreas, que tratam de algumas características da profissão, as possibilidades de mercado e sua formação, além da presença da matemática em seu trabalho.

Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:video/serie:3>. Acesso em: 9 maio 2020.

Podcasts

Fronteiras da ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que fala do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 9 maio. 2020.

Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 9 maio 2020.

Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 9 maio 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Respostas

CAPÍTULO 1

2. 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm

3. a) $\ell_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

b) $D = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$

c) $P = 4\sqrt{3}R$

4. Respostas possíveis: peças de marchetaria, forros de madeira, papéis de parede, estampas de tecido, vitrais, malharias e crochês.

5. Respostas pessoais.

7. a) Sim, pela rotação em torno do ponto B, 150° no sentido horário.

b) Resposta possível: pela rotação em torno do ponto F, 150° no sentido horário.

c) Resposta possível: pela rotação em torno do ponto A, 180° no sentido anti-horário.

d) Resposta possível: octógonos regulares e quadrados.

8. 8 m²

9. a) 3

b) 3

c) 9

10. $12\sqrt{5}$ cm²

11. $100\sqrt{3}$ cm²

12. a) 93 cm²

b) $6(6+\sqrt{6})$ m²

13. 12,5 m²

14. 75 m² e 50 m²

15. alternativa b

16. 8.798 cm²

17. 22,8 cm²

18. 4 m; $8\sqrt{3}$ m²

19. 15 cm²

20. $9\sqrt{3}$ cm²

21. $72\sqrt{3}$ cm²

22. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

23. R$ 120,00

24. alternativa c

25. $6(1+\sqrt{2})$ cm

26. alternativa e

28. $\frac{5\pi - 3}{6}$ cm²

29. 5π cm²

Exercícios complementares

1. 5 cm e $5\sqrt{2}$ cm

2. 2 cm

3. $6\sqrt{6}$ cm²; $2\sqrt{6}$ cm

4. 150 peças

5. alternativa e

6. alternativa d

7. 16 cm²

8. 225 cm²

9. alternativa c

10. 8 cm²

11. alternativa b

12. ≃ R$ 30,63

13. 1.554,06 cm²

14. 6 cm²

15. 0,25 cm²

16. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa d

2. alternativa b

3. alternativa d

4. alternativa a

5. alternativa c

6. alternativa d

7. alternativa a

CAPÍTULO 2

1. infinitos; um único; infinitos

2. infinitos planos, um só plano ou nenhum plano

3. seis retas

4. Verdadeira.

5. Três pontos (três pés da mesa) determinam um único plano (do chão); quatro pontos podem definir mais de um plano.

6. a) verdadeira

b) falsa

c) falsa

d) verdadeira

7. afirmações a, c

8. a) falsa

b) falsa

c) falsa

d) verdadeira

10. a) Não, são perpendiculares.

b) Não, $\overline{HG}$ é paralelo ao plano (EFN).

c) Não, são concorrentes.

d) Sim, pois $\overline{EF} \subset EFN \cap EHG$.

14. alternativa e

15. a) 2 cm

b) 2 cm

c) $\sqrt{29}$ cm

d) zero

e) 5 cm

f) 3 cm

g) 5 cm

16. $E_1 \cup E_2$; $E_2 \cup E_3$; $E_3 \cup E_4$; $E_1 \cup E_3$; $E_2 \cup E_4$

17. 60°

18. a) Sim, pois, se a medida dos ângulos $M\hat{A}B$ e $K\hat{A}C$ é 90°, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pertencem ao plano (ABC), que é perpendicular à aresta do diedro. Portanto, $B\hat{A}C$ é um ângulo plano.

b) Não, pois, de acordo com o enunciado do exercício, não podemos garantir que as medidas dos ângulos $Q\hat{P}A$ e $B\hat{A}M$ sejam iguais.

Exercícios complementares

1. uma reta paralela

2. a) reversas

b) paralelas

c) perpendiculares

d) paralelos

e) perpendiculares

f) perpendiculares

3. afirmação **a**

4. uma reta ou um ponto

5. $2\sqrt{2}$ m

6. As projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano podem ser: um segmento, uma elipse ou uma circunferência; a projeção ortogonal de uma esfera sobre um plano é sempre um círculo.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7. zero

8. 18 m

9. 120°

10. A projeção ortogonal é um segmento de reta de mesma medida que o diâmetro da circunferência.

11. 60°

12. 14 unidades de comprimento

13. **b)** 30°

Autoavaliação

1. alternativa c

2. alternativa a

3. alternativa b

4. alternativa b

5. alternativa d

6. alternativa d

7. alternativa b

8. alternativa a

9. alternativa d

10. alternativa d

11. alternativa c

CAPÍTULO 3

1. pentaedro

2. heptaedro

3. 14 faces, 36 arestas e 24 vértices

4. **a)** $V = 16$, $F = 10$ e $A = 24$; não convexo
b) $V = 9$, $F = 9$ e $A = 16$; convexo

5. A relação de Euler é válida para os dois poliedros indicados.

6. sim; $V = 36$, $F = 20$, $A = 54$ e $36 + 20 - 54 = 2$

7. 10 vértices

8. **a)** poliedro I
b) Ambos têm 12 faces.
c) Ambos têm 10 vértices.
d) Ambos têm 20 arestas.
e) Ambos satisfazem a relação de Euler.

9. 8 faces

10. 11 faces

11. 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares

12. 9 faces e 16 arestas

13. 27 arestas, 9 faces e 19 vértices

15. 18 arestas e 12 vértices

16. **a)** face 6 **b)** face 1

17. 30

19. **a)** 15 cm **b)** $\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm

20. 5 cm

21. A diagonal da carroceria mede aproximadamente 6,16 m. Sim, Rafael pode aceitar a encomenda, pois o mastro tem 5,9 m.

22. 30 cm, 40 cm e 120 cm

23. $8\sqrt{2}$ cm²

24. **a)** $3\sqrt{5}$ cm **b)** $3(\sqrt{2}+1)$ cm

25. $10\sqrt{6}$ cm

27. alternativa d

28. alternativa b

29. 1.300 cm²

30. **a)** $21\sqrt{3}$ m²
b) 104 cm²

31. cubo B

32. **a)** 6; 24; 54; 96 (unidades de área)
b) Fica multiplicada por 4; fica multiplicada por 9.
c) 8, 27 e 64, respectivamente

33. **a)** Consegue, pois a área total do teto é aproximadamente 43 m², e duas demãos equivalem a aproximadamente 86 m².
b) Uma demão Carlos consegue, pois a área total das paredes internas é aproximadamente 142 m²; adicionando o teto, fica 185 m². Duas demãos não são possíveis, pois 370 m² é maior que o rendimento máximo.
c) Talvez consiga, pois a área total pintada seria aproximadamente 228 m², maior que o rendimento mínimo e menor que o rendimento máximo.

34. resposta pessoal

35. 14.700 g

36. 216 m³

37. 105 cm³

38. alternativa a

39. $\sqrt{71}$ unidades de comprimento

40. 236 cm²

41. $4.096\sqrt{3}$ cm³

42. $\frac{8.000\sqrt{3}}{9}$ ℓ

43. 832 cm² e 1.536 cm³

44. **a)** 4 cm, 4 cm e 4 cm
b) 1 cm, 1 cm e 64 cm

45. **a)** 8 cm³
b) 24 cm²
c) Fica multiplicado por 8.
d) Fica multiplicada por 4.

46. 9 faces

47. $2n$ arestas, $(n + 1)$ faces e $(n + 1)$ vértices

48. I e II

49. 10 cm

50. $\sqrt{43}$ dm

51. 13 m

52. $g = 5$ cm, $h = 3$ cm e $r = 4\sqrt{2}$ cm

53. $108(40 + 3\sqrt{3})$ mm²

54. 64 cm², 80 cm² e 144 cm²

55. 4 cm

56. 384 cm²

57. 48 cm³

58. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³

59. área $= 18\sqrt{3}$ cm²; volume $= 9\sqrt{2}$ cm³

60. $24\sqrt{3}$ cm³

61. $32\sqrt{3}$ dm³

62. 192 cm³

63. 24 cm³

64. **a)** 16 cm² **d)** $\sqrt{77}$ cm
b) 72 cm²
c) 88 cm² **e)** $16\frac{\sqrt{77}}{3}$ cm³

65. 1 para 12

66. A altura do prisma é o dobro da altura da pirâmide.

67. $\frac{125}{3}$ cm³

68. 3 cm³

69. 2 para 1

70. 8 cm

71. altura = 12 cm; volume = 1.552 cm³

72. 9 m

73. $78\sqrt{3}$ m³

74. 312 cm³

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

1. alternativa b
2. a) não convexo
   b) convexo
   c) convexo
3. 24 vértices
4. alternativa e
6. 40 cm³
7. alternativa e
8. $24(7 + \sqrt{85})$ cm²
9. 1 m
10. 36 cm³
11. 2.172 cm²
12. 3.150 m³
13. alternativa a
14. $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm³
15. alternativa c
16. $\frac{4}{3}$ cm³
17. a) $375\sqrt{3}$ cm³ b) $50\sqrt{3}$ cm²
18. $192\sqrt{3}$ cm²
19. 36.000 cm³
20. 250 cm³

Autoavaliação

1. alternativas a, d
2. alternativa b
3. alternativa d
4. alternativa d
5. alternativa c
6. alternativa c
7. alternativa c
8. alternativa d
9. alternativa b

CAPÍTULO 4

1. π
2. 3π cm²
3. $(100\pi^2 + 50\pi)$ cm²
4. 28π cm²
5. altura: 9 cm; raio: 6 cm
6. resposta pessoal
7. 1.050π cm²
8. $(2 + 2\sqrt{3})$ cm
9. 16π dm³
10. 0,314 mℓ
11. 500π cm³
12. 24 dias
13. $\frac{8}{9}$
14. 48 recipientes menores
15. 40 cm
16. alternativa d
17. 60°
18. $\frac{\pi}{3}$
19. $20\sqrt{2}$ cm
20. $10\sqrt{3}$ cm
21. a) 135π cm²; 216π cm²
    b) 260π cm²; 360π cm²
22. $1.088\pi\sqrt{13}$ cm²
23. $2\pi(2 + \sqrt{29})$ cm²
24. 75π cm²
25. 1.000π cm²
26. $200\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ cm²
27. resposta pessoal
28. 5 cm
29. 2,5 m
30. $\left(\frac{84}{5}\right)\pi$ dm²
31. 36π cm²
32. $\frac{23}{6}\pi$ cm³
33. 750π cm³
34. a) 240%
    b) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{y}{x}$
35. 98π cm³
36. $\frac{304\pi}{3}$ cm³
37. $\frac{7}{8}$
38. 520π cm³
39. a) circunferência
    b) superfície lateral de um cone
    c) superfície esférica
40. $r_1 + r_2$, ou $r_1 - r_2$, ou $r_2 - r_1$
41. $2\sqrt{2}$ cm
42. 1 cm
43. a) 36π cm²; 36π cm³
    b) 324π cm²; 972π cm³
44. $\frac{40}{3}$ cm
45. 32 cm³
46. 18π cm²; 36π cm³
47. $\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^2$
48. $\frac{3}{2}$ radiano
49. 157 m²

Exercícios complementares

1. alternativa a
2. $\frac{625\pi^2}{8}$ cm³
3. a) x = 9 e y = 3
   b) x = 15 e y = 5
4. 54,6 mℓ
5. alternativa b
6. $\frac{1.000\pi\sqrt{55}}{9}$ cm³
7. alternativa c
8. alternativa d
9. $\frac{60}{19}$ m
10. $3\sqrt[3]{9}$ cm
11. 81π cm³
12. 225π cm²
13. 161π cm²
14. alternativa e
15. (486 + 18π) cm²
16. 14 m
17. $32\pi\sqrt{3}$ m³
18. alternativa a
19. 4.275π cm³
20. alternativa a
21. $\frac{32\pi}{3}$ cm³
22. alternativa b
23. 1.562,5π cm³

Autoavaliação

1. alternativa b
2. alternativa d
3. alternativa a
4. alternativa a
5. alternativa b
6. alternativa b
7. alternativa a
8. alternativa d
9. alternativa c
10. alternativa c

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Referências bibliográficas

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).
Essa obra oferece ao professor de Matemática uma visão ampliada do que ele ensina em sala de aula. Nela, o autor explica a Geometria euclidiana plana de um ponto de vista que vai além dos tópicos dos ensinos Fundamental e Médio.

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 3 jun. 2020.
Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas também para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Edgard Blücher, 1991.
Livro conceituado, referência em história da matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.
Esse documento traz uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.
Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e de um caderno complementar). Os livros trazem diversos conceitos da Educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os alunos transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/>. Acesso em: 3 jun. 2020.
O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.
Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.
Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.
Esses materiais foram elaborados como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Introdução à Geometria espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).
Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro esclarece o que parece ser mais complexo na transição da Geometria plana para a espacial. Apresenta conteúdos como construção de pirâmides, paralelismo e perpendicularismo, projeções, ângulos, distâncias, esfera e noções de Geometria descritiva.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).
Livro conceituado, referência em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.
As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).
Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro contempla o estudo de progressões aritméticas e geométricas, Matemática financeira, análise combinatória, probabilidade, Geometria espacial, pontos, retas e planos, medição de distâncias e de ângulos, poliedros, volumes e áreas, entre outros.

LIMA, Elon Lages *et al*. *Temas e problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Coleção do Professor de Matemática).
Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, nesse livro as teorias são apresentadas de forma simples e acompanhadas de problemas contextuais que permitem mostrar as variadas aplicações de temas, como funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, aplicações de Trigonometria, cálculo de volumes, combinatória e Matemática financeira.

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.
Destinado a pessoas que se interessam por informações sucintas, embora gerais, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.
Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

TINOCO, Lucia A. A. *Geometria euclidiana por meio da resolução de problemas*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 1999. (Projeto Fundão).
Esse livro apresenta uma visão ampla da Geometria euclidiana na escola básica, em uma perspectiva de início do Ensino Superior, com ênfase em aspectos dedutivos e visuais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ISBN 978-65-5779-040-3

MODERNA