ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

EDITOR RESPONSÁVEL:
Fabio Martins de Leonardo

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção:
0193P21202
Código da obra:
0193P21202138

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Matrizes e geometria analítica

MANUAL DO PROFESSOR

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MODERNA

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Matrizes e geometria analítica

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MODERNA

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro
Assistência editorial: Danielle Christiane dos Santos Canteiro, Enrico Briese Casentini, Patricia Felipe
Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial
Assessoria pedagógica: Fabio Simon, Fernando Barriento, Gisele Lemos, Jean Rocatelli, José Eduardo de Souza Carrilho Cruz, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Renato Brigati Morse Telles, Rodrigo Terra
Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Coordenação de produção: Patricia Costa
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica
Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo
Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco
Revisão: Ana Paula Felippe, Frederico Hartje, Inaya Oliveira, Juliana A. Nasser, Leila dos Santos, Lilian Vismari, Rita de Cássia Sam, Simone S. Garcia, Vitor Frota Jr.
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36403 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

MODERNA

Guia para o professor

PARTE GERAL

PARTE ESPECÍFICA

MODERNA

Pressupostos teórico-metodológicos

Esta obra foi elaborada com base em reflexões sobre as orientações para o Ensino Médio, tendo em vista as mudanças preconizadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e pela Base Nacional Comum Curricular, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório para o desenvolvimento dos currículos da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que os currículos propostos na BNCC constituem o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Essas aprendizagens estão orientadas para o desenvolvimento de competências. Segundo a BNCC (2018, p. 7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Dessa forma, visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(BNCC, 2018, p. 9-10.)

MODERNA

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:

EM 13 MAT 103 → Esse código refere-se à habilidade 3 relacionada à competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

EM: Ensino Médio

13: a habilidade pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição do currículo

MAT: Matemática e suas Tecnologias

1: competência específica à qual se relaciona a habilidade

03: numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência

É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às cinco competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para que façam julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes, de forma imprópria, o que acaba induzindo a erros: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão e manipulação de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e às comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e da formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problema, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de “resolver e elaborar problemas” em lugar de “resolver problemas”. Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

© MODERNA

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

MODERNA

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

As mudanças no Ensino Médio

Muitas são as demandas do século XXI que refletem diretamente no cenário educacional, mais especificamente no que se refere aos jovens. A dinâmica social contemporânea caracteriza-se pelas rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico, o que, por sua vez, requer que a formação do jovem atenda a esse viés.

Nesse contexto, o Ensino Médio passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola, além de uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela Formação Geral Básica, que abrange as competências e habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC, e por Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se dizer que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do estudante e do docente que transmite informações. Dessa maneira, sugere organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como no do trabalho.

No entanto, esse processo requer uma mudança não só nos espaços escolares, mas também na forma de enxergar as diferentes juventudes e na prática pedagógica dos professores.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

O jovem e as juventudes

Dadas essas mudanças no Ensino Médio, compreender os jovens inclui enxergá-los a partir de suas identidades culturais, seus gostos, estilos e valores, considerando sua vivência no dinamismo e na fluidez da sociedade tecnológica atual, que são muito diferentes daqueles das gerações anteriores.

Assim, inserir-se no universo deles e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Moran (2007, p. 80):

> [...] Um dos caminhos de aproximação ao aluno é pela comunicação pessoal de vivências, histórias, situações que ele ainda não conhece em profundidade. Outro é o da comunicação afetiva, da aproximação pelo gostar, pela aceitação do outro como ele é e encontrar o que une, o que nos identifica, o que temos em comum.

Nesse trabalho de aproximação também é preciso considerar que os jovens são diferentes em diversos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre outros. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155), definem

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade, e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, e como sujeito crítico, agente de transformação da sociedade.

Outro aspecto das juventudes que precisa ser destacado é a sociabilidade. Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes e expressam aspectos das culturas juvenis. Estar atento para os grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento dos seus modos de agir e também em seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e* bullying (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotos e vídeos constrangedores. As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é preciso educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha um papel muito importante na organização dessa rede, como mediador desse processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

As metodologias ativas

Um modo de engajar os alunos e favorecer seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem são as metodologias ativas. Segundo José Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares.

Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, a partir de problemas e situações reais, e a ser o protagonista do seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] . Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É por meio da relação professor-aluno-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, através das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar sobre os conteúdos desenvolvidos, sobre o que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Com as metodologias ativas se delineiam novos contextos de aprendizagem. Diversas estratégias podem ser utilizadas, como projetos, desafios, debates, aprendizagem por pares, por times, pela resolução de problemas, sala de aula invertida, entre outras. Usá-las é uma oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas podem ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como utilizar as metodologias ativas com o livro didático

O modo como o professor usa o livro didático depende daquilo que ele acredita enquanto teoria que embasa a sua prática. Quando se percebe a necessidade de uma escola que desenvolva o protagonismo do estudante e que se adapte à ideia de juventude plural, percebendo que nela se inserem sujeitos com valores, comportamentos, interesses e necessidades singulares, o livro didático se torna um instrumento a mais para enriquecer a prática docente, mesmo diante das muitas dificuldades que se apresentam no dia a dia.

Nesse sentido, esta obra didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. O **trabalho com projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmo ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões em coletivo, refletem, analisam, e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, de modo a estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica um planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessária, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é necessário planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos estudantes. É importante também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar; e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta obra, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa que pode ser colocada em prática é a **aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, utilizam aplicativos) ou, por exemplo, pedir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor pode propor algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que precisam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam, também, no seu próprio ritmo.

Nesta obra, o professor poderá propor aos estudantes que analisem previamente, por exemplo, as aberturas, os infográficos e as seções *Compreensão de texto* e *Educação financeira,* trazendo as dúvidas e comentando sobre o que entenderam. É possível pedir, ainda, que resolvam previamente os exercícios propostos, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades que podem ser elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta obra, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível a partir de perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para esclarecer e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

Vale ressaltar que o trabalho em grupo requer atenção especial do professor. Embora seja uma proposta que vem sendo (ou deveria ser) trabalhada ao longo do percurso escolar, é possível encontrar estudantes que ainda não sabem fazê-lo. Seja para reforçar, seja para ensinar esta prática, é preciso retomar algumas orientações.

O professor precisa estar atento à formação dos grupos: poderá deixar que os estudantes o façam livremente para observar como trabalham e, assim, reagrupá-los conforme as afinidades (ou não). É importante também organizá-los de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas, a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

É importante percorrer a sala observando os grupos, como estão realizando as tarefas e como as discussões estão sendo encaminhadas. Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, pode-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que não ocorre a participação de todos, é fundamental questionar os integrantes do grupo, retomando como deve ser esse trabalho e revisando as regras. Se o fato

MODERNA

persistir, uma dica é a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprenderem a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

O texto a seguir apresenta uma reflexão que pode ser útil ao professor para preparar os estudantes para o trabalho coletivo.

> **Preparando os alunos para a cooperação**
>
> A primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo na sala de aula é a de preparar os alunos para situações de trabalho cooperativo. [...] Existe uma grande chance de que eles não tenham vivenciado um número suficiente de experiências prévias bem-sucedidas em tarefas cooperativas, trabalhando com pessoas que não eram amigos pessoais ou membros da família. [...]
>
> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras.
>
> [...]
>
> O trabalho em grupo envolve uma mudança importante nas regras das salas de aula tradicionais. Quando recebem uma tarefa para o grupo, solicita-se aos alunos que dependam uns dos outros. Eles agora são responsáveis não apenas pelo seu próprio comportamento, mas pelo comportamento do grupo e pelo resultado dos esforços de todos. Em vez de escutar apenas o professor, devem escutar os outros estudantes. Para que o grupo trabalhe sem problemas, eles devem aprender a solicitar a opinião dos outros, dar às outras pessoas a chance de falar e fazer contribuições breves e sensíveis ao esforço coletivo. Esses são exemplos de novas regras úteis para serem introduzidas antes de começar o trabalho em grupo. Como esses novos comportamentos envolvem interações entre os alunos, as normas que os governam precisam ser compartilhadas e internalizadas por todos.
>
> COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

A importância da Matemática

A BNCC propõe que a área da Matemática e suas Tecnologias, no Ensino Médio, amplie e aprofunde as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, aplicando-a à realidade em diferentes contextos e às vivências cotidianas dos estudantes.

A dimensão social que explicita os múltiplos usos que a sociedade faz das explicações matemáticas e os principais valores de controle e progresso que se desenvolvem com sua aplicação são claramente identificados nos exemplos que sobressaem, de imediato, nos campos da Estatística, da Matemática Financeira, das medidas ou da modelagem de fenômenos naturais e sociais.

Reconhecidamente, a Matemática assume papel formativo no desenvolvimento geral do indivíduo. Ao assentar-se na clareza e no rigor de definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que validam intuições e dão sentido às técnicas aplicadas, a Matemática, sem dúvida, ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Essa dimensão simbólica ou conceitual da disciplina abarca os fundamentos que garantem cobertura ampla – e, ao mesmo tempo, elementar – dos fatos matemáticos mais importantes.

Espera-se também que o estudante compreenda a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento. Essa dimensão cultural do currículo científico é contemplada na solução de problemas e nas tarefas de investigação, que têm como objetivo reproduzir algumas atividades dos matemáticos, com destaque à formulação de hipóteses e conjecturas e à reflexão sobre elas, assim como à comunicação escrita de experimentações e de possíveis conclusões.

Como resultado dessas reflexões e orientada pela BNCC em suas competências gerais e nas competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias, esta obra traçou como objetivo colaborar também para o desenvolvimento das capacidades de:

- usar o conhecimento matemático como uma das ferramentas de leitura, interpretação e análise da realidade;
- estabelecer relações entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas do conhecimento e da vida cotidiana;
- efetuar cálculos numéricos – escritos ou com uso da tecnologia, exatos ou aproximados – com ampliação da diversidade das operações e dos conjuntos numéricos;
- resolver problemas e, com isso, desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- colocar em prática atitudes de autonomia e de cooperação;
- desenvolver uma formação geral que permita o prosseguimento dos estudos;
- identificar e utilizar representações equivalentes de um mesmo conceito matemático, bem como diferentes registros desse conceito (gráfico, numérico, algébrico);
- expressar matematicamente – de forma verbal, escrita e gráfica – situações teóricas e concretas, além de trabalhar a precisão da linguagem e das demonstrações, desenvolvendo, assim, a construção da argumentação.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a Etnomatemática – abordagem histórico-cultural iniciada na década de 1970, quando se passou a falar de uma Matemática presente em diferentes contextos culturais: das costureiras, do pedreiro, do marceneiro e muitas outras.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática:

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

MODERNA

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e devem ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, onde desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática, quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obras e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por ex., usando trigonometria).

Utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é, portanto, uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrir a Matemática de seu dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual tem ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação. Nas palavras de Nilson José Machado (1989), a Matemática, "impregnando-se da língua materna, [...] passa a transcender uma dimensão apenas técnica adquirindo assim o sentido de uma atividade caracteristicamente humana".

Tanto a língua materna quanto a linguagem matemática possuem um sistema de representação simbólico, letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer mais esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É nesse sentido que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

Para Luvison (2013, p. 60):

> a Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos; está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e Matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe do seu estilo.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante seja estimulado a adquirir habilidades de leitura e consiga resolver as situações de modo mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é pedir aos estudantes, que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, pode-se pedir que, em duplas, um leia o texto do outro e ambos contribuam para a melhoria dos textos.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[1] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais: gráficos de diferentes tipos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas, bem como ao uso de *softwares*.

É preciso que os educadores incluam em sua rotina, permanentemente, meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática. Algumas sugestões nesse sentido são:

- Propor atividades em que os estudantes explicitem raciocínio, escrevendo o passo a passo da resolução. Por exemplo: solicitar que escrevam como se ganha determinado jogo, registrar as regras de um jogo etc. Esse exercício encoraja a reflexão;
- Apresentar diferentes gêneros textuais nas aulas: texto escrito, texto imagético, jogo, interpretação de problemas matemáticos, entre outros;
- Falar e ouvir: é importante que o professor abra espaços para que os estudantes possam expor suas ideias, de modo que todos participem. Esse é um excelente meio de o professor descobrir como os estudantes pensam;
- Solicitar diferentes registros: orais, pictóricos e corporais para algumas situações.

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da competência geral 4 da BNCC.

É necessário também que haja interação dos estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

1 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

MODERNA

O uso da escuta ativa[2] é fundamental para que haja esse clima de compreensão, criando um ambiente cooperativo na sala de aula.

Nesta obra, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, a seção *Compreensão de texto*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

Outros exemplos são os boxes *Reflita* e *Pensamento computacional*, que ajudarão os estudantes nas questões argumentativas e na comunicação oral ao socializarem as conclusões de cada aspecto solicitado. Vale ressaltar que o trabalho com o pensamento computacional é um grande aliado no desenvolvimento da aproximação entre língua materna e Matemática.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando a nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

A preocupação com essas transformações e como elas repercutem na formação das novas gerações estão descritas na Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

> - pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
> - mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
> - cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica.

Especificamente para o Ensino Médio, a BNCC (2018, p. 474) orienta:

> [...] dada a intrínseca relação entre as culturas juvenis e a cultura digital, torna-se imprescindível ampliar e aprofundar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Afinal, os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. [...]

Portanto, o uso do computador na escola não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Desse modo, destaca-se a importância de um ensino da Matemática aplicado à realidade e vinculado à utilização de tecnologias digitais. Seu uso pode facilitar e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos desta disciplina.

Nesta obra, em diferentes momentos, os estudantes e o professor têm a oportunidade de trabalhar com planilhas eletrônicas, *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- *Decomposição*: consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- *Reconhecimento de padrões*: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- *Abstração*: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.

2 Escuta ativa é uma ferramenta de comunicação que pressupõe que, a partir do momento em que uma pessoa se coloca para conversar com outra e presta atenção à sua fala, está demonstrando interesse verdadeiro pelo assunto e, acima de tudo, pela mensagem que está sendo dita. A escuta ativa implica um interesse genuíno para entender a realidade do outro, investigando com curiosidade o que o outro está tentando expressar, por meio de perguntas e checagem da compreensão das mensagens.

MODERNA

- *Algoritmo*: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para ensinar o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. No trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", encontram-se atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

Nesta obra, há diversas atividades que permitem explorar esse conteúdo, e também boxes intitulados *Pensamento computacional*, em que há sugestões de trabalho de estímulo ao pensamento computacional. Por meio das atividades propostas, os estudantes exercitam seus conhecimentos, construindo outros para resolver situações-problema.

Cada volume contempla os pilares de abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmo, de maneira que, ao final dele, o estudante se deparou com um algoritmo completo de alguma complexidade. Ademais, há o capítulo *Algoritmos e Introdução à programação*, em que se aprofundará a construção de um algoritmo e como implementá-lo usando a linguagem de programação Python. Essa linguagem foi escolhida por ser de grande utilização em empresas e ter diversos recursos. A abordagem é teórica com indicações de utilizações práticas em laboratórios de informática, se possível e oportuno.

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", feitas sem o uso do computador, são importantes para estimular a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão o trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- Code.org: apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os alunos, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.

- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante está aprendendo uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o *Scratch* trazem blocos de comandos que se encaixam, com termos próximos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são estimulados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Os temas contemporâneos transversais e a interdisciplinaridade

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área de conhecimento e planejado de forma interdisciplinar e transdisciplinar.

Conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013, p. 184):

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...].

Desse modo, compreende-se que os temas contemporâneos transversais devem ser trabalhados por meio da interdisciplinaridade.

Os temas contemporâneos transversais (TCT) são temas que não pertencem a apenas um componente curricular; eles perpassam todos eles. Dessa forma, são importantes para integrar todos os componentes curriculares em um processo pedagógico que vise à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCT quando afirma que:

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: contexto histórico e pressupostos pedagógicos*, do Ministério da Educação, editado em 2019, distribuiu quinze temas em seis macroáreas, conforme o quadro a seguir.

Temas contemporâneos transversais	
Ciência e tecnologia	**Meio ambiente**
– Ciência e tecnologia	– Educação ambiental – Educação para o consumo
Multiculturalismo	**Cidadania e civismo**
– Diversidade cultural – Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	– Vida familiar e social – Educação para o trânsito – Educação em direitos humanos – Direitos da criança e do adolescente – Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
Economia	**Saúde**
– Trabalho – Educação financeira – Educação fiscal	– Saúde – Educação alimentar e nutricional

Assim, espera-se que a abordagem dos TCT permita ao estudante compreender questões diversas da contemporaneidade, contribua para dar significado e relevância aos conteúdos escolares e para a sua formação integral como ser humano autônomo comprometido com a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao longo desta obra, são apresentados comentários específicos sobre os temas contemporâneos transversais e como se pode trabalhar com eles de forma integrada com as outras áreas do conhecimento do Ensino Médio.

MODERNA

A gestão da sala de aula

Uma boa gestão da sala de aula estimula a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais atraente e significativo tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas. E requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando da sua conservação. Envolvê-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático que atenda a todos os estudantes, inclusive aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky, (2015, p. 27) esclarecem que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os alunos podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se quer uma atividade individual, reduzem drasticamente as interações entre os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor também precisa pensar a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala, intelectual, entre outras). É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças. Para isso, é preciso aprender sobre as diversidades e instruir sobre a diversidade cultural a partir do exame de crenças e valores de cada um, atentando para a visão de mundo que não é igual para todos.

A implementação dos temas contemporâneos transversais, mais especificamente o multiculturalismo, é uma boa estratégia para abordar essa questão e refletir sobre as implicações da diversidade cultural e seus desdobramentos. A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo.

Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, possam se desenvolver. Atualmente, é possível encontrar em uma turma um ou mais tipos de transtorno: de aprendizagem, de comportamento ou de conduta, de déficit de atenção/hiperatividade, autismo, entre outros, além de deficiências.

É preciso acolher os estudantes que os apresentam. O movimento de acolhida começa com o entendimento do tipo de necessidade, o "aprender sobre", citado anteriormente. O passo seguinte é criar um ambiente de aceitação na classe ou, melhor dizendo, um ambiente positivo, em que haja aceitação e valorização de todos. Isso se faz por meio de ações, e não somente por palavras. O respeito mútuo, a adequação das propostas e a implementação de atividades em grupos que incentivem a interação entre todos são alternativas para esse acolhimento.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são bons caminhos. No início, pode parecer difícil, e realmente é; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

A presença de um tutor ou monitor que acompanhe o estudante com deficiência, amparado pela lei, é também uma alternativa para possibilitar a real inclusão. O professor poderá dar uma atenção especial para esse estudante enquanto o monitor ou tutor oferece assistência aos demais.

Algo similar é citado por Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 116):

> O coensino é definido como duas ou mais pessoas compartilhando a responsabilidade de planejar, ensinar e avaliar alguns ou todos os alunos de uma turma [...]. O coensino, também conhecido como docência compartilhada ou ensino cooperativo, pode assumir várias formas [...], "liderança e apoio", um professor assume a responsabilidade pelo ensino enquanto o outro oferece assistência e apoio aos indivíduos ou grupos pequenos [...], "ensino em paralelo", os professores planejam conjuntamente o ensino, mas cada um o ministra para metade da turma [...], "ensino em equipe", ambos os professores compartilham o planejamento e o ensino dos alunos.

Essas propostas certamente necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

Avaliação

Em meio a tantas transformações propostas a partir desse novo olhar para o Ensino Médio, a avaliação é outro ponto de reflexão.

Nesse contexto de aprendizagem ativa, só responder a questões ou resolver problemas não é suficiente, é necessário pensar também em avaliação ativa, que é um processo contínuo e flexível. Assim, devem estar presentes a avaliação formativa, cujo objetivo é avaliar o processo de aprendizagem sem a atribuição de nota ou conceito, a fim de fazer ajustes no plano pedagógico; a avaliação mediadora, cujo objetivo é avaliar conhecimentos por meio do diálogo ou da conversa individual ou em grupo; a avaliação de percurso, que avalia várias etapas de um conteúdo; a avaliação em grupo, a autoavaliação, entre outras; ou seja, a avaliação se torna mais um meio de contribuir para a aprendizagem de cada estudante, subsidiando o professor a avaliar seu trabalho e a redirecionar suas ações.

Avaliar é uma tarefa muito difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico. Assim, avaliar diz respeito aos atores da ação educativa (estudantes e pais, professores e orientadores) quanto à estrutura de ensino, o que inclui a apreciação, entre outros aspectos, dos métodos e materiais didáticos adotados, dos projetos e programas propostos, do desenvolvimento de competências e habilidades. Nessa concepção, a avaliação integra e reorienta o processo de tomada de decisões, no sentido de adotar uma abordagem metodológica e avaliativa que proporcione aos estudantes o aprimoramento de sua formação humana, incluindo a formação ética, a autonomia intelectual e o pensamento crítico.

No primeiro ano do Ensino Médio, é importante elaborar uma avaliação diagnóstica tendo por base as habilidades que deveriam ter sido trabalhadas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. O professor pode elaborar cerca de dez questões envolvendo algumas habilidades importantes. Podem ser testes fechados de múltipla escolha ou questionários, abertos ou fechados, com questões específicas de Matemática.

Os testes fechados de múltipla escolha apresentam a resposta correta e os distratores, os quais refletem as respostas incorretas, porém plausíveis, isto é, os erros previsíveis e justificáveis. O conteúdo dos distratores define, em grande parte, o grau de dificuldade da questão. Quando se usam os erros mais frequentes como distratores, é possível identificar o que de fato os estudantes dominam, a natureza das dificuldades do grupo ou dos erros que costumam cometer. A escolha de uma entre muitas alternativas geralmente favorece a discussão de ideias e problemas de formas variadas, enriquecendo a troca de informações e, por conseguinte, o processo de aprendizagem.

Em Matemática, os questionários totalmente abertos, embora apresentem maior dificuldade para a categorização das respostas obtidas, promovem uma exposição mais rica das informações. Eles incentivam os estudantes a enfrentar um problema e buscar a solução utilizando as capacidades de levantar hipóteses, desenvolver estratégias, analisar, argumentar, justificar escolhas, validar respostas etc. Para o professor, esse tipo de prova oferece um conjunto de informações que permite detectar concepções errôneas e propor caminhos para sua correção. No âmbito específico da disciplina, permite analisar aspectos como a relação e a interpretação lógica das informações dadas, o reconhecimento e a aplicação dos conceitos matemáticos, a organização e a comunicação das ideias em linguagem matemática. No plano mais geral, possibilita observar aspectos como a compreensão dos enunciados, a capacidade de raciocínio, a criatividade na busca de soluções, a habilidade na expressão das ideias e o modo de enfrentamento de situações variadas.

A avaliação diagnóstica fornece ao professor parâmetros reais, e não idealizados, do domínio de conhecimentos e habilidades dos estudantes, o que possibilita a construção de um projeto pedagógico consistente e significativo para eles.

Fundamentando-se na ideia de que os processos avaliativos representam importante referência aos avaliados, os professores devem sempre buscar explicitar e compartilhar os critérios de avaliação com os estudantes. Assim, os "erros" – tanto no desempenho específico da disciplina quanto na postura geral de aprendizado – devem ser amplamente discutidos na sala de aula. Esse espaço de discussão, além de dar oportunidade à autoavaliação, permite a identificação de aspectos relevantes da formação e o exercício da autonomia em relação ao processo educacional.

Apresentamos no quadro a seguir uma sugestão de descritores de uma possível ficha de avaliação e de autoavaliação dos estudantes.

Descritores	Avaliação pelo estudante	Avaliação pelo professor
1. Cumpre os objetivos.		
2. Apresenta com correção e clareza as tarefas escritas.		
3. Inclui pesquisas relativas aos assuntos tratados.		
4. Adota uma organização que facilita a compreensão.		
5. Faz a análise de seus erros.		
6. Elabora propostas para enfrentar dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades.		

Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho é de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante em formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações. É importante ainda verificar a coerência da resposta em relação à situação apresentada, a utilização da simbologia matemática apropriada, a clareza, a organização das ideias e a originalidade na solução do problema. Se a intenção é avaliar o desempenho oral, uma sugestão é fazer grupos de discussão sobre questões matemáticas diversificadas. Assim, podem ser observados e avaliados a compreensão das ideias matemáticas envolvidas, a argumentação, e o modo como raciocina e se expressa em situações nas quais essas ideias estejam presentes.

É por meio de observações contínuas da participação dos estudantes nas aulas e do envolvimento nas atividades propostas que o professor avalia a evolução deles em relação aos objetivos propostos no curso. Mantendo um registro de suas observações, pode incorporá-las aos dados obtidos por outros instrumentos de avaliação, garantindo maior consistência à apreciação periódica de cada estudante.

Por fim, é importante ressaltar que não existe instrumento único para o sistema de avaliação, o qual deve sempre contemplar a participação dos estudantes nas atividades regulares, seu desempenho em atividades específicas e os diferentes tipos de produção, incluindo os instrumentos de autoavaliação.

Ao final de cada capítulo desta obra há uma proposta de autoavaliação para ser realizada pelos estudantes. Além disso, na parte específica deste manual, encontram-se sugestões de avaliação para cada capítulo, que podem ser aplicadas aos estudantes.

MODERNA

Organização e estrutura da obra

Diante da grande diversidade de conteúdos cabíveis nessa fase da aprendizagem, uma seleção criteriosa é de vital importância para a consistência do corpo de conhecimentos, pois oferece condições propícias ao estabelecimento produtivo das múltiplas e possíveis relações no interior desse conjunto. A seleção dos conteúdos, nesta obra, com base nas orientações da Base Nacional Comum Curricular, apoiam a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes. O encaminhamento dos conteúdos procura possibilitar ao estudante tanto a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos quanto a apropriação das formas de raciocínio presentes na construção dessa ciência.

Assim, no decorrer da obra, são apresentadas situações contextualizadas e de caráter interdisciplinar que permitem conexões entre conceitos matemáticos e destes com dados do cotidiano e de outras áreas do conhecimento. Em paralelo, está presente a abordagem que revela o caráter formativo, instrumental e científico do conhecimento matemático, por exemplo, por meio de situações interpretativas de diferentes campos da ciência ou da atividade tecnológica.

Em termos de estrutura, a obra divide-se em seis volumes, cada qual composto de capítulos. Após a introdução do assunto a ser tratado, cada capítulo é entremeado por séries de: exercícios resolvidos, para professor e estudantes explorarem os tópicos principais em sala de aula; exercícios propostos, para os estudantes resolverem; propostas que permitem o uso de calculadora, planilhas eletrônicas e *softwares* de construção de gráfico e de geometria dinâmica; exercícios complementares; questões para autoavaliação.

A concretização do assunto explorado é complementada por boxes e atividades que desenvolvem o pensamento computacional e seções que apresentam textos que exploram vários níveis de interpretação e compreensão para incentivar o estudante a desenvolver a competência leitora.

No final de cada volume, são apresentadas: atividades que trabalham a educação financeira; atividades em grupo que incentivam o estudante a pesquisar e explorar situações que promovem organização, interpretação de dados e informações, buscando desenvolver a construção de argumentação e aprofundar os conhecimentos adquiridos; sugestões de livros, vídeos, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros, para a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conteúdos trabalhados no livro.

Organização dos volumes

Esta obra é dividida em seis volumes.

As páginas iniciais de cada volume apresentam as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas no volume, além de um texto introdutório sobre pensamento computacional.

A abertura de cada capítulo é ilustrada por uma imagem que tem por intuito incentivar a discussão preparatória à exploração do tema a ser estudado.

Os objetivos do capítulo são apresentados logo no início, para auxiliar o estudante a formar um panorama dos conteúdos ali tratados.

Como, nessa faixa etária, o estudante já tem condições de reconhecer e interpretar objetivos, ele conta com um elemento adicional para a organização de seus estudos e o desenvolvimento de sua autonomia.

Cuidou-se para que os conteúdos do capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e exercícios resolvidos, que sugerem uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

Na seção *Exercícios propostos*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade.

Em várias páginas, são encontrados boxes que dialogam com o estudante, oferecendo-lhe explicações e dados adicionais para o desenvolvimento do estudo, além de questões que expandem e aprofundam o tema tratado e conexões com situações cotidianas ou abordadas em outras disciplinas.

Em todos os capítulos, há *Exercícios complementares* que permitem o aprofundamento dos conteúdos e a percepção de sua aplicação a diferentes situações, até mesmo as mais complexas, com os *Aprofundamentos* e/ou *Desafios*.

Ao término do capítulo, a seção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os conteúdos fundamentais trabalhados. No quadro *Retomada de conceitos*, as questões são relacionadas com os objetivos indicados no início e com as páginas que tratam especificamente do assunto, caso o estudante precise retomá-lo. Essa seção permite trabalhar a competência geral 10, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

A seção *Compreensão de texto* traz textos diversificados que exploram vários níveis de interpretação e compreensão, muitas vezes com questões que articulam diferentes disciplinas e exploram situações do cotidiano do estudante.

Com o objetivo de desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros, a seção *Educação financeira* favorece o desenvolvimento da competência geral 6, pois o estudante é estimulado a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade; da competência geral 9, pois nela os estudantes trabalharão em grupo, exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação; e da competência específica 1 de Matemática, pois o estudante é convidado a interpretar situações em diversos contextos cotidianos relacionados a questões socioeconômicas.

Apresentando atividades que desenvolvem a experimentação, as propostas da seção *Pesquisa e ação* devem ser realizadas em grupo. As atividades, geralmente, envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto final, em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como relatórios, vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece o desenvolvimento da competência geral 4. Ela também permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo onde exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a competência geral 2. Essa seção favorece também a competência geral 7, já que em algumas atividades os estudantes discutirão temas como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a competência geral 9, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente na diversidade de ideias e de culturas.

Na seção *Ampliando os conhecimentos* indicam-se livros, vídeos, *sites*, *podcasts*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos. As sugestões propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.

MODERNA

As seções e atividades de cada volume procuram desenvolver a representação e a comunicação, a investigação e a compreensão, e apoiam-se, sempre que possível, na contextualização sociocultural.

Quanto à **representação** e à **comunicação**, há atividades que possibilitam aos estudantes desenvolver as capacidades de: ler e interpretar textos matemáticos; ler, interpretar, construir e aplicar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas e tabelas) e vice-versa; exprimir-se com correção e clareza na terminologia própria da Matemática; usar corretamente os instrumentos de medição e de cálculo.

Quanto à **investigação** e à **compreensão**, há atividades que incentivam os estudantes a desenvolver as capacidades de: identificar dados significativos de um problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados; selecionar estratégias de resolução de problemas; interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quanto à **contextualização sociocultural**, há atividades que estimulam os estudantes a desenvolver as capacidades de: usar o conhecimento matemático na interpretação do real e em possíveis intervenções no cotidiano; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Conectam-se, assim, a Matemática e suas Tecnologias com as outras áreas do conhecimento, de maneira interdisciplinar, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos pelo homem e colaborando na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Sugestão de cronograma

As diferenças de rendimento de uma turma para outra podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor à outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor. É sempre possível ensinar com seriedade e de modo significativo determinado assunto. As razões para ensinar um assunto vêm, antes, associadas ao projeto educacional a que servem. Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível pensar em uma maneira de fazê-lo.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir uma sugestão de cronograma para o trabalho com esta obra composta de seis volumes. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

ANOS	BIMESTRES	CAPÍTULOS
1º	1º	Grandezas e medidas
		Conjuntos
	2º	Funções
		Algoritmos e introdução à programação
	3º	Função afim
		Função quadrática
		Função exponencial
	4º	Função logarítmica
		Sequências
		Matemática financeira
2º	1º	A semelhança e os triângulos
		Trigonometria no triângulo retângulo
	2º	Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer
		Funções trigonométricas
	3º	Superfícies poligonais, círculo e áreas
		Introdução à Geometria espacial
	4º	Poliedros
		Corpos redondos
3º	1º	Organização e apresentação de dados
		Análise de dados
		Medidas estatísticas
	2º	Análise combinatória
		Probabilidade
	3º	Matrizes e determinantes
		Sistemas lineares
	4º	Geometria analítica
		Transformações geométricas

MODERNA

Sugestões de consulta para o professor

Livros e artigos

Ensino de Matemática

- BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). *Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica*: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.

  Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a Educação e a Educação matemática.

- BICUDO, M. A. V. (org.). *Educação matemática*. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

  Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em Educação matemática, enfocando metodologia e ensino.

- BONGIOVANNI, V. *Utilizando resultados de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem em Geometria*. São Paulo: Proem, 2006.

  Trata de algumas teorias da didática francesa como ferramentas para o ensino de Geometria, de forma que estas possam ser trabalhadas inclusive por meio do *software* Cabri-Géomètre.

- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação matemática).

  O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.

  O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.

- HUFF, D. *Como mentir com Estatística*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

  Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

- LIMA, E. L. *et al. A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1, 2 e 3. (Coleção do Professor de Matemática).

  Essa obra apresenta uma diversidade de exercícios comentados pelo autor e serve de apoio ao professor em seus conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos.

- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2006.

  Esse livro busca introduzir uma concepção de Aritmética e Álgebra diferente daquela em que a primeira se exprime como algo concreto e a segunda, por ser generalização da Aritmética, como abstrata. Os autores mostram a inadequação dessa visão, pois Aritmética e Álgebra complementam-se em uma mesma atividade, que é o estudo numérico.

- MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Coleção Educação em pauta).

  A obra traz reflexões sobre a transversalidade, o ensino de Matemática, a ciência e a cultura, examinando questões como: o que significa relacionar a Matemática ao cotidiano? Qual é a relação entre a etnomatemática e a proposta de transversalidade?

- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. São Paulo: Hemus, 2014.

  Essa obra auxilia o professor a ilustrar sua aula usando atividades práticas, apresentadas por meio de uma abordagem didática interessante, que apresenta um grande número de problemas funcionais ou curiosos, resolvidos, discutidos e ilustrados, como o idioma da Álgebra, as equações de Diofanto, equações do segundo grau, progressões e muitos outros.

- PONTE, J. P. *et al. Investigações matemáticas na sala de aula*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

Tecnologias da Informação e Comunicação

- ALMEIDA, F. J. *Computador, escola e vida*: aprendizagem e tecnologias dirigidas ao conhecimento. 2. ed. São Paulo: Cubzac, 2007.

  Trata da possibilidade de que as ciências e as tecnologias motivem a melhoria do cenário atual.

- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção Tendências em Educação matemática).

  Aborda a utilização da informática na Educação matemática, levando em consideração as dificuldades encontradas por professores para a utilização desse recurso em suas aulas como instrumento de ensino.

- MORAN, J. M. *A educação que desejamos*: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.

  O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

História da Matemática

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

  A obra mostra como a Matemática se desenvolveu desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

  Essa obra aborda a história de conteúdos matemáticos, indicando como se deu o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.

- ROONEY, A. *A história da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

MODERNA

Apresenta a história da Matemática fartamente ilustrada. Ela está dividida em nove capítulos e traz personalidades como Euclides, Napier, Leibniz, Riemann e outros.

- ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  A obra apresenta um olhar crítico sobre o modo como a história da Matemática tem sido contada ao longo dos tempos, abordando os sistemas matemáticos desenvolvidos desde a Mesopotâmia até o século XIX.

Currículo

- COLL, C. *Psicologia e currículo*. São Paulo: Ática, 1999.

  Essa obra apresenta um modelo de projeto curricular concebido com base em uma visão construtivista e psicopedagógica para concretização, no cotidiano escolar, dos conteúdos propostos. Trata de questões educacionais e está inserida em um processo de transformação na educação.

Didática

- DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.

  Enfoca a didática da resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

- PARRA, C.; SAIZ, I. (org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

  Traz artigos de autores que desenvolvem pesquisas no campo da didática, analisando situações relacionadas a conteúdos matemáticos e suas possíveis metodologias de ensino.

Formação de professores

- FIORENTINI, D. *Formação de profissionais de Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009.

  O leitor verá, nessa obra, que a tentativa de utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação na formação de professores e no ensino da Matemática, em um ambiente de trabalho reflexivo e investigativo, pode trazer mudanças profundas à formação e à cultura docente.

Sites e artigos para *download*

Sites acessados em: 30 jun. 2020.

- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

  Site da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>

  Site da *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, traz artigos de todas as edições publicadas.

- <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>

  Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- <https://www.ime.usp.br/~leo/lem/>

  Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

  Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

- *Boletim GEPEM*. Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

  Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

- *Educação Matemática em revista*.

  Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

- *Revista do Professor de Matemática*.

  Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), é destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

- *Zetetiké*. Campinas: Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática.

  Publicação que divulga a produção acadêmica em Educação matemática dos docentes, graduandos e pós-graduandos da Faculdade de Educação da Unicamp. Promove a interação científico-pedagógica entre pesquisadores e educadores matemáticos de todos os graus de ensino.

MODERNA

Referências bibliográficas

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam por que e para que usar metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. "Existem outras matemáticas?". *Nova Escola*, 3 maio 2019. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. *Modernidade líquida*. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Em suas obras, o sociólogo polonês Zygmunt Bauman utiliza o termo "modernidade líquida" para tratar da fluidez das relações em nosso mundo contemporâneo. O conceito de modernidade líquida refere-se ao conjunto de relações e dinâmicas que se apresentam em nosso meio e que se diferenciam das que se estabeleceram no que Bauman chama de "modernidade sólida" pela sua fluidez e volatilidade. A obra é referência sobre a contemporaneidade.

BENDER, W. N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações atuais na sala de aula.

BLIKSTEIN, P. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Não dá para redesenhar uma linha de produção ou decodificar o DNA copiando e colando textos da internet. Partindo desse pensamento, Paulo Blikstein aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa do "pensar computacionalmente" é identificar as tarefas cognitivas que podem ser feitas de forma mais rápida e eficiente por um computador. A segunda etapa é saber programar um computador para realizar essas tarefas cognitivas – em outras palavras, transferir aquilo que não é essencialmente humano para um computador.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do MEC que apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio/Ministério da Educação (org. Paulo Carrano, Juarez Dayrell). Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Esta obra tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que possam facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

BRASIL. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BUCK Institute for Education. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de ensino Fundamental e Médio. Porto Alegre: Artmed, 2008.

Esse livro descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos e contém ferramentas e recursos de auxílio à sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. *Gestão de EAD no ensino híbrido*: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O artigo aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

MODERNA

CASSOLA, N. O pensamento computacional no ensino fundamental. *UFRGS Ciência*, 6 abr. 2018. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ciencia/o-pensamento-computacional-no-ensino-fundamental/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo apresenta alguns pontos abordados por Christian Brackmann em sua tese de doutorado a respeito do pensamento computacional. Brackmann é professor de aulas de algoritmos do Instituto Federal de Farroupilha e desenvolveu um projeto cujo intuito foi trazer conceitos da computação a estudantes do Ensino Fundamental.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em anos de pesquisa e de experiência docente, o livro traz atualizações importantes sobre como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa, de modo a construir salas de aula equitativas. O livro inclui as mais recentes pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e como os professores podem organizar suas salas de aula para que todos participem ativamente.

DAYRELL J. (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 31, p. 99-120, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ep/v31n1/a08v31n1.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da matemática e de seu ensino e também as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo-se uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatemática.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, v. 14, n. 1, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. Para isso, as autoras fazem um estudo bibliográfico das mais importantes abordagens teóricas voltadas para os processos de ensino e de aprendizagem, pautados nas principais teorias de aprendizagem, como a aprendizagem pela interação social, preconizada por Lev Vygotsky (1896-1934), a aprendizagem pela experiência, de John Dewey (1859-1952), e a aprendizagem significativa, de David Ausubel (1918-2008).

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: *Juventudes e Tecnologias:* Sociabilidades e Aprendizagens. SOUSA, C. A. de M. (org.) *et al.* Brasília: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nossa vida diária. Adolescentes e jovens usam no seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O material desse artigo são estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. *Nova Escola*, 14 ago. 2018. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Ao reconhecer que os professores têm certo receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). *Projetos pedagógicos no contexto escolar*: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade da escola e os projetos que nela se realizam e propõe caminhos a serem percorridos no planejamento e no desenvolvimento de processos de ensino e aprendizagem nas unidades escolares; também discute práticas originárias de projetos e convida os leitores à análise e à reflexão sobre essas práticas. Além disso, mostra como fazer o projeto acontecer na escola, traz sugestões e incentiva sua realização no contexto escolar.

HORN, M. B.; STAKER, H. *Blended*: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Nessa obra, os autores apresentam um guia de referência para implementar o ensino híbrido em instituições de ensino e construir um sistema educacional centrado no estudante. O ensino híbrido, mescla do ensino presencial com o virtual dentro e fora da escola, já se consolidou como uma das tendências mais importantes para a educação do século XXI. As práticas do *blended learning* têm se disseminado em redes de ensino de todo o mundo, oferecendo aos estudantes acesso a um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado às suas necessidades.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? *Revista Educativa*, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

MODERNA

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características que estão se acentuando na juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Entre os vários enfoques possíveis do tema, destaca a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e alunos e nos modos de aprender.

LUVISON, C. da C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações existentes entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar como essas relações influenciam na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. *Revista da Faculdade de Educação*, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/rfe/article/view/33439/36177>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Nesse artigo, o autor analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que efetivamente ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MANZINI, E. J. (org.). *Inclusão do aluno com deficiência na escola*: os desafios continuam. Marília: ABPEE; Fapesp, 2007.

As pesquisas desenvolvidas e apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é ainda um tema polêmico nos dias atuais e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola ainda carece de uma prática pedagógica para que a inclusão possa se concretizar. A obra pode auxiliar o trabalho de professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. *Metodologias ativas de bolso*: como os alunos podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reunem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a Educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. *Estratégias educativas para a prevenção da violência*. Tradução Joaquim Ozório. Brasília: Unesco, UCB, 2002.

Esse livro é uma ferramenta valiosa, que permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando à melhoria da convivência.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. *Violência na escola*: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

Esse livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas leste e sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência encontradas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SOLÉ, I. *Estratégias de leitura*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo desse livro é ajudar educadores e profissionais a promover a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

VIOLÊNCIA escolar e bullying: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. *Gestão da sala de aula*: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

A obra é um guia abrangente para criar um ambiente de aprendizagem afetivo, organizado e produtivo. A experiência inspiradora de professores de disciplinas como Química, Matemática, História e Geografia, em escolas de perfis demográficos variados, levanta discussões fundamentais sobre a gestão do ambiente escolar. Combinando recomendações baseadas em pesquisas com exemplos reais de instituições de ensino, o livro oferece aos professores orientações para lidar com os principais desafios da sala de aula atual, auxiliando na construção de relações qualificadas com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Esse artigo, *Computational Thinking*, de Jeannette Wing foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico “Communications of the ACM”, em março de 2006.

Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem saber para atuar na sociedade moderna.

A BNCC neste volume

O quadro a seguir apresenta as competências e as habilidades da BNCC trabalhadas neste volume.

Como as competências gerais da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência geral 1 É importante valorizar os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade, utilizando estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos em contextos do cotidiano e de questões tecnológicas, a fim de contribuir para uma formação geral dos estudantes. Nesse sentido, o desenvolvimento dessa competência é favorecido na seção *Compreensão do texto*, páginas 36 e 37, do capítulo1, que aborda as cifras de Hill; na página 124, que aborda a arte indígena Baniwa; no texto da página 131, que apresenta o triângulo de Sierpinski; na abertura do capítulo 4, com parte de um dos murais do Palácio de Alhambra em Granada, Espanha, nas páginas 110 e 111; no texto da página 135, do capítulo 4, que aborda aspectos da cerâmica marajoara; na seção *Educação financeira*, páginas 148 e 149, que aborda o desenvolvimento sustentável; e na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, que propõe a pesquisa de informações sobre discriminação racial e desigualdade racial.
Competência geral 2 Ao se proporem situações e atividades em que os alunos exercitam a curiosidade intelectual própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão e a análise crítica para pesquisar causas, elaborar e testar hipóteses, essa competência é favorecida. Nesse sentido, há diversos momentos do volume em que ela é trabalhada, como na atividade 4, da página 118, do capítulo 4, que propõe o estudo matemático da trajetória de um feixe de luz; e no *Desafio* da página 143, do capítulo 4, que propõe o estudo geométrico da movimentação de uma bola de bilhar.
Competência geral 3 O capítulo 4 contribui com diversas propostas para o desenvolvimento dessa competência, como a abertura com parte de um dos murais do Palácio de Alhambra em Granada, Espanha, nas páginas 110 e 111; o exercício proposto 3, na página 118, com a apreciação de eixos de simetria em uma obra de M. C. Escher; a observação da reflexão em relação a um ponto em uma obra de Rza Abbasi, na página 119; a transformação geométrica em mais uma obra de Escher, na págiana 122; o texto da página 124, que aborda a arte indígena Baniwa; os flocos de neve registrados pelo fotógrafo Alexey Kljatov, na página 126; o texto da página 135, que aborda aspectos da cerâmica marajoara; a seção *Compreensão de texto*, das páginas 146 e 147, que apresenta a obra gráfica de M. C. Escher; e a seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, que propõe a apreciação de obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira; seguida de criação e exposição das obras criadas para a comunidade escolar, que levam o estudante a fruir e apreciar esteticamente manifestações artísticas e culturais, assim como delas participar, a fim de aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.
Competência geral 4 A importância de conhecer e valorizar diversas culturas e de partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos é proposta por essa competência, que é favorecida em diversos momentos, como na situação inicial apresentada no estudo de sistema de equações lineares, na página 40, do capítulo 2, em que a reação de combustão do gás metano é ilustrada e, em seguida, representada por uma equação.
Competência geral 5 Essa competência é favorecida nas páginas 32 e 33, do capítulo 1, que representam matrizes e determinantes em planilhas eletrônicas; nas atividades do boxe *Explore* da página 42, do capítulo 2, que propõem a resolução de sistemas usando *software* de construção de gráficos; na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 108 e 109, do capítulo 3, que incentiva a discussão de aspectos positivos e negativos do GPS quanto a questões como mobilidade, segurança e privacidade; e nas atividades das páginas 115, 120, 127, 128 e 129, do capítulo 4, que propõem a utilização de *software* de Geometria dinâmica.
Competência geral 6 Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira*, páginas 148 e 149, em que os estudantes devem apropriar-se de conhecimentos e experiências relacionados ao crescimento econômico e desenvolvimento sustentável para refletir sobre seus projetos pessoais, a fim de realizar escolhas alinhadas ao seu projeto de vida, com autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
Competência geral 7 Essa competência é favorecida tanto na situação inicial apresentada no tópico *Multiplicação de matrizes*, na página 25, do capítulo 1, que aborda o tema contemporâneo Educação ambiental, possibilitando reflexões a respeito da sustentabilidade e da preservação do meio ambiente, quanto nas seções *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, que propõe reflexão a respeito do desenvolvimento sustentável, e *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, que propõe a pesquisa de informações sobre a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial (1968), a Conferência de Durban (2001) e a Década Internacional de Afrodescendentes (2015-2024).

MODERNA

Competência geral 8 Essa competência é favorecida na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 58 e 59, do capítulo 2, em que os estudantes devem refletir a respeito da importância dos nutrientes na alimentação e os cuidados que devemos ter com nosso corpo, como a ingestão diária de água, hábitos alimentares saudáveis e prática de atividade física.
Competência geral 9 Essa competência é favorecida em diversas situações em que os estudantes devem trabalhar em grupos, resolvendo conflitos, cooperando com os demais integrantes, exercitando o respeito e a empatia. Essas situações são propostas no volume, como na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 58 e 59, do capítulo 2, em que os estudantes devem pesquisar a importância de nutrientes na alimentação, bem como atitudes para uma alimentação mais saudável, e na seção *Pesquisa e ação*, das páginas 150 a 152, cujas pesquisas sobre obras de arte baseadas na cultura africana ou na afro-brasileira devem ser feitas em grupo, de modo que os alunos possam desenvolver competências como autoconhecimento para o cuidado com a saúde emocional, compreensão da diversidade humana e reconhecimento das próprias emoções e das dos outros.
Competência geral 10 Essa competência é favorecida na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, que leva os estudantes a apreciar e analisar obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira, além de criar obras de arte inspiradas nessas culturas e promover uma exposição das obras criadas para a comunidade escolar. O intuito é que os alunos ajam com autonomia e tomem decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Como as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência específica 1
O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e a compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para fazer julgamentos bem fundamentados. Tal competência é favorecida, sobretudo, na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 36 e 37, do capítulo 1, que aborda as cifras de Hill, no estudo de sistemas de equações lineares, na página 40, do capítulo 2, que levam os alunos a utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos. A seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, propicia a utilização de conceitos matemáticos para ler e interpretar indicadores econômicos. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, propõe a análise e discussão dos dados pesquisados sobre a desigualdade racial no Brasil.
Habilidade EM13MAT102 Essa habilidade é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, cujas atividades levam os estudantes a compreender a economia no mundo e a educar-se para o consumo, principalmente ao propor a reflexão a respeito do desenvolvimento sustentável e a discussão sobre os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Organização das Nações Unidas. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, também contribui com o desenvolvimento dessa habilidade, ao explorar a análise de tabelas, gráficos e amostras de pesquisa relacionados à desigualdade racial no Brasil.
Habilidade EM13MAT104 Essa habilidade é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 a 149, cujas atividades levam os estudantes a compreender a economia no mundo, a pesquisar indicadores econômicos e suas características, a fim de fornecer subsídios à discussão relacionada ao desenvolvimento econômico *versus* desenvolvimento social.
Habilidade EM13MAT105 Essa habilidade é favorecida ao longo de todo o capítulo 4, como nas propostas que utilizam as noções de rotação e suas composições na construção de figuras e análise de elementos da natureza e diferentes produções humanas, e nas que utilizam as noções de transformações isométricas na construção de figuras com o uso de matrizes em um plano cartesiano, bem como na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, com a análise e a criação de obras que apresentam transformações geométricas.
Competência específica 2
Essa competência é promovida na situação apresentada para explorar a multiplicação de matrizes, nas páginas 25 e 26, do capítulo 1, que aborda o tema da educação ambiental. Na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, os alunos são incentivados a pesquisar e analisar indicadores econômicos e a relacionar o crescimento econômico ao desenvolvimento sustentável.

© MODERNA

Competência específica 3
Essa competência específica é favorecida ao longo de todo o volume, uma vez que os estudantes deverão, constantemente, utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos. É o caso, por exemplo, no estudo de matrizes e transformações geométricas, nas páginas 137 a 141, do capítulo 4, nos exercícios propostos na página 70, do capítulo 3, que propiciam aos estudantes a possibilidade da descoberta antecipada dos conceitos a serem abordados no tópico seguinte, fazendo-os sujeitos ativos de seu aprendizado e encorajando-os a construir argumentação consistente no decorrer do capítulo.
Habilidade EM13MAT301 O desenvolvimento dessa importante habilidade é favorecido ao longo de todo o capítulo 2 e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 58 e 59, empregando sistemas lineares à resolução de problemas. Em diversos tópicos do capítulo 3, como na resolução do exercício 27, na página 70; no estudo da posição relativa entre duas retas no plano, nas páginas 78 a 81; no estudo da distância entre ponto e reta, nas páginas 86 a 88; e, no estudo de inequações do 1º grau com duas incógnitas, nas páginas 88 e 89, os alunos vão aplicar conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver, utilizando técnicas algébricas e gráficas, problemas que envolvem equações lineares.
Habilidade EM13MAT307 O estudo das páginas 90 e 91, do capítulo 3, que abordam o cálculo da área de um triângulo no plano cartesiano como aplicação da Geometria analítica, favorece o desenvolvimento dessa habilidade.
Habilidade EM13MAT315 Nos boxes *Pensamento computacional*, as atividades propostas favorecem o desenvolvimento dessa habilidade. Na página 30, do capítulo 1, é apresentado um algoritmo para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 2. Na página seguinte, os estudantes deverão completar um algoritmo em linguagem corrente para calcular o determinante pela regra de Sarrus e, em seguida, representá-lo em um fluxograma. Na seção *Compreensão de Texto*, nas páginas 36 e 37, do capítulo 1, que explora a criptografia, ao codificar e decodificar uma mensagem, o estudante está lidando com um dos pilares do pensamento computacional: o algoritmo. Na página 79, do capítulo 3, os alunos vão estudar um algoritmo representado em linguagem corrente e em um fluxograma para predizer o resultado da análise do gráfico de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, considerando os coeficientes linear e angular das retas.
Competência específica 4
Ao longo de todo o capítulo 1, o estudo de sistemas de equações lineares e matrizes associadas a um sistema, nas páginas 40 a 49, do capítulo 2, a seção *Exercícios complementares*, nas páginas 55 e 56, e a seção *Compreensão de texto*, nas páginas 58 e 59, do capítulo 2, contribuem para o desenvolvimento dessa competência, pois levam os estudantes a resolver problemas do cotidiano e da Matemática que envolvam equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas e gráficas. O boxe *Pensamento computacional*, na página 79, do capítulo 3, também favorece o desenvolvimento dessa competência, uma vez que os estudantes vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.
Habilidade EM13MAT401 O estudo da equação reduzida da reta, nas páginas 76 e 77, do capítulo 3, favorece o desenvolvimento dessa habilidade à medida que leva os estudantes a converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano.

MODERNA

Como as habilidades de Ciências da Natureza e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Habilidade EM13CNT101: *Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas*. A abordagem inicial do tópico *Sistemas de equações lineares*, na página 40, bem como o exercício resolvido R4, na página 45, e o exercício proposto 16, na página 46, todos do capítulo 2, ao abordarem o balanceamento de equações químicas — possibilitando inclusive aulas interdisciplinares com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias — favorecem o desenvolvimento dessa habilidade.
Habilidade EM13CNT106: *Avaliar, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais, tecnologias e possíveis soluções para as demandas que envolvem a geração, o transporte, a distribuição e o consumo de energia elétrica, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo/benefício, as características geográficas e ambientais, a produção de resíduos e os impactos socioambientais e culturais.* A abertura do capítulo 2, nas página 38 e 39, pode ser trabalhada interdisciplinarmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, possibilitando uma discussão a respeito de possíveis soluções para demandas que envolvem geração e consumo de energia, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo-benefício, as características geográficas e ambientais, contribuindo assim para o desenvolvimento dessa habilidade.
Habilidade EM13CNT204: *Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como softwares de simulação e de realidade virtual, entre outros)*. A abertura do capítulo 2, nas páginas 38 e 39, pode ser trabalhada interdisciplinarmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, que possibilita aos estudantes que elaborem uma pesquisa a respeito dos processos de energia, locomoção, abastecimento, velocidade e armazenamento de suprimentos da Estação Espacial Internacional, favorecendo o desenvolvimento dessa habilidade. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 108 e 109, do capítulo 3, também contribui com o desenvolvimento da habilidade, uma vez que os estudantes vão ler e interpretar uma publicação com dados sobre satélites do GPS.
Habilidade EM13CNT303: *Interpretar textos de divulgação científica que tratem de temáticas das Ciências da Natureza, disponíveis em diferentes mídias, considerando a apresentação dos dados, tanto na forma de textos como em equações, gráficos e/ou tabelas, a consistência dos argumentos e a coerência das conclusões, visando construir estratégias de seleção de fontes confiáveis de informações*. A situação inicial apresentada no estudo da circunferência, na página 92, do capítulo 3, explora informações sobre o acelerador de partículas brasileiro, o Sirius, e sugere aos estudantes que acessem um *site* para que obtenham mais informações relacionadas à máquina. A seção *Compreensão de texto*, nas páginas 108 e 109, do capítulo 3, também contribui com o desenvolvimento da habilidade, uma vez que os estudantes vão ler e interpretar uma publicação com dados sobre satélites do GPS.

Como as competências específicas e as habilidades de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas da BNCC foram mobilizadas no volume
Competência específica 1: *Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.* Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, ao promover a discussão e a reflexão sobre a evolução das trocas comerciais internacionais.
Habilidade EM13CHS102: *Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos*. A seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade ao promover a discussão e a reflexão sobre a evolução das trocas comerciais.
Habilidade EM13CHS104: *Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço*. O texto e as fotografias sobre o povo indígena Baniwa e o seu artesanato, na página 124, e sobre a cerâmica marajoara, na página 135, do capítulo 4, favorecem a interdisciplinaridade com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, contribuindo também para o desenvolvimento dessa habilidade.
Competência específica 3: *Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global*. Essa competência é favorecida na seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, ao promover a discussão e a reflexão sobre o desenvolvimento econômico, social e sustentável de um país.
Habilidade EM13CHS301: *Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável*. Essa seção *Educação financeira*, nas páginas 148 e 149, contribui para o desenvolvimento dessa habilidade ao propor a reflexão a respeito do desenvolvimento sustentável, com a discussão a respeito dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Organização das Nações Unidas.
Habilidade EM13CHS601: *Identificar e analisar as demandas e os protagonismos políticos, sociais e culturais dos povos indígenas e das populações afrodescendentes (incluindo as quilombolas) no Brasil contemporâneo considerando a história das Américas e o contexto de exclusão e inclusão precária desses grupos na ordem social e econômica atual, promovendo ações para a redução das desigualdades étnico-raciais no país*. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, possibilita o favorecimento dessa habilidade, no que se refere à análise das demandas políticas, sociais e culturais dos povos afrodescendentes no Brasil e à promoção de ações para reduzir as desigualdades étnico-raciais no país.

© MODERNA

Como as competências específicas e as habilidades de Linguagens e suas Tecnologias da BNCC foram mobilizadas no volume
Habilidade EM13LGG201: *Utilizar as diversas linguagens (artísticas, corporais e verbais) em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso*. Com a leitura da página 124, do capítulo 4, que apresenta texto e fotografias sobre o povo Baniwa e seu artesanato, e da página 135, do capítulo 4, que apresenta texto e fotografias da cerâmica marajoara, os estudantes poderão utilizar a linguagem artística em diferentes contextos, valorizando-a como fenômeno social, cultural, histórico e sensível aos contextos de uso.
Competência específica 6: *Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.* Com a leitura da página 124, do capítulo 4, que apresenta texto e fotografias sobre o povo Baniwa e seu artesanato, e da página 135, do capítulo 4, que apresenta texto e fotografias da cerâmica marajoara, os estudantes poderão utilizar a linguagem artística em diferentes contextos, valorizando-a como fenômeno social, cultural, histórico e sensível aos contextos de uso. A seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, favorece o desenvolvimento dessa competência, ao propor a apreciação e a análise de obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira e, em seguida, a criação de obras de arte inspirada nessas culturas, culminando com uma exposição das obras criadas para a comunidade escolar.
Habilidade EM13LGG601: *Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica*. Essa habilidade é favorecida em vários momentos ao longo do capítulo 4, como na abertura do capítulo, nas páginas 110 e 111, que aborda as transformações geométricas em diferentes contextos, na situação inicial apresentada no tópico *Reflexão em relação a um ponto*, na página 119, que apresenta a reprodução da obra de Rza Abbasi, bem como nas páginas 118 e 122 e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 146 e 147, que aborda a obra de M. C. Escher. Em todos esses momentos, e também na seção *Pesquisa e ação*, nas páginas 150 a 152, os estudantes poderão desenvolver sua visão crítica e histórica, apropriando-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade.
Habilidade EM13LGG602: *Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade*. Essa habilidade é favorecida em vários momentos ao longo do capítulo 4, como na abertura do capítulo, nas páginas 110 e 111, que aborda as transformações geométricas em diferentes contextos, na situação inicial apresentada no tópico *Reflexão em relação a um ponto*, na página 119, que apresenta a reprodução da obra de Rza Abbasi, bem como nas páginas 118 e 122 e na seção *Compreensão de texto*, nas páginas 146 e 147, que aborda a obra de M. C. Escher.
Habilidade EM13LGG704: *Apropriar-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede*. As pesquisas propostas nos boxes *Explore*, na página 124, sobre a arte indígena Baniwa, e na página 135, no capítulo 4, sobre a cerâmica marajoara, favorecem o desenvolvimento dessa habilidade, pois os estudantes poderão apropriar-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.

MODERNA

Sugestões de ampliação

Capítulo 1 – Matrizes e determinantes

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **1**, **8** e **9**, das competências específicas **1** e **3** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e das habilidades específicas **EM13CHS103**, **EM13CHS106**, **EM13CHS402** e **EM13CHS502**.

A abertura do capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, cujo objetivo é pesquisar sobre a trajetória do futebol feminino no Brasil, abordando temas como a desigualdade salarial decorrente de gênero, o preconceito sofrido pelas mulheres futebolistas, os obstáculos para o crescimento do esporte feminino no país e as mudanças pelas quais a modalidade passou nas últimas décadas.

Proibido por lei de 1941 a 1979, o futebol feminino enfrentou uma série de obstáculos no Brasil. Laudos médicos e artigos jornalísticos defendiam a ideia de que o futebol era um esporte incompatível com o corpo e o papel social das mulheres, podendo prejudicar a saúde feminina e até mesmo a capacidade reprodutiva, inviabilizando a maternidade. Esperava-se da mulher uma série de atributos como beleza, cuidado da família e delicadeza, tidos como opostos ao futebol. Mesmo após a revogação da lei, o esporte teve dificuldades sérias para se desenvolver por conta da falta de estrutura para treinamentos e jogos, o baixo número de campeonatos oficiais, a falta de investimentos públicos e privados nos clubes e federações, o preconceito e a falta de reconhecimento por parte da sociedade, entre outros. Em 2019, por ocasião da Copa do Mundo Feminina disputada na França, houve maior interesse pelo futebol feminino, e as transmissões em canais de televisão tiveram mais de 1 bilhão de espectadores ao redor do mundo. As emissoras brasileiras transmitiram, além da Copa do Mundo, as partidas finais de campeonatos de clubes nacionais e internacionais, registrando boas audiências.

A estratégia inicial da atividade envolve conhecer de forma mais aprofundada os primeiros momentos do futebol feminino no Brasil, explicando brevemente aos alunos o histórico da modalidade e de sua proibição através da análise de documentos, como o Decreto-Lei nº 3.199 de 1941, disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-3199-14-abril-1941-413238-publicacaooriginal-1-pe.html> (Acesso em: 30 jul. 2020.); e trechos da carta do Sr. José Fuzeira, defensor da proibição do futebol feminino em 1940, disponível em: <http://contraataque.museudofutebol.org.br/as-cartas/> (Acesso em: 30 jul. 2020.). Apresente os documentos aos alunos e questione o que entenderam dos textos e qual era o ideal de "feminilidade" e de "natureza feminina" defendidas por seus autores, estimulando um debate direcionado com a turma.

Após o debate sobre a proibição do futebol feminino e os argumentos contrários à prática de determinados esportes por mulheres no passado, divida a turma em grupos de 5 ou 6 alunos, buscando equilibrar a quantidade de meninos e meninas. A proposta é que ocorra uma subdivisão do grupo, com um trio pesquisando, como tarefa de casa, sobre os obstáculos que ainda dificultam o crescimento do futebol feminino no Brasil e o que permanece inalterado na trajetória da modalidade, enquanto o outro trio (ou dupla) pesquisará sobre os obstáculos já vencidos pelo futebol feminino no país e as principais mudanças que beneficiaram o esporte nos últimos anos.

Na aula seguinte, reserve o início da aula para que os alunos troquem informações sobre a pesquisa com o grupo inteiro, e para que elejam um relator, que deverá sintetizar a discussão e registrar os principais pontos levantados pelos dois subgrupos. Para a sistematização da discussão, solicite ao relator de cada grupo, que escreva as respostas para as seguintes questões: Quais são os obstáculos não vencidos pelo futebol feminino? Quais são os obstáculos já vencidos pela modalidade no Brasil? Para essa dinâmica, pode ser usado um recurso digital para criar as interações em tempo real. A opção de questionário *open-ended*, no aplicativo *Mentimeter*, disponível gratuitamente na internet em sua versão básica, permite aos estudantes que postem suas respostas na ferramenta *on-line*, como um quadro-síntese que reunirá o resultado de todas as pesquisas da sala. Projete as respostas para a turma e organize um debate ressaltando os aspectos comuns e diferentes entre as respostas de cada grupo, tornando mais rica a análise dos avanços, retrocessos e permanências do futebol feminino no Brasil.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Linha do tempo do futebol feminino**
  <https://gente.globo.com/linha-do-tempo-do-futebol-feminino/>
- **Marta chama atenção para a desigualdade salarial entre homens e mulheres no esporte**
  <https://brasil.un.org/pt-br/83575-marta-chama-atencao-para-desigualdade-salarial-entre-homens-e-mulheres-no-esporte>
- ***Mentimeter***
  <https://www.mentimeter.com>
- **Uma breve explicação sobre o *Mentimeter***
  <https://www.youtube.com/watch?v=ILXwkxby1Pk>

  (Acessos em: 30 jul. 2020.)

MODERNA

Capítulo 2 – Sistemas lineares

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **4** e **8**, da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT207** e **EM13CNT303**.

A seção *Compreensão de Texto*, permite um trabalho interdisciplinar com Ciências da Natureza e suas Tecnologias, cujo objetivo é promover uma autorreflexão em relação a própria alimentação e, concomitantemente, apresentar os principais grupos alimentares e a ideal distribuição desses nas refeições. Inicie a atividade solicitando a leitura e análise das reportagens indicadas a seguir.

Indicação 1: Arroz e feijão: amor eterno do brasileiro

Disponível em: <https://alimentacaoemfoco.org.br/arroz-e-feijao/>. Acesso em: 30 jul. 2020.

Indicação 2: Brasileiros estão comendo mais fora de casa e consumindo mais alimentos prontos, diz IBGE.

Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/noticia/2019/10/04/brasileiros-estao-comendo-mais-fora-de-casa-e-consumindo-mais-alimentos-prontos-diz-ibge.ghtml>. Acesso em: 30 jul. 2020.

Indicação 3: Prato feito brasileiro tem tamanho exagerado e excesso de calorias

Disponível em: <https://g1.globo.com/bemestar/noticia/2019/01/11/prato-feito-brasileiro-tem-tamanho-exagerado-e-excesso-de-calorias.ghtml>. Acesso em: 30 jul. 2020.

Em seguida, oriente a elaboração, em grupo, de um mapa conceitual (manual ou digital) resumindo e relacionando as informações obtidas a partir da leitura. É importante discutir com a turma o que é um mapa conceitual e seus objetivos. A ideia do mapa é que ele possa resumir e ressaltar informações importantes de um determinando assunto, utilizando recursos gráficos. Se achar oportuno apresente a eles o vídeo indicado ao final dessa sugestão de ampliação sobre como elaborar um mapa conceitual.

Durante a mediação e discussão dos mapas conceituais ressalte, especialmente, os grupos alimentares aos quais pertencem o feijão e o arroz, e a mudança que ocorreu no hábito alimentar dos brasileiros. Os grupos poderão adicionar ou alterar o seu mapa após essa conversa. Após a elaboração do mapa, peça a cada grupo que apresente as informações do mapa elaborado promovendo uma discussão sobre os assuntos abordados nos textos indicados.

Para complementar a atividade, solicite aos alunos que registrem todos os alimentos que foram consumidos em um dia e calculem o total de calorias, utilizando um *site* ou aplicativo de celular, indicando também atividades físicas, caso eles tenham feito. É importante que esse momento seja individual e que cada estudante não exponha as suas informações pessoais caso não se sinta à vontade.

Com essas informações, converse sobre as necessidades diárias para a faixa etária, sobre a importância de uma alimentação saudável e variada e sobre a ingestão de água. Apresente a configuração da nova pirâmide alimentar, disponível em: <http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/eja/recurso-multimidia-professor/educacao-fisica/novaeja/m1u03/5-a_nova_piramide_alimentar.pdf> (Acesso em: 30 jul. 2020.), discutindo os grupos alimentares. Se possível, forneça uma imagem da pirâmide impressa para cada aluno e peça a eles que, a partir do registro anterior, marquem os alimentos que foram consumidos. Dessa forma, os estudantes terão uma visão geral de quais "andares" da pirâmide estão em falta ou excesso. O professor deverá discutir e demonstrar como os alimentos se distribuem na pirâmide e como as refeições devem ser montadas ao longo do dia. É imprescindível comentar sobre a importância de realizar exercícios físicos e da ingestão de água nessa nova pirâmide.

Sugestões de materiais de pesquisa:

- **Educação em Revista**
  Mapas Conceituais: Estratégia de ensino/aprendizagem e ferramenta avaliativa. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/edur/v26n3/v26n3a10.pdf>.
- **Importância de uma alimentação saudável**
  <https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/alimentacao_saudavel.pdf>.
- **Como fazer um mapa mental/Técnica de estudo**
  <https://www.youtube.com/watch?v=8Fgexqy5c9E>.
- **Crie seu mapa conceitual com o Canva**
  <https://www.canva.com/pt_br/graficos/mapa-conceitual/>.
  (Acessos em: 30 jul. 2020.)

Capítulo 3 – Geometria analítica

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2** e **5**, da competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das habilidades **EM13CNT302**, **EM13CNT303** e **EM13CNT308**.

O texto de introdução do tópico "Circunferência", permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Nessa atividade, tem-se como objetivo central apresentar aos alunos textos científicos de forma a trabalhar esse tipo de leitura e compreensão de texto. A atividade será dividida em três partes: a primeira está atrelada com um primeiro contato com o texto científico selecionado, envolvendo a leitura coletiva; a segunda parte está relacionada com a leitura de outro texto científico, mas em grupos menores; e a terceira parte envolve a exposição dos conceitos estudados.

Parte I

Leia com os alunos parte do artigo publicado na revista *Pesquisa Fapesp*, em julho de 2018: Salto para um brilho maior <https://issuu.com/pesquisafapesp/docs/269_completo> (Acesso em: 14 ago. 2020.), nas páginas 18 a 23,

MODERNA

que fala sobre o acelerador de partículas Sirius. Como sugestão, disponha as carteiras da sala em formato circular de maneira que todos se vejam e faça a leitura de forma coletiva, permitindo comentários e dúvidas a respeito do texto, principalmente de termos científicos. Quando houver termos desconhecidos, sugira que os alunos grifem esses termos, pesquisem-nos e anotem o seu significado; essa ação é importante para que os alunos criem repertório de sinônimos e consigam compreender melhor o texto em questão, bem como os próximos que serão utilizados.

Parte II

Nessa parte da atividade, separe os alunos em 3 grupos; cada grupo receberá um texto complementar sobre o assunto trabalhado na parte anterior. Caso considere relevante explorar outros tópicos relacionados ao acelerador amplie o número de grupos. O professor pode decidir se cada grupo fará a leitura de um único texto ou se os textos serão diferentes para cada grupo. Para escolha do texto, ao final dessa atividade há algumas sugestões. Em ambos os casos, as sugestões de leitura são órgãos responsáveis pelo projeto, o que garante que os textos cumpram com o caráter científico, obedecendo ao objetivo central desta atividade.

Uma vez separados os grupos, bem como as funções de cada, os alunos irão fazer as leituras dos textos e compartilhar com seus grupos as informações relevantes, bem como suas dúvidas de interpretação. Caso não consigam solucionar as dúvidas, os alunos precisam procurar o professor responsável. Lembre-se de que as regras sobre como as apresentações deverão acontecer precisam ser ditas aos alunos antes de iniciarem seus trabalhos de pesquisa. Defina o tempo de apresentação, tempo para dúvidas, ordem das apresentações, se todos os alunos precisarão falar ou somente um, enfim, informações que moldarão as apresentações segundo os critérios considerados importantes pelo professor. Como sugestão a sala foi dividida em 3 grupos, que irão abordar assuntos como:

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Tema	**Sirius e outros laboratórios pelo mundo**	**Funcionamento do Sirius**	**Pesquisas, pessoas e financiamentos**
Questões orientadoras	1. Quais instituições de pesquisa conseguiram desenvolver seus próprios laboratórios de Luz Síncroton? 2. Onde estão localizados esses laboratórios? 3. Realize um comparativo das dimensões e das energias entre os laboratórios. 4. Quais os valores da construção do Sirius? 5. Qual foi o tempo de construção?	1. Como é o funcionamento de um acelerador de partículas? 2. Qual é a função de um acelerador de partículas? 3. O Sirius tem a mesma função que o LHC?	1. Quem são os cientistas que trabalham no Sirius (perfil profissional)? 2. Quais pesquisas estão acontecendo neste momento dentro do Sirius? 3. Existe financiamento para essas pesquisas? Se sim, quem as financia?

A duração dessa parte pode ser de 2 a 3 aulas, tempo suficiente para que os alunos leiam os textos, tirem suas dúvidas e pesquisem sobre os tópicos relativos a cada tema. Sugere-se que os alunos dos grupos recebam algumas funções, por exemplo:

– Porta-voz: responsável por receber instruções do professor e transmitir aos outros componentes do grupo.

– *Designer*: responsável pelo desenvolvimento do *layout* da apresentação dos resultados pesquisados.

– Administrador: responsável por gerir a equipe, bem como encabeçar o planejamento das ações individuais.

– Pesquisador: responsável pela organização dos dados pesquisados, bem como da organização da sequência a ser utilizada na apresentação final.

Parte III

Nessa fase os alunos deverão realizar as apresentações do que foi pesquisado. Ao final de cada apresentação, o professor poderá fazer algumas perguntas com o intuito de verificar se o grupo realmente compreendeu o que foi apresentado. Incentive os alunos a utilizar diferentes tipos de recursos tecnológicos para essa apresentação de forma a torná-la mais atrativa e interessante aos demais da turma.

Não se esqueça de finalizar o projeto apresentando os conteúdos que os alunos trabalharam, bem como as habilidades desenvolvidas nesse processo. Explique aos alunos que a leitura de textos científicos tem uma dificuldade maior do que a leitura de outros textos, porém, a partir desse momento, eles já sabem como proceder para ler um artigo científico.

Sugestões de materiais de pesquisa

- **Revista *Pesquisa Fapesp*: Salto para um brilho maior: páginas 18 a 25** — julho de 2018
  <https://issuu.com/pesquisafapesp/docs/269_completo>.
- **Sirius — Acelerando o futuro da Ciência 2 CNPEM (Conselho Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais)** — novembro de 2018
  <https://issuu.com/cnpem/docs/livro_sirius_2018ok>.
- **Revista *Pesquisa Fapesp***: **páginas 56 e 57** — janeiro de 2020
  <https://issuu.com/pesquisafapesp/docs/pesquisa_287_completo>.
- Projeto Sirius: **A nova fonte de luz síncroton brasileira – CNPEM (Conselho Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais)** — julho de 2018
  <https://issuu.com/cnpem/docs/projeto_sirius>.
- **Revista *Mundo MCTIC* — Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovação e Comunicações – página 40** — janeiro de 2020
  <https://issuu.com/mctic/docs/revista_mundomctic_2edicao>.
- **Revista Por dentro do CNPEM — Versão digital**
  <https://cnpem.br/por-dentro-do-cnpem/>.
- **Página do LNLS (Laboratório Nacional de Luz Síncrotron)**
  <https://www.lnls.cnpem.br/>.
  (Acessos em: 30 jul. 2020.)

MODERNA

Essa atividade permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5** e **7**, das competências específicas **1**, **2** e **7** de Linguagens e suas Tecnologias e das habilidades **EM13LGG101**, **EM13LGG103**, **EM13LGG104**, **EM13LGG105**, **EM13LGG701**, **EM13LGG703** e **EM13LGG704**.

A atividade 7 da seção *Compreensão de texto*, permite um trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Antes de iniciar a atividade 7, divida os alunos em grupos para que eles pesquisem os aspectos negativos e positivos da expansão do GPS, levando em consideração temáticas como mobilidade, segurança e privacidade que os alunos desenvolvam uma reportagem para ser apresentada no formato de *podcast*.

O gênero reportagem é adequado a essa proposta por permitir a transmissão de informações, com aprofundamento, o que promoveria a possibilidade de evidenciar os aspectos positivos e negativos sobre o tema. Apresente aos alunos o gênero, definindo as suas principais características:

– **Linguagem**: formal;

– **Estrutura dos gêneros da esfera jornalística**: Composição — Lide (um parágrafo com as principais informações do tema, respondendo às perguntas: O que? Quem? Quando? Onde? Como? Por quê?).

Corpo do texto — Explorar motivações, impactos (ou seja, detalhamento do como e do porquê).

No caso da reportagem, o corpo do texto pode ser composto de infográficos, entrevistas, pesquisas com dados estatísticos, entre outros dados.

Dada a situação de comunicação proposta, os alunos irão produzir um texto escrito nesse formato, mas que, depois, será transformado em um outro gênero — roteiro e, por fim, será gravado para se tornar um *podcast*; portanto, alguns recursos como infográficos não poderão ser utilizados.

Para o detalhamento do assunto, a proposta pode receber a contribuição do professor de Geografia, que poderá passar aos alunos as indicações para a pesquisa sobre o tema, principalmente no que diz respeito aos itens: mobilidade e segurança. Além disso, ele também poderá ser o entrevistado da reportagem ou indicar autoridades sobre o assunto para as entrevistas.

Quanto à produção de um *podcast*, é imprescindível que os alunos tenham um modelo como parâmetro, a fim de tornarem sua produção mais interessante. Portanto, separe um tempo de aula para a apresentação e apreciação de *podcasts*. É mais confiável transmitir de grandes veículos da comunicação, como o *podcast* "Café da Manhã", do jornal *Folha de S.Paulo*. Destacar elementos de composição do material, como a linguagem, a clareza comunicativa dos enunciadores, os recursos, como trilha ou efeitos sonoros.

Depois de feitas essas observações, o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias poderá ainda sugerir conteúdos mais atrativos a serem inseridos no trabalho dos alunos. A exemplo disso, há a possibilidade de resenhar, ou resumir, e comentar sobre filmes que apresentam o GPS como uma ameaça à segurança da população ou um recurso que a beneficie.

Os filmes *Inimigo do Estado* (1998) e *Exterminador do futuro:* destino sombrio (2019) trazem a ideia do uso da tecnologia do GPS para rastrear pessoas, já o filme *Lion:* uma jornada para a casa (2017) narra a história de um indiano que reencontrou sua família biológica utilizando o *Google Earth*. Ao apresentar as sinopses desses filmes à turma, instigue a memória dos alunos para que, munidos de outros exemplos, consigam ampliar o conteúdo da reportagem.

Uma divisão interessante para o trabalho seria cada grupo escolher um aspecto do tema (mobilidade, segurança, privacidade), explorando no conteúdo: definição, dados, entrevista e uma curiosidade (como filme), ficando cada parte sob a responsabilidade de um integrante do grupo.

Com o conteúdo pronto, revise as reportagens e dê andamento à elaboração do roteiro para *podcast*. O gênero **roteiro** tem em sua composição a seguinte divisão: falas dos interlocutores e rubricas. Estas consistem na descrição, separada do texto das falas, geralmente apresentadas entre parênteses ou com o recurso do itálico, de outros elementos que deverão ser considerados durante a gravação e edição do material em áudio, como a inserção de trilhas, efeitos sonoros e pausas, a entonação do interlocutor, entre outros.

Esse gênero faz parte do campo artístico-literário, no que se refere aos três grandes gêneros literários (épico, lírico e dramático); o gênero **dramático** é o introdutor do formato roteiro.

Se a escola dispuser de um laboratório de comunicação, a gravação poderá ser feita nesse ambiente, depois que os alunos definirem quem será o âncora (apresentador) do *podcast* e quem fará a entrevista. Quanto à entrevista, eles poderão escolher entre inserir o áudio original ou resumir as falas do entrevistado e escrever um texto sobre elas, para que o próprio âncora o apresente. Tendo o laboratório para isso, o professor responsável dará auxílio na gravação e edição do produto. Caso a escola não disponha desse espaço, é possível gravar com aparelhos celulares, usando fones para melhor captação do áudio. Também podem ser utilizados os próprios aplicativos de edição desses aparelhos.

Para facilitar o trabalho com os gêneros distintos **reportagem, entrevista e roteiro**, segue uma sugestão de livro que apresenta a definição de diversos gêneros textuais:

– *Dicionário dos gêneros textuais*. Sérgio Roberto da Costa. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Textos sobre os filmes sugeridos podem ser encontrados em:

– *Inimigo do Estado*:

<https://administradores.com.br/artigos/gps-e-invasao-de-privacidade>

– *Exterminador do futuro*: destino sombrio:

<https://canaltech.com.br/entretenimento/critica-o-exterminador-do-futuro-destino-sombrio-conquista-so-pela-nostalgia-154195/>

– *Lion:* uma jornada para casa:

<https://revistagalileu.globo.com/Cultura/noticia/2017/02/filme-narra-vida-de-indiano-que-reencontrou-familia-usando-google-earth.html>

(Acessos em: 30 jul. 2020.)

MODERNA

Sugestões de avaliação

Capítulo 1 – Matrizes e determinantes

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar e classificar uma matriz.	1 e 2
Operar com matrizes.	3, 4, 5 e 6
Calcular o determinante de uma matriz quadrada.	7, 8, 9 e 10

Q1– (Enem) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados. O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

a) segunda-feira.
b) terça-feira.
c) quarta-feira.
d) quinta-feira.
e) sexta-feira.

Q2– Escreva a Matriz B, conforme a lei de formação:

$B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \neq j \\ i^2 - j, \text{ se } i = j \end{cases}$

Q3– (UP Medicina) No modelo de Gell-Mann, para efetuar interações nucleares fortes na física de partículas, é necessário efetuar operações com as matrizes.

$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $Q_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

A expressão Q_1Q_2 é igual a:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,Q_1$
b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,Q_2$
c) $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,Q_1$
d) Q_1
e) $-Q_2$

Q4– Sendo $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, determine as matrizes X e Y, tais que:

$$\begin{cases} 3X - Y = M + 3N \\ X + Y = 3M - N \end{cases}$$

Q5– (Unicamp) Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) -2
b) -1
c) 1
d) 2

Q6– Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, determine a matriz X.

a) $M \cdot X = I_2$
b) $M \cdot X = M$

Q7– (Unisc) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz $A \cdot B$ é

a) 4 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 12 **e)** 27

Q8– Calcule pela regra de Sarrus o valor de cada determinante.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 \end{vmatrix}$

Q9– (Eear) Para que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ seja 3, o valor de b deve ser igual a

a) 2 **b)** 0 **c)** -1 **d)** -2

Q10– (Unicamp) Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

a) 0 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 10

Resoluções da avaliação 1

Q1– Sendo os elementos das linhas de 1 a 5 as quantidades de questões acertadas por Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, e as colunas de 1 a 5 indicando os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, temos:

I) Quantidade de acertos na segunda-feira: $3 + 3 + 2 + 3 + 0 = 11$

II) Quantidade de acertos na terça-feira: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$

III) Quantidade de acertos na quarta-feira: $0 + 4 + 2 + 4 + 0 = 10$

IV) Quantidade de acertos na quinta-feira: $1 + 1 + 3 + 1 + 4 = 10$

V) Quantidade de acertos na sexta-feira: $2 + 2 + 2 + 0 + 4 = 10$

Logo, o teste com maior quantidade de acertos foi aplicado na segunda-feira.

alternativa a

MODERNA

Q2– $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, obtemos:

$b_{11} = 1^2 - 1 = 0$	$b_{12} = 1 + 2 = 3$
$b_{13} = 1 + 3 = 4$	$b_{14} = 1 + 4 = 5$
$b_{21} = 2 + 1 = 3$	$b_{22} = 2^2 - 2 = 2$
$b_{23} = 2 + 3 = 5$	$b_{24} = 2 + 4 = 6$
$b_{31} = 3 + 1 = 4$	$b_{32} = 3 + 2 = 5$
$b_{33} = 3^2 - 3 = 6$	$b_{34} = 3 + 4 = 7$
$b_{41} = 4 + 1 = 5$	$b_{42} = 4 + 2 = 6$
$b_{43} = 4 + 3 = 7$	$b_{44} = 4^2 - 4 = 12$

Portanto: $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

Q3– $Q_1Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Assim, $Q_1Q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\, Q_1$

alternativa a

Q4– $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3X - Y = M + 3N \\ X + Y = 3M - N \end{cases}$$

$4X = 4M + 2N$

$X = \dfrac{4M + 2N}{4} \Rightarrow X = M + \dfrac{1}{2}N$

$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$X + Y = 3M - N \Rightarrow Y = 3M - N - X$

$Y = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ -1 & -\frac{27}{2} \end{pmatrix}$

Q5– Dos dados do enunciado, temos:

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$aA + bI = a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b & 2a \\ 0 & a + b \end{bmatrix}$

Como $A^2 = aA + bI$, então:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a = 4 \end{cases}$$

Portanto, $a = 2$ e $b = -1$ e $a \cdot b = -2$.

alternativa a

Q6– a) $M \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2a + c & -2b + d \\ a - 2c & b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes, temos os sistemas:

(I) $\begin{cases} -2a + c = 1 \\ a - 2c = 0 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} -2b + d = 0 \\ b - 2d = 1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, temos:

(I) $a = -\dfrac{2}{3}$ e $c = -\dfrac{1}{3}$

(II) $b = -\dfrac{1}{3}$ e $d = -\dfrac{2}{3}$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) $M \cdot X = M \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Da igualdade, temos os sistemas:

(I) $\begin{cases} -2a + c = -2 \\ a - 2c = 1 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} -2b + d = 1 \\ b - 2d = -2 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, temos:

(I) $a = 1$ e $c = 0$

(II) $b = 0$ e $d = 1$

Logo: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q7– $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) \cdot$
$\cdot (-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = 4$

alternativa a

Q8– a)

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \end{array}$$

$-3 \quad 8 \quad 0 \qquad 3 \quad 12 \quad 0$

$(3 + 12) - (-3 + 8) = 10$

b)

$$\begin{array}{|ccc|cc} 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 10 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 11 & 5 & 8 \end{array}$$

$315 \quad 240 \quad 264 \qquad 231 \quad 300 \quad 288$

$(231 + 300 + 288) - (315 + 240 + 264) = 0$

Q9– $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow 0 - b + 2 - 0 - 2b + 1 = 3 \Rightarrow b = 0$

alternativa b

Q10– Temos: $\begin{cases} 1 + a + 1 = b + 1 + a \\ b + 1 + a = 2 + a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 3 \end{cases}$

Logo, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 18 + 1 - 2 - 3 - 6 = 10$

alternativa d

MODERNA

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Identificar e classificar uma matriz.	1 e 2
Operar com matrizes.	3, 4, 5 e 6
Calcular o determinante de uma matriz quadrada.	7, 8, 9 e 10

Q1– Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, na qual:

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j, \text{ se } i \leqslant j \\ i \cdot j, \text{ se } i > j \end{cases}$$

Determine o elemento que pertence à 2ª linha e à 3ª coluna e o elemento que pertence à 3ª linha e à 2ª coluna da matriz A.

Q2– Determine os valores de a e b de forma que as matrizes A e B sejam iguais.

$$A = \begin{pmatrix} a - b & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2a + b \end{pmatrix}$$

Q3– (FGV) Uma fábrica decide distribuir os excedentes de três produtos alimentícios A, B e C a dois países da América Central, P_1 e P_2. As quantidades, em toneladas, são descritas mediante a matriz Q:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow P_1 \\ \leftarrow P_2 \end{array}$$

Para o transporte aos países de destino, a fábrica recebeu orçamentos de duas empresas, em reais por toneladas, como indica a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1^{\text{a}} \text{ empresa} \\ \leftarrow 2^{\text{a}} \text{ empresa} \end{array}$$

a) Efetue o produto das duas matrizes, na ordem que for possível. Que elemento da matriz produto indica o custo de transportar o produto A, com a segunda empresa, aos dois países?

b) Para transportar os três produtos aos dois países, qual empresa deveria ser escolhida, considerando que as duas apresentam exatamente as mesmas condições técnicas? Por quê?

Q4– Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

determine: $(A + B) - (A + C)$

Q5– (Unicamp) Sendo a um número real, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então A^{2017} é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Q6– (Enem) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Q7– (Famerp) No estudo de dinâmica de populações é comum ser necessário determinar o número real λ na equação $\det(M - \lambda I) = 0$, em que M é a matriz quadrada, I é a matriz identidade, da mesma ordem de M, e det representa o determinante da matriz $(M - \lambda I)$.

Se, em um desses estudos, tem-se $M = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, o valor positivo de λ é igual a

a) 5
b) 8
c) 9
d) 12
e) 6

Q8– (Uerj) Observe a matriz: $\begin{bmatrix} 3 + t & -4 \\ 3 & t - 4 \end{bmatrix}$. Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

Q9– (IME) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a - 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(A^2 - 2A + I) = 16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Q10– (UEA) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 3x & x \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e sendo $\det A = 6$, a soma dos elementos da primeira linha com a soma dos elementos da primeira coluna da matriz A é igual a

a) 21
b) 17
c) 23
d) 15
e) 13

MODERNA

Resoluções da avaliação 2

Q1– Aplicando a lei de formação, obtemos:

$a_{23} = 2 - 3 = -1$

$a_{32} = 3 \cdot 2 = 6$

Q2– Para que as matrizes sejam iguais, devemos ter:

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 4$ e $b = 0$.

Q3– a) $P \cdot Q = \begin{bmatrix} 500 & 300 \\ 400 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 & 100 & 150 \\ 100 & 150 & 200 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 130.000 & 95.000 & 135.000 \\ 100.000 & 70.000 & 100.000 \end{bmatrix}$$

O elemento que indica o custo é o da segunda linha e primeira coluna, $PQ_{21} = C_{P1} + C_{P2} = 80.000 + 20.000 = 100.000$ (são 80.000 reais para o país P_1 e 20.000 reais para o país P_2).

b) A empresa 2 tem custo menor:

Empresa 1: $130.000 + 95.000 + 135.000 = 360.000$

Empresa 2: $100.000 + 70.000 + 100.000 = 270.000$

Q4– $(A + B) - (A + C) = A + B - A - C = B - C$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Q5– $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^{2017} = A^{2016} \cdot A = (A^2)^{1.008} \cdot A = I^{1.008} \cdot A = I \cdot A = A$

alternativa b

Q6– Ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela pela matriz da alternativa e, já que para determinar a média ele irá somar todas as notas de cada disciplina e dividir por 4, uma vez que tem pesos iguais.

$$\begin{pmatrix} 5,9 & 6,2 & 4,5 & 5,5 \\ 6,6 & 7,1 & 6,5 & 8,4 \\ 8,6 & 6,8 & 7,8 & 9,0 \\ 6,2 & 5,6 & 6,9 & 7,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5,9+6,2+4,5+5,5}{4} \\ \frac{6,6+7,1+6,5+8,4}{4} \\ \frac{8,6+6,8+7,8+9}{4} \\ \frac{6,2+5,6+5,9+7,7}{4} \end{pmatrix}$$

alternativa e

Q7– $M - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 17 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$

$$\det(M - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 17 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 36) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = -6$ ou $\lambda = 6$

Portanto, o valor positivo de λ é igual a 6.

alternativa e

Q8– $\begin{vmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (t+3)(t-4) + 12 = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 1$

Portanto, $t = 1$.

alternativa a

Q9– $\det(A^2 - 2A + I) = 16$

$\det(A^2 - 2A + I) = \det(A - I)^2$

$$\det(A - I)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} \det(A - I) = 4 \\ \det(A - I) = -4 \end{cases}$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A - I) = 8a - 12 \Rightarrow a = 2$ ou $a = 1$ e $2 + 1 = 3$

alternativa d

Q10– $\det A = 6 \Rightarrow (x + 6x + 9x) - (2x + 3x + 9x) = 6 \Rightarrow x = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1ª linha: $3 + 9 + 3 = 15$

1ª coluna: $3 + 3 + 2 = 8$

$15 + 8 = 23$

alternativa c

Capítulo 2 – Sistemas lineares

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.	1, 2, 3, 4 e 5
Reconhecer e classificar sistemas lineares.	6 e 7
Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.	8
Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.	9 e 10

Q1– Para que valores de m e n os sistemas (I) e (II) têm a mesma solução?

(I) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 2x - y = m \\ 3x + 2y = n \end{cases}$

Q2– (Enem) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos. Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

Q3– (Fuvest) Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

a) 26 **b)** 38 **c)** 42 **d)** 62 **e)** 68

MODERNA

Q4– (FGV) Rita compra bijuterias para revender. Em julho, ela comprou 3 pulseiras iguais e 10 colares iguais, pagando, no total, R$ 87,00. Em agosto, ela comprou 10 das mesmas pulseiras, com desconto de 10%, e 25 dos mesmos colares, com acréscimo de 10%, gastando, nessa compra, R$ 243,00. Em julho, o preço de cada colar superava o preço de cada pulseira em

a) 30% **c)** 36% **e)** 44%
b) 32% **d)** 40%

Q5– (Unioeste) José precisa pesar três peças de metal A, B e C. Mas a balança que ele dispõe não é precisa para pesos menores do que 1 kg. José decide então pesar as peças de duas em duas. A e B juntas pesam 1.600 g, B e C juntas pesam 1.400 g e A e C juntas pesam 1.700 g.
Nessas condições, qual o peso da peça mais leve?

a) 550 g **c)** 700 g **e)** 1.400 g
b) 650 g **d)** 950 g

Q6– (Unit-AL Medicina) Considere o sistema linear a seguir

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ -x + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Com base nesse sistema, pode-se afirmar:

a) O sistema é impossível, não apresentando solução.
b) O sistema é possível e determinado, apresentando solução única.
c) O sistema é possível e indeterminado, apresentando solução única.
d) O sistema é possível e determinado, apresentando infinitas soluções.
e) O sistema é possível e indeterminado, apresentando infinitas soluções.

Q7– Classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 14 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ x - y = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$

Q8– Observe a representação matricial de um sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determine o valor de $x + y - z$.

a) 6 **b)** 2 **c)** 0 **d)** -2 **e)** -6

Q9– Escalone, resolva os sistemas e classifique-os.

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + 5y - 3z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Q10– (UEPG) Uma empresa vai distribuir a quantia de R$ 6.100,00 de gratificação para seus 30 funcionários. Cada funcionário de nível A vai receber R$ 300,00; de nível B, R$ 250,00 e de nível C, R$ 100,00. Sabendo que os funcionários de nível A receberam, no total, o dobro dos do nível C, assinale o que for correto.

01) O número de funcionários de nível C é maior que 10.
02) Os funcionários de nível A receberam, no total, R$ 2.400,00.
04) Os funcionários de nível B receberam, no total, R$ 3.000,00.
08) O número de funcionários de nível A é 10.

Resoluções da avaliação 1

Q1– Aplicando o método da adição para resolver (I), temos:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 12x - 4y = 36 \end{cases} \Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3$$

Substituindo x por 3 em $3x - y = 9$, obtemos:
$3 \cdot 3 - y = 9 \Rightarrow y = 0$
Portanto, $S = \{(3, 0)\}$.
Substituindo x por 3 e y por 0 em (II), obtemos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 0 = m \Rightarrow m = 6 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = n \Rightarrow n = 9 \end{cases}$$

Portanto, $m = 6$ e $n = 9$.

Q2– Seja Z o tempo em que a luz vermelha fica acesa. Logo, temos:

$X = \dfrac{2Z}{3} \Rightarrow Z = \dfrac{3X}{2}$ e, portanto, $Y = 5 + X + Z \Rightarrow$

$\Rightarrow Y = 5 + X + \dfrac{3X}{2} \Rightarrow 5X - 2Y + 10 = 0$

alternativa b

Q3– Sejam l, p e r, o número de passagens vendidas para Lisboa, Paris e Roma, respectivamente. Logo:

$$\begin{cases} p = 2(l + r) \\ r = \dfrac{l}{2} + 2 \\ l + p + r = 78 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 2(78 - p) \\ 2r - l = 4 \\ l + r = 78 - p \end{cases} \quad \begin{cases} p = 52 \\ r = 10 \\ l = 16 \end{cases}$$

Portanto, as passagens somadas resultam em 62 passagens (52 passagens para Paris e 10 para Roma).
alternativa d

Q4– $\begin{cases} 3x + 10y = 87 \\ 10 \cdot 0{,}9x + 25 \cdot 1{,}1y = 243 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 10y = 87 \\ 9x + 27{,}5y = 243 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ y = 7,2 e x = 5
Para determinar a porcentagem: $\dfrac{y}{x} \cdot 100\% = 144\%$, assim, o valor de um colar supera em 44% o valor de uma pulseira no mês de julho.
alternativa e

Q5– $\begin{cases} A + B = 1.600 \\ B + C = 1.400 \\ A + C = 1.700 \end{cases}$

$A + C = 1.700 \Rightarrow A = 1.700 - C$
$A + B = 1.600 \Rightarrow (1.700 - C) + B = 1.600 \Rightarrow B = -100 + C$
$B + C = 1.700 \Rightarrow (-100 + C) + C = 1.700 \Rightarrow C = 750$
Descoberto o valor de C, basta substituí-lo e temos que:
$A = 950$ e $B = 650$
Portanto, $A = 950$ g, $B = 650$ g e $C = 750$ g, e a peça mais leve é a B.
alternativa b

Q6– $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ -x + 2z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

Da 2ª equação temos: $x = 2z - 4$
Substituindo na 1ª equação, obtemos:
$2z - 4 + y - z = -2 \Rightarrow y = 2 - z$
Agora, substituindo x e y na 3ª equação, encontramos o valor de z:
$2(2z - 4) + (2 - z) - z = 0 \Rightarrow z = 3$

MODERNA

Descoberto o valor de z, descobrimos: que $x = 2$ e $y = -1$
Portanto, o sistema é possível e determinado, apresentando solução única.
alternativa b

Q7– a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases} \Rightarrow y = 4$

Substituindo y por 4 em $x + y = 5$, obtemos:
$x + 4 = 5 \Rightarrow x = 1$
Portanto, o sistema é SPD.

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -12 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 0$

Existem infinitos pares de valores de x e y que satisfazem a equação $0x + 0y = 0$.
Portanto, o sistema é SPI.

c) $\begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 6 \\ -3x + 3y = 27 \end{cases} \Rightarrow 0x + 0y = 33$

Não há nenhum par de valores de x e y que satisfaça a equação $0x + 0y = 33$.
Portanto, o sistema é SI.

Q8– $\begin{cases} x + 4z = -7 \\ x + 3z = -8 \\ y + z = 1 \end{cases}$

Da 3ª equação, temos: $y = 1 - z$ e da 2ª equação, $x = -3 - 5$. Substituindo na 1ª equação, obtemos $z = -2$.
Portanto, $x = 1$ e $y = 3$.
$x + y - z = 1 + 3 - (-2) = 6$
alternativa a

Q9– a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + 5y - 3z = 1 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.
Substituímos a segunda equação pela soma dela com o produto da primeira por 2.
Substituímos a terceira equação pela soma dela com a primeira.

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ y + z = 5 \end{cases}$

Substituímos a terceira equação pela soma dela com o produto da segunda equação por -1.

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ -2z = 4 \end{cases}$

Da terceira equação, obtemos $z = -2$.
Substituindo z por -2 na segunda equação, obtemos $y = 7$. E substituindo y por 7 e z por -2 na primeira equação, obtemos $x = 20$.
Portanto, $S = \{(20, 7, -2)\}$, e o sistema é possível e determinado.

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Dividimos a primeira equação por 2.

$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

Substituímos a segunda equação pela soma dela com o produto da primeira por -4.

Substituímos a terceira equação pela soma dela com o produto da primeira por -3.

$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ -7y - z = -2 \\ -\frac{7}{2}y - \frac{1}{2}z = -4 \end{cases}$

Substituímos a terceira equação pela soma dela com o produto da segunda por $-\frac{1}{2}$.

$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 2 \\ \frac{7}{2}y + \frac{1}{2}z = 1 \\ 0y + 0z = -3 \end{cases}$

Não existem números reais para y e z tal que $0y + 0z = -3$.
Portanto, $S = \{\ \}$, e o sistema é impossível (SI).

Q10– Considerando a, b e c o número de funcionários de nível A, B e C, respectivamente, temos:

$\begin{cases} 300a + 250b + 100c = 6.100 \\ a + b + c = 30 \\ 300\,a = 200\,c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 5b = 122 \\ 5a + 2b = 60 \\ 3a = 2c \end{cases}$

$a = 8$
$b = 10$
$c = 12$
Assim,
01: Verdadeira, pois $c = 12 > 10$;
02: Verdadeira, pois $300a = 300 \cdot 8 = 2.400$;
04: Falsa, pois $250b = 250 \cdot 10 = 2.500$;
08: Falsa, pois $a = 8$.

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.	1, 2, 3, 4 e 5
Reconhecer e classificar sistemas lineares.	6, 7 e 8
Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.	9
Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.	10

Q1– (Enem) O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA), em que $TC = \frac{NV}{NF}$ e $TA = \frac{NA}{NV}$, NV é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, NF é o número de famílias estimadas como público alvo do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria nº 148 de 27 de abril de 2006 (adaptado).

Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando NF o IcadÚnico cairá para 0,5. Se $NA + NV = 3.600$, então NF é igual a

a) 10.000
b) 7.500
c) 5.000
d) 4.500
e) 3.000

MODERNA

Q2– (IFPE) O coordenador do curso de Instrumento Musical do IFPE *campus* Barreiros percebeu que se distribuísse 20 alunos para tocar piano ou violão, ficaria um aluno para cada instrumento; se distribuísse 48 alunos para tocar piano ou violão, ficariam 3 alunos para cada piano e 2 alunos para cada violão. Dessa forma, é CORRETO afirmar que a quantidade de pianos no referido campus do IFPE é igual a

a) 10 **b)** 6 **c)** 8 **d)** 15 **e)** 12

Q3– (Enem) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é:

a) 20 **b)** 30 **c)** 40 **d)** 50 **e)** 60

Q4– Determine o valor de m e n, de modo que

$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + my = n \end{cases}$ tenha solução real.

Q5– (Famema) Em um grupo de 150 estudantes, 25% das mulheres e 50% dos homens falam espanhol. Sabendo que 34% dos estudantes desse grupo falam espanhol, o número de mulheres desse grupo que falam espanhol é

a) 38 **b)** 51 **c)** 45 **d)** 24 **e)** 54

Q6– Determine os valores de a e b, de modo que o sistema a seguir seja homogêneo.

$$\begin{cases} 3x - y = a - 4 \\ 2x - 3y = b^2 - a \end{cases}$$

Q7– (Uece) Os valores de k para os quais $x = y = z = 0$ seja a única solução do sistema

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + 2y + kz = 0 \\ x + 4y + k^2 z = 0 \end{cases}$$

NÃO pertencem ao conjunto

a) $\left\{1, 2, \frac{-1}{2}\right\}$

b) $\left\{-1, -2, \frac{-1}{6}\right\}$

c) $\left\{-1, 3, \frac{-1}{5}\right\}$

d) $\left\{-1, -2, \frac{-1}{4}\right\}$

Q8– (Ita) Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}$$

Q9– Resolva a equação matricial abaixo.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Q10– (UPE) Um PA mais dois PE mais um PI vale 15. Quatro PA mais cinco PE mais sete PI vale 63. Seis PA mais oito PE mais nove PI vale 89. Nessas condições, quanto vale um PA mais um PE mais um PI?

a) 11 **b)** 12 **c)** 15 **d)** 25 **e)** 28

Resoluções da avaliação 2

Q1– $\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV}\right) = 0{,}6 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{NV}{2NF} + \frac{NA}{NV}\right) = 0{,}5 \end{cases}$

$\frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV} - \left(\frac{NV}{2NF} + \frac{NA}{NV}\right) = 1{,}2 - 1 \Rightarrow \frac{NV}{2NF} = 0{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{NV} = 0{,}4\text{NF}$

$\frac{0{,}4NF}{2NF} + \frac{NA}{0{,}4NF} = 1 \Rightarrow NA = 0{,}32\ NF$

Assim, $NA + NV = 3.600 \Rightarrow 0{,}32NF + 0{,}4NF = 3.600 \Rightarrow$

$\Rightarrow NF = 5.000$

alternativa c

Q2– Considerando p o número de pianos e v o número de violões, temos:

$\begin{cases} p + v = 20 \\ 3p + 2v = 48 \end{cases} \Rightarrow 3p + 2(20 - p) = 48 \Rightarrow p = 8$

alternativa c

Q3– Considerando x o número de carros da marca X e y o número de carros da marca Y, temos:

$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = \frac{60}{100} \cdot 150 \end{cases} \Rightarrow 2y + y = 90 \Rightarrow y = 30$

alternativa b

Q4– $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + my = n \end{cases}$

Da primeira equação, temos:

$3x = 7 - 2y \Rightarrow x = \frac{7 - 2y}{3}$

Substituindo o valor de x na segunda equação, temos:

$6 \cdot \frac{(7 - 2y)}{3} + my = n$

$14 - 4y + my = n \Rightarrow (m - 4)y = n - 14$

Para o sistema ter solução real, devemos ter:

$m - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4$

Q5– Considerando h o número de homens e m o número de mulheres, temos:

$\begin{cases} h + m = 150 \\ \frac{h}{2} + \frac{m}{4} = 0{,}34 \cdot 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + m = 150 \\ 2h + m = 204 \end{cases} \Rightarrow h = 54 \text{ e } m = 96$

Portanto, as mulheres que falam espanhol são $0{,}25 \cdot 96 = 24$.

alternativa d

Q6– Como o sistema é homogêneo, temos:

$a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$

$b^2 - a = 0 \Rightarrow b^2 - 4 = 0 \Rightarrow b = \pm 2$

Portanto, $a = 4$ e $b = 2$ ou $a = 4$ e $b = -2$.

Q7– Para que o sistema admita a solução única, temos:

$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2k^3 - 5k^2 + k + 2 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (k - 1)(k - 2)\left(k + \frac{1}{2}\right) \neq 0$

Portanto, os valores de k não pertencem ao conjunto $\left\{1, 2, \frac{-1}{2}\right\}$.

alternativa a

Q8– O sistema será impossível se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2a + 9a + 6 + a^2 = 0$ e $-10 - 3a + 12 + 5a \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -6$

Q9– Escrevendo o sistema correspondente à equação matricial e aplicando o método da adição, temos:

$$\begin{cases} 3a - b = 5 \\ a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a - 2b = 10 \\ a + 2b = 4 \end{cases}$$
$$\overline{7a \qquad = 14 \Rightarrow a = 2}$$

Substituindo em $3a - b = 5$, obtemos:
$3 \cdot 2 - b = 5 \Rightarrow b = 1$.
Portanto, $S = \{(2,\ 1)\}$.

Q10– Chamando PA de x, PE de y e PI de z, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 15 \\ 4x + 5y + 7z = 63 \\ 6x + 8y + 9z = 89 \end{cases}$$

Usando o método de escalonamento, multiplicamos a 1ª equação por -4 e somamos com a 2ª equação obtendo: $-4x - 8y - 4z = -60$. E multiplicamos a 1ª equação por -6 e somamos com 3ª equação, obtendo: $-6x - 12y - 6z = -90$. Assim, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 15 \\ -3y + 3z = 3 \\ -4y + 3z = -1 \end{cases}$$

Subtraindo a 3ª equação da 2ª equação, descobrimos que y vale 4.
Dado $y = 4$, substituímos na 2ª equação e saberemos que o valor de z é 5.
Agora, é só substituir os valores de y e z na 1ª equação e descobrimos que o valor de x é 2.
Assim, $\text{PA} + \text{PE} + \text{PI} = 2 + 4 + 5 = 11$
alternativa a

Capítulo 3 – Geometria analítica

Avaliação 1

Objetivos do capítulo	Questões
Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.	1
Calcular a distância entre dois pontos.	2
Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.	3 e 4
Discutir posição relativa entre: duas retas; ponto e circunferência; reta e circunferência; duas circunferências.	5
Calcular a distância entre ponto e reta.	6 e 7
Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.	8
Calcular a área de um triângulo.	9 e 10

Q1– Um barco está no ponto $A(6,\ 5)$ e avista um farol no ponto $B(2,\ 1)$. Represente, no plano cartesiano, o ponto C que é equidistante de A e de B.

Q2– Considere o trapézio $PQRS$, de vértices $P(0,\ 3)$, $Q(2,\ 3)$, $R(4,\ 1)$ e $S(-1,\ 1)$.
a) Represente esse trapézio no plano cartesiano.
b) Determine o perímetro do trapézio.
c) Qual das diagonais tem maior comprimento?

Q3– (Unioeste) Duas retas $y = ax$ e $y = bx + c$, com a, b e c constantes reais, encontram-se no ponto $(3,\ 2)$. Sabe-se ainda que $b = -3a$. Assim, é CORRETO afirmar que as equações das retas são

a) $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -2x + 8$

b) $y = \frac{3}{2}x$ e $y = -3x + 2$

c) $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -3x + 2$

d) $y = -x$ e $y = 3x - 3$

e) $y = 3x$ e $y = -9x + 2$

Q4– (UEG) Uma circunferência no primeiro quadrante tangencia os eixos coordenados. Sabendo-se que a distância entre o centro $(x_0,\ y_0)$ dessa circunferência e a origem do sistema é $d = 3\sqrt{2}$, então a equação da circunferência é
a) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6x + 6y - 9 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 3x + 3y - 6\sqrt{2} = 0$
d) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 6\sqrt{2} = 0$
e) $x^2 + y^2 - 27 = 0$

Q5– Determine os valores de m e n para que a reta r, de equação geral $x - 2y + 1 = 0$, e a reta s, de equação reduzida $y = mx + n$, sejam perpendiculares, com a reta s passando por $Q(1,\ 5)$.

Q6– (Eear) Considere os pontos $A(2,\ 3)$ e $B(4,\ 1)$ e a reta r: $3x + 4y = 0$. Se $d_{A,r}$ e $d_{B,r}$ são, respectivamente, as distâncias de A e de B até a reta r, é correto afirmar que
a) $d_{A,r} > d_{B,r}$
b) $d_{A,r} < d_{B,r}$
c) $d_{A,r} = d_{B,r}$
d) $d_{A,r} = 2d_{B,r}$

Q7– Determine a distância d do ponto $B(b,\ 0)$ à reta s, de equação $bx + 2by + 4b^2 = 0$.

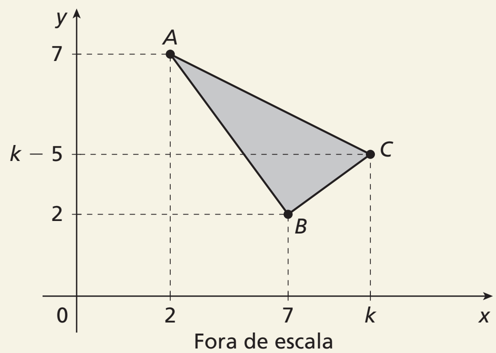
Q8– Represente graficamente o sistema de inequações a seguir:

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ 3x - 2y + 6 > 0 \end{cases}$$

Q9– (Uece) No plano, com o sistema de coordenadas cartesiano usual com origem no ponto O, as retas representadas pelas equações $y = x$ e $y + 4x - 20 = 0$ se cortam no ponto X. Se Y é a intersecção da reta $y + 4x - 20 = 0$ com o eixo dos x (eixo horizontal), então, a medida da área do triângulo YOX é igual a
a) 12 u.a.
b) 14 u.a.
c) 10 u.a.
d) 8 u.a.

MODERNA

Q10– (PUCSP) A figura mostra um triângulo ABC, de hipotenusa AC, com $A(2, 7)$, $B(7, 2)$ e $C(k, k - 5)$.



Fora de escala

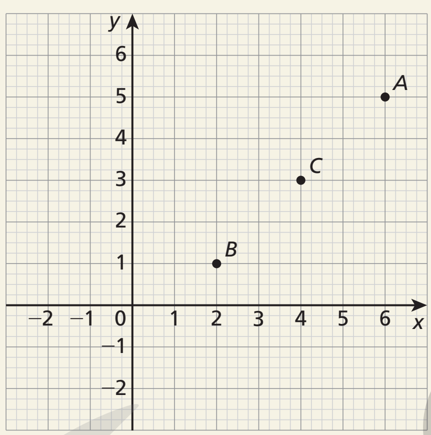
NELSON MATSUDA

Sabendo que a área do triângulo é 15 cm², o valor da abscissa do ponto C é

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 11

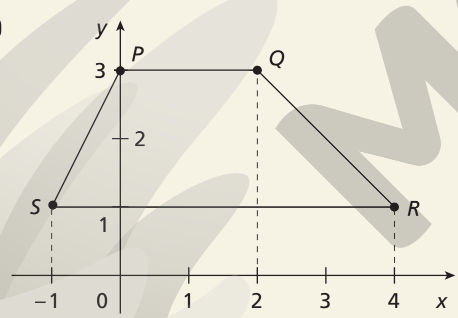
Resoluções da avaliação 1

Q1– O ponto C é o ponto médio do segmento AB, como indicado no plano cartesiano abaixo.



NELSON MATSUDA

Q2– a)



ADILSON SECCO

b) $d_{P,\,Q} = \sqrt{(0-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4+0} = 2$

$d_{Q,\,R} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$d_{R,\,S} = \sqrt{(4+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25+0} = 5$

$d_{P,\,S} = \sqrt{(0+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Seja P_{PQRS} o perímetro do trapézio $PQRS$, então

$P_{PQRS} = d_{P,\,Q} + d_{Q,\,R} + d_{R,\,S} + d_{P,\,S}$

$P_{PQRS} = 2 + 2\sqrt{2} + 5 + \sqrt{5} = 7 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$

Portanto, o perímetro do trapézio é $\left(7 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ unidades de comprimento.

c) Medida da diagonal $\overline{QS}$:

$d_{Q,\,S} = \sqrt{(2+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Medida da diagonal $\overline{PR}$:

$d_{P,\,R} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

Portanto, a diagonal $\overline{PR}$ é maior.

Q3– Como as retas se encontram em (3, 2):

$y = ax \Rightarrow 2 = 3a \Rightarrow a = \dfrac{2}{3}$

$b = -3a \Rightarrow b = -3 \cdot \dfrac{2}{3} \Rightarrow b = -2$

$y = bx + c \Rightarrow 2 = -2 \cdot 3 + c \Rightarrow c = 8$

Portanto, as retas são $y = \dfrac{2}{3}x$ e $y = -2x + 8$.

alternativa a

Q4– Do enunciado, temos que d é a diagonal de um quadrado de lado r, sendo r o raio da circunferência. Então

$(3\sqrt{2})^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow 2r^2 = 18 \Rightarrow r = 3$

Sabemos que a circunferência está no primeiro quadrante, tangencia os eixos coordenados e seu raio é 3. Logo, o centro dessa circunferência é o ponto (3, 3).

Assim, a equação da circunferência pode ser obtida por:

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

alternativa a

Q5– Da equação da reta r, temos:

$x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Pelas equações das retas r e s, sabemos que $m_r = \dfrac{1}{2}$ e $m_s = m$. Como as retas são perpendiculares, então

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m = -2$

Se s passa por $Q(1, 5)$, então:

$y = mx + n$

$5 = -2 \cdot 1 + n$

$n = 7$

Portanto, $m = -2$ e $n = 7$.

Q6– $d_{A,r} = \dfrac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{18}{5}$

$d_{B,r} = \dfrac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{16}{5}$

$d_{A,r} > d_{B,r}$

alternativa a

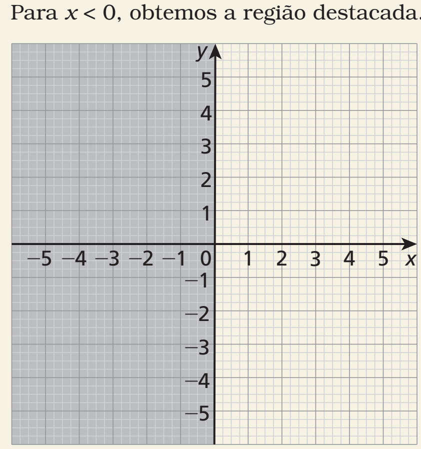
Q7– $d_{B,\,s} = \dfrac{|b \cdot b + 2b \cdot 0 + 4b^2|}{\sqrt{b^2 + (2b)^2}}$

$d_{B,\,s} = \dfrac{|5b^2|}{\sqrt{5b^2}} = \dfrac{\cancel{5b^2} \cdot \sqrt{5b^2}}{\cancel{\left(\sqrt{5b^2}\right)^2}}$

$d_{B,\,s} = b\sqrt{5}$

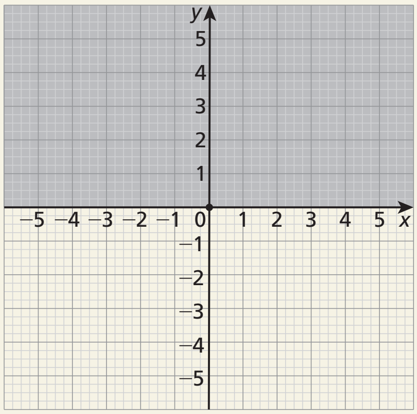
Q8– Vamos representar graficamente cada inequação do sistema.

Para $x < 0$, obtemos a região destacada.

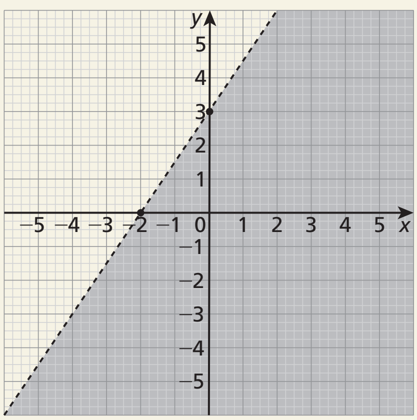


NELSON MATSUDA

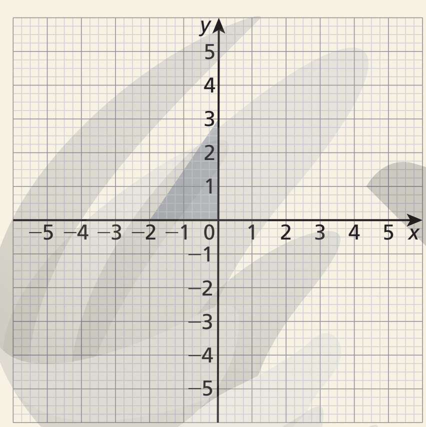
Para $y > 0$, obtemos a região destacada.



Para $3x - 2y + 6 > 0$, obtemos a região destacada.



Para obtermos a solução desse sistema de inequações, devemos considerar a região que respeite a três inequações ao mesmo tempo. Assim, a solução para esse sistema temos a região destacada abaixo.



Q9– Se X é o ponto de intersecção das retas $y = x$ e $y = -4x + 20$, então $x = -4x + 20 \Rightarrow x = 4$.
Logo, $X(4,4)$.
Temos ainda que a abscissa de Y é tal que $0 = -4x + 20$; então, $x = 5$. Assim $Y(5, 0)$.
Sendo os vértices do triângulo: $O(0, 0)$; $Y(5, 0)$; $X(4, 4)$, podemos calcular sua área aplicando a fórmula que usa o determinante da matriz formada por esses pontos:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

Assim:

$$A = \frac{|D|}{2} = \frac{|20|}{2} = 10$$

Logo, a área pedida vale 10 u.a.
alternativa c

Q10– Para determinar a área de um triângulo basta descobrir o determinante da matriz formada pelas coordenadas de seus vértices e dividi-lo por 2:

$$A = \frac{|D|}{2}$$

Calculando o determinante da matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ k & k-5 & 1 \end{vmatrix} = (4 + 7k + 7k - 35) - (2k + 2k - 10 + 49) =$$

$= 10k - 70$

Como a área do triângulo é 15 cm², temos:

$$15 = \frac{|10k - 70|}{2} \Rightarrow k = 10$$

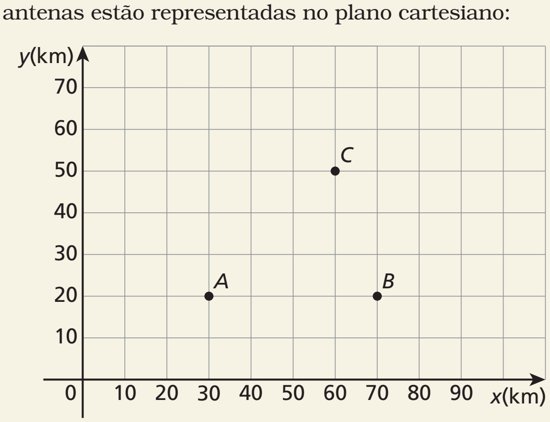
alternativa c

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.	1
Calcular a distância entre dois pontos.	2 e 3
Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.	4, 5 e 6
Discutir posição relativa entre: duas retas; ponto e circunferência; reta e circunferência; duas circunferências.	7
Calcular a distância entre ponto e reta.	8
Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.	9
Calcular a área de um triângulo.	10

Q1– Represente a reta t: $4x + 5y - 20 = 0$ no plano cartesiano.

Q2– (Enem) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65; 35) **c)** (45; 35) **e)** (50; 30)
b) (53; 30) **d)** (50; 20)

Q3– (UFRGS) A menor distância entre as circunferências de equação $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ e $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ é

a) 2 **c)** $\sqrt{10}$ **e)** $\sqrt{10}-2$
b) 5 **d)** $\sqrt{10}+2$

Q4– Dados os pontos $A(1, 3)$, $B(-2, 3)$ e $C(-2, 1)$, obtenha:

a) a equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e da reta $\overleftrightarrow{BC}$.
b) os pontos, se existirem, em que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ cortam os eixos x e y.

Q5– (Uece) No sistema de coordenadas cartesianas usual, a equação $x^2+y^2-6x-8y=0$ representa uma circunferência. Se O é o centro desta circunferência e se a equação da reta que passa pelo ponto O e pelo ponto $P(2, 7)$ tem a forma $ax+by-13=0$, então o produto $a \cdot b$ é igual a

a) 6 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 3

Q6– (FGV) Os pontos de coordenadas cartesianas (2, 3) e (–1, 2) pertencem a uma circunferência. Uma reta que passa, necessariamente, pelo centro dessa circunferência tem equação

a) $3x-y+9=0$ **c)** $3x+y-4=0$ **e)** $x+3y-9=0$
b) $3x+y-9=0$ **d)** $x+3y-4=0$

Q7– Dadas as circunferências de equações c_1: $x^2+y^2=16$ e c_2: $x^2+y^2+4y=0$. Sabendo que elas são tangentes, ou seja, possuem um ponto em comum, determine a coordenada desse ponto.

Q8– Considere a reta r, de equação $5x+y-4=0$, e o ponto $P(1, 1)$. Obtenha:

a) os coeficientes lineares e angulares da reta r.
b) a equação da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r.
c) a distância do ponto P à reta r.

Q9– Represente graficamente o sistema de inequações a seguir.

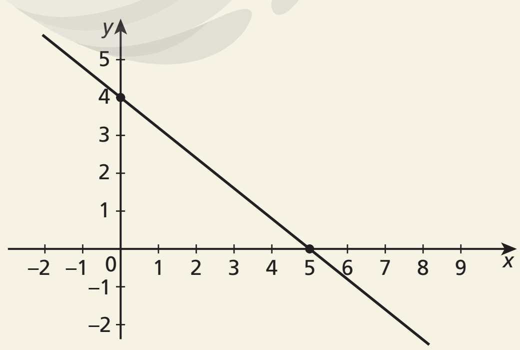
$$\begin{cases} x+y>0 \\ x<2 \end{cases}$$

Q10– (PUCRS) Em uma aula de Geometria Analítica, o professor salientava a importância do estudo de triângulos em Engenharia, e propôs a seguinte questão:
O triângulo determinado pelos pontos $A(0, 0)$, $B(5, 4)$ e $C(3, 8)$ do plano cartesiano tem área igual a ____.
Feitos os cálculos, os alunos concluíram que a resposta correta era:

a) 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 14 **e)** 28

Resoluções da avaliação 2

Q1–



NELSON MATSUDA

Q2– Seja $D(x_D, y_D)$ o local da construção da nova torre de transmissão, equidistante das antenas $A(30, 20)$, $B(70, 20)$ e $C(60, 50)$.

I) D pertence à mediatriz do segmento $\overline{AB}$, então

$$x_D = \frac{30+70}{2} = 50$$

II) D é equidistante de A e C, então:

$$\sqrt{(50-30)^2+(y_D-20)^2} = \sqrt{(50-60)^2+(y_D-50)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20^2+(y_D-20)^2 = (-10)^2+(y_D-50)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 400+y_D^{\,2}-40y_D+400 = 100+y_D^{\,2}-100y_D+2\,500 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 60y_D = 1\,800 \Rightarrow y_D = 30$$

Portanto, $D(50, 30)$.
alternativa e

Q3– A partir das equações das circunferências, temos:
$(x-1)^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow C_1\ (1, 2)$ e $R_1=1$
$(x+2)^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow C_2\ (-2, 1)$ e $R_2=1$

$$d_{C_1,C_2} = \sqrt{(1+2)^2+(2-1)^2} = \sqrt{10}$$

Assim, a distância mínima será
$d_{C_1,C_2} - R_1 - R_2 = \sqrt{10}-2$
alternativa e

Q4– **a)** $\overleftrightarrow{AB}$: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-2y+3-(-6+3x+y)=0 \Rightarrow -3y+9=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y-3=0$

$\overleftrightarrow{BC}$: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-2y-2-(-6+x-2y)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x+2=0$

b) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao eixo x, portanto, ela intercepta o eixo y no ponto em que $x=0$ e $y=3$. Logo, temos o ponto (0, 3).
A reta $\overleftrightarrow{BC}$ é paralela ao eixo y, portanto, ela intercepta o eixo x no ponto em que $y=0$ e $x=-2$. Logo, temos o ponto (–2, 0).

Q5– $x^2+y^2-6x-8y=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=25$
Pela equação da circunferência acima, o seu centro é $O(3, 4)$. Agora, substituindo as coordenadas dos pontos P e O pertencentes à reta obtemos um sistema com duas equações:

$$\begin{cases} 2a+7b=13 \\ 3a+4b=13 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, descobrimos que $a=3$ e $b=1$. Logo $a \cdot b = 3$.
alternativa d

Q6– Sejam A e B dois pontos de uma circunferência λ qualquer. A única reta do plano que necessariamente passa pelo centro de λ é a mediatriz da corda determinada por A e B. Para qualquer ponto $P(x, y)$ dessa reta satisfaz a condição $PA = PB$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-(-1))^2+(y-2)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9 = x^2+2x+1+y^2-4y+4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x+2y-8=0 \Rightarrow 3x+y-4=0$$

alternativa c

MODERNA

Q7– Para descobrir o ponto comum dessas circunferências demos resolver o sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

Da 1ª equação temos que $x^2 + y^2 = 16$, assim:
$16 + 4y = 0 \Rightarrow y = -4$
Substituindo o valor de y na 1ª equação, temos:
$x^2 + (-4)^2 = 16 \Rightarrow x = 0$
Portanto, o ponto de tangência das circunferências é (0, –4).

Q8– **a)** r: $5x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -5x + 4$

$m_r = -5$ e $n_r = 4$

b) $s \perp r \Rightarrow m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_s = \dfrac{1}{5}$

s: $y - y_0 = m_s(x - x_0)$

$$y - 1 = \frac{1}{5}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} + 1$$

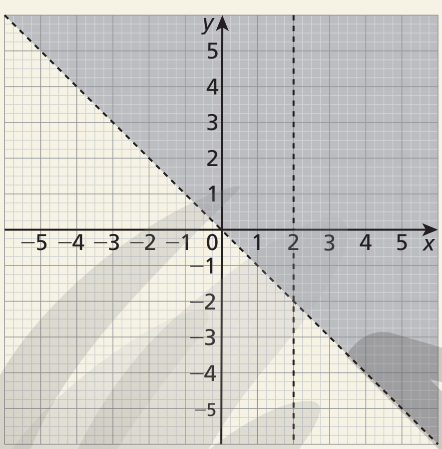
$$y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

c) $$d_{P,\,r} = \frac{|5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

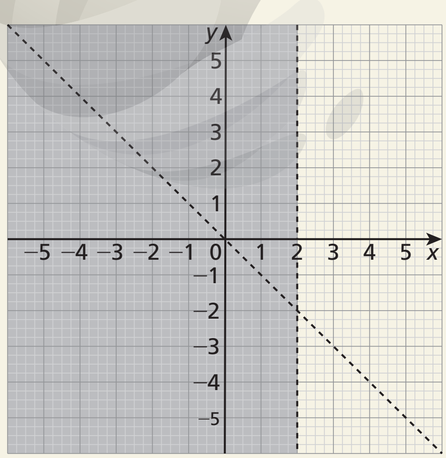
$$d_{P,\,r} = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

Q9– Vamos representar graficamente cada inequação do sistema.

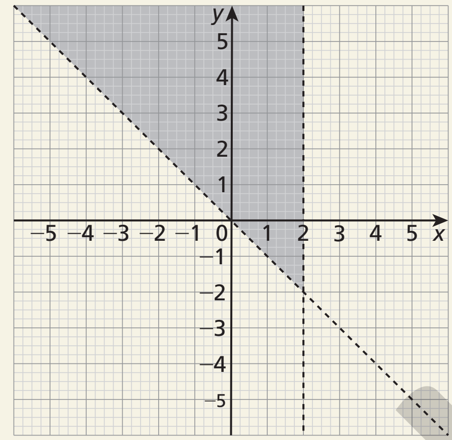
Para $x + y > 0$, obtemos a região destacada.



Para $x < 2$, obtemos a região destacada.



Para obtermos a solução desse sistema de inequações, devemos considerar a região que respeite a duas inequações ao mesmo tempo. Assim, como solução para esse sistema temos a região destacada abaixo.



Q10– A área solicitada é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (40 - 12) = \frac{28}{2} = 14$$

alternativa d

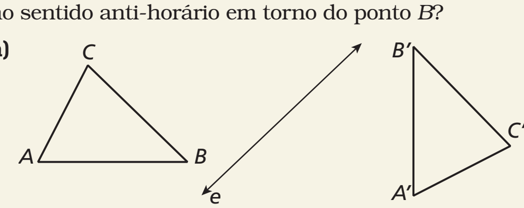
Capítulo 4 – Transformações geométricas

Avaliação 1

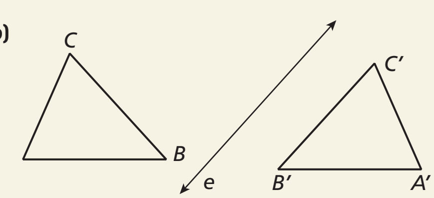
Objetivos do capítulo	Questões
Compreender os tipos de transformações isométricas (translação, reflexão e rotação) e as suas composições.	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Compreender as transformações homotéticas.	7 e 8
Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.	9
Realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.	10

Q1– (UPE) Dentre as alternativas abaixo, qual figura representa melhor o triângulo $A'B'C'$, obtido pela reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo **e** seguida de uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do ponto B?

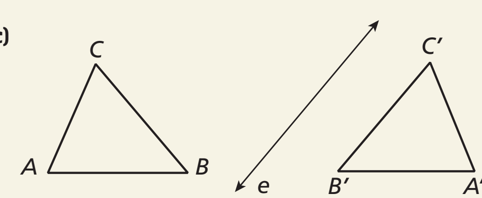
a)



b)



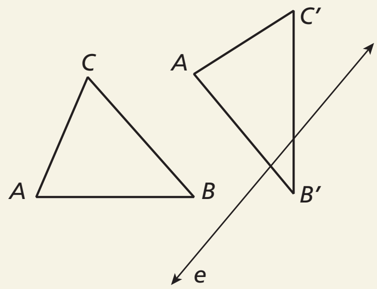
c)



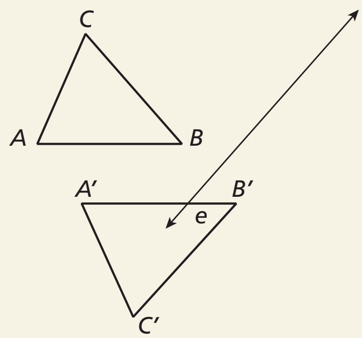
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

d)



e)



Q2– (Fatec) Em um círculo recortado em papel-cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

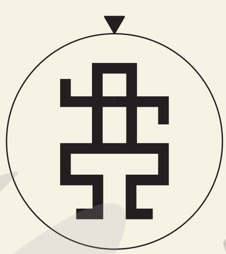
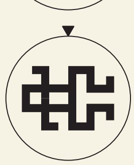


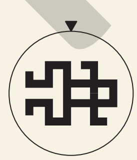
Figura 1

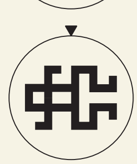
Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em

a) 

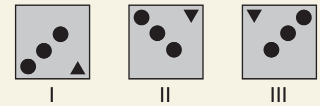
b) 

c) 

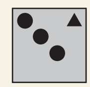
d) 

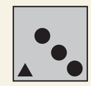
e) 

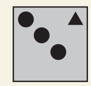
Q3– (Enem) Um decorador utilizou um único tipo de transformação geométrica para compor pares de cerâmica em uma parede. Uma das composições está representada pelas cerâmicas I e II.

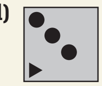


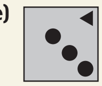
Utilizando a mesma transformação, qual é a figura que compõe par com a cerâmica indicada por III?

a) 

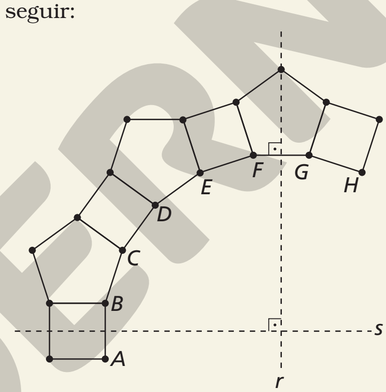
b) 

c) 

d) 

e) 

Q4– (Uerj) Três pentágonos regulares congruentes e quatro quadrados são unidos pelos lados conforme ilustra a figura a seguir:

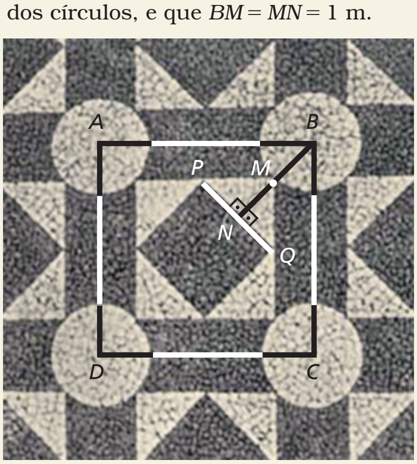


Acrescentam-se outros pentágonos e quadrados, alternadamente adjacentes, até se completar o polígono regular *ABCDEFGH*... *A*, que possui dois eixos de simetria indicados pelas retas *r* e *s*.

Se as retas perpendiculares *r* e *s* são mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$, o número de lados do polígono *ABCDEFGH*... *A* é igual a:

a) 18 **b)** 20 **c)** 24 **d)** 30

Q5– (Insper) A pavimentação indicada na fotografia possui simetria rotacional de 90° e é formada por quadrados, círculos e figuras com a forma ▬. Em relação ao desenho feito sobre a fotografia, sabe-se que *A*, *B*, *C* e *D* são centros dos círculos, e que $BM = MN = 1$ m.



CÂMARA MUNICIPAL DE LISBOA, LISBOA

Fotografia da calçada do Palácio Galveias, em Lisboa, Portugal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Em um plano totalmente recoberto por reproduções completas do quadrado *ABCD* indicado na figura, a razão entre a área preenchida com ladrilhos pretos e a área preenchida com ladrilhos brancos é igual a

a) $\dfrac{10-\pi}{4+\pi}$

b) $\dfrac{14-\pi}{4+\pi}$

c) $\dfrac{10-\pi}{4-\pi}$

d) $\dfrac{14+\pi}{4-\pi}$

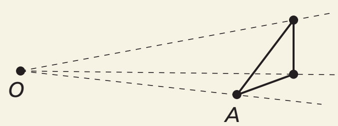
e) $\dfrac{10-\pi}{4-\pi}$

Q6– (Unifesp) Chamando de y' e y'' as equações das parábolas geradas quando a curva $y = 2x^2 - 12x + 16$ é refletida pelos eixos x e y, respectivamente, determine:

a) a distância entre os vértices das parábolas definidas por y' e y''.

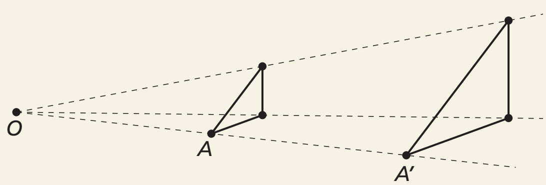
b) y' e y''.

Q7– Observe abaixo a figura com o ponto *A* e o ponto de origem *O*.

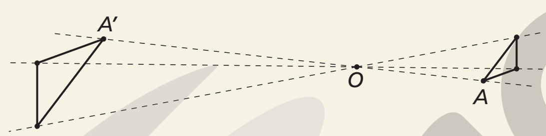


Para a transformação homotética com $k = -\dfrac{1}{2}$, podemos afirmar que a figura formada será

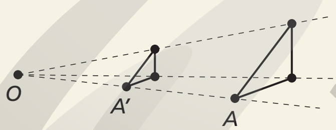
a)



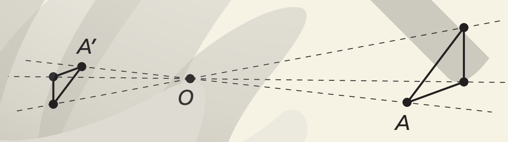
b)



c)

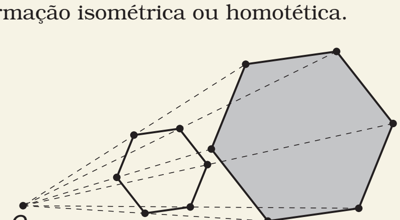


d)



Q8– O quadrado *PQRS* foi obtido por uma homotetia de razão 0,8 aplicada ao quadrado *ABCD*. Se a área do quadrado *PQRS* é 256 cm², qual é o perímetro do quadrado *ABCD*?

Q9– Observe a transformação abaixo e verifique se é uma transformação isométrica ou homotética.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Q10– (UFG) Um modelo matemático usado para a ampliação de uma imagem consiste em considerar uma transformação linear dada pela multiplicação de uma matriz escala E_s por uma matriz coluna *A*, composta pelas coordenadas do ponto *P*, que forma a imagem que será ampliada. Considerando as matrizes *A* e E_s dadas por

$A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $E_s = \begin{bmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{bmatrix}$, em que E_x e E_y são fatores multiplicativos que indicam a mudança da escala, então a matriz *Q* indica as novas coordenadas do ponto *P*, obtidas pela multiplicação das matrizes E_s e *A*, é:

a) $\begin{bmatrix} xE_x \\ yE_y \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} E_x + x \\ E_y + y \end{bmatrix}$

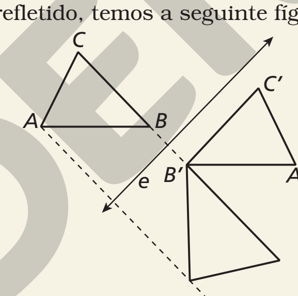
c) $\begin{bmatrix} yE_x \\ xE_y \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} xE_x & 0 \\ 0 & yE_y \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} E_x & x \\ y & E_y \end{bmatrix}$

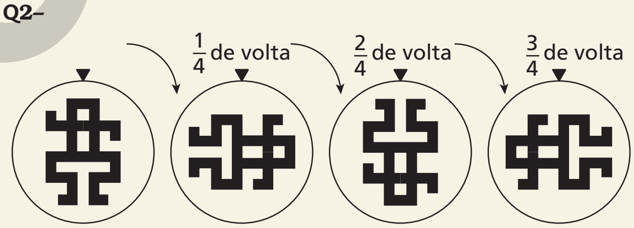
Resoluções da avaliação 1

Q1– Considerando que a rotação de 90° foi feita em torno do ponto *B* refletido, temos a seguinte figura:



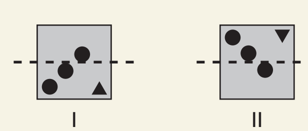
alternativa b

Q2–

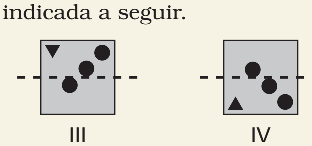


alternativa e

Q3– A partir da figura I, realizamos uma simetria em relação ao eixo horizontal que passa pelo centro da figura, obtendo a figura II.



Realizando o mesmo tipo de simetria na figura III, obtemos a figura IV, indicada a seguir.

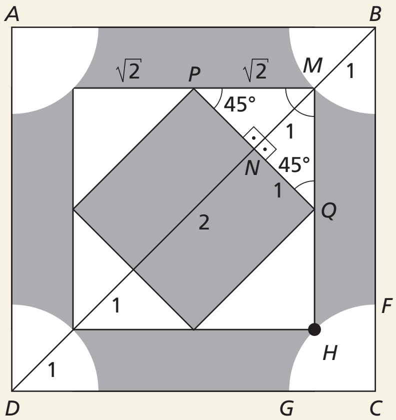


alternativa b

MODERNA

Q4– Como o polígono regular obtido possui dois eixos de simetria indicados pelas retas *r* e *s*, os lados $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ são refletidos para cada um dos 4 quadrantes do polígono completo. Além disso, esse polígono tem 4 lados sobre os eixos de simetria (dois deles indicados na imagem pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$).
Assim, total de lados pode ser obtido por:
$4 \cdot 4 + 4 = 20$
Portanto, o polígono *ABCDEFGH...A* tem 20 lados.
alternativa b

Q5–



Do enunciado e da figura, temos:
$(PM)^2 = 1^2 + 1^2$
$(PM)^2 = 2$
Como $PM > 0$.
$PM = \sqrt{2}$ m
Seja *x* a medida do lado do quadrado *ABCD*. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *BCD*, temos:
$6^2 = x^2 + x^2$
$2x^2 = 36$
$x^2 = 18$
Assim, a área do quadrado *ABCD* é 18 m².
Seja S_1 a área preenchida com ladrilhos pretos e S_2 a área preenchida com ladrilhos brancos, então $S_1 = S_{ABCD} - S_2$, em que S_{ABCD} é a área do quadrado *ABCD*.
Desenvolvendo essa expressão, considerando que sabemos que $S_{ABCD} = 18$ m², temos:
$S_1 = S_{ABCD} - S_2$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{ABCD}}{S_2} - \frac{S_2}{S_2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18}{S_2} - 1 \quad \text{(I)}$$

Podemos determinar o valor de S_2 por
$S_2 = 4 \cdot S_{\text{setor } CGHF} + 4 \cdot S_{PMQ}$, em que $S_{\text{setor } CGHF}$ é a área do setor circular *CGHF* e S_{PMQ} é a área do triângulo *PMQ*, então:

$$S_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right)$$

$S_2 = 4 + \pi$
Substituindo o valor de S_2 em (I), temos

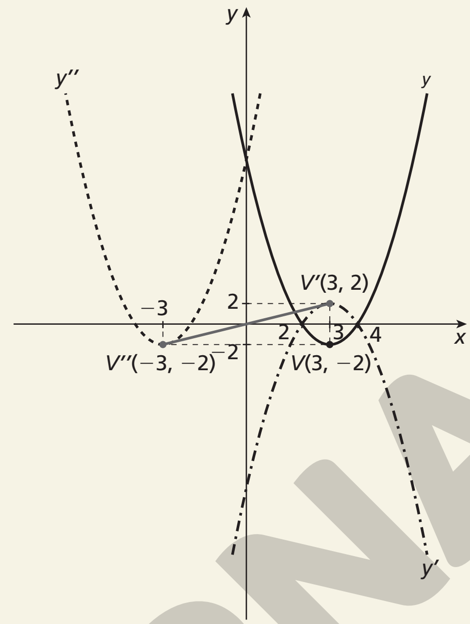
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18}{4 + \pi} - 1$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{18 - (4 + \pi)}{4 + \pi}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{14 - \pi}{4 + \pi}$$

alternativa b

Q6– a) Representando a situação no gráfico, temos:



Caso os alunos ainda não tenham estudado a função quadrática, eles precisam saber que as coordenadas do vértice de uma parábola, gráfico da função quadrática cuja lei é
$f(x) = ax^2 + bx + c$, são dadas por $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$.
Sendo *V* o vértice da parábola de equação $y = f(x)$, *V'* o vértice de $y' = -f(x)$ e *V"* o vértice de $y" = f(-x)$:
$V(3, -2)$, $V'(3, 2)$ e $V"(-3, -2)$
Logo, a distância entre os pontos *V'* e *V"* é dada por:

$$d = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Portanto, a distância entre os vértices das parábolas definidas por *y'* e *y"* é $2\sqrt{13}$.

b) Sendo $y = f(x) = 2x^2 - 12x + 16$, temos:
$y' = -f(x) = -2x^2 + 12x - 16$
$y" = f(x) = 2x^2 + 12x + 16$

Q7– Como $-1 < k < 0$, temos que a figura obtida será uma redução invertida da figura original. Portanto, a figura correta é a da alternativa d.

Q8– Sendo *x* a medida do lado do quadrado *PQRS*, temos
$A_{PQRS} = 256 \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow x = 16$
Sabendo que foi aplicada uma homotetia de razão 0,8 ao quadrado *ABCD* e sendo *y* a medida de seu lado, então
$y \cdot 0{,}8 = x \Rightarrow 0{,}8y = 16 \Rightarrow y = 20$
Calculando o perímetro do quadrado *ABDC*, temos
$P_{ABCD} = 4 \cdot 20 = 80$
Portanto o perímetro de do quadrado *ABCD* é 80 cm².

Q9– Como as figuras *A* e *B* são semelhantes, sendo *B* uma ampliação de *A*, classificamos essa transformação como uma homotetia.

Q10– $E_s \cdot A = \begin{bmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + E_y \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xE_x \\ yE_y \end{bmatrix}$

alternativa a

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Avaliação 2

Objetivos do capítulo	Questões
Compreender os tipos de transformações isométricas (translação, reflexão e rotação) e as suas composições.	1, 2, 3, 4 e 5
Compreender as transformações homotéticas.	6 e 7
Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.	8
Realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.	9 e 10

Q1– (UFU) Na Figura 1, o triângulo retângulo *ABC* possui ângulo reto em *B*, $AF = 1$ cm, $AC = 10$ cm e *BDEF* é um quadrado. Suponha que o quadrado *BDEF* seja transladado ao longo de *AC*, sem alterar a medida dos lados e ângulos ao longo dessa translação, gerando, dessa forma, um novo quadrado *XYZW*, em que coincidem os pontos *C* e *Z* conforme ilustra a Figura 2.

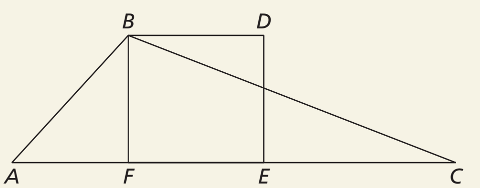


Figura 1

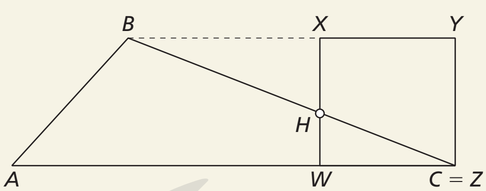


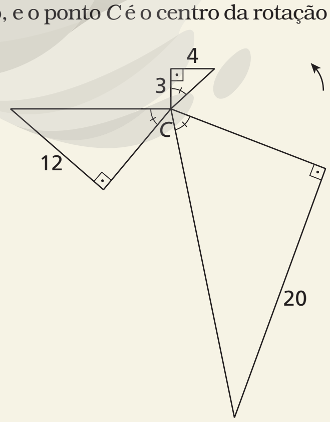
Figura 2

Nessas condições, qual é o valor (em cm²) da área do triângulo *HZW*?

a) $\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{3}{2}$

b) $\frac{13}{4}$ **d)** $\frac{15}{2}$

Q2– (UFJF) Conforme a figura a seguir, um ventilador com *design* moderno possui 3 pás, em formato de triângulos retângulos. Ao ligar o ventilador, as pás giram no sentido anti-horário, e o ponto *C* é o centro da rotação do ventilador.



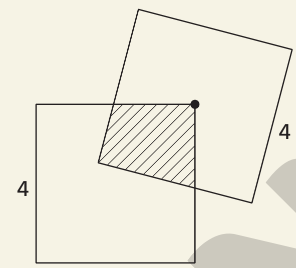
A área máxima da região determinada por essa rotação, em unidades de área, é:

a) 9π **d)** 225π

b) 15π **e)** 625π

c) 25π

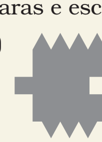
Q3– (Unicamp) Considere dois quadrados congruentes de lado 4 cm. O vértice de um dos quadrados está no centro do outro quadrado, de modo que esse quadrado possa girar em torno de seu centro. Determine a variação da área obtida pela intersecção das áreas dos quadrados durante a rotação.

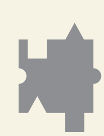


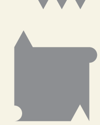
Q4– (Enem) Uma das expressões artísticas mais famosas associada aos conceitos de simetria e congruência é, talvez, a obra de Maurits Cornelis Escher, artista holandês cujo trabalho é amplamente difundido. A figura apresentada, de sua autoria, mostra a pavimentação do plano com cavalos claros e cavalos escuros, que são congruentes e se encaixam sem deixar espaços vazios.


©2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

Realizando procedimentos análogos aos feitos por Escher, entre as figuras abaixo, aquela que poderia pavimentar um plano, utilizando-se peças congruentes de tonalidades claras e escuras é:

a) 

d) 

b) 

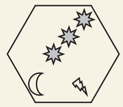
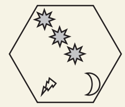
e) 

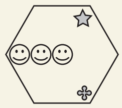
c) 

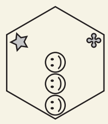
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

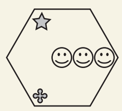
MODERNA

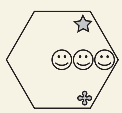
Q5– (Colégio Pedro II)

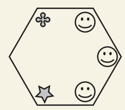
 está para 

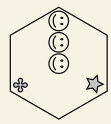
Assim como  está para:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Q6– Seja *ABCD* um quadrilátero qualquer. A figura *A'B'C'D'* é uma homotetia da figura *ABCD*, e a razão é *k*, sendo *k* um número real diferente de zero. Classifique como será a figura *A'B'C'D'* em relação à *ABCD* de acordo com os valores de *k* dados a seguir.

a) $k = -\frac{3}{4}$

b) $k = 4$

c) $k = -\frac{5}{3}$

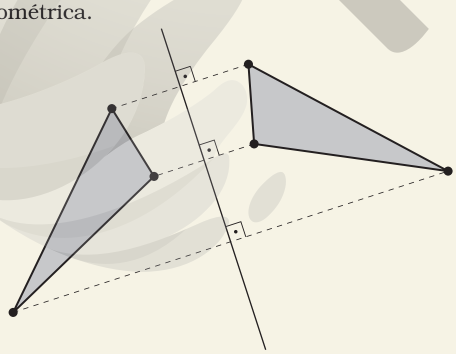
d) $k = \frac{7}{8}$

Q7– O triângulo *DEF* foi obtido por uma homotetia de razão 3 aplicada ao triângulo *ABC*. Sobre essa transformação geométrica, é correto afirmar que:

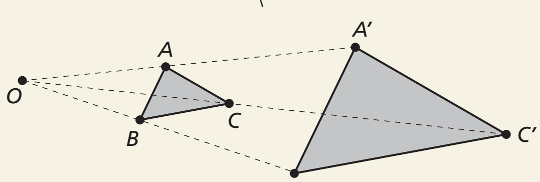
a) O triângulo *DEF* é uma redução do triângulo *ABC*.
b) O perímetro do triângulo *DEF* é o triplo do perímetro do triângulo *ABC*.
c) A medida de um ângulo interno do triângulo *DEF* é o triplo da medida do ângulo correspondente no triângulo *ABC*.
d) A área do triângulo *DEF* é o triplo da área do triângulo *ABC*.

Q8– Classifique as transformações abaixo em homotética ou isométrica.

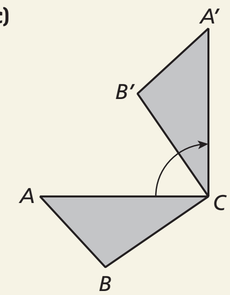
a)



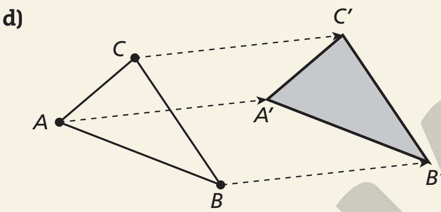
b)



c)



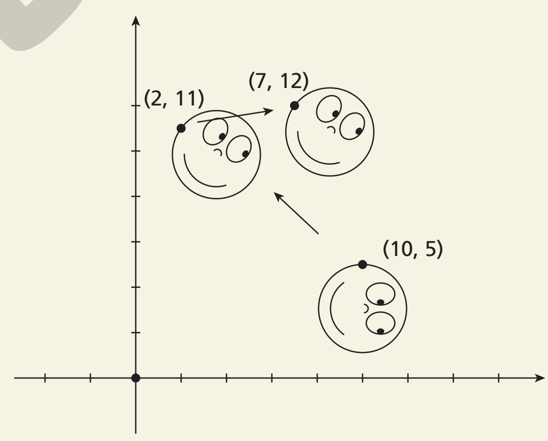
d)



Q9– (Uece) Animações gráficas computacionais usam matrizes para produzir os movimentos de objetos. Rotações são realizadas pelas multiplicações por matrizes ortogonais; e translações, por somas de vetores. Por exemplo, para girar um ponto de coordenadas (x, y) cerca de 53,13° em torno da origem, no sentido anti-horário, e em seguida transladá-lo por um vetor (5, 1) basta efetuarmos as seguintes operações:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A figura abaixo mostra a rotação e a translação descritas acima aplicadas na imagem de um rosto. Observe que o ponto (10, 5) é transformado no ponto (7, 12).



Considere que o animador gráfico necessita colocar nessa animação a figura de uma abelha que, após a rotação e a translação, apareça no ponto (16, 10). Para isso, o animador precisa saber onde deveria se situar a abelha antes da transformação, para que ela, ao fim, se localize no ponto (16, 10). Com base nessas informações, é correto afirmar que o ponto que será transformado em (16, 10) é

a) (13,8; – 3,4)
b) (8,2; – 4,3)
c) (10,5; – 7,5)
d) (20,4; – 2,6)
e) (23,6; – 5,4)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q10– (UFU) Em computação gráfica, é frequente a necessidade de movimentar, alterar e manipular figuras em um sistema 2D (bidimensional). A realização destes movimentos é feita, em geral, utilizando-se transformações geométricas, as quais são representadas por matrizes $T_{2\times 2}$. Assim – considerando um polígono P no plano cartesiano xOy de vértices (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n), o qual é representado pela matriz $M_{2n} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$, em que n é o número de vértices do polígono – a transformação de P por $T_{2\times 2}$ é feita pela realização do produto matricial $T_{2\times 2} \cdot M_{2\times n}$, obtendo a matriz resultante $\begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ d_1 & \dots & d_n \end{pmatrix}$ cujas colunas determinam os vértices (c_1, d_1), ..., (c_n, d_n) do polígono obtido. Nesse contexto, para o que se segue, considere a transformação $T_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\operatorname{sen}\theta \\ 2\operatorname{sen}\theta & 2\cos\theta \end{pmatrix}$ e P o triângulo cujos vértices são os pontos $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(2, 2\sqrt{3})$. Execute planos de resolução de maneira a encontrar:

a) os vértices do triângulo resultante Q obtido da transformação do triângulo P por $T_{2\times 2}$, quando $\theta = 840°$;

b) a área do triângulo resultante Q obtido na transformação do item **a**.

Resoluções da avaliação 2

Q1– A partir das relações métricas no triângulo retângulo, podemos determinar as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

$AB^2 = AF \cdot AC \Rightarrow AB^2 = 1 \cdot 10 \Rightarrow AB = \sqrt{10}$

BC^2 5 $CF \cdot AC \Rightarrow BC^2 = 9 \cdot 10 \Rightarrow BC = 3\sqrt{10}$

Portanto, $AB = \sqrt{10}$ cm e $BC = 3\sqrt{10}$ cm.

Como triângulos HZW e ABC são semelhantes, temos que

$$\frac{HW}{AB} = \frac{WZ}{BC} \Rightarrow \frac{HW}{\sqrt{10}} = \frac{3}{3\sqrt{10}} \Rightarrow HW = 1$$

Portanto, a área pedida, é dada por:

$$\frac{HW \cdot WZ}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$$

alternativa c

Q2– A área máxima da região determinada pela rotação das pás do ventilador corresponde à área do círculo cujo raio é a hipotenusa do triângulo maior.

De acordo com a figura, os três triângulos são semelhantes (AA). Como 5 é a medida da hipotenusa do triângulo menor, tem-se que a hipotenusa do maior é:

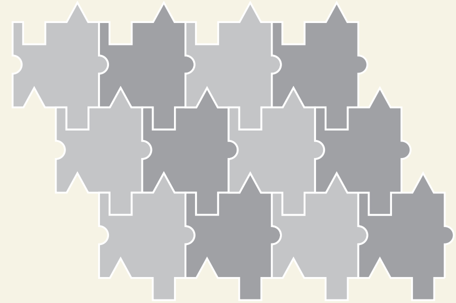
$$\frac{x}{5} = \frac{20}{4} \Rightarrow x = 25$$

Assim, a área procurada é dada por: $A = \pi \cdot 25^2 = 625\pi$.

alternativa e

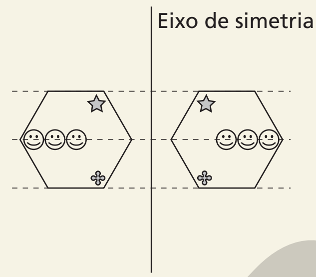
Q3– Como a rotação que o quadrado descreve é uma transformação isométrica, não há variação do tamanho dos quadrados e nem da área obtida pela intersecção das áreas dos quadrados durante a rotação. Essa área corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 4, ou seja, 4 u.a.

Q4–



alternativa d

Q5– A transformação se dá por reflexão, então



alternativa b

Q6– a) Como $-1 < k < 0$, então a figura $A'B'C'D'$ será uma redução invertida de $ABCD$.

b) Como $k > 1$, então a figura $A'B'C'D'$ será uma ampliação de $ABCD$.

c) Como $k < -1$, então a figura $A'B'C'D'$ será uma ampliação invertida de $ABCD$.

d) Como $0 < k < 1$, então a figura $A'B'C'D'$ será uma redução de $ABCD$.

Q7– a) Falsa. Como a razão é maior que 1, então o triângulo DEF é uma ampliação do triângulo ABC.

b) Verdadeira. Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo ABD. O perímetro desse triângulo é dado por:

$P_{ABC} = a + b + c$

Como a razão da homotetia é 3, então os lados do triângulo DEF medem o triplo em relação ao triângulo ABC ($3a$, $3b$ e $3c$) e seu perímetro é:

$P_{DEF} = 3a + 3b + 3c = 3(a + b + c)$

Comparando o perímetro dos dois triângulos, temos que:

$P_{DEF} = 3(a + b + c) = 3 \cdot P_{ABC}$

c) Falsa. Na homotetia, o triângulo obtido é semelhante ao triângulo original. Logo, os ângulos correspondentes são congruentes.

d) Falsa. Sejam b e h as medidas de comprimento da base e da altura do triângulo ABC. A área desse triângulo é dada por:

$$A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Como a razão da homotetia é 3, então a base e a altura do triângulo DEF medem o triplo em relação ao triângulo ABC ($3b$ e $3h$) e sua área é:

$$A_{DEF} = \frac{3b \cdot 3h}{2} = 9 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$$

Comparando a área dos dois triângulos, temos que:

$$A_{DEF} = 9 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right) = 9 \cdot A_{ABC}$$

alternativa b

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Q8– **a)** Preserva as dimensões e forma; logo, é uma transformação isométrica (reflexão).
b) Preserva a forma, mas não as dimensões; logo, é uma homotetia.
c) Preserva as dimensões e forma; logo, é uma transformação isométrica (rotação).
d) Preserva as dimensões e forma; logo, é uma transformação isométrica (translação).

Q9– $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 = 16 \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 1 = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 25 = 80 \\ 4x + 3y + 5 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 55 \\ 4x + 3y = 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 13{,}8$ e $y = -3{,}4$
alternativa a

Q10–

a) Sabendo que sen $(k \cdot 360° + \alpha) =$ sen α e cos $(k \cdot 360° + \alpha) =$ cos α, com $k \in \mathbb{Z}$, temos:

sen 840° = sen (2 · 360° + 120°) =
$= \text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
cos 840° = cos (2 · 360° + 120°) =
$= \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

Desse modo, para $\theta = 840°$, temos:

$$T_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2\cos 840° & -2\text{sen } 840° \\ 2\text{sen } 840° & 2\cos 840° \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Para determinar as coordenadas dos vértices do triângulo resultante Q, fazemos:

$$T_{2\times2} \cdot M_{2\times3} = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & 4\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, os vértices do triângulo Q são $A'(0, 0)$, $B'(-4, 4\sqrt{3})$ e $C'(-8, 0)$.

b) A área do triângulo Q é dada por

$$A_Q = \frac{1}{2}|D|, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4\sqrt{3} & 1 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4\sqrt{3} & 1 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 32\sqrt{3}$$

$$A_Q = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2} \cdot |32\sqrt{3}| = 16\sqrt{3}$$

Portanto, a área do triângulo Q é $16\sqrt{3}$ u.a.

MODERNA

Resoluções e comentários

Capítulo 1 – Matrizes e determinantes

Exercícios propostos

1. **a)** 1×3 (uma linha e três colunas)

b) 3×1 (três linhas e uma coluna)

c) 2×1 (duas linhas e uma coluna)

d) 2×2 (duas linhas e duas colunas)

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, obtemos:

$a_{11} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$

$a_{12} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

$a_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$

$a_{14} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$

$a_{21} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$

$a_{22} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$

$a_{23} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$

$a_{24} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 14$

$a_{31} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$

$a_{32} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$

$a_{33} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 15$

$a_{34} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 17$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

- Quando $i = j$, temos:

$b_{11} = 1^2 - 1 = 0$

$b_{22} = 2^2 - 1 = 3$

- Quando $i \neq j$, temos:

$b_{12} = 3 \cdot 2 = 6$

$b_{21} = 3 \cdot 1 = 3$

$b_{31} = 3 \cdot 1 = 3$

$b_{32} = 3 \cdot 2 = 6$

Portanto: $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |-6| & 0 & 3 \\ 8 & 7 & |-4| \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

- Para $i = j$, temos:

$a_{11} = |-6| = 6$; $a_{22} = 7$; $a_{33} = 9$

- Para $i + j = 4$

$a_{13} = 3$; $a_{22} = 7$; $a_{31} = -7$

5. Resposta possível:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$, temos que:

$a_{11} = 1 = 1^1$ $\quad a_{21} = 2 = 2^1$ $\quad a_{31} = 3 = 3^1$

$a_{12} = 1 = 1^2$ $\quad a_{22} = 4 = 2^2$ $\quad a_{32} = 9 = 3^2$

$a_{13} = 1 = 1^3$ $\quad a_{23} = 8 = 2^3$ $\quad a_{33} = 27 = 3^3$

$a_{14} = 1 = 1^4$ $\quad a_{24} = 16 = 2^4$ $\quad a_{34} = 81 = 3^4$

Assim, $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$.

Comentário: Avalie a conveniência de propor um desafio entre duplas de alunos em que um cria, por meio de uma lei de formação, uma matriz para o outro descobrir que lei é essa e vice-versa.

6. Não, pois elas não são do mesmo tipo.

A primeira é do tipo 5×1 (matriz coluna) e a segunda é do tipo 1×5 (matriz linha).

Comentário: Uma questão simples, mas que mostra um fato curioso: embora ambas sejam formadas pelos mesmos números, as matrizes dadas são diferentes.

7. Para que as matrizes sejam iguais, devemos ter:

$\begin{cases} a + 2b = 7 \\ -a + 3b = 8 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3c - 2d = 3 \\ -2c + d = -1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$

8. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$a_{11} = \frac{1}{1} = 1$; $a_{12} = \frac{1}{2}$; $a_{21} = \frac{2}{1} = 2$; $a_{22} = \frac{2}{2} = 1$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Diagonal principal:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1^2 = 3$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2^2 = 8$

$a_{33} = 2 \cdot 3 + 3^2 = 15$

Diagonal secundária:

$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3^2 = 11$

$a_{22} = 2 \cdot 2 + 2^2 = 8$

$a_{31} = 2 \cdot 3 + 1^2 = 7$

Portanto, os elementos 3, 8 e 15 estão na diagonal principal e 11, 8 e 7, na diagonal secundária.

MODERNA

10. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$

- Para $i = j$:

$b_{11} = 1 + 1 = 2$

$b_{22} = 2 + 2 = 4$

$b_{33} = 3 + 3 = 6$

$b_{44} = 4 + 4 = 8$

- Para $i \neq j$:

$b_{14} = 1 - 4 = -3$

$b_{23} = 2 - 3 = -1$

$b_{32} = 3 - 2 = 1$

$b_{41} = 4 - 1 = 3$

Calculando o produto dos elementos de cada diagonal, obtemos:

- diagonal principal: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$
- diagonal secundária: $(-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 = 9$

Portanto, a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem, é: $384 - 9 = 375$

11. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matriz identidade de ordem 2)

Se $\begin{pmatrix} k^2 & k - 1 \\ -k + 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos:

- $k^2 = 1 \Rightarrow k = +1$ ou $k = -1$
- $k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
- $-k + 1 = 0 \Rightarrow k = 1$
- $k = 1$

Portanto, o valor de k é 1.

12. Pelo enunciado, temos: $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ e $a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i^{j+1}, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Como a diagonal principal é formada pelos elementos a_{11}, a_{22} e a_{33}, temos:

$a_{11} = 1 \cdot 1 = 1$

$a_{22} = 2 \cdot 2 = 4$

$a_{33} = 3 \cdot 3 = 9$

Portanto, o traço da matriz é igual a $1 + 4 + 9 = 14$.

13. **a)** $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

c) $(A + B) + I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Não é possível adicionar essas matrizes, pois elas não são do mesmo tipo.

Comentário: Nessa questão, se julgar oportuno, peça aos alunos que aproveitem para verificar a validade das propriedades da adição de matrizes.

14. **a)** $B - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A - (B + I_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $B - (A + 0_2) = B - A =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

15. **a)** $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. **a)** c_{22} é elemento da matriz $C = A + B$; logo, pode ser representado por $c_{22} = a_{22} + b_{22}$. Calculando os elementos a_{22} e b_{22}, temos:

$a_{22} = 2^2 + 2^2 = 8$ e $b_{22} = 3 \cdot 2 = 6$

Assim: $c_{22} = 8 + 6 = 14$

Espera-se que os alunos percebam que não é necessário determinar todos os elementos das matrizes A e B, pois c_{22} indica a soma dos elementos a_{22} e b_{22}.

b) Não existe, pois, para qualquer elemento da matriz A, $a_{ij} \geqslant 2$ e, para qualquer elemento da matriz B, $b_{ij} \geqslant 3$. Portanto, qualquer elemento da matriz $C = A + B$ é tal que $c_{ij} \geqslant 5$.

Caso os alunos apresentem dúvidas, construa as matrizes A e B por meio da lei de formação de cada uma e, em seguida, calcule a soma das matrizes.

Assim, eles poderão verificar que qualquer elemento da matriz C é maior ou igual a 5.

Comentário: Nessa questão, é interessante que os alunos percebam a possibilidade de encontrar separadamente os elementos pedidos e efetuar as somas sem a necessidade de construir as matrizes em questão.

17. Resposta pessoal.

Pode-se, por exemplo, no lugar da matriz I_3, construir uma matriz $D_{3 \times 2}$.

18. **a)** $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3} \cdot (A + B) = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right] =$

$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot A - \frac{1}{3} \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{19}{3} \\ \frac{8}{3} & 8 \end{pmatrix}$

MODERNA

d) $2 \cdot A - (B + C) =$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

e) $2 \cdot (A - C) + 3 \cdot (B - A) =$

$$= 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] + 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 18 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

f) $B + C - 2 \cdot I_2 =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

---

19. A única igualdade matricial falsa é a apresentada no item **d**, pois $6 \cdot (A + B) \neq 6A + B$.

Vejamos: $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + 6 \cdot B$

Caso os alunos apresentem dúvidas, exemplifique criando as matrizes A e B e mostre que $6 \cdot (A + B) \neq 6 \cdot A + B$.

Sugestão: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$6 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right] \neq 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

20. Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X + \cancel{2Y} = \cancel{2A} - 2B \\ -3X - \cancel{2Y} = -\cancel{2A} + B \end{cases}$$
$$X = -B$$

Como $2X + Y = A - B$, então:

$2 \cdot (-B) + Y = A - B \Rightarrow Y = A + B$

Assim: $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

Portanto: $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

21. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 12 & 0 + 4 \\ 1 - 6 & 0 + 2 \\ 0 + 3 & 0 - 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ não é possível

Espera-se que os alunos percebam que o número de colunas da matriz B é diferente do número de linhas da matriz A; logo, não é possível calcular o produto $B \cdot A$.

c) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ 2 - 2 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -20 + (-4) \\ -10 + (-2) \\ 6 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

e) $A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + 0 \\ -6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 28 \\ 2 - 14 \\ 0 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

MODERNA

22. $\begin{pmatrix} -3 & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 - 3y \\ 2x - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -6 - 3y = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{7}{3} \\ 2x - 6 = -5 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto: $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$

23. Aplicando à equação matricial as propriedades da adição, obtemos:

$A \cdot X + B + (-B) = C + (-B) \Rightarrow A \cdot X = C - B$

Calculando $C - B$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

Então: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot X_{m\times n} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}_{2\times 1}$

Assim, são condições para ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter duas linhas, pois a matriz A tem duas colunas;
- a matriz X ter uma coluna, pois a matriz produto tem uma coluna.

Portanto:

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Resolvendo a equação $A \cdot X = C - B$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -b \\ 3a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} -b = -8 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = 8 \text{ e } a = -3$$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

24. $X_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

Assim, são condições para ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter duas linhas, pois a matriz produto tem duas linhas;
- a matriz X ter duas colunas, pois a matriz A tem duas linhas.

Portanto: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Teremos, então:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a + 5b & 2a + b \\ 3c + 5d & 2c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes e resolvendo os sistemas, obtemos:

- $\begin{cases} 3a + 5b = 3 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 0$
- $\begin{cases} 3c + 5d = 5 \\ 2c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \text{ e } d = 1$

Logo: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

MODERNA

Observando a matriz X obtida, podemos concluir que é a matriz identidade.

Espera-se que os alunos percebam que a matriz identidade é a matriz tal que $X \cdot A = A$, ou seja, é o elemento neutro na multiplicação de matrizes.

25. Resposta possível:

Vamos supor que $A = (4)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A \cdot I_1 = (4) \cdot (1) = (4)$

$I_1 \cdot A = (1) \cdot (4) = (4)$

$$B \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I_2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_4 \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Os produtos obtidos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

Espera-se que os alunos percebam que o produto de qualquer matriz pela matriz identidade (I), em qualquer ordem, é a própria matriz.

Comentário: Verifique se o objetivo dessa questão foi atingido pedindo aos alunos que, sem efetuar a multiplicação, obtenham os produtos $M \cdot I_2$ e $I_2 \cdot M$, em que a matriz M tem ordem 2 e $m_{11} = x$, $m_{12} = y$, $m_{21} = z$ e $m_{22} = w$.

26. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 300 + 3 \cdot 150 + 4 \cdot 200 \\ 3 \cdot 300 + 3 \cdot 150 + 4 \cdot 200 \\ 1 \cdot 300 + 2 \cdot 150 + 6 \cdot 200 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.850 \\ 2.150 \\ 1.800 \end{pmatrix}$$

A gráfica que apresentou o menor custo foi a C.

b) $(0{,}25 \;\; 0{,}45 \;\; 0{,}30) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (2{,}15 \;\; 2{,}70 \;\; 4{,}60)$

O custo unitário médio que a agência teve em cada tipo de impressão foi de R\$ 2,15, R\$ 2,70 e R\$ 4,60, respectivamente, para PB, CK e CKX.

MODERNA

27. a) $\det A = |2| = 2$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5$

c) $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{array}$$
$$\begin{array}{cccccc} -3 & -8 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}$$

Assim, obtemos:

$\det C = -12 - (-3 - 8) = -1$

28. a) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{cccccc} 8 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

Assim, obtemos:

$(8 + 0 + 0) - (8 + 0 + 0) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0.

b) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & 0 & a & a & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & c \\ b & 0 & b & b & 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{cccccc} abc & 0 & 0 & abc & 0 & 0 \end{array}$$

Assim, obtemos:

$(abc) - (abc) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0.

29. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$

$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 8 = -14$

$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -3$

Então:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 3 + (-14) - (-3) = -8$

30. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -4 & -20 \end{pmatrix}$

Então:

$\det (A \cdot B) = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -4 & -20 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-20) - 10 \cdot (-4) = 20$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

Então:

$\det (B \cdot A) = \begin{vmatrix} -12 & 16 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} =$

$= (-7) \cdot (-12) - 16 \cdot 4 = 20$

c) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-3) = 5$

$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 4 \cdot (-1) = 4$

Então: $\det A \cdot \det B = 5 \cdot 4 = 20$

31. a) $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Então: $\det (A + B) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -12$

b) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = -25$

Então: $3 \cdot \det A = 3 \cdot (-25) = -75$

c) $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 21 & 12 \end{pmatrix}$

Então:

$\det 3A = \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 21 & 12 \end{vmatrix} = -3 \cdot (12) - 9 \cdot 21 = -225$

d) $\det A + \det B = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -1 \cdot 4 - 3 \cdot 7 + 0 - 1 \cdot (-3) = -22$

32. a) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \end{array}$$
$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Assim, obtemos:

$0 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 0$

Portanto, o determinante é igual a 0, pois uma matriz com uma linha de zeros tem determinante igual a zero.

b) • Caso em que uma linha é “o dobro de outra linha”:

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ 2a & 2b & 2c & 2a & 2b \\ d & e & f & d & e \end{array}$$
$$\begin{array}{cccccc} 2bcd & 2ace & 2abf & 2abf & 2bcd & 2ace \end{array}$$

Assim, obtemos:

$(2abf + 2bcd + 2ace) - (2bcd + 2ace + 2abf) = 0$

MODERNA

Logo, uma matriz em que uma linha é o "dobro de outra linha" tem determinante igual a zero.

- Caso em que uma linha é "o triplo de outra linha":

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ 3a & 3b & 3c & 3a & 3b \\ d & e & f & d & e \end{array}$$

$3bcd \quad 3ace \quad 3abf \qquad 3abf \quad 3bcd \quad 3ace$

Assim, obtemos:

$(3abf + 3bcd + 3ace) - (3bcd + 3ace + 3abf) = 0$

Então, uma matriz em que uma linha é o "triplo de outra linha" tem determinante igual a zero.

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix} = 3ad - 3bc = 3 \cdot (ad - bc)$

$\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} = 3ad - 3bc = 3 \cdot (ad - bc)$

Portanto, se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma linha ou coluna triplicada, seu valor triplica.

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Logo, o determinante de uma matriz de ordem 2 é igual ao da matriz obtida dessa, trocando-se as linhas por colunas.

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$

$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$

Então, os determinantes que têm linhas ou colunas permutadas são opostos.

f) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \end{array}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \qquad abc \quad 0 \quad 0$

Assim, obtemos:

$(abc + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = abc$

Portanto, o determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Comentário: Esse é um exercício importante para que os alunos descubram por si, ou em grupo, certas propriedades dos determinantes.

33. $\det I_1 = |1| = 1 \qquad \det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

$\det I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \qquad 1 \quad 0 \quad 0$

Assim, obtemos:

$\det I_3 = (1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 1$

Portanto, o determinante de I_4 deve ser 1.

Espera-se que os alunos respondam que o determinante de I_4 é igual a 1.

Comentário: Após a resolução da questão, que é uma ampliação do exercício **31**, conduzir os alunos à dedução de que o determinante da matriz identidade será sempre 1.

Exercícios complementares

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, temos:

$a_{11} = 1 - 1 = 0 \qquad b_{11} = \dfrac{3 \cdot (1 - 1)}{1 + 1} = 0$

$a_{12} = 1 - 2 = -1 \qquad b_{12} = \dfrac{3 \cdot (1 - 2)}{1 + 2} = -1$

$a_{21} = 2 - 1 = 1 \qquad b_{21} = \dfrac{3 \cdot (2 - 1)}{2 + 1} = 1$

$a_{22} = 2 - 2 = 0 \qquad b_{22} = \dfrac{3 \cdot (2 - 2)}{2 + 2} = 0$

Portanto: $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Aplicando a lei de formação, temos:

$a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad b_{11} = 2 \cdot 1 - 1 + 1 = 2$
$a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \qquad b_{12} = 2 \cdot 1 - 2 + 1 = 1$
$a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \qquad b_{13} = 2 \cdot 1 - 3 + 1 = 0$
$a_{21} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad b_{21} = 2 \cdot 2 - 1 + 1 = 4$
$a_{22} = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \qquad b_{22} = 2 \cdot 2 - 2 + 1 = 3$
$a_{23} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \qquad b_{23} = 2 \cdot 2 - 3 + 1 = 2$
$a_{31} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \qquad b_{31} = 2 \cdot 3 - 1 + 1 = 6$
$a_{32} = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \qquad b_{32} = 2 \cdot 3 - 2 + 1 = 5$
$a_{33} = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \qquad b_{33} = 2 \cdot 3 - 3 + 1 = 4$

Agora, vamos calcular: $X = 2 \cdot A - 3 \cdot B$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto: $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

MODERNA

3. a) Errado, pois a quantidade de produto do tipo P_2 vendido pela loja L_2 é 10 (2ª linha e 2ª coluna).

b) Errado, pois a quantidade de produto do tipo P_1 vendido pela loja L_3 é 20 (1ª linha e 3ª coluna).

c) Errado, pois a soma das quantidades de produtos P_3 vendidos pelas três lojas é 39 (12 + 16 + 11).

d) Errado, pois com $i = 1, 2, 3$ a soma das quantidades de produtos P_i vendidos por L_i é 141 (30 + 19 + 20 + + 15 + 10 + 8 + 12 + 16 + 11).

e) Correto.

alternativa e

4. Temos:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } S = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

a) $H_{3 \times 2}$, $S_{2 \times 5}$ e $(H \cdot S)_{3 \times 5}$

b) $$H \cdot S = \begin{pmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{pmatrix}$$

O produto nos dá o total de peças dos itens A, B e C produzidas em cada dia da semana.

c) Na segunda-feira são produzidos 62 itens B e na quinta-feira são produzidos 27 itens C.

5. a) Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} x & 3 & x & x & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & x & 1 & 2 \end{array}$$
$$4x \quad 2x \quad 6x \quad 4x^2 \quad 3 \quad 4x$$

Assim, obtemos:

$(4x^2 + 3 + 4x) - (4x + 2x + 6x) = 5$

Portanto:

$4x^2 - 8x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 - \sqrt{6}}{2}$ ou $x = \dfrac{2 + \sqrt{6}}{2}$

b) $$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Pela regra de Sarrus:

$$\begin{array}{|ccc|cc} 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ x & 2 & 4 & x & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$
$$4 \quad 0 \quad -3x \quad 0 \quad 12 \quad 2x$$

Assim, obtemos:

$(12 + 2x) - (4 - 3x) = 5x + 8$

Calculando o segundo determinante:

$$\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3x) - (-1) \cdot 0 = 6x$$

Assim:

$(5x + 8) - (6x) = 6 \Rightarrow x = 2$

6. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1$$

Calculando $(\det A)^n$ como um número inteiro positivo, temos:

$(\det A)^n = 1^n = 1$

7. $$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x + 1 & 3y + 5 \\ 2x + \frac{2}{3} & 2y + \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes e resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 3x + 1 = 0 \\ 3y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ e } y = -\frac{5}{3}$$

Portanto: $$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

8. a) Aplicando à equação matricial as propriedades da adição, obtemos:

$X - 3B + (+3B) = I_3 + (3B) \Rightarrow X = I_3 + 3B$

Então:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 0 \\ -3 & -5 & 9 \\ 21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

MODERNA

b) Temos $X = I_3 + 3B$, então:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ -21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

9. Na matriz A, as linhas pares serão todas formadas por 1 e as ímpares por -1. A segunda coluna da matriz B será formada por potências de 2.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} & 2^1 & & & \dots \\ & 2^2 & & & \dots \\ & 2^3 & & & \dots \\ & 2^4 & & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Multiplicando a 4ª linha da matriz A pela 2ª coluna da matriz B, obtemos a expressão no primeiro membro da equação a seguir:

$$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \dots + 1 \cdot 2^n = 4.094$$

Para determinar n que é o número de linhas da matriz B, usamos a fórmula da soma de uma PG finita.

$$\frac{2 \cdot \left(2^n - 1\right)}{2 - 1} = 4.094$$

$$2^n = 2.047 - 1$$

$$2^n = 2.046$$

$$n = 11$$

alternativa c

Autoavaliação

1. Se uma matriz possui o número de linhas igual ao número de colunas, ela é uma matriz quadrada.

Como a matriz é de ordem 2, ou seja, é do tipo 2×2, essa matriz é quadrada.

alternativa b

2. De acordo com a definição, só podemos adicionar ou subtrair matrizes de mesmo tipo.

alternativa c

3. Para $4 \cdot A \cdot B = X$, temos:

$$4 \cdot A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = X_{m \times n}$$

Assim, é condição para ocorrência dessa multiplicação que a matriz X tenha duas linhas e duas colunas.

Para $4 \cdot B \cdot A = Y$, temos:

$$4 \cdot B_{3 \times 2} \cdot A_{2 \times 3} = Y_{m \times n}$$

Portanto, é condição para ocorrência dessa multiplicação que a matriz Y tenha três linhas e três colunas.

Logo, os produtos $4 \cdot A \cdot B$ e $4 \cdot B \cdot A$ são, respectivamente, dos tipos 2×2 e 3×3.

alternativa d

4. As matrizes são diagonais, pois os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos.

alternativa d

5. Na multiplicação de matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda.

alternativa a

6. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$

A matriz produto terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz. Portanto, será do tipo 3×4.
alternativa a

7. Na multiplicação de matrizes, não é válida a propriedade comutativa.

alternativa c

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$

alternativa d

9. Se $\det A \neq 0$, não se pode afirmar que a matriz é uma matriz linha, nem que é matriz nula e nem que é matriz diagonal.

alternativa d

10. Considerando $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, obtemos $\det A = ad - bc$.

Vamos examinar as situações dadas nas alternativas.

- $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$

  $\det(-A) = (-a)\cdot(-d) - (-b)\cdot(-c) = ad - bc$

  Logo: $\det(-A) = \det A = 5$

- $\frac{A}{10} = \frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{10} & \frac{b}{10} \\ \frac{c}{10} & \frac{d}{10} \end{bmatrix}$

  $\det \frac{A}{10} = \frac{a}{10}\cdot\frac{d}{10} - \frac{b}{10}\cdot\frac{c}{10} = \frac{1}{100}\cdot(ad - bc)$

  Então: $\det \frac{A}{10} = \frac{1}{100}\cdot 5 = 0{,}05 \neq 0{,}5$

- $2A = 2\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$

  $\det 2A = 2a\cdot 2d - 2b\cdot 2c = 4\cdot(ad - bc)$

  Logo: $\det 2A = 4\cdot 5 = 20$

alternativa d

Compreensão de texto

1. De acordo com os quadros a seguir.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

I	D	U	H	P	R	V	X	P	D	I	H	V	W	D	V	X	U	S	U	H	V	D	S	D	U	D	R	M	R	D	R
F	A	R	E	M	O	S	U	M	A	F	E	S	T	A	S	U	R	P	R	E	S	A	P	A	R	A	O	J	O	A	O

A frase decodificada é:
FAREMOS UMA FESTA SURPRESA PARA O JOÃO.

2. Separamos as letras em pares, ordenadamente conforme a escrita.
SO RR IA
Depois, formamos as matrizes do tipo 2×1 com os pares de letras e o quadro de correspondência numérica.

SO	RR	IA
$\begin{pmatrix} 19 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

Multiplicamos a matriz A pelas matrizes do tipo 2×1.

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186 \\ 163 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 162 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Como todos os elementos das matrizes produtos são maiores do que 26, usaremos os restos da divisão desses elementos por 26.
No quadro a seguir, temos os elementos com os seus restos e as letras conforme o quadro de correspondência numérica.

elementos	186	163	180	162	82	65
restos	4	7	24	6	4	13
cifras	D	G	X	F	D	M

Portanto, a palavra SORRIA ficou codificada como DGXFDM.

MODERNA

3. Primeiro, separamos as letras em pares e determinamos o correspondente numérico de cada letra.

D	G	X	F	D	M
4	7	24	6	4	13

Depois, formamos matrizes do tipo 2×1 com os números obtidos.

DG	XF	DM
$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}$

Agora, multiplicamos a matriz de cada alternativa pelas matrizes obtidas do tipo 2×1 para decodificar a palavra.
Matriz da alternativa a:
Par de letras DG.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 40 por 26: 14.

$18 \rightarrow$ R e $14 \rightarrow$ N

Paramos no primeiro par porque as letras decodificadas foram R e N, diferentes de S e O da palavra SORRIA.
Matriz da alternativa b:
Par de letras DG.

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97 \\ 190 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 97 por 26: 19.
Resto da divisão de 190 por 26: 8.

$19 \rightarrow$ S e $8 \rightarrow$ H

Paramos no primeiro par porque a segunda letra decodificada foi H, diferentemente da segunda letra da palavra SORRIA.
Matriz da alternativa c:
Par de letras DG.

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97 \\ 197 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 97 por 26: 19.
Resto da divisão de 197 por 26: 15.

$19 \rightarrow$ S e $15 \rightarrow$ O

Par de letras XF.

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 642 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 330 por 26: 18.
Resto da divisão de 642 por 26: 18.

$18 \rightarrow$ R e $18 \rightarrow$ R

Par de letras DM.

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 \\ 287 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 139 por 26: 9.
Resto da divisão de 287 por 26: 1.

$9 \rightarrow$ I e $1 \rightarrow$ A

Com os produtos feitos, decodificamos a palavra DGXFDM e obtemos a palavra SORRIA.
alternativa c

4. Primeiro, separamos as letras em pares e determinamos o correspondente numérico de cada letra.

A	J	J	Q	W	E	E	V	E	R
1	10	10	17	23	5	5	22	5	18

Depois, formamos matrizes do tipo 2×1 com os números obtidos.

AJ	JQ	WE	EV	ER
$\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 22 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix}$

Multiplicamos a matriz $\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix}$ pelas matrizes obtidas do tipo 2×1 para decodificar a palavra.
Para o par de letras AJ:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 \\ 71 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 135 por 26: 5.
Resto da divisão de 71 por 26: 19.

$5 \rightarrow$ E e $19 \rightarrow$ S

Para o par de letras JQ:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 354 \\ 295 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 354 por 26: 16.
Resto da divisão de 295 por 26: 9.

$16 \rightarrow$ P e $9 \rightarrow$ I

Para o par de letras WE:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 405 \\ 508 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 405 por 26: 15.
Resto da divisão de 508 por 26: 14.

$15 \rightarrow$ O e $14 \rightarrow$ N

Para o par de letras EV:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 339 \\ 215 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 339 por 26: 1.
Resto da divisão de 215 por 26: 7.

$1 \rightarrow$ A e $7 \rightarrow$ G

Para o par de letras ER:

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 291 \\ 195 \end{pmatrix}$$

Resto da divisão de 291 por 26: 5.
Resto da divisão de 195 por 26: 13.

$5 \rightarrow$ E e $13 \rightarrow$ M

Com a decodificação da palavra AJJQWEEVER, obtemos a palavra ESPIONAGEM.

MODERNA

Capítulo 2 – Sistemas lineares

Exercícios propostos

1. **a)** Substituindo x por 1, y por 3 e z por 2 na equação dada, obtemos: $2 \cdot 1 + 3 + 3 \cdot 2 = 11$, que é uma sentença verdadeira.
Logo, o terno ordenado (1, 3, 2) é solução da equação linear $2x + y + 3z = 11$.

b) Substituindo x, y e z por 2 na equação dada, obtemos: $2 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 2 \neq 11$; portanto, a equação linear não é satisfeita.

Logo, o terno ordenado (2, 2, 2) não é solução da equação $2x + y + 3z = 11$.

2. Para que o par ordenado $(3, k)$ seja solução da equação dada, devemos ter:

$2x + 3y = 12$

$2 \cdot 3 + 3 \cdot k = 12$

$6 + 3k = 12$

$k = 2$

Logo, se $k = 2$, o par $(3, k)$ é solução da equação $2x + 3y = 12$.

3. Respostas possíveis:
Os ternos (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2) são soluções da equação $2a + 3b - c = 0$.

4. Substituindo x por 3 e y por $\frac{2}{3}$ na equação $x - 3y = 1$, obtemos: $3 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$, que é uma sentença verdadeira.

Substituindo x por 3 e y por $\frac{2}{3}$ na equação $x + 3y = 5$, obtemos: $3 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 5$, que é uma sentença verdadeira.

Logo, $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ é solução comum das duas equações dadas.

5. Resposta pessoal.

6. Para o ponto $A = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, temos:

$a \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + b = 1$ (I)

Para o ponto $B = (1, 2)$, temos:

$a \cdot 1 + b = 2$ (II)

Devemos resolver o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} \frac{a}{3} + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (−3) e adicionando as duas equações, obtemos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -\cancel{a} - 3b = -3 \\ \cancel{a} + b = 2 \end{cases} \\ \hline -2b = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{array}$$

Substituindo b por $\frac{1}{2}$ em (II), obtemos $a = \frac{3}{2}$.

Logo, $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$.

7. Da sentença $(2x + y) \cdot (-x + 3y) = 0$, temos $2x + y = 0$ ou $-x + 3y = 0$.

Com essas equações, formamos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 & \text{(I)} \\ -x + 3y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (II) por 2 e adicionando a equação obtida, membro a membro, à equação (I), temos:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} \cancel{2x} + y = 0 \\ -\cancel{2x} + 6y = 0 \end{cases} \\ \hline 7y = 0 \end{array}$$

Assim, $y = 0$ e, substituindo y por 0 na equação (I), temos:

$2x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, $S = \{(0, 0)\}$.

Comentário: Se julgar necessário, diga aos alunos que uma equação do tipo $A \cdot B = 0$ tem solução igual à solução do sistema $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$.

8. A reta r passa pelos pontos (2, 0) e (0, −1).

Então: $m \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$

A reta s passa pelos pontos (6, 0) e (0, 1).

Então: $0 + n \cdot 1 = 6 \Rightarrow n = 6$

O ponto P pertence à reta r e à reta s; logo, suas coordenadas constituem a solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 & \text{(I)} \\ x + 6y = 6 & \text{(II)} \end{cases}$$

Vamos multiplicar a equação (II) por (−1) e adicionar a equação obtida, membro a membro, à equação (I).

$$\begin{array}{r} \begin{cases} \cancel{x} - 2y = 2 \\ -\cancel{x} - 6y = -6 \end{cases} \\ \hline -8y = -4 \end{array}$$

Assim, $y = \frac{1}{2}$ e, substituindo y por $\frac{1}{2}$ em (I), temos:

$x - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = 3$

Portanto, $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $m = 1$ e $n = 6$.

9. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$

a) Respostas possíveis:

Para $x - y = 0$:

(0, 0), (1, 1), (−2, −2)

Para $x + y = 2$:

(1, 1), (2, 0), (0, 2)

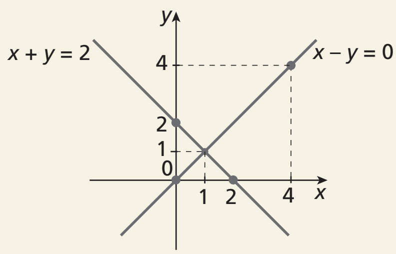
MODERNA

b) $x - y = 0$

x	y
0	0
4	4

$x + y = 2$

x	y
0	2
2	0



ADILSON SECCO

c) A solução gráfica do sistema é o ponto de intersecção das retas, ou seja, $S = \{(1, 1)\}$.

Comentário: Avalie a conveniência de explorar mais o exercício pedindo aos alunos que tracem, no plano cartesiano, uma reta paralela ao eixo y pelo ponto (3, 0). Em seguida, eles devem identificar que ponto dessa reta é solução da primeira equação do sistema e que ponto dela é solução da segunda equação. Por fim, devem verificar que as coordenadas desses pontos satisfazem as respectivas equações.

10. Sendo x o número de meninas e y o número de meninos, representamos o problema com o sistema:

$$\begin{cases} 2(x-5) = y \\ y - 7 = x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 10 \quad \text{(I)} \\ -x + y = 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (II) por 2 e adicionamos a equação obtida, membro a membro, à equação (I):

$$\begin{cases} \cancel{2x} - y = 10 \\ -\cancel{2x} + 2y = 4 \end{cases}$$
$$y = 14$$

Substituímos y por 14 em (I):

$2x - 14 = 10 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$

Assim, $x + y = 26$.

Portanto, no total, 26 alunos faziam prova nessa sala.

11. Chamando de x o tipo de leite com 2% de gordura e de y o tipo com 4% de gordura, podemos formar o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ \dfrac{2}{100} \cdot x + \dfrac{4}{100} \cdot y = \dfrac{2,5}{100} \cdot 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 80 \quad \text{(I)} \\ 2x + 4y = 200 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicamos a equação (I) por (−2) e adicionamos a equação obtida, membro a membro, à equação (II):

$$\begin{cases} -\cancel{2x} - 2y = -160 \\ \cancel{2x} + 4y = 200 \end{cases}$$
$$2y = 40$$

Assim, $y = 20$ e substituindo y por 20 em (II), obtemos:

$2x + 4 \cdot 20 = 200 \Rightarrow 2x = 200 - 80 \Rightarrow x = 60$

Portanto, foram misturados 60 ℓ de leite com 2% de gordura e 20 ℓ de leite com 4% de gordura.

12. Resposta pessoal.

Comentário: Caso haja dificuldades, sugira aos alunos que elaborem sistemas que tenham resolução simples. Por exemplo, $x + y = 6$ e $x - y = 2$. Nesse caso, temos como solução o par (4, 2).

13. a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 3$ e $y = 0$.
Logo, o conjunto solução é $S = \{(3, 0)\}$, isto é, o sistema tem uma única solução.
Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

A segunda equação é equivalente à primeira (basta multiplicar por 2 todos os termos da primeira para obter a segunda). Algumas das infinitas soluções desse sistema são (4, 1), (1, −2), (3, 0), (0, −3), (5, 2), (−3, −6) e (−1,5; −4,5). Note que essas soluções são do tipo $(3 + \alpha, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo, $S = \{(3 + \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, e esse sistema é possível e indeterminado (SPI).

c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{3x} - \cancel{3y} = 9 \\ -\cancel{3x} + \cancel{3y} = 9 \end{cases}$$
$$0x + 0y = 18 \Rightarrow 0 = 18 \text{ (sentença falsa)}$$

Não há valores reais para x e y que tornem a sentença verdadeira. Portanto, $S = \varnothing$, o sistema é impossível (SI).

d) $\begin{cases} x = 3 + y \\ y = x - 3 \end{cases}$

O sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Ou seja, as duas equações são idênticas. Algumas das infinitas soluções desse sistema são (4, 1), (1, −2), (3, 0) e (5, 2). Note que essas soluções são do tipo $(3 + \alpha, \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo, $S = \{(3 + \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, e esse sistema é possível e indeterminado (SPI).

Comentário: Explore o exercício pedindo aos alunos as determinações das soluções dos sistemas por meio de um *software* de construções de gráficos. Abordagens que relacionam as resoluções algébricas com as geométricas podem facilitar o entendimento da teoria.

14. $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ 3x - 2y + kz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ kz = 0 \end{cases}$

a) Se $k = 0$, temos um SPI.
Fazendo $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, as infinitas soluções do sistema são da forma $(2, 3, \alpha)$.

b) Se $k \neq 0$, temos um sistema possível e determinado cuja solução para o sistema é (2, 3, 0).

15. a) Multiplicamos a primeira equação por (−2) e a segunda equação por 3 e somando as equações obtidas, membro a membro, obtemos:

$$\begin{cases} -\cancel{12x} - \cancel{6y} = -2a \\ \cancel{12x} + \cancel{6y} = 15 \end{cases}$$
$$0x + 0y = -2a + 15$$

Ou seja, o sistema só é possível e indeterminado se:

$-2a + 15 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{15}{2}$

Para $a = \dfrac{15}{2}$, temos: $\begin{cases} 6x + 3y = \dfrac{15}{2} \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

Para $y = \alpha$, temos: $4x + 2\alpha = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5 - 2\alpha}{4}$

MODERNA

Assim, o conjunto solução do sistema pode ser dado por $S = \left\{\left(\frac{5-2\alpha}{4}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

b) Do item **a**, podemos observar que uma equação é múltipla da outra. Assim, podemos concluir que não existe um valor de a que torne o sistema possível e determinado.

16. Atribuímos incógnitas às substâncias:

$aH_2 + bO_2 \rightarrow cH_2O$

Primeiro, determinamos as equações:

Hidrogênio:

$2a = 2c \Rightarrow a = c$

Oxigênio:

$2b = c$

Em seguida, obtemos o sistema e o resolvemos:

$$\begin{cases} a = c \\ 2b = c \end{cases} \Rightarrow a = 2b = c$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado.

Fazendo $c = \alpha$, temos a seguinte solução geral para o sistema: $S = \left\{\left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha, \alpha\right)\right\}$. Como precisamos dos menores valores inteiros para balancear a equação, fazemos $\alpha = 2$ e substituímos os valores do terno (2, 1 e 2) pelas incógnitas a, b e c, respectivamente e obtemos:

$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$

17. Resposta pessoal.

Comentário: Para que o sistema do exercício **15** seja impossível, devemos ter $a \neq \frac{15}{2}$.

18. $S_1 = \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y = 6 \end{cases}$ e $S_2 = \begin{cases} 3x - y = m \\ x + y = n \end{cases}$

Resolvendo S_1, obtemos $x = 1$ e $y = 2$.

Logo, (1, 2) é solução de S_1.

Como S_1 e S_2 devem ser sistemas equivalentes, então (1, 2) também deve ser solução de S_2.

Substituindo x por 1 e y por 2 em S_2, obtemos:

$$\begin{cases} m = 3 \cdot 1 - 2 \\ n = 1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Logo, os sistemas S_1 e S_2 serão equivalentes para $m = 1$ e $n = 3$.

19. Como o sistema é homogêneo, temos:

$$\begin{cases} a - 2 = 0 \\ 2a + c = 0 \\ a + 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -4 \\ b = -3 \end{cases}$$

Logo, $a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$.

20. a) $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

21. a) $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

22. a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

23. Substituindo x por $\frac{1}{2}$ e y por $\frac{1}{5}$ na equação matricial dada, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} + (-5) \cdot \frac{1}{5} \\ 6 \cdot \frac{1}{2} + (-5) \cdot \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Portanto, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ é solução da equação matricial dada.

24. a) Substituindo x, y e z por 1, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença falsa.

Logo, (1, 1, 1) não é solução da equação matricial dada.

b) Substituindo x, y e z por 0, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Logo, (0, 0, 0) é solução da equação matricial dada.

c) Substituindo x por (−3), y por 1 e z por 2, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Logo, (−3, 1, 2) é solução da equação matricial dada.

MODERNA

d) Substituindo x por 3, y por (-1) e z por (-2), obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença verdadeira.

Portanto, $(3, -1, -2)$ é solução da equação matricial dada.

e) Substituindo x por (-1), y por 1 e z por 0, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A igualdade acima é uma sentença falsa.

Logo, $(-1, 1, 0)$ não é solução da equação matricial dada.

Portanto, os ternos das alternativas **b**, **c** e **d** são soluções da equação dada.

Comentário: Se julgar oportuno, comente com os alunos que o sistema representado pela equação matricial nesse exercício é homogêneo. Portanto, o item *b* é a sua solução trivial.

25. Resposta pessoal.

26. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \quad\ \ y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Portanto, $S = \{(2, 8)\}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad\ \ y + z = 5 \Rightarrow y = 2 \text{ e } x = 6 - 2 - 3 = 1 \\ \qquad\ \ z = 3 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{(1, 2, 3)\}$.

Comentário: Caso necessário, retome esse exercício quando abordar sistema escalonado. Comente, então, com os alunos que as equações matriciais, como as que aparecem nessa questão, isto é, do tipo $A_{n \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$, em que os elementos de A são dados por $a_{ij} = 0$, se $i > j$, são associadas a sistemas na forma escalonada.

27. $S_1 = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 1$

$S_2 = \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 1$

Portanto, para que os sistemas sejam equivalentes, devemos ter $a = 0$ e $b = 1$.

28. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

O sistema correspondente a essa equação matricial é:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos o conjunto solução $S = \{(2, 1)\}$.

Substituindo x por 2 e y por 1 em

$\begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolvendo, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2m + 5 \\ 8 - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 5 = 0 \\ 8 - n = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{5}{2} \\ n = 3 \end{cases}$$

Portanto, para que essas equações matriciais representem sistemas lineares equivalentes, devemos ter $m = -\dfrac{5}{2}$ e $n = 3$.

29. $S_3 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(G)} \\ \qquad\ \ y + 2z = 0 & \text{(H)} \\ \qquad\qquad 6z = 6 & \text{(I)} \end{cases}$

Pela equação (I):

$6z = 6 \Rightarrow z = 1$

Substituindo z por 1 na equação (H), obtemos:

$y = -2 \cdot 1$

$y = -2$

Substituindo z por 1 e y por (-2) na equação (G), obtemos:

$-x - 2 \cdot (-2) - 1 = 1$

$x = 2$

Logo, a solução de S_3 é $(2, -2, 1)$.

Substituindo x por 2, y por (-2) e z por 1 nos sistemas S_1 e S_2, obtemos:

$$S_1 = \begin{cases} -2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 & \text{(verdadeira)} \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = -2 & \text{(verdadeira)} \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 1 = 3 & \text{(verdadeira)} \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} -2 - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 & \text{(verdadeira)} \\ -2 + 2 \cdot 1 = 0 & \text{(verdadeira)} \\ -4 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = 6 & \text{(verdadeira)} \end{cases}$$

Logo, $(2, -2, 1)$ também é solução de S_1 e S_2.

30. Resposta pessoal.

Comentário: Esse tipo de exercício faz com que o aluno seja um sujeito ativo na troca do conhecimento. Direcione para que haja discussões sobre os sistemas apresentados e a maneira como foram resolvidos. Se julgar necessário, peça a alguns alunos que escrevam os seus sistemas e as respectivas resoluções no quadro.

31. **a)** $\begin{cases} -3x + 5y = -11 & \text{(I)} \\ \qquad\ \ 2y = -2 & \text{(II)} \end{cases}$

Da equação (II), obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (-1) na equação (I), obtemos $x = 2$.

Assim, $S = \{(2, -1)\}$.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ \quad\ \ y - z = 0 \end{cases}$

MODERNA

O sistema possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} 3x - y + \alpha = 3 \text{(I)} \\ \quad y - \alpha = 0 \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = \alpha$. Substituindo y por α na equação (I), obtemos: $3x - \alpha + \alpha = 3 \Rightarrow x = 1$

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 2$ obtemos o terno (1, 2, 2) que satisfaz o sistema. Assim, a solução do sistema é $S = \{(1, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Como α representa um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções.

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

c) $$\begin{cases} x + y - z = 2 \text{ (I)} \\ -2y + z = 3 \text{ (II)} \\ -4z = 4 \text{ (III)} \end{cases}$$

Da equação (III), obtemos $z = -1$. Substituindo z por (-1) na equação (II), obtemos $y = -2$. Substituindo y e z por (-2) e (-1), respectivamente, obtemos $x = 3$.

Assim, $S = \{(3, -2, -1)\}$

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

d) $$\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$$

O sistema possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - \alpha = -2 \text{ (I)} \\ y + 3\alpha = 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 1 - 3\alpha$. Substituindo y por $(1 - 3\alpha)$ na equação (I), temos:

$$x + 2(1 - 3\alpha) - \alpha = -2$$
$$x + 2 - 6\alpha - \alpha = -2$$
$$x = 7\alpha - 4$$

A solução do sistema é do tipo $(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha)$. Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 1$ obtemos o terno $(3, -2, 1)$ que satisfaz o sistema.

Assim, a solução do sistema é $S = \{(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Como α representa um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções.

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

32. a) $$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + y = 5 \quad \text{(I)} \\ -3y = -9 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 3$.

Substituindo y por 3 na equação (I), obtemos $x = 2$.

Logo, $S = \{(2, 3)\}$.

b) $$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

Para simplificar, escrevemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \quad \text{(I)} \\ 8y = -8 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (-1) na equação (I), obtemos $x = 3$.

Logo, $S = \{(3, -1)\}$.

c) $$\begin{cases} 4x - 2y = 34 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$$

Escrevendo o sistema de forma equivalente, temos:

$$\begin{cases} x + 6y = 2 \quad \text{(I)} \\ 4x - 2y = 34 \text{ (II)} \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-4) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + 6y = 2 \quad \text{(I)} \\ -26y = 26 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (-1) na equação (I), obtemos $x = 8$.

Logo, $S = \{(8, -1)\}$.

d) $$\begin{cases} x + y = -4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.

Assim, temos o sistema original escalonado:

$$\begin{cases} x + y = -4 \text{ (I)} \\ -5y = 15 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = -3$.

Substituindo y por (-3) na equação (I), obtemos $x = -1$.

Logo, $S = \{(-1, -3)\}$.

33. a) $$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-1) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-5) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -2y = -6 \\ -3y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \quad \text{(I)} \\ -y = -3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos $y = 3$.

Substituindo y por 3 na equação (I), obtemos $x = 1$.

Logo, $S = \{(1, 3)\}$, e o sistema é SPD.

MODERNA

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Escrevemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Adicionamos a primeira equação à terceira.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3y = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Como pela segunda equação obtemos $y = \frac{1}{3}$ e, pela terceira, obtemos $y = -2$, o sistema não admite solução.

Logo, $S = \varnothing$, e o sistema é SI.

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por (-1) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 3 \\ 0y + 0z = 1 \end{cases}$$

Como a terceira equação é uma sentença falsa, o sistema não admite solução.

Logo, $S = \varnothing$, e o sistema é SI.

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-1) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -y + 0z = -2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Escrevemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + z + y = 1 \\ z + y = 0 \\ -y = -2 \end{cases}$$

Da terceira equação, obtemos $y = 2$.

Substituindo y por 2 na segunda equação, obtemos $z = -2$.

Substituindo y por 2 e z por (-2) na primeira equação, obtemos $x = 1$.

Logo, $S = \{(1, 2, -2)\}$, e o sistema é SPD.

e) $\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por 2 e a adicionamos à segunda.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 5y - z = 9 \end{cases}$$

O sistema possui duas equações e três incógnitas. Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, α real, temos:

$$\begin{cases} -x + 2y - \alpha = -2 \\ 5y - \alpha = 9 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $y = \frac{9 + \alpha}{5}$ e substituindo esse valor de y na primeira equação, obtemos $x = \frac{28 - 3\alpha}{5}$.

A solução do sistema é do tipo $\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right)$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 1$ obtemos o terno $(5, 2, 1)$ que satisfaz o sistema.

Logo, o seu conjunto solução é

$S = \left\{\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, e o sistema é SPI.

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 5x + 2y + z = 3 \\ 6x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

Conservamos a primeira equação.

Multiplicamos a primeira equação por (-5) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-6) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -17 \\ -3y - 4z = -17 \end{cases}$$

A segunda e a terceira equações são idênticas. Então, podemos escrever o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -3y - 4z = -17 \end{cases}$$

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, α real, temos:

$$\begin{cases} x + y + \alpha = 4 \\ -3y - 4\alpha = -17 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $y = \frac{17 - 4\alpha}{3}$ e, substituindo esse valor de y na primeira equação, obtemos $x = \frac{\alpha - 5}{3}$.

A solução do sistema é do tipo $\left(\dfrac{\alpha - 5}{3}, \dfrac{17-4\alpha}{3}, \alpha\right)$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 5$ obtemos o terno $(0, -1, 5)$ que satisfaz o sistema.

Logo, o conjunto solução é

$S = \left\{\left(\dfrac{\alpha - 5}{3}, \dfrac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, e o sistema é SPI.

Exercícios complementares

1. Substituindo x por 2 e y por k na equação dada, obtemos:

$3k \cdot 2 - k \cdot k + 40 = 0$

$-k^2 + 6k + 40 = 0$

$k = 10$ ou $k = -4$

2. Usando n para representar o número de residências e x para representar o número de recenseadores, obtemos:

$$\begin{cases} x \cdot 102 = n \\ x \cdot 100 = n - 60 \end{cases}$$

$100x = 102x - 60$

$2x = 60$

$x = 30$

Substituindo x por 30 na primeira equação, obtemos:

$n = 30 \cdot 102$

$n = 3.060$

Logo, há 3.060 residências na cidade.

3. Substituindo x por $2m$ e y por $(-m)$ no sistema dado, obtemos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2m - (-m) = -5 \\ 3m \cdot 2m - (-m) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m = -5 \\ 6m^2 + m = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -1 \text{ ou } m = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Dos valores obtidos para m o único que satisfaz as duas equações do sistema é -1. Portanto, $m = -1$.

4. Usando r_A para representar o raio de atendimento da delegacia A, r_B para o raio de B e r_C para o raio de C, temos:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 18 \\ r_A + r_C = 16 \\ r_B + r_C = 12 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-1) e a adicionamos à segunda:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 18 \\ -r_B + r_C = -2 \\ r_B + r_C = 12 \end{cases}$$

Adicionamos a segunda equação à terceira:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 18 \\ -r_B + r_C = -2 \\ 2r_C = 10 \end{cases}$$

Da terceira equação, obtemos $r_C = 5$.

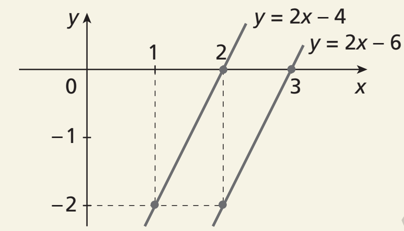
Substituindo r_C por 5 na segunda equação, obtemos $r_B = 7$. Substituindo r_B por 7 na primeira equação, obtemos $r_A = 11$.

Logo, os raios de atendimentos das delegacias A, B e C são, respectivamente, 11 km, 7 km e 5 km.

5. a) $y = 2x - 6$ $\qquad$ $y = 2x - 4$

x	y
2	−2
3	0

x	y
1	−2
2	0



ADILSON SECCO

b) Os gráficos do item **a** são duas retas paralelas, ou seja, não apresentam pontos em comum. Logo, o conjunto solução do sistema formado pelas equações é $S = \varnothing$.

Comentário: A classificação de um sistema linear 2×2 composto de duas equações apresentadas na forma $y = ax + b$ pode ser feita comparando o valor do coeficiente a nas duas equações e, em seguida, o valor do coeficiente b.

6. Chamando de a o preço do sabão da marca A, b o preço do sabão da marca B e c o preço do sabão da marca C, temos:

$$\begin{cases} a = \dfrac{b + c}{2} \\ 2a + b + c = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ 2a + b + c = 14 \end{cases}$$

Adicionando as equações, temos:

$4a = 14$

$a = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$

O preço de três pacotes de 1 kg do sabão da marca A seria $3 \cdot$ R\$ 3,50, ou seja, R\$ 10,50.

alternativa b

7. $$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$$

Das duas primeiras equações, obtemos uma solução para o sistema: $S = \left\{\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)\right\}$

Para que essa solução seja única, ela deve ser válida para a terceira equação também.

Então, substituindo x por $\dfrac{1}{3}$ e y por 1 na terceira equação, obtemos:

$k \cdot \dfrac{1}{3} + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow \dfrac{k}{3} = 3 \Rightarrow k = 9$

8. Substituindo y por 0 no sistema dado, obtemos:

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 0 = 0 \\ x + \lambda \cdot 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda + 1)x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos $x = 3$.

Substituindo x por 3 na primeira equação, obtemos:

$(\lambda + 1) \cdot 3 = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

MODERNA

9. Sejam x, y e z as quantidades de maçãs, peras e laranjas, respectivamente; então:

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 \\ \dfrac{x}{50} + \dfrac{y}{60} + \dfrac{z}{100} = 140 \\ 20 \cdot \left(\dfrac{x}{50}\right) + 40 \cdot \left(\dfrac{y}{60}\right) + 10 \cdot \left(\dfrac{z}{100}\right) = 3.300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 \\ 6x + 5y + 3z = 42.000 \\ 12x + 20y + 3z = 99.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 \\ -y - 3z = -18.000 \\ 8y - 9z = -21.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10.000 & \text{(I)} \\ -y - 3z = -18.000 & \text{(II)} \\ -33z = -165.000 & \text{(III)} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 2.000$, $y = 3.000$ e $z = 5.000$.

Portanto, estão sendo transportadas 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas.

10. a) $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por (-2) e adicionando-a à segunda equação, temos:

$$\begin{cases} \cancel{-2x} - 10y = -6 \\ \cancel{2x} - 3y = 5 \end{cases}$$

$$-13y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{13} \text{ e } x = \frac{34}{13}$$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD), e $S = \left\{\left(\dfrac{34}{13}, \dfrac{1}{13}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 2, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 4$$

Se o sistema admite solução $x = \alpha$, α real, obtemos o valor de $y = 4 - 2\alpha$.

Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI), e $S = \{(\alpha, 4 - 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

11. Usando m e t para representar, respectivamente, o número de manhãs e o número de tardes que durou a viagem e considerando que a viagem teve tantas manhãs quantas tardes, então:

- $m = t$
- número de manhãs com chuva: $m - 6$
- número de tardes com chuva: $t - 3$

Assim:

$$\begin{cases} m = t & \text{(I)} \\ (m - 6) + (t - 3) = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$m - 6 + m - 3 = 5 \Rightarrow m = 7$

Logo, $t = 7$.

Portanto, a viagem durou 7 dias.

alternativa b

12. Montando o sistema de acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} 4A + 6B + 6C + 2D = 50 \text{ (I)} \\ 4A + B + 2C + 3D = 21 \text{ (II)} \\ 2A + 3B + 3C + D = 24 \text{ (III)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (III) por (-2) e adicionando-a à equação (I), temos:

$$\begin{cases} \cancel{4A} + \cancel{6B} + \cancel{6C} + \cancel{2D} = 50 \\ -\cancel{4A} - \cancel{6B} - \cancel{6C} - \cancel{2D} = -48 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Portanto, o sistema é impossível.

alternativa a

13. De acordo com o enunciado e sendo i a idade da criança, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 14 = \dfrac{i}{i + 12} \cdot 42 \\ d = \dfrac{i}{i + 12} \cdot 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14(i + 12) = 42i & \text{(I)} \\ d(i + 12) = 60i & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $14(i + 12) = 42i \Rightarrow 14i + 168 = 42i \Rightarrow i = \dfrac{168}{28} = 6$

Substituindo i por 6 em (II), obtemos:

$d(i + 12) = 60i \Rightarrow d(6 + 12) = 60 \cdot 6 \Rightarrow d = \dfrac{360}{18} = 20$

Portanto, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem de 20 miligramas do medicamento X.

alternativa b

14. O sistema dado é um sistema homogêneo. Logo, admite, pelo menos, a solução trivial (0, 0, 0).

Para fazer o escalonamento, escrevemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 12z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.

Multiplicamos a primeira equação por (-2) e a adicionamos à terceira.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5y - 15z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos a segunda equação por $\left(\dfrac{1}{5}\right)$ e a adicionamos à terceira.

Assim, o sistema original escalonado é: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5y - 15z = 0 \end{cases}$

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, α real, temos $y = 3\alpha$ e $x = 2\alpha$.

A solução do sistema é do tipo $(2\alpha, 3\alpha, \alpha)$. Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Em particular, para $\alpha = 1$ obtemos o terno (2, 3, 1) que satisfaz o sistema.

Portanto, $S = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

15. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 3x + 6y + 9z = 4 \end{cases}$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ (falso)} \end{cases}$$

Portanto, o sistema é impossível.

alternativa c

MODERNA

16. **a)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y + 3z = -1 \\ -y = 2 \end{cases}$

Da terceira equação, obtemos $y = -2$.

Substituindo y por (-2) na segunda equação, obtemos $z = \frac{5}{3}$ e, na primeira equação, obtemos $x = 5$.

Logo, $S = \left\{\left(5, -2, \frac{5}{3}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} u + x + y + z = 6 \\ -x - y + z = 0 \\ -y + z = 1 \\ -z = -3 \end{cases}$

Da quarta equação, obtemos $z = 3$.

Substituindo z por 3 na terceira equação, obtemos $y = 2$.

Substituindo z por 3 e y por 2 na segunda equação, obtemos $x = 1$.

Substituindo z por 3, y por 2 e x por 1 na primeira equação, obtemos $u = 0$.

Logo, $S = \{(0, 1, 2, 3)\}$.

c) $\begin{cases} a + 2b + c = 10 \\ a + b - c = -1 \\ 2a - 3b + 2c = 13 \end{cases}$

Adicionando o oposto do dobro da primeira equação à terceira, obtemos $b = 1$.

Em seguida, substituindo b na primeira e segunda equações e adicionando a primeira à segunda, obtemos $a = 3$.

Finalmente, substituindo a e b na segunda equação, obtemos $c = 5$.

Logo, $S = \{(3, 1, 5)\}$.

17. Seja x a quantidade de amendoim, y a quantidade de castanha-de-caju e z a quantidade de castanha-do-pará, todas elas em quilograma.

a) Considerando que o quilograma do amendoim custa R$ 5,00, o da castanha-de-caju custa R$ 20,00 e o da castanha-do-pará custa R$ 16,00, temos:

$5x + 20y + 16z = 5{,}75$ (I)

Como cada lata deve conter meio quilograma da mistura, temos:

$x + y + z = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 2y + 2z = 1$ (II)

Como a quantidade de castanha-de-caju deve ser um terço da soma das quantidades das outras duas, temos:

$y = \frac{x + z}{3}$

$x - 3y + z = 0$ (III)

Com as equações (I), (II) e (III), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

b) No sistema obtido no item **a**, trocando de lugar a primeira e a terceira equações, temos:

$$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 & \text{(I)} \\ 2x + 2y + 2z = 1 & \text{(II)} \\ 5x + 20y + 16z = 5{,}75 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (-2) e adicionando à equação (II); em seguida, multiplicando a equação (I) por (-5) e adicionando à equação (III), temos:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0x + 8y + 0z = 1 \\ 0x + 35y + 11z = 5{,}75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0x + 8y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 11z = 1{,}375 \end{cases}$$

Assim, obtemos $z = 0{,}125$, $y = 0{,}125$ e $x = 0{,}25$.

Logo, a quantidade de amendoim é 0,250 kg ou 250 g, a de castanha-de-caju é 0,125 kg ou 125 g e a de castanha-do-pará é 0,125 kg ou 125 g.

Comentário: Nessa atividade e em outras, igualmente contextualizadas, é interessante observar a importância do estudo de sistemas como instrumento da resolução de problemas do dia a dia.

18. $\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 4 \\ 3x - 3y + z - t = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -x - y + 2t = 6 \end{cases}$

Dividimos a primeira equação por 2.

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 2 \\ 3x - 3y + z - t = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -x - y + 2t = 6 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por (-3) e a adicionamos à segunda.

Adicionamos a primeira equação à quarta.

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 2 \\ -\frac{15}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{5}{2}t = -1 \\ 2y + z = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{5}{2}t = 8 \end{cases}$$

Adicionamos a segunda equação à quarta.

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 2 \\ -\frac{15}{2}y - \frac{1}{2}z - \frac{5}{2}t = -1 \\ 2y + z = 0 \\ -7y = 7 \end{cases}$$

Da quarta equação, obtemos $y = -1$.

Substituindo y por (-1) na terceira equação, obtemos $z = 2$.

Substituindo y por (-1) e z por 2 na segunda equação, obtemos $t = 3$.

MODERNA

Finalmente, substituindo y por -1, z por 2 e t por 3 na primeira equação, obtemos $x = 1$.

Logo, S = {(1, −1, 2, 3)}.

19. $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = (2^3)^{y+1} \\ (3^2)^y = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{3y+3} \\ 3^{2y} = 3^{x-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 3 \\ 2y = x - 9 \end{cases}$

Reescrevendo esse último sistema de forma conveniente:

$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ -x + 2y = -9 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, membro a membro, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{x} - 3y = 3 \\ \underline{\cancel{-x} + 2y = -9} \; + \end{cases}$$
$$-y = -6 \Rightarrow y = 6 \text{ e } x = 21$$

Logo, S = {(21, 6)}.

20. $\begin{cases} \dfrac{2}{u} + \dfrac{3}{v} = 8 \\ \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v + 3u = 8vu \\ v - u = -vu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = uv \\ 3u + 2v = 8uv \end{cases}$

Multiplicamos a primeira equação por (−3) e a adicionamos à segunda.

$$\begin{cases} u - v = uv \\ 5v = 5uv \end{cases}$$

Sabendo que $u \neq 0$ e $v \neq 0$, obtemos:

$u = 1$ e $v = \dfrac{1}{2}$

Logo, $S = \left\{\left(1, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

21. Como o sistema é possível e não admite uma solução trivial ele é SPD ou SPI e $k \neq 0$.

Dividindo a primeira equação por (−2) e adicionando a equação obtida à terceira equação, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = k \\ 3x + 2y + 5z = k \\ 0x + 0y + 0z = k^2 - \dfrac{k}{2} \end{cases}$$

Na terceira equação, obtivemos 0 no primeiro membro. Assim, para que o sistema seja SPI, devemos ter: $k^2 - \dfrac{k}{2} = 0 \Rightarrow k\left(k - \dfrac{1}{2}\right) = 0$. Do enunciado temos que $k \neq 0$. Logo, $k - \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$.

22. a) $\begin{cases} x - my = 1 - m \\ (1 + m)x + y = 1 \end{cases}$

Da segunda equação, obtemos o valor de y:

$(1 + m)x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - (1 + m)x$

Substituindo y na primeira equação, temos:

$x - m[1 - (1 + m)x] = 1 - m$

$x - m + mx + m^2x = 1 - m$

$x(m^2 + m + 1) = 1$

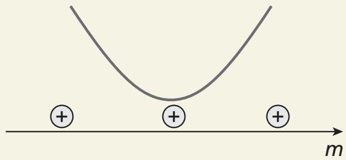
Se $m^2 + m + 1 \neq 0$, x terá um único valor para cada número real m:

$$x = \frac{1}{m^2 + m + 1}$$

Vamos considerar a função quadrática

$f(m) = m^2 + m + 1$.

Como a parábola, que é gráfico de f, tem concavidade voltada para cima e $\Delta = -3 < 0$, um esboço do gráfico é:



ADILSON SECCO

Isso significa que $f(m)$ nunca se anula, ou seja, para cada valor real de m, x é único. Consequentemente, y e o par (x, y), solução do sistema, também são únicos.

b) Para que o valor de x seja o maior possível, $f(m)$ deve ter um valor mínimo. Isso ocorre quando m assume o valor da abscissa do vértice da parábola, gráfico de f.

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

Autoavaliação

1. Somente a equação $y - z = 0$ compõe um sistema linear 2×3 com $2x + 2y = 2$.
alternativa a

2. A solução de um sistema linear 2×2 possível e determinado são as coordenadas do ponto de intersecção entre duas retas concorrentes.
alternativa e

3. A solução do primeiro sistema é (4, 1). Substituindo x por 4 e y por 1 na primeira equação do segundo sistema, obtemos:
$2 \cdot 4 + 1 = a \Rightarrow a = 9$
alternativa c

4. Todo sistema linear homogêneo é SPD ou SPI.
alternativa a

5. $a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$
alternativa d

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

alternativa b

7. No primeiro sistema, vamos trocar as equações de lugar para que a primeira tenha 1 como coeficiente de x.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$

Escalonando o sistema obtido, obtemos o segundo sistema dado.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ -y - 5z = -17 \\ -6y - 8z = -35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ y + 5z = 17 \\ 22z = 67 \end{cases}$$

Portanto, os sistemas são equivalentes.
alternativa b

8. $\begin{cases} A + B = 55 \Rightarrow B = 55 - A \text{ (I)} \\ A + C = 50 \Rightarrow C = 50 - A \text{ (II)} \\ B + C = 45 \Rightarrow B + C = 45 \text{ (III)} \end{cases}$

Substituindo B e C na equação (III) por (55 − A) e (50 − A), respectivamente, temos:
$55 - A + 50 - A = 45$
$-2A = -60$
$A = 30$
Assim, $B = 25$ e $C = 20$.
$A + B + C = 75$
Portanto, a soma dos preços dos artigos A, B e C é R$ 75,00.
alternativa c

MODERNA

9. Representando cada preço pela letra inicial do nome de cada peça, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2\ell + 2f = 130 \\ 2\ell + 2c = 256 \\ 1\ell + 1f + 1c = 143 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} \ell + f + \quad c = 143 \\ -2f \qquad = -30 \\ \qquad -2c = -156 \end{cases}$$

De $-2c = -156$, obtemos $c = 78$.

Portanto, o preço unitário da colcha é R$ 78,00.

alternativa c

Compreensão de texto

1. Energia, carboidratos, proteínas e gorduras totais.

2. **a)** O sistema tem 4 equações e 6 incógnitas.

b) No sistema, cada equação corresponde a um nutriente, e cada incógnita, a um alimento (x_1 representa o arroz, x_2 representa o feijão, x_3 representa o frango, x_4 representa o suco, x_5 representa o pão e x_6 representa a margarina).

3. Como temos apenas 4 equações para 6 incógnitas, podemos dizer que o sistema é possível e indeterminado.

alternativa b

4. $$\begin{cases} x_1 - 0{,}33x_5 + 0{,}17x_6 = 0{,}19 \\ x_2 + 0{,}07x_5 - 1{,}68x_6 = -8{,}05 \\ x_3 + 0{,}25x_5 + 0{,}83x_6 = 9{,}16 \\ x_4 + 1{,}24x_5 + 0{,}45x_6 = 11{,}60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \\ x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \\ x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \\ x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \end{cases}$$

5. Temos: $$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \quad \text{(I)} \\ x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \quad \text{(II)} \\ x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \quad \text{(III)} \\ x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \quad \text{(IV)} \end{cases}$$

(I)

Como $x_1 \geqslant 0$, temos:

$$0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \geqslant 0$$
$$0{,}19 + 0{,}33x_5 \geqslant 0{,}17x_6$$
$$0{,}17x_6 \leqslant 0{,}33x_5 + 0{,}19$$
$$x_6 \leqslant \frac{0{,}33}{0{,}17}x_5 + \frac{0{,}19}{0{,}17}$$

(II)

Como $x_2 \geqslant 0$, temos:

$$-8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \geqslant 0$$
$$1{,}68x_6 \geqslant 0{,}07x_5 + 8{,}05$$
$$x_6 \geqslant \frac{0{,}07}{1{,}68}x_5 + \frac{8{,}05}{1{,}68}$$

(III)

Como $x_3 \geqslant 0$, temos:

$$9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \geqslant 0$$
$$9{,}16 - 0{,}25x_5 \geqslant 0{,}83x_6$$
$$0{,}83x_6 \leqslant -0{,}25x_5 + 9{,}16$$
$$x_6 \leqslant -\frac{0{,}25}{0{,}83}x_5 + \frac{9{,}16}{0{,}83}$$

MODERNA

(IV)

Como $x_4 \geqslant 0$, temos:

$$11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \geqslant 0$$
$$11{,}60 - 1{,}24x_5 \geqslant 0{,}45x_6$$
$$0{,}45x_6 \leqslant -1{,}24x_5 + 11{,}60$$
$$x_6 \leqslant -\frac{1{,}24}{0{,}45}x_5 + \frac{11{,}60}{0{,}45}$$

Portanto, as inequações são:

$$x_6 \leqslant \frac{0{,}33}{0{,}17}x_5 + \frac{0{,}19}{0{,}17}$$

$$x_6 \geqslant \frac{0{,}07}{1{,}68}x_5 + \frac{8{,}05}{1{,}68}$$

$$x_6 \leqslant -\frac{0{,}25}{0{,}83}x_5 + \frac{9{,}16}{0{,}83}$$

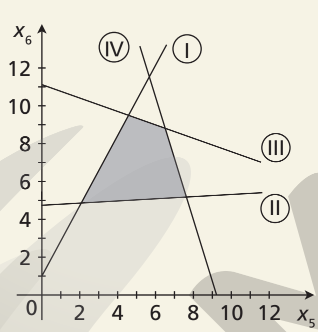
$$x_6 \leqslant -\frac{1{,}24}{0{,}45}x_5 + \frac{11{,}60}{0{,}45}$$

6. Temos:

$$\begin{cases} x_6 \leqslant \dfrac{0{,}33}{0{,}17}x_5 + \dfrac{0{,}19}{0{,}17} & \text{(I)} \\ x_6 \geqslant \dfrac{0{,}07}{1{,}68}x_5 + \dfrac{8{,}05}{1{,}68} & \text{(II)} \\ x_6 \leqslant -\dfrac{0{,}25}{0{,}83}x_5 + \dfrac{9{,}16}{0{,}83} & \text{(III)} \\ x_6 \leqslant -\dfrac{1{,}24}{0{,}45}x_5 + \dfrac{11{,}60}{0{,}45} & \text{(IV)} \end{cases}$$

Fazendo um esboço dos quatro gráficos encontramos a figura a seguir, em que a parte mais escura representa a intersecção das quatro inequações, ou seja, o conjunto solução do sistema:

ADILSON SECCO



alternativa d

7. Se $x_5 = 5$ e $x_6 = 6$, substituindo esses valores nas equações

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}33x_5 - 0{,}17x_6 \\ x_2 = -8{,}05 - 0{,}07x_5 + 1{,}68x_6 \\ x_3 = 9{,}16 - 0{,}25x_5 - 0{,}83x_6 \\ x_4 = 11{,}60 - 1{,}24x_5 - 0{,}45x_6 \end{cases}$$, encontramos:

$x_1 = 0{,}19 + 0{,}33 \cdot 5 - 0{,}17 \cdot 6 = 0{,}82$

$x_2 = -8{,}05 - 0{,}07 \cdot 5 + 1{,}68 \cdot 6 = 1{,}68$

$x_3 = 9{,}16 - 0{,}25 \cdot 5 - 0{,}83 \cdot 6 = 2{,}93$

$x_4 = 11{,}60 - 1{,}24 \cdot 5 - 0{,}45 \cdot 6 = 2{,}7$

Sendo x_1 o arroz, multiplicando o valor encontrado por 50 g (quantidade de referência na tabela), a dieta deve conter $0{,}82 \cdot 50$ g = 41 g.

x_2 representa o feijão; a quantidade, em grama, de feijão a ser consumido na dieta deve ser de $1{,}68 \cdot 30$ g = 50,4 g. Analogamente, a quantidade, em grama, de frango deve ser $2{,}93 \cdot 80$ g = 234,4 g e a de suco, em mℓ, deve ser $2{,}7 \cdot 200$ mℓ = 540 mℓ.

8.
- *Energia* ou *valor energético*: energia produzida pelo corpo que provém dos carboidratos, das proteínas e das gorduras totais; é expresso em quilocaloria (kcal) ou em quilojoule (kJ).

  Carboidratos: fazem parte dos chamados energéticos e sua principal função é fornecer energia imediata para as células do corpo, principalmente as do cérebro; encontrados em maior quantidade em massas, arroz, açúcar, mel, pães, farinhas, tubérculos (como batata, mandioca e inhame) e doces em geral.

  Proteínas: são chamadas construtores, pois têm a função de construir e manter órgãos, tecidos e células, sendo as principais responsáveis pela formação de massa muscular; encontradas em carnes, ovos, leite e derivados e nas leguminosas (feijões, soja e ervilha).

  Gorduras totais: referem-se à soma das gorduras, de origem tanto animal (saturadas) quanto vegetal (insaturadas); principais fontes de energia no corpo, também pertencem ao grupo dos *energéticos* e ajudam na absorção e no transporte das vitaminas lipossolúveis (A, D, E e K), na composição das membranas celulares e no equilíbrio térmico do organismo.
- *Gorduras saturadas*: presentes em alimentos de origem animal, como carnes, toucinho, pele de frango, queijos, leite integral, iogurtes, manteiga e requeijão.

  Gorduras trans: encontradas em produtos industrializados que utilizam gordura vegetal hidrogenada (combinada com o hidrogênio) em seu preparo, como margarina, cremes vegetais, biscoitos, sorvetes, *snacks* (salgadinhos prontos), produtos de panificação, alimentos fritos e lanches salgados.
- *Fibras alimentares*: auxiliam no metabolismo geral, atuando sobretudo na digestão e no funcionamento do intestino; promovem diversos benefícios, como redução do colesterol total, redução do mau colesterol (LDL), aumento do bom colesterol (HDL), redução dos triglicerídios e redução da hiperglicemia (controle do diabetes); presentes em diversos alimentos de origem vegetal, como frutas, hortaliças, feijões e alimentos integrais.

  Sódio: regula os fluidos extracelulares e o volume plasmático, participa da condução dos impulsos nervosos e das contrações musculares; presente no sal de cozinha e em alimentos industrializados.
- Resposta possível: Para uma dieta saudável deve-se dar preferência a produtos com baixas %VD para gorduras saturadas (que contribuem para a obesidade e aumentam o risco de doenças cardiovasculares), gorduras trans (além de desnecessárias ao nosso organismo, colaboram para a elevação do colesterol e, portanto, para o aumento do risco de doenças cardiovasculares) e sódio (que promove aumento da pressão arterial) e com altas %VD para fibras alimentares.
- Resposta pessoal.

MODERNA

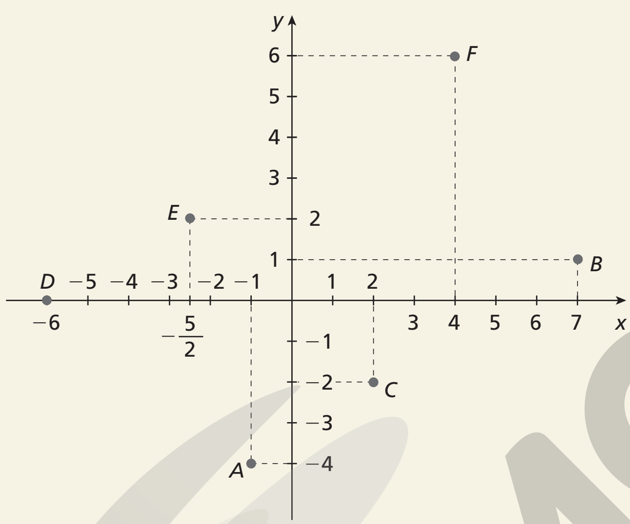
Capítulo 3 – Geometria analítica

Exercícios propostos

1. Temos:

- coordenadas do ponto A:
  $x_A = -1$ e $y_A = -4$
- coordenadas do ponto B:
  $x_B = 7$ e $y_B = 1$
- coordenadas do ponto C:
  $x_C = 2$ e $y_C = -2$
- coordenadas do ponto D:
  $x_D = -6$ e $y_D = 0$
- coordenadas do ponto E:
  $x_E = -\dfrac{5}{2}$ e $y_E = 2$
- coordenadas do ponto F:
  $x_F = 4$ e $y_F = 6$

Localizando os pontos no plano cartesiano, temos:



2. a) Temos $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$, pois $x = 3$ e $y = -\sqrt{2}$. Então, o ponto $\left(3, -\sqrt{2}\right)$ pertence ao 4º quadrante.

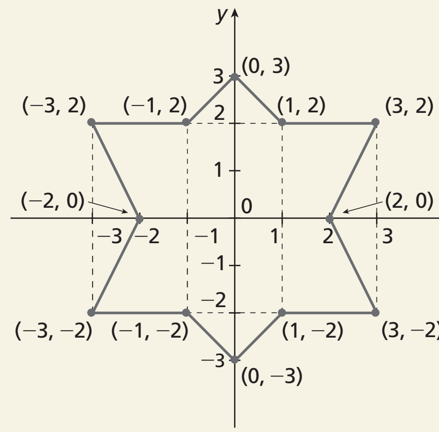
b) Temos $x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0$, pois $x = -\pi$ e $y = -4$. Então, o ponto $(-\pi, -4)$ pertence ao 3º quadrante.

c) Temos $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, pois $x = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ e $y = \pi$. Então, o ponto $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}, \pi\right)$ pertence ao 1º quadrante.

d) Temos $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$, pois $x = -1$ e $y = 1$. Então, o ponto $(-1, 1)$ pertence ao 2º quadrante.

Comentário: Nos exercícios **1** e **2**, é importante observar se os alunos não apresentam dificuldade na localização no plano cartesiano de valores expressos com raiz quadrada ou na representação fracionária.

3. a) As coordenadas dos vértices são: (0, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 0), (3, −2), (1, −2), (0, −3), (−1, −2), (−3, −2), (−2, 0), (−3, 2) e (−1, 2).



b) Não. Nenhum vértice tem abscissa igual ou oposta à ordenada.

Comentário: Pode-se solicitar aos alunos que construam outros polígonos no plano cartesiano, observando a quantidade de vértices e suas coordenadas. Para os exercícios desse bloco, é interessante, se for possível, que o professor trabalhe com *softwares* de Geometria dinâmica que possam oferecer mais autonomia na construção do conhecimento por parte do aluno.

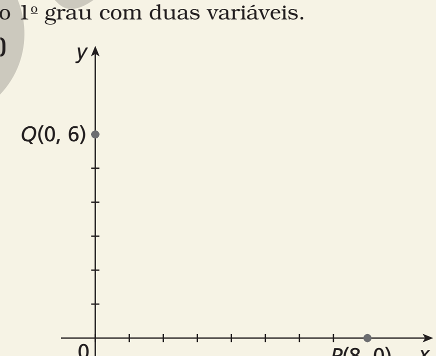
4. Os pontos pertencentes ao 2º quadrante têm coordenadas $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Então, para obter os valores de m, devemos fazer $m - 8 \leqslant 0$ e, para obter os valores de n, devemos fazer $n - 5 \geqslant 0$.

Assim: $m - 8 \leqslant 0 \Rightarrow m \leqslant 8$
$n - 5 \geqslant 0 \Rightarrow n \geqslant 5$

Logo, m e $n \in \mathbb{R}$ tal que $m \leqslant 8$ e $n \geqslant 5$.

Comentário: No início do estudo da Geometria analítica, explorar as condições impostas às coordenadas dos pontos, como nesse exercício ou no exercício **28**, solidifica pré-requisitos para o entendimento da equação da reta, em suas várias formas, e para a resolução de inequações do 1º grau com duas variáveis.

5. a)



b) Observando o plano do item **a**, temos: $d_{P,\,O} = 8$

c) Observando o plano do item **a**, temos: $d_{Q,\,O} = 6$

d) e **e)** Espera-se que os alunos (em duplas) percebam que a distância $d_{P,\,Q}$ é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo OPQ. E, por meio da aplicação do teorema de Pitágoras, obtenham a distância $d_{P,\,Q}$.
$(d_{P,\,Q})^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ ou $d_{P,\,Q} = -10$ ou $d_{P,\,Q} = 10$
Como a distância é um valor positivo, $d_{P,\,Q} = 10$.

f) $d_{A,\,B} = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Comentário: Nesse exercício, os alunos terão de elaborar uma estratégia para o cálculo da distância entre dois pontos (cada ponto pertence a um dos eixos do plano cartesiano).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Converse com as duplas fazendo perguntas para encaminhar o raciocínio. Caso alguma dupla não consiga chegar à estratégia, avalie a conveniência de escolher o procedimento de outra equipe e, coletivamente, discutir com a classe. Assim, favorece o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC, pois leva o estudante a investigar e estabelecer conjecturas a respeito de conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração na validação das referidas conjecturas.

6. **a)** Pontos da reta vertical que passa pelo ponto (4, 0).

b) Pontos da reta horizontal que passa pelo ponto (0, −3).

c) Pontos da reta horizontal que passa pelo ponto (0, 5).

d) Pontos da reta vertical que passa pelo ponto (−4, 0).

Comentário: Seria interessante propor a resolução dos exercícios **5** e **6** no mesmo dia, pois eles apresentam uma sequência de raciocínios complementares. Se achar conveniente, peça aos alunos que encontrem a fórmula para um ponto P qualquer (em que P é um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares).

7. **a)** Temos: $A(2, 1)$ e $B(5, 5)$

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

b) Temos: $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{A,B} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

c) Temos: $D(-4, -2)$ e $E(0, 7)$

$$d_{D,E} = \sqrt{(x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2}$$

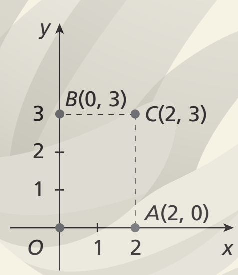
$$d_{D,E} = \sqrt{(0+4)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$$

d) Temos: $C\left(4\sqrt{3}, 5\right)$ e $B\left(6\sqrt{3}, 3\right)$

$$d_{C,B} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$d_{C,B} = \sqrt{\left(6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\right)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{12+4} = 4$$

8.



a) $d_{C,O} = \sqrt{(x_C - 0)^2 + (y_C - 0)^2}$

$$d_{C,O} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Logo, a distância do ponto C à origem é $\sqrt{13}$.

b) $d_{C,B} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$

$$d_{C,B} = \sqrt{(0-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

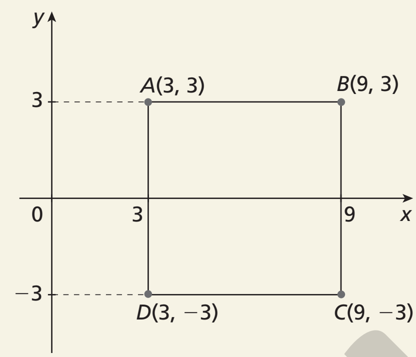
Logo, a distância do ponto C ao eixo das ordenadas é 2.

c) $d_{C,A} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$

$$d_{C,A} = \sqrt{(2-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$$

Logo, a distância do ponto C ao eixo das abscissas é 3.

9.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{6^2 + 0} = 6$$

$$d_{B,C} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$$

$$d_{C,D} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{6^2 + 0} = 6$$

$$d_{A,D} = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{0 + 6^2} = 6$$

As distâncias são iguais; portanto, $ABCD$ é um quadrado.

a) área $= 6 \cdot 6 = 36$

Portanto, a área desse quadrilátero é 36 unidades de área.

b) perímetro $= 4 \cdot 6 = 24$

Portanto, o perímetro desse quadrilátero é 24 unidades de comprimento.

c) $d^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \cdot 6^2 \Rightarrow d = 6\sqrt{2}$

Portanto, a medida de sua diagonal é $6\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

Comentário: Verifique se há necessidade de retomar com os alunos as noções básicas de área e perímetro, uma vez que elas surgem como articuladoras nesse exercício. É possível construir outras figuras geométricas no plano cartesiano para trabalhar com essas medidas.

10. Sendo o ponto $P(x_P, y_P)$ equidistante de $A(6, 8)$ e de $B(2, 5)$ e P um ponto no eixo das ordenadas, temos $x_P = 0$. Assim:

$$d_{P,A} = d_{P,B}$$

$$\sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2}$$

$$(6-0)^2 + (8-y_P)^2 = (2-0)^2 + (5-y_P)^2$$

$$36 + 64 - 16y_P + y_P^2 = 4 + 25 - 10y_P + y_P^2$$

$$6y_P = 71$$

$$y_P = \frac{71}{6}$$

Logo, $P\left(0, \dfrac{71}{6}\right)$.

11. Para provar que esse triângulo é retângulo, vamos calcular as medidas de seus lados e depois aplicá-las ao teorema de Pitágoras.

$$d_{A,B} = \sqrt{(-4+2)^2 + (-1+5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$d_{B,C} = \sqrt{(4+4)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

$$d_{A,C} = \sqrt{(4+2)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$(d_{A,\,C})^2 = (d_{A,\,B})^2 + (d_{B,\,C})^2$

$100 = 80 + 20$ (verdadeiro)

Portanto, o triângulo ABC é retângulo.

12. Vamos determinar a medida dos lados de cada triângulo para dizer se ele é equilátero, escaleno ou isósceles.

a) $d_{A,\,B} = \sqrt{(1-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$d_{A,\,C} = \sqrt{(1-4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$d_{B,\,C} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

Dois lados de mesma medida.

Logo, esse triângulo é isósceles.

b) $d_{A,\,B} = \sqrt{(7-10)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$d_{A,\,C} = \sqrt{(7-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

$d_{B,\,C} = \sqrt{(10-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Três lados de medidas diferentes.

Portanto, esse triângulo é escaleno.

$\sqrt{18} + \sqrt{32} = \sqrt{50}$

Portanto, esse é um triângulo retângulo.

c) $d_{A,\,B} = \sqrt{(0-2)^2 + \left(0-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$d_{A,\,C} = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$

$d_{B,\,C} = \sqrt{(2-4)^2 + \left(2\sqrt{3}-0\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

Três lados de mesma medida.

Portanto, esse triângulo é equilátero.

13. Se o triângulo ABC é equilátero, então:

$d_{A,\,B} = d_{A,\,C} = d_{B,\,C}$

Fazendo $C(a, b)$, temos:

(I) $d_{A,\,B} = d_{A,\,C}$

$\sqrt{(2-3)^2 + (-5+4)^2} = \sqrt{(2-a)^2 + (-5-b)^2}$

$1 + 1 = 4 - 4a + a^2 + 25 + 10b + b^2$

$a^2 + b^2 - 4a + 10b = -27$

(II) $d_{A,\,C} = d_{B,\,C}$

$\sqrt{(2-a)^2 + (-5-b)^2} = \sqrt{(3-a)^2 + (-4-b)^2}$

$4 - 4a + \cancel{a^2} + 25 + 10b + \cancel{b^2} =$

$= 9 - 6a + \cancel{a^2} + 16 + 8b + \cancel{b^2}$

$-4a + 10b + 6a - 8b = -4$

$2a + 2b = -4$

$b = -2 - a$

Substituindo b por $-2 - a$ em (I), obtemos:

$a^2 + (-2-a)^2 - 4a + 10(-2-a) = -27$

$a^2 + 4 + \cancel{4a} + a^2 - \cancel{4a} - 20 - 10a = -27$

$2a^2 - 10a + 11 = 0$

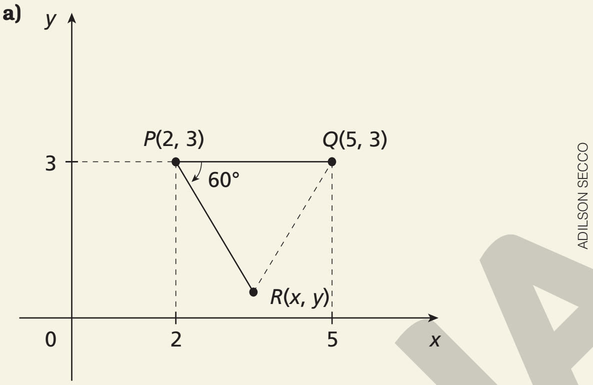
$a = \dfrac{10 \pm \sqrt{12}}{4} = \dfrac{10 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{2}$

$b = -2 - \left(\dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{-9 \pm \sqrt{3}}{2}$

Logo: $C = \left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-9-\sqrt{3}}{2}\right)$ ou

$C = \left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-9+\sqrt{3}}{2}\right)$

14. a)



b) $d_{P,\,Q} = 3$ e $d_{P,\,R} = 3$

Podemos perceber que o segmento $\overline{PR}$ foi obtido pela rotação do segmento $\overline{PQ}$; portanto, os dois segmentos têm a mesma medida.

c) $\text{med}(\hat{P}) = 60° \Rightarrow \text{med}(\hat{R}) = \text{med}(\hat{Q}) = 60°$

Assim, podemos dizer que $PR = RQ = PQ = 3$ e o triângulo PQR é equilátero.

d) $d_{P,\,Q} = d_{P,\,R}$

$3 = \sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2}$

$4 - 4x + x^2 + \cancel{9} - 6y + y^2 = \cancel{9}$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ (I)

$d_{P,\,R} = d_{Q,\,R}$

$\sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(5-x)^2 + (3-y)^2}$

$(2-x)^2 + \cancel{(3-y)^2} = (5-x)^2 + \cancel{(3-y)^2}$

$4 - 4x + \cancel{x^2} = 25 - 10x + \cancel{x^2}$

$6x = 21$

$x = \dfrac{7}{2}$

Substituindo x por $\dfrac{7}{2}$ em (I), obtemos:

$\dfrac{49}{4} + y^2 - 14 - 6y + 4 = 0$

$y^2 - 6y + \dfrac{9}{4} = 0$

$y = \dfrac{6+3\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$

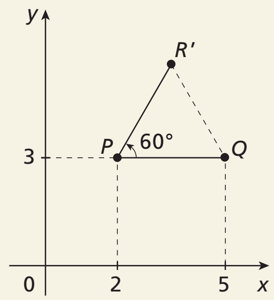
Sabendo que y é menor que 3, pois a rotação de $\overline{PQ}$ foi no sentido horário, temos: $y = \dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$

Logo, as coordenadas de R são:

$\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}\right)$

e) Na rotação de $\overline{PQ}$ no sentido anti-horário o segmento obtido, $\overline{PR'}$, terá medida 3.

MODERNA



O triângulo PQR' é equilátero.

Podemos concluir que as coordenadas do ponto R' serão $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{6+3\sqrt{3}}{2}\right)$, ou seja, o valor de y será o outro valor encontrado no item **d** para y.

15. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ nos casos apresentados, temos:

a) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$

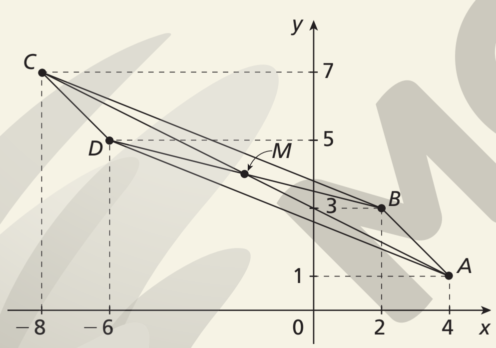
Logo, o ponto médio é $M(4, 3)$.

b) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-3+(-7)}{2} = -5$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4+0}{2} = -2$

Logo, o ponto médio é $M(-5, -2)$.

16. Representando o paralelogramo no plano cartesiano, temos:



a) Como M é o ponto médio das diagonais do paralelogramo $ABCD$, temos:

$x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{2+(-6)}{2} = -2$

$y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4$

Logo, $M(-2, 4)$.

b) Na resolução do item **a**, obtivemos M sem usar os dados das coordenadas de A e de C, logo esses dados são descartáveis e a resposta $M(-2, 4)$ seria a mesma.

Poderíamos também ter empregado as coordenadas de A e de C para obter o mesmo ponto médio M, então não seriam necessários os dados das coordenadas dos vértices B e D, ou seja, conhecendo A e C, os dados de B e D seriam descartáveis.

c) Retirada a palavra "consecutivos", $\overline{AD}$ poderia ser um lado ou então uma diagonal do paralelogramo. No caso de ser diagonal, teríamos:

$x_M = \dfrac{x_A + x_P}{2} = \dfrac{4-6}{2} = -1$

$y_M = \dfrac{y_A + y_P}{2} = \dfrac{1+5}{2} = 3$

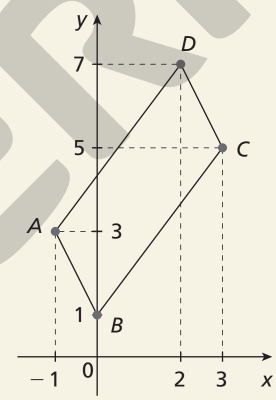
Portanto, o ponto médio seria $M(-1, 3)$, enquanto o novo vértice $C(-4, 3)$ seria um dado descartável. Logo, a resposta do item **a** não seria a mesma.

17. **a)** M é ponto de intersecção das diagonais do paralelogramo $ABCD$, então M é ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$. Assim:

$$\left(\frac{-1+x_C}{2}, \frac{3+y_C}{2}\right) = (1, 4) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+x_C}{2} = 1 \\ \dfrac{3+y_C}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 5 \end{cases}$$

$$\left(\frac{0+x_D}{2}, \frac{1+y_D}{2}\right) = (1, 4) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_D}{2} = 1 \\ \dfrac{1+y_D}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 7 \end{cases}$$

As coordenadas de C e D são $(3, 5)$ e $(2, 7)$, respectivamente.



b) Vamos agora calcular o perímetro do paralelogramo:

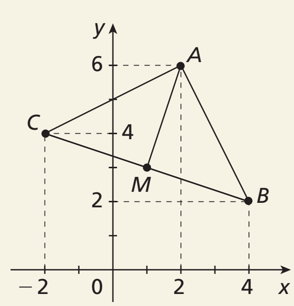
$d_{A,\,B} = d_{D,\,C} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$d_{A,\,D} = d_{B,\,C} = \sqrt{(0-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

Perímetro $= 5 + 5 + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 10 + 2\sqrt{5}$

Portanto, o perímetro do paralelogramo é $\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$ unidades de comprimento.

18.



M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Calculando suas coordenadas, temos:

$x_M = \dfrac{-2+4}{2} = 1$

$y_M = \dfrac{4+2}{2} = 3$

Assim, temos: $M(1, 3)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$d_{A,\,M} = \sqrt{(2-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Portanto, a medida da mediana é $\sqrt{10}$.

19. Considerando os pontos A, B e C vértices do triângulo, temos:

- $P(-1, 4)$ como ponto médio de $\overline{AB}$; então:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = -1 \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = -2 & \text{(I)} \\ y_A + y_B = 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

- $Q(2, -1)$ como ponto médio de $\overline{AC}$; então:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = 2 \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 4 & \text{(III)} \\ y_A + y_C = -2 & \text{(IV)} \end{cases}$$

- $R(-2, 2)$ como ponto médio de $\overline{BC}$; então:

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_C}{2} = -2 \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = -4 & \text{(V)} \\ y_B + y_C = 4 & \text{(VI)} \end{cases}$$

De (III) e de (V), temos: $x_A = 4 - x_C$ e $x_B = -4 - x_C$

Substituindo esses valores em (I), obtemos:

$\cancel{4} - x_C - \cancel{4} - x_C = -2 \Rightarrow -2x_C = -2 \Rightarrow x_C = 1$

Então: $x_A = 3$ e $x_B = -5$

De (IV) e de (VI), temos: $y_A = -2 - y_C$ e $y_B = 4 - y_C$

Substituindo esses valores em (II), obtemos:

$-2 - y_C + 4 - y_C = 8 \Rightarrow -2y_C = 6 \Rightarrow y_C = -3$

Então: $y_A = 1$ e $y_B = 7$.

Portanto: $A(3, 1)$, $B(-5, 7)$ e $C(1, -3)$.

20. A resposta depende do problema que o aluno elaborou.

21. a) Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 3 + 6 - 5 + 6 + 6 = 0$$

Como $D = 0$, os pontos estão alinhados.

b) Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 - 3 - 12 + 1 - 6 = -10$$

Como $D \neq 0$, os pontos não estão alinhados.

22. Para que exista o triângulo ABC, os pontos A, B e C não podem estar alinhados.

Assim:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow -3x - x - 1 + 2x + 3x + 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

Logo, $x \neq -2$.

23. Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4m + 10 - 12 + 5 - 2m =$$

$= 6 - 6m$

a) Para que os pontos $A(-1, m)$, $B(2, -3)$ e $C(-4, 5)$ estejam alinhados, devemos ter $D = 0$. Assim:

$6 - 6m = 0 \Rightarrow 6m = 6 \Rightarrow m = 1$

Logo, $m = 1$.

b) Para que eles sejam vértices de um triângulo, devemos ter $D \neq 0$. Assim:

$6 - 6m \neq 0 \Rightarrow 6m \neq 6 \Rightarrow m \neq 1$

Logo, $m \neq 1$.

24. Os pontos que estão alinhados com os pontos $A(1, 4)$ e $B(0, 3)$ têm coordenadas (x, y) tais que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x - y + 3 + 4x = 0 \Rightarrow x = y - 3$$

Assim, há infinitos pontos alinhados com os pontos A e B. Todos esses pontos podem ser representados pelo par ordenado $(y - 3, y)$.

Por exemplo:

- Para $y = 2$, temos o ponto $P(-1, 2)$.
- Para $y = 5$, temos o ponto $Q(2, 5)$.

25. Para que $P(x, y)$ esteja alinhado com $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

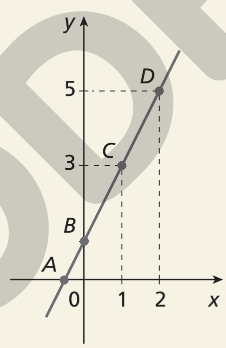
$3x + 5y + 8 - 15 - 4x - 2y = 0$

$-x + 3y - 7 = 0$

$x - 3y + 7 = 0$

Logo, a relação é $x - 3y + 7 = 0$.

26.



ADILSON SECCO

- Se A pertence ao eixo das abscissas, então $y_A = 0$; assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x_A & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x_A - 1 = 0 \Rightarrow x_A = -\frac{1}{2}$$

Portanto: $A\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

- Se B pertence ao eixo das ordenadas, então $x_B = 0$; assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_B - 1 = 0 \Rightarrow y_B = 1$$

Portanto: $B(0, 1)$

27. a) Se $P(x, y)$ é a intersecção das duas estradas, então P está alinhado com A e B e com C e D. Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y + 2 = 0 \quad \text{(I)}$$

MODERNA

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x$$

Substituindo y por $3x$ em (I), obtemos:

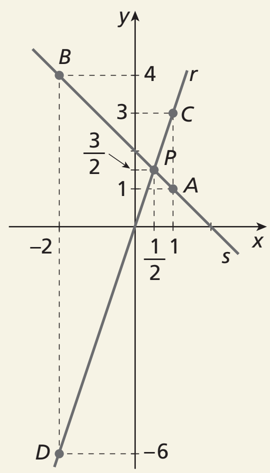
$$-x - 3x + 2 = 0 \Rightarrow -4x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

E, assim: $y = \dfrac{3}{2}$

Logo, $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

b) O ponto P foi encontrado impondo a condição de alinhamento de três pontos para P, A e B e para P, C e D.

c)



ADILSON SECCO

Comentário: Sempre que possível, os alunos devem verbalizar e justificar, como é pedido no item **b**, suas estratégias.

28. Como $P(x_P, y_P)$ está alinhado com os pontos $A(5, 3)$ e $B(-2, 1)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_P - 7y_P + 11 = 0$$

a) Para que P pertença ao eixo x, devemos ter $y_P = 0$; então:

$$2x_P - 7 \cdot 0 + 11 = 0 \Rightarrow x_P = -\frac{11}{2}$$

Logo, $P\left(-\dfrac{11}{2}, 0\right)$.

b) Para que P pertença ao eixo y, devemos ter $x_P = 0$; então:

$$2 \cdot 0 - 7y_P + 11 = 0 \Rightarrow y_P = \frac{11}{7}$$

Logo, $P\left(0, \dfrac{11}{7}\right)$.

c) Para que P pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares, devemos ter $x_P = y_P$; então:

$$2x_P - 7x_P + 11 = 0 \Rightarrow x_P = y_P = \frac{11}{5}$$

Logo, $P\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$.

d) Para que P pertença à bissetriz dos quadrantes pares, devemos ter $x_P = -y_P$; então:

$$2 \cdot (-y_P) - 7y_P + 11 = 0 \Rightarrow y_P = \frac{11}{9} \text{ e } x_P = -\frac{11}{9}$$

Logo, $P\left(-\dfrac{11}{9}, \dfrac{11}{9}\right)$.

e) Para que $y_P = 2x_P$; então:

$$2x_P - 7 \cdot 2x_P + 11 = 0 \Rightarrow x_P = \frac{11}{12} \text{ e } y_P = \frac{11}{6}$$

Logo, $P\left(\dfrac{11}{12}, \dfrac{11}{6}\right)$.

Comentário: Esse exercício resgata o que foi estudado no início do capítulo. Ver comentário do exercício **4**.

29. s: $x - y + 2 = 0$

a) $2 - 3 + 2 = 0$

$1 = 0$ (falso)

Portanto, $A(2, 3)$ não pertence à reta s.

b) $1 - 3 + 2 = 0$

$0 = 0$ (verdadeiro)

Portanto, $B(1, 3)$ pertence à reta s.

30. a) $\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 - 20 + 4 + 6 - 20 = -40$

Como $-40 \neq 0$, A, B e C não são colineares.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{5}{2} + 10 - \dfrac{15}{2} - 5 = 12{,}5 - 12{,}5 = 0$

Como o determinante é igual a zero, os pontos A, B e C são colineares.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + y - 5 - 3y = 0 \Rightarrow 5x - 2y - 5 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(3, 5)$, $B(1, 0)$ e $C\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ é:

$5x - 2y - 5 = 0$

31. Para que $C(1, m)$ pertença à reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 2 + 3m - 4 + m - 6 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = 3$

Logo, $m = 3$.

Comentário: Avalie a conveniência de fazer análise gráfica da situação representando, no plano cartesiano, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta vertical dos pontos de abscissa igual a 1. Sempre que possível fazer uso desse procedimento, que relaciona Álgebra e Geometria, cerne da Geometria analítica.

32. O ponto P de intersecção da reta de equação $x + 3y + 1 = 0$ com o eixo x tem $y = 0$.

Assim: $x + 3 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Logo, $P(-1, 0)$.

MODERNA

O ponto Q de intersecção da reta de equação $x + 3y + 1 = 0$ com o eixo y tem $x = 0$.

Assim: $0 + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

Logo, $Q\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.

Os pontos de intersecção são, portanto, $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ e $(-1, 0)$.

33. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 17 = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3y - 11 = 0$

c) $\begin{cases} 4x + 3y - 17 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 17 = 0 \\ -x - 3y + 11 = 0 \end{cases}$

$3x + 0y - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$

Substituindo x por 2 em uma das equações, temos:

$2 + 3y - 11 = 0 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$

Logo, o ponto de intersecção é o ponto $(2, 3)$.

Veja que $(2, 3)$ são as coordenadas dos pontos A e D, ou seja, mesmo antes de resolver o sistema formado pelas equações das retas, já poderíamos afirmar que o ponto $(2, 3)$ é a intersecção.

34. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + y + 3 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 2y - 6 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 8y + 32 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 4y - 16 = 0$

b) Considerando o ponto médio M de $\overline{AB}$, N de $\overline{BC}$ e P de $\overline{AC}$, temos:

M: $\left(\frac{-4 + 0}{2}, \frac{5 - 3}{2}\right) = (-2, 1)$

N: $\left(\frac{0 + 4}{2}, \frac{-3 + 3}{2}\right) = (2, 0)$

P: $\left(\frac{-4 + 4}{2}, \frac{5 + 3}{2}\right) = (0, 4)$

Vamos determinar as equações das retas suportes das medianas.

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 6y - 10 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 3y + 5 = 0$

c) Vamos determinar as equações das retas suportes de $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ e $\overline{MP}$.

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 4y - 2 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - 2y + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + y - 4 = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 8 = 0$

35. a) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 2}{-1 - (-1)} = \frac{3}{-1 + 1} = \frac{3}{0}$ (indefinida)

Portanto, não existe o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(-1, 5)$.

b) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 0}{4 - 3} = \frac{0}{1} = 0$

c) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 2}{-2 - 1} = \frac{-3}{-3} = 1$

d) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - \left(-\frac{1}{7}\right)}{0 - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{14}$

36. O coeficiente angular é: $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

A reta procurada tem coeficiente angular $m = \sqrt{3}$ e passa pelo ponto $A(1, -6)$.

Assim:

$y - y_A = m(x - x_A)$

$y - (-6) = \sqrt{3}(x - 1)$

$\sqrt{3}x - y - 6 - \sqrt{3} = 0$

Portanto, $\sqrt{3}x - y - 6 - \sqrt{3} = 0$ é a equação geral da reta r.

37. a) O coeficiente angular é:

$m = \text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

A reta tem coeficiente angular $m = -\sqrt{3}$ e passa pelo ponto $(5, 0)$. Assim:

$y - 0 = -\sqrt{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow \sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

Logo, a equação geral da reta r é:

$\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

b) O coeficiente angular é:

$m = \text{tg } 45° = 1$

MODERNA

A reta tem coeficiente angular $m = 1$ e passa pelo ponto $(-3, 0)$. Assim:

$y - 0 = 1 \cdot (x + 3) \Rightarrow x - y + 3 = 0$

Logo, a equação geral da reta s é:

$x - y + 3 = 0$

38. Vamos determinar a equação da reta do gráfico.

$m = \dfrac{40 - 30}{20 - 0} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 30 = \dfrac{1}{2}(x - 0)$

$x - 2y + 60 = 0$

a) Quando a temperatura for 70 °C, vamos ter $x = 70$.

Assim:

$70 - 2y + 60 = 0 \Rightarrow 2y = 130 \Rightarrow y = 65$

Logo, a temperatura indicada pelo termômetro com escala °H será 65 °H.

b) Fazendo $x = y = t$, obtemos:

$t - 2t + 60 = 0 \Rightarrow t = 60$

Logo, o valor 60 coincide nas duas escalas:
60 °C = 60 °H

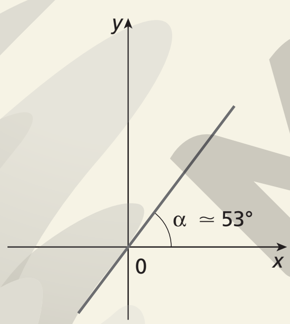
39. **a)** $\sqrt{3}x - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{5}x + \dfrac{2}{5}$

Logo: $m = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$ e $n = \dfrac{2}{5}$.

b) $-\dfrac{1}{2}x + \sqrt{2}y - \dfrac{1}{8} = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x + \dfrac{\sqrt{2}}{16}$

Logo: $m = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e $n = \dfrac{\sqrt{2}}{16}$.

40. Como 30% = 0,3, temos:
$y = x + 0{,}3x \Rightarrow y = 1{,}3x$



Logo, a função $y = 1{,}3x$ representa uma reta de coeficiente linear 0, ou seja, sua intersecção com o eixo y é o ponto $(0, 0)$ e seu coeficiente angular é 1,3.
Assim: $m = 1{,}3$
$\text{tg}\ \alpha = 1{,}3 \Rightarrow \alpha \simeq 53°$

41. A reta r tem coeficiente angular $m_r = \text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$ e passa pelo ponto $(0, -2)$; então:

r: $y + 2 = \sqrt{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 2$

A reta s tem coeficiente angular $m_s = \text{tg}\ 135° = -1$ e passa pelo ponto $(0, 4)$; então:

s: $y - 4 = (-1) \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x + 4$

Logo, as equações reduzidas das retas r e s são $y = \sqrt{3}x - 2$ e $y = -x + 4$, respectivamente.

42. **a)** r: $x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -x + 3$
$m_r = -1$ e $n_r = 3$
s: $x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$
$m_s = 1$ e $n_s = 1$
$m_r \neq m_s$; logo: r e s são concorrentes.
$m_r \cdot m_s = (-1) \cdot 1 = -1$; logo: r e s são perpendiculares.
Portanto, r e s são concorrentes perpendiculares.

b) r: $3x - 2y + 1 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

$m_r = \dfrac{3}{2}$ e $n_r = \dfrac{1}{2}$

s: $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

$m_s = -\dfrac{1}{2}$ e $n_s = -\dfrac{3}{2}$

$m_r \neq m_s$ e $m_r \cdot m_s = -\dfrac{3}{4}$

Portanto, r e s são retas concorrentes.

c) r: $y = 2 + x$
$m_r = 1$ e $n_r = 2$
s: $-x + y - 3 = 0$
$y = x + 3$
$m_s = 1$ e $n_s = 3$
$m_r = m_s = 1$ e $n_r \neq n_s$
Portanto, r e s são retas paralelas distintas.

d) r: $2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$
$m_r = 2$ e $n_r = 2$
s: $x - \dfrac{1}{2}y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$
$m_s = 2$ e $n_s = 2$
$m_r = m_s$ e $n_r = n_s$
Logo, r e s são retas paralelas coincidentes.

43. **a)** r: $2x - 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

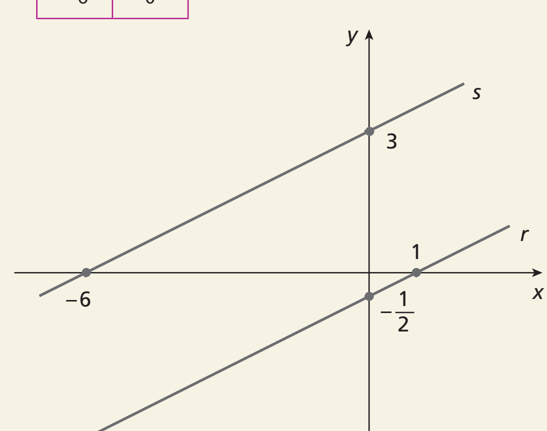
s: $y = \dfrac{1}{2}x + 3$

r:

x	y
0	$-\dfrac{1}{2}$
1	0

s:

x	y
0	3
−6	0



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

b) r e s são retas paralelas distintas.

c) $\left.\begin{array}{l} m_r = \dfrac{1}{2} \text{ e } n_r = -\dfrac{1}{2} \\ m_s = \dfrac{1}{2} \text{ e } n_s = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$

Portanto, r e s são paralelas distintas.

44. a) Como a reta r é paralela à reta de equação $5x - y + 2 = 0$, então $m_r = 5$.

Como r passa pelo ponto (0, 0), temos:

$y - 0 = 5 \cdot (x - 0) \Rightarrow 5x - y = 0$

Logo, a equação geral da reta r é $5x - y = 0$.

b) s: $5x + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -5x - 2$

$m_s = -5$

$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_r = \dfrac{1}{5}$

r passa por (0, 0); então:

$y - y_0 = m_r(x - x_0)$

$y - 0 = \dfrac{1}{5}(x - 0)$

$y = \dfrac{1}{5}x$

$x - 5y = 0$

Portanto, a equação geral da reta r é $x - 5y = 0$.

45. Como r e s são perpendiculares, temos:

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow 3 \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = -\dfrac{1}{3}$

Como a reta s passa pelo ponto P, temos:

$y - 1 = -\dfrac{1}{3} \cdot (x + 3)$

$3(y - 1) = -(x + 3)$

$x + 3y = 0$

Logo, a equação da reta s é $x + 3y = 0$.

46. r: $4x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + \dfrac{1}{2}$

$m_r = 2$

t: $2x - y + 3 = 0$

Na intersecção de t com o eixo das ordenadas, temos $x = 0$. Assim:

$2 \cdot 0 - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

Logo, o ponto (0, 3) é a intersecção de t com o eixo y.

Queremos a equação da reta que tem coeficiente angular 2 e passa pelo ponto (0, 3). Então:

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = 2(x - 0)$

$y = 2x + 3$

47. a) Seja P o ponto médio de $\overline{AB}$; então:

P: $\left(\dfrac{-5 - 1}{2}, \dfrac{-1 + 3}{2}\right) = (-3,\ 1)$

$m_{\overline{AB}} = \dfrac{3 + 1}{-1 + 5} = \dfrac{4}{4} = 1$

s é a reta mediatriz do lado $\overline{AB}$; então:

$m_s \cdot m_{\overline{AB}} = -1$

$m_s = -1$

s: $y - y_0 = m_s(x - x_0)$

$y - 1 = -1(x + 3)$

$y = -x - 2$

Seja Q o ponto médio de $\overline{BC}$; então:

Q: $\left(\dfrac{-1 + 1}{2}, \dfrac{3 - 3}{2}\right) = (0,\ 0)$

$m_{\overline{BC}} = \dfrac{6}{-2} = -3$

r é a reta mediatriz do lado $\overline{BC}$; então:

$m_r \cdot m_{\overline{BC}} = -1 \Rightarrow m_r = \dfrac{1}{3}$

r: $y - y_0 = m_r(x - x_0)$

$y - 0 = \dfrac{1}{3}(x - 0)$

$y = \dfrac{1}{3}x$

Seja S o ponto médio de $\overline{AC}$; então:

S: $\left(\dfrac{-5 + 1}{2}, \dfrac{-1 - 3}{2}\right) = (-2,\ -2)$

$m_{\overline{AC}} = \dfrac{-1 + 3}{-5 - 1} = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3}$

t é a reta mediatriz do lado $\overline{AC}$; então:

$m_t \cdot m_{\overline{BC}} = -1 \Rightarrow m_t = 3$

t: $y - y_0 = m_t(x - x_0)$

$y + 2 = 3(x + 2)$

$y = 3x + 4$

b) As equações das mediatrizes são:

s: $y = -x - 2$

r: $y = \dfrac{1}{3}x$

t: $y = 3x + 4$

Substituindo y por $\dfrac{1}{3}x$ na equação da reta t, obtemos:

$\dfrac{1}{3}x = 3x + 4 \Rightarrow \dfrac{9 - 1}{3}x = -4 \Rightarrow \dfrac{8}{3}x = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Assim: $y = \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

Portanto: $C\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

Comentário: Se julgar conveniente, peça aos alunos que calculem as distâncias do circuncentro a cada um dos vértices do triângulo e verifiquem que são iguais.

48. a) Temos: $A(1,\ 1)$, $B(5,\ -1)$, $C(x_C,\ y_C)$ e $D(2,\ 3)$

Para determinar as coordenadas do ponto C, vamos determinar o ponto de intersecção das retas suportes de $\overline{CD}$ e de $\overline{BC}$, que é o ponto C.

$m_{\overline{AD}} = \dfrac{3 - 1}{2 - 1} = 2 \Rightarrow m_{\overline{AD}} = 2 \Rightarrow m_{\overline{BC}} = 2$

A reta $\overleftrightarrow{BC}$ passa pelo ponto $(5,\ -1)$; então:

$\overleftrightarrow{BC}$: $y + 1 = 2(x - 5) \Rightarrow y = 2x - 11$ (I)

$m_{\overline{AB}} = \dfrac{1 + 1}{1 - 5} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow m_{\overline{AB}} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow m_{\overline{CD}} = -\dfrac{1}{2}$

A reta $\overleftrightarrow{CD}$ passa pelo ponto (2, 3); então:

$$\overleftrightarrow{CD}: y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$2x - 11 = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow x = 6$$

Substituindo x por 6 em (I), obtemos:

$y = 2 \cdot 6 - 11 \Rightarrow y = 1$

Portanto: $C(6, 1)$

b) Como y_A e y_C são iguais, a reta suporte da diagonal $\overline{CA}$ é paralela ao eixo x; logo, seu coeficiente angular é 0, ou seja, $m_{\overleftrightarrow{CA}} = 0$.

$\overleftrightarrow{CA}: y - 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 0$

Logo, a equação da reta suporte da diagonal $\overline{CA}$ é $y = 1$.

$$m_{\overleftrightarrow{BD}} = \frac{5 - 2}{-1 - 3} = -\frac{3}{4}$$

$$\overleftrightarrow{BD}: y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 3x + 4y - 17 = 0$$

Logo, a equação da reta suporte da diagonal $\overline{BD}$ é $3x + 4y - 17 = 0$.

c) $A = AB \cdot BC = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} \cdot \sqrt{(6-5)^2 + (1+1)^2}$

$A = \sqrt{16 + 4} \cdot \sqrt{1 + 4} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100}$

$A = 10$

Logo, a área do retângulo é 10 unidades de área.

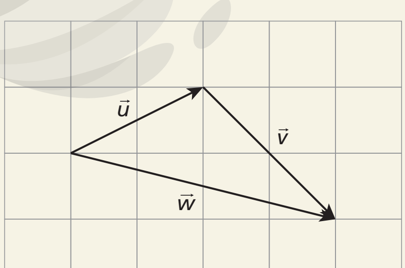
d) $P = 2 \cdot BC + 2 \cdot AB = 2\,(BC + AB)$

$P = 2\left(\sqrt{20} + \sqrt{5}\right) = 2\left(2\sqrt{5} + \sqrt{5}\right) = 2 \cdot 3\sqrt{5}$

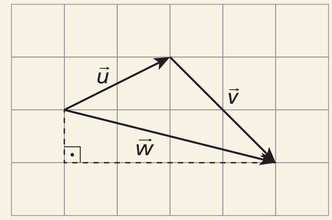
$P = 6\sqrt{5}$

Logo, o perímetro do retângulo é $6\sqrt{5}$ unidades de comprimento.

49. a) Para determinar o vetor $\vec{w}$ que será o vetor soma, deslocamos o vetor $\vec{u}$ de modo que ele tenha a sua extremidade na origem do vetor $\vec{v}$. Assim, o vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ terá origem coincidente com a origem do vetor $\vec{u}$ e a extremidade coincidente com a extremidade do vetor $\vec{v}$.



O módulo de $\vec{w}$ pode ser calculado com Pitágoras, conforme a indicação na figura a seguir.



$w^2 = l^2 + 4^2$

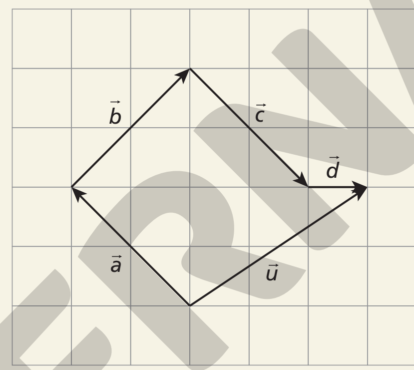
$w^2 = l + 16$

$w^2 = 17$

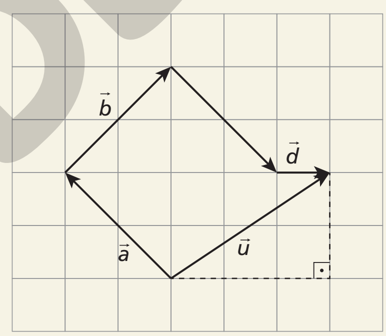
$w = \sqrt{17}$

Portanto, o módulo do vetor soma é $\sqrt{17}$ cm.

b) Para determinar o vetor $\vec{u}$ que será o vetor soma, deslocamos os vetores formando uma poligonal de modo que a extremidade de um vetor, coincida com a origem do outro. O vetor $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ deve ter a sua origem coincidente com a origem da poligonal e a sua extremidade coincidente com a extremidade da poligonal, conforme figura a seguir.



O módulo de $\vec{u}$ pode ser calculado com Pitágoras, como a seguir.



$u^2 = 2^2 + 3^2$

$u^2 = 4 + 9$

$u^2 = 13$

$u = \sqrt{13}$

Portanto, o módulo do vetor soma é $\sqrt{13}$ cm.

Comentário: Se julgar oportuno, peça aos alunos que façam a soma do item **b** sem os vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$. É esperado que verifiquem que o vetor resultante tem direção, sentido e módulo igual ao da resolução feita com os 4 vetores. Isso acontece porque os vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$ se anulam, pois têm mesma direção e mesmo módulo, mas sentidos opostos. Assim, podemos dizer que a soma entre vetores com mesma direção e mesmo módulo, mas com sentidos opostos, é nula.

50. $d_{O,\,r} = \dfrac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|-4|}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$

51. Vamos determinar a equação da reta suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 3y - 6 = 0$$

A medida da altura procurada é a distância entre o ponto $A(2, 0)$ e a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$$d_{A,\overline{BC}} = \frac{|1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-6)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$d_{A,\overline{BC}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Portanto, a medida da altura do triângulo *ABC* relativa ao lado $\overline{BC}$ é $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

52. Chamemos de *r* a reta de equação $2x - 3y + 5 = 0$ e de *s* a reta de equação $4x - 6y - 1 = 0$.

Vamos calcular as coordenadas de um ponto *P* qualquer da reta *r*.

Para $x = 2$, temos: $2 \cdot 2 - 3y + 5 = 0$

$3y = 9 \Rightarrow y = 3$

Portanto: $P(2, 3)$

Agora, basta calcular a distância entre *P* e a reta *s*.

$$d_{r,s} = d_{P,s} = \frac{|4 \cdot 2 - 6 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{52}} = \frac{11\sqrt{52}}{52}$$

Logo: $d_{r,s} = \frac{11\sqrt{13}}{26}$

53. a) $A(-1, 2)$

$m_r = \text{tg } 45° = 1$ e *r* passa por $B(2, 0)$

r: $y - y_0 = m_r(x - x_0)$

$y - 0 = 1(x - 2)$

$x - y - 2 = 0$

b) Como *A* é vértice do quadrado e *r* é reta suporte de um dos lados do quadrado, a medida ℓ do seu lado é:

$$\ell = d_{A,r} = \frac{|-1 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\ell = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento.

c) $d = \ell\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 5$

Portanto, a medida da diagonal desse quadrado é 5 unidades de comprimento.

d) Área $= \ell^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

Perímetro $= 4\ell = 4 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

Portanto, a área é $\frac{25}{2}$ unidades de área, e o perímetro é $10\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

54.
- Vamos considerar um ponto $P(x, y)$ equidistante das retas *r* e *s*.
- $d_{P,r} = d_{P,s}$

$$\frac{|2x + 5y - 4|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{|5x - 2y + 8|}{\sqrt{5^2 + 2^2}}$$

$$|2x + 5y - 4| = |5x - 2y + 8|$$

- Então:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4 = 5x - 2y + 8 \Rightarrow 3x - 7y + 12 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 5y - 4 = -(5x - 2y + 8) \Rightarrow 7x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

Comentário: Peça aos alunos que, em grupo, refaçam os mesmos passos desse exercício, considerando as equações gerais das retas:

(r) $a_r x + b_r y + c_r = 0$

(s) $a_s x + b_s y + c_s = 0$

Com esse procedimento, eles obtêm a fórmula das bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes.

55. Considere $P(x_p, y_p)$; logo:

$$3 = \frac{|3x_p + 4y_p|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow 3x_p + 4y_p = 15 \quad \text{(I)}$$

$y_p = 3x_p$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$3x_p + 4 \cdot 3x_p = 15 \Rightarrow x_p = 1$

Voltando em (I):

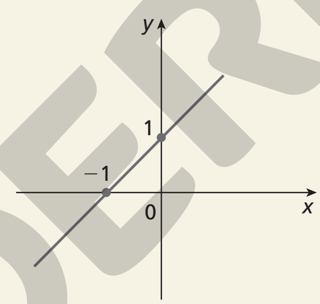
$y_p = 3 \cdot 1 \Rightarrow y_p = 3$

$x_p + y_p = 1 + 3 \Rightarrow x_p + y_p = 4$

alternativa d

56. A resposta depende do problema que o aluno elaborou.

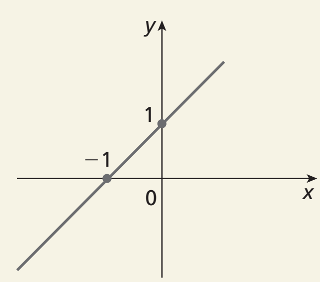
57. a) A reta $x - y + 1 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos.



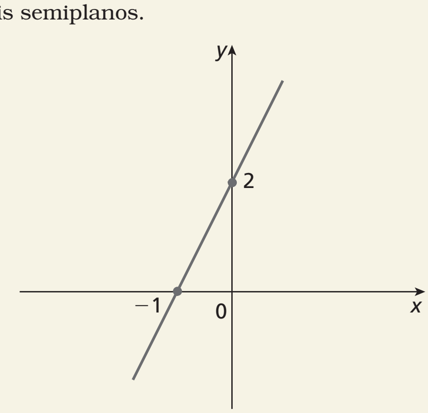
Testando o ponto auxiliar $P(0, 0)$, temos:

$x - y + 1 \geqslant 0 \Rightarrow 0 - 0 + 1 \geqslant 0$ (verdadeiro)

Portanto, podemos representar graficamente a inequação $x - y + 1 \geqslant 0$:



b) A reta $2x - y + 2 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

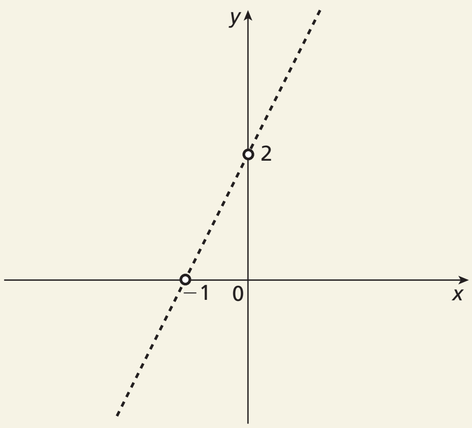
MODERNA

Testando o ponto auxiliar $P(0, 0)$, temos:

$2x - y + 2 < 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 0 + 2 < 0$ (falso)

Portanto, P não pertence ao semiplano que representa $2x - y + 2 < 0$.

Assim, podemos representar graficamente a inequação $2x - y + 2 < 0$:



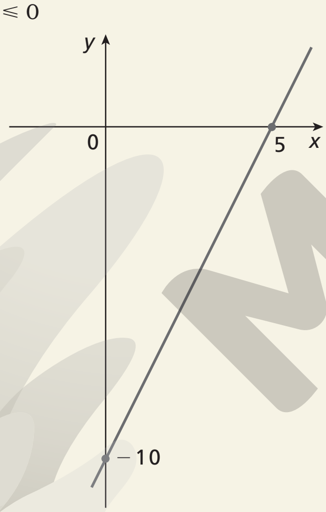
58. Vamos escrever a equação da reta que delimita o semiplano. Ela passa pelos pontos (0, 3) e (2, 0):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

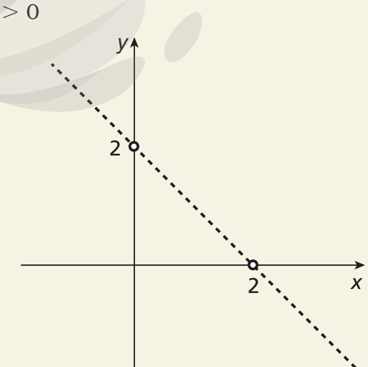
Notamos que os pontos descritos na representação gráfica são tais que $3x + 2y - 6 \leqslant 0$.

59. Primeiro, vamos representar graficamente as inequações:

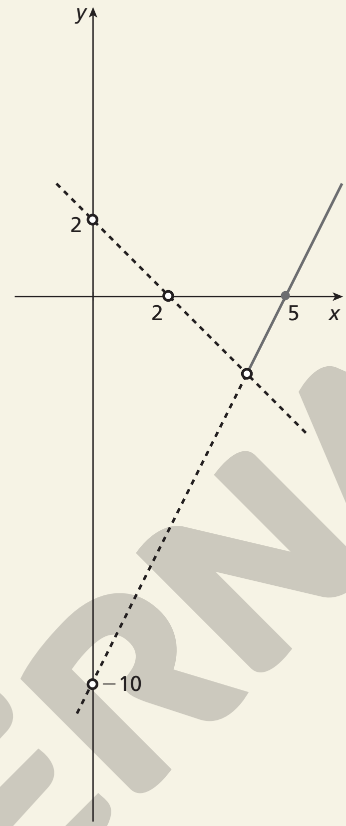
$2x - y - 10 \leqslant 0$



$x + y - 2 > 0$



A região procurada é:



60. **a)** $30x + 70y = 4.200$

Para $x = y$, temos:

$30x + 70x = 4.200$

$100x = 4.200$

$x = 42 \Rightarrow y = 42$

Portanto, são confeccionadas 84 calças por dia.

b) Não, pois x e y representam a quantidade de calças dos tipos A e B, respectivamente, produzido diariamente; x e y são números naturais.

c) $30x + 70y = 6.300$

O valor máximo para x será quando $y = 0$; então: $30x = 6.300 \Rightarrow x = 210$

O valor máximo para y será quando $x = 0$; então: $70y = 6.300 \Rightarrow y = 90$

d) $p \leqslant 6.300$

$30x + 70y \leqslant 6.300$

$30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$, com $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$

Não, pois, como o problema só faz sentido para $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$, a representação gráfica da inequação é um conjunto finito de pontos do semiplano $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$.

61. A área do quadrilátero $ABCD$ pode ser calculada pela soma das áreas dos triângulos ABC e CDA. Então:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 35 - 20 = 23$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}|D_{ABC}| = \frac{1}{2}|23| = \frac{23}{2}$$

$$D_{CDA} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 4 - 5 = 11$$

$$A_{CDA} = \frac{1}{2}|D_{CDA}| = \frac{1}{2}|11| = \frac{11}{2}$$

$$A_{\text{quadrilátero}} = A_{ABC} + A_{CDA} = \frac{23}{2} + \frac{11}{2} = 17$$

Logo, a área do quadrilátero é 17 unidades de área.

62. **a)** $m_r = -3$ e $m_s = -\frac{1}{2}$

$n_r = 6$ e $n_s = 2$

A reta r é a reta que passa por B e C, e a reta s é a que passa por A e D. Então:

$x = 0$

r: $y = 6 \Rightarrow B(0, 6)$

s: $y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$

$y = 0$

r: $x = 2 \Rightarrow C(2, 0)$

s: $x = 4 \Rightarrow D(4, 0)$

b) Em Q, devemos ter:

$$-3x + 6 = -\frac{x}{2} + 2$$

$$\frac{5x}{2} = 4 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$$

$$y = -3 \cdot \frac{8}{5} + 6 = \frac{-24 + 30}{5} = \frac{6}{5}$$

Portanto: $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c) A área da figura azul é dada pela soma das áreas dos triângulos BAQ e CDQ. Então:

$$D_{BAQ} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{32}{5}$$

$$A_{BAQ} = \frac{1}{2}|D_{BAQ}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{32}{5}\right| = \frac{16}{5}$$

$$D_{CDQ} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{12}{5}$$

$$A_{CDQ} = \frac{1}{2}|D_{CDQ}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{12}{5}\right| = \frac{6}{5}$$

$$A_{\text{figura}} = A_{BAQ} + A_{CDQ} = \frac{16}{5} + \frac{6}{5} = \frac{22}{5}$$

Portanto, a área da figura azul é $\frac{22}{5}$ unidades de área.

d) $A_{OAQC} = A_{OAQ} + A_{QCO} = \frac{1}{2} \cdot \left(|D_{OAQ}| + |D_{QCO}|\right)$

$$D_{OAQ} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{vmatrix} = \frac{16}{5} \Rightarrow |D_{OAQ}| = \frac{16}{5}$$

$$D_{QCO} = \begin{vmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{12}{5} \Rightarrow |D_{QCO}| = \frac{12}{5}$$

Assim:

$$A_{OAQC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + \frac{12}{5}\right) = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$$

Portanto, a área do quadrilátero $OAQC$ é $\frac{14}{5}$ unidades de área.

e) Vamos obter a área do polígono $OBQD$ somando a área do triângulo OBC e a do triângulo CDQ.

$$A_{OBQD} = A_{OBC} + A_{CDQ} = 6 + \frac{6}{5} = \frac{36}{5}$$

Logo, a área do polígono $OBQD$ é $\frac{36}{5}$ unidades de área.

Comentário: A área do quadrilátero $OBQD$ também pode ser obtida pela adição das áreas calculadas nos itens **c** e **d**, ou seja:

$A_{OBQD} = A_{BAQ} + A_{CDQ} + A_{OAQC}$

63. Se C pertence à equação $2x + y - 1 = 0$, devemos ter: $y_C = -2x_C + 1$; então:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_C + y_C$$

Assim:

$$6 = \frac{1}{2} \cdot |D| \Rightarrow 12 = |x_C + y_C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 = |x_C + (-2x_C + 1)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 = |-x_C + 1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_C + 1 = 12 \\ \text{ou} \\ -x_C + 1 = -12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = -11 \text{ e } y_C = 23 \\ \text{ou} \\ x_C = 13 \text{ e } y_C = -25 \end{cases}$$

Portanto: $C(-11, 23)$ ou $C(13, -25)$.

64. A resposta depende do problema que o aluno elaborou.

65. Comparando a equação dada em cada item com a equação reduzida da circunferência, temos:

a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$

Como $a = 1$ e $b = 2$, então $C(1, 2)$.

Como $r^2 = 100$, então $r = 10$.

Portanto, o centro é $C(1, 2)$ e o raio é $r = 10$.

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$x^2 + (y - 3)^2 = 5$

Como $a = 0$ e $b = 3$, então $C(0, 3)$.

Como $r^2 = 5$, então $r = \sqrt{5}$.

Portanto, o centro é $C(0, 3)$ e o raio é $r = \sqrt{5}$.

c) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 5)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

Como $a = 5$ e $b = 0$, então $C(5, 0)$.

MODERNA

Como $r^2 = \frac{1}{2}$, então $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, o centro é $C(5, 0)$ e o raio é $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

66. Na circunferência de equação $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$:

- Para $P(-2, 1)$, temos $x = -2$ e $y = 1$. Assim:

  $(-2 + 3)^2 + (1 - 1)^2 = 5$

  $1^2 + 0^2 = 5$

  $1 = 5$ (falso)

  Logo, P não pertence à circunferência.

- Para $Q(-1, 3)$, temos $x = -1$ e $y = 3$. Assim:

  $(-1 + 3)^2 + (3 - 1)^2 = 5$

  $2^2 + 2^2 = 5$

  $8 = 5$ (falso)

  Logo, Q não pertence à circunferência.

- Para $R(-2, 3)$, temos $x = -2$ e $y = 3$. Assim:

  $(-2 + 3)^2 + (3 - 1)^2 = 5$

  $1^2 + 2^2 = 5$

  $5 = 5$ (verdadeiro)

  Logo, R pertence à circunferência.

- Para $S(0, 1)$, temos $x = 0$ e $y = 1$. Assim:

  $(0 + 3)^2 + (1 - 1)^2 = 5$

  $3^2 + 0^2 = 5$

  $9 = 5$ (falso)

  Logo, S não pertence à circunferência.

- Para $T(-1, 0)$, temos $x = -1$ e $y = 0$. Assim:

  $(-1 + 3)^2 + (0 - 1)^2 = 5$

  $2^2 + (-1)^2 = 5$

  $5 = 5$ (verdadeiro)

  Logo, T pertence à circunferência.

Portanto, apenas os pontos R e T pertencem à circunferência da equação dada.

Comentário: Avalie a conveniência de pedir aos alunos que localizem a circunferência e os pontos no plano cartesiano e, então, verifiquem que, quando o valor numérico obtido para o 1º membro é maior que r^2, o ponto é exterior à circunferência; quando é menor que r^2, o ponto é interior à circunferência.

67. O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que distam 3 unidades do ponto $C(2, -1)$ é a circunferência de raio $r = 3$ e centro $C(2, -1)$.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Como $a = 2$ e $b = -1$, temos:

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

Essa é a equação reduzida da referida circunferência.

68. a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 0)^2 + (y + 0)^2 = 4^2$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$x^2 + y^2 = 16$

69. Se o diâmetro é $\overline{RS}$, tal que $R(3, 0)$ e $S(-3, 3)$, o centro dessa circunferência é o ponto médio de $\overline{RS}$; então:

$$C\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{0 + 3}{2}\right) = C\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

Como o centro da circunferência é $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$, então $a = 0$ e $b = \frac{3}{2}$.

$\overline{CS}$ corresponde ao raio da circunferência, então:

$$d_{C,S} = r \Rightarrow r = \sqrt{(0 + 3)^2 + \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow r = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{45}{4}}$$

Substituindo os valores encontrados na equação reduzida da circunferência, obtemos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{45}{4}}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

70. a) De acordo com a figura, o centro da circunferência é $C(0, 0)$; então, $a = 0$ e $b = 0$.

Calculamos a medida do raio:

$$r = d_{C,P} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} =$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

Substituindo os valores necessários, obtemos a seguinte equação reduzida da circunferência:

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 = 25$

b) De acordo com a figura, o centro da circunferência é $C(2, 1)$; então, $a = 2$ e $b = 1$.

O raio é a distância de $C(2, 1)$ ao ponto de coordenadas $(5, 0)$. Assim:

$$r = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} =$$

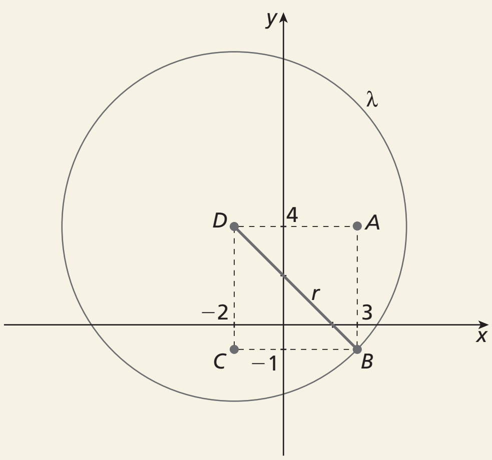
$$= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

Substituindo os valores necessários, obtemos a seguinte equação reduzida da circunferência:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

71. Vamos representar essa situação no plano cartesiano.



ADILSON SECCO

Como podemos observar na figura acima e de acordo com o enunciado, $D(-2, 4)$ é o centro de λ; então, $a = -2$ e $b = 4$.

O raio de λ será:

$r = d_{B,\,D} = \sqrt{[3-(-2)]^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} =$

$= \sqrt{50}$

Substituindo os valores obtidos na equação, obtemos:

$(x+2)^2 + (y-4)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é

$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 50$.

72. **a)** Vamos formar trinômios quadrados perfeitos e verificar se é possível determinar o centro $C(a, b)$ e o raio r da circunferência.

$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0 + 1 + 1$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C(1, -1)$ e o raio é $r = \sqrt{2}$.

b) $(x+1)^2 - (y-2)^2 = 9$

$x^2 + 2x + 1 - y^2 + 4y - 4 = 9$

$x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$

Como o coeficiente de y^2 é -1, não é possível determinar o centro nem o raio, já que essa equação não representa uma circunferência.

Comentário: Nesse exercício, é importante que os alunos explicitem suas conclusões e esbocem uma justificativa para suas considerações. Esse tipo de relação contribui para o avanço cognitivo dos alunos.

73. $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 9 = 0$

Vamos dividir ambos os membros dessa equação por 4 para que os coeficientes de x^2 e de y^2 tornem-se 1:

$x^2 + y^2 + 1x + 2y + \dfrac{9}{4} = 0$

Agora, vamos comparar essa equação com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 + 1x + 2y + \dfrac{9}{4} = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = 1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

$-2b = 2 \Rightarrow b = -1$

$a^2 + b^2 - r^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 - r^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \dfrac{1}{4} + 1 - \dfrac{9}{4} \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Logo, a equação dada não representa uma circunferência.

74. **a)** Primeiro, vamos calcular o centro e o raio da circunferência completando os quadrados:

$x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 18y + 81 = -8 + 9 + 81$

$(x-3)^2 + (y+9)^2 = 82$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C(3, -9)$ e o raio $r = \sqrt{82}$.

b) Agora, vamos fazer os cálculos analisando os coeficientes:

$x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = -6 \Rightarrow a = 3$

$-2b = 18 \Rightarrow b = -9$

$a^2 + b^2 - r^2 = 8 \Rightarrow 3^2 + (-9)^2 - r^2 = 8 \Rightarrow r = \sqrt{82}$

Portanto, o centro dessa circunferência é $C(3, -9)$ e o raio $r = \sqrt{82}$.

Comentário: Seria interessante fazer uma enquete na sala para saber qual dos procedimentos os alunos consideram mais conveniente.

75. **a)** $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b) $(x-0)^2 + (y+5)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

$x^2 + y^2 + 10y + 25 = 5$

$x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$

76. Vamos comparar a equação dada com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 + x + y + \dfrac{p}{2} = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = 1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

$-2b = 1 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2}$

$a^2 + b^2 - r^2 = \dfrac{p}{2} \Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - \dfrac{p}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{p}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{p}{2}} \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{1-p}{2}}$

Portanto, concluímos que a condição é:

$1 - p > 0 \Rightarrow p < 1$

77. **a)** Como o ponto A pertence à circunferência, suas coordenadas obedecem à relação $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Portanto, para $x = 2$, temos:

$2^2 + y^2 - 5 = 0$

$y^2 = 1$

$y = 1$ ou $y = -1$ (não serve)

Logo, a ordenada do ponto A é 1.

O valor $y = -1$ não serve como ordenada do ponto A porque é um ponto do primeiro quadrante, mas o valor $y = 1$ é a ordenada do ponto D, que também tem abscissa igual a 2.

b) Como vimos no item anterior, as coordenadas do ponto D são $x = 2$ e $y = -1$. Portanto, $D(2, -1)$.

Como o ponto B tem ordenada igual a 1, e B pertence à circunferência, temos:

$x^2 + 1^2 - 5 = 0$

$x^2 = 4$

$x = -2$ ou $x = 2$ (não convém)

Logo, a abscissa do ponto B é -2 e, portanto, $B(-2, 1)$.

O valor $x = 2$ não serve como abscissa do ponto B porque $x = 2$ é abscissa dos pontos A e D.

Como o ponto C tem ordenada igual a -1 e C pertence à circunferência, temos:

$x^2 + (-1)^2 - 5 = 0$

$x^2 = 4$

$x = -2$ ou $x = 2$ (não serve)

Logo, a abscissa do ponto C é -2 e, portanto, $C(-2, -1)$.

MODERNA

c) Sim. A área da região alaranjada pode ser calculada pela diferença entre a área do círculo de raio $r = \sqrt{5}$ e a área do retângulo *ABCD* de comprimento 4 e altura 2.

$$A_{\text{região alaranjada}} = A_{\text{círculo}} - A_{\text{retângulo}} = \pi \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 2$$

Logo: $A_{\text{região alaranjada}} = (5\pi - 8)$ unidades de área

Comentário: Comente com os alunos que a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 5$ representa a aplicação do teorema de Pitágoras a todos os triângulos retângulos de hipotenusa $\overline{OP}$ – sendo $OP = \sqrt{5}$, O a origem do sistema e $P(x, y)$ não pertencente aos eixos – e com catetos contidos nos eixos.

78. Para saber a posição que o ponto *P* ocupa em relação a cada circunferência, devemos calcular a distância entre esse ponto e o centro de cada circunferência:

a) $d_{C,P} = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{10}$

Como $\sqrt{10} > 3$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto *P* é exterior à circunferência.

b) $d_{C,P} = \sqrt{(-2+1)^2 + (2-2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = 1$

Como $1 < 2$, $d_{C,P} < r$; logo, o ponto *P* é interior à circunferência.

c) $d_{C,P} = \sqrt{(-3+1)^2 + (1-2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{5}$

Se $d_{C,P} = r$, o ponto *P* pertence à circunferência.

79. a) Pela equação da circunferência $x^2 + (y-3)^2 = 4$, temos centro $C(0, 3)$ e raio 2.

Calculando a distância *CP*, temos:

$d_{C,P} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-3)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{20}$

Como $\sqrt{20} > 2$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto $P(2, -1)$ é exterior à circunferência.

b) Pela equação da circunferência $(x-2)^2 + y^2 = 4$, temos centro $C(2, 0)$ e raio 2.

Calculando a distância *CP*, temos:

$d_{C,P} = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2} \Rightarrow d_{C,P} = 2$

Se $d_{C,P} = r$, o ponto $P(2, 2)$ pertence à circunferência.

c) Vamos determinar o centro e o raio da circunferência comparando a equação dada com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$-2a = 2 \Rightarrow a = -1$

$-2b = -2 \Rightarrow b = 1$

$a^2 + b^2 - r^2 = -2 \Rightarrow r^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2 \Rightarrow r = 2$

Logo, o centro é $C(-1, 1)$ e o raio é 2.

Calculando a distância *CP*, temos:

$d_{C,P} = \sqrt{(-1+1)^2 + (1-0)} \Rightarrow d_{C,P} = 1$

Como $1 < 2$, então $d_{C,P} < r$; logo, o ponto $P(-1, 0)$ é interior à circunferência.

80. a) Para que o ponto $P(k, 1)$ esteja na circunferência, devemos ter:

$k^2 + 1^2 - 6 \cdot k - 2 \cdot 1 + 9 = 0$

$k^2 - 6k + 8 = 0$

$k = 4$ ou $k = 2$

b) Para que o ponto $P(k, 1)$ esteja no interior da circunferência, devemos ter:

$k^2 + 1^2 - 6 \cdot k - 2 \cdot 1 + 9 < 0$

$k^2 - 6k + 8 < 0$

$2 < k < 4$

Comentário: Avalie a conveniência de estimular os alunos, após a resolução algébrica, a buscar uma resolução gráfica. Espera-se que eles obtenham as mesmas respostas representando, no plano cartesiano, a circunferência de centro $(3, 1)$ e $r = 1$, interceptada pela reta horizontal $y = 1$.

81. $x^2 + y^2 = 4 \begin{cases} C(0, 0) \\ R = 2 \end{cases}$

(01) Correta.

$P(-1, 1) \Rightarrow (-1)^2 + 1^2 = 2 < 4$

(02) Correta.

$P(-2, 2) \Rightarrow (-2)^2 + 2^2 = 8 > 4$

(04) Correta.

$P\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \Rightarrow 2 + 2 = 4$

(08) Correta.

Sabemos que a intersecção de duas linhas pode ser obtida pela resolução do sistema formado por suas equações:

$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$x^2 + x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Logo, a reta intercepta a circunferência em dois pontos:

$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

(16) Incorreta.

$\begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

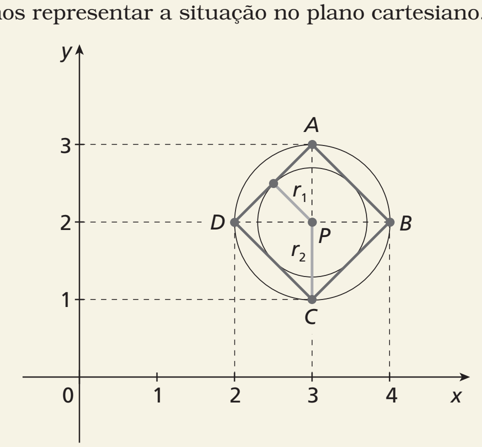
$x^2 + (-x + 2)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Logo, a reta intercepta a circunferência em dois pontos: $(0, 2)$ e $(2, 0)$

- A soma das alternativas corretas é: $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

Comentário: As resoluções das proposições (08) e (16) desse exercício antecipam as condições geométricas que levarão às respectivas condições algébricas do próximo tópico.

82. Vamos representar a situação no plano cartesiano.



ADILSON SECCO

O ponto *P* é o centro das circunferências inscrita e circunscrita ao quadrado *ABCD*.

O ponto *P* é o ponto médio das diagonais do quadrado *ABCD*. Assim:

$$P\left(\frac{3+3}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \Rightarrow P(3, 2)$$

MODERNA

a) O raio da circunferência inscrita no quadrado é igual à metade da medida do lado desse quadrado. Assim:

$$r = \frac{d_{A,\,B}}{2} = \frac{\sqrt{(3-4)^2 + (3-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, a equação da circunferência inscrita no quadrado é $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{2}$.

b) O raio da circunferência circunscrita ao quadrado é igual à metade da medida da diagonal desse quadrado. Assim:

$$r = \frac{d_{A,\,C}}{2} = \frac{\sqrt{(3-3)^2 + (3-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

Logo, a equação da circunferência circunscrita ao quadrado é $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$.

c) Usando S para denotar a área da coroa circular formada pelas circunferências, S_i para denotar a área da circunferência inscrita e S_c para a área da circunferência circunscrita ao quadrado $ABCD$, temos:

$$S = S_c - S_i \Rightarrow S = \pi \cdot 1^2 - \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \pi \cdot 1 - \pi \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{\pi}{2}$$

Logo, a área da coroa circular é $\frac{\pi}{2}$ unidade de área.

83. a) Pela equação da circunferência, sabemos que o centro é $C(1, 1)$ e o raio é $r = 2\sqrt{2}$.

Agora, vamos calcular a distância do centro da circunferência à reta s: $x + y = 6$

$$d_{c,\,s} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Como $d_{c,\,s} = r$, então a reta e a circunferência são tangentes.

Vamos determinar o ponto de tangência resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - y \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 - y \\ y^2 - 6y + 9 = 0 \end{cases}$$

De $y^2 - 6y + 9 = 0$, obtemos $y = 3$. Substituindo y por 3 na equação $x = 6 - y$, obtemos $x = 3$.

Portanto, o ponto de tangência é $P(3, 3)$.

b) Os pontos comuns à reta e à circunferência, se houver, são as soluções do sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Para $x = 0$, temos $y = -1$.

Para $x = 1$, temos $y = 0$.

Portanto, encontramos duas soluções para o sistema: $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$.

Assim, a reta e a circunferência são secantes e os pontos de intersecção são $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$.

c) Os pontos comuns à reta e à circunferência, se houver, são as soluções do sistema formado por suas equações:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 4x + 9 = 0$$

O discriminante da equação $2x^2 + 4x + 9 = 0$ é $\Delta = -56 < 0$, o que nos indica que o sistema não tem solução.

Logo, a reta é exterior à circunferência.

84. Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Substituindo y por $x + k$ na equação da circunferência, obtemos:

$x^2 + (x + k)^2 - 4 = 0$

$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 - 4 = 0$

$2x^2 + 2kx + k^2 - 4 = 0$

$\Delta = (2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 4) = -4k^2 + 32$

Para que a reta e a circunferência sejam tangentes, deve haver apenas uma solução para o sistema; então, devemos ter $\Delta = 0$. Assim:

$-4k^2 + 32 = 0 \Rightarrow k = -2\sqrt{2}$ ou $k = 2\sqrt{2}$

85. No ponto A, temos $y = 0$; então:

$x^2 + 0^2 - 8x - 8 \cdot 0 + 16 = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$

Portanto, $A(4, 0)$.

No ponto B, temos $x = 0$; então:

$0^2 + y^2 - 8 \cdot 0 - 8y + 16 = 0$

$y^2 - 8y + 16 = 0 \Rightarrow y = 4$

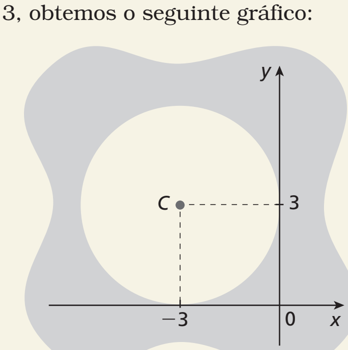
Portanto, $B(0, 4)$.

$AB = d_{A,\,B} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Logo, AB mede $4\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

Comentário: Avalie a conveniência de generalizar a questão para circunferências tangentes aos eixos e com centro $C(k, k)$, na bissetriz dos quadrantes ímpares, ou $C'(-k, k)$, na bissetriz dos quadrantes pares, e raio $|k|$, $k \neq 0$. Em ambos os casos, os alunos deverão obter $AB = |k| \cdot \sqrt{2}$.

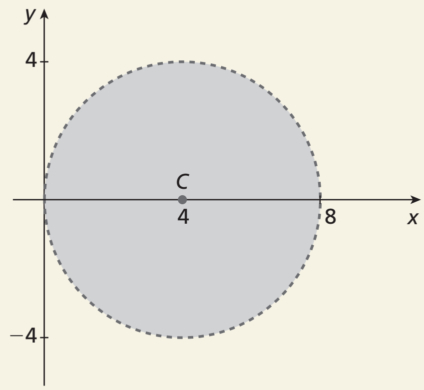
86. a) A inequação $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \geq 9$ representa a reunião de todos os pontos da circunferência $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ com todos os pontos exteriores a ela. Como a circunferência tem centro $C(-3, 3)$ e raio $r = 3$, obtemos o seguinte gráfico:



ADILSON SECCO

b) A inequação $(x - 4)^2 + y^2 < 16$ representa todos os pontos interiores à circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 16$. Como a circunferência tem centro $C(4, 0)$ e raio $r = 4$, obtemos o seguinte gráfico:

MODERNA



Comentário: Solicite aos alunos que, após a resolução, tentem realizar o caminho inverso, ou seja, com base nas representações gráficas, extrair de cada uma sua representação algébrica, isto é, as inequações. Dessa maneira, os alunos têm a oportunidade de trabalhar com dois tipos de representação de um mesmo objeto matemático.

87. A área do círculo representado pela inequação $x^2 + (y - 1)^2 - 1 \leqslant 0$ é dada por $A = \pi \cdot r^2$, em que r é o raio da circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, que tem centro $C(0, 1)$ e raio $r = 1$. Assim: $A = \pi \cdot 1^2 \Rightarrow A = \pi$

Logo, a área do círculo dado é π unidades de área.

88. O comprimento da circunferência representada pela equação $x^2 + y^2 = 25$ é $C = 2\pi r$, em que r é o raio da circunferência.

De acordo com a equação da circunferência, $r = 5$.

Assim: $C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$

Logo, o comprimento da circunferência é 10π unidades de comprimento.

89. **a)** No gráfico está representada a reunião de todos os pontos da circunferência de centro $C(2, 3)$ e raio $r = \sqrt{13}$, com todos os pontos interiores a ela.

A equação da circunferência é:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

Então, a inequação correspondente ao gráfico será:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 13$

b) No gráfico estão representados os pontos de intersecção da reta de equação $y = x + 3$ com a circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio 3 cuja equação é $x^2 + y^2 = 9$.

O sistema que corresponde ao gráfico é:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

c) No gráfico estão representados todos os pontos de intersecção do semiplano situado acima da reta $x + y = -2$, incluindo a própria reta, com os pontos do interior da circunferência de centro $C(-2, -2)$ e raio 2 cuja equação é $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$, incluindo os da circunferência.

O sistema que corresponde ao gráfico é:

$$\begin{cases} y \geqslant -x - 2 \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4 \end{cases}$$

90.
- Quando $\Delta > 0$, a equação do 2º grau tem duas soluções distintas, ou seja, a reta e a circunferência se interceptam em dois pontos distintos (são secantes).
- Quando $\Delta = 0$, a equação do 2º grau tem duas soluções coincidentes, ou seja, a reta e a circunferência se interceptam em um único ponto (são tangentes).
- Quando $\Delta < 0$, a equação do 2º grau não tem solução real, ou seja, a reta e a circunferência não se interceptam.

Portanto: se $\Delta > 0$, a reta é secante à circunferência;
se $\Delta = 0$, a reta é tangente à circunferência;
se $\Delta < 0$, a reta é exterior à circunferência.

Comentário: Essa situação permite um desenvolvimento intradisciplinar com função quadrática, estudada no 1º ano.

91. A resposta depende do problema que o aluno elaborou.

92. **a)** Tangentes interiores, pois: $d = |r_1 - r_2|$

b) Secantes, pois: $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

c) Tangentes exteriores, pois: $d = r_1 + r_2$

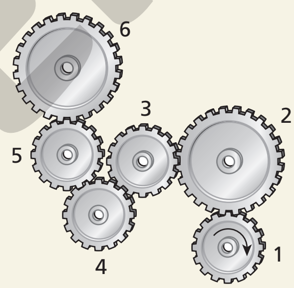
d) Disjuntas interiores, pois: $d < |r_1 - r_2|$

e) Concêntricas, pois: $d = 0$.

f) Disjuntas exteriores, pois: $d > r_1 + r_2$

Comentário: Nesse exercício de cálculo mental, é importante orientar os alunos a abstrair o plano cartesiano e imaginar apenas as circunferências com as respectivas medidas dos raios e as distâncias entre os centros.

93. Identificando as engrenagens de 1 a 6, temos:

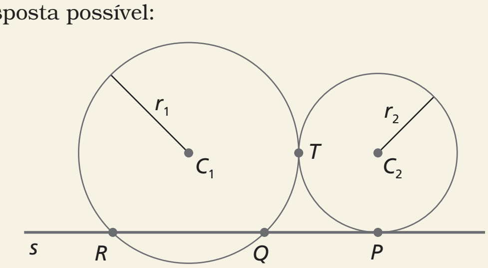


A engrenagem 1 gira no sentido horário, conforme a figura. Logo:
- a engrenagem 2 gira no sentido anti-horário;
- a engrenagem 3 gira no sentido horário;
- a engrenagem 4 gira no sentido anti-horário;
- a engrenagem 5 gira no sentido horário.

Portanto, a engrenagem 6 gira no sentido anti-horário.

Comentário: Essa questão leva os alunos a usar uma abordagem distinta da aplicada em outras atividades, ou seja, eles raciocinam sem o uso de fórmulas.

94. Resposta possível:



Na figura há duas circunferências, com centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2.

T é o ponto de tangências.

P, Q e R são os pontos de intersecção da reta s com as circunferências.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Comentário: Observe que esse enunciado é uma descrição que diz respeito a um objeto matemático que deve ser representado graficamente. Muitas vezes, essa relação não é muito clara para os alunos e precisa ser trabalhada de modo que possibilite seu trânsito pelos diferentes registros de representação semiótica. Questões como essa são importantes, pois possibilitam uma aprendizagem significativa e rica em diversidade de registros. Nessa situação, solicite posteriormente aos alunos o inverso, ou seja, fornecer a representação gráfica para que eles elaborem um pequeno texto descrevendo o objeto matemático em questão.

Verifique se algum aluno obteve uma resposta diferente dessa, por exemplo, com tangência interna das circunferências.

95. Vamos determinar os centros C_1 e C_2 e os raios r_1 e r_2 de cada circunferência.

- Como $x^2 + y^2 - 4x = 0$, então:

  $C_1(2, 0)$ e $r_1 = 2$

- Como $x^2 + y^2 - 16x = 48$, então:

  $C_2(8, 0)$ e $r_2 = 4\sqrt{7}$

Vamos calcular a distância d entre os centros.

$$d = \sqrt{(8-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

Logo, $0 \leqslant d < |r_1 - r_2|$; então, as circunferências são disjuntas internas e não há pontos de intersecção (pontos comuns) entre elas.

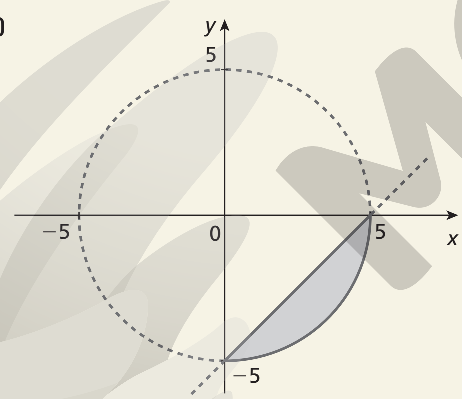
96. O gráfico representa a intersecção de todos os pontos interiores à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 36$ com todos os pontos exteriores à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, inclusive os pontos da circunferência.

Logo, o sistema abaixo pode representar essa situação:

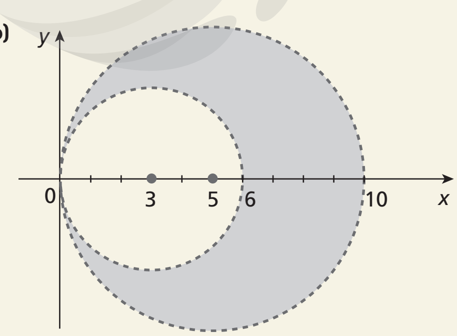
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases}$$

Comentário: Se possível, traga para a aula um disco de vinil ou um CD e solicite aos alunos que, com base no esquema gráfico apresentado nessa atividade, tracem em uma cartolina a circunferência do disco inserida no plano cartesiano. Em seguida, solicite a eles que escrevam o sistema de inequações descrito pelo modelo.

97. **a)**



b)

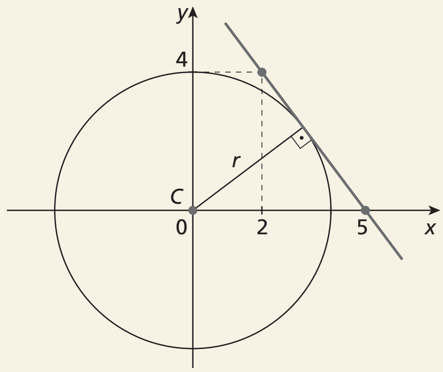


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Comentário: Se julgar oportuno, solicite aos alunos que, após a resolução da construção gráfica, realizem o caminho inverso, ou seja, com base nos gráficos, escrevam os sistemas de inequações. Essa metodologia possibilita conhecer as dificuldades dos alunos em relação às diferentes representações matemáticas de um mesmo objeto. Deve-se considerar que um objeto matemático pode apresentar diferentes representações (gráfica, simbólica, algébrica, geométrica), e cada uma delas contém um apelo cognitivo e um grau de dificuldade específicos.

98. Vamos representar a situação graficamente:



A reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Logo, temos:

$$r = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 20|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

Área da região delimitada pela circunferência:
$A = \pi \cdot r^2 = 16\pi$
Assim, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 16$ e a área da região delimitada pela circunferência é 16π unidades de área.

99. O lugar geométrico do centro da circunferência λ_1 será uma circunferência de raio $\frac{1+3}{2} = 2$, pois a distância do centro da circunferência λ_1 até as circunferências α e β sempre será 1; portanto, o lugar geométrico é dado por $x^2 + y^2 = 2^2$.
Analogamente, o lugar geométrico do centro da circunferência λ_2 será uma circunferência de raio 1, pois a distância entre o centro da circunferência λ_2 e as circunferências α e β será sempre 2; logo, o lugar geométrico é dado por $x^2 + y^2 = 1^2$.
alternativa c
Comentário: Espera-se que os alunos percebam que as infinitas circunferências λ_1 e λ_2 são obtidas dando-se um giro completo.

Exercícios complementares

1. Sobre (a, b), temos:

$$\left.\begin{matrix} a < 0 \text{ e } b > 0 \\ |a| > |b| \end{matrix}\right\} \Rightarrow a - b < 0$$

Sobre (c, d), temos:

$$\left.\begin{matrix} c < 0 \text{ e } d < 0 \\ |c| > |d| \end{matrix}\right\} \Rightarrow c - d < 0$$

Sobre $(a - b, c - d)$, podemos afirmar que está situado no 3º quadrante.
alternativa c

2. Os pontos que pertencem à bissetriz dos quadrantes pares têm coordenadas $(k, -k)$ com $k \in \mathbb{R}$, ou seja, valores absolutos iguais, mas sinais opostos. Assim:

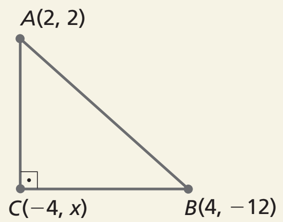
$2m^2 - 5m = -(-m^2 - m + 9)$

$m^2 - 6m + 9 = 0$

$m = 3$

Logo: $m = 3$

3. Podemos representar a situação pelo seguinte esquema:



$(d_{A,\,C})^2 + (d_{C,\,B})^2 = (d_{A,\,B})^2$

$\left(\sqrt{(2+4)^2 + (2-x)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(-4-4)^2 + (x+12)^2}\right)^2 =$

$= \left(\sqrt{(2-4)^2 + (2+12)^2}\right)^2$

$36 + (2 - x)^2 + 64 + (x + 12)^2 = 4 + 196$

$4 - 4x + x^2 + x^2 + 24x + 144 = 200 - 100$

$2x^2 + 20x + 48 = 0$

$x^2 + 10x + 24 = 0$

$x = -6$ ou $x = -4$

4. Como a reta r passa pelos pontos $(-4, -2)$ e $(3, 0)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y + 6 - 2x + 3y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x - 7y - 6 = 0$

Logo, a equação da reta r é:

$2x - 7y - 6 = 0$

5. $m_r = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow -\dfrac{2}{3} = \dfrac{-m-2}{5-m} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 - 2m = 3m + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5m = 4 \Rightarrow m = \dfrac{4}{5}$

Logo: $m = \dfrac{4}{5}$

6. r: $-2x + (p - 7)y + 3 = 0$

$y = \dfrac{2}{p-7}x - \dfrac{3}{p-7}$

Então: $m_r = \dfrac{2}{p-7}$

s: $px + y - 13 = 0 \Rightarrow y = -px + 13$

Então: $m_s = -p$

Para que r e s sejam perpendiculares, devemos ter:

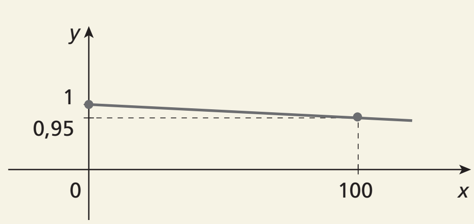
$m_r \cdot m_s = -1$

$\dfrac{2}{p-7} \cdot (-p) = -1$

$2p = p - 7 \Rightarrow p = -7$

Logo: $p = -7$

7. Representando a situação num plano cartesiano:



Temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 100 & 0{,}95 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$0{,}05x + 100y - 100 = 0$

$5x + 10.000y - 10.000 = 0$

$5x + 10.000y = 10.000$

8. r: $ax + y = a + 2 \Rightarrow y = -ax + a + 2$

s: $4x + ay = 4 - a^2$

$y = -\dfrac{4}{a}x + \dfrac{4 - a^2}{a}$

Se r e s forem concorrentes, teremos:

$-a \neq -\dfrac{4}{a} \Rightarrow -a^2 \neq -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \neq 2$ e $a \neq -2$ e $a \neq 0$

Se r e s forem paralelas, teremos:

$-a = -\dfrac{4}{a} \Rightarrow -a^2 = -4 \Rightarrow$

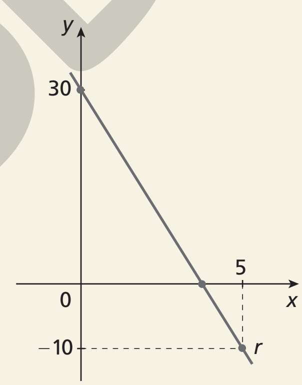
$\Rightarrow a = 2$ ou $a = -2$

alternativa c

9. Sendo x o tempo de resfriamento, em minuto, e y a temperatura atingida, temos:

para $x = 0$, $y = 30$ e, para $x = 5$, $y = -10$

Como o resfriamento é linear, podemos representá-lo por uma reta:



Podemos então escrever a equação dessa reta:

r: $y - 30 = -\dfrac{40}{5}(x - 0) \Rightarrow y = -8x + 30$

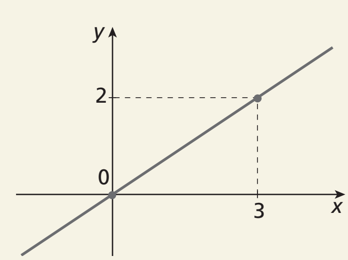
Quando a temperatura atinge 0 °C, temos:

$0 = -8x + 30 \Rightarrow x = \dfrac{30}{8} = 3{,}75$

Logo, a placa atinge 0 °C após 3,75 minutos, ou seja, 3 minutos e 45 segundos.

10. Vamos representar graficamente as inequações:

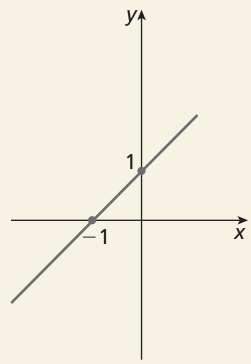
$2x - 3y \geqslant 0$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

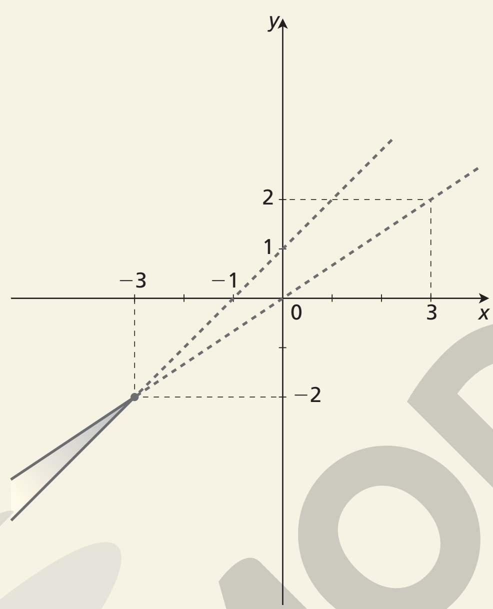
MODERNA

$x - y + 1 \leqslant 0$

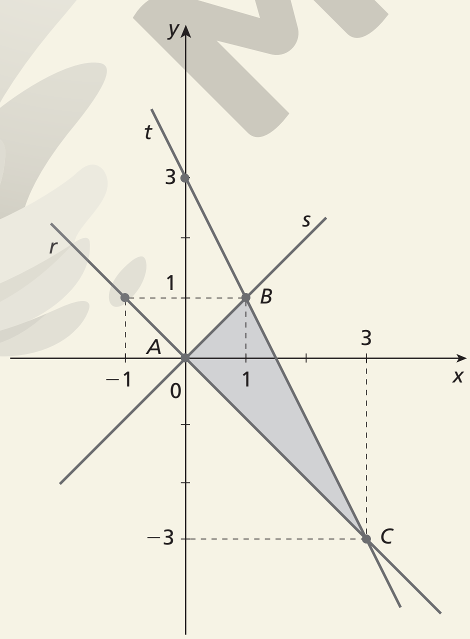


A região que representa o sistema de inequações

$$\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 0 \\ x - y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$ é:



11. Vamos representar as retas no plano cartesiano:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Temos:

r: $x + y = 0$

s: $x - y = 0$

t: $2x + y - 3 = 0$

$A(0, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(3, -3)$

Então:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|D| = \frac{|-6|}{2} = 3$$

alternativa d

12. a) Coordenadas dos rochedos e do poço: $R_1(0, 0)$, $R_2(120, 0)$ e $P(0, 40)$.

A reta que representa o rio é r: $y = x - 20$

Seja $T(x, y)$ o ponto que indica onde o tesouro está enterrado.

Analisando a descrição do pirata, temos:

I. T pertence à linha que passa pelos dois rochedos: $y = 0$

II. T está entre os dois rochedos: $0 < x < 120$

III. A distância de T ao poço é maior que 50 metros: $(x)^2 + (y - 40)^2 > 50^2$

IV. A distância de T ao rio é menor que 20 metros:

$$\frac{|x - y - 20|}{\sqrt{2}} < 20$$

b) Por (I) e (III) $x^2 + (0 - 40)^2 > 50^2 \Rightarrow x < -30$ ou $x > 30$

Por (II) $0 < x < 120$

Então, $30 < x < 120$

As condições (I) e (IV) implicam $|x - 20| < 20\sqrt{2}$; então: $20 \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) < x < 20 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$

Observe que $20 \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) < 30$; então:

$30 < x < 20 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$

Logo, o tesouro está localizado em um ponto $T(x, 0)$, com $30 < x < 20\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

13. Verificando os pontos que pertencem à reta e correspondem às alternativas propostas, temos:

$Q(-3, 1)$, pois a distância do ponto P ao ponto Q é:

$$\sqrt{\left[-5 - (-3)\right]^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20} < 5$$

Portanto, para satisfazer o pedido da comunidade, a estação deve ser construída em $Q = (-3, 1)$.

alternativa b

14. O centro C da circunferência é o ponto médio de $\overline{AB}$; então:

$$C\left(\frac{-2 + 0}{2}, \frac{1 - 3}{2}\right) = C(-1, -1)$$

O raio r da circunferência é a metade da medida de $\overline{AB}$; então:

$$r = \frac{d_{A, B}}{2} = \frac{\sqrt{(0 + 2)^2 + (-3 - 1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

Logo, a equação da circunferência é:

$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

15. a) Duas vezes, pois a área do círculo maior está dividida em exatamente duas partes iguais, ou seja, de mesma área.

b) Tomando $P = 2\pi r$ como o perímetro da circunferência maior, verificamos que o perímetro da parte laranja é:

$$P = \frac{2\pi r}{2} + 2\pi \cdot \frac{r}{2} \Rightarrow P = \pi r + \pi r \Rightarrow P = 2\pi r$$

Portanto, o perímetro da parte laranja é igual ao perímetro da circunferência maior.

c) Como o raio da circunferência maior é 2 vezes o raio da circunferência menor, temos:

$r = 2 \cdot 3 = 6$

$A = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$

Logo, a área do círculo maior é 36π unidades de área.

Comentário: Uma sugestão para verificar a resposta do item **a** é reproduzir a ilustração da atividade em uma folha e recortá-la de modo que se separe a parte branca da parte colorida. Essas duas partes se sobrepõem; logo, elas têm áreas iguais.

16. As circunferências λ_2 e λ_4 têm centros $C_2(x_2, -4)$ e $C_4(x_4, -4)$ e $d_{O,C_2} = d_{O,C_4} = \sqrt{64}$.

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{64} \Rightarrow x^2 + 16 = 64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \pm 4\sqrt{3}$$

Então, $x_2 = -4\sqrt{3}$ e $x_4 = 4\sqrt{3}$.

As cinco circunferências têm raio igual a 5 cm e centros $C_1(-14, 0)$, $C_2\left(-4\sqrt{3}, -4\right)$, $C_3(0, 0)$, $C_4\left(4\sqrt{3}, -4\right)$ e $C_5(14, 0)$.

Assim, as equações são:

λ_1: $(x + 14)^2 + y^2 = 25$

λ_2: $\left(x + 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$

λ_3: $x^2 + y^2 = 25$

λ_4: $\left(x - 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$

λ_5: $(x - 14)^2 + y^2 = 25$

17. Seja $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ uma equação completa do 2º grau. Comparando essa equação com a fornecida na atividade:

$A = B \Rightarrow a = 36$

$C = 0 \Rightarrow b = 0$

$$r^2 = \frac{576 + 144 - 144c}{5.184}$$

$576 + 144 - 144c > 0$

$$c < \frac{720}{144}$$

$c < 5$

Logo, $a = 36$, $b = 0$ e $c < 5$.

18. O ponto de ordenada máxima está alinhado verticalmente com o centro, ou seja, sua abscissa vale 4, já que o centro é $C(4, -3)$.

MODERNA

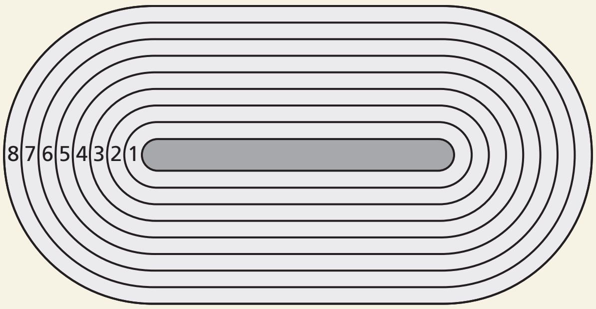
Substituindo x por 4 na equação da circunferência, obtemos:

$(4 - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$

$y = -2$ ou $y = -4$

Como se pede a ordenada máxima, o ponto procurado é $(4, -2)$.

19. Como são 8 raias, temos:



ADILSON SECCO

O corredor da raia 1 seria beneficiado, pois a raia tem o menor raio e, portanto, é mais curta.
alternativa a

20. a) $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(3, \frac{1}{3}\right)$, $C\left(4, \frac{1}{4}\right)$ e $D\left(x, \frac{1}{x}\right)$

O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao $\overline{CD}$; então, o coeficiente angular m é o mesmo para as duas retas.

$$m = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2 - 3} \Rightarrow m = -\frac{1}{6}$$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6} \cdot (x - 4) \Rightarrow y = -\frac{x}{6} + \frac{11}{12}$$

Para $y = \frac{1}{x}$, temos: $\frac{1}{x} = -\frac{x}{6} + \frac{11}{12}$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \text{ e } x_2 = \frac{3}{2}$$

Como $x = 4$ é a coordenada da abscissa do ponto C, então: $x = \frac{3}{2}$ e $y = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

b) Seja $M(x_m, y_m)$ o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e $N(x_n, y_n)$ o ponto médio do segmento $\overline{CD}$; então:

$$\left.\begin{array}{l} x_m = \dfrac{2 + 3}{2} \Rightarrow x_m = \dfrac{5}{2} \\ y_m = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2} \Rightarrow y_m = \dfrac{5}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{12}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \dfrac{4 + \frac{3}{2}}{2} \Rightarrow x_n = \dfrac{11}{4} \\ y_n = \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}}{2} \Rightarrow y_n = \dfrac{11}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow N\left(\frac{11}{4}, \frac{11}{24}\right)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{12} & 1 \\ \frac{11}{4} & \frac{11}{24} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\frac{55}{48} - \frac{11x}{24} - \frac{5y}{2} + \frac{5x}{12} + \frac{11y}{4} + \frac{55}{48} = 0$$

$$-\frac{x}{24} + \frac{y}{4} = 0$$

Como $c = 0$, então a reta passa pela origem do sistema.

MODERNA

21. Sendo r a reta de equação $x + y - 1 = 0$ e s a reta que passa pelos pontos $A(-3, 2)$ e $B(x, y)$, temos:

$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow -1 \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = 1$

Como s passa por $A(-3, 2)$, temos:

$y - y_A = m_s(x - x_A)$

$y - 2 = 1 \cdot (x + 3)$

$x - y + 5 = 0$ (reta s)

Então, as coordenadas de B são tais que: $B(x, x + 5)$.

Como A e B são simétricos em relação a r, temos:

$d_{A,\, r} = d_{B,\, r}$

$$\frac{|-3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x + (x + 5) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$\frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2x + 4|}{\sqrt{2}}$$

$|2x + 4| = 2$

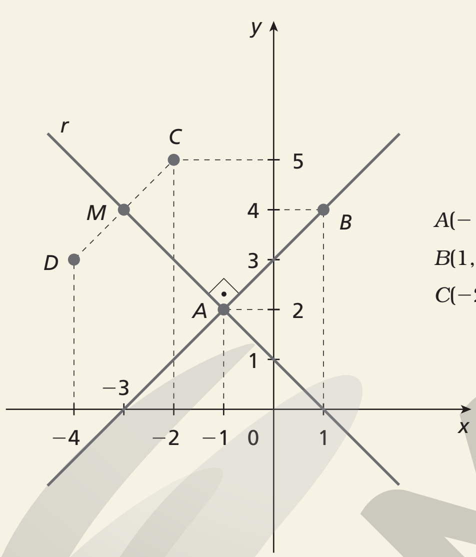
Assim:

$2x + 4 = 2 \Rightarrow x = -1$ ou

$2x + 4 = -2 \Rightarrow x = -3$ (não convém)

Logo: $B(-1, 4)$

22.



$A(-1, 2)$

$B(1, 4)$

$C(-2, 5)$

Seja r a reta que passa por A e é perpendicular a $\overline{AB}$.

$m_{\overline{AB}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{2} = 1$ e $m_r = -1$

$y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow y - 2 = -x - 1 \Rightarrow x + y - 1 = 0$ (r)

Seja s a reta $\overleftrightarrow{CD}$:

$\overleftrightarrow{CD} \,/\!/\, \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow m_{\overline{CD}} = m_{\overline{AB}} = 1$

$y - 5 = 1(x + 2) \Rightarrow y - 5 = x + 2 \Rightarrow x - y + 7 = 0$ (s)

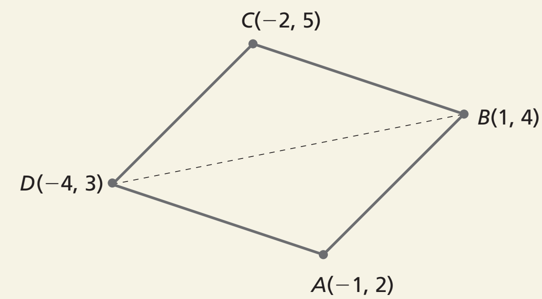
$$M = r \cap s \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ e } y = 4 \Rightarrow M(-3, 4)$$

M é ponto médio de $\overline{CD}$:

$$-3 = \frac{x_D + x_C}{2} \Rightarrow x_D = -4$$

$$4 = \frac{y_D + y_C}{2} \Rightarrow y_D = 3$$

$D(-4, 3)$



$$D_{ADB} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

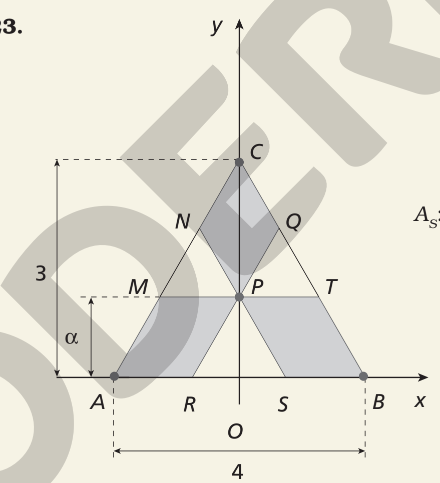
$$D_{DBC} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{\text{quadrilátero}} = A_{\triangle ADB} + A_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}|D_{ADB}| + \frac{1}{2}|D_{DBC}|$$

$$A_{\text{quadrilátero}} = \frac{1}{2} \cdot |-8| + \frac{1}{2}|-8| = 8$$

Portanto, a área é 8 unidades de área.

23.



A_S: área sombreada

a) $A_{\triangle ABC} = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$

- $\triangle ABC \sim \triangle RSP$; então:

$$\left(\frac{3}{\alpha}\right)^2 = \frac{6}{A_{\triangle RSP}} \Rightarrow A_{\triangle RSP} = \frac{2\alpha^2}{3}$$

$$\frac{d_{R,\, S}}{4} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow d_{R,\, S} = \frac{4\alpha}{3}$$

$$d_{A,\, R} = d_{A,\, O} - d_{R,\, O} = 2 - \frac{d_{R,\, S}}{2} = 2 - \frac{4\alpha}{6} = 2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)$$

- $\triangle MNP \sim \triangle ACB$; então: $\left(\dfrac{d_{M,\, P}}{d_{A,\, B}}\right)^2 = \dfrac{A_{MNP}}{6}$

Como $\overleftrightarrow{AC} \,/\!/\, \overleftrightarrow{RQ}$, então $d_{A,\, R} = d_{M,\, P}$; logo:

$$\left(\frac{d_{A,\, R}}{d_{A,\, B}}\right)^2 = \frac{A_{MNP}}{6}$$

$$\left(\frac{2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)}{4}\right)^2 = \frac{A_{MNP}}{6}$$

$$A_{MNP} = \frac{(3 - \alpha)^2}{6}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Observe que $\triangle MNP \cong \triangle PQT$; então:

$A = A_{ABC} - 2 \cdot A_{MNP} - A_{RSP}$

$A = 6 - 2 \cdot \dfrac{(3-\alpha)^2}{6} - \dfrac{2\alpha^2}{3}$

$A = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$

b) $A = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$ é uma função quadrática, e seu máximo é dado por: $\alpha = \dfrac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

24. O centro B da circunferência é tal que:
- como $-2a = -2$, $a = 1$;
- como $-2b = -4$, $b = 2$.

Assim, $B(1, 2)$ é o centro da circunferência.

A equação da reta r que passa por A e por B é $y = 2x$ e $m_r = 2$.

Como s é perpendicular a r, temos m_s igual a $-\dfrac{1}{2}$.

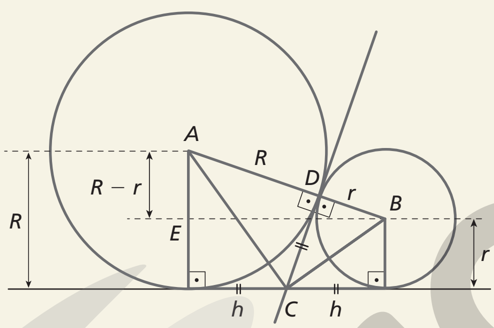
A reta s passa pelo ponto $(0, 3)$; então:

s: $y - 3 = -\dfrac{1}{2} \cdot (x - 0)$

s: $y - 3 = -\dfrac{1}{2}x$

s: $x + 2y = 6$

25. Pela figura fornecida, temos a seguinte situação:



Seja h a medida do segmento $\overline{DC}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABE$, temos:

$(R + r)^2 = (R - r)^2 + (2h)^2 \Rightarrow 2Rr = -2Rr + 4h^2 \Rightarrow$

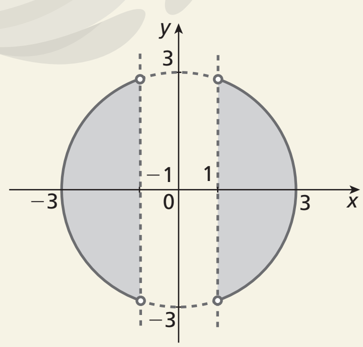
$\Rightarrow h^2 = Rr \Rightarrow h = \sqrt{Rr}$

Assim, a área do $\triangle ABC$ é: $A = \dfrac{(R + r) \cdot \sqrt{R \cdot r}}{2}$

26. Como $|x| > 1$, temos $x > 1$ ou $x < -1$.

$x^2 + y^2 \leqslant 32$ representa os pontos da circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio 3 e também do seu interior.

Portanto, a representação gráfica do sistema é:



27. Como $A \in r$ e r: $y = 3x$, então:

$A(a, 3a)$

Como $B \in s$ e s: $y = -\dfrac{x}{5}$, então:

$B(-5b, b)$

Como P é o ponto médio de $\overline{AB}$, temos:

$x_P = \dfrac{a - 5b}{2} \Rightarrow 3 = \dfrac{a - 5b}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a - 5b = 6$

$y_P = \dfrac{3a + b}{2} \Rightarrow 1 = \dfrac{3a + b}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a + b = 2$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a - 5b = 6 \\ 15a + 5b = 10 \end{cases}$, obtemos:

$a = 1$ e $b = -1$

Portanto, $A(1, 3)$ e $B(5, -1)$.

A equação da reta que passa por A, B e P é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y - 4 = 0$$

28. Seja a equação da reta $ax + by + c = 0$.

Como ela é paralela à reta $x + y - 4 = 0$, $a = 1$ e $b = 1$.

$3\sqrt{2} = \dfrac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow c = 3$

Logo: $x + y + 3 = 0$

alternativa a

29. O centro $O(1, 2)$ da circunferência λ de raio r coincide com o centro do quadrado $ABCD$, em que $A = (-3, -1)$.

raio de λ: $r = d_{\overline{A,O}} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-2)^2} = 5$

equação de λ: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$

O é ponto médio de $\overline{AC}$; logo:

$x_O = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 5$ e $y_O = \dfrac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 5$

então, $C = (5, 5)$.

As diagonais de um quadrado são perpendiculares, isto é, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$; assim: $m_{\overline{BD}} = -\dfrac{1}{m_{\overline{AC}}} = -\dfrac{4}{3}$

$O \in \overline{BD}$ e $m_{\overline{BD}} = -\dfrac{4}{3}$; logo: $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{10}{3}$

$\overline{BD} \cap \lambda = \{B, D\}$; então, resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{10}{3} & \text{(I)} \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo I em II, obtemos:

$(x - 1)^2 + \left(-\dfrac{4}{3}x + \dfrac{10}{3} - 2\right)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

Resolvendo: $x = 4 \Rightarrow y = -2$; então, $D = (4, -2)$; ou $x = -2 \Rightarrow y = 6$; então, $B = (-2, 6)$.

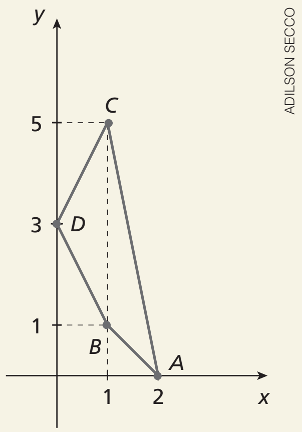
Portanto, $A = (-3, -1)$, $B = (-2, 6)$, $C = (5, 5)$ e $D = (4, -2)$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Autoavaliação

1.



O polígono é um quadrilátero.

alternativa c

2. $d_{A,\,B} = \sqrt{(6-1)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

alternativa a

3. $y = \frac{1}{2}x + 11 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$ e $n_1 = 11$

$y = -2x - 6 \Rightarrow m_2 = -2$ e $n_2 = -6$

$m_1 \neq m_2$ e $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Logo, as retas são concorrentes perpendiculares.

alternativa a

4. $m_r = \frac{3-1}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$r /\!/ s \Rightarrow m_s = \frac{1}{2}$

s passa por $P(-2, -1)$.

$y + 1 = \frac{1}{2}(x+2)$

$2y + 2 = x + 2$

$-x + 2y = 0$

alternativa b

5. $d_{A,\,r} = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

alternativa c

6. Vamos comparar a equação dada com a equação geral da circunferência:

$x^2 + y^2 - 6x = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$$\left.\begin{matrix} -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \\ -2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(3, 0)$$

$a^2 + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 3^2 - 0^2 \Rightarrow r = 3$

alternativa a

7. Na equação geral da circunferência, os coeficientes de x^2 e de y^2 devem ser iguais. Assim, $m = 4$.

alternativa b

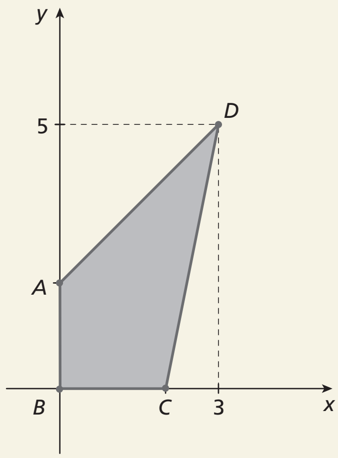
8. Na figura está representada a intersecção de todos os pontos do semiplano situado abaixo da reta $x - y = -1$, incluindo a própria reta, com todos os pontos do interior da circunferência $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, incluindo a circunferência.

Logo, o sistema que corresponde à representação gráfica é:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

alternativa a

9.



$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{CDA}$

$A_{ABC} = \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 2$

$A_{CDA} = \dfrac{1}{2} \cdot |D|$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$

$A_{CDA} = \dfrac{1}{2} \cdot 12 = 6$

Portanto:
$A_{ABCD} = 2 + 6 = 8 = 2^3$
alternativa c

Compreensão de texto

1. Se o satélite dá uma volta em 12 horas, então em um dia (24 horas) ele dá duas voltas (duas órbitas).

2. $\Delta s = v \cdot \Delta t$, com $s = 20.200.000$ m
$v = 2{,}99792458 \cdot 10^8$
$20.200.000 = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \cdot t$
$t \simeq 0{,}067$ s

3. O raio da órbita do satélite é $r = (6.370 + 20.200)$ km.
$C = 2\pi r \Rightarrow C \simeq 166.860$ km

4.

5. Imaginando bexigas esféricas, temos, respectivamente: nenhum ponto; um único ponto; infinitos pontos.
Comentário: Se achar conveniente, peça aos alunos que identifiquem a figura formada pela intersecção das duas superfícies esféricas no caso de a distância entre os centros ser 7 cm. Espera-se que eles concluam ser uma circunferência.

6. Uma circunferência.

7. Respostas pessoais.

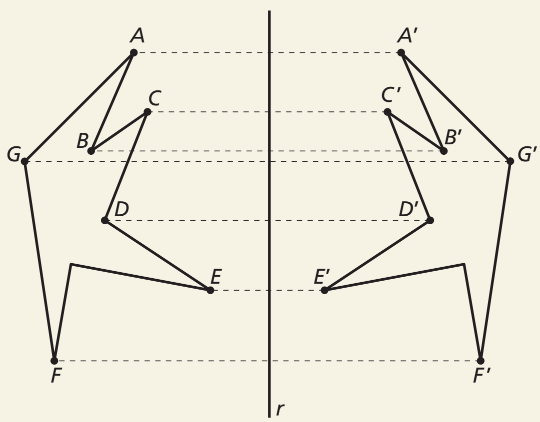
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

Capítulo 4 — Transformações geométricas

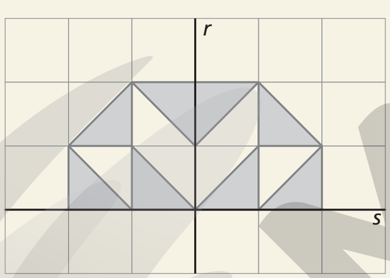
Exercícios propostos

1. Primeiramente, nomeamos os vértices da figura como *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, e *G* e os vértices da figura simétrica como *A*', *B*', *C*', *D*', *E*', *F*' e *G*'. Como a reta *r* é o eixo de simetria, é também a mediatriz de um segmento que tem como extremidades um ponto qualquer da figura *ABCDEFG* e seu simétrico da figura transformada *A'B'C'D'E'F'G'*. Assim, podemos construir a figura simétrica com a determinação dos vértices *A*', *B*', *C*', *D*', *E*', *F*' e *G*'.

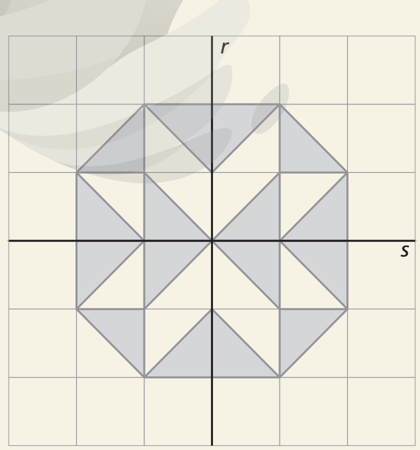


alternativa c

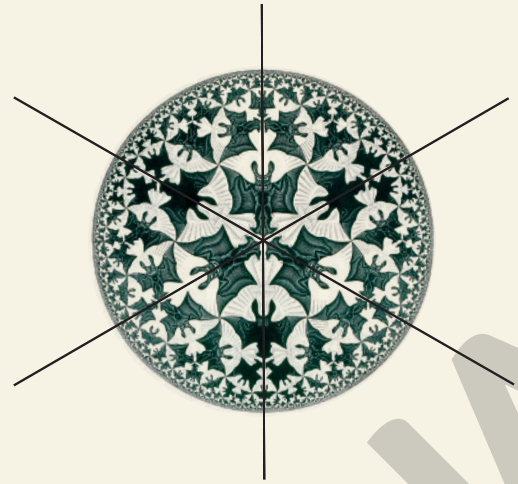
2. Primeiro, o *designer* fez a reflexão em relação ao eixo *r* obtendo a figura a seguir.



Depois, fez a reflexão em relação ao eixo *s* e obteve o logotipo conforme a figura a seguir.



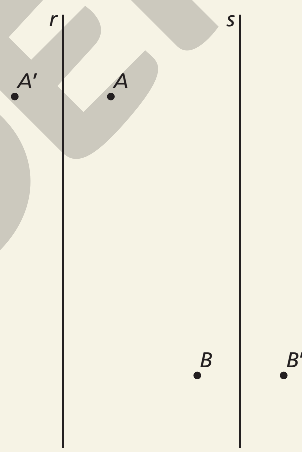
3. Há 3 eixos de simetria possíveis na obra de Escher, conforme a reprodução a seguir.



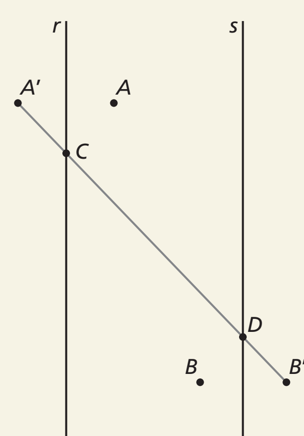
© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

4. Os passos para determinar a trajetória do feixe são os seguintes:

Com compasso, construímos *A*', o simétrico do ponto *A* em relação à reta *r*, e *B*', simétrico do ponto *B* em relação à reta *s*.



Depois, traçamos o segmento $\overline{A'B'}$. Sejam *C* e *D* os pontos de intersecção de $\overline{A'B'}$ com *r* e *s*, respectivamente.

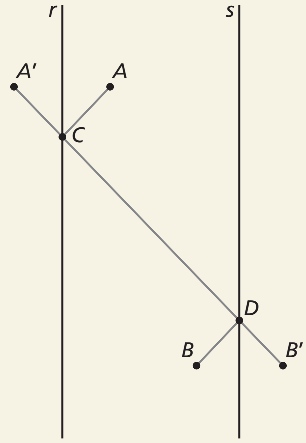


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

Por fim, traçamos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$.

Portanto, a trajetória percorrida pelo feixe de A até B é formada pelos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$.



A resolução pode ser justificada pelo seguinte fato:

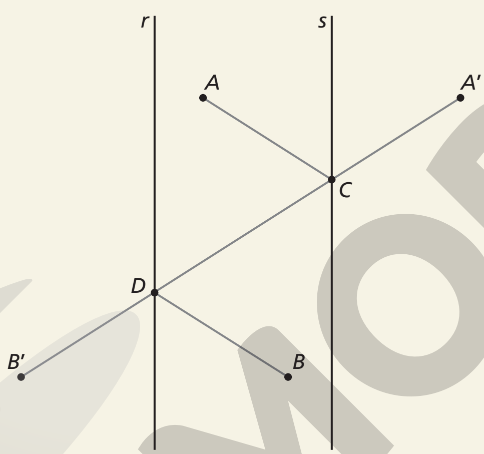
$AC + CD + DB = A'C + CD + DB' = A'B'$

O problema pode também ser pensado da seguinte maneira:

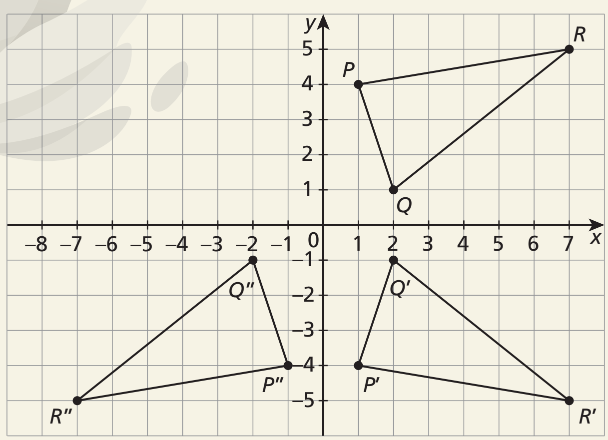
Faz-se a reflexão do ponto A em relação à reta s, obtendo-se o ponto A', e a reflexão do ponto B em relação à reta r, obtendo-se o ponto B'.

Depois, traça-se o segmento $\overline{A'B'}$ determinando os pontos C em s e D em r.

A trajetória do feixe pode também ser formada pelos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$.



5. Os pontos P'', Q'' e R'' encontram-se no terceiro quadrante do plano cartesiano, pois as abscissas e as ordenadas desses pontos são negativas. Com a reflexão do triângulo $P''Q''R''$ em relação ao eixo das ordenadas, obtemos o triângulo de vértices $P'(1, -4)$, $Q'(2, -1)$ e $R'(7, -5)$. Agora, refletindo o triângulo $P'Q'R'$ em relação ao eixo das abscissas, obtemos o triângulo de vértices $P(1, 4)$, $Q(2, 1)$ e $R(7, 5)$.

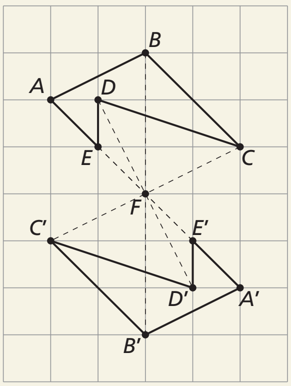


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Portanto, os pontos *P*, *Q* e *R* têm coordenadas (1, 4), (2, 1) e (7, 5), respectivamente.

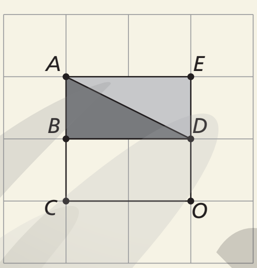
Comentário: Leve os alunos a reparar que em uma reflexão composta do 1º para o 3º quadrante ou do 3º para o 1º as coordenadas são opostas. Ou seja, no 1º quadrante são positivas e no 3º quadrante são negativas, e que as coordenadas dos vértices correspondentes têm módulos iguais.

6. A alternativa em que a figura *A'B'C'D'E'* é simétrica à figura *ABCDE* em relação ao ponto *F* é a alternativa **a**, pois apenas nesse caso o ponto *F* é o ponto médio dos segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$.

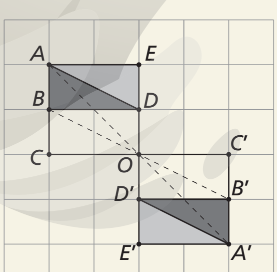


alternativa a

7. Primeiro, com exceção do vértice *O*, nomeamos os vértices da figura original como *A*, *B*, *C*, *D* e *E*. Assim, *A'B'C'OD'E'* será a figura simétrica à *ABCODE* em relação ao ponto *O*, e, para determinar essa figura, os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$ devem ter como ponto médio o ponto *O*.

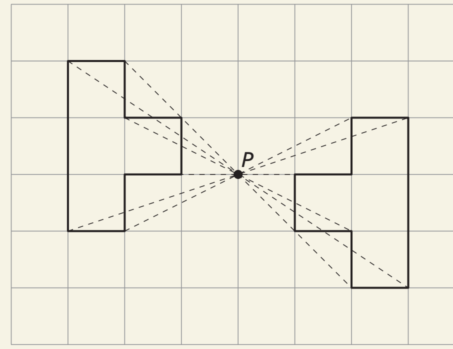


Agora, traçamos os segmentos para determinar os vértices da nova figura, de modo que $AO = A'O$, $BO = B'O$, $CO = C'O$, $DO = D'O$ e $EO = E'O$.

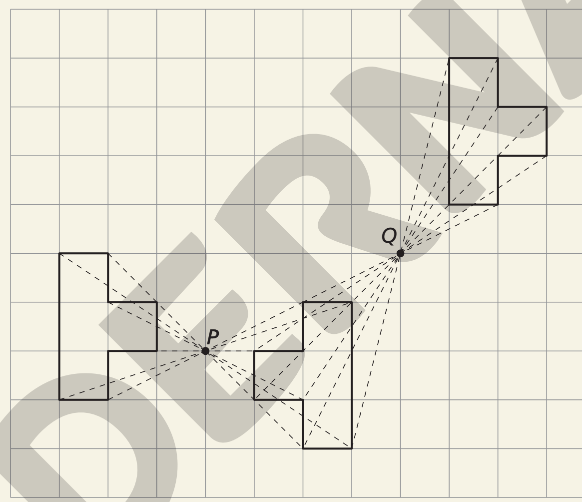


alternativa e

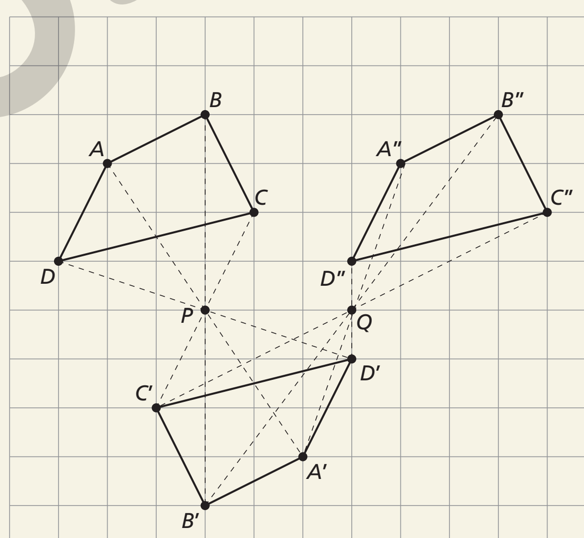
8. Para determinar a figura simétrica em relação ao ponto *P*, construímos segmentos de retas com extremidades em cada um dos vértices da figura original, todos passando pelo ponto *P*, de modo que *P* seja o ponto médio desses segmentos. As outras extremidades dos segmentos serão os vértices da figura simétrica.



Agora, construímos segmentos de retas que tenham como extremidades os vértices da figura obtida e que passem por *Q*, de modo que o ponto *Q* seja ponto médio. As outras extremidades desses segmentos construídos formarão a nova figura, conforme a representação a seguir.



9. Resposta possível:



Comentário: Verifique se os alunos perceberam que as distâncias dos vértices do polígono *ABCD* aos vértices correspondentes do polígono *A"B"C"D"* são iguais e que o polígono *A"B"C"D"* tem a mesma orientação do polígono *ABCD* em relação ao plano.

Os alunos poderão verificar na discussão sobre a atividade que, qualquer que tenha sido o polígono *ABCD* ou os pontos *P* e *Q* escolhidos, a conclusão será a mesma.

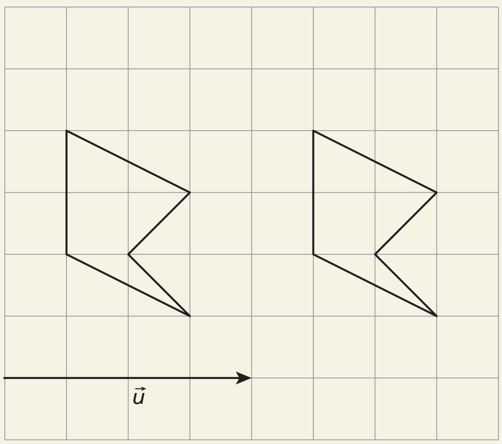
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

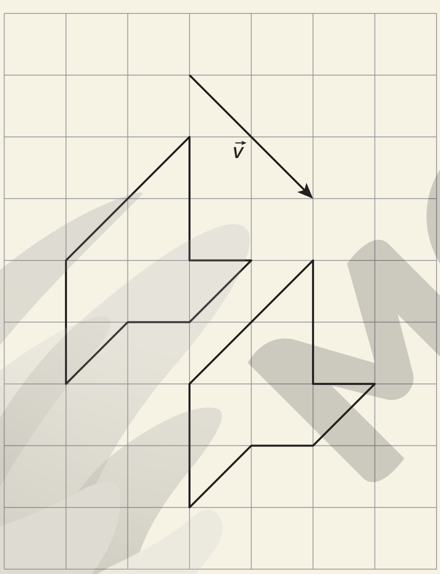
Se possível, faça com os alunos uma verificação da atividade em um *software* de Geometria dinâmica. Basta fazer as reflexões e depois movimentar os pontos P e Q no plano, para chegar à conclusão já observada na atividade.

Eles deverão perceber mais adiante que o polígono $A''B''C''D''$ é uma translação do polígono $ABCD$.

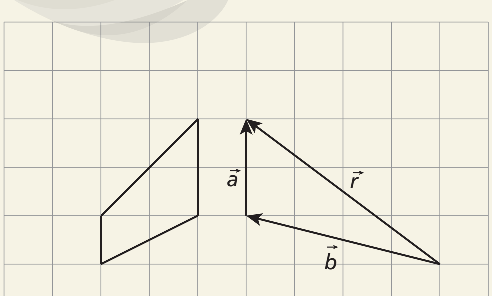
10. **a)** O vetor $\vec{u}$, que tem como módulo 4 unidades, determina a translação. Cada vértice da nova figura dista 4 unidades da malha do seu correspondente na figura original.



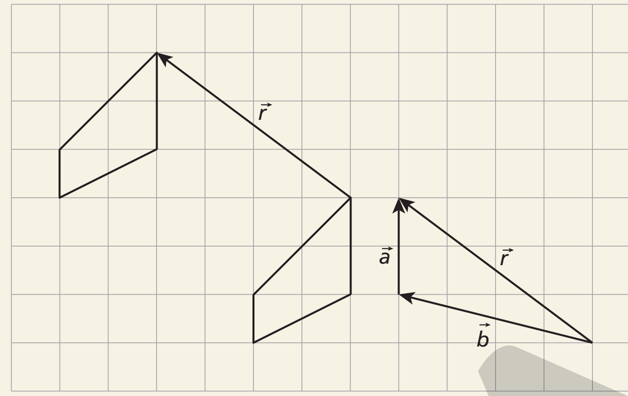
b) O vetor $\vec{v}$, que tem como módulo $2\sqrt{2}$, define a translação.



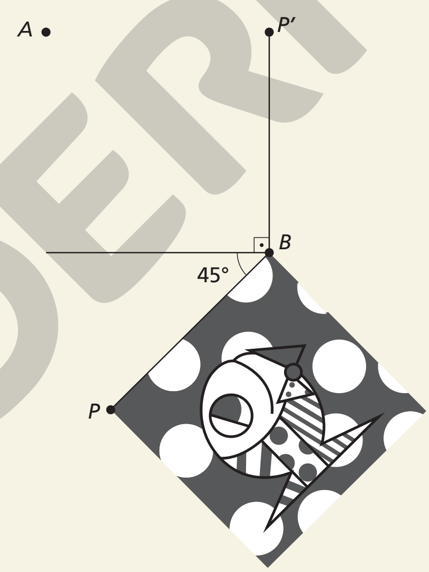
11. Primeiro, obtemos o vetor $\vec{r}$ com a soma $\vec{a} + \vec{b}$.



E, em seguida, transladamos a figura, conforme o vetor resultante.

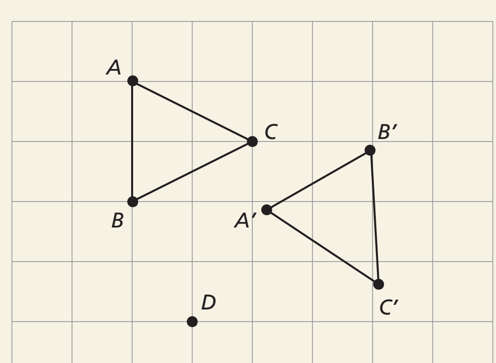


12. Verifique na figura que, para recolocar a tela em sua posição original, devemos rotacionar no sentido horário o ponto P para P' em 135° = 45° + 90°, tendo como centro de rotação o ponto B.



alternativa b

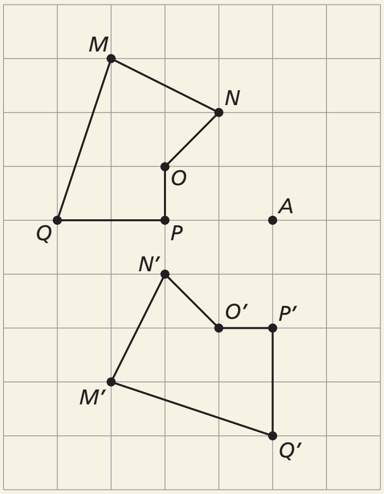
13. **a)** Para obter o triângulo $A'B'C'$, fazemos uma rotação no sentido horário de 60° nos vértices A, B e C, em torno do centro de rotação D, resultando nos vértices A', B' e C', respectivamente. Depois, traçamos os lados $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{A'C'}$.



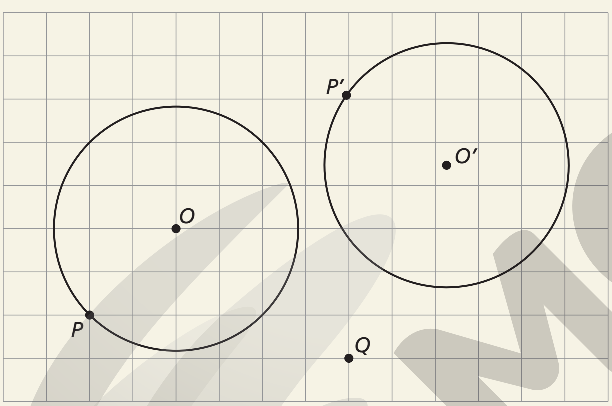
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

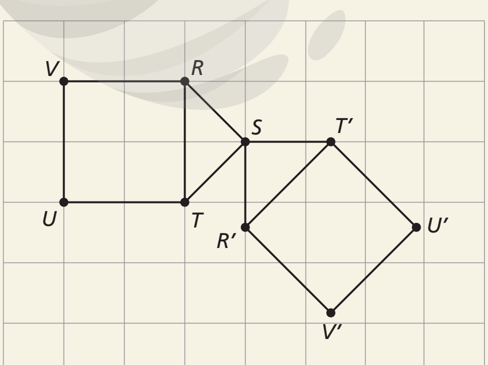
b) Para obter a figura $M'N'O'P'Q'$, fazemos uma rotação no sentido anti-horário de 90° nos vértices M, N, O, P e Q, em torno do centro de rotação A, resultando nos vértices M', N', O', P' e Q', respectivamente. Depois, traçamos os lados $\overline{M'N'}$, $\overline{N'O'}$, $\overline{O'P'}$, $\overline{P'Q'}$ e $\overline{Q'M'}$.



c) Para obter a circunferência de centro O' e ponto P', fazemos uma rotação no sentido horário de 80° nos pontos O e P, em torno do centro de rotação Q, resultando no centro O' e no ponto da circunferência P', respectivamente. Depois, traçamos a circunferência de centro O' e raio $\overline{O'P'}$.

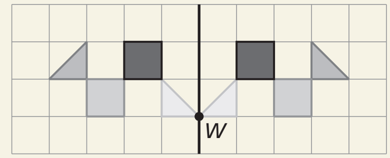


d) Para obter a figura $R'ST'U'V'$, fazemos uma rotação no sentido anti-horário de 135° nos vértices R, T, U e V, em torno do centro de rotação S, resultando nos vértices R', T', U' e V', respectivamente. Depois, traçamos os segmentos $\overline{R'S}$, $\overline{ST'}$, $\overline{T'U'}$, $\overline{U'V'}$ e $\overline{V'R'}$.

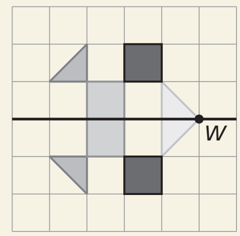


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

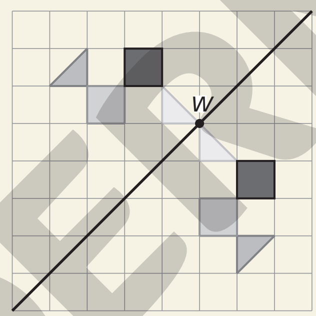
14. Na alternativa **a** está representada uma simetria em relação a uma reta na direção vertical que passa pelo ponto W.



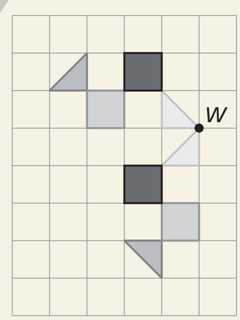
Na alternativa **b** está representada uma simetria em relação a uma reta na direção horizontal que passa pelo ponto W.



Na alternativa **c** está representada uma simetria em relação à reta indicada que passa pelo ponto W.



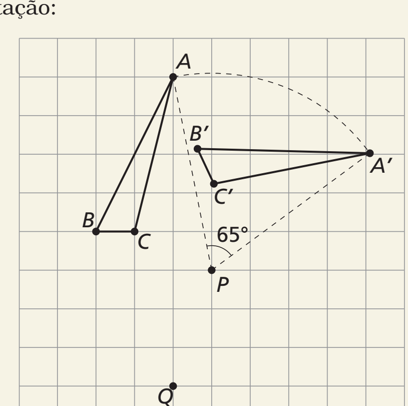
Na alternativa **d** está representada uma rotação da figura original em 90° no sentido anti-horário, em torno do centro de rotação W.



alternativa d

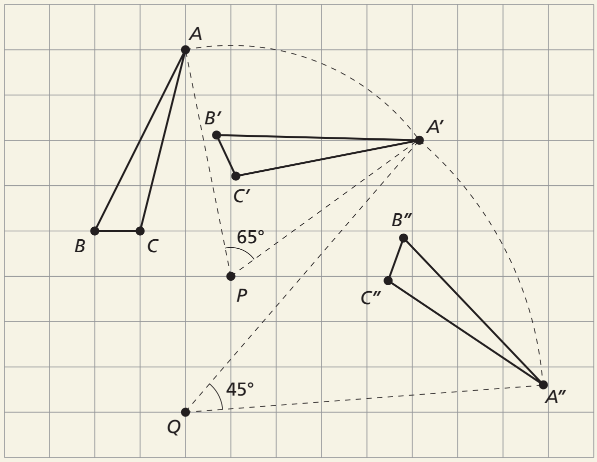
15.

1ª rotação:



MODERNA

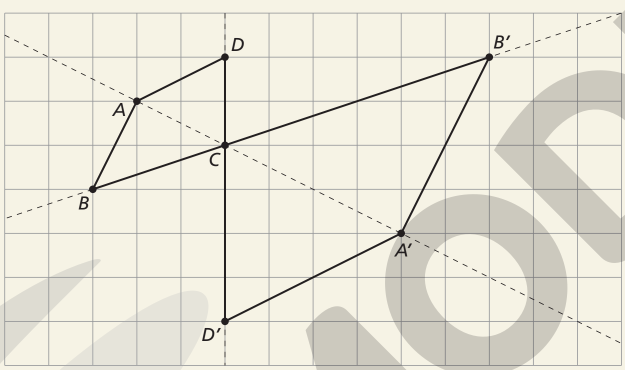
2ª rotação:



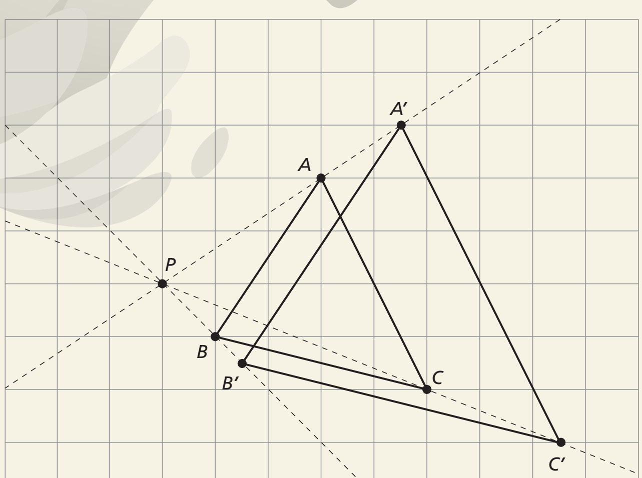
Comentário: Foram indicados apenas os ângulos $A\widehat{P}A'$ e $A'\widehat{Q}A''$ para melhor compreensão das rotações feitas. Porém, conforme a definição de rotação, $\text{med}(A\widehat{P}A') = \text{med}(B\widehat{P}B') = \text{med}(C\widehat{P}C')$ e $\text{med}(A'\widehat{Q}A'') = \text{med}(B'\widehat{Q}B'') = \text{med}(C'\widehat{Q}C'')$.

A figura *A"B"C"* é uma rotação da figura *ABC*.

16. **a)** Para construirmos a figura $A'B'CD'$, homotética à figura *ABCD*, com centro da homotetia *C* e razão -2, temos uma figura invertida em relação à original e fazemos $CA = 2CA'$, $CB = 2CB'$ e $CD = 2CD'$ com *C* pertencendo aos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{DD'}$.



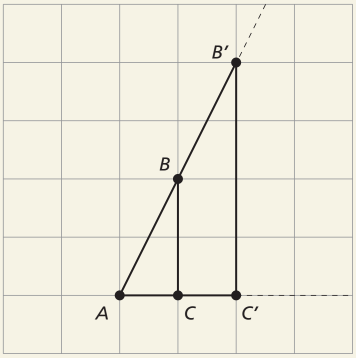
b) Para construirmos a figura $A'B'C'$, homotética à figura *ABC*, com centro da homotetia *P* e razão $\frac{3}{2}$, fazemos $PA' = \frac{3}{2}\,PA$, $PB' = \frac{3}{2}\,PB$ e $PC' = \frac{3}{2}\,PC$. Como a razão de homotetia é maior do que 0, *A'* pertence à semirreta $\overrightarrow{PA}$, *B'* pertence à semirreta $\overrightarrow{PB}$ e *C'* pertence à semirreta $\overrightarrow{PC}$.



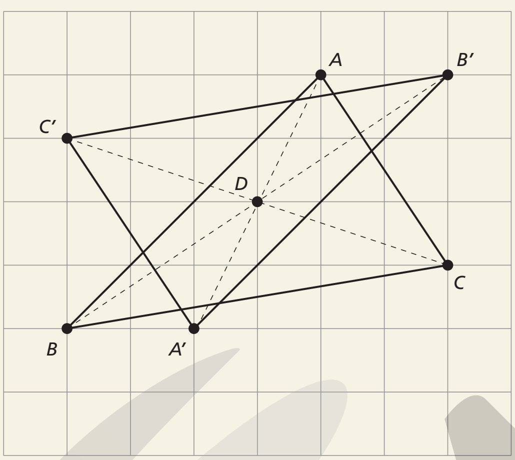
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

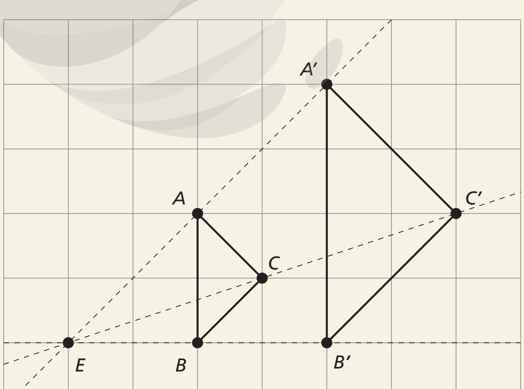
c) Para construirmos a figura $AB'C'$, homotética à figura ABC, com centro da homotetia A e razão 2, fazemos $AB' = 2AB$ e $AC' = 2AC$. Como a razão de homotetia é maior do que 0, B' pertence à semirreta $\overrightarrow{AB}$ e C' pertence à semirreta $\overrightarrow{AC}$.



d) Para construirmos a figura $A'B'C'$, homotética à figura ABC, com centro de homotetia D e razão -1, fazemos $DA' = DA, DB' = \overline{DB}$ e $DC' = DC$. Como a razão de homotetia é menor do que 0, temos uma figura invertida em relação à original e D pertence aos segmentos $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$ e $\overline{CC''}$.

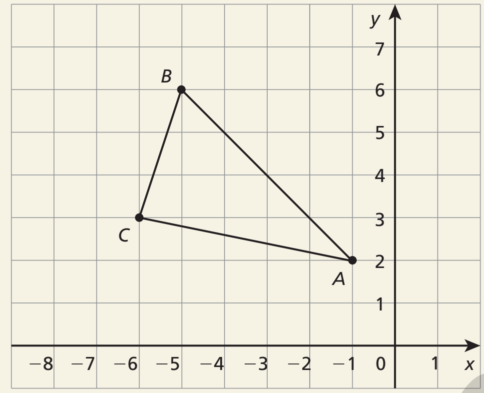


17. Para determinar o centro da homotetia, traçamos as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$. A intersecção dessas retas será o centro de homotetia que chamamos de E. Como a distância de um ponto P qualquer da figura original ao ponto E é igual à metade da distância do ponto P', homotético de P, ao ponto E e A' pertence à semirreta $\overrightarrow{EA}$, B' pertence à semirreta $\overrightarrow{EB}$ e C' pertence à semirreta $\overrightarrow{EC}$, a razão é igual a 2.

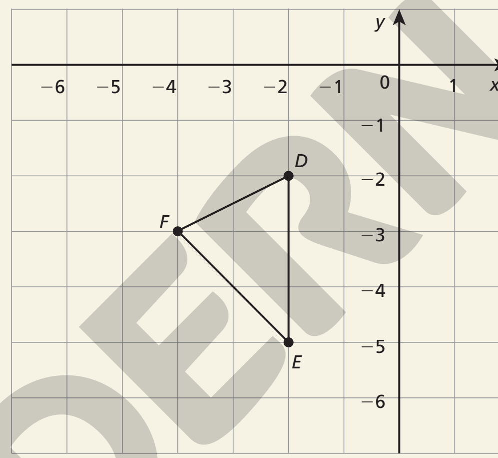


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

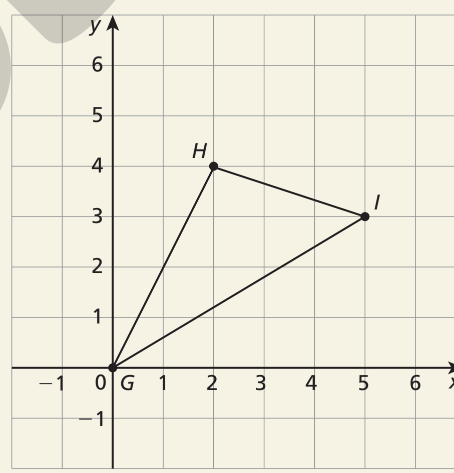
18. Triângulo da matriz A:



Triângulo da matriz B:



Triângulo da matriz C:



19. A matriz que representa o deslocamento do triângulo é $B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Precisamos determinar uma matriz $X = (x_{ij})_{2\times 3}$, tal que $X + B = A$.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

daí temos: $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

MODERNA

20. Matriz A:

Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz B:

Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz C:

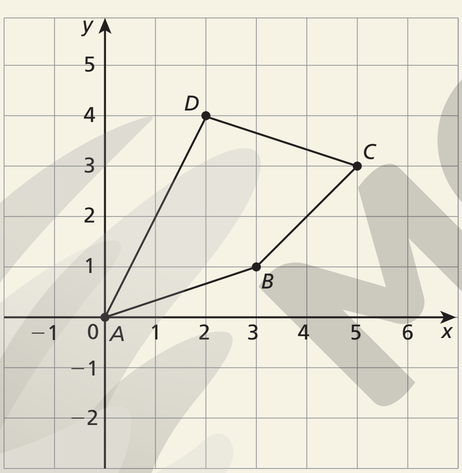
Reflexão em relação ao eixo y:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação ao eixo x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

21. **a)**



b) Determinamos a matriz que representa a rotação em 90° no sentido anti-horário do quadrilátero $ABCD$ em torno da origem com o produto a seguir.

$$\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

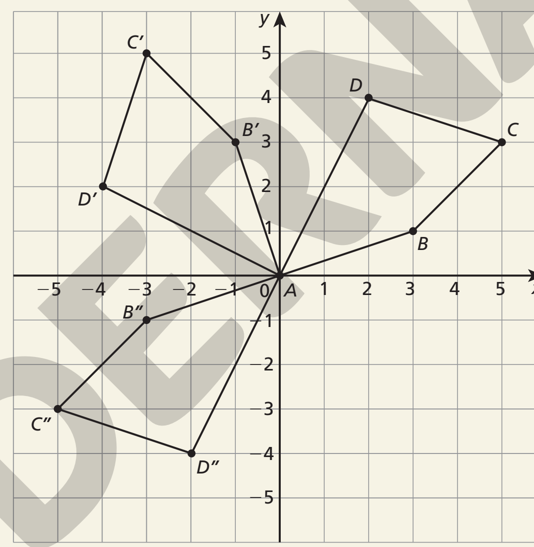
c) Determinamos a matriz que representa a rotação em 180° no sentido anti-horário do quadrilátero $ABCD$ em torno da origem com o produto a seguir.

$$\begin{pmatrix} \cos 180° & -\text{sen } 180° \\ \text{sen } 180° & \cos 180° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

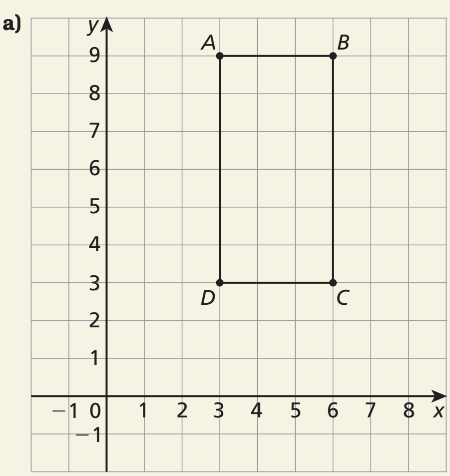
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

d) Com os vértices $A(0,0)$, $B'(-1,3)$, $C'(-3,5)$ e $D'(-4,2)$ e $A(0,0)$, $B''(-3,-1)$, $C''(-5,-3)$ e $D''(-2,-4)$ determinados, construímos os quadriláteros.



22 **a)**



b) Para determinar a matriz que representa os vértices do retângulo, compomos a primeira linha com as abscissas dos pontos e a segunda linha com as ordenadas dos pontos. Cada coluna da matriz representa um par ordenado. Assim, com os pontos $A(3, 9)$, $B(6, 9)$, $C(6, 3)$ e $D(3, 3)$, obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

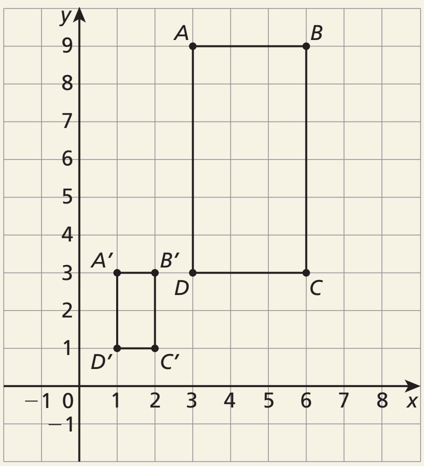
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

c) Para determinar a matriz, fazemos o seguinte produto:

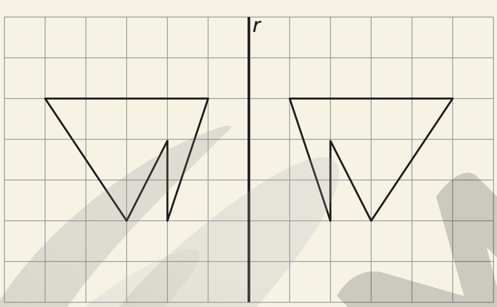
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Para construir o novo retângulo que representa a transformação por escala na razão $\frac{1}{3}$ nas direções horizontal e vertical, obtemos as coordenadas da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, $A'(1,3)$, $B'(2,3)$, $C'(2,1)$ e $D'(1,1)$.

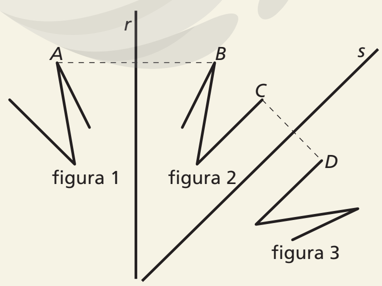


Exercícios complementares

1.



2. Para traçar o eixo de simetria entre as figuras 1 e 2, construímos um segmento qualquer em que uma das extremidades seja um ponto da figura 1 e a outra extremidade seja o simétrico desse ponto na figura 2. Por exemplo, traçamos o segmento $\overline{AB}$ (ver no desenho a seguir). Depois, traçamos a mediatriz *r* desse segmento. Para determinar o eixo de simetria entre as figuras 2 e 3, fazemos o mesmo procedimento. Por exemplo, vamos determinar a mediatriz *s* do segmento com extremidades em *C* da figura 2 e o ponto *D* da figura 3.

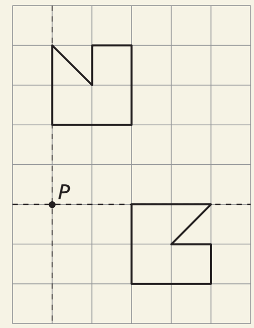


Assim, *r* é o eixo de simetria entre as figuras 1 e 2 e *s* é o eixo de simetria entre as figuras 2 e 3.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

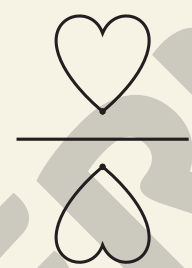
Comentário: Peça aos alunos que releiam a definição de reflexão por uma reta. Assim, poderão escrever com maior facilidade uma estratégia para determinar geometricamente os eixos de simetria da atividade.

3.



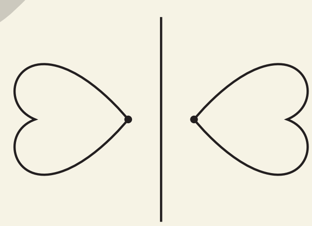
4. Para determinar a alternativa correta, seguimos as transformações indicadas no enunciado.

1ª) Reflexão no eixo *x*:



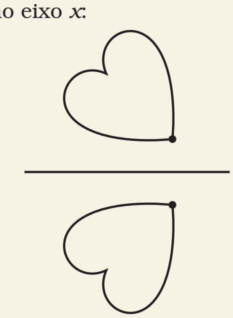
2ª) Rotação de 90° no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto *A*:

3ª) Reflexão no eixo *y*:



4ª) Rotação de 45° no sentido horário, com centro de rotação no ponto *A*:

5ª) Reflexão no eixo *x*:

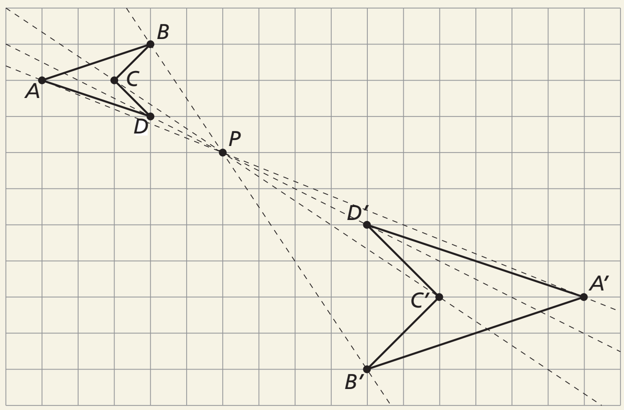


alternativa c

MODERNA

5. Para determinar o centro da homotetia, que chamamos de P, traçamos as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ e $\overleftrightarrow{DD'}$. O ponto de intersecção entre as retas será o centro da homotetia P.

Podemos verificar pela figura que cada lado da figura $A'B'C'D'$ mede o dobro do lado correspondente na figura $ABCD$ e que a figura $A'B'C'D'$ é uma homotetia inversa à figura $ABCD$. Assim, o centro da homotetia é o ponto P e razão é -2, conforme a figura.



6. O sentido do vetor pode ser obtido verificando-se o segmento do ponto A para o ponto A', do ponto B para o ponto B' ou do ponto C para o ponto C'.

alternativa d

7. Para uma rotação de 180° em torno da origem de um plano cartesiano no sentido anti-horário, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} \cos 180° & -\text{sen}\,180° \\ \text{sen}\,180° & \cos 180° \end{pmatrix}$ pela matriz que representa os vértices da figura a ser transformada.

alternativa d

8. É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário, conforme a figura a seguir.

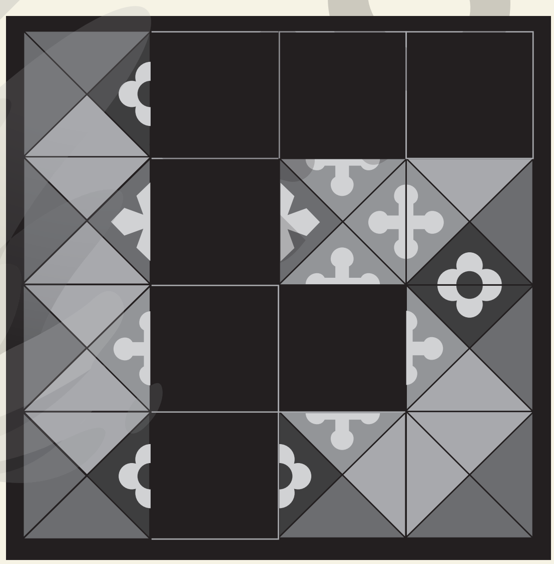
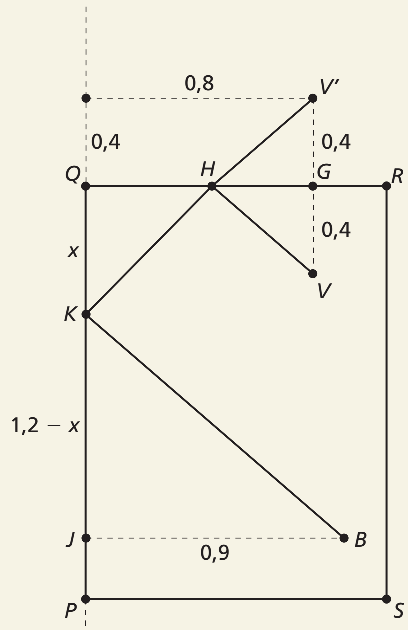


Figura A

alternativa c

9. Considere a figura a seguir. O ponto V' é simétrico de V em relação à $\overleftrightarrow{QR}$ e L é um ponto pertencente à $\overleftrightarrow{QP}$, tal que $\overline{LV'}$ seja paralelo à $\overleftrightarrow{QR}$. Assim, $LV' = 0{,}8$ e $LQ = 0{,}4$. Temos também que $\text{med}(K\hat{L}V') = \text{med}(K\hat{J}B)$, e do enunciado temos $\text{med}(L\hat{K}V') = \text{med}(J\hat{K}B)$. Portanto, $\triangle LV'K \sim \triangle JBK$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA



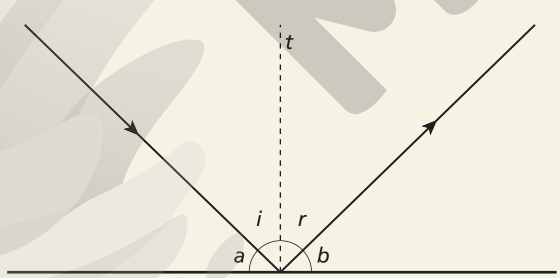
Da semelhança entre os triângulos, temos:

$$\frac{LV'}{JB} = \frac{LK}{JK} \Rightarrow \frac{0{,}8}{0{,}9} = \frac{0{,}4 + x}{1{,}2 - x} \Rightarrow 0{,}8 \cdot (1{,}2 - x) = 0{,}9 \cdot (0{,}4 + x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}96 - 0{,}8x = 0{,}36 + 0{,}9x \Rightarrow 1{,}7x = 0{,}6 \Rightarrow x = \frac{0{,}6}{1{,}7} = \frac{6}{17}$$

Portanto, deve-se jogar a bola a $\frac{6}{17}$ m do vértice Q.

Comentário: Peça aos alunos que façam a divisão $\frac{6}{17}$, pois assim terão uma ideia se a medida obtida é adequada às dimensões aproximadas de uma mesa de sinuca. O valor obtido é aproximadamente 0,35 m, ou seja, 35 cm, que está dentro do esperado.
Esse exercício pode ser resolvido de outras maneiras. A observação no enunciado de que "os ângulos de incidência e de reflexão são iguais" serve como dica para que o aluno perceba triângulos semelhantes e resolva usando essa estratégia. Caso alguém tenha resolvido dessa maneira, peça que tente resolver com a reflexão, pois, além de trabalhar o conteúdo, esse modo é um caminho elegante que resulta em uma única equação com apenas uma incógnita.
Caso haja dúvidas sobre ângulo de incidência e de reflexão, faça o seguinte desenho no quadro:



A reta t é chamada de normal, i é o ângulo de incidência em relação à reta normal e r é o ângulo de reflexão.
Pelas leis da reflexão, temos:

I) O raio de luz refletido e o raio de luz incidente, assim como a reta normal à superfície, pertencem ao mesmo plano, ou seja, são coplanares.

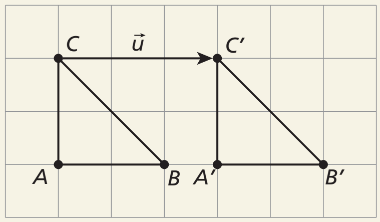
I) A medida do ângulo de reflexão (r) é sempre igual à medida do ângulo de incidência (i).
Observe que os ângulos a e b também são congruentes, pois $a + i = r + b$, e, como i e r têm a mesma medida, $a = b$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

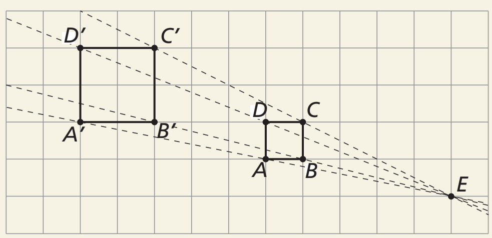
Autoavaliação

1. A figura do primeiro item representa uma translação, pois existe um vetor $\vec{u}$ que determina a translação da figura ABC para a figura $A'B'C'$.



alternativa a

2. A segunda figura representa uma homotetia, pois, ao traçarmos as retas $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$, obtemos o centro da homotetia E.



alternativa b

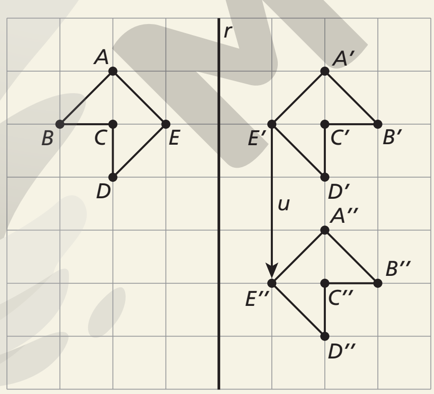
3. O eixo de simetria entre os triângulos ABC e $A'B'C'$ é a reta q e o eixo de simetria entre os triângulos $A'B'C'$ e $A''B''C''$ é a reta s.

alternativa b

4. Uma transformação homotética de um polígono preserva a razão entre os segmentos correspondentes, as medidas dos ângulos correspondentes e o paralelismo entre os segmentos correspondentes. Uma transformação isométrica preserva a distância entre os pontos.

alternativa c

5. O polígono $A'B'C'D'E'$ é simétrico do polígono $ABCDE$ em relação à reta r e o polígono $A''B''C''D''E''$ é uma translação do polígono $A'B'C'D'E'$ pelo vetor $\vec{u}$.



alternativa d

6. Seja k a razão da homotetia. Se $k < 0$, a homotetia será inversa. Se $k < -1$, a homotetia será uma ampliação da figura original.

alternativa a

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

7. Os vértices do triângulo ABC são $A(-1, 4)$, $B(-3, 1)$ e $C(-4, 3)$. Assim, a matriz que representa os vértices do triângulo é a matriz $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

alternativa d

8. A matriz que devemos adicionar à matriz que representa um ponto no plano cartesiano para que ele seja transladado 5 unidades na direção vertical e no sentido de baixo para cima é a matriz representada pela alternativa **a**, pois, dado o ponto $A(a, b)$, podemos ver que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b + 5 \end{pmatrix}$, a abscissa do ponto A se mantém e à ordenada são adicionados 5 unidades, deslocando o ponto na direção vertical e no sentido de baixo para cima.

alternativa a

Compreensão de texto

1. Respostas possíveis: xilografia; litografia.

2. Resposta possível: Sim, a obra tem estruturas impossíveis. Uma dessas estruturas pode ser observada com duas pessoas que sobem e descem uma escada simultaneamente e no mesmo sentido. Ou seja, para essas pessoas, há dois planos diferentes que representam o chão no mesmo espaço.

3. Resposta possível: A obra tem um formato losangular formado por linhas de peixes da parte inferior até a linha central, em que se intercalam as aves. Da linha central para cima, outras linhas são formadas, agora apenas com aves. Os espaços vazios nas linhas inferiores vão se transformando, como em um movimento, até tomarem formas de aves nas linhas superiores; por sua vez, os espaços vazios nas linhas superiores vão se transformando, como em um movimento, até tomarem formas de peixes nas linhas inferiores.

4. Resposta possível: Podemos observar que as formigas nunca se cruzarão em sua caminhada e que elas passam pelos dois lados da faixa quando estão caminhando.

5. A comunidade científica acolheu a obra de Escher como a construção de um conceito matemático, e a crítica de arte tendeu a relevá-la como mero formalismo e exercícios geométricos.

6. Resposta possível: Ela quer dizer que Escher combinou a racionalidade matemática com a linguagem estética, por vezes aplicada nas artes. Isso significa que ele conseguiu representar temas matemáticos nas artes plásticas.

MODERNA

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Economia no mundo

A seção potencializa o desenvolvimento das competências gerais **1**, **6** e **7** e favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** de Matemática e suas Tecnologias da BNCC, favorecendo também o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT104**.

A discussão e a reflexão sobre a evolução da sociedade e dos mecanismos econômicos possibilitam ainda um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, contribuindo para o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** e das habilidades **EM13CHS102** e **EM13CHS301**.

As atividades propostas também contribuem para os temas contemporâneos **educação financeira**, ao propiciar a compreensão da economia mundial, e **educação para o consumo**, ao propor a reflexão sobre o desenvolvimento sustentável, com a discussão a respeito dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Organização das Nações Unidas.

Para começar e pensar:

1. Incentive os alunos a refletir sobre como a evolução das tecnologias aplicadas aos meios de transporte e de comunicação permitiu o desenvolvimento de novas práticas econômicas, as quais possibilitam ao cidadão viajar e se conectar ao resto do mundo. Ao mesmo tempo, o avanço tecnológico proporcionou aos agentes econômicos a busca por novas opções de matérias-primas, produtos e mercados consumidores. São exemplos de mudanças provocadas pelo avanço tecnológico nos meios de comunicação: as redes sociais com mensagens instantâneas e vídeos em tempo real, os aplicativos de instituições financeiras, os aplicativos de lojas virtuais etc. No que tange aos meios de transporte, percebe-se que as viagens e os transportes de cargas, por exemplo, tornam-se cada vez mais eficientes e menos custosos.

2. A substituição do trabalho manual pelas máquinas aumentou a circulação econômica. O trabalho realizado por máquinas é mais ágil, propiciando maior produtividade em menor tempo. Com o aumento da produção, houve redução nos preços dos produtos, o que permitiu aos cidadãos de classes sociais menos favorecidas ter acesso a bens e produtos que antes eram privilégio das classes mais abastadas. O aumento da massa de consumidores, por sua vez, influenciou positivamente a economia, pois mais recursos financeiros começaram a circular.

Aproveite para discutir com os alunos o fato de que a industrialização mudou as relações de trabalho (os trabalhadores passaram a ser assalariados) e impôs uma nova divisão de tarefas na produção, mudanças que influenciam a sociedade até os dias atuais.

Para discutir:

3. Vantagens: redução ou isenção de tributos de uma lista específica de produtos; livre circulação de profissionais; facilitação da atividade turística, com redução da burocracia nas fronteiras ao viajar para países-membros do bloco econômico ou do acordo econômico.

Desvantagens: dependendo do acordo realizado, alguns setores internos podem ter prejuízos e até mesmo quebrar com a concorrência externa, livre de tributação; com a facilidade de viajar ao exterior, regiões menos desenvolvidas podem perder turistas.

4. À medida que os tributos de produtos e serviços são reduzidos, a economia ganha novo dinamismo, e empresas que atuavam no contexto nacional podem passar a atuar em âmbito internacional. Com a abertura dos mercados de países vizinhos, as empresas dos três setores econômicos aumentam sua produção, além de haver um aumento na oferta de empregos diretos e indiretos.

5. Se julgar oportuno, incentive os alunos a trazer alguns produtos para a sala de aula e monte um painel com os rótulos desses produtos, separando-os por país de origem. Caso os alunos tenham dificuldade, proponha que busquem produtos de outros parceiros comerciais do Brasil, como a China e os Estados Unidos.

6. O Produto Interno Bruto (PIB) representa a riqueza total de uma região ou país e é calculado pela soma de bens e serviços produzidos durante determinado período. O PIB *per capita* é o resultado da divisão do PIB pela população, indicando quanto caberia a cada habitante se a riqueza do país fosse dividida igualmente entre eles. Por exemplo, de acordo com o IBGE, o PIB do Brasil em 2018 foi de 6,8 trilhões e o PIB *per capita* foi de R$ 32.747,00.

MODERNA

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é calculado anualmente e tem por objetivo ampliar a dimensão econômica oferecida pelo PIB, aliando outros dois fatores fundamentais para o desenvolvimento humano: saúde e educação. Por esse motivo, o IDH oferece mais informações sobre a realidade socioeconômica de um país, já que, em países com grande desigualdade social, o PIB não representa a maior parcela da população.

O IDH de um país pode variar de 0 (zero) a 1 (um), tendo as seguintes categorias:

- de 0 a 0,499 – baixo desenvolvimento humano;
- de 0,500 a 0,699 – médio desenvolvimento humano;
- de 0,700 a 0,799 – alto desenvolvimento humano;
- de 0,800 a 1 – muito alto desenvolvimento humano.

7. Espera-se que os alunos percebam que nem sempre o desenvolvimento econômico promove o desenvolvimento social, uma vez que, para haver desenvolvimento social, é preciso que os rendimentos dos assalariados permitam-lhes realizar suas necessidades básicas e investir para melhorar sua condição social.

É importante frisar que fazer comparações entre países apenas com base em dados numéricos – como IDH, PIB e Índice de Retorno de Bem-Estar à Sociedade (Irbes) – não basta. É preciso considerar o contexto histórico no qual os países se desenvolveram, suas condições econômicas e sociais, entre outros fatores que influenciam os números apresentados pelos índices.

Para finalizar:

8. Se julgar oportuno, promova um debate sobre as potencialidades e as limitações desses objetivos, que são:

1. Erradicação da pobreza;
2. Fome zero e agricultura sustentável;
3. Saúde e bem-estar;
4. Educação de qualidade;
5. Igualdade de gênero;
6. Água potável e saneamento;
7. Energia acessível e limpa;
8. Trabalho decente e crescimento econômico;
9. Indústria, inovação e infraestrutura;
10. Redução das desigualdades;
11. Cidades e comunidades sustentáveis;
12. Consumo e produção responsáveis;
13. Ação contra a mudança global do clima;
14. Vida na água;
15. Vida terrestre;
16. Paz, justiça e instituições eficazes;
17. Parcerias e meios de implementação.

9. Para haver crescimento econômico, a produção que circulou pelos setores da economia precisa chegar ao mercado consumidor e ser absorvida pelos consumidores. Isso significa que, se houve crescimento econômico, ocorreu movimentação econômica, tendo sido gerados postos de trabalho, impostos arrecadados e retenção de parte do dinheiro (valor poupado). Já o conceito de sustentabilidade está ligado principalmente ao respeito aos limites do meio natural e à garantia de que existam recursos para as gerações futuras. Compreendendo-se as ideias de crescimento econômico e sustentabilidade, o desenvolvimento sustentável é alcançado quando são adotadas medidas que buscam reaproveitar economicamente o maior percentual possível daquilo que foi consumido, bem como diminuir o acúmulo de lixo e o consumo dos recursos naturais por meio da reciclagem e do reaproveitamento. Essa nova dinâmica econômica também gera novos postos de trabalho voltados para a realização dessas atividades. Também faz parte da sustentabilidade buscar desenvolver posturas que levem a um consumo mais consciente e equilibrado, evitando itens desnecessários e diminuindo desperdícios.

10. Além de buscar projetos na região em que residem, se julgar oportuno, sugira aos alunos que ampliem a busca para o território nacional.

PESQUISA E AÇÃO

Exposição de arte

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **1**, **3**, **7**, **9** e **10**, da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT105** da BNCC. Além disso, possibilita promover um trabalho interdisciplinar com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas favorecendo a habilidade **EM13CHS601** da BNCC, no que se refere à análise das demandas políticas, sociais e culturais dos povos afrodescendentes no Brasil e à promoção de ações para reduzir as desigualdades étnico-raciais no país.

Além disso, favorece o desenvolvimento da competência específica **6**, da área de Linguagens e suas Tecnologias, e da habilidade **EM13LGG601** da BNCC, ao desenvolver sua visão crítica e histórica, apropriando-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade.

Todo trabalho e toda discussão a respeito de discriminação e desigualdade racial, bem como apreciação e criação de obras de arte inspiradas nas culturas africanas e afro-brasileira, contribuem para o desenvolvimento dos temas contemporâneos **diversidade cultural**, **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** e **educação em Direitos Humanos**.

Inicie a seção promovendo uma roda de conversa com os alunos para discutir os assuntos que serão abordados. Proponha questões como: “O que vocês entendem pela palavra **afrodescendente**? O que significa **afro-brasileiro**? Qual é a diferença entre discriminação racial e desigualdade racial? Por que é preciso valorizar a cultura dos povos afrodescendentes e proteger seus direitos? Quais formas de discriminação racial vocês conhecem? E de desigualdade racial?”. Esse momento de conversa poderá aproximar os alunos da temática proposta na seção, além de ser um momento de troca de saberes e experiências.

Para ampliar a reflexão, é interessante exibir para os alunos (ou sugerir que vejam em casa) o documentário *A rota do escravo: uma visão global*, produzido pela Unesco. Nele são apresentadas histórias e heranças que resultaram do comércio de pessoas escravizadas. O documentário está disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rIfTqFmpsdI&feature=emb_title>. Acesso em: 22 jul. 2020.

Etapa 1:

Esclareça possíveis dúvidas dos alunos e ofereça as instruções necessárias para que respondam às questões propostas. Oriente as duplas a realizar as pesquisas em fontes de informação confiáveis. Seguem alguns *sites* que podem ser sugeridos:

- Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/1950-1969/D65810.html>. Acesso em: 10 abr. 2021.
- Conferência e Declaração de Durban. Disponíveis em: <http://www.palmares.gov.br/?p=13958> e <http://www.unfpa.org.br/Arquivos/declaracao_durban.pdf>. Acessos em: 22 jul. 2020.
- Década Internacional de Afrodescendentes. Disponível em: <http://decada-afro-onu.org/index.shtml>. Acesso em: 22 jul. 2020.

1. a) É um documento que define formas de proteger os direitos humanos de pessoas e grupos de pessoas que precisam de proteção especial, combatendo todos os tipos de discriminação racial.

b) Foi adotada pela Assembleia Geral das Nações Unidas em 21 de dezembro de 1965.

c) A Conferência de Durban foi promovida pela ONU. Ela aconteceu na cidade de Durban, na África do Sul, entre 31 de agosto e 8 de setembro de 2001.

d) São documentos criados após a Conferência de Durban com o objetivo de eliminar o racismo, a desigualdade racial, a xenofobia e outras formas de intolerância.

e) A Década Internacional de Afrodescendentes foi proclamada pela Assembleia Geral da ONU para reconhecer que os povos afrodescendentes formam um grupo que sofre diversos tipos de discriminação e desigualdade e que precisa ter seus direitos humanos protegidos e promovidos. O tema definido para esta década é: “Povos Afrodescendentes: reconhecimento, justiça e desenvolvimento”.

MODERNA

f) Os principais objetivos são: “promover respeito, proteção e cumprimento de todos os direitos humanos e liberdades fundamentais das pessoas afrodescendentes [...]; promover um maior conhecimento e respeito pelo patrimônio diversificado, a cultura e a contribuição de afrodescendentes para o desenvolvimento das sociedades; adotar e reforçar os quadros jurídicos nacionais, regionais e internacionais de acordo com a Declaração e Programa de Ação de Durban e a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial, bem como assegurar a sua plena e efetiva implementação”. (Disponível em: <http://decada-afro-onu.org/plan-action.shtml>. Acesso em: 22 jul. 2020.)

2. Dados sobre desigualdade racial e de gênero podem ser acessados no *site* “Retrato das desigualdades”, disponível em: <https://www.ipea.gov.br/retrato/indicadores.html>. Acesso em: 22 jul. 2020.

3. Explore a análise e a interpretação das tabelas oriundas das pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação.

Etapa 2:

4. Sugestões de *sites*:

- Geledés: Instituto da mulher negra. *Kente*, os tecidos dos reis africanos. Disponível em: <https://www.geledes.org.br/kente-os-tecidos-dos-reis-africanos/>. Acesso em: 22 jul. 2020.
- Enciclopédia Itaú Cultural: Biografia e obras de Rubem Valentim. Disponível em: <http://enciclopedia.itaucultural.org.br/pessoa8766/rubem-valentim>. Acesso em: 22 jul. 2020.
- Museu Afro Brasil. Disponível em: <http://www.museuafrobrasil.org.br/pesquisa/indice-biografico/lista-de-biografias/biografia/2016/11/01/rubem-valentim>. Acesso em: 22 jul. 2020.
- Museu de Arte Murilo Mendes: obras de Jorge dos Anjos. Disponível em: <http://www.museudeartemurilomendes.com.br/r/2018/09/24/a-ferro-e-fogo-esculturas-e-gravaduras/>. Acesso em: 22 jul. 2020.

5. Proporcionar aos alunos um momento de apreciação e conversa sobre as obras selecionadas. Mobilizar os conhecimentos a respeito de transformações geométricas com base nas obras favorece a ampliação do repertório dos alunos, preparando-os para a criação de suas obras de arte.

Etapa 3:

6. O momento de criação das obras de arte deve ser interessante e descontraído, a fim de estimular o envolvimento e a criatividade dos alunos, bem como valorizar e reconhecer a importância da cultura dos povos afrodescendentes. É importante disponibilizar diferentes tipos de material, valorizando o uso de materiais recicláveis. Para a criação de pinturas, por exemplo, podem-se utilizar como telas caixas de pizza pintadas com tinta branca.

Etapa 4:

Sugira a criação de frases e textos sobre os temas que farão parte da exposição.

Etapa 5:

As perguntas a seguir podem servir de respaldo para discutir com os alunos alguns pontos importantes: “Como foi a criação das obras de arte? Gostaram de expor as obras para outras pessoas? O que acharam da exposição? Ficou claro para os visitantes qual era o tema da exposição? Acreditam que a exposição contribuiu para conscientizar as pessoas sobre a importância de combater a discriminação e a desigualdade racial? Contribuiu também para conscientizá-los sobre a importância de conhecer e valorizar as culturas africana e afro-brasileira? A turma trabalhou de maneira colaborativa? Quais aspectos podem ser melhorados?”.

MODERNA

CONEXÕES

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Matrizes e geometria analítica

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

Dario Martins de Oliveira
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professor em escolas particulares e públicas de São Paulo por 20 anos. Editor.

Edson Ferreira de Souza
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Ernani Nagy de Moraes
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professor da Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura
Mestre em Educação (área de concentração: Educação – Opção: Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo. Professora em escola particular de São Paulo.

Maria José Guimarães de Souza
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Natasha Cardoso Dias
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense. Professora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Romenig da Silva Ribeiro
Mestre em Ciências no Programa de Ciência da Computação e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Edição de texto: Daniela Santo Ambrosio, Daniel Vitor Casartelli Santos, Dario Martins de Oliveira, Edson Ferreira de Souza, Izabel Bueno, Juliana Ikeda, Larissa Calazans, Maria José Guimarães de Souza, Marjorie Mayumi Haneda Hirata, Renata Martins Fortes Gonçalves, Romenig da Silva Ribeiro
Preparação de texto: Mariane de Mello Genaro Feitosa, ReCriar editorial
Assessoria pedagógica: José Eduardo de Souza Carrilho Cruz, Mariana Sartori, Millyane M. Moura Moreira, Paulo Cezar Pinto Carvalho
Gerência de *design* e produção gráfica: Everson de Paula
Coordenação de produção: Patricia Costa
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Adriano Moreno Barbosa
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, Cube29/Shutterstock, Turbodesign/Shutterstock
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica
Edição de infografia: Giselle Hirata, Priscilla Boffo
Coordenação de revisão: Maristela S. Carrasco
Revisão: Ana Paula Felippe, Cecilia O. Setsuko, Inaya Oliveira, Leila dos Santos, Mônica Surrage, Renata Brabo, Rita de Cássia Sam, Vitor Frota Jr.
Coordenação de pesquisa iconográfica: Luciano Baneza Gabarron
Pesquisa iconográfica: Carol Bock, Junior Rozzo, Mariana Alencar
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Joel Aparecido, Luiz Carlos Costa, Marina M. Buzzinaro
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Eliane Monteiro, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Ricardo Rodrigues, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Conexões : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, álgebra e algoritmos -- Funções e aplicações -- Estatística e probabilidade -- Trigonometria -- Geometria plana e espacial -- Matrizes e geometria analítica
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Leonardo, Fabio Martins de.

20-36402 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

MODERNA

Apresentação

Esta obra é o resultado de um trabalho coletivo motivado pelo desejo de produzir uma coleção de Matemática com uma linguagem acessível ao aluno.

Este livro apresenta um projeto editorial que favorece a compreensão, incentiva a leitura e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo, com uma imagem, os conceitos que serão trabalhados. Em seguida, explora a teoria, intercalada por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e uma *Autoavaliação*.

As seções *Compreensão de texto, Educação financeira*, *Pesquisa e ação* e *Ampliando os conhecimentos* complementam e enriquecem a obra.

Com esta obra, esperamos contribuir para o trabalho do professor em sala de aula e oferecer uma ferramenta auxiliar ao aprendizado do estudante.

Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A BNCC

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orientou a elaboração desta obra.

Mas o que é a BNCC?

A BNCC é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer das etapas e modalidades da Educação Básica, a fim de que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Competências gerais

As orientações apresentadas na BNCC têm por base competências que devem nortear o desenvolvimento escolar de crianças e jovens durante as etapas da Educação Básica.

Segundo a BNCC, **competência** é a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

A BNCC traz dez competências gerais que devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Transcrevemos, a seguir, as competências trabalhadas neste volume.

MODERNA

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, a cada uma delas é relacionado um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a ser garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código, cuja composição é a seguinte:

EM 13 MAT 103 → Esse código refere-se à habilidade 3 relacionada à competência específica 1 da área de Matemática e suas Tecnologias, que pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definições curriculares.

EM: Ensino Médio

13: a habilidade pode ser desenvolvida em qualquer série do Ensino Médio, conforme definição do currículo

MAT: Matemática e suas Tecnologias

1: competência específica à qual se relaciona a habilidade

03: numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência

É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão será realizada pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial referente às competências específicas estipuladas pela BNCC para a área de Matemática e suas Tecnologias trabalhadas neste volume, além das habilidades associadas a elas que serão abordadas. Em seguida, transcrevemos as competências específicas e as habilidades de outras áreas que são favorecidas e também poderão ser trabalhadas no volume.

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13MAT102**) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(**EM13MAT104**) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2: Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13MAT301**) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT307**) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(**EM13MAT315**) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4
(**EM13MAT401**) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Competências específicas e habilidades de outras áreas

Ciências da Natureza e suas Tecnologias

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CNT101**) Analisar e representar, com ou sem o uso de dispositivos e de aplicativos digitais específicos, as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de matéria, de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas e em processos produtivos que priorizem o desenvolvimento sustentável, o uso consciente dos recursos naturais e a preservação da vida em todas as suas formas.
(**EM13CNT106**) Avaliar, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais, tecnologias e possíveis soluções para as demandas que envolvem a geração, o transporte, a distribuição e o consumo de energia elétrica, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo/benefício, as características geográficas e ambientais, a produção de resíduos e os impactos socioambientais e culturais.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13CNT204**) Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CNT303**) Interpretar textos de divulgação científica que tratem de temáticas das Ciências da Natureza, disponíveis em diferentes mídias, considerando a apresentação dos dados, tanto na forma de textos como em equações, gráficos e/ou tabelas, a consistência dos argumentos e a coerência das conclusões, visando construir estratégias de seleção de fontes confiáveis de informações.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1
(**EM13CHS102**) Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos.
(**EM13CHS104**) Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3: Analisar e avaliar criticamente as relações de diferentes grupos, povos e sociedades com a natureza (produção, distribuição e consumo) e seus impactos econômicos e socioambientais, com vistas à proposição de alternativas que respeitem e promovam a consciência, a ética socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional, nacional e global.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3
(**EM13CHS301**) Problematizar hábitos e práticas individuais e coletivos de produção, reaproveitamento e descarte de resíduos em metrópoles, áreas urbanas e rurais, e comunidades com diferentes características socioeconômicas, e elaborar e/ou selecionar propostas de ação que promovam a sustentabilidade socioambiental, o combate à poluição sistêmica e o consumo responsável.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6
(**EM13CHS601**) Identificar e analisar as demandas e os protagonismos políticos, sociais e culturais dos povos indígenas e das populações afrodescendentes (incluindo as quilombolas) no Brasil contemporâneo considerando a história das Américas e o contexto de exclusão e inclusão precária desses grupos na ordem social e econômica atual, promovendo ações para a redução das desigualdades étnico-raciais no país.

Linguagens e suas Tecnologias

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2
(**EM13LGG201**) Utilizar as diversas linguagens (artísticas, corporais e verbais) em diferentes contextos, valorizando-as como fenômeno social, cultural, histórico, variável, heterogêneo e sensível aos contextos de uso.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6: Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.

HABILIDADES RELACIONADAS À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 6
(**EM13LGG601**) Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.
(**EM13LGG602**) Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

HABILIDADE RELACIONADA À COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 7
(**EM13LGG704**) Apropriar-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Objetivos e justificativas

Apresentamos, no quadro a seguir, os objetivos e as justificativas de cada capítulo deste volume.

CAPÍTULO 1 – Matrizes e determinantes	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é identificar, classificar, realizar operações com matrizes, bem como calcular o determinante de uma matriz quadrada.	As tabelas fazem parte da vida contemporânea, principalmente em estudos estatísticos e na tecnologia da informação. Pode-se utilizá-las em planilhas de cálculo e edição de imagens. O trato com matrizes e suas operações auxiliam várias áreas, como engenharia e química, por exemplo.
CAPÍTULO 2 – Sistemas lineares	
Objetivo	**Justificativa**
Além de representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares, esse capítulo tem como objetivo o reconhecimento e a classificação de sistemas lineares, a apresentação de um sistema em forma de equação matricial e a aplicação de métodos de escalonamentos para resolução de sistemas.	Muitos problemas do cotidiano e de diversas áreas da ciência podem ser resolvidos com o auxílio de sistemas lineares.
CAPÍTULO 3 – Geometria analítica	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é representar pontos, segmentos, retas e circunferências no plano cartesiano; calcular a distância entre dois pontos; escrever as equações da reta e da circunferência; discutir posições relativas entre elementos como ponto, reta e circunferência; calcular a distância entre ponto e reta; resolver sistemas graficamente e inequações do 1º grau com duas incógnitas e também calcular a área de um triângulo usando determinantes.	A importância do estudo da Geometria analítica se dá pela combinação entre Álgebra e Geometria, o que permite ao estudante relacionar esses dois ramos da Matemática. O trabalho algébrico no plano cartesiano com a representação de entes geométricos e cálculo de distâncias, por exemplo, torna ainda mais interessante o estudo da Geometria e dá maior significado à teoria das funções, com a ideia de coeficiente angular, estudo da reta e resolução de sistemas lineares.
CAPÍTULO 4 – Transformações geométricas	
Objetivo	**Justificativa**
O objetivo desse capítulo é compreender os tipos de transformações isométricas e suas composições, bem como as transformações homotéticas; distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética e ainda realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.	As transformações geométricas podem ser observadas na natureza, em obras de arte, construções e no artesanato de povos indígenas. O estudo desse ramo da Matemática justifica-se pelas suas muitas aplicações nas artes plásticas, arquitetura, *design* e engenharia e demais áreas do conhecimento.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Pensamento computacional

A todo momento realizamos tarefas, as quais são organizadas mentalmente de maneira consciente ou inconsciente. Por exemplo, durante um dia qualquer pretende-se lavar roupas, fazer uma lista de compras, ir ao mercado, limpar e organizar a casa, preparar o almoço e o jantar. Aparentemente, será uma corrida contra o tempo para realizar todos os afazeres. De que maneira é possível concluir todas essas tarefas até o fim do dia?

Podemos executá-las seguindo uma ordem de preferência. Entretanto, cabe lembrar que algumas tarefas podem possuir pré-requisitos. Vejamos: preparar o almoço requer que os ingredientes estejam disponíveis; limpar a casa requer produtos de limpeza em quantidade suficiente. Assim, uma opção de ordenação dessas tarefas inclui, primeiramente, fazer a lista de compras, e, em seguida, ir ao mercado, deixando para realizar as demais tarefas posteriormente.

Pensar acerca das tarefas que serão realizadas nos leva a identificar e extrair informações relevantes, dividir o dia em momentos oportunos e coerentes com os pré-requisitos de cada tarefa e as ordenar para que tudo flua bem.

Esse raciocínio e essa organização podem ser associados aos pilares do *pensamento computacional*, pois envolvem a **abstração** das situações, a **decomposição** das tarefas e a criação de um **algoritmo**, isto é, praticamente um passo a passo para realizar as tarefas.

Além disso, o **reconhecimento de padrões** pode ser identificado na realização de tarefas como lavar roupas e cozinhar um alimento.

Destaca-se, assim, o *pensamento computacional* como um conjunto de habilidades que viabiliza a modelagem e a automatização de resoluções de problemas, podendo ser estudado e aplicado sem, necessariamente, envolver um computador.

Pilares do *pensamento computacional*.

Pensamento computacional e a Matemática

Em Matemática há muitas situações em que se emprega um ou mais dos quatro pilares do *pensamento computacional*. Nesta obra, você estudará diversas dessas situações, inclusive algumas representadas com algoritmos. Um algoritmo é uma sequência finita e bem definida de passos para se realizar uma tarefa. No caso do estudo de Matemática, essa tarefa pode ser uma construção geométrica, uma divisão, o cálculo de uma expressão numérica etc.

Nesta obra, trabalharemos o fluxo da execução dessa tarefa com algoritmos representados em linguagem corrente (no caso, em português) ou esquematicamente. É importante que o algoritmo seja escrito de maneira precisa e clara, para que a sequência de passos possa ser seguida e o resultado, alcançado.

Veja um exemplo de algoritmo que nos ajuda a decidir se um número natural qualquer é par.

Considerando um número natural n qualquer, sabemos que o resto da divisão inteira de n por 2 é 0 quando n é par, ou 1 quando n é ímpar. Por exemplo:

$$\begin{array}{rl} 31 & \lfloor 2 \\ -2 & \ 15 \\ \hline 11 & \\ -10 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 26 & \lfloor 2 \\ -2 & \ 13 \\ \hline 06 & \\ -\ 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra maneira de decidir se um número natural n qualquer é par é verificar o último algarismo desse número. Se o último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8, o número é par; caso contrário, ele é ímpar.

Em linguagem corrente, podemos descrever os passos desse algoritmo da seguinte maneira:

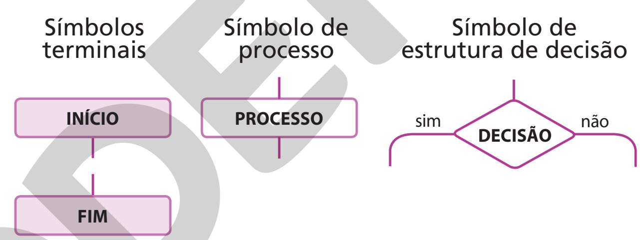
Passo 1. Dado n natural, calcula-se o resto r da divisão de n por 2.

Passo 2. Verifica-se se $r = 0$. Se r for 0, vá para o passo 3; se não, vá para o passo 4.

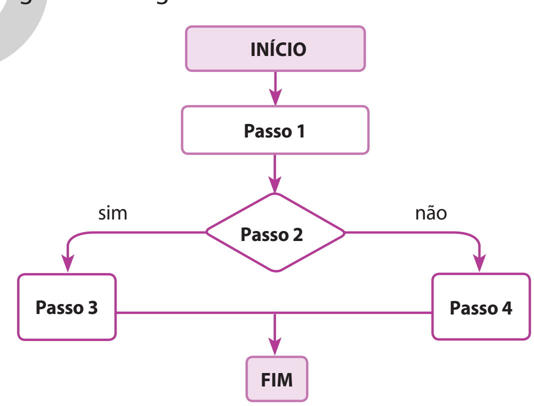
Passo 3. O valor de r é 0, portanto n é par. Encerra-se o algoritmo.

Passo 4. O valor de r é 1, portanto n é ímpar. Encerra-se o algoritmo.

Também podemos utilizar símbolos para mostrar o fluxo de execução de um algoritmo, chamado de **fluxograma**. Conheça os símbolos mais utilizados em fluxogramas.



O algoritmo para verificar se um número natural é par ou ímpar também pode ser representado por um fluxograma da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Repare que dentro de cada símbolo há o passo correspondente. Além disso, os símbolos estão interligados por setas para indicar a ordem que deve ser seguida, ou seja, o fluxo do raciocínio ou da informação.

Perceba que o *passo* 2 está representado em uma estrutura de decisão e, a partir da análise do valor do número natural r, decide-se o fluxo do algoritmo, realizando cálculos ou tarefas diferentes de acordo com o planejado.

Nesta obra você encontrará atividades que irão favorecer o desenvolvimento do *pensamento computacional* e das habilidades necessárias para a construção de algoritmos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Organização da obra

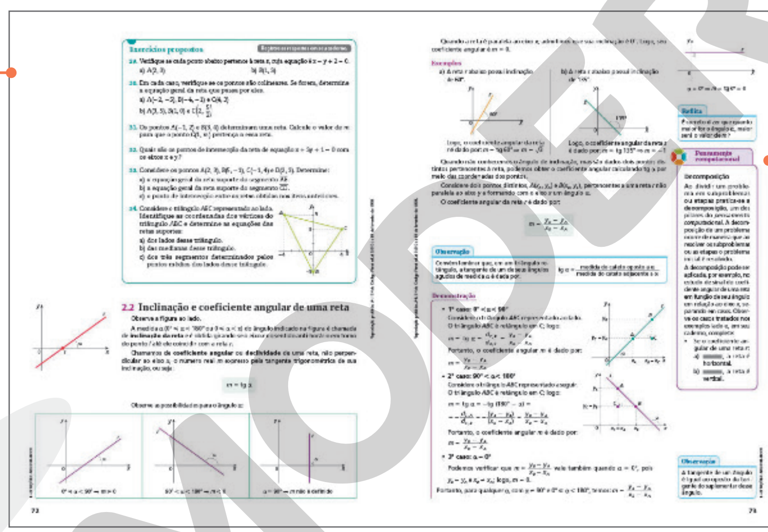
Videotutorial
- Assista ao videotutorial com orientações sobre o volume.

Abertura do capítulo

- Objetivos do capítulo.
- Situação, traduzida por uma imagem, que sugere conceitos abordados no capítulo.

Apresentação dos conteúdos

- Um tratamento visual diferenciado organiza o conteúdo.
- Os exemplos e os exercícios resolvidos propiciam a aplicação e a ampliação dos conceitos.
- Os exercícios propostos apresentam grau crescente de dificuldade. Alguns deles podem ser resolvidos em grupo.

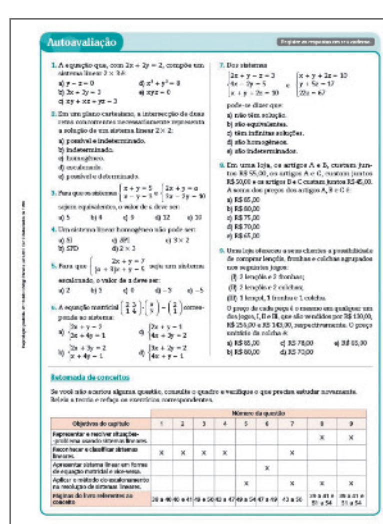


Pensamento computacional

O *pensamento computacional* é destacado por meio de boxes ou do ícone:

Exercícios complementares

- *Aplicação*: trabalham conceitos e procedimentos específicos.
- *Aprofundamento*: exigem mais do que a simples aplicação dos conceitos e podem envolver conteúdos de capítulos anteriores.
- *Desafio*: possibilitam testar conhecimentos e habilidades em situações mais complexas.
- Alguns exercícios dessa seção são contextualizados.

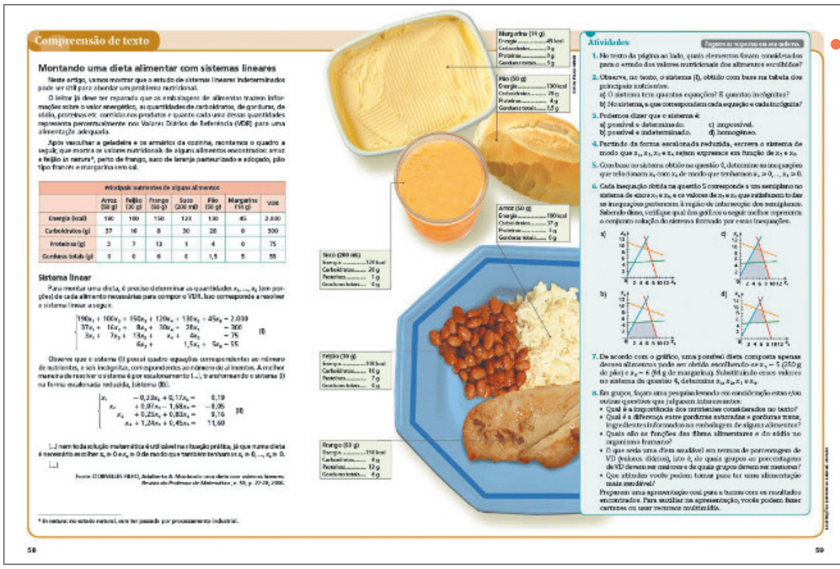


Autoavaliação

Propõe atividades cujas soluções dependem unicamente da boa compreensão do conteúdo. Traz um quadro que relaciona cada questão com o objetivo listado no início do capítulo, além da remissão das páginas em que o conteúdo foi explorado.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



Compreensão de texto

Textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão são recursos que o livro oferece para o desenvolvimento da competência leitora.

Ícone de atividade em grupo

Educação financeira

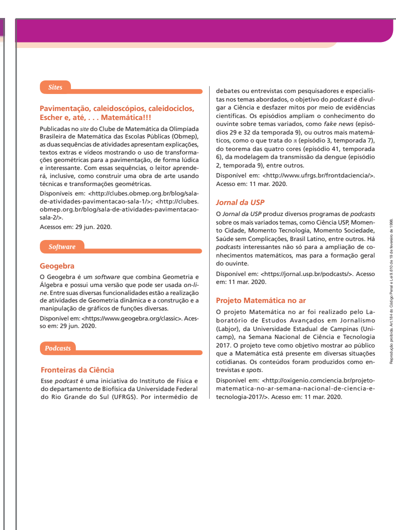
Atividades que desenvolvem o senso crítico e promovem atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e uso de recursos financeiros.

Pesquisa e ação

Atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola.

Ampliando os conhecimentos

As sugestões de livros, vídeos, *sites*, *softwares*, visitas a museus, entre outros recursos, propiciam o enriquecimento e a ampliação do conhecimento, além do incentivo à leitura e consulta a outras fontes de informação.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sumário

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO

1 Matrizes e determinantes

Competências específicas e habilidade de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **2** e **4**; habilidade **EM13MAT315**.

CHARLOTTE WILSON/OFFSIDE/GETTY IMAGES

A jogadora Marta comemora um gol da seleção brasileira na Copa do Mundo de Futebol feminino, em Valenciennes, França, 2019.

Objetivos do capítulo

- Identificar e classificar uma matriz.
- Operar com matrizes.
- Calcular o determinante de uma matriz quadrada.

O tema de abertura deste capítulo faz parte da cultura juvenil e, consequentemente, do universo dos alunos. Se julgar oportuno, iniciar uma conversa sobre o futebol. Muitos assuntos dentro dessa discussão podem ser abordados, como as diferenças de tratamento entre o futebol profissional feminino e o masculino, por exemplo.

1 Matriz

A Copa do Mundo de Futebol feminino é a competição mais importante dessa modalidade esportiva. Acontece de quatro em quatro anos e é realizada desde 1991 pela Federação Internacional de Futebol (Fifa). A seleção dos Estados Unidos é a primeira colocada no *ranking*, com quatro títulos no total em oito edições (1991, 1999, 2015 e 2019). Outras seleções ganhadoras foram a Noruega (1995) e o Japão (2011), com um título cada uma, e a Alemanha, que é bicampeã (2003 e 2007).

Apesar de nunca ter ganhado uma Copa, o Brasil tem jogadoras renomadas, como a atacante Marta, que foi eleita seis vezes a melhor jogadora do mundo; Formiga, que, em 2019, aos 41 anos de idade, disputou, na França, sua sétima Copa; e Cristiane, considerada a maior artilheira em Copas do Mundo, superando os artilheiros do futebol masculino.

Mesmo com estatísticas favoráveis na Copa da França de 2019 em relação à quantidade de público, ao retorno publicitário e à premiação, a Copa do Mundo de Futebol feminino está longe dos números do futebol masculino, que tem, principalmente, salários e premiações bem superiores. Por esse motivo, as atletas estadunidenses ameaçaram com um boicote o torneio olímpico na cidade do Rio de Janeiro em 2016 e, pouco antes do início da Copa Mundial de 2019 na França, processaram a Federação de Futebol dos Estados Unidos, exigindo equidade salarial entre gêneros, além de igualdade no tratamento médico e nas condições de transporte. A jogadora norueguesa Ada Hegerberg, também insatisfeita com as diferenças, não joga mais pelo seu país desde agosto de 2017. Espera-se que as reivindicações das mulheres e as posições profissionais conquistadas nos dias atuais ajudem a diminuir essas diferenças progressivamente.

MARCIO MACHADO/GETTY IMAGES

Seleção feminina de futebol dos Estados Unidos, campeã da Copa do Mundo de Futebol feminino, França, 2019.

A seguir, observe a tabela de classificação do grupo da seleção brasileira na Copa do Mundo de 2019 com o número de vitórias, empates e derrotas de cada seleção.

Grupo C – Copa do Mundo de Futebol feminino 2019				
Seleção		Vitórias	Empates	Derrotas
Itália		2	0	1
Austrália		2	0	1
Brasil		2	0	1
Jamaica		0	0	3

FOTOS: STUDIO623/SHUTTERSTOCK

Dados obtidos em: <https://www.cbf.com.br/pelo-mundo/internacional/copa-do-mundo-feminina/copa-do-mundo-futebol-feminino-2019?phase=groups> Acesso em: 6 jul. 2020.

TOBIAS SCHWAEZ/AFP/GETTY IMAGES

Ada Hegerberg joga profissionalmente no time Lyon. Foto da Champion's League de 2019.

Em todo o capítulo os alunos poderão usar diferentes registros de representação matemáticos, na busca da resolução de problemas, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

A organização dos dados numéricos em tabelas facilita a leitura e a interpretação desses dados, bem como alguns cálculos. Observe os exemplos da tabela do grupo C.

- Na coluna do número de vitórias, podemos verificar quantas vitórias cada seleção obteve.
- No cruzamento da coluna da quantidade de derrotas com a linha da Jamaica, temos o número 3, que indica a quantidade de derrotas dessa seleção.
- Na terceira linha, vemos que a seleção do Brasil obteve 2 vitórias, nenhum empate e 1 derrota.

Na Matemática, as tabelas como a do grupo da seleção brasileira podem ser simplificadas com apenas os dados numéricos dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais). A esse tipo de tabela damos o nome de **matriz**.

Uma matriz pode ser escrita entre colchetes ou entre parênteses, conforme representado a seguir.

Observe a matriz que representa a tabela do grupo C da Copa do Mundo de Futebol feminino de 2019, com o número de vitórias, de empates e de derrotas de cada time.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Define-se **matriz** $m \times n$ (lemos: "m por n") uma tabela com $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Exemplos

a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 4×2 (lemos: "quatro por dois"), pois tem 4 linhas e 2 colunas.

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & x^2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & \sqrt{5} & x \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×3 (lemos: "três por três"), pois tem 3 linhas e 3 colunas.

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×1 (lemos: "três por um"). Essa matriz, por ter uma só coluna, recebe o nome especial de **matriz coluna**.

d) $\begin{pmatrix} -8 & \frac{3}{4} & 0 & 5{,}1 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×4 (lemos: "um por quatro"). Essa matriz, por ter uma só linha, é chamada de **matriz linha**.

O tipo da matriz pode ser indicado ao seu lado, no canto inferior direito, como nos exemplos a seguir.

Exemplos

a) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 9 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$ (matriz de 2 linhas e 4 colunas)

b) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 & 7 & 4 \\ 9 & 0 & \sqrt{5} & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5}$ (matriz de 3 linhas e 5 colunas)

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1.1 Representação genérica de uma matriz

Os números que compõem uma matriz são chamados de **elementos** ou **termos**.

Em uma matriz, cada elemento ocupa uma posição definida por certa linha e por certa coluna, nessa ordem.

$$\begin{array}{lc} & \begin{matrix}\text{1ª coluna} & \text{2ª coluna} & \text{3ª coluna}\end{matrix} \\ \begin{matrix}\text{1ª linha}\\ \text{2ª linha}\\ \text{3ª linha}\\ \text{4ª linha}\end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3\\ 0 & -1 & 21 \\ \sqrt{3} & 16 & -8 \\ 6 & 4 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\end{array}$$

Observe, por exemplo, que o elemento 16 encontra-se no cruzamento da 3ª linha com a 2ª coluna. Indicamos esse elemento por a_{32}.

Portanto, $a_{32} = 16$ (lemos: "*a* três dois é igual a dezesseis").

Genericamente, cada elemento de uma matriz pode ser representado pelo símbolo a_{ij}, em que i indica a linha e j indica a coluna ocupadas por ele.

Exemplos

De acordo com a matriz acima:

a) o elemento que está na 1ª linha e na 2ª coluna é o 5; assim, $a_{12} = 5$;

b) o elemento que está na 2ª linha e na 1ª coluna é o 0; assim, $a_{21} = 0$;

c) o elemento que está na 4ª linha e na 3ª coluna é o $\sqrt{2}$; assim, $a_{43} = \sqrt{2}$.

Uma matriz A é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, com $i, j \in \mathbb{N}$. Assim, a matriz A, do tipo $m \times n$, pode ser representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Exercício resolvido

R1. Escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, na qual $a_{ij} = i + 2j$.

▸ Resolução

Uma matriz do tipo 2×3 é representada genericamente por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Aplicando a "lei de formação" dos elementos dessa matriz, temos:

- $a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$
- $a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
- $a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$
- $a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$
- $a_{22} = 2 + 2 \cdot 2 = 6$
- $a_{23} = 2 + 2 \cdot 3 = 8$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1.2 Igualdade de matrizes

Tomando-se matrizes de mesmo tipo, os elementos de mesmo índice, isto é, aqueles que ocupam a mesma posição, são denominados **elementos correspondentes.**

Considere as matrizes A e B a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Como as matrizes A e B são do mesmo tipo (3×3), seus elementos correspondentes são:

a_{11} e b_{11} $\quad$ a_{12} e b_{12} $\quad$ a_{13} e b_{13}

a_{21} e b_{21} $\quad$ a_{22} e b_{22} $\quad$ a_{23} e b_{23}

a_{31} e b_{31} $\quad$ a_{32} e b_{32} $\quad$ a_{33} e b_{33}

Duas matrizes, A e B, são **matrizes iguais** quando são de mesmo tipo e todos os elementos correspondentes são iguais.

Exercício resolvido

R2. Determinar os valores de x, y e z que tornam as matrizes A e B iguais.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & y + z & 1 \\ 3 & 5 & y - z \\ |x| & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Resolução

Para que as matrizes A e B sejam iguais, é necessário que os elementos correspondentes sejam iguais. Assim, devemos ter:

- $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$
- $\begin{cases} y + z = 7 \\ y - z = 9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, obtemos:

$$+\begin{cases} y + \cancel{z} = 7 \text{ (I)} \\ y - \cancel{z} = 9 \text{ (II)} \end{cases}$$
$$\overline{2y = 16 \Rightarrow y = 8}$$

Substituindo y por 8 em (I), obtemos:

$8 + z = 7 \Rightarrow z = -1$

Portanto, $x = \pm 4$, $y = 8$ e $z = -1$.

Reflita

Considere as matrizes A e B do exercício **R2**. Caso mudássemos b_{11} para um número diferente de 2, mantendo valores de x, y e z, as matrizes ainda seriam iguais? Explique.

Não; nesse caso, para quaisquer valores de x, y e z, as matrizes A e B não seriam iguais, pois $a_{11} \neq b_{11}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Determine o tipo das matrizes abaixo.

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 1×3

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ 3×1

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2×1

d) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ 2×2

2. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, na qual $a_{ij} = 3i + 2j$.

3. Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, em que:

$$b_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1, \text{ para } i = j \\ 3j, \text{ para } i \neq j \end{cases}$$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. Identifique os elementos de A, em que $i = j$ ou $i + j = 4$.

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} |-6| & 0 & 3 \\ 8 & 7 & |-4| \\ -7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = |-6| = 6$
$a_{22} = 7$
$a_{33} = 9$
$a_{13} = 3$
$a_{31} = -7$

5. Obtenha uma lei de formação que represente os elementos da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{pmatrix}$.

Resposta possível:
$A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$

6. Considere as matrizes $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Elas são iguais? Por quê?

Não, pois elas não são do mesmo tipo. A primeira é do tipo 5×1 e a segunda é do tipo 1×5.

7. Determine a, b, c e d para que as matrizes

$$\begin{pmatrix} a + 2b & 3c - 2d \\ -a + 3b & -2c + d \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$ sejam iguais.

$a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ e $d = -3$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

1.3 Algumas matrizes especiais

De acordo com algumas características, certas matrizes recebem nomes especiais. Observe os tipos de matriz a seguir.

Matriz quadrada

A matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas é chamada de **matriz quadrada**.

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2 ou, simplesmente, matriz de ordem 2.

As matrizes quadradas apresentam elementos que formam o que chamamos de **diagonais.**

Considere uma matriz quadrada de ordem n.

Os elementos a_{ij} com $i = j$, isto é, a_{11}, a_{22}, ... , a_{nn}, formam a **diagonal principal** dessa matriz. Os elementos a_{ij} com $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária** dessa matriz.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & -7 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonal secundária   diagonal principal

Os elementos 1, 2 e 3 formam a diagonal principal e os elementos 5, 2 e -5 formam a diagonal secundária, conforme indicado na matriz.

Observação

Uma matriz quadrada que tenha todos os elementos não pertencentes à diagonal principal iguais a zero é chamada de **matriz diagonal**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Matriz nula

A matriz em que todos os elementos são iguais a zero é denominada **matriz nula.**

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula do tipo 3×2, também indicada por $0_{3 \times 2}$.

Observação

Em qualquer matriz identidade de ordem n, vale a relação:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Matriz identidade

A matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são iguais a zero é chamada de **matriz identidade**, também indicada por I_n.

Exemplos

a) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercícios propostos

9. diagonal principal: 3, 8 e 15; diagonal secundária: 11, 8 e 7

Registre as respostas em seu caderno.

8. Determine a matriz quadrada A de ordem 2, na qual $a_{ij} = \frac{i}{j}$. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. Se $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com $a_{ij} = 2i + j^2$, determine a diagonal principal e a diagonal secundária de A.

10 Sendo $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, em que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, calcule a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem. 375

11. Determine k, real, para que:

$$\begin{pmatrix} k^2 & k - 1 \\ -k + 1 & k \end{pmatrix} = I_2 \quad 1$$

12. Denomina-se **traço** de uma matriz quadrada a soma dos elementos de sua diagonal principal. Determine o traço da matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, com:

$$a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i^{j+1}, \text{ se } i \neq j \end{cases} \quad 14$$

2 Adição e subtração de matrizes

O dono de uma rede de escolas de idiomas fez um levantamento para saber a quantidade total de alunos matriculados nos meses de março e abril de 2020.

PHOTOGRAPHEE.EU/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Primeiro, ele construiu duas tabelas com o total de alunos matriculados em cada mês.

	Alunos matriculados no mês de março		
	Unidade 1	**Unidade 2**	**Unidade 3**
Matutino	20	22	15
Vespertino	10	16	8
Noturno	15	21	13

Dados fictícios.

	Alunos matriculados no mês de abril		
	Unidade 1	**Unidade 2**	**Unidade 3**
Matutino	28	20	14
Vespertino	15	15	10
Noturno	10	26	19

Dados fictícios.

Com os dados das tabelas, o dono da escola de idiomas construiu uma nova tabela com o total de alunos matriculados nos dois meses em cada turno e em cada unidade. Veja a seguir.

	Alunos matriculados nos meses de março e abril		
	Unidade 1	**Unidade 2**	**Unidade 3**
Matutino	20 + 28	22 + 20	15 + 14
Vespertino	10 + 15	16 + 15	8 + 10
Noturno	15 + 10	21 + 26	13 + 19

Dados fictícios.

Assim, obteve:

	Alunos matriculados nos meses de março e abril		
	Unidade 1	**Unidade 2**	**Unidade 3**
Matutino	48	42	29
Vespertino	25	31	18
Noturno	25	47	32

Dados fictícios.

Ele também percebeu que poderia comparar o número de matriculados nos meses de março e abril, construindo uma nova tabela, mas com a diferença entre eles.

	Diferença entre o total de alunos matriculados nos meses de março e abril		
	Unidade 1	**Unidade 2**	**Unidade 3**
Matutino	28 – 20	20 – 22	14 – 15
Vespertino	15 – 10	15 – 16	10 – 8
Noturno	10 – 15	26 – 21	19 – 13

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Assim, obteve a seguinte tabela:

	Diferença entre o total de alunos matriculados nos meses de março e abril		
	Unidade 1	**Unidade 2**	**Unidade 3**
Matutino	8	– 2	– 1
Vespertino	5	– 1	2
Noturno	– 5	5	6

Dados fictícios.

O sinal negativo em alguns números da tabela indica que o mês de março teve maior quantidade de alunos matriculados do que o mês de abril.

A ideia trabalhada nessa situação será usada no estudo da adição e da subtração de matrizes.

2.1 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, na qual $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Reflita

Que matriz você obtém ao adicionar a uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a matriz $0_{m \times n}$?

A própria matriz A, pois $0_{m \times n}$ é a matriz nula, isto é, todos os seus elementos correspondem ao número real zero; portanto, ao adicionar cada elemento (a_{ij}) da matriz A com zero, obtemos o próprio elemento (a_{ij}).

Exemplo

Sejam as matrizes A e B, tal que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Para obter a matriz $C = A + B$, basta adicionar os elementos correspondentes de A e B:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+1 & 1+2 \\ 0+(-1) & 1+3 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Note que as matrizes A, B e C são do mesmo tipo.

Matriz oposta

Chama-se **matriz oposta** da matriz A do tipo $m \times n$ (e indica-se por $-A$) a matriz que adicionada à matriz A resulta na matriz nula de mesmo tipo, isto é, $A + (-A) = 0$, sendo 0 a matriz nula $0_{m \times n}$. Consequentemente, cada elemento da matriz $-A$ é oposto do elemento correspondente da matriz B.

Reflita

Que matriz você obtém ao calcular a matriz oposta da matriz oposta de uma matriz A?

A própria matriz A, pois, ao calcular o oposto do oposto de cada elemento a_{ij}, isto é, $-(-a_{ij})$, obtemos o próprio a_{ij}. Espera-se que os alunos percebam que o oposto do oposto de um número é o próprio número; então, a matriz oposta da matriz oposta é a matriz dada.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, pois:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & -2+2 \\ -3+3 & 5+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição

Dadas as matrizes A, B, C e $0_{m \times n}$ (matriz nula), todas de mesmo tipo, valem as seguintes propriedades:

- comutativa: $A + B = B + A$
- associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- existência do elemento neutro: $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$
- existência do elemento oposto: $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$

Explore

Crie três matrizes de mesmo tipo e verifique a validade das propriedades da adição.

Espera-se que os alunos percebam que, independentemente dos valores atribuídos, as propriedades da adição de matrizes são válidas.
Verificar a conveniência de aproveitar essa atividade para fazer analogia entre as propriedades da adição no conjunto $\mathbb{R}$ e as propriedades da adição no conjunto das matrizes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2.2 Subtração de matrizes

A diferença entre duas matrizes A e B de mesmo tipo é obtida pela soma da matriz A com a oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, então a matriz $C = A - B$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercício resolvido

R3. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, obter $X_{2 \times 2}$ de modo que $A + X = B$.

▸ Resolução

Representando a matriz X por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + a & 1 + b \\ 0 + c & 3 + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Então:

- $2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$
- $1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$
- $0 + c = 5 \Rightarrow c = 5$
- $3 + d = 0 \Rightarrow d = -3$

Logo: $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Outro modo:

Também poderíamos determinar a matriz X usando as propriedades da adição de matrizes:

$A + X = B \Rightarrow (-A) + A + X = (-A) + B \Rightarrow$

$\Rightarrow 0_{2 \times 2} + X = B - A \Rightarrow X = B + (-A)$

Assim:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

13. a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ 14. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } I_3,$$

efetue, quando possível, as operações:

a) $A + B$ **b)** $A + (B + C)$ **c)** $(A + B) + I_3$ Não é possível.

14. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $B - A$

b) $A - (B + I_2)$

c) $B - (A + 0_{2 \times 2})$

15. Determine a matriz X em cada item.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = X - \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. Considerando as matrizes

$A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, com $a_{ij} = i^2 + j^2$ para todo a_{ij}, e

$B = (b_{ij})_{2 \times 3}$, com $b_{ij} = 3i$ para todo b_{ij}, determine:

a) o elemento c_{22} da matriz $C = A + B$; 14

b) o termo de C igual a 3. $\nexists$

17. Reescreva o enunciado do exercício **13** de modo que a soma do item **c** possa ser obtida.
resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 Multiplicação de um número real por uma matriz

Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e k um número real, $k \cdot A$ é uma matriz do tipo $m \times n$ obtida pela multiplicação de k por todos os elementos de A.

Exemplo

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ e $k = 3$, então:

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -7 \\ 5 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-7) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

Reflita

- Verifique, para a matriz A do exemplo, se é válida a igualdade: $A + A + A = 3 \cdot A$
- Para uma matriz A qualquer, vale a igualdade $A + A + A = 3 \cdot A$?

$$A + A + A = \begin{pmatrix} 2+2+2 & 0+0+0 \\ 3+3+3 & -7-7-7 \\ 5+5+5 & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A + A + A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } 3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -21 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo: $A + A + A = 3A$

- Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, de tal modo que $B = A + A + A$, para cada par i, j, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, temos:
  $(b_{ij}) = (a_{ij}) + (a_{ij}) + (a_{ij}) \Rightarrow (b_{ij}) = 3 \cdot (a_{ij})$
  Logo: $B = 3 \cdot A$
  Como $B = A + A + A$ e $B = 3 \cdot A$, podemos concluir que: $A + A + A = 3 \cdot A$

Exercício resolvido

R4. Determinar as matrizes X e Y tal que $\begin{cases} X + Y = A + 3B \\ X - Y = A + B \end{cases}$, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

▶ Resolução

Adicionando as duas equações, temos:

$$+\begin{cases} X + \cancel{Y} = A + 3B \\ X - \cancel{Y} = A + B \end{cases}$$

$2X = 2A + 4B \Rightarrow X = A + 2B$

Como $X + Y = A + 3B$, temos:

$A + 2B + Y = A + 3B \Rightarrow Y = B$

Assim:

$$X = A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Y = B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

18. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, determine:

Ver resolução no Guia do professor.

a) $3A$

b) $\frac{1}{3}(A + B)$

c) $2 \cdot A - \frac{1}{3} \cdot B$

d) $2A - (B + C)$

e) $2(A - C) + 3(B - A)$

f) $B + C - 2 \cdot I_2$

19. Invente duas matrizes A e B de mesmo tipo e verifique se a igualdade matricial é verdadeira ou falsa em cada caso.

a) $4 \cdot A + 4 \cdot B = 4 \cdot (A + B)$ verdadeira

b) $3 \cdot A + 2 \cdot A = (3 + 2) \cdot A$ verdadeira

c) $-2 \cdot (5 \cdot B) = (-2 \cdot 5) \cdot B$ verdadeira

d) $6 \cdot (A + B) = 6 \cdot A + B$ falsa

e) $-1 \cdot (-B) = B$ verdadeira

20. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, calcule as matrizes X e Y tais que: $\begin{cases} 2X + Y = A - B \\ -3X - 2Y = B - 2A \end{cases}$

20. $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 Multiplicação de matrizes

A poluição é um grave problema para a existência da vida em nosso planeta. Resultado da interação humana com os meios de produção e de consumo, é produzida, com maior intensidade, desde a Revolução Industrial. Os danos irreparáveis causados pela poluição nos ecossistemas deixam como legado para as próximas gerações a destruição da camada de ozônio, o derretimento das calotas polares, presença de gases tóxicos na atmosfera e a contaminação de rios e mares, ocasionando extinção de espécies, diversos problemas de saúde para a raça humana e outros animais, além da escassez de recursos necessários à vida, como água potável e ar limpo. Assim, é necessário pensar em ações para minimizar os danos ao meio ambiente originados pela produção e pelo consumo.

A situação apresentada no início desse tópico trata o tema contemporâneo **educação ambiental**. Se julgar oportuno, propor uma discussão com a turma sobre o tema do boxe **Reflita** e perguntar sobre atitudes que podem corroborar com a sustentabilidade e a preservação do meio ambiente. Essa situação favorece o desenvolvimento da competência geral **7** e da competência específica **2** da BNCC.

MATHEUS RECHE/FUTURA PRESS/FOLHAPRESS

Grande quantidade de lixo no Rio Tietê, em Salto, São Paulo, 2019.

Reflita

O que você faz, no dia a dia, para minimizar danos ao meio ambiente? Discuta com seus colegas sobre suas atitudes.

Espera-se que os alunos discutam sobre atitudes que podem ser tomadas no dia a dia para proteger o meio ambiente e que essa discussão promova a conscientização sobre os cuidados que devemos ter com o planeta em que vivemos.

Considere a situação a seguir.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Separação de recicláveis na associação dos catadores de materiais recicláveis de Jequitinhonha, Minas Gerais, 2019.

Uma cooperativa de reciclagem coletou e tratou, em maio de 2020, as seguintes quantidades de materiais:

	Quantidade (em tonelada) de materiais reciclados			
	Papelão	Latas de alumínio	Plástico rígido	Embalagens longa vida
1ª semana	15,5	9,2	8	6,4
2ª semana	12,3	14	5,1	7
3ª semana	13	15,7	10,3	8,5
4ª semana	12,8	10	8,9	5,6

Dados fictícios.

O preço, por tonelada, de material reciclado está indicado na tabela a seguir.

Preço (por tonelada)	
Papelão	R$ 380,00
Latas de alumínio	R$ 3.200,00
Plástico rígido	R$ 1.300,00
Embalagens longa vida	R$ 290,00

Dados fictícios.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para determinar o total arrecadado por semana, fazemos:

1ª semana: $15{,}5 \cdot 380 + 9{,}2 \cdot 3.200 + 8 \cdot 1.300 + 6{,}4 \cdot 290 = 47.586$

2ª semana: $12{,}3 \cdot 380 + 14 \cdot 3.200 + 5{,}1 \cdot 1.300 + 7 \cdot 290 = 58.134$

3ª semana: $13 \cdot 380 + 15{,}7 \cdot 3.200 + 10{,}3 \cdot 1.300 + 8{,}5 \cdot 290 = 71.035$

4ª semana: $12{,}8 \cdot 380 + 10 \cdot 3.200 + 8{,}9 \cdot 1.300 + 5{,}6 \cdot 290 = 50.058$

Também podemos efetuar esse cálculo utilizando matrizes. Observe as matrizes *A* (quantidade, em tonelada, de cada material por semana) e *B* (preço, por tonelada, de cada material).

$$A = \begin{pmatrix} 15{,}5 & 9{,}2 & 8 & 6{,}4 \\ 12{,}3 & 14 & 5{,}1 & 7 \\ 13 & 15{,}7 & 10{,}3 & 8{,}5 \\ 12{,}8 & 10 & 8{,}9 & 5{,}6 \end{pmatrix}_{4\times 4} \qquad B = \begin{pmatrix} 380 \\ 3.200 \\ 1.300 \\ 290 \end{pmatrix}_{4\times 1}$$

Reflita

A quantidade de colunas da matriz *A* poderia ser diferente da quantidade de linhas da matriz *B*? Por quê?

Não. Se a quantidade de colunas da matriz *A* fosse diferente da quantidade de linhas da matriz *B*, sobrariam elementos que não teriam correspondentes; portanto, não seria possível calcular o produto entre as matrizes.

Trabalhando a ideia de produto entre as matrizes, veremos como obter a matriz $C = A \cdot B$, sendo *C* a matriz que representa os valores em reais apurados semanalmente.

$$A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 15{,}5 & 9{,}2 & 8 & 6{,}4 \\ 12{,}3 & 14 & 5{,}1 & 7 \\ 13 & 15{,}7 & 10{,}3 & 8{,}5 \\ 12{,}8 & 10 & 8{,}9 & 5{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 380 \\ 3.200 \\ 1.300 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47.586 \\ 58.134 \\ 71.035 \\ 50.058 \end{pmatrix}$$

Para determinar o valor obtido na 1ª semana, elemento c_{11}, devemos efetuar a soma dos seguintes produtos:

$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + a_{14} \cdot b_{41} =$

$= 15{,}5 \cdot 380 + 9{,}2 \cdot 3.200 + 8 \cdot 1.300 + 6{,}4 \cdot 290 = 47.586$

Note que multiplicamos o primeiro elemento da primeira linha de *A* com o primeiro elemento da coluna de *B*. Depois, o segundo elemento da primeira linha de *A* com o segundo elemento da coluna de *B*. Em seguida, o terceiro elemento da primeira linha de *A* com o terceiro elemento da coluna de *B* e, finalmente, o quarto elemento da primeira linha de *A* com o quarto elemento da coluna de *B*.

Para obter os valores c_{21}, c_{31} e c_{41}, procedemos de modo análogo ao da 1ª semana (c_{11}):

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + a_{24} \cdot b_{41} =$

$= 12{,}3 \cdot 380 + 14 \cdot 3.200 + 5{,}1 \cdot 1.300 + 7 \cdot 290 = 58.134$

$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} + a_{34} \cdot b_{41} =$

$= 13 \cdot 380 + 15{,}7 \cdot 3.200 + 10{,}3 \cdot 1.300 + 8{,}5 \cdot 290 = 71.035$

$c_{41} = a_{41} \cdot b_{11} + a_{42} \cdot b_{21} + a_{43} \cdot b_{31} + a_{44} \cdot b_{41} =$

$= 12{,}8 \cdot 380 + 10 \cdot 3.200 + 8{,}9 \cdot 1.300 + 5{,}6 \cdot 290 = 50.058$

De modo geral:

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto de *A* por *B* é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$, na qual cada elemento c_{ij} é a soma dos produtos obtidos ao multiplicar o 1º elemento da linha *i* de *A* pelo 1º elemento da coluna *j* de *B*, o 2º elemento da linha *i* de *A* pelo 2º elemento da coluna *j* de *B* e, assim, sucessivamente.

Note que o produto das matrizes *A* e *B*, indicado por $A \cdot B$, só é definido se o número de colunas de *A* for igual ao número de linhas de *B*, e esse produto terá o mesmo número de linhas da matriz *A* e o mesmo número de colunas da matriz *B*.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Exemplos

a) $[-2 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = [(-2) \cdot (-2) + 6 \cdot 6] = [40]$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \end{pmatrix}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R5. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ determinar } A \cdot B.$$

▸ Resolução

Como a matriz A é do tipo 2×3 e a matriz B é do tipo 3×2, existe o produto $A \cdot B$ (pois o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B). Então $A \cdot B = C$, sendo $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$.

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$$

iguais

Os elementos da matriz C são obtidos do seguinte modo:

- c_{11}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 1ª coluna de B;
- c_{12}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 1ª linha de A pela 2ª coluna de B;
- c_{21}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 1ª coluna de B;
- c_{22}: é a soma dos produtos obtidos quando se multiplica, ordenadamente, a 2ª linha de A pela 2ª coluna de B.

Assim, temos:

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Logo: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 27 & 17 \end{pmatrix}$

R6. Resolver a equação matricial:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

▸ Resolução

São condições para a ocorrência dessa multiplicação:

- a matriz X ter 2 colunas, pois a matriz multiplicada tem 2 linhas;
- a matriz X ter 2 linhas, pois o produto das matrizes tem 2 linhas.

$$X_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \text{ em que } x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

iguais

Temos, então:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot (-2) & a \cdot 3 + b \cdot (-1) \\ c \cdot 1 + d \cdot (-2) & c \cdot 3 + d \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualando as matrizes, obtemos os sistemas:

- $\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} c - 2d = 1 \\ 3c - d = 5 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{2}{5}$, $c = \frac{9}{5}$ e $d = \frac{2}{5}$

Logo: $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R7. Retomando a situação da abertura deste capítulo e usando o produto de matrizes, determinar a quantidade de pontos de cada seleção do Grupo C da Copa do Mundo de Futebol feminina de 2019. No sistema de pontuação do campeonato, para cada vitória, ganha-se 3 pontos, para cada empate, ganha-se 1 ponto e, para a derrota, não se ganha nem se perde pontos.

▸ Resolução

A matriz P a seguir representa a quantidade de vitórias, empates e derrotas dos times do Grupo C. A matriz Q representa a pontuação obtida a cada vitória, empate ou derrota.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para obter a pontuação total de cada time, fazemos o produto $P \cdot Q$. Só podemos fazer essa operação porque o número de colunas da matriz P é igual ao número de linhas da matriz Q. A matriz produto $P \cdot Q$ deve ter o número de linhas de P e o número de colunas de Q.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, a pontuação das seleções do Grupo C foi:

Itália	6
Austrália	6
Brasil	6
Jamaica	0

Propriedades da multiplicação

Dadas as matrizes A, B e C, tais que as operações entre elas, indicadas abaixo, sejam possíveis, valem as seguintes propriedades:

- associativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- distributiva à direita: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- distributiva à esquerda: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Reflita

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

- Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e responda se a propriedade comutativa na multiplicação de matrizes é válida.
- Verifique que $A \cdot B = A \cdot C$ e depois responda se é possível eliminar a matriz A nos dois membros da igualdade.

- $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

  $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

  $A \cdot B \neq B \cdot A$; logo, não vale a propriedade comutativa.
- $A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -7 & -11 \end{bmatrix}$

  $A \cdot B = A \cdot C$ e $B \neq C$; logo, não é uma operação válida.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

21. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

determine, caso exista:

a) $A \cdot B$
b) $B \cdot A$
c) $A \cdot C$
d) $(A \cdot B) \cdot C$
e) $A \cdot (B \cdot C)$

21. a) $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** Não é possível calcular. **c)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

22. Calcule o valor de x e de y de modo que:

$$\begin{pmatrix} -3 & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

23. Resolva a equação $A \cdot X + B = C$, em que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

24. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que $X \cdot A = A$. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

- O que pode ser dito a respeito da matriz X? X é a matriz identidade de ordem 2.

25. Invente quatro matrizes quadradas:
$A_{1 \times 1}$, $B_{2 \times 2}$, $C_{3 \times 3}$ e $D_{4 \times 4}$

a) Faça as multiplicações a seguir.

- $A \cdot I_1$ e $I_1 \cdot A$ A e A
- $B \cdot I_2$ e $I_2 \cdot B$ B e B
- $C \cdot I_3$ e $I_3 \cdot C$ C e C
- $D \cdot I_4$ e $I_4 \cdot D$ D e D

b) Compare os produtos obtidos com as respectivas matrizes inventadas.
Os produtos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

26. (Ibmec-SP) Uma agência de propaganda utiliza nas campanhas publicitárias que elabora para seus clientes três tipos de material para divulgação em papel:

- impresso tipo PB, em preto e branco no papel simples;
- impresso tipo CK, colorido no papel simples;
- impresso tipo CKX, colorido no papel mais grosso.

Para fazer esse tipo de trabalho, a agência contrata normalmente três gráficas, que cobram preços unitários diferentes para cada tipo de impressão, conforme a tabela abaixo.

Tabela 1

Tipo	PB	CK	CKX
Gráfica A	R$ 2,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica B	R$ 3,00	R$ 3,00	R$ 4,00
Gráfica C	R$ 1,00	R$ 2,00	R$ 6,00

a) Determine a gráfica que, para fazer 300 impressões do tipo PB, 150 do tipo CK e 200 do tipo CKX, apresentaria o menor custo. gráfica C

b) No último ano, a agência fez 25% dos seus impressos com a gráfica A, 45% com a gráfica B e o restante com a gráfica C. Supondo que, em cada campanha deste último ano, a agência sempre tenha feito os três tipos de impressão com a mesma gráfica e que os preços unitários tenham sido os valores dados na Tabela 1, determine o custo unitário médio que a agência teve com cada tipo de impressão.
PB: R$ 2,15; CK: R$ 2,70; CKX: R$ 4,60

5 Determinante de uma matriz

A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado **determinante da matriz**, que é obtido por meio de operações entre os elementos da matriz.

Para representar o determinante de uma matriz A (indicado por **det** A), substituímos os parênteses ou os colchetes da matriz por barras simples.

Exemplos

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ e $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

b) $B = [4]$ e $\det B = |4|$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ e $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$

Determinante de matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 1 é o próprio elemento de A.

Determinante de matriz de ordem 2

Dada uma matriz quadrada A de ordem 2, o determinante de A é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - [(-3) \cdot (-1)] = 8 - 3 = 5$$

Os boxes *pensamento computacional*, desta e da próxima página, em conjunto com as atividades propostas favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que, além do conceito de algoritmo, os alunos lidam com os registros em linguagem corrente e em fluxograma, refletindo a respeito da possibilidade da inversão de um passo e a validade do algoritmo. Ao transitar entre os registros, também é favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC.

Pensamento computacional

Algoritmo

O **algoritmo**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é uma sequência finita de passos para resolver um problema ou realizar uma tarefa. Para escrever um algoritmo, com início e fim, é preciso ter clareza e ordenar corretamente os passos, a fim de que o objetivo seja atingido.

O cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 2, por exemplo, pode ser resolvido por meio de um algoritmo. Veja o algoritmo descrito a seguir em linguagem corrente:

Passo 1. Determinar o produto da diagonal principal, $a_{11} \cdot a_{22}$, e chamar de p.
Passo 2. Determinar o produto da diagonal secundária, $a_{12} \cdot a_{21}$, e chamar de s.
Passo 3. Determinar a diferença $p - s$ e encerrar o algoritmo.

Esse algoritmo também pode ser representado graficamente, por meio de um fluxograma. Veja:

INÍCIO → **Passo 1** → **Passo 2** → **Passo 3** → FIM

- A partir das representações do algoritmo, reflita: é possível executar o passo 3 antes do passo 1?

Espera-se que os alunos percebam que o passo 3 depende de os passos 1 e 2 já terem sido executados; caso contrário, não é possível saber o valor correto de p ou de s para determinar a diferença $p - s$.

Determinante de matriz de ordem 3

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 pode ser calculado por um método chamado **regra de Sarrus**. Considere a matriz A e observe o procedimento a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Ao lado da representação para o cálculo do determinante, copiam-se as duas primeiras colunas da matriz.
2. Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e, na mesma direção da diagonal principal, multiplicam-se os elementos das outras duas diagonais à sua direita.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \\ \hline & & & 10 & -8 \quad 0 \end{array}$$

3. Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e, na mesma direção da diagonal secundária, os elementos das outras duas diagonais à sua direita.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \\ \hline -6 \quad 12 & 0 & & & \end{array}$$

4. Subtraem-se as somas dos produtos obtidos nos passos **2** e **3**, nessa ordem. Então: $\det A = (10 - 8 + 0) - (-6 + 12 + 0) = -4$

Observação

Pierre Frédéric **Sarrus** (1798-1861) foi professor na universidade francesa de Strasbourg.
A regra de Sarrus foi escrita, provavelmente, em 1833.
Os determinantes constituem uma ferramenta útil no estudo dos sistemas lineares.

Observação

É possível calcular o determinante de matrizes de ordem maior que 3; porém, isso não será objeto de nosso estudo.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios resolvidos

R8. Quais são os valores de x para que o determinante da matriz A seja igual a -6?

$$A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ x & x+2 \end{pmatrix}$$

▸ Resolução

Calculando det A e igualando a -6, temos:

$x(x + 2) - (-3)x = -6$

$x^2 + 2x + 3x = -6$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$x = -2$ ou $x = -3$

Portanto, $x = -2$ ou $x = -3$.

R9. Determinar x para que seja verdadeira a igualdade:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

▸ Resolução

Pela regra de Sarrus, temos:

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -x & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ x & -1 & -2 & x & -1 \end{array}$$

$$-2x^2 \quad -2 \quad 6 \qquad\qquad -8 \quad -x \quad 3x$$

Assim, temos:

$(-8 - x + 3x) - (-2x^2 - 2 + 6) = 0$

$2x^2 + 2x - 12 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

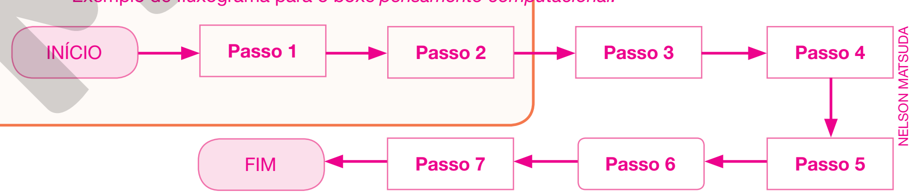
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$x = 2$ ou $x = -3$

Portanto, $x = 2$ ou $x = -3$.

Exemplo de fluxograma para o boxe *pensamento computacional:*



Pensamento computacional

Veja os primeiros passos da adaptação da regra de Sarrus para um algoritmo em linguagem corrente. Complete os passos a seguir e, em seu caderno, desenhe um fluxograma que represente esse algoritmo.

Passo 1. Determine o produto de v$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ e chame de *a*.

Passo 2. Determine o produto de $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$ e chame de *b*.

Passo 3. Determine o produto de $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ e chame de *c*.

Passo 4. Determine o produto de ▢ e chame de *d*. $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

Passo 5. Determine o produto de ▢ e chame de *e*. $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

Passo 6. Determine o produto de ▢ e chame de *f*. $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

Passo 7. Calcule o determinante por meio da expressão $(a + b + c) - (d + e + f)$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

27. Dadas as matrizes $A = (2)$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det A 2   b) det B 5   c) det C −1

28. Aplicando a regra de Sarrus, calcule o valor dos determinantes a seguir.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 0   b) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$ 0

29. Determine o valor da expressão:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ −8

30. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det $(A \cdot B)$ 20   c) det $A \cdot$ det B 20

b) det $(B \cdot A)$ 20

31. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

a) det $(A + B)$ −12   c) det $(3 \cdot A)$ −225

b) $3 \cdot$ det A −75   d) det A + det B −22

32. Em cada item, depois de calcular os determinantes, responda às questões.

Se julgar conveniente, pedir aos alunos que realizem este exercício em grupo.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

- O determinante de uma matriz de ordem 3 com uma linha de zeros sempre vale zero? sim

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

- O determinante de uma matriz de ordem 3 em que uma linha é "o dobro de outra linha" sempre vale zero? E se fosse o triplo? sim; também valeria zero

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$

- Se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma fila (ou linha, ou coluna) triplicada, seu valor triplica? sim

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $ad - bc$

- O determinante de uma matriz de ordem 2 e o da matriz obtida desta, trocando-se as linhas por colunas, são iguais? sim

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$

- Determinantes de matrizes de ordem 2 que têm linhas (ou colunas) permutadas são iguais ou opostos? opostos

f) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ abc

- O determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal? sim

33. Calcule os determinantes de I_1, I_2 e I_3. Qual é o valor que você imagina para o determinante de I_4?

33. 1, 1, 1. Espera-se que os alunos respondam que o determinante de I_4 é igual a 1.

6 Matrizes e determinantes em planilhas eletrônicas

Este tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, ao compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação para produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Planilhas eletrônicas ou planilhas de cálculo são *softwares* usados para facilitar o cálculo em tabelas. Com esse tipo de *software*, podemos automatizar operações, além de apresentar dados em tabelas e gráficos.

Neste capítulo, vimos que matrizes são tabelas que apresentam dados numéricos dispostos em linhas e em colunas. Assim, uma tabela de números dispostos de maneira retangular em uma planilha eletrônica é uma matriz.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observe como a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 15 & 9 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser representada em uma planilha eletrônica.

Campo que mostra a célula selecionada.

Campo que mostra o número ou, quando for o caso, a fórmula associada à célula.

Números que indicam as linhas da planilha.

Letras que indicam as colunas da planilha.

A1		*Fórmula*	2
	A	B	C
1	2	3	0
2	−2	15	9
3	7	1	4
4			

Na planilha, cada elemento da matriz ocupa uma coluna (indicada por uma letra) e uma linha (indicada por um número). Assim, o elemento indicado por A1 é o elemento que está na coluna *A* e na linha 1 (nesse caso, o número 2).

Usando planilhas eletrônicas, é possível calcular o determinante de uma matriz quadrada, além do produto de duas matrizes.

Como exemplo, vamos considerar as matrizes $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ e $B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Se possível, levar os alunos à sala de informática da escola ou pedir que, em casa, reproduzam esses procedimentos e explorem outros recursos das planilhas eletrônicas.
Algumas planilhas podem ter comandos diferentes dos apresentados.
Orientar os alunos caso a planilha eletrônica que tenham disponível funcione de maneira diferente.

Vamos, inicialmente, representar a matriz *A* na planilha eletrônica.

D2		*Fórmula*	=MATRIZ.DETERM(A1:B2)	
	A	B	C	**D**	E
1	2	3		**Determinante**	
2	5	7		−1	
3					

Para calcular o determinante, digitamos, em uma célula vazia da planilha, a fórmula:
5MATRIZ.DETERM(A1:B2)
(Calcula o determinante da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último elemento está em B2.)

Agora, vamos representar as matrizes *A* e *B* na planilha, deixando um espaço de pelo menos uma coluna entre elas.

A5		*Fórmula*	=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)			
	A	**B**	**C**	D	E	F
1	2	3		−1	4	10
2	5	7		2	3	0
3						
4	**Produto de *A* por *B***					
5	4					
6						
7						

Para calcular o produto $A \cdot B$, digitamos, em uma célula vazia da planilha, a fórmula:
5MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)
(Determina o produto da matriz cujo primeiro elemento está em A1 e o último elemento está em B2 pela matriz cujo primeiro elemento está em D1 e o último está em F2.)

A5		*Fórmula*	{=MATRIZ.MULT(A1:B2;D1:F2)}			
	A	**B**	**C**	D	E	F
1	2	3		−1	4	10
2	5	7		2	3	0
3						
4	**Produto de *A* por *B***					
5	4	17	20			
6	9	41	50			
7						

A seguir, é necessário converter a fórmula em uma fórmula de matriz.
Selecionamos na planilha o intervalo em que ficará a matriz produto, iniciando pela célula em que a fórmula foi digitada. Nesse caso, o produto será do tipo 2×3; então, selecionamos um intervalo com 2 linhas e 3 colunas.
Pressionamos F2 e, em seguida, CTRL+SHIFT+ENTER.
Obtemos, assim, o produto $A \cdot B$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Explore

Nos dois casos, quando os alunos tentarem realizar os cálculos na planilha, obterão uma mensagem de erro.

Usando uma planilha eletrônica, calcule o determinante da matriz *B* e o produto $B \cdot A$.
- Que resultado você obteve em cada caso?
- Compare as respostas que você obteve com as de seus colegas e discutam por que vocês obtiveram esses resultados.

A4		*Fórmula*	=MATRIZ.DETERM(A1:C2)
	A	B	C	D
1	−1	4	10	
2	2	3	0	
3				
4	#VALOR!	Um valor usado na fórmula tem o tipo de dados incorreto.		
5				

ADILSON SECCO

No caso do determinante, isso ocorrerá porque a matriz *B* não é quadrada; no caso do produto $B \cdot A$, porque o número de colunas de *B* é diferente do número de linhas de *A*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

1. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, em que $b_{ij} = \dfrac{3(i-j)}{i+j}$, construa as matrizes e verifique se $A = B$. $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = 1 + 2j$ e $b_{ij} = 2i - j + 1$, determine a matriz $X = 2A - 3B$.

3. (Vunesp) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produto, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, $i, j = 1, 2, 3$.

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. **b)** $\begin{pmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{pmatrix}$; total de peças dos itens A, B e C produzidas em cada dia da semana.

Analisando a matriz, podemos afirmar que: alternativa e

a) a quantidade de produto do tipo P_2 vendido pela loja L_2 é 11.

b) a quantidade de produto do tipo P_1 vendido pela loja L_3 é 30.

c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.

d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pela loja L_i, $i = 1, 2, 3$, é 52.

e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

4. Duas máquinas, I e II, produzem três itens, A, B e C, de acordo com o número de peças feitas por hora de funcionamento apresentadas na matriz H. A matriz S, por sua vez, apresenta o número de horas que cada máquina trabalha por dia da semana.

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{I} & \text{II} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \qquad S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{S} & \text{T} & \text{Q} & \text{Q} & \text{S} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 6 & 9 & 11 & 10 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

$H_{3 \times 2}$, $S_{2 \times 5}$, $(H \cdot S)_{3 \times 5}$

a) Determine os tipos das matrizes H, S e $(H \cdot S)$.

b) Calcule o produto $H \cdot S$. Que informação ele nos fornece?

c) Quantos itens B são produzidos na segunda-feira? Quantos itens C são produzidos na quinta-feira? 62 itens B; 27 itens C

5. Determine o valor de x que satisfaz cada equação.

a) $\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 5$ $\quad \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$ ou $\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$ $\quad 2$

6. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(\det A)^n$, sendo $n \in \mathbb{Z}_+$. 1

Aprofundamento

7. Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, encontre uma matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = C$, em que C é a matriz nula de ordem 2. $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

8. Determine a matriz X tal que $X - 3B = I_3$, sendo:

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 0 \\ -3 & -5 & 9 \\ 21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ -21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Desafio

9. (Uerj) Considere as matrizes A e B:

$A = (a_{xj})$ é quadrada de ordem n, em que

$$a_{xj} = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ é par} \\ -1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$B = (b_{xj})$ é de ordem $n \times p$, em que $b_{xj} = j^x$.

O elemento da quarta linha e da segunda coluna da matriz produto $A \cdot B$ é igual a 4.094. Calcule o número de linhas da matriz B. alternativa c

a) 9 **b)** 10 **c)** 11 **d)** 12 **e)** 13

(*Dica*: a soma dos n primeiros termos de uma PG, sendo conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão q, com $q \neq 1$, é dada por: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$)

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. Uma matriz de ordem 2 é uma matriz: alternativa b

a) identidade.
b) quadrada.
c) nula.
d) linha.

2. Só existe adição ou subtração de matrizes se elas forem: alternativa c

a) opostas.
b) nulas.
c) de mesmo tipo.
d) quadradas.

3. Sejam as matrizes $A_{2 \times 3}$ e $B_{3 \times 2}$. Os produtos $4 \cdot A \cdot B$ e $4 \cdot B \cdot A$ são: alternativa d

a) iguais.
b) opostos.
c) respectivamente, dos tipos 3×3 e 2×2.
d) respectivamente, dos tipos 2×2 e 3×3.

4. As matrizes $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são: alternativa d

a) iguais.
b) opostas.
c) identidades.
d) diagonais.

5. Na ______ de matrizes, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda. alternativa a

a) multiplicação
b) adição
c) subtração
d) igualdade

6. Multiplicando-se as matrizes $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, obtém-se uma matriz de ordem: alternativa a

a) 3×4
b) 3×5
c) 2×2
d) 3×3

7. Na multiplicação de matrizes, não é válida a propriedade: alternativa c

a) associativa.
b) distributiva à esquerda.
c) comutativa.
d) distributiva à direita.

8. O determinante da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ é: alternativa d

a) -10
b) 22
c) 10
d) -22

9. Se $\det A \neq 0$, então a matriz A, com certeza, é: alternativa d

a) matriz linha.
b) nula.
c) diagonal.
d) nenhuma das anteriores.

10. Se $\det A = 5$ e A é uma matriz de ordem 2, podemos afirmar que: alternativa d

a) $\det(-A) = -5$
b) $\det\left(\dfrac{A}{10}\right) = 0{,}5$
c) $\det(2A) = 10$
d) $\det(2A) = 20$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão									
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Identificar e classificar uma matriz.	X		X	X		X			X	X
Operar com matrizes.		X	X		X	X	X			X
Calcular o determinante de uma matriz quadrada.								X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	14 a 20	20 a 23	24 a 29	19 e 20	24 a 29	25 a 29	25 a 29	29 a 32	29 a 32	29 a 32

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nesta seção é favorecido o desenvolvimento da competência geral **1**, da competência específica **1** e da habilidade **EM13MAT315** da BNCC. No texto apresentado são valorizados os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade e também são utilizados estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos na interpretação em contextos do cotidiano e de questões tecnológicas, contribuindo, assim, para uma formação geral.

As cifras de Hill

A troca de mensagens há muito tempo é utilizada pelos seres humanos. Para maior segurança, foi inventada a criptografia, que consiste em métodos para codificar mensagens, ou seja, torná-las ilegíveis no caso de interceptações.

Um antigo exemplo de criptografia são as Cifras de César, que têm como base o deslocamento do alfabeto em um número *n* de posições. No quadro a seguir, a letra A foi codificada como a letra D, a letra B, como E, e assim por diante.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

BIRY SARKIS

Observe a codificação de uma frase com o uso do quadro.

Texto comum: A RESPOSTA CORRETA É A LETRA D

Texto codificado: D UHVSRVWD FRUUHWD H D OHWUD G

Esse método é considerado fácil de ser decifrado, pois, em um texto, a ocorrência de determinadas letras é maior que outras, o que facilita a descoberta das substituições feitas.

O matemático e professor estadunidense Lester Sanders Hill (1890-1961) inventou outro método de cifragem chamado **Cifras de Hill**. Verifique como podemos usá-lo para codificar a palavra "AURORA".

Primeiro, escolhemos as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}$ de ordem 2, que servirão para codificar e decodificar a palavra, respectivamente.

A escolha das matrizes não foi aleatória. Para que elas tenham funcionalidade no método, são necessárias algumas condições matemáticas não tratadas nesta coleção.

Agora, devemos numerar as letras do alfabeto. Observe o quadro ao lado.

Quadro de correspondentes numéricos			
A	**1**	**N**	**14**
B	**2**	**O**	**15**
C	**3**	**P**	**16**
D	**4**	**Q**	**17**
E	**5**	**R**	**18**
F	**6**	**S**	**19**
G	**7**	**T**	**20**
H	**8**	**U**	**21**
I	**9**	**V**	**22**
J	**10**	**W**	**23**
K	**11**	**X**	**24**
L	**12**	**Y**	**25**
M	**13**	**Z**	**0**

Note que a letra Z foi numerada como 0.

Depois, agrupamos as letras da palavra, ordenadamente, em pares, numeramos cada letra de acordo com o quadro de correspondentes numéricos e usamos esses números para construir matrizes do tipo 2×1 (veja o quadro a seguir).

A U	R O	R A
1 21	18 15	18 1
$\begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se a quantidade de letras da mensagem for ímpar, adicionamos uma letra igual à última letra da mensagem para formar o último par, pois, para codificar, necessitamos de matrizes do tipo 2×1, o que só é possível com pares de letras. Nesse caso, quando o destinatário, conhecedor de seu idioma, for decodificar, perceberá que há uma letra a mais na mensagem.

Em seguida, multiplicamos a matriz *A* pela matriz que representa cada par de letras, obtendo como resultado em cada multiplicação uma nova matriz do tipo 2×1. Observe a multiplicação de *A* pela matriz que representa o primeiro par de letras (AU).

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 21 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 131 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Obtemos como resultado os elementos 131 e 65. Agora, substituímos esses números pelas letras, conforme o quadro de correspondentes numéricos. Porém, os elementos obtidos não estão no quadro. Quando isso acontecer, trabalharemos com o resto da divisão desses números por 26, que é a quantidade de letras do alfabeto.

MODERNA

Para a escolha das matrizes, deve-se usar a teoria de congruências, assunto que não será tratado nesta coleção. Para mais explicações, e se achar que é adequado trabalhar o tema com a turma, há referências bibliográficas nas páginas finais deste volume.

Ao codificar e decodificar uma mensagem, o aluno está lidando com um dos pilares do *pensamento computacional*: o **algoritmo**. Comentar com eles que o matemático inglês Alan Turing (1912-1954), um dos principais cientistas da computação, trabalhou na formalização do conceito de algoritmo e na criação da máquina de Turing. Se julgar oportuno, orientar a pesquisa a respeito de Alan e qual foi seu trabalho mais importante relacionado à criptografia.

Assim, os números obtidos são o 1 (resto da divisão de 131 por 26) e o 13 (resto da divisão de 65 por 26), que correspondem às letras A e M, respectivamente.

Procedendo da mesma maneira para os outros pares, obtemos as seguintes matrizes produtos:

$$\begin{pmatrix} 180 \\ 181 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 96 \\ 39 \end{pmatrix}$$

No quadro a seguir, temos os elementos das matrizes produtos, os restos e as letras cifradas conforme o quadro de correspondentes numéricos da página anterior.

Elementos	131	65	180	81	96	39
Restos da divisão por 26	1	13	24	3	18	13
Letras cifradas	A	M	X	C	R	M

Assim, a palavra AURORA codificada é AMXCRM.

Perceba que a facilidade para quebrar uma Cifra de César não ocorre no método de Hill, pois, na palavra AURORA, as duas letras A aparecem na palavra codificada como A e M. A letra R, que também aparece duas vezes, é codificada como X e R.

Como decodificar

O destinatário precisa ter a **chave**, que é a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}$, para decodificar a palavra AMXCRM.

Devemos formar matrizes do tipo 2×1 com os correspondentes numéricos dos pares das letras. Observe a seguir.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 24 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18 \\ 13 \end{pmatrix}$
AM	XC	RM

Agora, fazemos as multiplicações da matriz *B* pelas matrizes obtidas.

Para as letras AM, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 313 \\ 255 \end{pmatrix}$$

Fazendo as divisões dos elementos por 26, obtemos restos 1 e 21, que correspondem às letras A e U.

Procedendo da mesma maneira para as matrizes obtidas pelos pares XC e RM, teremos as letras R, O, R e A, formando, assim, a palavra AURORA.

ROBSON90/SHUTTERSTOCK

Monumento **The Enigma Code Breakers**, Posnânia, Polônia, 2018. Homenagem aos matemáticos poloneses Henryk Zygalski, Marian Rejewskì e Jerzy Rózycki, os primeiros a quebrar os códigos da máquina criptográfica alemã Enigma, usada na Segunda Guerra Mundial.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

FAREMOS UMA FESTA SURPRESA PARA O JOÃO.

1. Use as Cifras de César com deslocamento de três posições para decodificar a mensagem a seguir.

IDUHPRV XPD IHVWD VXUSUHVD SDUD R MRDR.

2. Codifique a palavra SORRIA, por meio das cifras de Hill, usando a matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

DGXFDM

3. Qual das matrizes é a chave para decodificar a palavra obtida como resposta da atividade **2**?

alternativa c

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 14 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix}$

4. Utilizando as cifras de Hill, decodifique a palavra AJJQWEEVER. Para isso, use a matriz $\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 5 \end{pmatrix}$.

ESPIONAGEM

MODERNA

CAPÍTULO

Competências específicas e habilidade de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **1**, **3** e **4**; habilidade **EM13MAT301**.

2 Sistemas lineares

A abertura desse capítulo pode ser trabalhada interdisciplinarmente com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo, parcialmente, o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT106** da BNCC. Se julgar oportuno, discutir a respeito de possíveis soluções para demandas que envolvem geração e consumo de energia, considerando a disponibilidade de recursos, a eficiência energética, a relação custo-benefício, as características geográficas e ambientais, a produção de resíduos e os impactos socioambientais. Além disso, a situação apresentada também permite solicitar aos alunos uma pesquisa a respeito dos processos de energia, de locomoção, de abastecimento, de velocidade e de armazenamento de suprimentos da EEI. Questões como “Qual é a velocidade da Estação Espacial?”; “Qual é a distância de sua órbita à Terra?” e “Como dormem e se alimentam os astronautas sem a força da gravidade?” podem aguçar a curiosidade e despertar o interesse pela pesquisa, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

NASA

Fotografia noturna do sul da Escandinávia, capturada pelos astronautas a bordo da Estação Espacial Internacional (EEI), em abril de 2015.

ALAMY/FOTOARENA

Estação Espacial Internacional (EEI). Imagem capturada em outubro de 2018.

Objetivos do capítulo

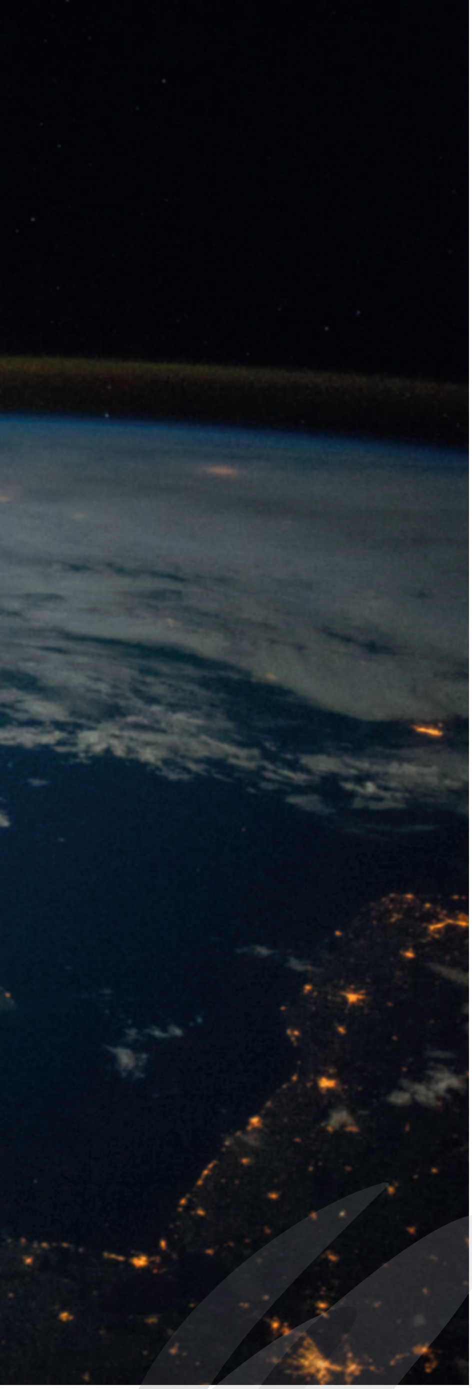
- Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.
- Reconhecer e classificar sistemas lineares.
- Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.
- Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

1 Introdução ao estudo de sistemas lineares

A fotografia tirada da Estação Espacial Internacional e compartilhada pela Nasa mostra a visão noturna do sul da Escandinávia. Os pontos em cor amarela mais forte indicam as luzes das cidades. Os maiores aglomerados de luz na imagem acima são as capitais Oslo e Copenhagen.

A energia que ilumina as cidades e coloca em funcionamento grandes redes de computadores, indústrias, eletrodomésticos, aparelhos hospitalares etc. foi obra de um grande esforço científico da humanidade. Nos dias atuais, as intrincadas relações do ser humano com o mundo e com os modos de produção só são possíveis graças à energia.

A Matemática auxilia nesse processo fornecendo muitas ferramentas. Um exemplo são as **equações lineares** e os **sistemas de equações lineares**, usados para determinar as correntes que fluem em um circuito elétrico. Com a lei de Ohm e as leis de corrente e de voltagem de Kirchhoff, obtemos as equações que regem um circuito.



Ao longo de todo o capítulo, a habilidade EM13MAT301 e a competência específica 3 da BNCC serão favorecidas, pois os alunos deverão resolver e elaborar problemas que envolvam equações lineares usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem o apoio de tecnologias digitais, empregando estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos.

Já conhecemos os métodos da adição e da substituição para a resolução de sistemas. Vamos estudar, neste capítulo, o método do escalonamento, também chamado de **método da eliminação de Gauss-Jordan**. Esse método tem semelhanças com o método da adição e constitui uma poderosa ferramenta para a resolução, feita com computadores, de problemas complexos.

2 Equações lineares

Acompanhe a situação a seguir.

Uma loja de roupas vende meias, camisetas, camisas e calças, cujos preços estão especificados no quadro a seguir.

Produto	Preço (em real)
Par de meias	20
Camiseta	45
Camisa	62
Calça	75

Júlio gastou R$ 739,00 em roupas nessa loja. Qual é a quantidade de cada tipo de roupa que Júlio comprou?

Podemos representar esse problema matematicamente por meio de uma equação. Vamos representar a quantidade de meias, camisetas, camisas e calças por x, y, w e z, respectivamente. Agora, multiplicamos cada letra pelo preço do artigo que ela representa. A adição dessas multiplicações deve resultar em 739. Observe:

$20x + 45y + 62w + 75z = 739$

Essa sentença matemática é chamada de **equação linear**.

> **Equação linear** é toda equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, com $n \in \mathbb{N}^*$, em que $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas; os números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ são os coeficientes das incógnitas; b, real, é o termo independente.

Exemplos

a) $x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ **b)** $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 3$ **c)** $2x + 3y - z = 0$

Quando o termo independente é nulo, a equação linear é chamada de **homogênea**.

Observação

As equações abaixo **não** são equações lineares.

- $x^2 + 3y - z = 7$ (incógnita x com expoente diferente de 1)
- $x - \frac{1}{y} = 3$ (incógnita y no denominador)
- $2x + 3yz = 0$ (termo $3yz$ com mais de uma incógnita)

2.1 Solução de uma equação linear

Acompanhe as afirmações a seguir.

- O par ordenado (3, 5) é solução da equação $-3x + 2y = 1$, pois, substituindo x por 3 e y por 5, obtemos uma sentença verdadeira: $-3 \cdot \mathbf{3} + 2 \cdot \mathbf{5} = 1$
- O terno ordenado (1, 3, 5) não é solução da equação $3x - 2y - 3z = 14$, pois $3 \cdot \mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{3} - 3 \cdot \mathbf{5} = 14$ não é uma sentença verdadeira.
- O terno ordenado (0, 0, 0) é solução da equação $x + 2y - 3z = 0$, pois $\mathbf{0} + 2 \cdot \mathbf{0} - 3 \cdot \mathbf{0} = 0$ é uma sentença verdadeira.

Note que essa equação é homogênea.

> A solução de uma equação linear é toda ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que torna a igualdade $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ verdadeira, isto é, tal que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Se julgar necessário, comentar com os alunos que uma ênupla ordenada é o mesmo que uma sequência numerada de n termos.

MODERNA

Exercício resolvido

R1. Sabendo que o par ordenado $(2a, a)$ é solução da equação $4x + 3y = 10$, determinar o valor de a.

▶ **Resolução**

Substituindo x por $2a$ e y por a, obtemos:

$4 \cdot (2a) + 3 \cdot (a) = 10 \Rightarrow 8a + 3a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{11}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

1. Verifique se os ternos ordenados a seguir são soluções da equação linear $2x + y + 3z = 11$.

a) $(1, 3, 2)$ sim

b) $(2, 2, 2)$ não

2. Determine k de modo que o par $(3, k)$ seja solução da equação linear $2x + 3y = 12$. 2

3. Encontre duas soluções para a equação $2a + 3b - c = 0$.
Respostas possíveis: $(0, 0, 0)$, $(1, -1, -1)$, $(1, 1, 5)$ e $(-2, 2, 2)$

4. Verifique se o par $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ é solução comum das equações lineares $x - 3y = 1$ e $x + 3y = 5$. sim

5. Elabore uma equação linear com três incógnitas e determine duas de suas soluções. Depois, peça a um colega que determine duas soluções para a equação elaborada por você; determine duas soluções para a equação produzida por ele. resposta pessoal

O desenvolvimento da competência específica **1** da BNCC é favorecido na situação inicial apresentada neste tópico porque os alunos deverão utilizar estratégias e procedimentos matemáticos para interpretar e resolver problemas, inclusive os de Ciências da Natureza. A utilização de diferentes linguagens nessa situação também favorece o desenvolvimento da competência geral **4**, bem como da habilidade **EM13CNT101** ao propor a análise da reação de combustão do gás metano, representada por uma equação.

3 Sistema de equações lineares

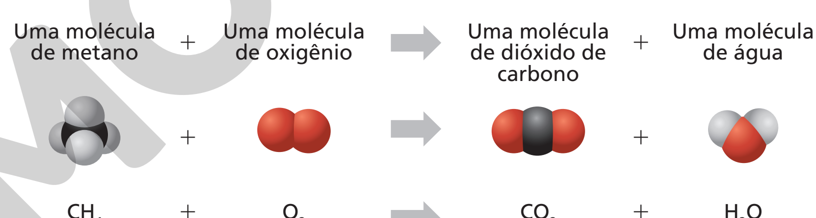
Acompanhe a situação a seguir.

Em Química, uma equação está balanceada quando o número de átomos dos reagentes é igual ao número de átomos dos produtos. Podemos fazer o balanceamento pelo método algébrico: resolvendo um sistema de equações lineares.

Considere a reação de combustão do gás metano, representada pela equação a seguir.

$\underbrace{CH_4 + O_2}_{\text{reagentes}} \longrightarrow \underbrace{CO_2 + H_2O}_{\text{produtos}}$

reagentes	produtos
Número de átomos	Número de átomos
carbono (C): 1	carbono (C): 1
hidrogênio (H): 4	hidrogênio (H): 2
oxigênio (O): 2	oxigênio (O): 3



NELSON MATSUDA

Para balancear essa equação, multiplicamos cada substância por uma incógnita:

$$a\,CH_4 + b\,O_2 \rightarrow c\,CO_2 + d\,H_2O$$

Com isso, construímos o seguinte sistema de equações lineares:

- carbono (C)........... $a = c$
- hidrogênio (H)...... $4a = 2d$
- oxigênio (O_2) .... $2b = 2c + d$

$$\rightarrow \begin{cases} a = c \\ 4a = 2d \\ 2b = 2c + d \end{cases}$$

Um **sistema *S* de equações lineares**, ou **sistema linear**, de m equações com n incógnitas é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

a) $S_1 = \begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - 4y = -7 \end{cases}$ (sistema de duas equações com duas incógnitas)

b) $S_2 = \begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 0x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$ (sistema de três equações com quatro incógnitas)

Observação

O sistema S_2 também pode ser escrito assim:

$$S_2 = \begin{cases} x_1 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

3.1 Solução de um sistema linear

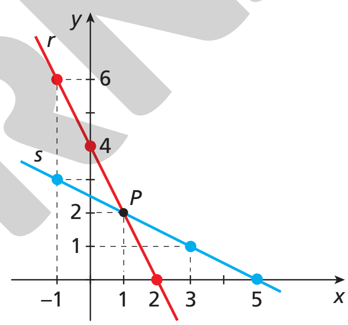
Veja as seguintes equações e algumas de suas soluções:

- $2x + y = 4 \rightarrow (-1, 6), (0, 4),$ **(1, 2)**, $(2, 0), \ldots$
- $x + 2y = 5 \rightarrow (-1, 3),$ **(1, 2)**, $(3, 1), (5, 0), \ldots$

Observe que as duas equações têm o par ordenado (1, 2) como solução comum.

A ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de m equações com n incógnitas quando é solução de cada uma das equações do sistema.

Veja, no plano cartesiano ao lado, que os pares ordenados que são soluções da equação $2x + y = 4$ representam pontos da reta r, e cada ponto da reta r, por sua vez, representa uma solução da equação $2x + y = 4$. O mesmo ocorre para as soluções da equação $x + 2y = 5$ (reta s).



ADILSON SECCO

O par ordenado (1, 2) representa o ponto P, intersecção das retas r e s. O ponto P é a solução gráfica desse sistema.

Portanto, o par ordenado (1, 2) é a única solução do sistema: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

Representamos a solução desse sistema como $S = \{(1, 2)\}$.

Exemplos

a) Vamos considerar o sistema: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

O par ordenado (2, 3) satisfaz as duas equações do sistema, pois $2 \cdot \mathbf{2} + \mathbf{3} = 7$ e $3 \cdot \mathbf{2} - \mathbf{3} = 3$. Assim, o par ordenado (2, 3) é solução do sistema.

b) Seja o sistema: $\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$

O terno ordenado (1, 3, 4) não é uma solução do sistema, pois, substituindo esses valores nas equações, obtemos:

$$\begin{cases} -\mathbf{1} + \mathbf{3} - \mathbf{4} = -2 \text{ (sentença verdadeira)} \\ 0 \cdot \mathbf{1} + 4 \cdot \mathbf{3} - 2 \cdot \mathbf{4} = 0 \text{ (sentença falsa)} \end{cases}$$

c) Seja o sistema: $\begin{cases} x + y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 15 \\ -2x - y + 3z = 7 \end{cases}$

O terno ordenado $(3, -1, 4)$ é a solução do sistema, pois, substituindo esses valores nas equações, obtemos:

$$\begin{cases} 3 - 1 - 2 \cdot 4 = -6 \text{ (sentença verdadeira)} \\ 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 4 = 15 \text{ (sentença verdadeira)} \\ -2 \cdot 3 - (-1) + 3 \cdot 4 = 7 \text{ (sentença verdadeira)} \end{cases}$$

Observação

A equação $ax + by = c$, com $b \neq 0$, também representa a expressão algébrica de uma função afim.

Explicitando a lei dessa função como $y = f(x)$, podemos escrever $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, com $b \neq 0$. Seu gráfico é uma reta não vertical.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Explore

Use um *software* de construção de gráficos para determinar a solução dos sistemas a seguir. Depois escreva suas observações sobre a solução determinada em cada um dos sistemas.

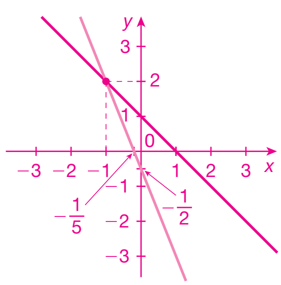
a) $S_1 = \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $S_2 = \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

c) $S_3 = \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

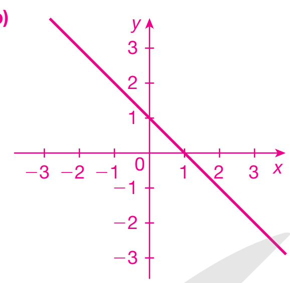
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

a)



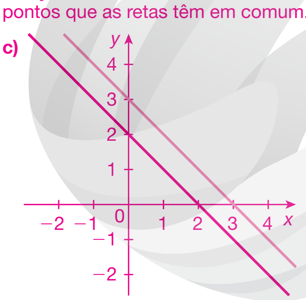
A solução do sistema é $S = \{(-1, 2)\}$

b)



Espera-se que os alunos percebam que as duas equações geraram duas retas coincidentes. Se achar conveniente, pedir que discutam sobre a quantidade de soluções desse sistema. Comentar que as soluções são as coordenadas dos pontos que as retas têm em comum.

c)



Nesse caso, espera-se que os alunos percebam que não há solução para esse sistema, pois as retas são paralelas e, consequentemente, não se cruzam.

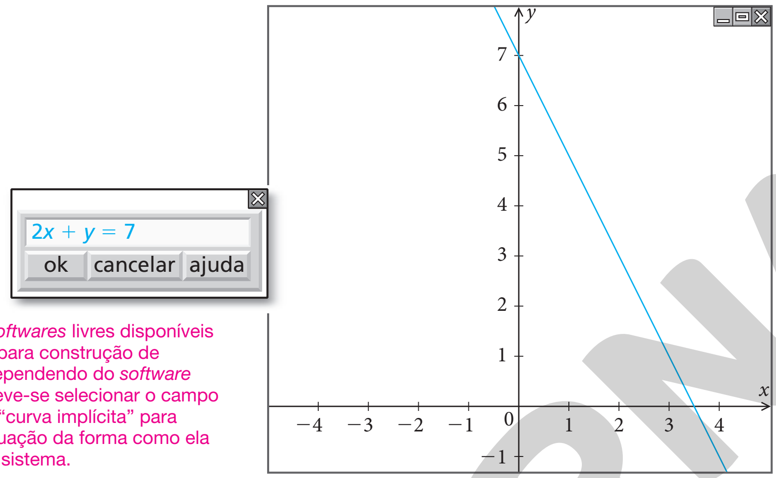
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

Solução de um sistema usando um *software* de construção de gráficos

O trabalho com *software* de construção de gráficos proposto neste tópico e no boxe **Explore** desta página favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC.

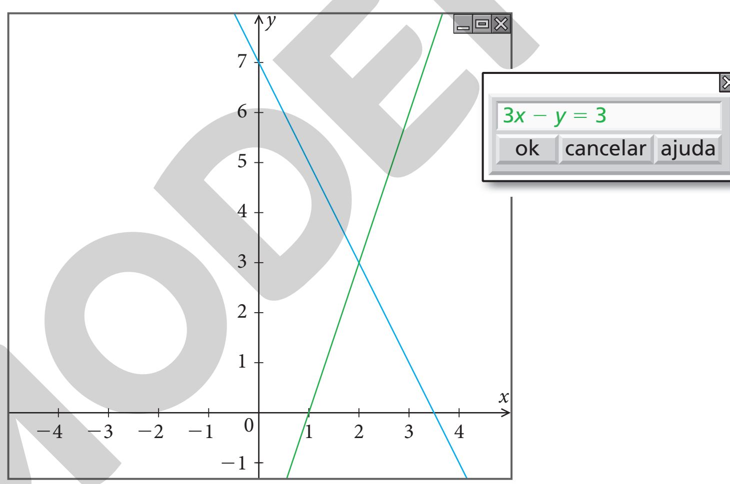
Veja como determinar a solução do sistema do exemplo **a**, da página anterior, em um *software* de construção de gráficos.

1. Digitar a primeira equação do sistema ($2x + y = 7$) no campo de entrada de funções. Depois, clicar em "ok" para que a reta apareça no plano cartesiano.

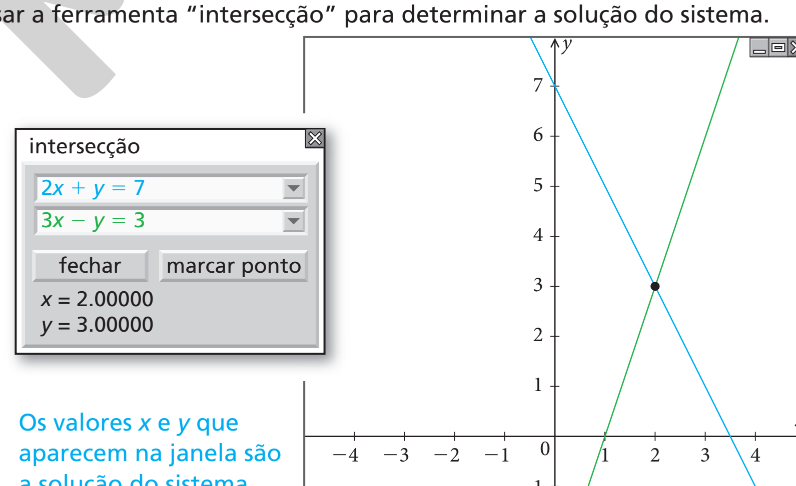


Há vários *softwares* livres disponíveis na internet para construção de gráficos. Dependendo do *software* utilizado, deve-se selecionar o campo de entrada "curva implícita" para digitar a equação da forma como ela aparece no sistema.

2. Digitar a segunda equação do sistema ($3x - y = 3$) no campo de entrada e clicar em "ok".



3. Usar a ferramenta "intersecção" para determinar a solução do sistema.



Os valores x e y que aparecem na janela são a solução do sistema.

- Assim, o par ordenado (2, 3) do ponto de intersecção entre as retas é a única solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercício resolvido

R2. Resolver o sistema de equações: $\begin{cases} x + 4y = 12 \\ 5x + 2y = 24 \end{cases}$

▸ **Resolução**

$$\begin{cases} x + 4y = 12 & \text{(I)} \\ 5x + 2y = 24 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por -5 e adicionando a equação obtida, membro a membro, à equação (II), temos:

$$\begin{cases} \cancel{-5x} - 20y = -60 \\ \cancel{5x} + 2y = 24 \end{cases}$$

$$-18y = -36 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo y por 2 em (II), obtemos $x = 4$.

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(4, 2)\}$.

10. Ao identificar as relações entre o número de meninas e meninos apresentadas no enunciado, os estudantes colocam em prática a **abstração**, um dos pilares do *pensamento computacional*. Para enriquecer a atividade, pedir que descrevam, oralmente, as sentenças que obtiveram e perguntar se havia alguma informação que não era relevante à resolução do problema. Espera-se que eles digam que o fato de os alunos da situação estarem fazendo uma prova não era relevante, mas apenas quantos saíram e quantos ficaram. Se julgar oportuno, ao finalizar a atividade, pedir aos alunos que elaborem uma situação-problema de maneira que o sistema linear que a modela seja o mesmo que resolveu a atividade.

Observações

- O método da adição para a resolução de um sistema consiste em multiplicar os membros de uma ou mais equações por números convenientes e, em seguida, adicioná-las membro a membro.
- O conjunto solução de um sistema é formado por todas as soluções comuns a todas as equações do sistema.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

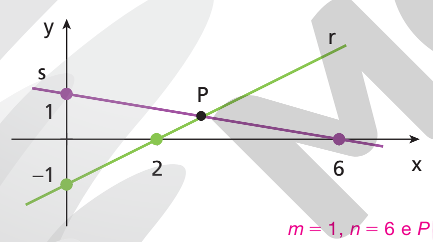
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

6. Os pontos $A\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e $B(1, 2)$ são soluções da equação $y = ax + b$. Calcule os valores de a e b. $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

7. Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Encontre a solução comum das duas equações lineares que se podem obter de $(2x + y)(-x + 3y) = 0$. $S = \{(0, 0)\}$

8. As retas r e s são, respectivamente, as representações gráficas das equações $mx - 2y = 2$ e $x + ny = 6$.



ADILSON SECCO

$m = 1$, $n = 6$ e $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$

- Determine m, n e as coordenadas de P.

9. Considere o sistema: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ Ver resolução no Guia do professor.

a) Dê três soluções para cada equação.

b) Em um mesmo plano cartesiano, represente as soluções gráficas de cada equação.

c) Identifique a solução gráfica do sistema.

10. Alguns alunos faziam prova em uma sala. Em dado momento, 5 meninas terminaram e saíram da sala, ficando o número de meninos igual ao dobro do número de meninas. Depois de alguns minutos, 7 meninos terminaram a prova e saíram, ficando na sala o mesmo número de meninas e de meninos. Determine o número total de alunos que faziam a prova nessa sala. 26 alunos

11. Misturam-se dois tipos de leite – um com 2% de gordura, que tem o custo de R$ 2,00 por litro e outro com 4% de gordura, que tem custo de R$ 1,25 por litro – para obter, ao todo, 80 litros de leite com 2,5% de gordura. Quantos litros de leite de cada tipo são misturados?

12. Construa um sistema linear com duas equações e duas incógnitas que tenha solução. Depois, escreva uma situação do cotidiano que se adapte ao sistema elaborado. resposta pessoal

11. São misturados 60 ℓ de leite com 2% de gordura e 20 ℓ de leite com 4% de gordura. Há dados desnecessários no enunciado; espera-se que os alunos façam o tratamento da informação para identificação de quais dados podem ser descartados e quais são relevantes para a resolução do problema.

3.2 Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado, de acordo com seu número de soluções, em:

- sistema possível e determinado (SPD) – uma só solução;
- sistema possível e indeterminado (SPI) – infinitas soluções;
- sistema impossível (SI) – nenhuma solução.

Observação

Se um sistema de equações lineares tem mais de uma solução, então ele tem infinitas soluções.

Exercícios resolvidos

R3. Em uma loja de tintas, uma máquina mistura látex e corante conforme o pedido do consumidor. Calcular a quantidade de litros de látex e de corante para que a máquina, preenchendo latas de 20 litros, obtenha latas de:

a) R\$ 100,00, sendo o preço do litro de látex R\$ 4,00 e o do litro de corante R\$ 8,00;

b) R\$ 80,00, sendo o preço do litro de látex R\$ 4,00 e o do litro de corante R\$ 4,00;

c) R\$ 60,00, sendo o preço do litro de látex R\$ 4,00 e o do litro de corante R\$ 4,00.


BALEIN/SHUTTERSTOCK

▸ Resolução

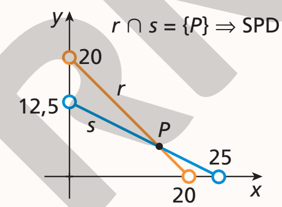
a) Representando a quantidade, em litro, de látex e de corante por x e y, respectivamente, e sabendo que sempre haverá mistura entre eles, construímos o sistema:

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 8y = 100 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

Resolvendo S_1, obtemos $x = 15$ e $y = 5$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{(15, 5)\}$, isto é, S_1 tem apenas uma solução, constituindo um **sistema possível e determinado (SPD)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura ao lado.



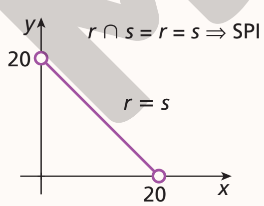
b) Nesse caso, construímos o sistema:

$$S_2 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 80 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

A segunda equação é, em ambos os membros, o quádruplo da primeira equação, representando, assim, a mesma informação. Algumas das infinitas soluções de S_2 são (1, 19), (2, 18), (3, 17) e (5,3; 14,7). Note que essas soluções são do tipo $(20 - \alpha, \alpha)$, com $0 < \alpha < 20$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Logo, $S = \{(20 - \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < \alpha < 20\}$ e S_2 é um **sistema possível e indeterminado (SPI)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura abaixo.



Note que os gráficos que representam as duas equações são segmentos de reta contidos em retas coincidentes e apresentam infinitos pontos em comum.

c) Para essa situação, construímos o sistema:

$$S_3 = \begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 4y = 60 \end{cases}, \text{ com } x > 0 \text{ e } y > 0$$

Resolvendo S_3, temos:

$$\begin{cases} -\cancel{4x} - \cancel{4y} = -80 \\ \cancel{4x} + \cancel{4y} = 60 \end{cases}$$
$$\overline{0x + 0y = -20 \Rightarrow 0 = -20 \text{ (sentença falsa)}}$$

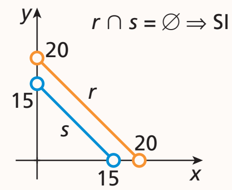
MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Não há valores para x e y que tornem a sentença verdadeira. Portanto, $S = \varnothing$ e S_3 é um **sistema impossível (SI)**.

Representando graficamente o sistema, obtemos segmentos de reta, contidos nas retas r e s, conforme mostra a figura abaixo.



ADILSON SECCO

Note que os gráficos que representam as duas equações são segmentos de reta contidos em retas paralelas distintas e não possuem pontos em comum.

R4. Balancear a seguinte equação química pelo método algébrico:

$$Fe_3O_4 + CO \rightarrow FeO + CO_2$$

▸ Resolução

Para balancear a equação, o número de átomos dos reagentes (primeiro membro da equação) deve ser igual ao número de átomos dos produtos obtidos (segundo membro da equação).

Assim, atribuímos as incógnitas a, b, c e d para as substâncias:

$$a\ Fe_3O_4 + b\ CO \rightarrow c\ FeO + d\ CO_2$$

Agora, montamos o sistema de equações lineares:

Ferro:
No primeiro membro, temos 3 átomos de Fe para a incógnita a.
No segundo membro, temos 1 átomo de Fe para a incógnita c.
Com esses dados, construímos a primeira equação do sistema:
$3a = c$

Oxigênio:
No primeiro membro, temos 4 átomos de oxigênio para a incógnita a e 1 átomo de oxigênio para a incógnita b.

No segundo membro, temos 1 átomo de oxigênio para a incógnita c e 2 átomos de oxigênio para a incógnita d.

Com esses dados, construímos a segunda equação do sistema:

$4a + b = c + 2d$

Carbono:
No primeiro membro, temos 1 átomo de carbono para a incógnita b.
No segundo membro, temos 1 átomo de carbono para a incógnita d.
Com esses dados, temos a terceira equação do sistema:
$b = d$

Logo, obtemos:

$$\begin{cases} 3a = c \text{ (I)} \\ 4a + b = c + 2d \text{ (II)} \\ b = d \text{ (III)} \end{cases}$$

Na equação (II), vamos substituir c por $3a$ e b por d. Assim, temos:
$4a + d = 3a + 2d \Rightarrow a = d$

Disso decorre que $a = b = d$ e $3a = c$.

O sistema é possível e indeterminado, pois temos três equações e quatro incógnitas e admite, trivialmente, a solução em que os valores de a, b, c e d são todos nulos. Fazendo $d = \alpha$, temos a solução geral $S = (\alpha, \alpha, 3\alpha, \alpha)$ do sistema. Precisamos dos menores valores inteiros e positivos para balancear a equação. Assim, fazemos $\alpha = 1$ e obtemos a solução (1, 1, 3, 1).

Agora, substituímos as incógnitas pelos valores obtidos:

$$1\ Fe_3O_4 + 1\ CO \rightarrow 3\ FeO + 1\ CO_2$$

Portanto, a equação balanceada é:

$$Fe_3O_4 + CO \rightarrow 3\ FeO + CO_2$$

No exercício R4, o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT101** da BNCC, de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, é favorecido ao propor o balanceamento de uma equação química pelo metódo algébrico.

Pensamento computacional

Abstração

Ao analisar um problema para determinar quais informações são relevantes e estão diretamente relacionadas à resolução desse problema, pratica-se um dos pilares do pensamento computacional: a **abstração**.

- Quais são as informações relevantes para montar o sistema linear que resolve o balanceamento da equação química apresentada no exercício **R4**? Cite uma informação que não interfere na resolução.

As informações importantes são a quantidade de átomos de cada elemento químico e os coeficientes de cada reagente. Uma informação que não interfere no balanceamento é o nome de cada elemento químico.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

13. Classifique os sistemas em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ SPD

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$ SPI

c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$ SI

d) $\begin{cases} x = 3 + y \\ y = x - 3 \end{cases}$ SPI

14. Calcule k tal que o sistema $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 8 \\ 3x - 2y + kz = 0 \end{cases}$ seja:

a) possível e indeterminado; $k = 0$

b) possível e determinado. $k \neq 0$

15. Considere o sistema: $\begin{cases} 6x + 3y = a \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$ a) sim, $a = \frac{15}{2}$; $S = \left\{\left(\frac{5 - 2\alpha}{4}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

a) Existe algum valor de a que torne o sistema possível e indeterminado? Caso exista, resolva o sistema para o valor encontrado.

b) Existe algum valor de a que torne o sistema possível e determinado? Caso exista, resolva o sistema para o valor encontrado. não

No exercício proposto **16**, o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT101** da BNCC, de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, é favorecido ao propor o balanceamento de uma equação química pelo método algébrico.

16. Use o método algébrico para fazer o balanceamento da equação química a seguir. $2\,H_2 + O_2 \rightarrow 2\,H_2O$

$$H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$$

17. Reescreva o sistema do exercício **15** com um valor para a, de modo que o sistema seja impossível. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3.3 Sistemas lineares homogêneos

Quando todos os termos independentes de um sistema linear são nulos, o sistema é denominado **homogêneo**.

Exemplos

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 6y + z - t = 0 \\ 0x + 3y - z + 5t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 8y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \\ 7x - 2z = 0 \end{cases}$

Todo sistema linear homogêneo com n incógnitas admite a ênupla (0, 0, ..., 0) como solução. Essa solução é chamada de **solução nula, trivial** ou **imprópria**.

Qualquer solução diferente de (0, 0, ..., 0) para um sistema homogêneo é chamada de **não nula, não trivial** ou **própria**.

Reflita

Existe algum sistema linear homogêneo que não tenha, pelo menos, uma solução? Por quê?

Não. Porque, pelo menos, sempre há a solução trivial ou infinitas soluções.

Exercício resolvido

R5. Determinar a, b e c para que o sistema $\begin{cases} 3x + 4y - 7z = c + a \\ -2x + y + 2z = 1 - c \\ x - y + z = a - b \end{cases}$ de incógnitas x, y e z seja homogêneo.

▶ **Resolução**

O sistema é homogêneo se: $\begin{cases} c + a = 0 \Rightarrow a = -c \\ 1 - c = 0 \Rightarrow c = 1 \\ a - b = 0 \Rightarrow a = b \end{cases}$

Como $c = 1$ e $a = -c$, temos $a = -1$. E, como $a = b$, temos $b = -1$.

Logo, para que o sistema seja homogêneo, devemos ter $a = -1$, $b = -1$ e $c = 1$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

18. Calcule m e n para que os sistemas abaixo, de incógnitas x e y, tenham a mesma solução. $m = 1$ e $n = 3$

$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y = 6 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x - y = m \\ x + y = n \end{cases}$

19. Dado o sistema homogêneo de incógnitas x, y e z, determine a, b e c.

$a = 2$, $b = -3$ e $c = -4$

$\begin{cases} x + y + z = a - 2 \\ x + 2y + 3z = 2a + c \\ x - y + 2z = a + 2b - c \end{cases}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3.4 Matrizes associadas a um sistema

O desenvolvimento da competência específica **4** da BNCC é favorecido nesse tópico uma vez que os alunos deverão trabalhar diferentes registros de representação matemática de um sistema de equações lineares.

Todo sistema linear pode ser associado a matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Exemplos

a) Vamos considerar o sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$

- Chamamos de **matriz associada incompleta** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, formada apenas pelos coeficientes das incógnitas.
- Chamamos de **matriz associada completa** a matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$, formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes.

b) Para o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \\ -x - y = -5 \end{cases}$, definimos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

matriz associada incompleta — matriz associada completa

Quando uma das incógnitas do sistema não aparece em alguma das equações, seu coeficiente é nulo.

Representação matricial de um sistema

Aplicando a definição de multiplicação de matrizes e o conceito de matriz incompleta associada a um sistema, é possível representar um sistema em forma de equação matricial.

Exemplos

a) Sistema: $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 7x - 4y = -1 \end{cases}$

Representação matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Podemos verificar essa representação matricial efetuando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \quad \rightarrow \quad 1x + 3y = 7$$

$$\begin{matrix} 7 & -4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \quad \rightarrow \quad 7x - 4y = -1$$

b) Sistema: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

Representação matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Podemos verificar essa representação matricial efetuando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \quad \rightarrow \quad 1x - 2y + 1z = 3$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \quad \rightarrow \quad 1x + 0y + 2z = 1$$

Exercício resolvido

R6. Resolver o sistema linear associado à equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

▸ **Resolução**

O sistema correspondente à equação é: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

Pelo método da adição, obtemos $5x = 5$. Assim, $x = 1$ e $y = 2$.

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1, 2)\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

21. a) $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

20. Escreva a matriz incompleta N e a matriz completa M para cada um dos sistemas.

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ x + 2z = 10 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$

21. Dadas as matrizes completas, escreva os sistemas associados a elas.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

22. Escreva o sistema correspondente a:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$

23. Verifique se $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ é solução da equação matricial:

$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sim

24. Determine quais dos ternos ordenados são soluções do sistema linear: alternativas b, c, d

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) (1, 1, 1)
b) (0, 0, 0)
c) (−3, 1, 2)
d) (3, −1, −2)
e) (−1, 1, 0)

25. Elabore um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas. Escreva a equação matricial associada a esse sistema. resposta pessoal

26. Escreva o sistema associado a cada equação matricial. Em seguida, resolva-o.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2, 8)\}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow S = \{(1, 2, 3)\}$

4 Escalonamento de sistemas lineares

20. a) $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

4.1 Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares são **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto solução.

Indica-se que o sistema S_1 é equivalente ao sistema S_2 por: $S_1 \sim S_2$

Exemplo

Sejam os sistemas:

$S_1 = \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $S_2 = \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

Resolvendo o sistema S_1, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \cancel{y} = 7 \\ -x - \cancel{y} = -5 \end{cases}$$
$$x = 2$$

Como $x = 2$, obtemos $y = 3$.
Logo, o conjunto solução de S_1 é $S = \{(2, 3)\}$.
Resolvendo o sistema S_2, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = 9 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + \cancel{3y} = 27 \\ 7x - \cancel{3y} = 5 \end{cases}$$
$$16x = 32 \Rightarrow x = 2$$

Como $x = 2$, obtemos $y = 3$.
Logo, o conjunto solução de S_2 é $S = \{(2, 3)\}$.
Como os dois sistemas têm a mesma solução, eles são equivalentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflita

- Resolva o sistema:

$$S_1 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$$

- Siga os passos para obter um novo sistema, que chamaremos de S_2.
  a) Mantenha uma das equações de S_1.
  b) Multiplique por um número real não nulo a equação que foi mantida.
  c) Adicione a equação obtida em **b** à outra equação de S_1.
  d) A equação obtida em **c** será a segunda equação de S_2.
- Verifique que $S_1 \sim S_2$.

Resolvendo pelo método da adição, obtemos:

$$\begin{cases} -\cancel{2x} + 4y = 8 \\ \cancel{2x} - 3y = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 5 \text{ e } x = 6$$

Logo, $S = \{(6, 5)\}$.

- Resposta possível:
  Multiplicando a primeira equação de S_1 por -1 e adicionando à segunda, obtemos:

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -3 \end{cases}$$
$$\overline{x - y = 1}$$

$$S_2 = \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Exercício resolvido

R7. Verificar se os sistemas são equivalentes. $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x - 3y - 6z = 4 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

▸ Resolução

Resolvendo cada um os sistemas, temos:

- $\begin{cases} x + y + 2z = 2 & \text{(I)} \\ 2x + y + 2z = 4 & \text{(II)} \\ 3x + 2y + 4z = 6 & \text{(III)} \end{cases}$

Da equação (I), temos: $x = 2 - y - 2z$

Substituindo na equação (II), temos:

$2(2 - y - 2z) + y + 2z = 4 \Rightarrow 2y - 2z = 0 \Rightarrow y = -2z$

Substituindo em $x = 2 - y - 2z$, temos:

$x = 2 - (-2z) - 2z \Rightarrow x = 2$

Substituindo $x = 2$ e $y = -2z$ na equação (III), temos:

$3 \cdot 2 + 2(-2z) + 4z = 6 \Rightarrow 0z = 0$

A equação $0z = 0$ admite solução $z = \alpha$, sendo α real.

Substituindo em $y = -2z$, temos: $y = -2\alpha$

Logo, o conjunto solução é $S = \{(2, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- $\begin{cases} x - y - 2z = 2 & \text{(I)} \\ 2x - 3y - 6z = 4 & \text{(II)} \\ x + 2y + 4z = 2 & \text{(III)} \end{cases}$

Da equação (I), temos: $x = 2 + y + 2z$

Substituindo na equação (II), temos:

$2(2 - y - 2z) + 3y - 6z = 4 \Rightarrow y - 2z = 0 \Rightarrow y = -2z$

Substituindo em $x = 2 + y + 2z$, temos:

$x = 2 - 2z + 2z \Rightarrow x = 2$

Substituindo $x = 2$ e $y = -2z$ na equação (III), temos:

$2 + 2(-2z) + 4z = 2 \Rightarrow 0z = 0$

A equação $0z = 0$ admite solução $z = \alpha$, sendo α real.

Substituindo em $y = -2z$, temos: $y = -2\alpha$

Logo, o conjunto solução é $S = \{(2, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Como os dois sistemas têm a mesma solução, eles são equivalentes.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

27. Determine a e b de modo que sejam equivalentes os sistemas: $a = 0$ e $b = 1$

$$S_1 = \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$

28. Calcule m e n tal que as equações matriciais representem sistemas lineares equivalentes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} m & 5 \\ 4 & -n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$

29. Nos sistemas possíveis e determinados S_1, S_2 e S_3 a seguir, observe que:

- a segunda equação de S_2 foi obtida pela adição da segunda equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por 2 ($E = B + 2 \cdot A$);
- a terceira equação de S_2 foi obtida pela adição da terceira equação de S_1 com a primeira equação de S_1 multiplicada por 3 ($F = C + 3 \cdot A$);
- a terceira equação de S_3 foi obtida pela adição da terceira equação de S_2 com a segunda equação de S_2 multiplicada por 4 ($I = F + 4 \cdot E$).

$$S_1 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(A)} \\ 2x + 5y + 4z = -2 & \text{(B)} \\ 3x + 2y + z = 3 & \text{(C)} \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(D)} \\ y + 2z = 0 & \text{(E)} \\ -4y - 2z = 6 & \text{(F)} \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} -x - 2y - z = 1 & \text{(G)} \\ y + 2z = 0 & \text{(H)} \\ 6z = 6 & \text{(I)} \end{cases}$$

O objetivo deste exercício é fazer com que os alunos comecem a se familiarizar com a forma escalonada dos sistemas. Esse assunto será abordado no próximo tópico.

Determine a solução de S_3 e verifique se ela também é solução de S_2 e de S_1, isto é, verifique se S_1, S_2 e S_3 são sistemas equivalentes. (2, −2, 1); sim

- Resolvendo pelo método da adição, obtemos:

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 5 \text{ e } x = 6$$

Assim, $S = \{(6, 5)\}$.

Portanto, $S_1 \sim S_2$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4.2 Sistema escalonado

Para resolver e classificar sistemas lineares, podemos recorrer ao processo do escalonamento, ou método da eliminação de Gauss-Jordan.

Antes de estudar o método, veremos o que são sistemas escalonados e o modo de resolvê-los e classificá-los.

Um sistema em que todas as equações apresentam as incógnitas na mesma ordem é dito **escalonado** quando, de cada equação para a seguinte, aumenta a quantidade de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo.

Exemplos

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 0x + 2y - z = 3 \\ 0x + 0y + z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ 0x + 3y + 2z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + 2z - 3t = 7 \\ 0x + 0y + 5z + t = 2 \end{cases}$

Exercício resolvido

R8. Resolver e classificar os sistemas lineares a seguir.

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 2y - z = 3 \\ z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 6y - 3z = 5 \\ y - 3z = 8 \\ 0z = 2 \end{cases}$

▸ Resolução

a) Como o sistema já está escalonado, temos $z = 5$.

Substituindo z por 5 na segunda equação, obtemos:

$2y - 5 = 3 \Rightarrow y = 4$

Substituindo z por 5 e y por 4 na primeira equação, obtemos:

$2x - 4 + 5 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, há uma só solução $\left(\frac{1}{2}, 4, 5\right)$.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) O sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2y - 6z = 0 \end{cases}$ possui duas equações e três incógnitas.

Se o sistema admite solução com $z = \alpha$, sendo α real, temos:

$\begin{cases} x + 2y - \alpha = 4 \\ 2y - 6\alpha = 0 \end{cases}$

Resolvendo esse novo sistema, encontramos $y = 3\alpha$ e $x = 4 - 5\alpha$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Por exemplo, fazendo $\alpha = -6$, obtemos o terno $(34, -18, -6)$, que satisfaz o sistema.

Como α é um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI).

Portanto, a solução do sistema será do tipo $(4 - 5\alpha, 3\alpha, \alpha)$, em que α é real.

c) Na equação $0z = 2$, do sistema $\begin{cases} x + 6y - 3z = 5 \\ y - 3z = 8 \\ 0z = 2 \end{cases}$, não há valores para z que tornem a igualdade verdadeira, pois toda multiplicação por zero resulta em zero. Sem solução, o sistema é impossível (SI).

Observação

Quando um sistema admite infinitas soluções (SPI), chamamos a variável que assume o valor α, real, de **variável livre**. No item **b**, *z* é a variável livre.
Há sistemas com mais de uma variável livre.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4.3 O processo do escalonamento

Para escalonar um sistema linear, escrevemos sistemas equivalentes a ele, adotando, quantas vezes for necessário, total ou parcialmente, o seguinte procedimento:

I) invertemos a ordem das equações;

II) multiplicamos ambos os membros de uma equação por um mesmo número, real e não nulo;

III) substituímos uma equação pela adição dela com outra multiplicada por um número real não nulo.

Observação

Se todos os termos de uma equação linear forem multiplicados por um mesmo número não nulo, a solução da equação não será alterada.

Exemplos

a) Para escalonar o sistema $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y - 3z = 5 \\ 3x - y - 5z = 10 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º) Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita da 2ª e da 3ª equações.

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -2 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação:	Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -3 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação:	Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos:
$\begin{array}{r} -\cancel{2x} + 4y + 2z = -6 \\ \cancel{2x} - 3y - 3z = 5 \\ \hline y - z = -1 \end{array}$	$\begin{array}{r} -\cancel{3x} + 6y + 3z = -9 \\ \cancel{3x} - y - 5z = 10 \\ \hline 5y - 2z = 1 \end{array}$	$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ y - z = -1 \\ 5y - 2z = 1 \end{cases}$

2º) Para anular o coeficiente da incógnita y da nova 3ª equação, multiplicamos a nova 2ª equação por -5 e adicionamos o produto obtido com a nova 3ª equação:

$$\begin{array}{r} -\cancel{5y} + 5z = 5 \\ \cancel{5y} - 2z = 1 \\ \hline 3z = 6 \end{array}$$

3º) Após substituir a 3ª equação pela soma obtida, temos um sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ y - z = -1 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Agora, podemos obter a solução do sistema:

- Da 3ª equação, obtemos $z = 2$.
- Substituindo z por 2 na 2ª equação, obtemos $y = 1$.
- Substituindo z por 2 e y por 1 na 1ª equação, obtemos $x = 7$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(7, 1, 2)\}$.

b) Para escalonar o sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 7 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º) Como 1ª equação, escolhemos aquela cuja 1ª incógnita tenha coeficiente não nulo e, se possível, igual a 1 ou a -1, o que simplifica o processo. Assim, invertemos a posição da 1ª e da 2ª equação:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 & \text{(2ª equação no sistema original)} \\ 3x - y + z = 5 & \text{(1ª equação no sistema original)} \\ 2x + 3y - z = 7 & \text{(3ª equação no sistema original)} \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2º) Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita da 2ª e da 3ª equações.

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -3 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação:

$$\begin{array}{r} -\cancel{3x} - 3y + 6z = -9 \\ \cancel{3x} - y + z = 5 \\ \hline -4y + 7z = -4 \end{array}$$

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -2 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação:

$$\begin{array}{r} -\cancel{2x} - 2y + 4z = -6 \\ \cancel{2x} + 3y - z = 7 \\ \hline y + 3z = 1 \end{array}$$

Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ -4y + 7z = -4 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$$

3º) No sistema obtido, invertemos a posição entre a 2ª e a 3ª equações:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ y + 3z = 1 & \text{(3ª equação no sistema anterior)} \\ -4y + 7z = -4 & \text{(2ª equação no sistema anterior)} \end{cases}$$

4º) Para anular o coeficiente da incógnita y da nova 3ª equação, multiplicamos a nova 2ª equação por 4 e adicionamos o produto obtido com a nova 3ª equação:

$$\begin{array}{r} \cancel{4y} + 12z = 4 \\ -\cancel{4y} + 7z = -4 \\ \hline 19z = 0 \end{array}$$

5º) Após substituir a 3ª equação pela soma obtida, temos um sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ y + 3z = 1 \\ 19z = 0 \end{cases}$$

A resolução do sistema fica, então, facilitada:

- Da 3ª equação, obtemos $z = 0$.
- Substituindo z por 0 na 2ª equação, obtemos $y = 1$.
- Substituindo z por 0 e y por 1 na 1ª equação, obtemos $x = 2$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(2, 1, 0)\}$.

c) Para escalonar o sistema $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = -3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, adotamos os seguintes passos:

1º) Invertemos a ordem das equações: passamos a 3ª equação para o lugar da 1ª equação e vice-versa, o que simplifica o processo, conforme foi visto no exemplo **b**.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & \text{(3ª equação do sistema original)} \\ 2x - y - z = -3 & \text{(2ª equação do sistema original)} \\ 3x + 2y + 2z = -1 & \text{(1ª equação do sistema original)} \end{cases}$$

2º) Anulamos os coeficientes da 1ª incógnita nas demais equações.

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -2 com a 2ª equação, gerando uma nova 2ª equação:

$$\begin{array}{r} -\cancel{2x} - 2y - 2z = 0 \\ \cancel{2x} - y - z = -3 \\ \hline -3y - 3z = -3 \end{array}$$

Adicionamos, membro a membro, a 1ª equação multiplicada por -3 com a 3ª equação, gerando uma nova 3ª equação:

$$\begin{array}{r} -\cancel{3x} - 3y - 3z = 0 \\ \cancel{3x} + 2y + 2z = -1 \\ \hline -y - z = -1 \end{array}$$

Substituindo a 2ª e a 3ª equações pelas novas equações, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 3z = -3 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

3º) Para anular o coeficiente da incógnita y da 3ª equação no sistema obtido, dividindo a 2ª equação por -3 e adicionando, membro a membro, a nova 2ª equação com a 3ª equação, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Este último é um sistema escalonado equivalente ao sistema original.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reforçar com os estudantes que a **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*, é aplicada ao escalonarmos um sistema linear, pois a resolução do sistema se dá em função de suas partes (cada uma das equações) de modo que, ao encontrar a solução de cada uma delas, encontra-se a solução que satisfaz o sistema como um todo. Além disso, o próprio escalonamento é um padrão de resolução de sistemas lineares, portanto, pode-se citar que o reconhecimento de padrões também se faz presente.

A equação $0z = 0$ admite a solução $z = \alpha$, em que α é um número real. Admitindo a solução $z = \alpha$, sendo α real, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y + \alpha = 0 \\ \quad\;\; y + \alpha = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse novo sistema, encontramos $y = 1 - \alpha$ e $x = -1$.

Atribuindo valores reais a α, obtemos soluções do sistema. Por exemplo, fazendo $\alpha = 3$, obtemos o terno $(-1, -2, 3)$, que satisfaz o sistema.

Como α representa um número real qualquer, o sistema tem infinitas soluções, ou seja, é um sistema possível e indeterminado (SPI). Então, a solução do sistema é do tipo $(-1, 1 - \alpha, \alpha)$, em que α é um número real.

Portanto, $S = \{(-1, 1 - \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema.

Exercício resolvido

R9. Escalonar e resolver o sistema: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 4x - 6y + 8z = 16 \\ 4x - 7y + 6z = 15 \end{cases}$

▸ Resolução

Multiplicamos a 1ª equação por -4 e a adicionamos à 2ª, gerando uma nova 2ª equação. Multiplicamos a 1ª equação por -4 e a adicionamos à 3ª, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2y + 4z = 4 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$	Dividimos a 2ª equação por 2: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$	Multiplicamos a 2ª equação por -1 e a adicionamos à 3ª, gerando uma nova 3ª equação: $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 2 \\ 0z = 1 \end{cases}$

A nova 3ª equação não admite solução.

Logo, o sistema é impossível (SI) e, portanto, $S = \varnothing$.

32. **a)** $S = \{(2, 3)\}$ **b)** $S = \{(3, -1)\}$ **c)** $S = \{(8, -1)\}$ **d)** $S = \{(-1, -3)\}$

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

30. Elabore um sistema de equações escalonado com três equações e três incógnitas e peça a um colega que o resolva. Você também deve resolver o sistema escalonado elaborado pelo seu colega. resposta pessoal

31. Resolva e classifique os sistemas escalonados.

a) $\begin{cases} -3x + 5y = -11 \\ \qquad\quad 2y = -2 \end{cases}$ $S = \{(2, -1)\}$; SPD

b) $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ \qquad y - z = 0 \end{cases}$ $S = \{(1, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI

c) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + z = 3 \\ -4z = 4 \end{cases}$ $S = \{(3, -2, -1)\}$; SPD

d) $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ \qquad y + 3z = 1 \end{cases}$ $S = \{(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI

32. Escalone e resolva os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2y = 34 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$

33. Escalone, resolva e classifique os sistemas.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -2 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 4z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + z = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 5x + 2y + z = 3 \\ 6x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

33. **a)** $S = \{(1, 3)\}$; SPD **b)** $S = \varnothing$; SI **c)** $S = \varnothing$; SI **d)** $S = \{(1, 2, -2)\}$; SPD **e)** $S = \left\{\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI **f)** $S = \left\{\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; SPI

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Essa seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT301** e das competências específicas **3** e **4** da BNCC, pois os alunos deverão resolver problemas que envolvam equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas e gráficas, empregando diferentes registros de representação.

Aplicação

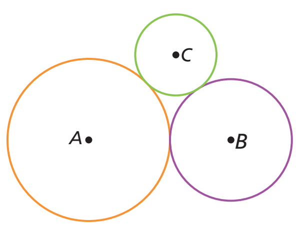
1. Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ de modo que $(2, k)$ seja solução da equação $3kx - ky + 40 = 0$, de incógnitas x e y. 10 ou −4

2. (Unicamp-SP) O IBGE contratou um certo número de entrevistadores para realizar o recenseamento em uma cidade. Se cada um deles recenseasse 100 residências, 60 delas não seriam visitadas. Como, no entanto, todas as residências foram visitadas e cada recenseador visitou 102, quantas residências tem a cidade? 3.060 residências

3. Determine o valor de m, $\in \mathbb{R}$, de modo que $(2m, -m)$ seja solução do sistema:

$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 3mx - y = 5 \end{cases}$, de incógnitas x e y. −1

4. Em determinada região da cidade, existem três delegacias de polícia (A, B e C). O raio de atuação de cada delegacia varia de acordo com sua quantidade de funcionários (conforme mostra a figura).



ADILSON SECCO

A distância entre as delegacias A e B é 18 km, entre A e C é 16 km e entre B e C é 12 km. Determine o raio de atendimento de cada delegacia, admitindo que as circunferências sejam tangentes entre si.
$r_A = 11$ km, $r_B = 7$ km e $r_C = 5$ km

5. Dadas as equações $y = 2x - 6$ e $y = 2x - 4$:

a) represente, em um mesmo sistema de coordenadas, as funções dadas por essas expressões; Ver resolução no Guia do professor.

b) interprete os gráficos construídos no item **a** e dê o conjunto solução do sistema formado pelas equações. $S = \varnothing$

6. (Mackenzie-SP) Um supermercado vende três marcas diferentes, A, B e C, de sabão em pó embalados em caixas de 1 kg. O preço da marca A é igual à metade da soma dos preços das marcas B e C. Se um cliente paga R$ 14,00 pela compra de dois pacotes do sabão A, mais um pacote do sabão B e mais um do sabão C, o preço que ele pagaria por três pacotes do sabão A seria: alternativa b

a) R$ 12,00
b) R$ 10,50
c) R$ 13,40
d) R$ 11,50
e) R$ 13,00

7. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema abaixo tenha solução única. 9

$$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$$

8. O sistema linear $\begin{cases} (\lambda + 1)x + y = 0 \\ x + \lambda y = 3 \end{cases}$, de incógnitas x e y, admite solução $(x, 0)$. Determine o valor de λ. −1

9. (Fuvest-SP) Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas tem, respectivamente, 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custa, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3.300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas. 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas

10. Classifique os sistemas lineares abaixo e determine o correspondente conjunto solução.

a) $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ SPD; $S = \left\{\left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ SPI; $S = \{(\alpha, 4 - 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

11. (Fuvest-SP) Durante uma viagem, choveu 5 vezes. A chuva caía pela manhã ou à tarde, nunca o dia todo. Houve 6 manhãs e 3 tardes sem chuva. Quantos dias durou a viagem? alternativa b

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10

12. (UFJF-MG) A tabela abaixo fornece a quantidade de proteína, carboidrato e gordura, contida em cada grama dos alimentos A, B, C e D.

Alimentos	Unidades de proteína	Unidades de carboidrato	Unidades de gordura
A	4	4	2
B	6	1	3
C	6	2	3
D	2	3	1

Um nutricionista deseja preparar uma refeição, composta somente por esses alimentos, que contenha exatamente 50 unidades de proteínas, 21 unidades de carboidrato e 24 unidades de gordura. Então, quanto às maneiras de se combinarem quantidades desses quatro alimentos, em números inteiros de gramas, para compor tal refeição, é correto afirmar que: alternativa a

a) não existe tal maneira.
b) existe uma única maneira.
c) existem exatamente duas maneiras.
d) existem exatamente três maneiras.
e) existem infinitas maneiras.

Nesse bloco de exercícios os estudantes vão se deparar com situações a partir das quais devem montar sistemas lineares e, para isso, precisam extrair informações relevantes, colocando em prática habilidades de um dos pilares do *pensamento computacional*: a **abstração**. Se julgar oportuno, para enriquecer a seção, solicitar aos estudantes que, a partir do sistema do exercício 2, criem outra situação cuja abstração resulte no mesmo sistema linear.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

17. a) Sendo x a quantidade de amendoim, y a quantidade de castanha de caju e z a quantidade de castanha-do-pará, todas em quilograma: $\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$

13. (Enem) A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{dose da criança} = \left(\frac{\text{idade da criança (em ano)}}{\text{idade da criança (em ano)} + 12}\right) \cdot \text{dose do adulto}$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que algumas horas antes foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta.

Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a: alternativa b

a) 15
b) 20
c) 30
d) 36
e) 40

14. Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 12z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$S = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

15. (Unipar-PR) Sobre o sistema linear $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=4 \end{cases}$ é correto afirmar que é: alternativa c

a) possível e determinado.
b) possível e indeterminado.
c) impossível.
d) homogêneo.
e) inclassificável.

16. Resolva os sistemas lineares a seguir.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $S = \left\{\left(5, -2, \frac{5}{3}\right)\right\}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $S = \{(0, 1, 2, 3)\}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ $S = \{(3, 1, 5)\}$

17. (Unicamp-SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo do amendoim custa R$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R$ 20,00, e o quilo da castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura, e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser R$ 5,75.

Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das quantidades das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita.

b) Resolva o referido sistema e determine as quantidades, em grama, de cada ingrediente por lata.
amendoim: 250 g; castanha de caju: 125 g; castanha-do-pará: 125 g

18. Resolva, por escalonamento, o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 4 \\ 3x - 3y + z - t = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -x - y + 2t = 6 \end{cases}$$

$S = \{(1, -1, 2, 3)\}$

Aprofundamento

19. Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$$

$S = \{(21, 6)\}$

20. Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{u} + \dfrac{3}{v} = 8 \\ \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = -1 \end{cases}$$

$S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

21. Sabendo que o sistema é possível e não admite solução trivial, determine k.

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = k \\ 3x + 2y + 5z = k \\ x + \dfrac{y}{2} + 2z = k^2 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}$

Desafio

22. (Fuvest-SP) Considere o sistema:

$$\begin{cases} x - my = 1 - m \\ (1 + m)x + y = 1 \end{cases}$$

a) Prove que o sistema admite solução única para cada número real m. Ver resolução no Guia do professor.

b) Determine m de modo que o valor de x seja o maior possível. $-\frac{1}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. A equação que, com $2x + 2y = 2$, compõe um sistema linear 2×3 é: alternativa a

a) $y - z = 0$
b) $3x + 3y = 3$
c) $xy + xz + yz = 3$
d) $x^3 + y^3 = 8$
e) $xyz = 0$

2. Em um plano cartesiano, a intersecção de duas retas concorrentes necessariamente representa a solução de um sistema linear 2×2: alternativa e

a) possível e indeterminado.
b) indeterminado.
c) homogêneo.
d) escalonado.
e) possível e determinado.

3. Para que os sistemas $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ sejam equivalentes, o valor de a deve ser: alternativa c

a) 5 b) 4 c) 9 d) 12 e) 10

4. Um sistema linear homogêneo não pode ser: alternativa a

a) SI
b) SPD
c) SPI
d) 2×3
e) 3×2

5. Para que $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ (a + 3)x + y = 5 \end{cases}$ seja um sistema escalonado, o valor de a deve ser: alternativa d

a) 2 b) 3 c) 0 d) -3 e) -5

6. A equação matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ corresponde ao sistema: alternativa b

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

7. Dos sistemas

$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x - 2y = 5 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ y + 5z = 17 \\ 22z = 67 \end{cases}$

pode-se dizer que: alternativa b

a) não têm solução.
b) são equivalentes.
c) têm infinitas soluções.
d) são homogêneos.
e) são indeterminados.

8. Em uma loja, os artigos A e B, custam juntos R$ 55,00, os artigos A e C, custam juntos R$ 50,00 e os artigos B e C custam juntos R$ 45,00. A soma dos preços dos artigos A, B e C é: alternativa c

a) R$ 85,00
b) R$ 80,00
c) R$ 75,00
d) R$ 70,00
e) R$ 65,00

9. Uma loja ofereceu a seus clientes a possibilidade de comprar lençóis, fronhas e colchas agrupados nos seguintes jogos:

(I) 2 lençóis e 2 fronhas;
(II) 2 lençóis e 2 colchas;
(III) 1 lençol, 1 fronha e 1 colcha.

O preço de cada peça é o mesmo em qualquer um dos jogos, I, II e III, que são vendidos por R$ 130,00, R$ 256,00 e R$ 143,00, respectivamente. O preço unitário da colcha é: alternativa c

a) R$ 85,00
b) R$ 80,00
c) R$ 78,00
d) R$ 70,00
e) R$ 65,00

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Representar e resolver situações-problema usando sistemas lineares.								X	X
Reconhecer e classificar sistemas lineares.	X	X	X	X			X		
Apresentar sistema linear em forma de equação matricial e vice-versa.						X			
Aplicar o método do escalonamento na resolução de sistemas lineares.					X		X	X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	38 a 40	40 e 41	49 e 50	43 a 47	49 a 54	47 a 49	43 a 50	39 a 41 e 51 a 54	39 a 41 e 51 a 54

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Essa seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT301** da BNCC, pois os alunos deverão resolver problemas do cotidiano que envolvam equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas e gráficas.

Compreensão de texto

Montando uma dieta alimentar com sistemas lineares

Neste artigo, vamos mostrar que o estudo de sistemas lineares indeterminados pode ser útil para abordar um problema nutricional.

O leitor já deve ter reparado que as embalagens de alimentos trazem informações sobre o valor energético, as quantidades de carboidratos, de gorduras, de sódio, proteínas etc. contidas nos produtos e quanto cada uma dessas quantidades representa percentualmente nos Valores Diários de Referência (VDR) para uma alimentação adequada.

Após vasculhar a geladeira e os armários da cozinha, montamos o quadro a seguir, que mostra os valores nutricionais de alguns alimentos encontrados: arroz e feijão *in natura**, peito de frango, suco de laranja pasteurizado e adoçado, pão tipo francês e margarina sem sal.

Principais nutrientes de alguns alimentos

	Arroz (50 g)	Feijão (30 g)	Frango (80 g)	Suco (200 mℓ)	Pão (50 g)	Margarina (14 g)	VDR
Energia (kcal)	190	100	150	120	130	45	2.000
Carboidratos (g)	37	16	8	30	28	0	300
Proteínas (g)	3	7	13	1	4	0	75
Gorduras totais (g)	0	0	6	0	1,5	5	55

Sistema linear

Para montar uma dieta, é preciso determinar as quantidades $x_1, ..., x_6$ (em porções) de cada alimento necessárias para compor o VDR. Isso corresponde a resolver o sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 190x_1 + 100x_2 + 150x_3 + 120x_4 + 130x_5 + 45x_6 = 2.000 \\ 37x_1 + 16x_2 + 8x_3 + 30x_4 + 28x_5 = 300 \\ 3x_1 + 7x_2 + 13x_3 + x_4 + 4x_5 = 75 \\ 6x_3 + 1{,}5x_5 + 5x_6 = 55 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Observe que o sistema (I) possui quatro equações correspondentes ao número de nutrientes, e seis incógnitas, correspondentes ao número de alimentos. A melhor maneira de resolver o sistema é por escalonamento [...], transformando o sistema (I) na forma escalonada reduzida, [sistema (II)].

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}33x_5 + 0{,}17x_6 = 0{,}19 \\ x_2 + 0{,}07x_5 - 1{,}68x_6 = -8{,}05 \\ x_3 + 0{,}25x_5 + 0{,}83x_6 = 9{,}16 \\ x_4 + 1{,}24x_5 + 0{,}45x_6 = 11{,}60 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

[...] nem toda solução matemática é utilizável na situação prática, já que numa dieta é necessário escolher $x_5 \geqslant 0$ e $x_6 \geqslant 0$ de modo que também tenhamos $x_1 \geqslant 0, ..., x_4 \geqslant 0$.

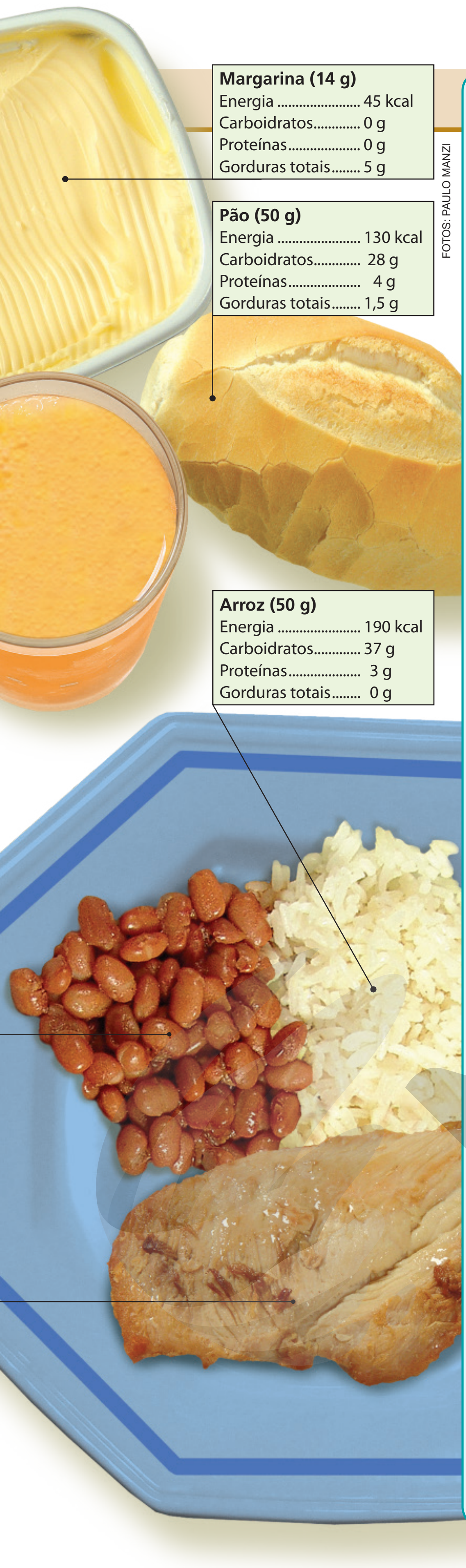
[...]

Fonte: DORNELLES FILHO, Adalberto A. Montando uma dieta com sistemas lineares. *Revista do Professor de Matemática*, n. 59, p. 27-28, 2006.

A contextualização dessa seção remete aos temas contemporâneos relacionados à **saúde** e à **educação alimentar e nutricional**. Chamar a atenção dos alunos para a importância dos nutrientes na alimentação e os cuidados que devemos ter com nosso corpo, como a ingestão diária de água, hábitos alimentares saudáveis e prática de atividade física. O trabalho em grupo exercita a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação. Dessa forma, é favorecido o desenvolvimento das competências gerais **8** e **9** da BNCC. O desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** da BNCC também é favorecido nessa seção porque os alunos deverão utilizar estratégias e trabalhar conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas, além de usar diferentes registros de representação matemáticos.

* *In natura*: no estado natural, sem ter passado por processamento industrial.

MODERNA



FOTOS: PAULO MANZI

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. No texto da página ao lado, quais elementos foram considerados para o estudo dos valores nutricionais dos alimentos escolhidos?
energia, carboidratos, proteínas e gorduras totais

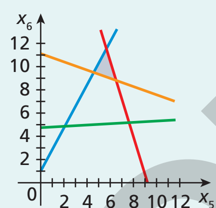
2. Observe, no texto, o sistema (I), obtido com base na tabela dos principais nutrientes.
a) O sistema tem quantas equações? E quantas incógnitas? 4 equações; 6 incógnitas
b) No sistema, a que correspondem cada equação e cada incógnita?
No sistema, cada equação corresponde a um nutriente, e cada incógnita, a um alimento.

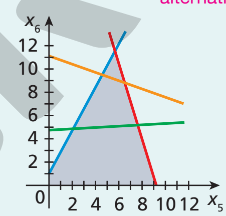
3. Podemos dizer que o sistema é: alternativa b
a) possível e determinado.
b) possível e indeterminado.
c) impossível.
d) homogêneo.

4. Partindo da forma escalonada reduzida, escreva o sistema de modo que x_1, x_2, x_3 e x_4 sejam expressos em função de x_5 e x_6.
Ver resolução no Guia do professor.

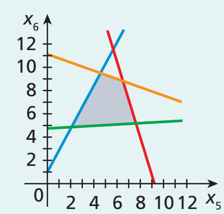
5. Com base no sistema obtido na questão **4**, determine as inequações que relacionam x_6 com x_5 de modo que tenhamos $x_1 \geqslant 0, ..., x_4 \geqslant 0$.

6. Cada inequação obtida na questão **5** corresponde a um semiplano no sistema de eixos x_5 e x_6, e os valores de x_5 e x_6 que satisfazem todas as inequações pertencem à região de intersecção dos semiplanos. Sabendo disso, verifique qual dos gráficos a seguir melhor representa o conjunto solução do sistema formado por essas inequações.
alternativa d

a)


c)


b)


d)


7. De acordo com o gráfico, uma possível dieta composta apenas desses alimentos pode ser obtida escolhendo-se $x_5 = 5$ (250 g de pão) e $x_6 = 6$ (84 g de margarina). Substituindo esses valores no sistema da questão **4**, determine x_1, x_2, x_3 e x_4.

8. Em grupos, façam uma pesquisa levando em consideração estas e/ou outras questões que julgarem interessantes: Ver orientações no Guia do professor.
- Qual é a importância dos nutrientes considerados no texto?
- Qual é a diferença entre **gorduras saturadas** e **gorduras trans**, ingredientes informados na embalagem de alguns alimentos?
- Quais são as funções das **fibras alimentares** e do **sódio** no organismo humano?
- O que seria uma dieta saudável em termos de porcentagem de VD (valores diários), isto é, de quais grupos as porcentagens de VD devem ser maiores e de quais grupos devem ser menores?
- Que atitudes vocês podem tomar para ter uma alimentação mais saudável?

Preparem uma apresentação oral para a turma com os resultados encontrados. Para auxiliar na apresentação, vocês podem fazer cartazes ou usar recursos multimídia.

7. $x_1 = 0{,}82$ (41 g de arroz)
$x_2 = 1{,}68$ (50,4 g de feijão)
$x_3 = 2{,}93$ (234,4 g de frango)
$x_4 = 2{,}7$ (540 mℓ de suco)

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO

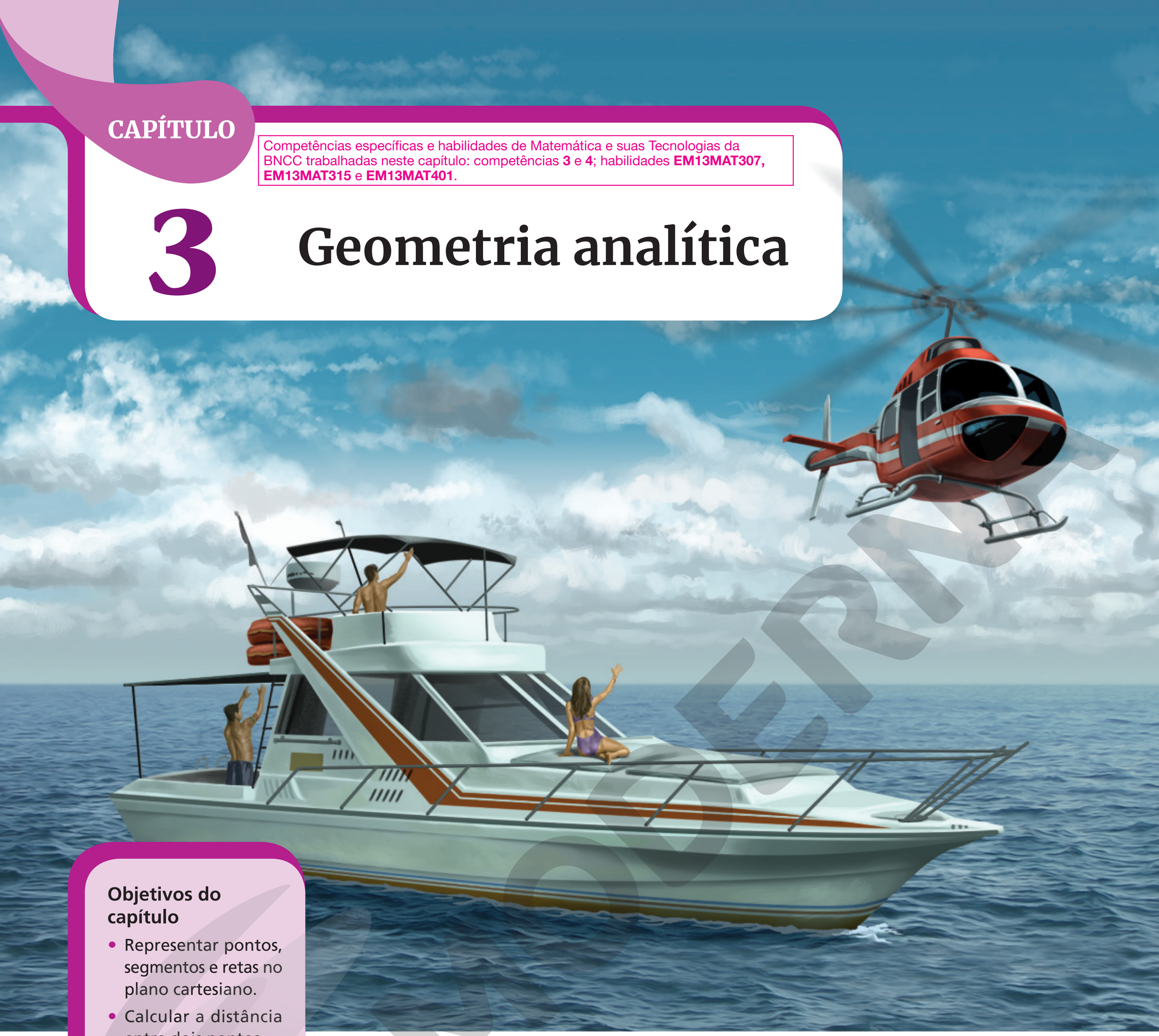
5. $x_6 \leqslant \frac{0{,}33}{0{,}17}x_5 + \frac{0{,}19}{0{,}17}$; $x_6 \geqslant \frac{0{,}07}{1{,}68}x_5 + \frac{8{,}05}{1{,}68}$; $x_6 \leqslant -\frac{0{,}25}{0{,}83}x_5 + \frac{9{,}16}{0{,}83}$; $x_6 \leqslant -\frac{1{,}24}{0{,}45}x_5 + \frac{11{,}60}{0{,}45}$

MODERNA

CAPÍTULO

Competências específicas e habilidades de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competências **3** e **4**; habilidades **EM13MAT307, EM13MAT315** e **EM13MAT401**.

3 Geometria analítica



Objetivos do capítulo

- Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.
- Calcular a distância entre dois pontos.
- Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.
- Discutir posições relativas entre: duas retas; ponto e circunferência; reta e circunferência; duas circunferências.
- Calcular a distância entre ponto e reta.
- Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.
- Calcular a área de um triângulo.

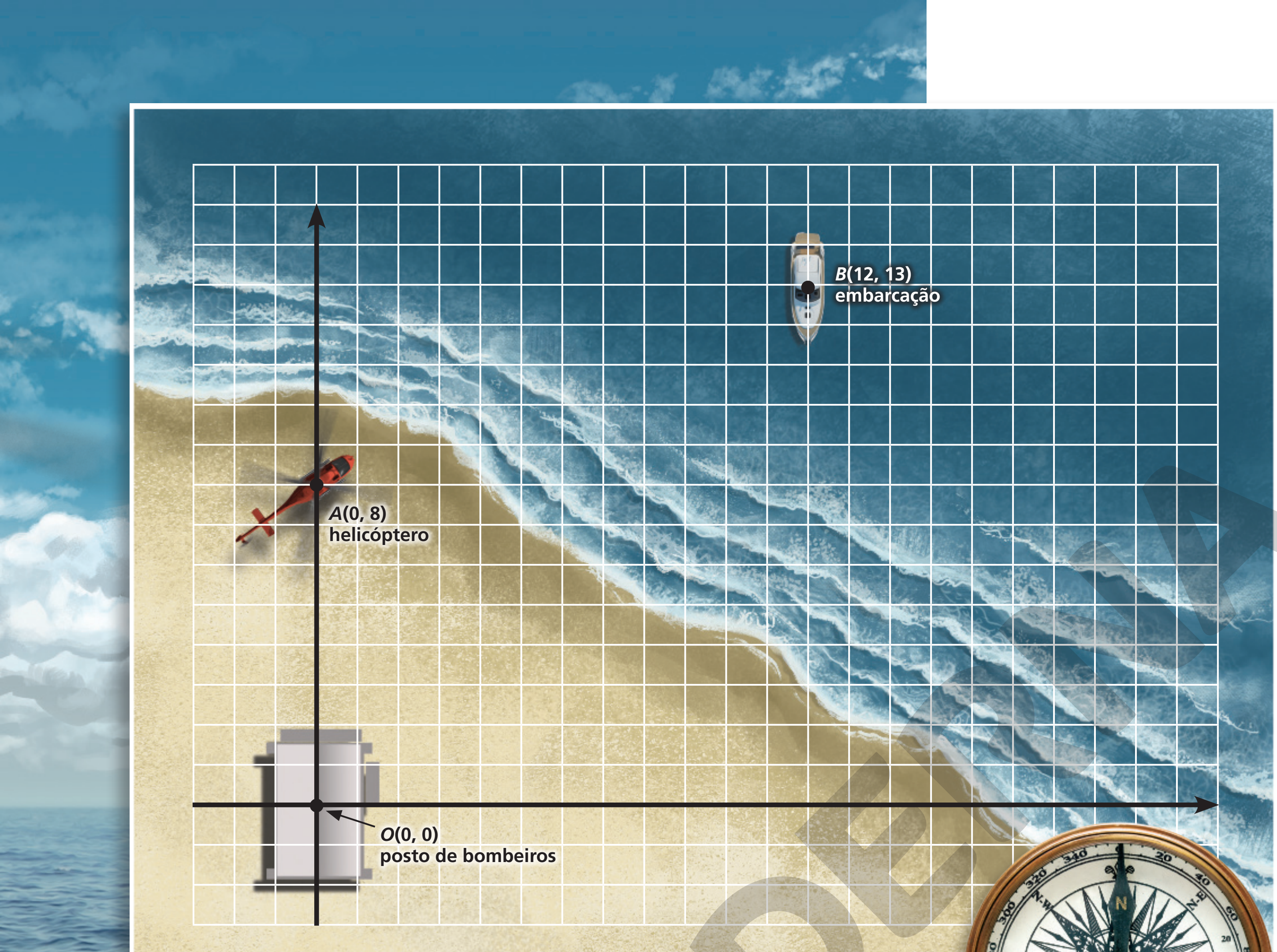
1 Ponto

O corpo de bombeiros de certa cidade litorânea recebeu o chamado de um grupo de pessoas em uma embarcação avariada. Para o resgate, há um helicóptero, que está posicionado a 8 km ao norte do posto de bombeiros local, conforme indica o esquema da página ao lado. Qual é a menor distância que o helicóptero deve percorrer até encontrar a embarcação?

Essa distância é dada pela distância entre o ponto *A* (localização do helicóptero) e o ponto *B* (localização da embarcação), indicados no esquema. Sabemos que a menor distância entre esses pontos é a medida do segmento de extremidades *A* e *B*.

Neste capítulo, veremos como calcular essa distância e resolveremos esse e outros problemas relacionados à Geometria analítica.

A Geometria analítica fundamenta-se no estudo de pontos, retas e curvas, por meio do qual é possível transpor inúmeros problemas geométricos para a linguagem algébrica.



ILUSTRAÇÕES: EBER EVANGELISTA

RANGIZZ/SHUTTERSTOCK

Bússola de latão.

Plano cartesiano

A Geometria analítica estuda curvas e figuras por meio de equações, bem como analisa essas equações por meio de gráficos, estabelecendo relações com a Álgebra e a Geometria, plana e espacial. Assim, uma figura geométrica pode ter suas propriedades analisadas e estudadas por processos algébricos, o que facilita a resolução de vários problemas.

A seguir, faremos um estudo do **ponto** com base no enfoque da Geometria analítica.

Como já estudamos, o **plano cartesiano**, ou **sistema cartesiano ortogonal**, é formado por dois eixos perpendiculares entre si. O eixo *x* (horizontal) é denominado eixo das **abscissas**, e o eixo *y* (vertical) é denominado eixo das **ordenadas**. Os eixos se cruzam no ponto *O*(0, 0), indicado por **origem** das coordenadas do plano cartesiano.

Podemos associar qualquer ponto *P* do plano cartesiano a um único par ordenado (x_P, y_P) de números reais e, reciprocamente, dado um par ordenado (x_P, y_P) de números reais, a ele fica associado um único ponto *P* pertencente ao plano. Dizemos que x_P e y_P são as **coordenadas** de *P*.

MUSEU DO LOUVRE, PARIS

A palavra **cartesiano** tem origem no nome do criador desse sistema de localização de pontos no plano, René Descartes (1596-1650). BOURDON, Sébastien. *Suposto retrato de René Descartes*. 1645. Óleo sobre tela, 88 cm × 71 cm.

Exemplo

Considerando o problema da abertura do capítulo, podemos associar na figura:

- o ponto O (localização do posto de bombeiros) à origem das coordenadas do plano cartesiano (0, 0);
- o ponto A (localização do helicóptero) ao par ordenado (0, 8);
- o ponto B (localização da embarcação) ao par ordenado (12, 13).

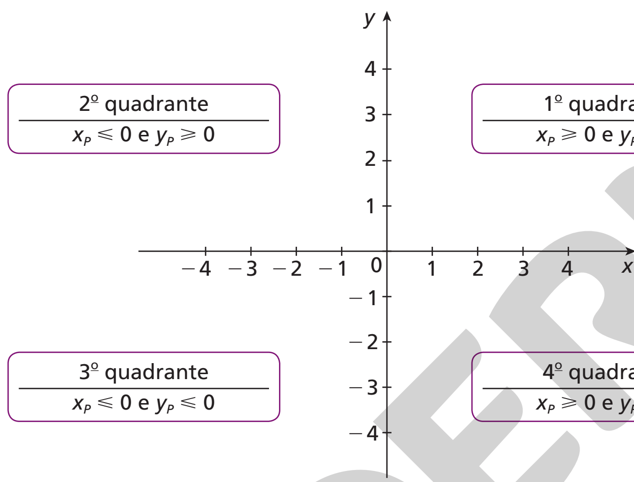
O livro *O caderno secreto de Descartes* (ver na seção *Ampliando os conhecimentos*, na página 153) pode ampliar o conhecimento dos alunos em relação ao assunto; porém, convém lembrar que, como toda obra literária, baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre outras.

Quadrantes

Os eixos do plano cartesiano dividem esse plano em quatro regiões, denominadas quadrantes, que são numeradas no sentido anti-horário conforme indicado abaixo. Observe as condições para que um ponto $P(x_P, y_P)$ pertença a cada quadrante.

Observações

- Se um ponto P pertence ao eixo das abscissas, suas coordenadas são $(x_P, 0)$.
- Se um ponto P pertence ao eixo das ordenadas, suas coordenadas são $(0, y_P)$.

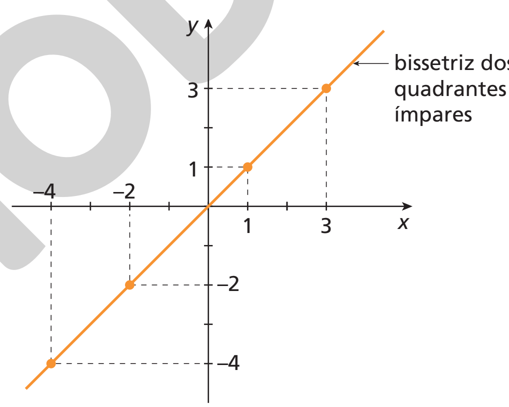


No plano cartesiano, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares**.

Reflita

Qual é a relação entre a abscissa x_P e a ordenada y_P de qualquer ponto P da bissetriz dos quadrantes ímpares?

Para todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, e só para eles, a abscissa é igual à ordenada, ou seja, $x_P = y_P$.

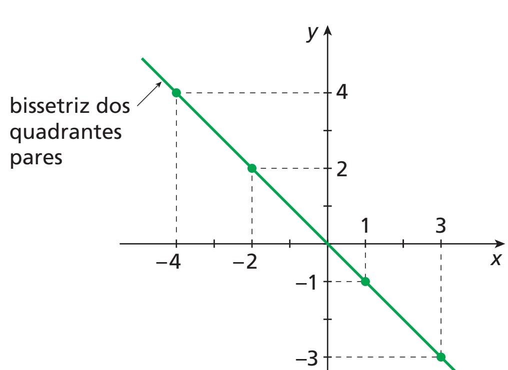


Já a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes pares**.

Reflita

Qual é a relação entre a abscissa x_P e a ordenada y_P de qualquer ponto P da bissetriz dos quadrantes pares?

Para todo ponto da bissetriz dos quadrantes pares, e só para eles, a abscissa é igual ao oposto da ordenada, ou seja, $x_P = -y_P$.

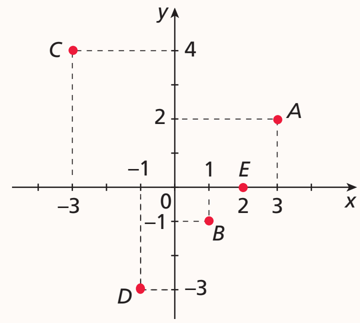


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
MODERNA

Exercícios resolvidos

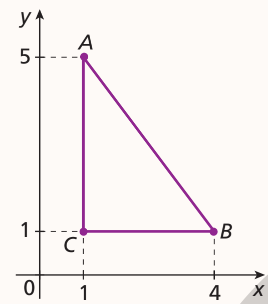
R1. Determinar as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.



▸ **Resolução**

Observando a figura, percebemos que o ponto A está associado ao par ordenado $(3, 2)$; o ponto B, ao par $(1, -1)$; o ponto C, ao par $(-3, 4)$; o ponto D, ao par $(-1, -3)$; e o ponto E, ao par $(2, 0)$.

R2. Representar no plano cartesiano os pontos $A(1, 5)$, $B(4, 1)$ e $C(1, 1)$ e traçar os segmentos com extremidades nesses pontos.



▸ **Resolução**

As coordenadas do ponto A são $x_A = 1$ e $y_A = 5$.

As coordenadas do ponto B são $x_B = 4$ e $y_B = 1$.

As coordenadas do ponto C são $x_C = 1$ e $y_C = 1$.

Note que os pontos A, B e C determinam o $\triangle ABC$.

R3. Obter os valores de a e de b para que os pontos $A(a^2 - 8, 1)$ e $B(4, b - 4)$ pertençam, respectivamente, ao eixo das ordenadas e ao eixo das abscissas.

▸ **Resolução**

Se o ponto A pertence ao eixo das ordenadas, então $x_A = 0$.

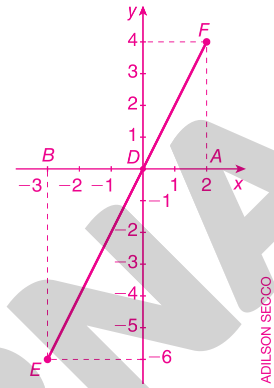
Assim: $a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ ou $a = -2\sqrt{2}$

Se o ponto B pertence ao eixo das abscissas, então $y_B = 0$.

Assim: $b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$

Reflita

Em seu caderno, localize no plano cartesiano os pontos $D(0, 0)$, $E(-3, -6)$ e $F(2, 4)$. Eles são vértices de um triângulo? Por quê?



Não, porque os pontos D, E e F estão alinhados.
Comentário: Nesse momento, os alunos ainda não dispõem de instrumento teórico para demonstrar que os três pontos são colineares. No entanto, ao representá-los no plano cartesiano, espera-se que percebam que os triângulos AFD e BED são semelhantes e que isso implica a igualdade das inclinações das retas $\overleftrightarrow{ED}$ e $\overleftrightarrow{DF}$, fato que leva à conclusão de que D, E e F estão alinhados.

Exercícios propostos

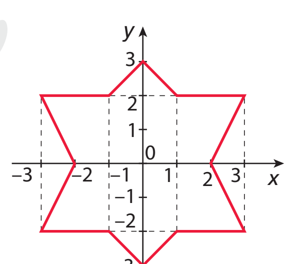
Registre as respostas em seu caderno.

1. Construa um plano cartesiano e localize os pontos $A(-1, -4)$, $B(7, 1)$, $C(2, -2)$, $D(-6, 0)$, $E\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$ e $F(4, 6)$. Ver resolução no Guia do professor.

2. Observe as coordenadas dos pontos e determine a que quadrante cada um deles pertence.

a) $\left(3, -\sqrt{2}\right)$ 4º quadrante
b) $(-\pi, -4)$ 3º quadrante
c) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \pi\right)$ 1º quadrante
d) $(-1, 1)$ 2º quadrante

3. Considere o polígono representado no plano cartesiano a seguir.



(0, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 0), (3, −2), (1, −2), (0, −3), (−1, −2), (−3, −2), (−2, 0), (−3, 2) e (−1, 2)

a) Determine as coordenadas dos vértices do polígono.

b) Algum desses vértices pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares ou à bissetriz dos quadrantes pares? não

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Para que valores de m e n o ponto $A(m - 8, n - 5)$ pertence ao 2º quadrante? Explique como você obteve esses valores. $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $m \leqslant 8$ e $n \geqslant 5$

5. Resolva os itens a seguir.

a) Construa um plano cartesiano e represente nele os pontos $P(8, 0)$ e $Q(0, 6)$. Ver resolução no Guia do professor.

b) Calcule a distância entre o ponto P e a origem do plano cartesiano. 8

c) Calcule a distância entre o ponto Q e a origem do plano cartesiano. 6

d) Elabore uma estratégia para determinar a medida do segmento determinado pelos pontos P e Q representados no plano cartesiano. Você pode resolver este item com um colega.

e) Calcule a distância entre os pontos P e Q usando a estratégia elaborada no item anterior. 10

f) Escreva, em função de a e b, a medida de um segmento que tem como extremidades os pontos $A(a, 0)$ e $B(0, b)$. $\sqrt{a^2 + b^2}$

6. Use um papel quadriculado para representar um plano cartesiano. Nele, faça um esboço e, com base nesse esboço, cite uma característica geométrica do conjunto dos pontos com:

a) abscissa 4;

b) ordenada -3;

c) ordenada 5;

d) abscissa -4.

Os pontos pertencem a uma reta:
a) vertical por (4, 0);
b) horizontal por (0, -3);
c) horizontal por (0, 5);
d) vertical por (-4, 0).

5. d) Espera-se que os alunos percebam que basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo cujos vértices são os pontos P e Q e a origem do plano cartesiano.

Pensamento computacional

Reconhecimento de padrões

Durante a resolução de um problema pode-se identificar características que remetem a um problema semelhante ou, até mesmo, padrões dentro do mesmo problema. Essa percepção permite a utilização ou o reaproveitamento de uma técnica para resolver cada instância desse padrão.

- Qual o padrão que pode ser reconhecido quando pretende-se determinar a distância entre dois pontos cujas abcissas e ordenadas são diferentes entre si?

Espera-se que os alunos mencionem a utilização de um triângulo retângulo, em que a hipotenusa é a distância procurada e a solução pode ser generalizada a partir do teorema de Pitágoras, valendo, inclusive, quando os pontos estão alinhados vertical ou horizontalmente.

Reflita

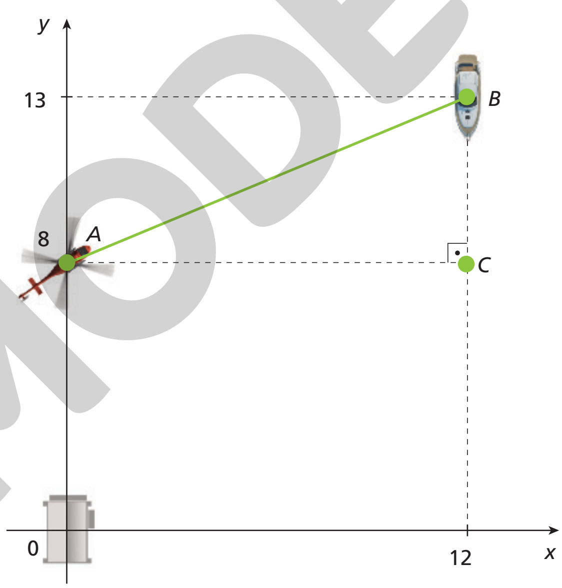
Qual seria a distância percorrida pelo helicóptero da sua localização inicial ao posto de bombeiros, passando pelo ponto de resgate das pessoas?

Como o posto de bombeiros está localizado no ponto O de coordenadas (0, 0), temos de calcular a distância BO ($d_{B,O}$):
$(d_{B,O})^2 = 12^2 + 13^2 = 313$
$d_{B,O} = \sqrt{313} \simeq 17{,}7$
Logo, o helicóptero percorreria uma distância equivalente a $d_{A,B} + d_{B,O}$, ou seja, aproximadamente 30,7 km (13 + 17,7).

1.1 Distância entre dois pontos

Há situações cotidianas em que é importante determinar a distância entre dois pontos. Retomando o problema apresentado no início deste capítulo, no qual foram fornecidas as localizações de um grupo de pessoas em uma embarcação no mar (ponto B) e de um helicóptero que fará o resgate (ponto A), pergunta-se: a que distância o helicóptero está da embarcação?

Transportando os dados para o plano cartesiano, temos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Para responder à questão, vamos considerar no plano cartesiano o ponto auxiliar $C(12, 8)$. Assim:

- a distância do ponto A ao ponto C ($d_{A,C}$) é 12 km;
- a distância do ponto B ao ponto C ($d_{B,C}$) é 5 km;
- a distância do ponto A ao ponto B ($d_{A,B}$) é d km.

Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

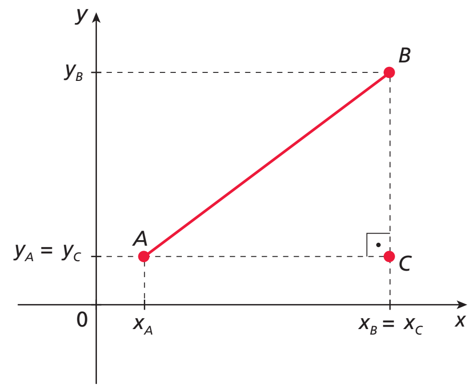
$$(d_{A,B})^2 = (d_{A,C})^2 + (d_{B,C})^2 \Rightarrow d^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 = 169 \Rightarrow d = 13 \text{ ou } d = -13$$

Como a distância entre dois pontos é, por definição, um número não negativo, temos $d = 13$ km.

Logo, o helicóptero está a 13 km de distância da embarcação.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
MODERNA

Agora, vamos determinar a distância $d_{A,\,B}$ entre dois pontos quaisquer $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Para isso, vamos representá-los no plano cartesiano ao lado, incluindo um ponto $C(x_C, y_C)$, em que $x_C = x_B$ e $y_C = y_A$.



Repare que temos um triângulo *ABC*, retângulo em *C*.

Pelo teorema de Pitágoras: $(d_{A,\,B})^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

Sabemos que $AC = |x_B - x_A|$ e que $BC = |y_B - y_A|$.

Como $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ e $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$, temos:

$(d_{A,\,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Portanto, a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano é dada por:

$$d_{A,\,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Observação

O **módulo**, ou **valor absoluto**, de um número real *x*, indicado por $|x|$, é definido como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Reflita

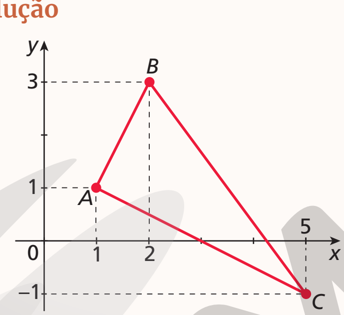
A fórmula acima também é válida quando *A* e *B* estão alinhados horizontal ou verticalmente? Justifique.

Sim.
Alinhados horizontalmente:
$C \equiv B$, $y_B - y_A = 0$; logo:
$d_{A,\,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + 0^2} = |x_B - x_A|$
Alinhados verticalmente:
$C \equiv A$, $x_B - x_A = 0$; logo:
$d_{A,\,B} = \sqrt{0^2 + (y_B - y_A)^2} = |y_B - y_A|$

Exercícios resolvidos

R4. Determinar o perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ e $C(5, -1)$.

▸ **Resolução**



Vamos calcular as medidas dos lados do triângulo ABC:

$d_{A,B} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

$d_{B,C} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$d_{A,C} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Portanto, o perímetro do triângulo ABC é $(3\sqrt{5} + 5)$ unidades de comprimento.

R5. Dados os pontos $A(-2, m)$ e $B(1, 3)$, determinar m para que a distância entre A e B seja 5 unidades.

▸ **Resolução**

Como a distância entre A e B deve ser 5 unidades, temos:

$(d_{A,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^2 = (1+2)^2 + (3-m)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 = 9 + 9 - 6m + m^2 \Rightarrow m^2 - 6m - 7 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos dois valores de m que tornam a distância entre A e B igual a 5 unidades: $m = 7$ ou $m = -1$

R6. Determinar o ponto $C(m, 2m)$ equidistante dos pontos $A(-7, 0)$ e $B(3, 0)$.

▸ **Resolução**

Como o ponto C é equidistante dos pontos A e B, a distância entre C e A é a mesma que entre C e B. Assim:

$d_{C,A} = d_{C,B} \Rightarrow \sqrt{(m+7)^2 + (2m-0)^2} =$

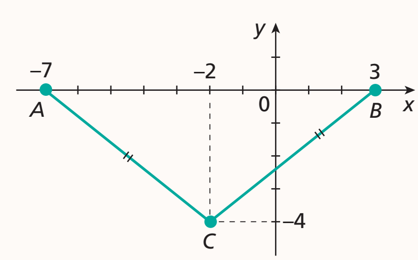
$= \sqrt{(m-3)^2 + (2m-0)^2} \Rightarrow (m+7)^2 + 4m^2 =$

$= (m-3)^2 + 4m^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 + 14m + 49 = m^2 - 6m + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20m = -40 \Rightarrow m = -2$

Substituindo m por -2, obtemos $C(-2, -4)$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R5. Pedir aos alunos que façam um esboço, em um mesmo plano cartesiano, de todos os pontos que representem as informações: "o ponto *A* têm abscissa −2" e "o ponto *A* dista 5 unidades do ponto *B*". Espera-se que eles tracem a reta vertical por (−2, 0), a circunferência de centro *B* e raio 5 e identifiquem os pontos (−2, 7) e (−2, −1), de intersecção das linhas traçadas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

12. Na realização desse exercício os estudantes terão a chance de trabalhar com um dos pilares do *pensamento computacional*: o **reconhecimento de padrões**. Pergunte a eles se percebem a repetição de algum procedimento e quais são as informações que precisam para aplicá-lo. Espera-se que os alunos falem a respeito do cálculo da distância entre pontos e que os dados são as coordenadas dos pontos.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

7. Calcule a distância entre os pontos de cada item.

a) $A(2, 1)$ e $B(5, 5)$ 5
b) $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$ $\sqrt{10}$
c) $D(-4, -2)$ e $E(0, 7)$ $\sqrt{97}$
d) $C(4\sqrt{3}, 5)$ e $B(6\sqrt{3}, 3)$ 4

8. Determine a distância do ponto $C(2, 3)$:

a) à origem. $\sqrt{13}$
b) ao eixo das ordenadas. 2
c) ao eixo das abscissas. 3

9. Localize no plano cartesiano os vértices $A(3, 3)$, $B(9, 3)$, $C(9, -3)$ e $D(3, -3)$ do quadrilátero $ABCD$. Em seguida, responda às perguntas. Ver resolução no Guia do professor.

a) Qual é a área desse quadrilátero? 36 unidades de área
b) Qual é seu perímetro? 24 unidades de comprimento
c) Qual é a medida de sua diagonal? $6\sqrt{2}$ unidades de comprimento

10. Obtenha o ponto do eixo das ordenadas equidistante de $A(6, 8)$ e de $B(2, 5)$. $P\left(0, \frac{71}{6}\right)$

11. Considere $A(-2, -5)$, $B(-4, -1)$ e $C(4, 3)$ vértices do triângulo ABC. Explique como você faria para provar que esse triângulo é retângulo.

12. Em cada caso, registre se o triângulo de vértices A, B e C é equilátero, escaleno ou isósceles. Depois, determine qual deles é um triângulo retângulo.

a) $A(1, 6)$, $B(2, 3)$ e $C(4, 5)$ isósceles
b) $A(7, 1)$, $B(10, 4)$ e $C(3, 5)$ escaleno e retângulo
c) $A(0, 0)$, $B(2, 2\sqrt{3})$ e $C(4, 0)$ equilátero

13. Dois dos vértices de um triângulo equilátero ABC são $A(2, -5)$ e $B(3, -4)$. Determine as coordenadas do vértice C.

14. Considere no plano cartesiano os pontos $P(2, 3)$ e $Q(5, 3)$. Após girar o segmento $\overline{PQ}$ em torno de P em um ângulo de 60° no sentido horário, obtém-se o segmento $\overline{PR}$. Ver resolução no Guia do professor.

a) Ilustre a situação em um plano cartesiano.
b) Qual é a medida do segmento $\overline{PQ}$? E do segmento $\overline{PR}$? Explique.
c) Classifique o $\triangle PQR$ quanto aos lados.
d) Quais são as coordenadas do ponto R?
e) Refaça os itens anteriores supondo agora que o movimento do segmento $\overline{PQ}$ ocorra no sentido anti-horário. O que você pode concluir?

11. Espera-se que os alunos percebam que, para provar que o triângulo *ABC* é retângulo, basta calcular as medidas de seus lados e verificar que esses lados satisfazem o teorema de Pitágoras.

13. $C\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \frac{-9-\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $C\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{-9+\sqrt{3}}{2}\right)$

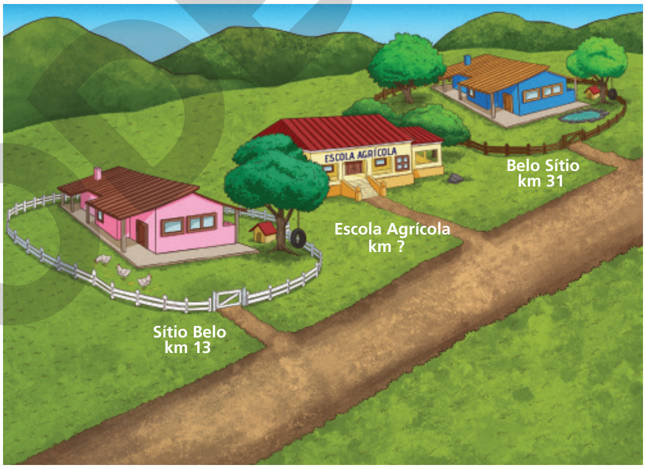
1.2 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Vamos interpretar a ilustração ao lado. Imagine que o Sítio Belo e o Belo Sítio fiquem à beira de uma estrada retilínea, respectivamente nos quilômetros 13 e 31. Também nessa estrada, à igual distância desses sítios, há uma escola agrícola. Que estratégia poderíamos usar para saber em que quilômetro dessa estrada a escola agrícola fica?

Vamos, então, aprender como determinar o ponto médio de um segmento no plano cartesiano.

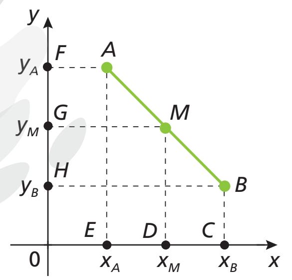
Considere um segmento de extremos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ cujo ponto médio é $M(x_M, y_M)$.

NELSON MATSUDA



Representação esquemática sem escala.

ADILSON SECCO



Pelo teorema de Tales, podemos obter a relação a seguir entre as abscissas desses pontos:

$AM = MB \Rightarrow ED = DC \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A$

Portanto:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Também pelo teorema de Tales, podemos obter a seguinte relação entre as ordenadas desses pontos:

$BM = MA \Rightarrow HG = GF \Rightarrow y_M - y_B = y_A - y_M \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B$

Portanto:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Podemos concluir que, dado um segmento de extremos A e B, a abscissa do ponto médio será a média aritmética das abscissas dos extremos e a ordenada do ponto médio será a média aritmética das ordenadas dos extremos.

Portanto, o **ponto médio** do segmento $\overline{AB}$ é dado por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Observações

- Se $y_A = y_B = y$, isto é, se $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo x, temos: $M\left(\frac{x_B + x_A}{2}, y\right)$
- Se $x_A = x_B = x$, isto é, se $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo y, temos: $M\left(x, \frac{y_B + y_A}{2}\right)$

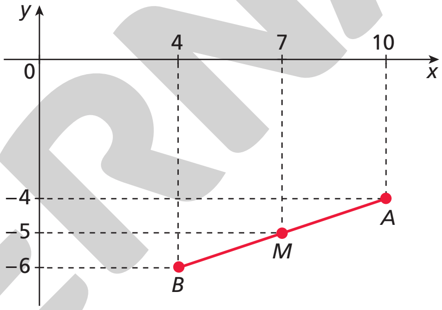
Exemplo

O ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, sendo $A(10, -4)$ e $B(4, -6)$, tem as coordenadas dadas por:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{10 + 4}{2} = 7$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + (-6)}{2} = -5$$

Logo, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é $M(7, -5)$.



Exercícios resolvidos

R7. Determinar as coordenadas do ponto B sabendo que M(−1, −1) é o ponto médio de $\overline{AB}$ com A(−1, 1).

▸ Resolução

Como M(−1, −1) é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-1 + x_B}{2} \Rightarrow -1 + x_B = -2 \Rightarrow x_B = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + y_B}{2} \Rightarrow 1 + y_B = -2 \Rightarrow y_B = -3$$

Logo, B(−1, −3).

R8. Determinar o comprimento da mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo cujos vértices são A(2, 3), B(4, −2) e C(0, −6).

▸ Resolução

As coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{BC}$ são:

$$x_M = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

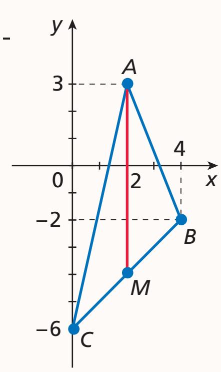
$$y_M = \frac{(-2) + (-6)}{2} = -4$$

Assim, o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ é M(2, −4).

O comprimento da mediana é dado por:

$$d_{A,M} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Portanto, o comprimento da mediana $\overline{AM}$ é 7.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Observação

A mediana $\overline{AM}$ de um triângulo ABC é o segmento de extremidades no ponto A, vértice do triângulo, e no ponto M, ponto médio do lado $\overline{BC}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No exercício **16**, em dupla, os alunos devem refletir sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. Assim, são instados a identificar quais dados podem ser descartados e quais são relevantes para a resolução do problema, além de interpretar os mesmos dados de diferentes formas, possibilitando múltiplas resoluções para o mesmo problema.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

15. Obtenha as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(3, 2)$ e $B(5, 4)$ $M(4, 3)$

b) $A(-3, -4)$ e $B(-7, 0)$ $M(-5, -2)$

16. Forme uma dupla com um colega para resolver este exercício. Sabe-se que $A(4, 1)$, $B(2, 3)$, $C(-8, 7)$ e $D(-6, 5)$ são vértices consecutivos de um paralelogramo.

a) Determine o ponto M de intersecção de suas diagonais. (Lembre-se de que as diagonais de um paralelogramo se cruzam no ponto médio.) $M(-2, 4)$

b) Discutam e expliquem o que ocorreria com a resposta do item **a** se as coordenadas do vértice A não fossem informadas no enunciado. A resposta seria a mesma.

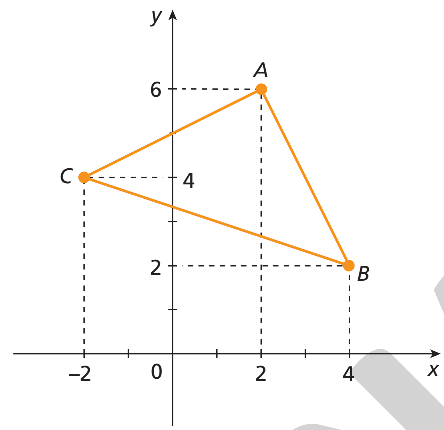
c) Se fossem retirados do enunciado os dados "consecutivos" e "$C(-8, 7)$", a resposta do item **a** seria a mesma?
Não, pois além de $M(-2, 4)$, teríamos também $M'(-1, 3)$.

17. Considere $A(-1, 3)$ e $B(0, 1)$ vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ e $M(1, 4)$ o ponto de intersecção de suas diagonais. Calcule:

a) as coordenadas dos vértices C e D e represente o paralelogramo no plano cartesiano.

b) o perímetro desse paralelogramo.

18. Dado o triângulo ABC representado abaixo, determine a medida da mediana $\overline{AM}$ relativa ao lado $\overline{BC}$. $\sqrt{10}$



19. Determine as coordenadas dos vértices de um triângulo cujos pontos médios dos lados são os pontos $P(-1, 4)$, $Q(2, -1)$ e $R(-2, 2)$.
$(3, 1)$, $(-5, 7)$ e $(1, -3)$

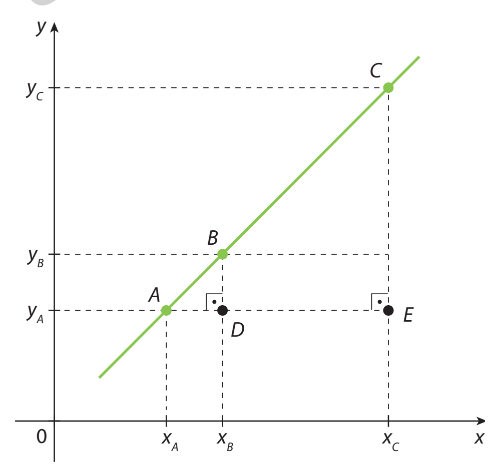
20. Elabore um problema sobre coordenadas do ponto médio de um segmento de reta. Troque-o com o de um colega para que você resolva o problema formulado por ele, e ele resolva o problema elaborado por você. Depois, destroquem para verificar a resolução. resposta pessoal

17. a) $C(3, 5)$ e $D(2, 7)$; ver resolução no Guia do professor.
b) $\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$ unidades de comprimento

1.3 Condição de alinhamento de três pontos

Considere três pontos distintos do plano cartesiano, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. É possível determinar uma condição para que esses pontos pertençam a uma reta, ou seja, para que estejam alinhados.

Vamos considerar o caso em que os pontos pertencem a uma reta não paralela a um dos eixos:



Os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Logo:

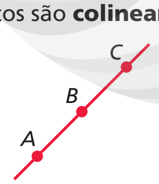
$$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}, \text{ com } x_B - x_A \neq 0 \text{ e } y_B - y_A \neq 0$$

Observações

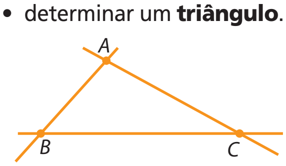
Dois pontos distintos estão sempre alinhados.

Três pontos distintos podem:

- estar alinhados; nesse caso, dizemos que os pontos são **colineares**;



- determinar um **triângulo**.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim:

$(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) = 0$

$x_Cy_B - x_Cy_A - x_Ay_B + \cancel{x_Ay_A} - x_By_C + x_By_A + x_Ay_C - \cancel{x_Ay_A} = 0$

$x_Cy_B - x_Cy_A - x_Ay_B - x_By_C + x_By_A + x_Ay_C = 0$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1 e reordenando os termos, obtemos:

$x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A = 0 \quad \text{(I)}$

Vamos recordar o desenvolvimento, pela regra de Sarrus, do determinante abaixo. Em seguida, vamos compará-lo com o primeiro membro da igualdade (I).

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A$$

coluna das ordenadas dos pontos

coluna das abscissas dos pontos

Portanto, o primeiro membro da igualdade (I) é o determinante D.

Logo, se três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nesse caso, a recíproca também é verdadeira:

Se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, então os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados.

Essas condições também são válidas quando dois dos pontos coincidem ou quando os pontos pertencem a uma reta paralela a algum dos eixos. Então:

Três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercícios resolvidos

R9. Verificar se os pontos $A(3, 2)$, $B(4, 1)$ e $C(1, 4)$ são colineares.

Resolução

Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 16 - 1 - 12 - 8 = 0$$

Como $D = 0$, os pontos são colineares.

R10. Determinar o valor de k para que os pontos $A(k, 7)$, $B(2, -3)$ e $C(k, 1)$ sejam os vértices de um triângulo.

Resolução

Para que A, B e C sejam os vértices de um triângulo, eles não podem estar alinhados. Assim:

$$\begin{vmatrix} k & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$-3k + 7k + 2 + 3k - k - 14 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6k - 12 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

Logo, para que os pontos $A(k, 7)$, $B(2, -3)$ e $C(k, 1)$ sejam vértices de um triângulo, devemos ter $k \neq 2$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Os exercícios desse bloco propiciam ao aluno a possibilidade da descoberta antecipada dos conceitos a serem abordados no tópico seguinte, **Equação geral da reta**, fazendo-o sujeito ativo de seu aprendizado. Ao propor a resolução de problemas que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, também contemplam competência específica **3** e, em especial o exercício **27**, a habilidade **EM13MAT301**.

Exercícios propostos

27. b) O ponto P pode ser determinado impondo a condição de alinhamento de três pontos para P, A e B e para P, C e D.

Registre as respostas em seu caderno.

21. Verifique se os pontos A, B e C estão alinhados.

a) $A(2, 3)$, $B(-2, -5)$ e $C(-1, -3)$ sim

b) $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ e $C(3, -1)$ não

22. Verifique para quais valores de x existe o triângulo ABC, sendo $A(x, 1)$, $B(x + 1, 2)$ e $C(0, 3)$. $x \neq -2$

23. Determine m para que os pontos $A(-1, m)$, $B(2, -3)$ e $C(-4, 5)$:

a) estejam alinhados. $m = 1$

b) sejam vértices de um triângulo. $m \neq 1$

24. Determine dois pontos que estejam alinhados com os pontos $A(1, 4)$ e $B(0, 3)$. Há infinitas possibilidades, como $P(-1, 2)$ e $Q(2, 5)$.

25. Determine uma relação entre as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ para que ele esteja alinhado com $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$. $x - 3y + 7 = 0$

26. A reta que contém os pontos $C(1, 3)$ e $D(2, 5)$ intercepta o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, respectivamente, nos pontos A e B. Determine as coordenadas dos pontos A e B. $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $B(0, 1)$

27. Em uma região plana, serão construídas duas estradas s e r, sem curvas. Os engenheiros representaram o projeto dessas estradas em um plano cartesiano com origem na sede da empresa. Nesse plano, a unidade de medida linear é 1 km, o eixo y indica o sentido norte e o eixo x indica o sentido leste. No projeto, foi definido que s deve passar pelos pontos $A(1, 1)$ e $B(-2, 4)$, enquanto r deve passar pelos pontos $C(1, 3)$ e $D(-2, -6)$. Considerando essa informação, resolva os itens a seguir. Você pode fazer isso com um colega.

a) Determine o ponto $P(x, y)$ em que as estradas vão se cruzar. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

b) Explique como você encontrou esse ponto.

c) Represente os pontos e as estradas s e r no plano cartesiano, mostrando o ponto de intersecção. Ver resolução no Guia do professor.

28. O ponto $P(x_P, y_P)$ está alinhado com os pontos $A(5, 3)$ e $B(-2, 1)$. Verifique e registre que condições são necessárias para que:

a) P pertença ao eixo x.

b) P pertença ao eixo y.

c) P pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

d) P pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

e) $y_P = 2x_P$.

- Determine as coordenadas de P de acordo com as condições apresentadas em cada item.

28. a) $y_P = 0$; $P\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$

b) $x_P = 0$; $P\left(0, \frac{11}{7}\right)$

c) $x_P = y_P$; $P\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$

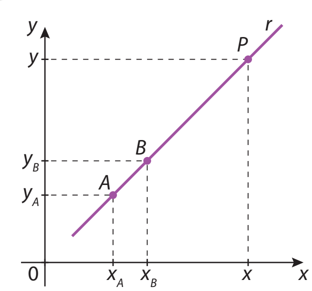
d) $x_P = -y_P$; $P\left(-\frac{11}{9}, \frac{11}{9}\right)$

e) $y_P = 2x_P$; $P\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{6}\right)$

2 Reta

2.1 Equação geral da reta

Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencente à reta r.



ADILSON SECCO

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B e P, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_Ay_B - x_By_A = 0$$

Como, nesse determinante, as únicas variáveis são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer:

- $(y_A - y_B) = a$
- $(x_B - x_A) = b$
- $x_Ay_B - x_By_A = c$

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

Se $a = b = 0$, então $y_A = y_B$ e $x_A = x_B$, o que implica que os pontos A e B não são distintos (isso contradiz nossa hipótese inicial de que A e B são distintos).
Espera-se que os alunos adquiram o hábito de observar e ler criticamente as restrições implícitas nas definições.

Reflita

Por que temos de considerar que a e b não podem ser simultaneamente nulos?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

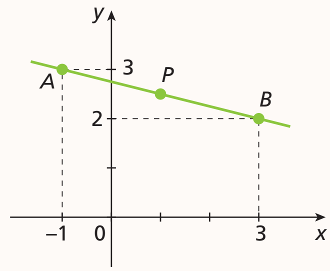
Exercícios resolvidos

R11. Obter a equação geral da reta r que passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$.

Para $k \in \mathbb{R}$, não nulo, $k \cdot (x + 4y - 11) = 0$ representa uma "família" de equações da reta que passa por $A(-1, 3)$ e $B(3, 2)$. Embora, por conveniência, optemos pela equação que tenha os menores coeficientes inteiros, qualquer equação dessa "família" será considerada a equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

▸ **Resolução**

Considere um ponto $P(x, y)$ pertencente à reta r. Ele está alinhado com os pontos A e B.



Pela condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$3x + 3y - 2 - 9 - 2x + y = 0 \Rightarrow x + 4y - 11 = 0$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é $x + 4y - 11 = 0$.

R12. Verificar se o ponto $P(3, 2)$ pertence à reta s, cuja equação é $x - 3y + 3 = 0$.

▸ **Resolução**

Para que o ponto $P(3, 2)$ pertença à reta s, suas coordenadas devem satisfazer a equação dessa reta.

Substituindo x por 3 e y por 2 na equação $x - 3y + 3 = 0$, obtemos:

$3 - 3 \cdot 2 + 3 = 0 \Rightarrow 3 - 6 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (sentença verdadeira)

Portanto, o ponto P pertence à reta s de equação $x - 3y + 3 = 0$.

R13. Obter a equação geral da reta r, que passa pelos pontos $A(3, 1)$ e $B(2, 4)$, e determinar seus pontos de intersecção com os eixos x e y.

▸ **Resolução**

Seja $P(x, y)$ um ponto pertencente à reta r de tal maneira que os pontos A, B e P estejam alinhados. Então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x + 2y + 12 - 2 - 4x - 3y = 0 \Rightarrow -3x - y + 10 = 0$

Portanto, a equação geral da reta r é $-3x - y + 10 = 0$.

Vamos determinar agora os pontos de intersecção da reta r com os eixos x e y.

A reta r intercepta o eixo x no ponto $C(c, 0)$. Substituindo as coordenadas do ponto C na equação geral de r, obtemos:

$-3c - 0 + 10 = 0 \Rightarrow c = \dfrac{10}{3}$

Analogamente, a reta r intercepta o eixo y no ponto $D(0, d)$. Substituindo as coordenadas do ponto D em r, obtemos:

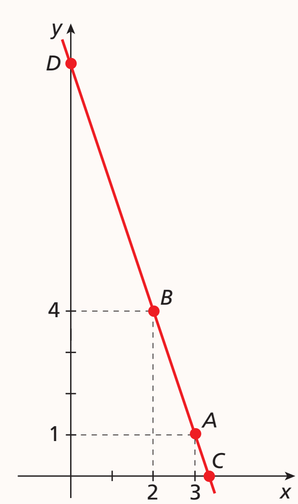
$-3 \cdot 0 - d + 10 = 0 \Rightarrow d = 10$

Logo, a reta r intercepta o eixo x no ponto $C\left(\dfrac{10}{3}, 0\right)$ e o eixo y no ponto $D(0, 10)$.

Reflita

Quais são as equações das retas dos eixos x e y?

eixo x: $y = 0$;
eixo y: $x = 0$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Orientar o aluno a, sempre que possível, relacionar Álgebra e Geometria, de forma a contemplar a habilidade **EM13MAT401**. Por exemplo, no exercício **29**, pedir aos alunos que façam a resolução de forma geométrica, representando a equação no plano cartesiano; no exercício **31**, após a resolução algébrica, propor a representação no plano cartesiano dos pontos *A* e *B*, da reta que passa por *A* e *B* e dos pontos de abscissa igual a 1. Conduzir a discussão para que os alunos percebam que a resposta é a ordenada do ponto de intersecção da reta que passa por *A* e *B* com a reta vertical que passa pelo ponto (1, 0).

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

29. Verifique se cada ponto abaixo pertence à reta s, cuja equação é $x - y + 2 = 0$.

a) $A(2, 3)$ não **b)** $B(1, 3)$ sim

30. Em cada caso, verifique se os pontos são colineares. Se forem, determine a equação geral da reta que passa por eles.

a) $A(-2, -5)$, $B(-4, -1)$ e $C(4, 3)$ não

b) $A(3, 5)$, $B(1, 0)$ e $C\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ sim; $5x - 2y - 5 = 0$

31. Os pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$ determinam uma reta. Calcule o valor de m para que o ponto $C(1, m)$ pertença a essa reta. $m = 3$

32. Quais são os pontos de intersecção da reta de equação $x + 3y + 1 = 0$ com os eixos x e y? $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$ e $(-1, 0)$

33. Considere os pontos $A(2, 3)$, $B(5, -1)$, $C(-1, 4)$ e $D(2, 3)$. Determine:

a) a equação geral da reta suporte do segmento $\overline{AB}$. $4x + 3y - 17 = 0$

b) a equação geral da reta suporte do segmento $\overline{CD}$. $x + 3y - 11 = 0$

c) o ponto de intersecção entre as retas obtidas nos itens anteriores. (2, 3)

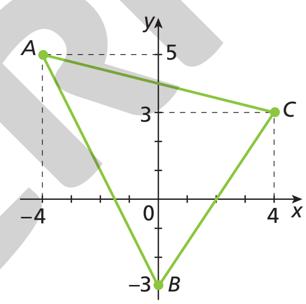
34. Considere o triângulo ABC representado ao lado. Identifique as coordenadas dos vértices do triângulo ABC e determine as equações das retas suportes: $A(-4, 5)$, $B(0, -3)$ e $C(4, 3)$

a) dos lados desse triângulo.

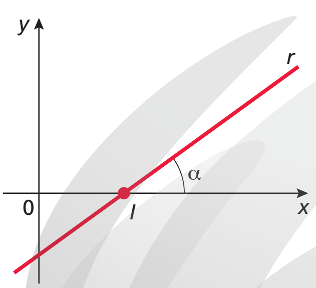
b) das medianas desse triângulo.

c) dos três segmentos determinados pelos pontos médios dos lados desse triângulo.

$x + 4y + 2 = 0$;
$2x + y - 4 = 0$;
$3x - 2y + 8 = 0$



34. a) $2x + y + 3 = 0$;
$3x - 2y - 6 = 0$;
$x + 4y - 16 = 0$
b) $5x + 6y - 10 = 0$;
$x = 0$;
$x - 3y + 5 = 0$



2.2 Inclinação e coeficiente angular de uma reta

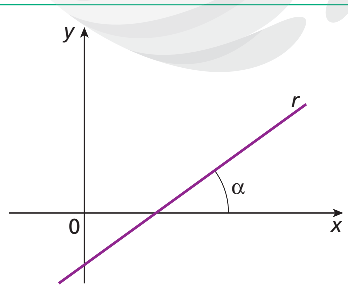
Observe a figura ao lado.

A medida α (0° ⩽ α < 180° ou 0 ⩽ α < π) do ângulo indicado na figura é chamada de **inclinação da reta** e é obtida girando-se o eixo *x* no sentido anti-horário em torno do ponto *I* até ele coincidir com a reta *r*.

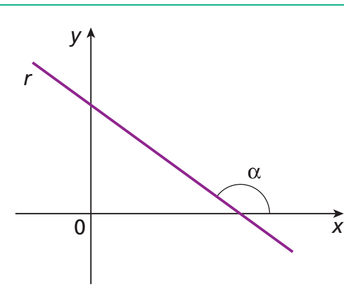
Chamamos de **coeficiente angular** ou **declividade** de uma reta, não perpendicular ao eixo *x*, o número real *m* expresso pela tangente trigonométrica de sua inclinação, ou seja:

$$m = \text{tg}\ \alpha$$

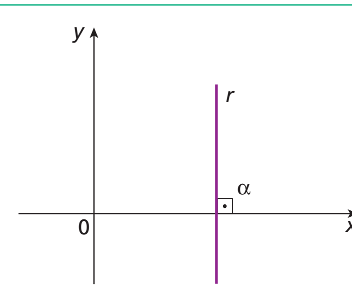
Observe as possibilidades para o ângulo α:



$0° \leqslant \alpha < 90° \Rightarrow m \geqslant 0$



$90° < \alpha < 180° \Rightarrow m < 0$



$\alpha = 90° \Rightarrow m$ não é definido

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

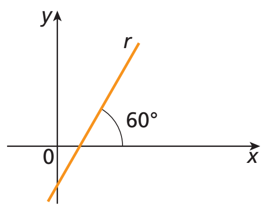
MODERNA

Quando a reta é paralela ao eixo x, admitimos que sua inclinação é 0°. Logo, seu coeficiente angular é $m = 0$.

$\alpha = 0° \Rightarrow m = \text{tg } 0° = 0$

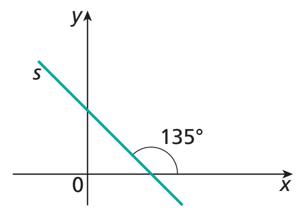
Exemplos

a) A reta r abaixo possui inclinação de 60°.



Logo, o coeficiente angular da reta r é dado por: $m = \text{tg } 60° \Rightarrow m = \sqrt{3}$

b) A reta s abaixo possui inclinação de 135°.



Logo, o coeficiente angular da reta s é dado por: $m = \text{tg } 135° \Rightarrow m = -1$

Quando não conhecemos o ângulo de inclinação, mas são dados dois pontos distintos pertencentes à reta, podemos obter o coeficiente angular calculando tg α por meio das coordenadas dos pontos.

Considere dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes a uma reta r não paralela ao eixo y e formando com o eixo x um ângulo α.

O coeficiente angular da reta r é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Reflita

É correto para comparações entre ângulos α tais que $0° \leq \alpha < 90°$ ou $90° < \alpha < 180°$.

É correto dizer que quanto maior for o ângulo α, maior será o valor de m?

Observação

Convém lembrar que, em um triângulo retângulo, a tangente de um de seus ângulos agudos de medida α é dada por:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Demonstração

- **1º caso: $0° < \alpha < 90°$**

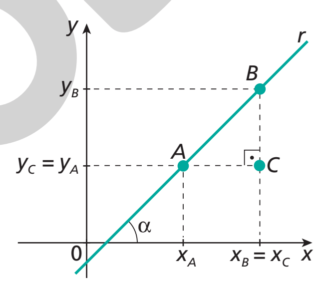
Considere o triângulo ABC representado ao lado.

O triângulo ABC é retângulo em C; logo:

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{d_{C,B}}{d_{A,C}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



- **2º caso: $90° < \alpha < 180°$**

Considere o triângulo ABC representado a seguir.

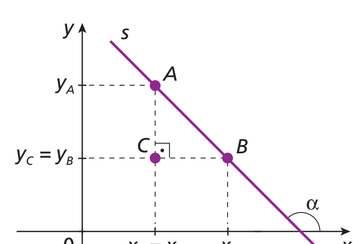
O triângulo ABC é retângulo em C; logo:

$$m = \text{tg } \alpha = -\text{tg } (180° - \alpha) =$$

$$= -\frac{d_{C,A}}{d_{C,B}} = -\frac{(y_A - y_B)}{(x_B - x_A)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Portanto, o coeficiente angular m é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



- **3º caso: $\alpha = 0°$**

Podemos verificar que $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ vale também quando $\alpha = 0°$, pois $y_B = y_A$ e $x_B \neq x_A$; logo, $m = 0$.

Portanto, para qualquer α, com $\alpha \neq 90°$ e $0° \leq \alpha < 180°$, temos: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Pensamento computacional

Decomposição

Ao dividir um problema em subproblemas ou etapas pratica-se a **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*. A decomposição de um problema ocorre de maneira que ao resolver os subproblemas ou as etapas o problema inicial é resolvido.

A decomposição pode ser aplicada, por exemplo, no estudo de sinal do coeficiente angular de uma reta em função de seu ângulo em relação ao eixo x, separando em casos. Observe os casos tratados nos exemplos ao lado e, em seu caderno, complete:

- Se o coeficiente angular de uma reta r:
  - **a)** ▬▬▬, a reta é horizontal. é zero
  - **b)** ▬▬▬, a reta é vertical. não está definido

Observação

A tangente de um ângulo é igual ao oposto da tangente do suplementar desse ângulo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios resolvidos

R14. Determinar o coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 9)$.

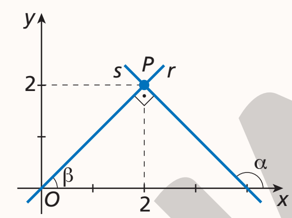
▶ **Resolução**

O coeficiente angular é dado por:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo, o coeficiente angular da reta r é 3.

R15. Calcular o valor de $m_r \cdot m_s$ sabendo que m_r e m_s correspondem, respectivamente, ao coeficiente angular das retas r e s apresentadas na figura ao lado.



▶ **Resolução**

O coeficiente angular da reta r é dado por:

$$m_r = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

Note que: $m_r = \text{tg}\,\beta = 1 \Rightarrow \beta = 45°$

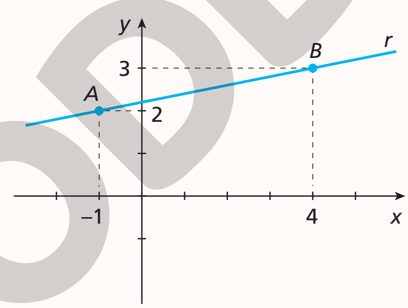
Pela propriedade do ângulo externo, temos:

$\alpha = \beta + 90° \Rightarrow \alpha = 45° + 90° \Rightarrow \alpha = 135°$

Então: $m_s = \text{tg}\,135° = -1$ e $m_r \cdot m_s = 1 \cdot (-1) = -1$

Portanto, $m_r \cdot m_s = -1$.

R16. Determinar a equação da reta r representada a seguir.



▶ **Resolução**

Além do método da condição de alinhamento usando determinante, esse problema pode ser resolvido com o estudo do coeficiente angular da reta.

Considerando que as coordenadas dos pontos A e B são, respectivamente, $(-1, 2)$ e $(4, 3)$, vamos calcular o coeficiente angular da reta determinada por A e B:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{4 - (-1)} = \frac{1}{5}$$

A reta procurada tem coeficiente angular $m = \frac{1}{5}$ e passa pelo ponto $B(4, 3)$.

Vamos considerar um ponto $P(x, y)$, qualquer da reta, porém inicialmente com $P \neq B$. Dessa forma, temos:

$$\frac{1}{5} = \frac{(y - 3)}{(x - 4)} \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{5}(x - 4) \Rightarrow 5y - 15 = x - 4 \Rightarrow x - 5y + 11 = 0$$

Note que as coordenadas de B satisfazem essa equação:

$4 - 5 \cdot 3 + 11 = 0$

Portanto, $x - 5y + 11 = 0$ é a equação geral da reta r.

Sim. Espera-se que os alunos percebam que, conhecendo o coeficiente angular da reta, é possível obter sua equação a partir de qualquer um de seus pontos.

Reflita

No exercício **R16**, poderíamos determinar a equação da reta r usando $m = \frac{1}{5}$ e $A(-1, 2)$? Justifique.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

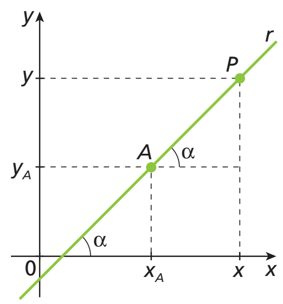
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Equação da reta de coeficiente angular *m* e que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$

Já vimos como determinar a equação de uma reta conhecendo dois de seus pontos. Agora, vamos determinar a equação de uma reta r conhecendo um de seus pontos, $A(x_A, y_A)$, e seu coeficiente angular m.

Considere o ponto $P(x, y)$ na reta r, sendo $P \neq A$ e $m = \text{tg } \alpha$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

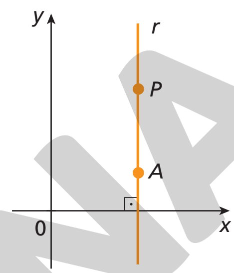
Como $m = \text{tg } \alpha$, então: $m = \dfrac{y - y_A}{x - x_A}$

Portanto, a equação de uma reta que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Observação

Se $x = x_A$, então a reta r é paralela ao eixo y.



Nesse caso, $x = x_A$ é a equação de r.

Exercício resolvido

R17. Determinar a equação da reta r que intercepta o eixo y no ponto $P(0, 1)$ e intercepta o eixo x segundo uma inclinação de 150°.

▸ Resolução

Como $m = \text{tg } 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $P(0, 1)$ pertence à reta r, temos:

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow \sqrt{3}x + 3y - 3 = 0$$

Portanto, a equação da reta r é $\sqrt{3}x + 3y - 3 = 0$.

Observação

$$\text{tg } 150° = -\text{tg } 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

R18. Um laboratório estudou uma colônia de bactérias composta inicialmente por 350 indivíduos vivos. Após a aplicação de certa droga, verificou-se que o número de indivíduos vivos na colônia diminuiu com o tempo; depois de 25 horas, não havia mais nenhum indivíduo vivo na colônia. Supondo que o número y de indivíduos vivos variou linearmente com o tempo x, contado a partir da administração da droga, determinar:

a) a expressão que relaciona y a x;

b) o número de indivíduos que permaneciam vivos após 10 horas do início do experimento.

No exercício **R18**, os estudantes lidam com a interpretação da situação e a extração de informações relevantes e relacionadas ao experimento para elaborar uma estratégia de resolução. Esse trabalho os coloca em contato com um dos pilares do *pensamento computacional*: a **abstração**.

Resolução

a) Vamos considerar o par ordenado (x, y) para identificar que, após x horas, havia y indivíduos vivos na colônia. Assim, temos pontos com os seguintes significados:

- $A(0, 350)$: estado inicial da colônia (no tempo 0 h, havia 350 indivíduos);
- $B(25, 0)$: estado final da colônia (no tempo 25 h, havia 0 indivíduo).

Como a relação é supostamente linear, seu gráfico é um conjunto de pontos pertencentes à reta que passa pelos pontos A e B.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$m = \dfrac{0 - 350}{25 - 0} = -14$

A reta tem coeficiente angular $m = -14$ e passa por $B(25, 0)$.

Assim: $y - 0 = -14(x - 25) \Rightarrow y = -14x + 350$

Portanto, a expressão que relaciona y a x é $y = -14x + 350$, tal que $0 \leqslant x \leqslant 25$.

b) Para obter o número de indivíduos vivos após 10 horas do início do experimento, basta substituir x por 10 na igualdade $y = -14x + 350$.

Assim: $y = -14 \cdot 10 + 350 = 210$

Portanto, após 10 horas, havia 210 indivíduos vivos na colônia de bactérias.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

35. Determine, se existir, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos:

a) $A(-1, 2)$ e $B(-1, 5)$ não existe

b) $A(3, 0)$ e $B(4, 0)$ 0

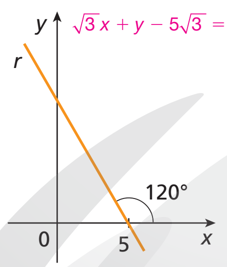
c) $A(1, 2)$ e $B(-2, -1)$ 1

d) $A\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{7}\right)$ e $B(0, 0)$ $-\frac{\sqrt{2}}{14}$

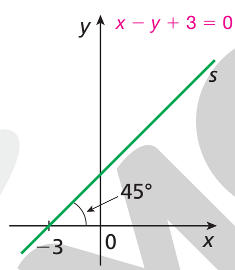
36. Escreva a equação da reta r que passa pelo ponto $A(1, -6)$ e forma com o eixo das abscissas um ângulo de 60°. $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} - 6 = 0$

37. Determine as equações das retas representadas a seguir.

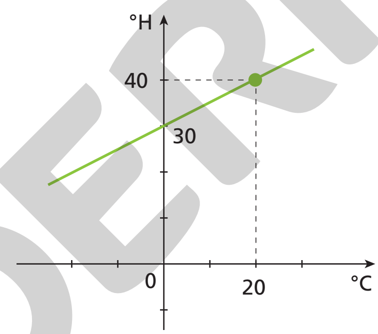
a) $\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$



b) $x - y + 3 = 0$



38. Um cientista inventou uma escala para termômetro e chamou-a de escala H (°H). Relacionando-a com a escala Celsius (°C), obteve o gráfico representado abaixo.



Considerando as informações do gráfico, resolva os itens a seguir.

a) Quando a temperatura de um corpo for 70 °C, qual será a temperatura indicada pelo termômetro com escala H? 65 °H

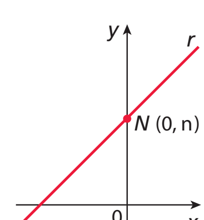
b) Calcule a única temperatura em que há coincidência de valores em ambas as escalas.
60 °C ou 60 °H

A abordagem desse tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401** da BNCC, na medida em que converte representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano.

Equação reduzida da reta

Sabemos que a equação da reta r que passa por um ponto $A(x_A, y_A)$ e tem coeficiente angular m é dada por $y - y_A = m(x - x_A)$.

Observe o gráfico abaixo.



Como a intersecção da reta r com o eixo y é o ponto $N(0, n)$, temos:

$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + n}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A forma $y = mx + n$ é denominada **equação reduzida da reta**, em que m é o coeficiente angular da reta e n é a ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo y.

Podemos fazer uma analogia entre a equação reduzida da reta e a lei de uma função afim:

equação reduzida da reta	função afim
$y = mx + n$	$f(x) = ax + b$

Observe que $m = \text{tg}\ \alpha = a$. Então, se $m > 0$ ($0° < \alpha < 90°$), a função afim é **crescente**; se $m < 0$ ($90° < \alpha < 180°$), a função afim é **decrescente**; se $m = 0$ ($\alpha = 0°$), a função afim é **constante**.

Observe também que $n = b$ é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y, também chamado de **coeficiente linear** da reta.

Exercício resolvido

R19. Determinar os coeficientes linear e angular da reta de equação $6x - 5y - 30 = 0$.

▶ Resolução

Para determinar os coeficientes linear e angular da reta, basta isolar y em $6x - 5y - 30 = 0$.

Assim: $6x - 5y - 30 = 0 \Rightarrow 5y = 6x - 30 \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - 6$

Comparando a equação anterior com a equação reduzida da reta, temos o coeficiente linear -6 e o coeficiente angular $\frac{6}{5}$.

Observação

Na prática, para obter o coeficiente linear, basta fazer $x = 0$ na equação da reta. O valor obtido para a ordenada y é o coeficiente linear.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

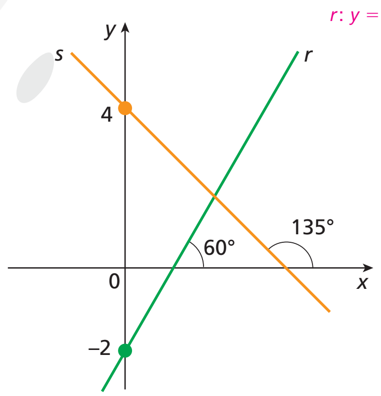
39. Obtenha os coeficientes linear e angular de cada reta cuja equação é dada a seguir.

a) $\sqrt{3}x - 5y + 2 = 0$ $m = \frac{\sqrt{3}}{5}$; $n = \frac{2}{5}$

b) $-\frac{1}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{1}{8} = 0$ $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $n = \frac{\sqrt{2}}{16}$

40. O valor de um número real x vai aumentar 30%, dando um resultado y. Expresse y em função de x e represente graficamente essa função. Qual é a inclinação da reta que representa essa função? Ver resolução no Guia do professor.

41. Determine as equações reduzidas das retas r e s mostradas na figura.
r: $y = \sqrt{3}x - 2$; s: $y = -x + 4$



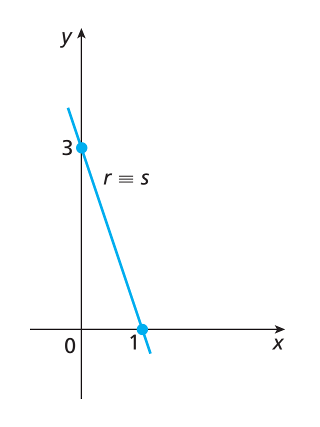
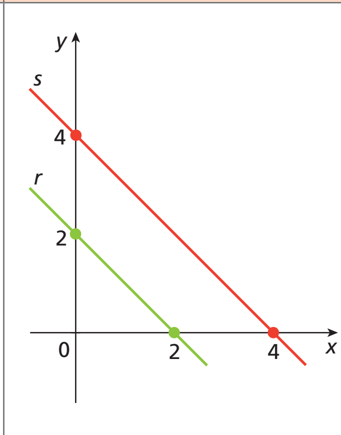
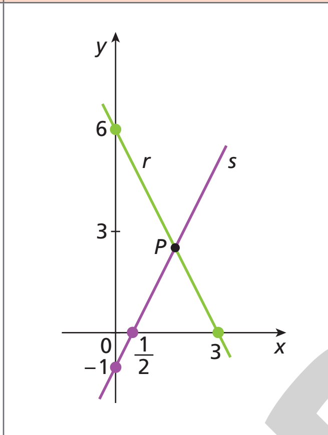
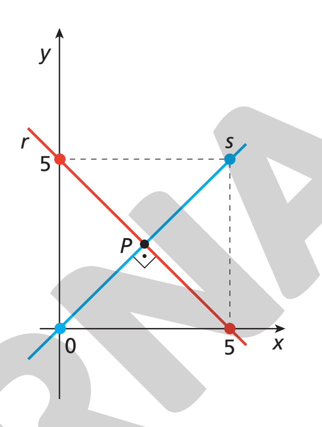
ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esse tópico contempla a competência específica **3** e a habilidade **EM13MAT301** da BNCC, pois mobiliza a aplicação de conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver problemas (que envolvem equações lineares simultâneas), usando técnicas algébricas e gráficas.

2.3 Posição relativa entre duas retas no plano

Duas retas coplanares podem ser classificadas em coincidentes, paralelas distintas ou concorrentes, sendo as retas perpendiculares um caso particular de retas concorrentes. Observe, por exemplo, as retas *r* e *s* a seguir e suas respectivas equações.

Retas paralelas		Retas concorrentes	
Coincidentes	**Distintas**	**Não perpendiculares**	**Perpendiculares**
			
r: $3x + y - 3 = 0$ s: $6x + 2y - 6 = 0$	r: $x + y - 2 = 0$ s: $x + y - 4 = 0$	r: $2x + y - 6 = 0$ s: $-2x + y + 1 = 0$	r: $x + y - 5 = 0$ s: $-x + y = 0$

Veremos adiante quais condições permitem determinar a posição relativa entre duas retas no plano cartesiano conhecendo apenas suas equações ou seus coeficientes angulares e/ou lineares.

Condição de paralelismo de duas retas

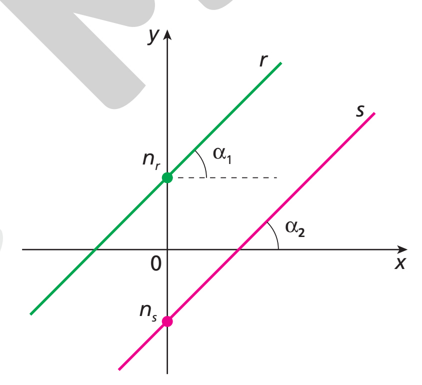
Duas retas *r* e *s* são paralelas quando têm a mesma direção.

Vamos verificar as condições para que as retas *r* e *s*, de coeficientes angulares m_r e m_s e coeficientes lineares n_r e n_s, sejam paralelas.

Lembrando que retas paralelas podem ser distintas ou coincidentes, temos:

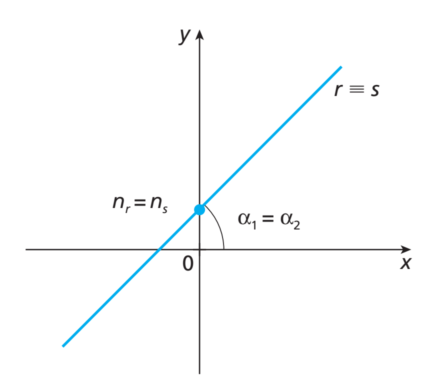
Observação

Se m_r e m_s não estão definidos, então *r* e *s* são retas verticais, isto é, paralelas ao eixo *y*; portanto, são paralelas entre si.



Para que as retas *r* e *s* sejam **paralelas distintas**, devem satisfazer a seguinte condição:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$



Para que as retas *r* e *s* sejam **paralelas coincidentes**, devem satisfazer a seguinte condição:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Nesse boxe, será favorecido o desenvolvimento da competência específica **4** e da habilidade **EM13MAT315** da BNCC, uma vez que os alunos vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma.

Pensamento computacional

Um sistema linear com duas equações e duas incógnitas pode ter sua solução representada graficamente no plano cartesiano por meio de duas retas. A solução é a intersecção entre elas. Essa solução, com essa característica, ocorre quando o sistema é possível e determinado (SPD). Entretanto, se as retas forem paralelas só há intersecção se forem coincidentes, o que ocorre em um sistema possível e indeterminado (SPI), pois admite infinitas soluções. As retas serão paralelas e não coincidentes quando o sistema for impossível (SI), sem solução, portanto.

Pode-se predizer o resultado da análise do gráfico de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas por meio de um algoritmo que observa os coeficientes linear e angular das retas. Veja o algoritmo representado em linguagem corrente.

Sejam as retas *r* e *s* as representações de equações de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas com, respectivamente, coeficientes angulares m_1 e m_2 e coeficiente lineares n_1 e n_2.

Passo 1. Se m_1 é diferente de m_2, vá para o passo 2. Se não, vá para o passo 3.

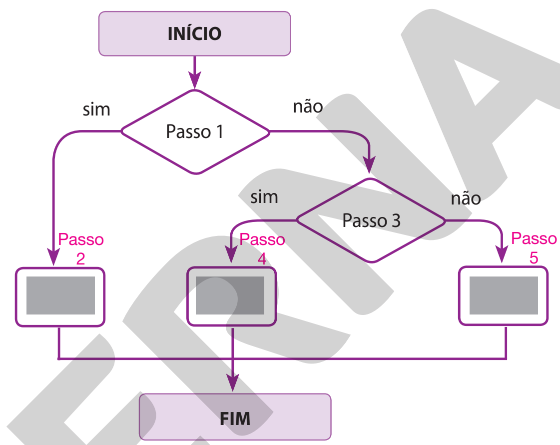
Passo 2. As retas são concorrentes e o sistema é do tipo SPD. Podemos encerrar o algoritmo.

Passo 3. Se $n_1 = n_2$, vá para o passo 4. Se não, vá para o passo 5.

Passo 4. As retas são coincidentes e o sistema é do tipo SPI. Encerra-se o algoritmo.

Passo 5. As retas são paralelas não coincidentes e o sistema é do tipo SI. Encerra-se o algoritmo.

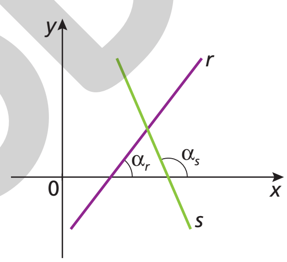
Esse mesmo algoritmo pode ser representado por meio de um fluxograma com estruturas de decisão. Os passos 1 e 3 estão dentro desse tipo de estrutura que permite, a partir de uma verificação, que se siga um determinado caminho no fluxograma. O passo 1 nos diz que se o valor de m_1 é diferente de m_2, seguimos pelo caminho com o rótulo sim; mas, se forem iguais, segue-se para o passo 3. Copie o fluxograma a seguir em seu caderno e, a partir do algoritmo em linguagem corrente, preencha os retângulos com os passos na ordem correta.



NELSON MATSUDA

Condição de perpendicularismo de duas retas

Inicialmente, vamos verificar quais condições devem ocorrer para que as retas *r* e *s*, não verticais, de inclinações α_r e α_s e de coeficientes angulares $m_r = \text{tg}\ \alpha_r$ e $m_s = \text{tg}\ \alpha_s$, sejam concorrentes.



Para que as retas *r* e *s* sejam concorrentes, isto é, não paralelas, devemos ter:

$\alpha_r \neq \alpha_s \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_r \neq \text{tg}\ \alpha_s \Rightarrow m_r \neq m_s$

Portanto, para que duas retas não verticais sejam **concorrentes**, elas devem ter coeficientes angulares diferentes.

Agora, vamos considerar as retas *r* e *s*, não verticais, concorrentes perpendiculares, conforme a figura ao lado. Assim:

$$\alpha_s = \alpha_r + 90° \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_s = \text{tg}\ (\alpha_r + 90°) \quad \text{(I)}$$

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen}\ (\alpha_r + 90°)}{\cos\ (\alpha_r + 90°)} = \frac{\text{sen}\ \alpha_r \cdot \cos 90° + \text{sen}\ 90° \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot \cos 90° - \text{sen}\ \alpha_r \cdot \text{sen}\ 90°}$$

Como $\cos 90° = 0$ e $\text{sen}\ 90° = 1$, temos:

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen}\ \alpha_r \cdot 0 + 1 \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot 0 - \text{sen}\ \alpha_r \cdot 1} = \frac{\cos \alpha_r}{-\text{sen}\ \alpha_r} = -\frac{1}{\frac{\text{sen}\ \alpha_r}{\cos \alpha_r}} = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r}$$

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

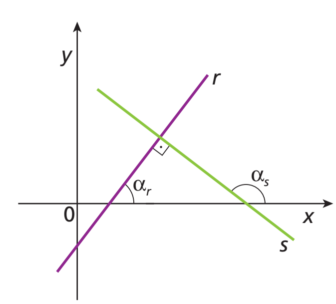
$$\text{tg}\ \alpha_s = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Portanto, as retas *r* e *s*, não verticais, são **perpendiculares** quando:

$$m_r \cdot m_s = -1$$

Reflita

- Se *r* e *s* forem verticais, poderão ser retas concorrentes?
- Se apenas uma das retas, *r* ou *s*, for vertical, poderá ocorrer a igualdade $m_r = m_s$?



Observações

Lembre-se de que:

- $\text{tg}\ (a + b) = \dfrac{\text{sen}\ (a + b)}{\cos\ (a + b)}$
- $\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a$
- $\cos\ (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

- Não; se *r* e *s* forem verticais, elas não poderão ser concorrentes, pois têm a mesma direção. Logo, são paralelas (coincidentes ou distintas).
- Não; se a reta *r* for vertical e a reta *s* for não vertical, m_r não estará definido e m_s, sim. Portanto, não temos $m_r = m_s$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R20. Determinar a posição da reta r, de equação $x + 2y - 6 = 0$, em relação à reta s, de equação $3x + 6y - 5 = 0$.

▸ **Resolução**

Primeiro, vamos determinar os coeficientes angular e linear de r e s usando as equações na forma reduzida.

Para a reta r, temos:

$$x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Portanto: $m_r = -\frac{1}{2}$ e $n_r = 3$

Para a reta s, temos:

$$3x + 6y - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$$

Portanto: $m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_s = \frac{5}{6}$

Como $m_r = m_s = -\frac{1}{2}$ e $n_r \neq n_s$, então as retas r e s são paralelas distintas.

R21. Verificar se as retas r e s, de equações $2x + 3y - 6 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$ são perpendiculares.

▸ **Resolução**

reta r:

$$2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$$

reta s:

$$3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = \frac{3}{2}$$

Como $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, sabemos que $m_r \cdot m_s = -1$; portanto, $r \perp s$.

Observação

A notação $r \perp s$ indica que as retas r e s são perpendiculares.

R22. Escrever a equação da reta r que passe pelo ponto $P(-2, 1)$ e seja perpendicular à reta s de equação $2x + y - 2 = 0$.

▸ **Resolução**

A equação reduzida da reta s é:

$$2x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2x + 2$$

Portanto, $m_s = -2$.

Para que as retas r e s sejam perpendiculares, é necessário que o produto de seus coeficientes angulares seja igual a -1.

Assim:

$$m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow (-2) \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_r = \frac{1}{2}$$

O ponto P pertence à reta r; então:

$$y_P = m_r \cdot x_P + n_r \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + n_r \Rightarrow$$

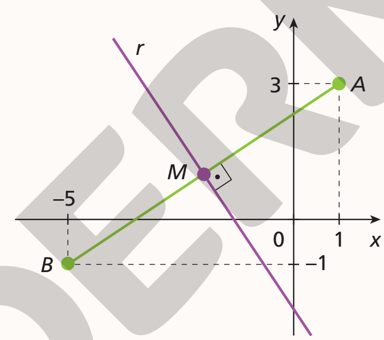
$$\Rightarrow n_r = 2$$

Logo, a equação da reta r, que passa por P e é perpendicular à reta s, é $y = \frac{1}{2}x + 2$.

R23. Determinar a equação reduzida da mediatriz r do segmento $\overline{AB}$, de extremidades $A(1, 3)$ e $B(-5, -1)$.

▸ **Resolução**

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento e que passa por seu ponto médio.



Vamos determinar as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$:

- $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-5)}{2} = -2$
- $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$

Assim, o ponto médio é $M(-2, 1)$.

O coeficiente angular da reta suporte do segmento $\overline{AB}$ é tal que:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{-5 - 1} = \frac{2}{3}$$

O coeficiente angular da reta mediatriz r é tal que:

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_r = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot m_r = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_r = -\frac{3}{2}$$

Como o ponto médio M de $\overline{AB}$ pertence à mediatriz r, temos:

$$y_M = m_r \cdot x_M + n_r \Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} \cdot (-2) + n_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_r = -2$$

Portanto, a equação reduzida da reta r, mediatriz de $\overline{AB}$, é $y = -\frac{3}{2}x - 2$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

42. Em cada item, verifique se as retas *r* e *s* são paralelas coincidentes, paralelas distintas, concorrentes não perpendiculares ou concorrentes perpendiculares.

a) $r: x + y - 3 = 0$ e $s: x - y + 1 = 0$ concorrentes perpendiculares

b) $r: 3x - 2y + 1 = 0$ e $s: y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ concorrentes

c) $r: y = 2 + x$ e $s: -x + y - 3 = 0$ paralelas distintas

d) $r: 2x - y + 2 = 0$ e $s: x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$ paralelas coincidentes

43. Dadas as retas *r*, de equação $2x - 4y - 2 = 0$, e *s*, de equação $y = \frac{x}{2} + 3$, faça o que se pede. Ver resolução no Guia do professor.

a) Represente essas retas no plano cartesiano.

b) Observe a representação do item **a** e escreva a posição relativa de *r* e *s*.

c) Verifique algebricamente a resposta dada no item **b**.

44. Determine a equação geral da reta *r* que passa pela origem do sistema cartesiano e é:

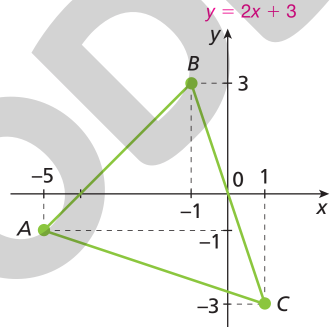
a) paralela à reta de equação $5x - y + 2 = 0$. $5x - y = 0$

b) perpendicular à reta de equação $5x + y + 2 = 0$. $x - 5y = 0$

45. Dada a reta *r*, de equação $y = 3x - 1$, e o ponto $P(-3, 1)$, determine a equação geral da reta *s* que passa pelo ponto *P* e é perpendicular à reta *r*. $x + 3y = 0$

46. Obtenha a equação da reta paralela à reta $4x - 2y + 1 = 0$ e que passa pelo ponto de intersecção da reta $2x - y + 3 = 0$ com o eixo das ordenadas. $y = 2x + 3$

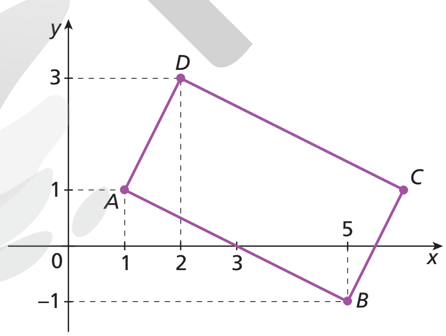
47. Considere o triângulo representado ao lado e resolva os itens a seguir. Você pode fazer esta questão com um colega. Ver resolução no Guia do professor.



a) Obtenha a equação da mediatriz de cada um dos lados do triângulo.

b) O circuncentro *O* de um triângulo *ABC* é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados desse triângulo. Determine as coordenadas do ponto *O*. $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

48. Analise o retângulo representado abaixo.



Determine:

a) as coordenadas dos vértices do retângulo. $A(1, 1)$, $B(5, -1)$, $C(6, 1)$ e $D(2, 3)$

b) as equações gerais das retas suportes das diagonais. $y - 1 = 0$ e $3x + 4y - 17 = 0$

c) a área do retângulo. 10 unidades de área

d) o perímetro do retângulo. $6\sqrt{5}$ unidades de comprimento

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

2.4 Vetores

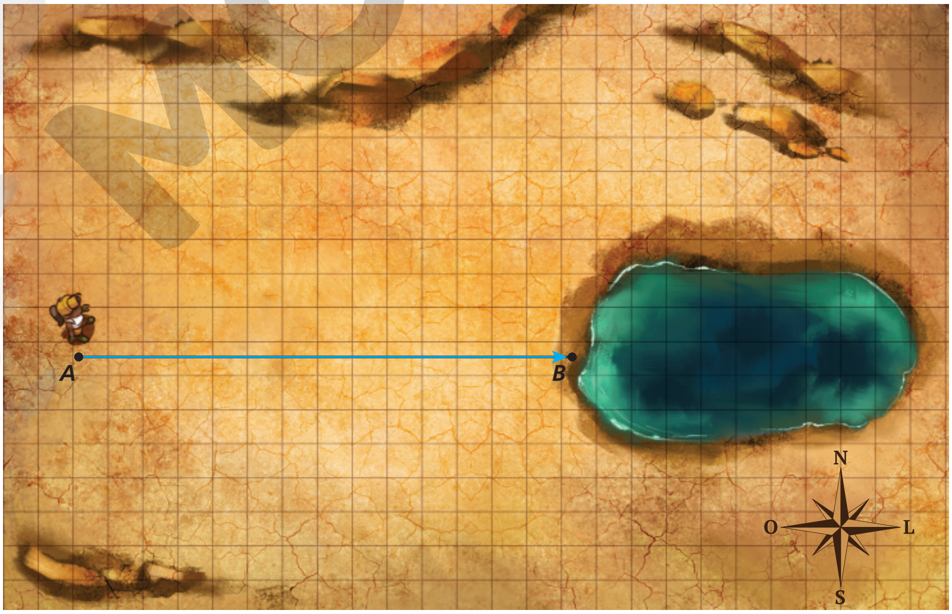
Grandezas escalares e grandezas vetoriais

Algumas grandezas podem ser representadas apenas pelo seu valor numérico e unidade de medida, por exemplo: massa, volume, altura, temperatura etc. Essas grandezas são chamadas de **escalares**.

Entretanto, há grandezas que, para serem representadas, necessitam de outros atributos além do valor numérico e da unidade de medida. Suponha que você precise ir a um local que não conhece. Nesse caso, apenas a informação sobre a distância não será suficiente: serão necessárias outras informações, como a direção e o sentido a seguir. Assim, grandezas como deslocamento, velocidade, aceleração etc. precisam de outras informações para que sejam representadas. Essas grandezas são chamadas de **vetoriais**.

Para que a informação da primeira imagem seja completa, será necessário indicar a distância, a direção e o sentido. Essas informações estão resumidas na placa da segunda imagem.

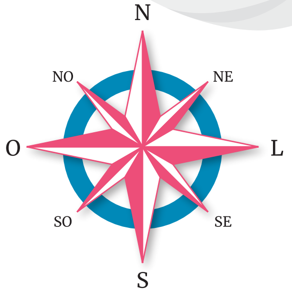
Podemos representar geometricamente o deslocamento da pessoa até a água da seguinte forma:



Observe que a direção ligando a pessoa à água está representada por uma reta que passa pelos pontos A e B. A medida do segmento $\overline{AB}$ determina a distância a ser percorrida, e a ponta de seta do segmento determina o sentido. Assim, o segmento orientado representa a direção, o sentido e a distância.

Observação

A ideia de direção pode ser percebida na orientação dos pontos cardeais. O eixo Norte-Sul é uma direção, assim como o eixo Leste-Oeste.

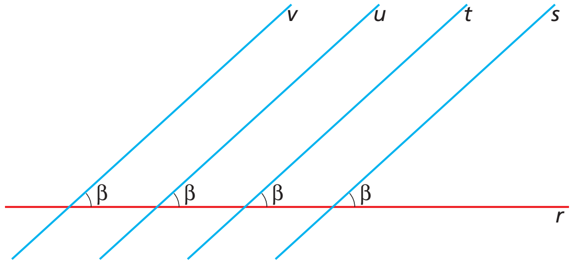


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

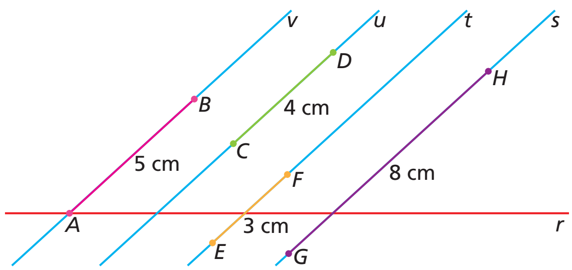
Definindo vetores

Observe, na figura, que o ângulo de medida β determina a direção das retas *s*, *t*, *u*, *v* em relação à reta *r*.



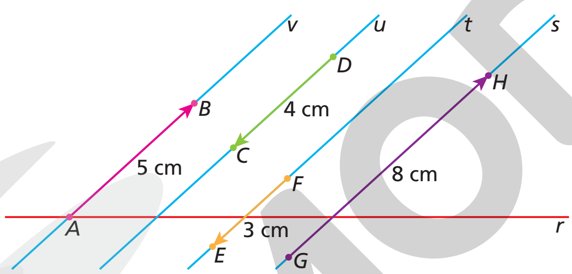
Dizemos que essas retas têm a mesma direção, pois são paralelas. Dessa maneira, para mencionar a direção dessas retas, basta dizer a direção de apenas uma delas, que é determinada pelo ângulo de medida β tomado a partir da reta *r*, no sentido anti-horário.

Agora, observe que podemos indicar o comprimento de segmentos de retas.



Dessa maneira, já temos um modo de representar, geometricamente, a direção e o comprimento.

Podemos, também, representar o sentido. Observe.



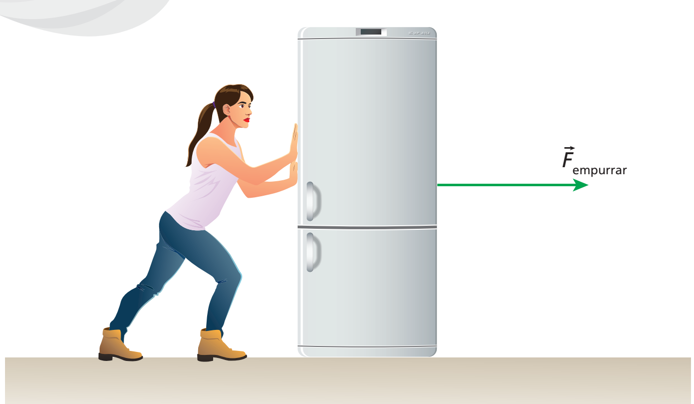
Note que a ponta de seta em cada segmento indica o sentido. Por exemplo, o sentido do segmento $\overline{AB}$ é o mesmo do segmento $\overline{GH}$ e contrário ao dos segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{FE}$.

Portanto, por meio de um segmento de reta orientado, podemos expressar uma direção, um sentido e um comprimento, que é o valor atribuído à grandeza, também chamado de **módulo**.

Os **vetores** são representadas geometricamente por esses segmentos orientados.

Exemplo

Veja a ilustração de uma pessoa empurrando uma geladeira, que se desloca com uma força $\vec{F}$ de módulo igual a 10 N.



Considerando a escala usada, o vetor que representa 10 N tem 2 cm; então, um vetor com uma força de 5 N teria a metade do comprimento, ou seja, 1 cm.

Reflita

Se, no exemplo ao lado, além da força representada pelo vetor $\vec{F}$, fosse preciso representar outra força de módulo 5 N, qual seria o comprimento do vetor?

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

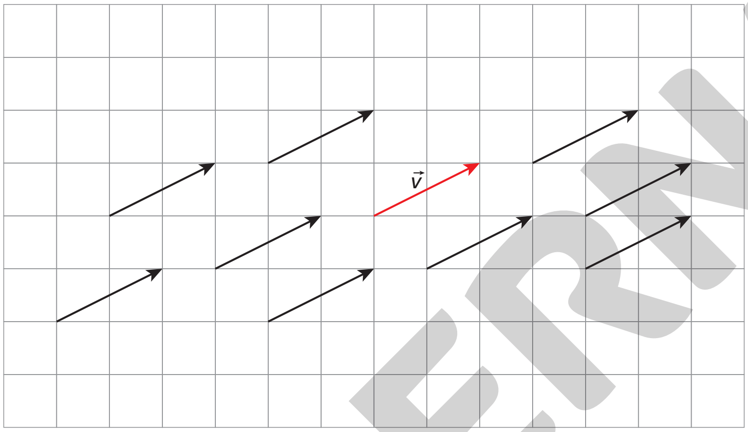
O vetor $\vec{F}$ está indicando a direção, que é horizontal; o sentido, da esquerda para a direita de quem olha para a figura; e, por meio de seu comprimento, a força, em Newton. Adotamos como comprimento da seta 2 cm, que, nesse caso, correspondente ao módulo da força igual a 10 N – mas poderíamos adotar outra escala.

Geralmente, indicamos um vetor com uma letra e uma seta acima dessa letra, como fizemos com o vetor $\vec{F}$ no exemplo anterior. O módulo de um vetor é representado por $|\vec{F}|$ ou F.

Um vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Cada um desses segmentos orientados representa o vetor.

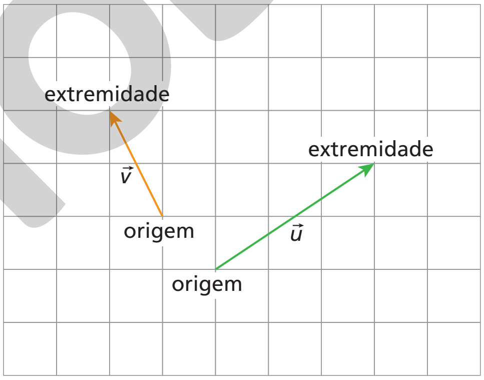
Exemplo

Na figura, o vetor $\vec{v}$ representa todos os vetores que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo.



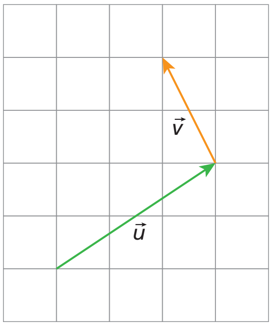
Adição vetorial

Considere os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Na figura, destacamos a extremidade (ponta de seta) e a origem (ponta sem seta).



Podemos adicionar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ usando o seguinte procedimento:

1. Deslocamos qualquer um dos dois vetores de modo que a extremidade de um coincida com a origem do outro.



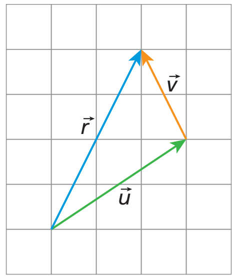
Observação

Nesse caso, "deslocar" significa que vamos trabalhar com outro segmento orientado que representa o vetor $\vec{u}$ ou o vetor $\vec{v}$ em outra parte do plano. Isso ocorre porque, como vimos, um vetor é representado por todos os infinitos segmentos orientados de mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

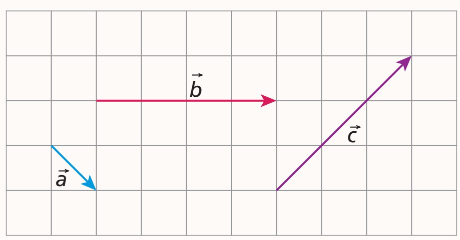
2. Construímos o vetor soma ou resultante da adição de maneira que sua origem coincida com a origem da linha poligonal formada pelos dois vetores no item **1** e a extremidade coincida com a extremidade da linha poligonal.



Assim, $\vec{u} + \vec{v}$ é igual ao vetor $\vec{r}$.

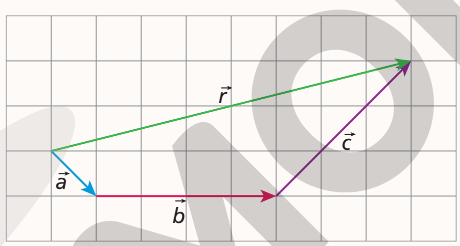
Exercício resolvido

R24. Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, determinar o vetor soma e calcular seu módulo, sabendo que o lado de cada quadrado da malha mede 1 cm.

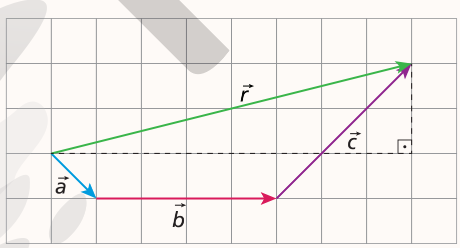


▸ Resolução

Para obter o vetor resultante $\vec{r}$, compomos uma linha poligonal de modo que a extremidade de um vetor coincida com a origem de outro.



Podemos calcular o módulo do vetor soma $\vec{r}$ usando o teorema de Pitágoras.



Como cada quadrado da malha tem lado de medida 1 cm e r é o módulo do vetor soma, fazemos:

$r^2 = 2^2 + 8^2$

$r^2 = 4 + 64$

$r^2 = 68 = 2^2 \cdot 17$

$r = \sqrt{2^2 \cdot 17}$

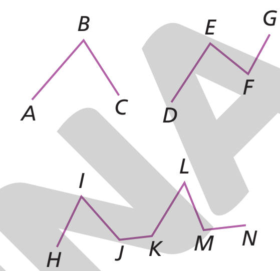
$r = 2\sqrt{17}$

Portanto, o módulo do vetor soma $\vec{r}$ é igual a $2\sqrt{17}$ cm.

Observações

- Uma linha poligonal é formada por dois ou mais segmentos de reta, dois a dois consecutivos.
- Os segmentos de reta consecutivos de uma linha poligonal não são colineares.

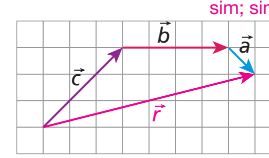
Observe que segmentos não consecutivos podem ser colineares (segmentos $\overline{JK}$ e $\overline{MN}$, no exemplo a seguir). Veja algumas linhas poligonais:

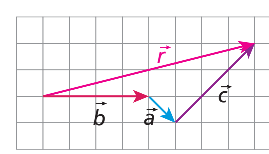


Reflita

- Com base nas duas figuras abaixo, reflita e responda: na resolução do exercício **R24**, deslocamos o vetor $\vec{b}$, mas poderíamos deslocar os outros vetores? O resultado seria o mesmo?

sim; sim





- Suponha que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, do exercício **R24**, estejam, na disposição da figura ao lado, representados em um plano cartesiano, sendo que origem de $\vec{a}$ coincide com a origem do plano e que $\vec{b}$ é paralelo ao eixo das abscissas.

(1, −1), (5, −1) e (8, 2)

a) Quais seriam as coordenadas das extremidades de cada um dos vetores?

b) Como você poderia calcular $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ aplicando o que estudou no início deste capítulo?

Aplicando a fórmula da distância entre os pontos (0, 0) e (8, 2).

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

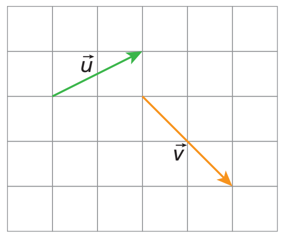
MODERNA

Exercício proposto

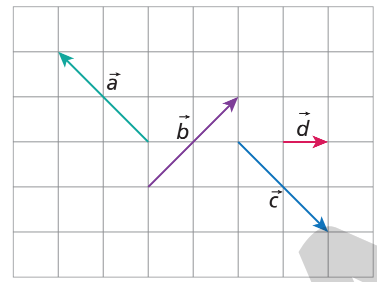
Registre as respostas em seu caderno.

49. Copie os vetores de cada item em uma malha quadriculada e faça a soma vetorial para obter o vetor resultante e seu módulo. Considere que o lado do quadrado da malha mede 1 cm. Ver resolução no Guia do professor.

a)



b)

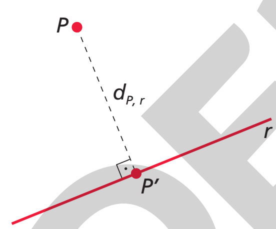


NELSON MATSUDA

Este tópico contempla a competência específica **3** e a habilidade **EM13MAT301** da BNCC, já que os alunos deverão aplicar conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver problemas que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas.

3 Distância entre ponto e reta

Como já vimos, a distância de um ponto P a uma reta r é a distância entre P e sua projeção P' sobre r.



Para o desenvolvimento desse conceito, trilhamos o caminho das ideias na resolução de um caso particular. A demonstração da fórmula segue o mesmo caminho sem acrescentar novas ideias. Em seguida, optamos pela simples apresentação da fórmula.

Exemplo

Para calcular a distância entre o ponto $P(2, 7)$ e a reta r, de equação $2x + y + 1 = 0$, precisamos inicialmente obter a equação da reta s que passa por P e é perpendicular a r. As retas r e s interceptam-se no ponto $P'(x, y)$, que é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r. Então, para resolver esse problema, basta calcular a distância entre P e P'.

Temos:

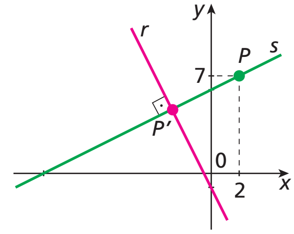
reta r: $2x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x - 1 \Rightarrow m_r = -2$

Para $r \perp s$, temos: $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow (-2) \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \frac{1}{2}$

Portanto, a equação da reta s é:

$$y - y_P = m_s(x - x_P) \Rightarrow y - 7 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2y + 12 = 0$$

Como $\{P'\} = r \cap s$, devemos resolver o sistema formado pelas equações das retas r e s e obter as coordenadas de P'.



$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{14}{5} \text{ e } y = \frac{23}{5}$$

Portanto: $P'\left(-\frac{14}{5}, \frac{23}{5}\right)$

Como $d_{P,\,r} = d_{P,\,P'}$, temos:

$$d_{P,\,r} = \sqrt{\left(-\frac{14}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{23}{5} - 7\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{25} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Logo, a distância entre o ponto P e a reta r é $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Fórmula da distância entre um ponto e uma reta

Ao aplicar o processo usado no exemplo anterior para um ponto $P(x_P, y_P)$ e uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, obtemos a fórmula empregada para calcular a distância $d_{P,\,r}$ entre o ponto P e a reta r:

$$d_{P,\,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Observação

As retas bissetrizes dos ângulos formados por duas retas r e s, concorrentes, podem ser definidas como o conjunto dos pontos do plano que as contém e que equidistam de r e s. Ou seja, as equações dessas bissetrizes são dadas pela condição:

$$d_{P,r} = d_{P,s}$$

Exemplo

Aplicando a fórmula ao exemplo anterior, tendo o ponto $P(2, 7)$ e a reta r de equação $2x + y + 1 = 0$, obtemos:

$$d_{P,\,r} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Exercícios resolvidos

R25. Dado o triângulo de vértices $A(2, 4)$, $B(-2, 2)$ e $C(3, 0)$, calcular a medida de sua altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

▸ **Resolução**

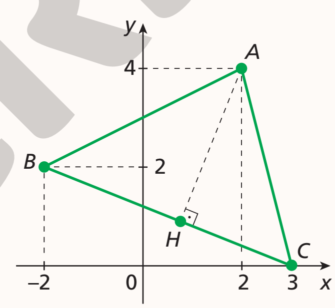
Vamos determinar a equação da reta suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 6 = 0$$

A medida procurada é a distância entre o ponto $A(2, 4)$ e a reta $\overleftrightarrow{BC}$:

$$d_{A,\,\overleftrightarrow{BC}} = \frac{|2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + (-6)|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{29}} = \frac{18\sqrt{29}}{29}$$

Logo, a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é $\frac{18\sqrt{29}}{29}$.



ADILSON SECCO

R26. Calcular a distância entre as retas paralelas r e s, de equações $2x - y + 4 = 0$ e $2x - y - 7 = 0$, respectivamente.

▸ **Resolução**

Sabemos que a distância entre duas retas paralelas é igual à distância de um ponto P qualquer de uma delas à outra reta.

Então, vamos calcular as coordenadas de um ponto P qualquer da reta r.

Para $x = 0$, temos: $2 \cdot 0 - y + 4 = 0 \Rightarrow y = 4$

Portanto, $P(0, 4)$ é um ponto de r.

Agora, basta calcular a distância entre P e a reta s.

$$d_{P,s} = \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + (-7)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

Logo, a distância entre as duas retas é $\frac{11\sqrt{5}}{5}$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

50. Obtenha a distância da origem do plano cartesiano à reta de equação $3x + 4y - 4 = 0$. $\frac{4}{5}$

51. Um triângulo tem vértices $A(2, 0)$, $B(3, 1)$ e $C(0, 2)$. Calcule a medida da altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

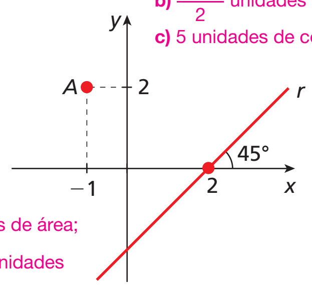
MODERNA

Avaliar a conveniência de, após a resolução do exercício **54**, pedir aos alunos que, em grupo, refaçam os mesmos passos desse exercício considerando as equações gerais das retas: (r) $a_r x + b_r y + c_r = 0$ e (s) $a_s x + b_s y + c_s = 0$
Com esse procedimento, eles obtêm a fórmula das bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes.

52. Obtenha a distância entre as retas paralelas $2x - 3y + 5 = 0$ e $4x - 6y - 1 = 0$. $\frac{11\sqrt{13}}{26}$

53. Um quadrado tem um vértice em A e um lado na reta r.

b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento
c) 5 unidades de comprimento



d) área: $\frac{25}{2}$ unidades de área;
perímetro: $10\sqrt{2}$ unidades de comprimento

a) Identifique o ponto A e determine a equação geral da reta r. $A(-1, 2)$; $x - y - 2 = 0$
b) Calcule a medida ℓ do lado do quadrado.
c) Determine a medida da diagonal do quadrado.
d) Calcule a área e o perímetro do quadrado.

54. Dadas as retas r: $2x + 5y - 4 = 0$ e s: $5x - 2y + 8 = 0$, determine as equações das retas cujos pontos são equidistantes de r e s. Siga estes passos: Ver resolução no Guia do professor.
a) considere um ponto genérico $P(x, y)$;
b) use a definição $d_{P,r} = d_{P,s}$;
c) organize a equação eliminando os módulos;

55. (FGV) No plano cartesiano, seja P o ponto situado no 1º quadrante e pertencente à reta de equação $y = 3x$. Sabendo que a distância de P à reta de equação $3x + 4y = 0$ é igual a 3, podemos afirmar que a soma das coordenadas de P vale: alternativa d
a) 5,6 b) 5,2 c) 4,8 d) 4,0 e) 4,4

56. Elabore um problema sobre o cálculo da altura de um trapézio dadas as coordenadas de seus vértices. Troque-o com um colega para que cada um de vocês resolva o problema formulado pelo outro. Depois, destroquem os problemas para verificar a resolução. resposta pessoal

56. Orientar os alunos a verificar se os quatro pontos escolhidos são, de fato, vértices de um trapézio. Lembrar que um trapézio é um quadrilátero cujas retas suportes de dois de seus lados são paralelas.

4 Inequações do 1º grau com duas incógnitas

Esse tópico contempla a competência específica **3** e a habilidade **EM13MAT301** da BNCC, já que os alunos irão aplicar conceitos, definições e procedimentos matemáticos para resolver problemas que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas.

Já vimos como resolver inequações com uma incógnita. Agora, vamos estudar inequações do 1º grau com duas incógnitas.

Exemplos

a) $2x - 7y < 0$ **b)** $\sqrt{5}x + y \geqslant 0$ **c)** $8y - \frac{1}{3}x > 0$ **d)** $x + y \leqslant 0$

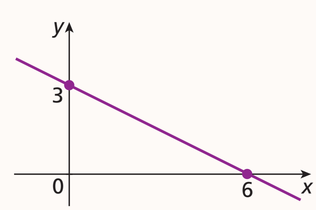
Uma inequação do 1º grau com duas incógnitas admite infinitas soluções, que podem ser representadas graficamente, conforme veremos nos exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

R27. Representar graficamente a inequação $x + 2y - 6 \leqslant 0$.

▸ **Resolução**

A reta de equação $x + 2y - 6 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos. Para verificar qual dos semiplanos representa os pontos tais que $x + 2y - 6 \leqslant 0$, vamos testar um ponto auxiliar qualquer, por exemplo, $P(0, 0)$, substituindo suas coordenadas na desigualdade.



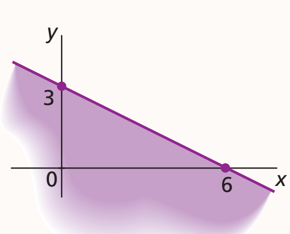
Assim:

$x + 2y - 6 \leqslant 0 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 - 6 \leqslant 0 \Rightarrow -6 \leqslant 0$ (verdadeira)

Como a sentença é verdadeira, P está no semiplano procurado; logo, podemos desenhar o semiplano que representa $x + 2y - 6 \leqslant 0$.

Observe:

Como a reta de equação $x + 2y - 6 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos, então, ao testarmos um ponto fora dessa reta, teremos como resultado que esse ponto pertence ou não ao semiplano $x + 2y - 6 \leqslant 0$.
Se o ponto pertencer a esse semiplano, então todos os pontos do mesmo lado da reta em que está o ponto testado também pertencerão a esse semiplano; se o ponto não pertencer a esse semiplano, então todos os pontos do mesmo lado da reta em que está o ponto testado também não pertencerão a ele.



Reflita

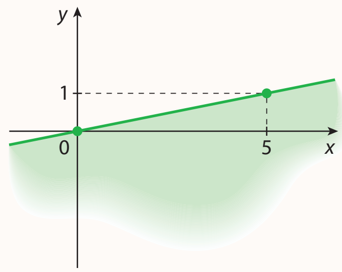
Por que basta testar um único ponto fora da reta $x + 2y - 6 = 0$ para determinar o semiplano que representa a inequação $x + 2y - 6 \leqslant 0$?

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R28. Determinar a inequação cuja representação gráfica é:



▶ Resolução

Vamos escrever a equação da reta r que delimita o semiplano. Ela passa pelos pontos (0, 0) e (5, 1); logo, $m_r = \frac{1-0}{5-0} = \frac{1}{5}$. Sua equação geral é dada por $y - 0 = \frac{1}{5} \cdot (x - 0)$, ou seja, é $x - 5y = 0$.

Agora, vamos calcular o valor numérico V do 1º membro da equação geral de r para as coordenadas de um ponto da região representada que não pertença a r. Substituindo na expressão $x - 5y$ as coordenadas do ponto $P(1, 0)$, por exemplo, temos: $V = 1 - 5 \cdot 0 = 1$

Como $V > 0$ e r faz parte da região representada, os pontos descritos na representação gráfica são tais que $x - 5y \geqslant 0$.

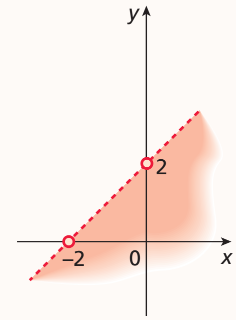
R29. Representar graficamente o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + y - 4 \leqslant 0 \end{cases}$$

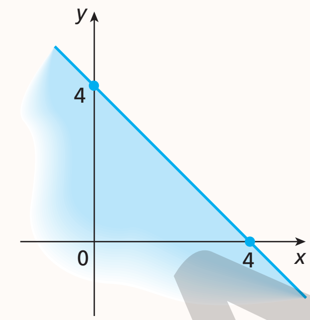
▶ Resolução

Vamos representar graficamente cada inequação:

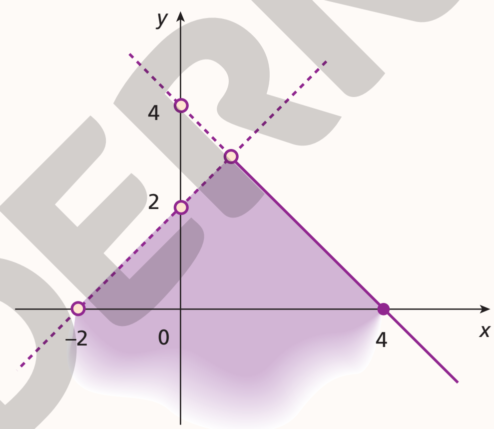
$x - y + 2 > 0$



$x + y - 4 \leqslant 0$



A região procurada é a intersecção dos dois semiplanos formados pelas soluções das inequações $x - y + 2 > 0$ e $x + y - 4 \leqslant 0$. Logo:



Se julgar conveniente, aproveitar o exercício **60** para colocar em discussão a pesquisa de **métodos de otimização**, isto é, métodos que garantam o mínimo custo com o máximo rendimento.

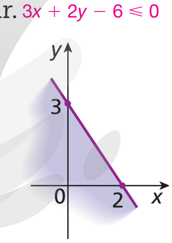
Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

57. Resolva graficamente as inequações: Ver resolução no Guia do professor.

a) $x - y + 1 \geqslant 0$ b) $2x - y + 2 < 0$

58. Determine a inequação cuja representação gráfica é dada a seguir. $3x + 2y - 6 \leqslant 0$



59. Represente graficamente o sistema de inequações:

$$\begin{cases} 2x - y - 10 \leqslant 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$$

Ver resolução no Guia do professor.

60. Uma fábrica produz dois tipos de calça, A e B, sendo x a quantidade diária produzida da calça A e y, a da calça B. Cada unidade produzida de A custa R$ 30,00 e cada unidade produzida de B custa R$ 70,00; portanto, o custo total diário da produção conjunta de A e B é igual a $p = 30x + 70y$.

a) Sendo o custo total diário igual a R$ 4.200,00, para a produção de igual quantidade das calças A e B, quantas calças são confeccionadas por dia? 84 calças

b) Um valor para x ou y que não seja um número natural tem significado nesse problema? Justifique. Não, pois, como x e y representam o número de calças de cada tipo, devem ser números naturais.

c) Sendo o valor máximo para p igual a R$ 6.300,00, quais são os valores máximos para x e y, sabendo que $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$?

d) Expresse, por meio de uma inequação, o custo total diário de produção ser no máximo R$ 6.300,00. A representação gráfica dessa inequação, considerando as condições do problema, é um semiplano? Justifique sua resposta.

60. c) $x = 210$ (ocorre quando $y = 0$); $y = 90$ (ocorre quando $x = 0$)

d) $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$, com $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$
Não, pois, como o problema só faz sentido para $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$, a representação gráfica da inequação é um conjunto finito de pontos do semiplano $30x + 70y - 6.300 \leqslant 0$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

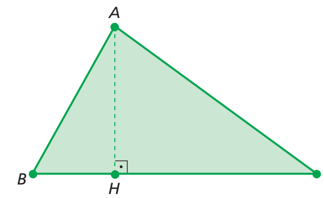
Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **3** e da habilidade **EM13MAT307** da BNCC, já que os alunos irão empregar diferentes métodos para a obtenção da área de uma superfície e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais.

Observação

Conforme vimos anteriormente, em alguns contextos que envolvem áreas, chamaremos a **superfície poligonal** com o nome do **polígono** que a determina. Por exemplo, em vez de dizer "a área de uma superfície triangular", diremos "a área do triângulo".

5 Área de uma superfície triangular: uma aplicação na Geometria analítica

Considere o triângulo representado ao lado.



Pelo olhar da Geometria plana, a área desse triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

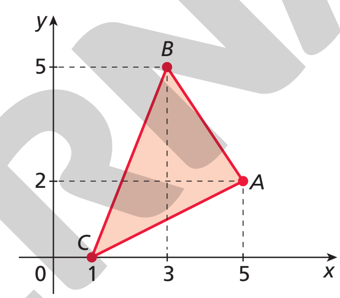
Considerando a distância entre dois pontos e entre um ponto e uma reta, essa fórmula pode ser escrita como:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r},$$

em que r é a reta suporte do lado $\overline{BC}$ do triângulo.

Exemplo

Os pontos $A(5, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(1, 0)$ são vértices do triângulo ABC.



Vamos calcular a área desse triângulo.

Podemos escolher $\overline{BC}$ como base e determinar sua medida:

$$d_{B,C} = \sqrt{(1-3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Agora, vamos determinar a equação da reta r, suporte do lado $\overline{BC}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + y - 5 - 3y = 0 \Rightarrow 5x - 2y - 5 = 0$$

A distância do vértice A à reta r, suporte do lado $\overline{BC}$, é dada por:

$$d_{A,r} = \frac{|5 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 + (-5)|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|16|}{\sqrt{29}} = \frac{16}{\sqrt{29}}$$

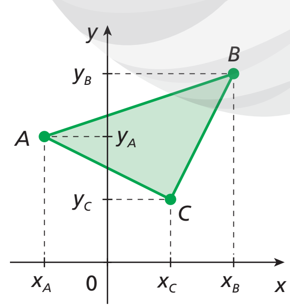
Considerando os dados obtidos, vamos calcular a área do triângulo.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{16}{\sqrt{29}} = \frac{16}{2} = 8$$

Portanto, o triângulo ABC tem 8 unidades de área.

5.1 Fórmula da área do triângulo

Agora, vamos executar os mesmos passos do procedimento anterior para calcular a área de um triângulo qualquer supondo conhecidos os seus vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.



A medida do lado $\overline{BC}$ é:

$$d_{B,C} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

A equação da reta r, suporte do lado $\overline{BC}$, é dada por:

$$D' = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{(y_B - y_C)}_{a}x + \underbrace{(x_C - x_B)}_{b}y + \underbrace{(x_By_C - x_Cy_B)}_{c} = ax + by + c = 0$$

A distância do vértice A à reta suporte do lado $\overline{BC}$ é:

$$d_{A,r} = \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + (x_By_C - x_Cy_B)|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A área do triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot d_{B,C} \cdot d_{A,r} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\cancel{\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}}\right) \cdot |D|}{\cancel{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}}$$

Portanto, a área do triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é:

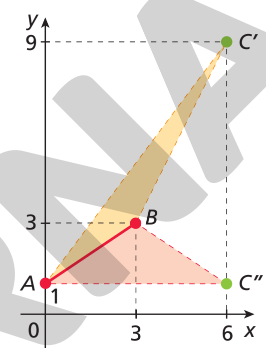
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|D|, \text{ com } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Observações

- D é D' com $x = x_A$ e $y = y_A$.
- Daqui em diante, basta aplicar essa fórmula, que é uma maneira mais simples de calcular a área de um triângulo.

Exemplo

Para obter o valor de y, sabendo que os pontos $A(0, 1)$, $B(3, 3)$ e $C(6, y)$ são os vértices de um triângulo cuja área é igual a 6 unidades de área, devemos ter:



$$A_{\text{triângulo}} = 6 \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow 6 = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow |D| = 12$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & y & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 3y - 18 - 0 - 3 = 3y - 15$$

Resolvendo a equação modular, obtemos:

$$|D| = 12 \Rightarrow |3y - 15| = 12 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 15 = 12 \\ \text{ou} \\ 3y - 15 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ \text{ou} \\ y = 1 \end{cases}$$

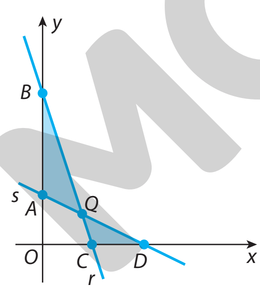
Portanto, $y = 9$ ou $y = 1$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

61. Obtenha a área do quadrilátero $ABCD$ sabendo que seus vértices são os pontos $A(4, 0)$, $B(7, 2)$, $C(0, 5)$ e $D(1, 1)$. 17 unidades de área

62. Considere as retas r e s, de equações $y = -3x + 6$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, respectivamente.



Determine:

a) as coordenadas dos pontos A, B, C e D. $A(0, 2)$, $B(0, 6)$, $C(2, 0)$ e $D(4, 0)$

b) as coordenadas do ponto Q, intersecção de retas r e s. $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c) a área da figura azul. $\frac{22}{5}$ unidades de área

d) a área do quadrilátero $OAQC$. $\frac{14}{5}$ unidades de área

e) a área do polígono $OBQD$. (Explique como você obteve esse resultado.)

62. e) $\frac{36}{5}$ unidades de área. A área do polígono $OBQD$ pode ser obtida somando-se as áreas dos itens **c** e **d**.

63. Dois dos vértices de um triângulo ABC são $A(2, -2)$ e $B(3, -3)$. Sabe-se que a área do triângulo é igual a 6 unidades de área e que o vértice C pertence à reta $2x + y - 1 = 0$. Determine as coordenadas do vértice C.

63. $(-11, 23)$ ou $(13, -25)$

64. Elabore um problema sobre o cálculo da área de um trapézio dadas as coordenadas de seus vértices. Troque-o com um colega para que cada um de vocês resolva o problema formulado pelo outro. Depois, destroquem os problemas para verificar a resolução. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

A situação inicial apresentada nesse tópico explora informações sobre o acelerador de partículas brasileiro, o Sirius, e sugere aos alunos que acessem um *site* para que obtenham mais informações relacionadas a esta máquina. Essa proposta corrobora com um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT303** da BNCC.

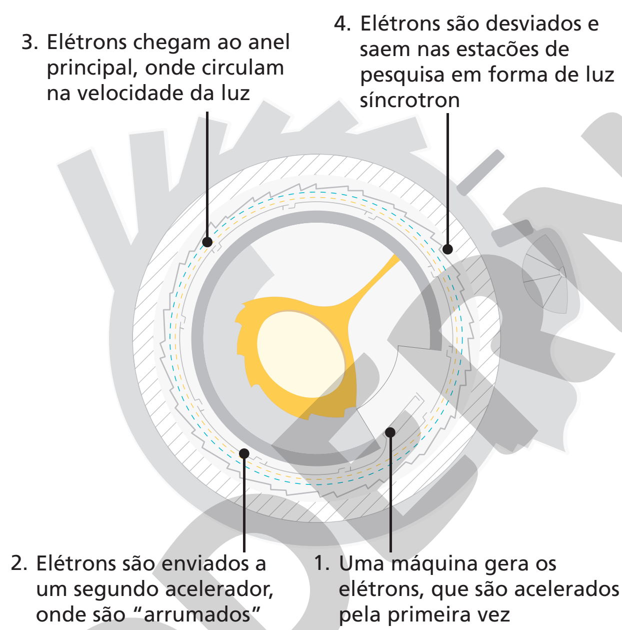
6 Circunferência

Sirius, o novo acelerador de partículas brasileiro, instalado em Campinas (SP), é a mais moderna infraestrutura já construída no Brasil. Foi projetado para emitir luz com brilho mais intenso dentre outros equipamentos de mesma classe de energia.

BRUNO PERES/ CC BY 2.0/MCTIC

Sirius, acelerador de partículas nucleares, Campinas, SP, nov. 2018.

Como funciona o Sirius



ADILSON SECCO

O processo inicial de aceleração começa com o aquecimento de um fio de tungstênio. Assim, elétrons são liberados do material e conduzidos para os anéis de aceleração.

Campos elétricos aceleram as partículas a velocidades próximas à da luz (300.000 km/s) e campos magnéticos são responsáveis pela mudança de trajetória delas em um túnel cuja circunferência mede 518 metros.

A radiação passa pelas amostras a serem analisadas nas linhas de luz. Nessas linhas são realizadas medições para experimentos em que se empregam diferentes técnicas, como espalhamento de raios X, espectroscopia do infravermelho ao raio X, cristalografia, tomografia e outras.

Para saber mais sobre o Sirius, acesse o *site* <https://www.lnls.cnpem.br/sirius/>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Reflita

Qual é a medida aproximada do raio do túnel do Sirius? 82,44 m

6.1 Equações da circunferência

Desde a Antiguidade alguns povos se preocupam em estudar a circunferência. Por exemplo, no papiro *Rhind* (texto matemático escrito pelo egípcio Ahmes por volta de 1650 a.C.), existem problemas envolvendo o cálculo de área de um círculo.

Por volta de 300 a.C., o matemático grego Euclides (c. 325-265) escreveu a obra intitulada *Elementos*, na qual descreve construções com régua e compasso traçando retas e circunferências. Mais tarde, René Descartes (1596-1650) contribuiu para o desenvolvimento da Geometria analítica, em que há outro enfoque para o estudo da circunferência.

A circunferência é uma forma fundamental no mundo moderno, desde o uso no dia a dia até o emprego em experimentos científicos, como no formato do acelerador de partículas brasileiro Sirius.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A circunferência como lugar geométrico

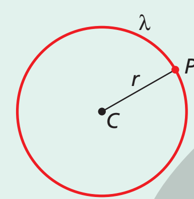
Quando analisamos figuras geométricas com base em certa propriedade, estamos estudando um lugar geométrico. Veja a definição:

Lugar geométrico plano é um conjunto de pontos do plano que partilham uma propriedade, de modo que:

- todos esses pontos atendam a essa propriedade;
- somente esses pontos tenham essa propriedade.

Na Geometria analítica, estudamos a circunferência como um lugar geométrico, pois ela é um conjunto de pontos que obedecem à seguinte propriedade: todos estão à mesma distância do centro. Além disso, **todos** os pontos da circunferência, e **somente** eles, atendem a essa propriedade.

Dados um ponto fixo C do plano e uma distância r, a **circunferência** λ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que estão à mesma distância r de C.



Observação

Não distinguiremos o raio de sua medida quando essa opção não causar dificuldade ao entendimento do texto. Assim, empregaremos com o mesmo significado: circunferência com raio de medida r e circunferência de raio r.

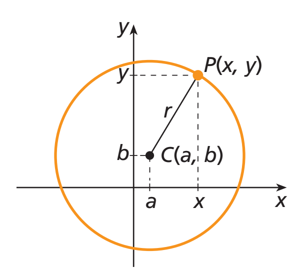
A distância r é a medida do **raio**, e C é o **centro** da circunferência.

Todo segmento cujas extremidades são o centro e um ponto qualquer da circunferência é um raio dessa circunferência.

Equação reduzida da circunferência

Assim como procedemos na obtenção da equação da reta, impondo uma condição algébrica para as coordenadas dos seus pontos, também podemos determinar a equação da circunferência.

Com base em sua definição como lugar geométrico, vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer $P(x, y)$ que pertence à circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r.



O ponto $P(x, y)$ pertence à circunferência se, e somente se, $d_{C,\,P} = r$.

Logo: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

A equação descrita acima é a **equação reduzida da circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio r.

Exemplo

Vamos determinar a equação reduzida da circunferência de raio $r = 3$ e centro $C(-2, 1)$.

Tomando um ponto $P(x, y)$ qualquer da circunferência, temos:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$[x-(-2)]^2 + (y-1)^2 = 3^2$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$

Logo, $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ é a equação reduzida dessa circunferência.

A equação reduzida da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é:
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
Para que seja $x^2 + y^2 = r^2$, devemos ter:
$x - a = x \Rightarrow a = 0$
$y - b = y \Rightarrow b = 0$
Logo, o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = r^2$ é $C(0, 0)$.

Reflita

Quando a equação reduzida da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$, qual é o centro da circunferência?

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R30. Verificar se os pontos $A(6, -3)$ e $B(4, 0)$ pertencem à circunferência de raio 4 e centro $(2, -3)$.

▸ **Resolução**

Primeiro, vamos obter a equação reduzida dessa circunferência:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + [y - (-3)]^2 = 4^2$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

Para saber se os pontos A e B pertencem à circunferência, vamos substituir suas coordenadas na equação obtida.

- Substituindo as coordenadas do ponto $A(6, -3)$ na equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, obtemos:
  $(6 - 2)^2 + (-3 + 3)^2 = 16 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \Rightarrow 16 = 16$
  Como obtemos uma sentença verdadeira, o ponto $A(6, -3)$ pertence à circunferência.
- Substituindo as coordenadas do ponto $B(4, 0)$ na equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$, obtemos:
  $(4 - 2)^2 + (0 + 3)^2 = 16 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2^2 + 3^2 = 16 \Rightarrow 4 + 9 = 16 \Rightarrow 13 = 16$
  Como obtemos uma sentença falsa, o ponto $B(4, 0)$ não pertence à circunferência.

R31. Determinar as coordenadas do centro C e o raio r de uma circunferência a partir de sua equação $(x + 1)^2 + y^2 = 16$.

▸ **Resolução**

Podemos obter o centro e o raio da circunferência comparando a equação na forma reduzida com a equação dada:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x + 1)^2 + y^2 = 16$ ou $[x - (-1)]^2 + (y - 0)^2 = 16$

Logo, $a = -1$ e $b = 0$; então, $C(-1, 0)$.

Como $r^2 = 16$ e $r > 0$, então $r = 4$.

Portanto, o centro é $C(-1, 0)$ e o raio é 4.

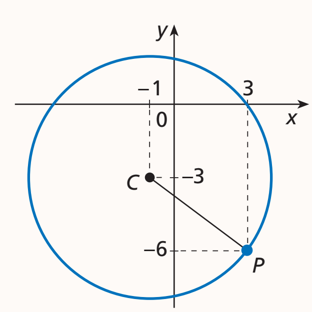
R32. Determinar a equação reduzida da circunferência que tem centro $C(-1, -3)$ e passa pelo ponto $P(3, -6)$.

▸ **Resolução**

O raio dessa circunferência é igual à distância $d_{C,P}$. Assim:

$r = d_{C,P} \Rightarrow r = \sqrt{(3 + 1)^2 + (-6 + 3)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{16 + 9} \Rightarrow r = \sqrt{25} \Rightarrow r = 5$



ADILSON SECCO

Substituindo as coordenadas do centro da circunferência e o valor de r na equação da circunferência, obtemos:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$[x - (-1)]^2 + [y - (-3)]^2 = 5^2$

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Logo, a equação reduzida dessa circunferência é:

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

Reflita

Uma circunferência desenhada no plano cartesiano representa o gráfico de uma função? Justifique.

Não, pois para um mesmo valor de x pode haver dois valores de y correspondentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

65. Dê o centro e o raio das circunferências de equações:

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$ $C(1, 2)$ e $r = 10$

b) $x^2 + (y - 3)^2 = 5$ $C(0, 3)$ e $r = \sqrt{5}$

c) $(x - 5)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ $C(5, 0)$ e $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

66. Indique quais dos pontos $P(-2, 1)$, $Q(-1, 3)$, $R(-2, 3)$, $S(0, 1)$ e $T(-1, 0)$ pertencem à circunferência $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$. R e T

67. Escreva a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que distam 3 unidades do ponto $C(2, -1)$. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

68. Determine, em cada caso, a equação reduzida da circunferência que tem raio r e centro C.

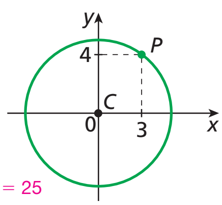
a) $r = 2$ e $C(1, 3)$ $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

b) $r = 4$ e $C(0, 0)$ $x^2 + y^2 = 16$

69. Determine a equação da circunferência que tem por diâmetro o segmento de reta $\overline{RS}$ cujas extremidades são $R(3, 0)$ e $S(-3, 3)$. $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$

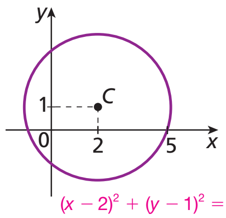
70. Obtenha a equação reduzida das circunferências.

a)



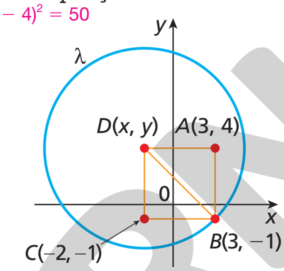
$x^2 + y^2 = 25$

b)



$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

71. Os pontos $A(3, 4)$, $B(3, -1)$, $C(-2, -1)$ e $D(x, y)$ são os vértices de um quadrado cuja medida da diagonal é o raio da circunferência λ, de centro D. Determine a equação reduzida de λ.
$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 50$



Equação geral da circunferência

A **equação geral da circunferência** de centro $C(a, b)$ e raio r é obtida desenvolvendo-se os quadrados da equação reduzida.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$

Portanto, a equação geral da circunferência é:

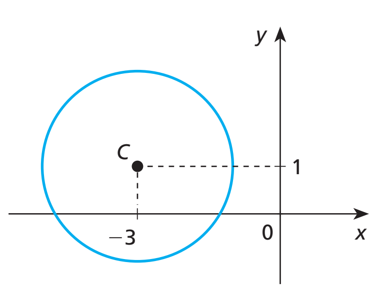
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Essa equação também é chamada de **equação normal da circunferência**.

Observe que essa equação pode ser escrita como $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, em que c é o termo independente e $c = a^2 + b^2 - r^2$. Dessa forma, verificamos que ela é uma equação incompleta do 2º grau com duas variáveis, já que a completa é do tipo: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

Exemplos

a) Vamos obter a equação geral da circunferência de centro $C(-3, 1)$ e raio $r = 2$.
Para isso, podemos escrever a equação reduzida da circunferência e, em seguida, desenvolver os quadrados.
$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 + 1 - 4 = 0$
Portanto, a equação geral da circunferência é: $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$



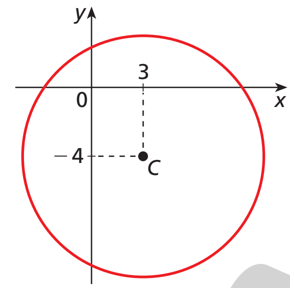
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$, vamos determinar o centro C e o raio r.

Para obter o centro e o raio da circunferência, podemos formar o trinômio quadrado perfeito.

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 6x + \square}_{(I)} + \underbrace{y^2 + 8y + \triangle}_{(II)} = 24 + \square + \triangle$$



Para que (I) e (II) sejam trinômios quadrados perfeitos, precisamos completá-los, respectivamente, com os números 9 e 16.

Ao adicionarmos 9 e 16 ao primeiro membro, para que a igualdade se mantenha, é preciso adicionar 9 e 16 também ao segundo membro. Assim:

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} + \underbrace{y^2 + 8y + 16}_{(y+4)^2} = 24 + 9 + 16$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 49$$

Portanto, o centro da circunferência é $C(3, -4)$ e o raio é 7.

Exercício resolvido

R33. Seja $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ uma equação completa do 2º grau. Determinar as condições que os coeficientes A, B, C, D, E e F devem cumprir para que a equação dada seja uma circunferência.

▸ Resolução

Vamos transformar em 1 o coeficiente de x^2. Para isso, dividiremos a equação por A:

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \ (A \neq 0)$$

Agora, compararemos essa equação com a equação geral da circunferência:

$$1x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$1x^2 + 1y^2 \ 0 \ -2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Observe que:

$\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$	$\frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2$ $r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A}$ $r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A}$ $r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$, com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$
$\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$	
$\frac{D}{A} = -2a \Rightarrow a = -\frac{D}{2A}$	
$\frac{E}{A} = -2b \Rightarrow b = -\frac{E}{2A}$	

Portanto, concluímos que as condições são:
$A = B \neq 0$, $C = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

MODERNA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

72. Determine, se existirem, o centro e o raio da circunferência em cada caso.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ $C(1, -1)$ e $r = \sqrt{2}$

b) $(x + 1)^2 - (y - 2)^2 = 9$ Não existem.

73. Analise se a equação $4x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 9 = 0$ representa uma circunferência. Não representa.

74. Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 18y + 8 = 0$, calcule as coordenadas do centro e o raio dessa circunferência, usando para a solução os seguintes critérios: $C(3, -9)$ e $r = \sqrt{82}$

a) completar quadrados;

b) analisar coeficientes.

75. Determine a equação geral da circunferência, em cada caso, dados o centro C e o raio r.

a) $C(-3, 2)$ e $r = 3$ $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

b) $C(0, -5)$ e $r = \sqrt{5}$ $x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$

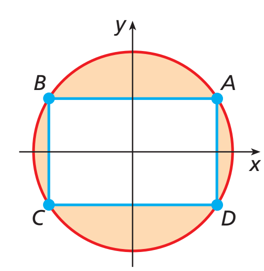
76. Em que condições a equação a seguir representa uma circunferência?

$$x^2 + y^2 + x + y + \frac{p}{2} = 0$$ $p < 1$

77. O quadrilátero $ABCD$ é um retângulo inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 5 = 0$.

a) Se a abscissa de A é 2, o que você conclui sobre sua ordenada? $y = 1$

b) Determine as coordenadas dos outros três vértices do retângulo. $B(-2, 1)$, $C(-2, -1)$ e $D(2, -1)$



c) É possível calcular a área da região alaranjada? Em caso afirmativo, explique como você faria para determiná-la. Sim; a área da região alaranjada pode ser calculada pela diferença entre a área do círculo e a área do retângulo.

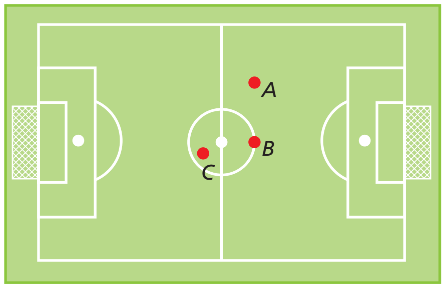
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

6.2 Posições relativas

Posição relativa entre ponto e circunferência

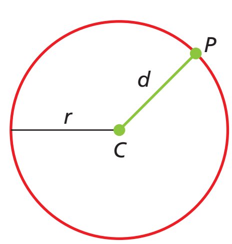
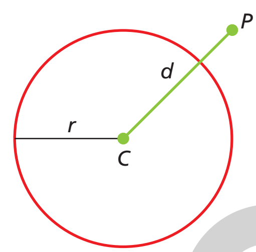
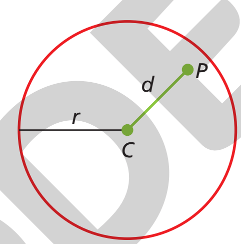
Observe a ilustração a seguir.



Nessa situação, os pontos *A*, *B* e *C* representam posições distintas de três jogadores em relação à circunferência do centro do campo de futebol.

As possíveis posições de um ponto *P*(*x*, *y*) do plano em relação a uma circunferência λ de centro *C* e raio *r* são: exterior, interior ou pertencente à circunferência.

Para analisar a posição desse ponto em relação à circunferência, comparamos a distância *d* do ponto ao centro da circunferência com o raio *r* da circunferência:

$d = r$	$d > r$	$d < r$
		
O ponto *P* pertence à circunferência.	O ponto *P* é exterior à circunferência.	O ponto *P* é interior à circunferência.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios resolvidos

R34. Determinar a posição de cada um dos pontos indicados a seguir em relação à circunferência de equação $x^2 + (y - 2)^2 = 9$.

a) P(1, 5) **b)** Q(0, 4) **c)** R(3, 2)

▸ **Resolução**

Para saber a posição que cada ponto ocupa em relação à circunferência dada, devemos calcular a distância entre cada ponto e o centro da circunferência.

Da equação da circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 9$, temos o centro C(0, 2) e o raio $r = 3$.

Calculando as respectivas distâncias, temos:

a) $d_{C,P} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (5 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,P} = \sqrt{10}$

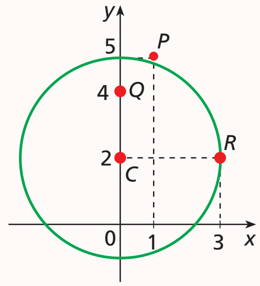
Como $\sqrt{10} > 3$, então $d_{C,P} > r$; logo, o ponto P é exterior à circunferência.

b) $d_{C,Q} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (4 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,Q} = 2$

Como $2 < 3$, então $d_{C,Q} < r$; logo, o ponto Q é interior à circunferência.

c) $d_{C,R} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 2)^2} \Rightarrow d_{C,R} = 3$

Então, $d_{C,R} = r$; logo, o ponto R pertence à circunferência.



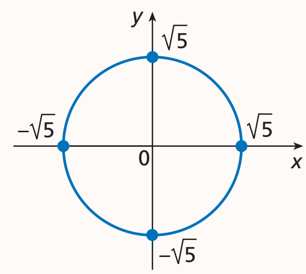
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

R35. Observe a circunferência representada ao lado.

a) Determinar a equação dessa circunferência.

b) Indicar a posição dos pontos $A(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $B(-2, -2)$ em relação à circunferência.

c) Indicar as coordenadas dos pontos pertencentes à circunferência e à bissetriz dos quadrantes ímpares.



ADILSON SECCO

▸ Resolução

a) A circunferência tem centro $C(0, 0)$ e raio $r = \sqrt{5}$.
Portanto, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 5$.

b) Vamos determinar a distância entre cada ponto e o centro da circunferência:

$$d_{C,A} = \sqrt{(\sqrt{2} - 0)^2 + (\sqrt{3} - 0)^2}$$
$$d_{C,A} = \sqrt{5}$$

Então, $d_{C,A} = r$; logo, o ponto A pertence à circunferência.

$$d_{C,B} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-2 - 0)^2}$$
$$d_{C,B} = \sqrt{8}$$

Como $\sqrt{8} > \sqrt{5}$, isto é, $d_{C,B} > r$, o ponto B é exterior à circunferência.

c) Precisamos determinar os pontos de intersecção entre a circunferência ($x^2 + y^2 = 5$) e a bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$). Então:

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Para $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$, temos $y = \frac{\sqrt{10}}{2}$; para $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, temos $y = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Portanto, os pontos procurados são $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

81. As resoluções das proposições (**08**) e (**16**) antecipam as condições geométricas que levarão às respectivas condições algébricas do próximo tópico.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

78. Indique a posição do ponto $P(-1, 2)$ em relação à circunferência centro C e raio r, em que:

a) $C(2, 3)$ e $r = 3$ exterior

b) $C(-2, 2)$ e $r = 2$ interior

c) $C(-3, 1)$ e $r = \sqrt{5}$ pertence

79. Identifique a posição do ponto P em relação à circunferência nos seguintes casos:

a) $P(2, -1)$ e $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ exterior

b) $P(2, 2)$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ pertence

c) $P(-1, 0)$ e $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ interior

80. Conhecendo a equação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$, calcule o valor de k para que o ponto $P(k, 1)$ esteja:

a) na circunferência. 4 ou 2

b) no interior da circunferência. $2 < k < 4$

81. (UFPB) Considerando as seguintes proposições relativas à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no plano cartesiano, identifique a(s) verdadeira(s):
Ver resolução no Guia do professor.

(01) O ponto $P(-1, 1)$ é interior à circunferência.

(02) O ponto $P(-2, 2)$ é exterior à circunferência.

(04) O ponto $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ está sobre a circunferência.

(08) A reta de equação $y = x$ intercepta a circunferência em dois pontos.

(16) A reta de equação $y = -x + 2$ intercepta a circunferência em um único ponto.

- Qual é a soma das alternativas corretas?
$01 + 02 + 04 + 08 = 15$

82. Sabendo que um quadrado tem vértices consecutivos $A(3, 3)$, $B(4, 2)$, $C(3, 1)$ e $D(2, 2)$, determine:

a) a equação da circunferência inscrita nesse quadrado. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{2}$

b) a equação da circunferência circunscrita ao quadrado. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

c) a área da coroa circular formada pelas circunferências. $\frac{\pi}{2}$ unidade de área

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

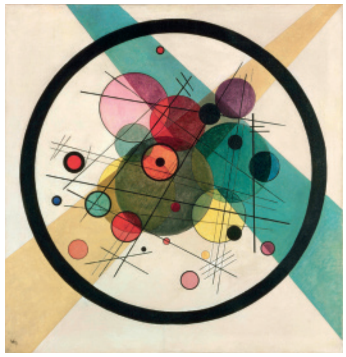
MODERNA

Posição relativa entre reta e circunferência

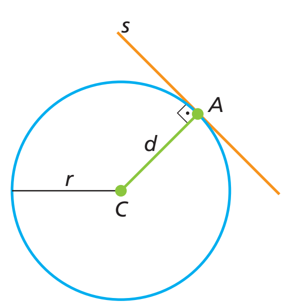
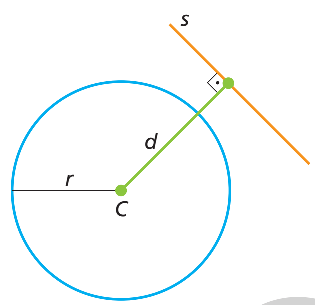
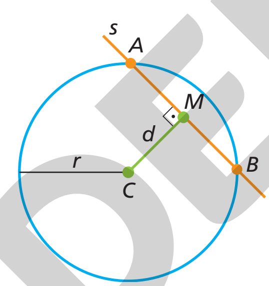
Na pintura *Circles in a Circle*, o artista russo Wassily Kandinsky (1866-1944), retrata diversas circunferências e retas. Podemos observar que em algumas dessas retas interceptam as circunferências e outras, não.

Dadas uma reta s e uma circunferência λ de centro $C(x_0, y_0)$ e raio r, ambas no mesmo plano, há três casos possíveis para a posição relativa entre s e λ, de acordo com a distância d entre a reta e o centro da circunferência:

PHILADELPHIA MUSEUM OF ART, ESTADOS UNIDOS



A arte revela a beleza das posições relativas das formas geométricas. KADINSKY, Wassily. *Circles in a Circle*. 1923. Óleo sobre tela, 98,7 cm × 95,6 cm.

$d = r$	$d > r$	$d < r$
		
A reta s é tangente à circunferência.	A reta s é exterior à circunferência.	A reta s é secante à circunferência.

Observação

A distância de uma reta s, de equação $ax + by + c = 0$, a um ponto $C(x_0, y_0)$ é dada por:

$$d_{C,\,s} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Da observação dos três casos anteriores, concluímos que:

- se $d = r$, então $s \cap \lambda = \{A\}$ (s é tangente à circunferência λ);
- se $d > r$, então $s \cap \lambda = \varnothing$ (s é exterior à circunferência λ);
- se $d < r$, então $s \cap \lambda = \{A, B\}$ (s é secante à circunferência λ).

Exercícios resolvidos

R36. Determinar a posição relativa entre a reta s de equação $x + y + 1 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

▸ Resolução

Primeiro, vamos obter o centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ comparando-a com a equação geral:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Como $-2a = 2$, então $a = -1$. Como $-2b = 2$, então $b = -1$.

Portanto, o centro da circunferência é $C(-1, -1)$.

Substituindo $a = b = -1$ em $a^2 + b^2 - r^2 = 1$, obtemos $r = 1$.

Agora, vamos calcular a distância do centro da circunferência à reta s:

$$d_{C,s} = \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $d_{C,s} < r$, então a reta s é secante à circunferência.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R37. É dada a equação da circunferência μ: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$. Determinar a equação geral da reta v tangente a μ no ponto $P(-3, -1)$.

▶ **Resolução**

Vamos determinar as coordenadas do centro C da circunferência:

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$

Logo, $C(1, 1)$.

Lembremos que, se v é tangente a μ no ponto P, então v é perpendicular à reta que passa por $C(1, 1)$ e $P(-3, -1)$, que chamamos de w.

Vamos determinar o coeficiente angular m_w da reta w:

$$m_w = \frac{-1 - 1}{-3 - 1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Com isso, podemos determinar o coeficiente angular m_v da reta v:

$$m_v = \frac{-1}{m_w} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Logo, a equação da reta v é: $y + 1 = -2(x + 3) \Rightarrow 2x + y + 7 = 0$

Observações

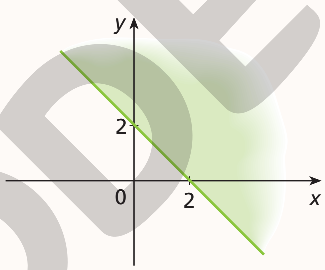
- $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 18 = 0$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 =$
$= 18 + 1 + 1$
$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$
- Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ tais que $x_A \neq x_B$. O coeficiente angular da reta r determinada pelos pontos A e B é: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- Se r e s são retas perpendiculares, então: $m_r \cdot m_s = -1$

R38. Representar no plano cartesiano o sistema de inequações:

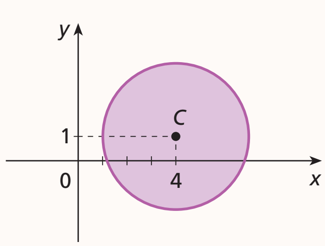
$$\begin{cases} x + y - 2 \geqslant 0 \\ (x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 9 \end{cases}$$

▶ **Resolução**

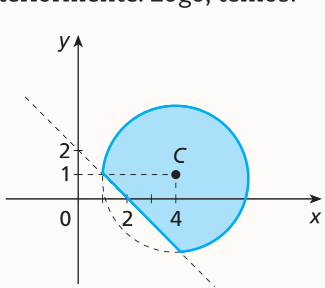
A inequação $x + y - 2 \geqslant 0$ representa um semiplano situado acima da reta $x + y = 2$, incluindo a própria reta. Portanto, temos o gráfico abaixo.



A inequação $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 9$ representa a reunião de todos os pontos da circunferência $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$ com todos os pontos interiores a ela. Como a circunferência tem centro $C(4, 1)$ e raio $r = 3$, temos o seguinte gráfico:



A solução do sistema é a representação gráfica da intersecção dos dois conjuntos obtidos anteriormente. Logo, temos:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R39. Obter os valores de k para que a reta $y = x + k$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

▸ **Resolução**

Para determinar o(s) ponto(s) de intersecção entre a reta e a circunferência, resolvemos o sistema: $\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$

Substituindo $y = x + k$ na equação da circunferência, obtemos:

$x^2 + (x + k)^2 - 9 = 0$

$x^2 + x^2 + 2kx + k^2 - 9 = 0$

$2x^2 + 2kx + (k^2 - 9) = 0$ (equação do 2º grau)

$\Delta = (2k)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 9)$

Devemos ter $\Delta = 0$; então:

$-4k^2 + 72 = 0 \Rightarrow k^2 = 18 \Rightarrow k = 3\sqrt{2}$ ou $k = -3\sqrt{2}$

Observação

Para haver a tangência, a equação do 2º grau em x deve admitir soluções iguais. Daí a condição: $\Delta = 0$

Chamando de s a reta em que $k = 3\sqrt{2}$ e de r a reta em que $k = -3\sqrt{2}$, temos que r e s são retas paralelas distintas, pois possuem mesmo coeficiente angular (igual a 1) e diferem no coeficiente linear.

Reflita

Qual é a posição relativa entre as duas retas determinadas por $y = x + k$, quando $k = 3\sqrt{2}$ e $k = -3\sqrt{2}$?

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

83. Determine, em cada caso, a posição relativa da reta s em relação à circunferência. Se houver pontos comuns (tangente ou secante), determine esses pontos.

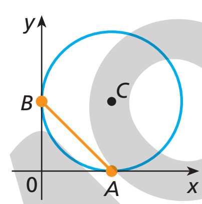
a) s: $x + y = 6$ e $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$ tangente; $P(3, 3)$

b) s: $x - y = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$ secante; $A(1, 0)$ e $B(0, -1)$

c) s: $y = x + 3$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$ exterior

84. Para quais valores de k a reta $y = x + k$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$? $-2\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$

85. A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$ é tangente ao eixo x no ponto A e é tangente ao eixo y no ponto B.
Determine o comprimento do segmento $\overline{AB}$. $4\sqrt{2}$ unidades de comprimento



86. Represente graficamente no plano as inequações a seguir. Ver resolução no Guia do professor.

a) $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \geqslant 9$

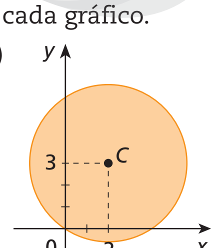
b) $(x - 4)^2 + y^2 < 16$

87. Qual é a área do círculo representado pela inequação $x^2 + (y - 1)^2 - 1 \leqslant 0$? π unidades de área

88. Qual é o comprimento da circunferência representada pela equação $x^2 + y^2 = 25$? 10π unidades de comprimento

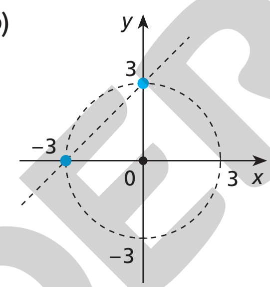
89. Escreva a inequação ou o sistema correspondente a cada gráfico.

a)



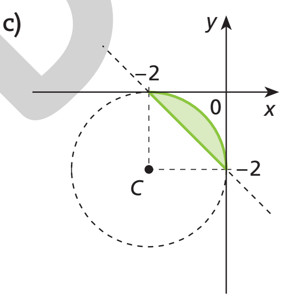
$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 13$

b)



$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

c)



$\begin{cases} y \geqslant -x - 2 \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4 \end{cases}$

90. Para determinar a posição de uma reta relativa a uma circunferência, substituímos uma das variáveis, isolada na equação da reta, na equação da circunferência e obtemos, assim, uma equação do 2º grau.

Fazendo a análise do discriminante dessa equação do 2º grau, determine a posição da reta em relação à circunferência quando $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$. $\Delta > 0$: a reta é secante; $\Delta < 0$: a reta é exterior; $\Delta = 0$: a reta é tangente.

91. Elabore as equações de uma reta s e de uma circunferência λ. O problema consiste em determinar a posição relativa da reta e da circunferência. Troque-o com um colega para que cada um de vocês resolva o problema formulado pelo outro. Depois, destroquem os problemas para verificar a resolução. resposta pessoal

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

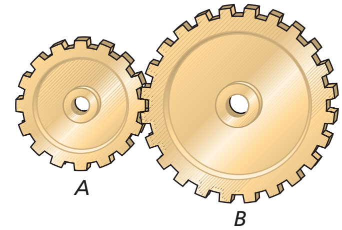
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

MODERNA

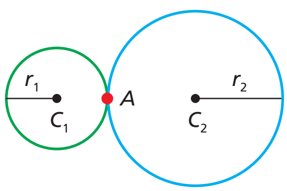
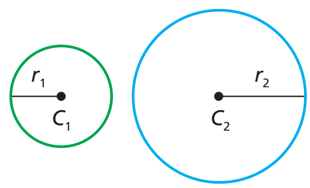
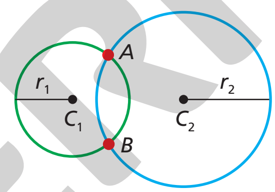
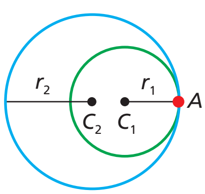
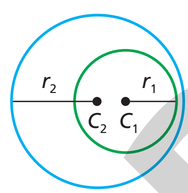
LIGHTSPRING/SHUTTERSTOCK

Posição relativa entre duas circunferências

Observe, nas engrenagens A e B, ilustradas ao lado, a ideia de uma circunferência desenhada pelo topo dos dentes de cada engrenagem. Abstraindo as circunferências da ilustração das duas engrenagens, podemos classificá-las, duas a duas, quanto a suas posições relativas. Vejamos como proceder.



Considerando duas circunferências, λ_1 e λ_2, distintas em um mesmo plano, podemos analisar a posição relativa entre λ_1 e λ_2 comparando a distância d entre seus centros C_1 e C_2 com os raios das circunferências:

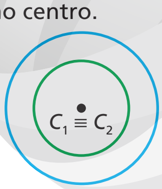
Circunferências tangentes	Circunferências disjuntas	Circunferências secantes
 exteriores $d = r_1 + r_2$	 exteriores $d > r_1 + r_2$	 $\lvert r_1 - r_2 \rvert < d < r_1 + r_2$
 interiores $d = \lvert r_1 - r_2 \rvert$	 interiores $0 \leqslant d < \lvert r_1 - r_2 \rvert$	
um ponto em comum	nenhum ponto em comum	dois pontos em comum

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observação

Quando $d = 0$, as circunferências λ_1 e λ_2 são **concêntricas**, ou seja, têm o mesmo centro.



Para saber quantos são os pontos comuns entre duas circunferências, basta conhecer seus raios e a distância entre seus centros. Para saber quais são esses pontos, é preciso resolver o sistema formado pelas equações a elas associadas.

Exemplos

a) Vamos determinar a posição relativa entre as circunferências $(x + 2)^2 + (y - 12)^2 = 169$ e $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25$.

Primeiro, determinamos os centros C_1 e C_2 e os raios r_1 e r_2 de cada circunferência.

Como $(x + 2)^2 + (y - 12)^2 = 169$, então $C_1(-2, 12)$ e $r = 13$.

Escrevendo a equação reduzida da outra circunferência, temos:

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 25 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 25$

Então, $C_2(0, 3)$ e $r = 5$.

Agora, vamos determinar a distância d entre os centros C_1 e C_2:

$d = \sqrt{[0 - (-2)]^2 + (3 - 12)^2} = \sqrt{85}$

Observe que $\lvert 13 - 5 \rvert < \sqrt{85} < 13 + 5$, ou seja: $\lvert r_1 - r_2 \rvert < d < r_1 + r_2$

Portanto, as circunferências são secantes.

Reflita

Se duas circunferências são tangentes, é possível traçar um triângulo cujos vértices sejam o ponto de tangência e os centros das circunferências?

Espera-se que os alunos percebam que não é possível, pois os pontos são colineares.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

b) Vamos determinar a equação da circunferência de centro $C_1(-1, 0)$ e que tangencia exteriormente a circunferência de equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1$.

As circunferências são tangentes exteriores; então: $d = r_1 + r_2$

Vamos calcular a distância d entre os centros das circunferências:

$d = \sqrt{[-3 - (-1)]^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{4} = 2$

Como o raio da circunferência dada é 1, temos: $2 = r_1 + 1 \Rightarrow r_1 = 1$

Portanto, a equação da circunferência é $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

Observação

Da equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1$, temos $C_2(-3, 0)$ e $r_2 = 1$.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

92. Em cada caso, determine mentalmente a posição relativa de duas circunferências de raios r_1 e r_2, sabendo que d é a distância entre seus centros.

a) $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 2$ cm tangentes interiores

b) $r_1 = 4$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 5$ cm secantes

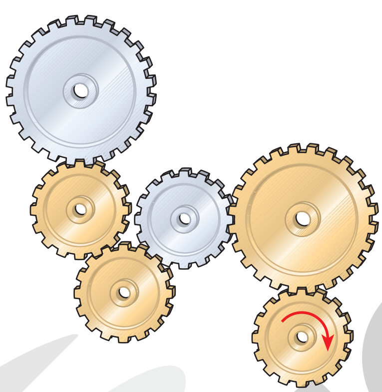
c) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 4$ cm; $d = 10$ cm tangentes exteriores

d) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 2$ cm; $d = 1$ cm disjuntas interiores

e) $r_1 = 5$ cm; $r_2 = 3$ cm; $d = 0$ cm concêntricas

f) $r_1 = 6$ cm; $r_2 = 4$ cm; $d = 12$ cm disjuntas exteriores

93. Observe o sistema de engrenagens.



- Em que sentido gira a engrenagem superior, de cor prata? anti-horário

94. Desenhe duas circunferências que tenham apenas um ponto de intersecção e uma reta que seja tangente a uma e secante à outra.

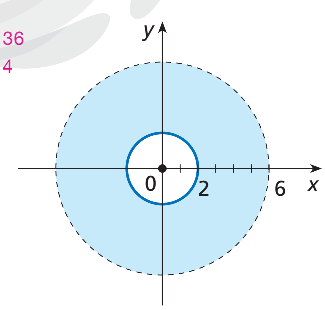
Ver resolução no Guia do professor.

95. Obtenha, se existirem, as coordenadas dos pontos comuns às circunferências de equações $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e $x^2 + y^2 - 16x = 48$.

Não há pontos comuns.

96. Escreva o sistema de inequações que descreve o gráfico abaixo.

$\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$



97. Resolva graficamente os sistemas. Ver resolução no Guia do professor.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x - y \geq 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x > 0 \\ x^2 + y^2 - 10x < 0 \end{cases}$

98. Qual é a equação da circunferência cujo centro é a origem, que é tangente à reta de equação $4x + 3y = 20$? Calcule a área delimitada por essa circunferência. $x^2 + y^2 = 16$; $A = 16\pi$ unidades de área

99. (Unifesp) Na figura A aparecem as circunferências α, de equação $x^2 + y^2 = 1$, e β, de equação $x^2 + y^2 = 9$. Sabendo-se que as circunferências tangentes simultaneamente a α e a β são como λ_1 (na figura B) ou λ_2 (na figura C):

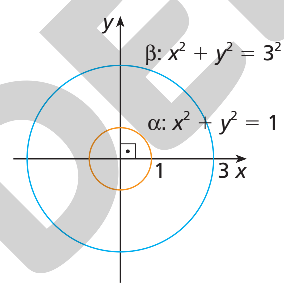


figura A

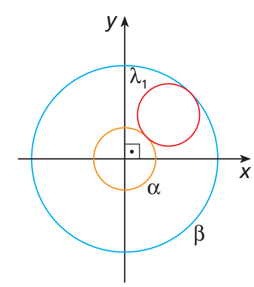


figura B

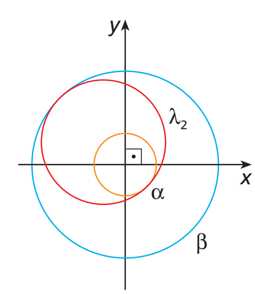


figura C

O lugar geométrico dos centros dessas circunferências é dado: alternativa c

a) pelas circunferências de equações $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ e $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

b) pela elipse de equação $\frac{x^2}{1} + \frac{x^2}{3^2} = 1$.

c) pelas circunferências de equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

d) pela circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

e) pelas retas de equações $y = x$ e $y = -x$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

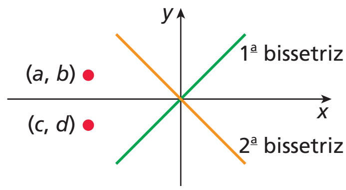
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

Aplicação

1. (UFMG) Os pontos (a, b) e (c, d) estão representados na figura.



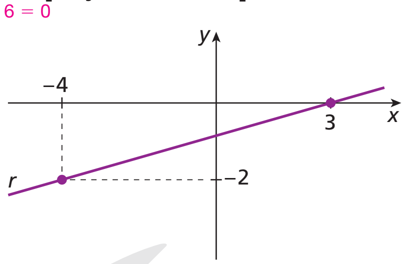
O ponto $(a - b, c - d)$ está situado no: alternativa c

a) 1º quadrante.
b) 2º quadrante.
c) 3º quadrante.
d) 4º quadrante.
e) eixo Ox.

2. Determine o valor de $m \in \mathbb{R}$ de modo que o ponto $P(2m^2 - 5m, -m^2 - m + 9)$ esteja na bissetriz dos quadrantes pares. $m = 3$

3. Calcule o valor de x sabendo que o triângulo ABC é retângulo em C e que $A(2, 2)$, $B(4, -12)$ e $C(-4, x)$.
$x = -6$ ou $x = -4$

4. Escreva a equação da reta representada a seguir.
$2x - 7y - 6 = 0$



5. A reta que passa pelos pontos distintos $A(m, 2)$ e $B(5, -m)$ tem coeficiente angular igual a $-\frac{2}{3}$. Qual é o valor de m? $\frac{4}{5}$

6. Determine $p \in \mathbb{R}$ de modo que as retas r e s, de equações $-2x + (p - 7)y + 3 = 0$ e $px + y - 13 = 0$, respectivamente, sejam perpendiculares. $p = -7$

7. A pressão atmosférica diminui conforme subimos em relação ao nível do mar, onde a pressão é de 1 atm. A 100 metros de altura, a pressão é de 0,95 atm. Se a variação de pressão é linear, represente em um plano cartesiano o gráfico que representa essa função, destacando os pontos (0, 1) e (100; 0,95). Determine a lei que define essa variação. $5x + 10.000y = 10.000$
Ver resolução no Guia do professor.

8. (FCC-SP) As retas de equações $ax + y = a + 2$ e $4x + ay = 4 - a^2$ são: alternativa c

a) concorrentes, qualquer que seja o valor de $a \neq 0$.
b) paralelas, qualquer que seja o valor de a.
c) paralelas, se $a = 2$ ou $a = -2$.
d) concorrentes para todo $a \neq 2$.
e) concorrentes para todo $a \neq 4$.

9. Durante 5 minutos, uma placa de metal sofre um resfriamento linear de 30 °C de temperatura inicial para −10 °C. Iniciado o resfriamento, após quanto tempo essa placa deve atingir 0 °C?
3 minutos e 45 segundos

10. Represente graficamente o sistema de inequações:

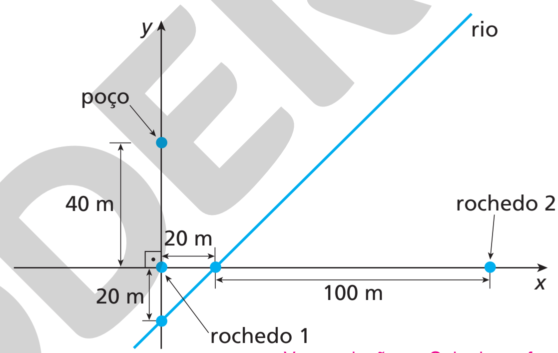
$$\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 0 \\ x - y + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

Ver resolução no Guia do professor.

11. (Mackenzie-SP) As retas $x + y = 0$, $x - y = 0$ e $2x + y - 3 = 0$ definem um triângulo de área: alternativa d

a) $\sqrt{2}$
b) 4
c) $2\sqrt{3}$
d) 3
e) 2

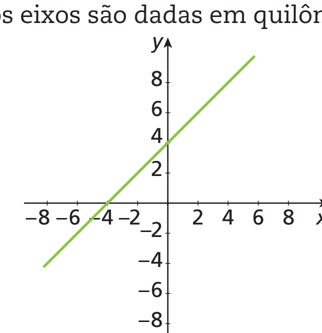
12. (Fuvest-SP) Um pirata enterrou um tesouro numa ilha e deixou um mapa com as seguintes indicações: o tesouro está enterrado num ponto da linha reta entre os dois rochedos; está a mais de 50 m do poço e a menos de 20 m do rio (cujo leito é reto).



Ver resolução no Guia do professor.

a) Descreva, usando equações e inequações, as indicações deixadas pelo pirata, utilizando para isso o sistema de coordenadas mostrado na figura.
b) Determine o menor intervalo ao qual pertence a coordenada x do ponto $(x, 0)$ onde o tesouro está enterrado.

13. (Enem) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetro.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

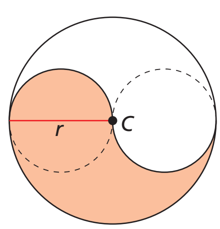
Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto: alternativa b

a) $(-5, 0)$
b) $(-3, 1)$
c) $(-2, 1)$
d) $(0, 4)$
e) $(2, 6)$

14. Determine a equação da circunferência que tem diâmetro definido pelos pontos $A(-2, 1)$ e $B(0, -3)$. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

15. O *yin-yang* representa, na cultura oriental, a unidade formada pelo equilíbrio de duas forças de igual intensidade, porém opostas.

Para resolver o exercício os estudantes precisam analisar a figura em função de suas partes, colocando em prática a **decomposição**, um dos pilares do *pensamento computacional*. Ao efetuar alguns cálculos para os círculos e as circunferências menores, poderão inferir a respeito da maior, respondendo aos itens propostos.



Observe que a circunferência maior tem centro C e raio r e que as duas circunferências menores tangenciam a circunferência maior e se tangenciam em C. Depois, responda às perguntas a seguir.

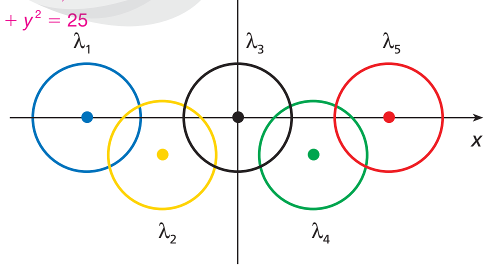
a) A área do círculo maior é quantas vezes a área da parte colorida? 2 vezes

b) O comprimento da circunferência maior é igual ao perímetro da parte colorida? Como você explicaria isso? Ver resolução no Guia do professor.

c) Qual é a área do círculo maior se o raio da circunferência menor é 3? 36π unidades de área

16. Imagine a construção do símbolo olímpico conforme a figura:

λ_1: $(x + 14)^2 + y^2 = 25$
λ_2: $\left(x + 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$
λ_3: $x^2 + y^2 = 25$
λ_4: $\left(x - 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$
λ_5: $(x - 14)^2 + y^2 = 25$



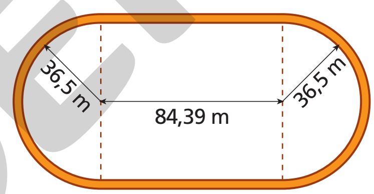
A circunferência λ_3 com centro na origem tem raio igual a 5 cm. As circunferências λ_1 e λ_5 têm seus centros a 14 cm do centro de λ_3. Os centros de λ_2 e λ_4 estão a $\sqrt{64}$ cm do centro de λ_3 e têm ordenada igual a -4.

Determine a equação das cinco circunferências que representam o símbolo olímpico.

17. Determine a, b e c de modo que a equação $36x^2 + ay^2 + bxy + 24x - 12y + c = 0$ represente uma circunferência. $a = 36$, $b = 0$ e $c < 5$

18. Qual é o ponto da circunferência $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 1$ que tem ordenada máxima? $(4, -2)$

19. (Enem) O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta de oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



BIEMBENGUT, M. S. *Modelação matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus*, 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/Unesp, Rio Claro, 1990 (adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado? alternativa a

a) 1 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 8

Aprofundamento

20. (Unicamp-SP) Os pontos A, B, C e D pertencem ao gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. As abscissas de A, B e C são iguais a 2, 3 e 4, respectivamente, e o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{CD}$.

a) Encontre as coordenadas do ponto D. $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$

b) Mostre que a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ passa também pela origem. Ver resolução no Guia do professor.

21. Determine as coordenadas do ponto B, simétrico de $A(-3, 2)$ com relação à reta de equação $x + y - 1 = 0$. $B(-1, 4)$

22. (UFBA) Considere os pontos $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ e $C(-2, 5)$ do plano cartesiano.

Sendo D o ponto simétrico de C em relação à reta que passa por A e é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, determine a área do quadrilátero $ABCD$. 8 unidades de área

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

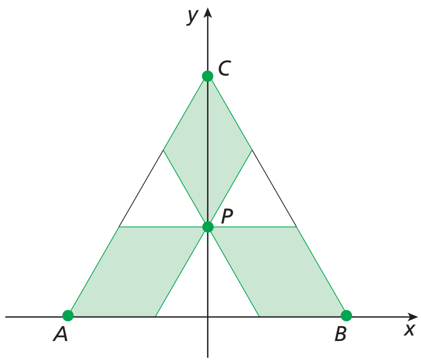
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

23. (Fuvest-SP) Considere os pontos $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 3)$ e $P(0, \alpha)$, com $0 < \alpha < 3$. Pelo ponto P, traçamos as três retas paralelas aos lados do triângulo ABC.

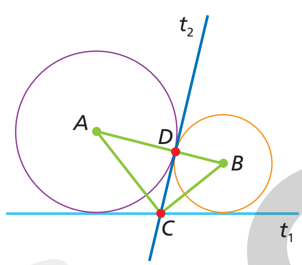


a) Determine, em função de α, a área da região sombreada da figura. $A = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$

b) Para que valor de α essa área é máxima? 1

24. A reta s passa pelo ponto $(0, 3)$ e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$, em que $A(0, 0)$ e B é o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$. Determine a equação de s. $x + 2y = 6$

25. (Fuvest-SP) A figura representa duas circunferências de raio R e r com centros nos pontos A e B, respectivamente, tangenciando-se externamente no ponto D.



Suponha que:

a) as retas t_1 e t_2 são tangentes a ambas as circunferências e interceptam-se no ponto C.

b) a reta t_2 é tangente às circunferências no ponto D.

Calcule a área do triângulo ABC em função dos raios R e r. $A = \dfrac{(R + r) \cdot \sqrt{r \cdot R}}{2}$

26. Resolva graficamente o sistema: $\begin{cases} |x| > 1 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$ Ver resolução no Guia do professor.

Desafio

27. Qual é a equação da reta que passa pelo ponto $P(3, 1)$, intercepta a reta $r: y = 3x$ em A e a reta $s: y = -\dfrac{x}{5}$ em B, em que P é ponto médio de $\overline{AB}$? $x + y - 4 = 0$

28. (Mackenzie-SP) A equação de uma reta, paralela à reta $x + y - 4 = 0$ e distante $3\sqrt{2}$ do ponto $P(2, 1)$, é: alternativa a

a) $x + y + 3 = 0$

b) $x + y + 9 = 0$

c) $x + y - 3 = 0$

d) $x - y - 6 = 0$

e) $x + y - 12 = 0$

29. Um quadrado está inscrito em uma circunferência de centro $(1, 2)$. Um de seus vértices é o ponto $(-3, -1)$. Determine os outros três vértices do quadrado. $(-2, 6)$, $(5, 5)$ e $(4, -2)$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Autoavaliação

Registre as respostas em seu caderno.

1. O polígono de vértices $A(2, 0)$, $B(1, 1)$, $C(1, 5)$ e $D(0, 3)$ é um: alternativa c

a) trapézio.
b) retângulo.
c) quadrilátero.
d) paralelogramo.

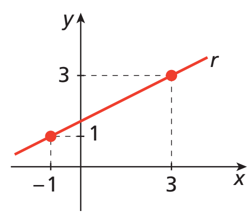
2. A distância entre os pontos $A(1, -5)$ e $B(6, -2)$ é: alternativa a

a) $\sqrt{34}$ **b)** 36 **c)** $\sqrt{108}$ **d)** 6

3. As retas de equações $y = \frac{1}{2}x + 11$ e $y = -2x - 6$ são: alternativa a

a) concorrentes perpendiculares.
b) concorrentes não perpendiculares.
c) paralelas coincidentes.
d) paralelas distintas.

4. Para que uma reta s seja paralela à reta r representada a seguir, o coeficiente angular de s deve ser ______. alternativa b



a) igual a -2.

b) igual a $\frac{1}{2}$.

c) igual a $-\frac{1}{2}$.

d) diferente de $\frac{1}{2}$.

5. A distância entre o ponto $A(1, 0)$ e a reta $y = x$ é: alternativa c

a) $\sqrt{2}$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** 2

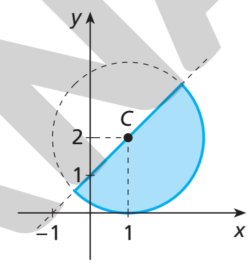
6. O centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x = 0$ são: alternativa a

a) $C(3, 0)$ e $r = 3$
b) $C(0, 0)$ e $r = 6$
c) $C(0, 3)$ e $r = 3$
d) $C(0, 0)$ e $r = 3$

7. Para que a equação $mx^2 + 4y^2 + 8x + 12y + 10 = 0$ represente uma circunferência, devemos ter: alternativa b

a) $m = 8$
b) $m = 4$
c) $m = 12$
d) $m = 2$

8. A figura ao lado é a representação gráfica do sistema de inequações dado por:



alternativa a

a) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 2 \\ x - y - 1 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 16 \\ 2x - y + 1 > 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 \\ x - y + 2 < 0 \end{cases}$

9. A área do quadrilátero de vértices $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(2, 0)$ e $D(3, 5)$ é: alternativa c

a) 2^1
b) 2^2
c) 2^3
d) 2^4

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão								
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Representar pontos, segmentos e retas no plano cartesiano.	X			X				X	
Calcular a distância entre dois pontos.		X							
Escrever as equações de uma reta e de uma circunferência.			X			X	X		
Discutir posições relativas entre: duas retas; ponto e circunferência; reta e circunferência; duas circunferências.			X	X					
Calcular a distância entre ponto e reta.					X				
Resolver inequações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas, graficamente.								X	
Calcular a área de um triângulo.									X
Páginas do livro referentes ao conceito	60 a 64	64 a 66	70 a 81	70 a 81	86 a 88	92 a 96	92 a 96	88 e 89	90 e 91

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

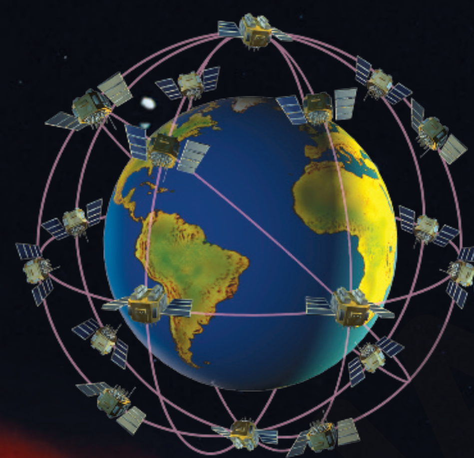
Esta seção permite uma abordagem interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT204** e **EM13CNT303** da BNCC, uma vez que os alunos irão ler e interpretar uma publicação com dados sobre satélites do GPS.

Compreensão de texto

Além disso, a seção permite a discussão de aspectos positivos e negativos do GPS quanto a questões como mobilidade, segurança e privacidade, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC e do tema contemporâneo **ciência e tecnologia**.

A Matemática do GPS

O que é e como funciona o GPS?



A sigla GPS nada mais é do que a abreviatura de *Global Positioning System* (sistema de posicionamento global). Trata-se de uma constelação de vinte e quatro satélites, orbitando em torno da Terra a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecer sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com uma notável precisão.

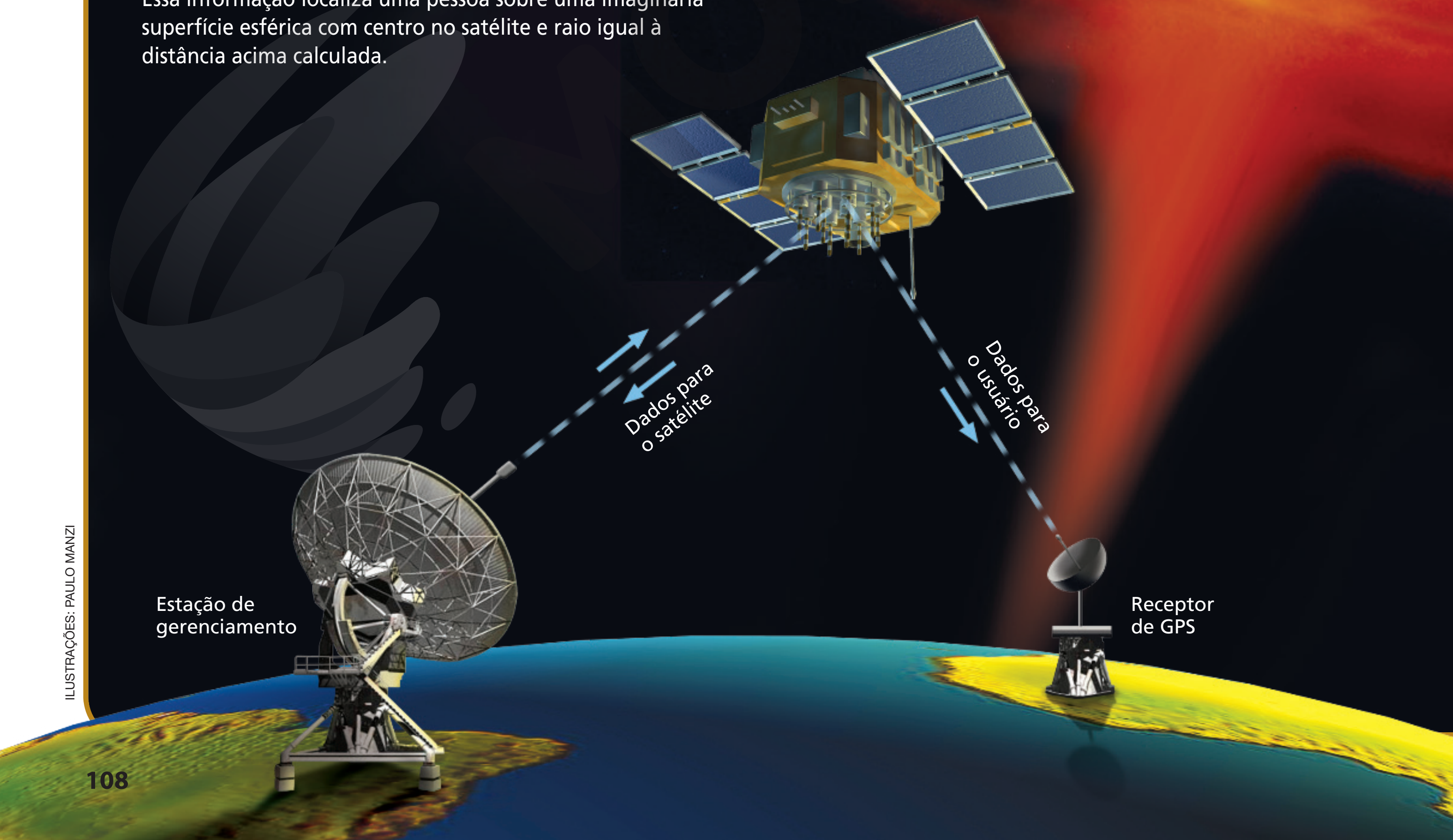
[...]

Os 24 satélites que formam o segmento espacial do GPS trafegam em torno da Terra em seis órbitas estáveis e predeterminadas com quatro satélites em cada órbita. Os satélites percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem 28° de visualização sobre a Terra. Isso assegura que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizadas por até dez satélites. [...]

Afinal, de que maneira o GPS determina a localização de um ponto sobre a superfície terrestre?

Cada um dos satélites do GPS transmite por rádio um padrão fixado, que é recebido por um receptor na Terra (segmento do usuário), funcionando como um cronômetro extremamente acurado.
O receptor mede a diferença entre o tempo que o padrão é recebido e o tempo que foi emitido. Essa diferença, não mais do que um décimo de segundo, permite que o receptor calcule a distância ao satélite emissor multiplicando-se a velocidade do sinal (aproximadamente $2{,}99792458 \times 10^8$ m/s — a velocidade da luz) pelo tempo que o sinal de rádio levou do satélite ao receptor.

Essa informação localiza uma pessoa sobre uma imaginária superfície esférica com centro no satélite e raio igual à distância acima calculada.



ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI

Cada satélite é programado para emitir o que se chama **efeméride**, que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um fixado sistema ortogonal de coordenadas. Tal posição é permanentemente rastreada e conferida pelas estações terrestres de gerenciamento. A unidade receptora processa esses sinais. Com a posição do satélite e a distância acima calculada obtém-se a chamada equação geral da imaginária superfície esférica.

Coletando-se sinais emitidos por quatro satélites, o receptor determina a posição do usuário, calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas. A localização é dada não em coordenadas cartesianas, mas por meio das coordenadas geográficas (latitude, longitude e elevação).

[...]

Fonte: ALVES, Sérgio. A Matemática do GPS. *Revista do Professor de Matemática*, n. 59, p. 17-26, 2006.

SSPL/GETTY IMAGES

Satélite do sistema NAVSTAR, EUA, 1986.

Representação artística feita em computador. A ilustração não preserva as reais dimensões dos objetos nem a proporção entre suas distâncias.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. De acordo com o texto, quantas órbitas sobre a Terra cada um desses satélites completa em um dia? 2 órbitas

2. Considere a relação $\Delta s = v \cdot \Delta t$ e os dados do texto sobre a altitude e a velocidade do sinal emitido pelo satélite. Quanto tempo, aproximadamente, o sinal leva para chegar a um receptor que está na superfície da Terra, em uma reta que passa pelo satélite e pelo centro da Terra? aproximadamente 0,067 s

3. Considere o raio médio da Terra igual a 6.370 km. Quantos quilômetros, aproximadamente, percorre um desses satélites em uma órbita circular em torno da Terra na altitude de 20,2 km? 166.860 km

4. Vimos que, dados um ponto fixo C e uma distância r, a circunferência λ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que estão à mesma distância r de C. Desenhe no caderno e responda: quantos pontos comuns têm duas circunferências de raios 3 cm e 5 cm, respectivamente, cujos centros distam 9 cm? E se os centros forem distantes 8 cm? E se forem distantes 7 cm? nenhum ponto; um único ponto; dois pontos

5. De modo análogo à circunferência, uma superfície esférica S de centro C e raio r é definida como o lugar geométrico dos pontos P do espaço que estão à mesma distância r de C.
Imagine para responder: quantos pontos comuns têm duas superfícies esféricas de raios 3 cm e 5 cm cujos centros distam 9 cm? E se os centros forem distantes 8 cm? E se forem distantes 7 cm? nenhum ponto; um único ponto; infinitos pontos

6. Que figura plana é formada pelos pontos comuns a duas superfícies esféricas de raios 4 cm e 2 cm, respectivamente, cujos centros distam 5 cm? uma circunferência

7. Os avanços da Ciência e da tecnologia modificaram as condições de vida do ser humano e suas relações, tanto positiva quanto negativamente. Em grupos de três ou quatro integrantes, discutam as questões da mobilidade, da segurança e da privacidade relacionadas ao surgimento e à expansão do GPS, redigindo um texto que aborde os aspectos positivos e negativos desse invento. respostas pessoais

CAPÍTULO

4 Transformações geométricas

Competência específica e habilidade de Matemática e suas Tecnologias da BNCC trabalhadas neste capítulo: competência **3**; habilidade **EM13MAT105**.

A introdução deste capítulo favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade.

Parte de um dos murais do Palácio de Alhambra em Granada, Espanha.

EDUCATION IMAGES/UNIVERSAL IMAGES GROUP/GETTY IMAGES

Serra Nevada e o Palácio de Alhambra no crepúsculo. Granada, Espanha, 2015.

Objetivos do capítulo

- Compreender os principais tipos de transformações isométricas (translação, reflexão e rotação) e as suas composições.
- Compreender as transformações homotéticas.
- Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.
- Realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.

1 Transformações geométricas

O Palácio de Alhambra, localizado na cidade de Granada, na Espanha, além de sua grandiosidade, tem como atrativos, sobretudo do ponto de vista histórico e turístico, a arquitetura e a decoração islâmica.

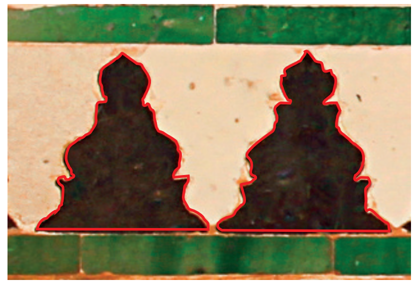
Nesta página está retratado uma parte de um dos murais do Palácio de Alhambra, constituído de figuras que se repetem, formando um padrão e preenchendo todo o plano.

A construção geométrica de uma figura congruente ou semelhante à outra figura no plano, respeitando-se algumas regras, é chamada de **transformação geométrica.**

Ao longo do capítulo, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**, pois trabalham-se os conceitos de transformações geométricas isométricas e homotéticas em diversos contextos, incluindo análise das produções humanas, como obras de arte, utensílios, arte indígena, arquitetura e engenharia, e elementos da natureza, como os flocos de neve apresentados no tópico “Rotações”.

MISTERSTOCK/SHUTTERSTOCK

Veja exemplos de transformações geométricas em partes do mural.



FOTOS: MISTERSTOCK/SHUTTERSTOCK

É comum encontrar na natureza exemplos de transformações geométricas em flores, nos flocos de neve, nos seres humanos e em outros animais. Além disso, as transformações geométricas são aplicadas em muitas áreas do conhecimento, como em Matemática, Química, Engenharia, Arquitetura, Artes, Física, Biologia, entre outras.

Observe a reprodução de um quadro do artista plástico Maurits Cornelis Escher (1898-1972).

© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ESCHER, Maurits Cornelis. *Regular Division Reptiles.* 1942. Aquarela. 34 cm × 45 cm.

Perceba como a figura do lagarto também se repete, formando um padrão em todo o plano da obra.

Seja um plano α. Uma transformação geométrica T é uma função $T: \alpha \to \alpha$ que associa a um ponto $P \in \alpha$ outro ponto $P' \in \alpha$, tal que $T(P) = P'$. O ponto P' é a imagem de P.

A abertura do capítulo e a reprodução da obra de Escher, favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602** da área de Linguagens e suas Tecnologias, pois o aluno poderá se apropriar de patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica. Ainda, fruir e apreciar esteticamente uma manifestação artística e cultural mundial, assim como dela participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade, o que pode ser articulado com a competência geral **3** da BNCC.

Observação

Usando a notação da teoria de função e nomeando a transformação geométrica ao lado como T, podemos dizer que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, $T(C) = C'$ e $T(D) = D'$.

Reflita

- Usando uma régua e um transferidor, meça os lados e os ângulos internos correspondentes dos quadriláteros $A'B'C'D'$ e $ABCD$ e verifique se a figura $A'B'C'D'$ é congruente à figura $ABCD$ original.
- Usando uma régua, mostre que, no exemplo **b**, temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

- Os segmentos correspondentes são congruentes: $AB = A'B' = 3$ cm, $AD = A'D' = 3$ cm, $BC = B'C' = 4$ cm e $CD = C'D' = 4$ cm.
- Os ângulos internos correspondentes são congruentes:

$\text{med}(\widehat{A}) = \text{med}(\widehat{A}') \simeq 106°$

$\text{med}(\widehat{B}) = \text{med}(\widehat{B}') = 90°$

$\text{med}(\widehat{D}) = \text{med}(\widehat{D}') = 90°$

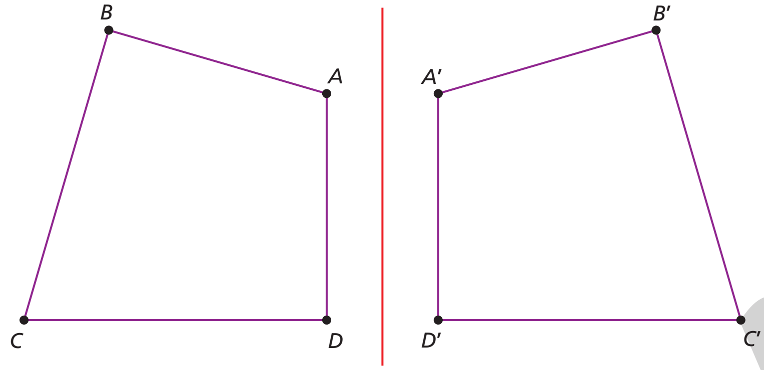
$\text{med}(\widehat{C}) = \text{med}(\widehat{C}') \simeq 74°$

Portanto, as figuras são congruentes.

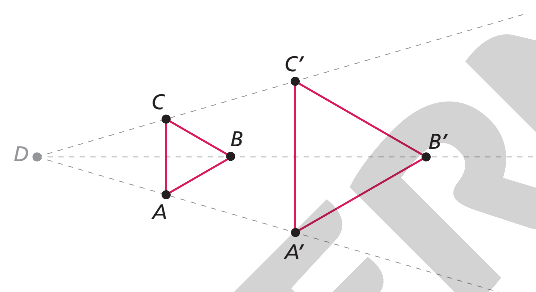
- Como $AB = BC = AC = 1$ cm e $A'B' = B'C' = A'C' = 2$ cm, temos: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{2}$

Exemplos

a) O quadrilátero $A'B'C'D'$ é a imagem do quadrilátero $ABCD$ por uma transformação geométrica.



b) O triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC por uma transformação geométrica.



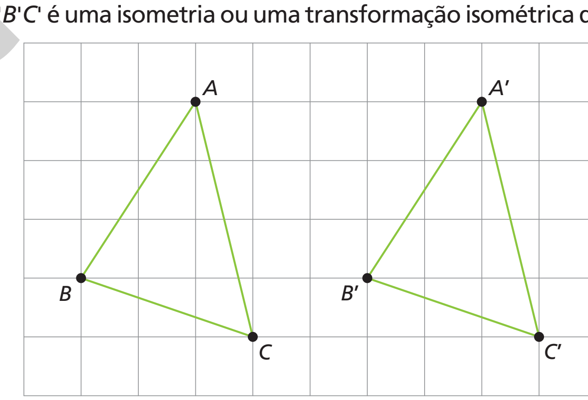
Neste capítulo, trabalharemos dois tipos de transformações geométricas no plano: as que preservam a distância entre pontos e as que preservam a razão entre as medidas de segmentos, as medidas de ângulos e o paralelismo dos segmentos da figura original com a figura transformada.

2 Isometrias

São chamadas de **isometrias** ou **transformações isométricas** as transformações que têm a propriedade de preservar a **distância** entre pontos. Nesse tipo de transformação, a figura obtida é congruente à figura original.

Exemplo

O triângulo $A'B'C'$ é uma isometria ou uma transformação isométrica do triângulo ABC.



Veja que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $AC = A'C'$ e que os ângulos correspondentes também são congruentes. Assim, os triângulos são congruentes.

A seguir, falaremos sobre os principais tipos de isometria no plano: as reflexões, as translações e as rotações.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2.1 Reflexões

Existem dois tipos de reflexão: em relação a uma reta ou em relação a um ponto. Vamos analisar cada caso.

Reflexão em relação a uma reta

Observe a imagem a seguir.

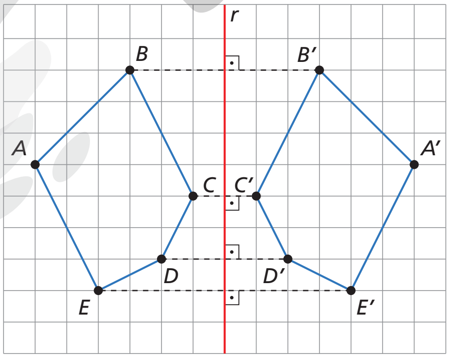
GARY HERSHORN/GETTY IMAGES

Ponte do Brooklin na cidade de Nova Iorque (12 abr. 2020).

Observe que, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, o contorno do portal é simétrico em relação à reta *r*. Ou seja, a imagem do contorno, por reflexão em torno da reta *r*, coincide com ele próprio.

Sejam uma reta *r* e um ponto *P* pertencentes a um plano α. Uma reflexão de *P* em relação à *r* gera um ponto *P*' em α se, e somente se, *r* é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Dizemos que *P*' é a reflexão ou o **simétrico** do ponto *P* **em relação à reta** *r*. Se o ponto *P* pertencer à reta *r*, o simétrico de *P* será o próprio ponto *P*.

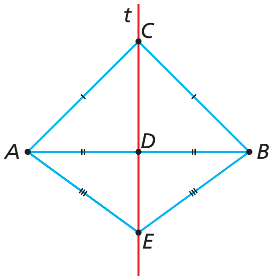
No exemplo a seguir, a reta *r* é a mediatriz de qualquer segmento que tem como extremidades um ponto da figura *ABCDE* e sua imagem na figura *A'B'C'D'E'*. Logo, *r* é mediatriz dos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$. Assim, podemos dizer que a figura *A'B'C'D'E'* é uma reflexão da figura *ABCDE* em relação à reta *r*.



Em uma reflexão, o ponto *P*', imagem de um ponto *P* em relação a uma reta, pode ser chamado de **simétrico** do ponto *P*. O ponto *P*, por sua vez, é o simétrico de *P*'. A reta de reflexão também é conhecida como **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria.** A simetria em relação a uma reta pode ser chamada de **simetria axial.**

Observação

A reta que passa pelo ponto médio de um segmento e é perpendicular a ele é chamada da **mediatriz** do segmento. Também podemos definir a mediatriz como o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de dois pontos distintos desse mesmo plano. Veja na figura abaixo que os pontos pertencentes à reta *t* equidistam dos pontos *A* e *B*. Essa é a propriedade de qualquer ponto que pertence à reta *t*.

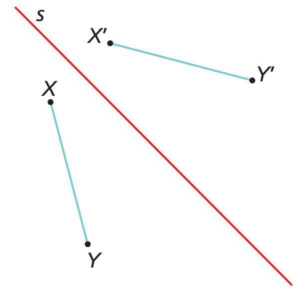


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Observe outro exemplo de reflexão em relação a uma reta.



Observação

Observe que cada ponto do segmento $\overline{XY}$ tem seu simétrico no segmento $\overline{X'Y'}$.

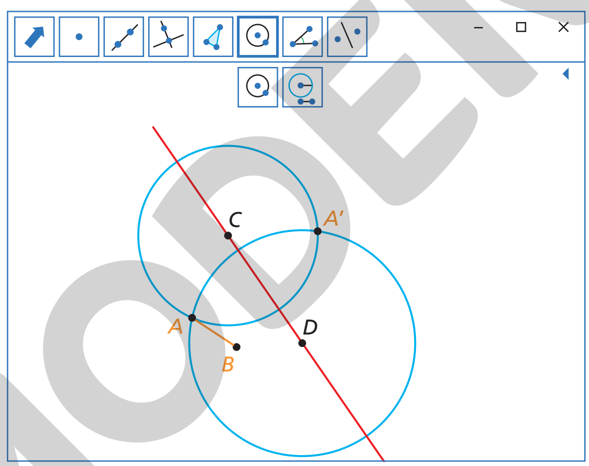
A reta *s* é o eixo de simetria na reflexão que transforma o segmento $\overline{XY}$ no segmento $\overline{X'Y'}$. O segmento $\overline{X'Y'}$ é simétrico ao segmento $\overline{XY}$ e, reciprocamente, o segmento $\overline{XY}$ é simétrico ao segmento $\overline{X'Y'}$.

Veja a seguir a construção geométrica do simétrico, em relação a uma reta, de um segmento com o uso de um *software* de Geometria dinâmica.

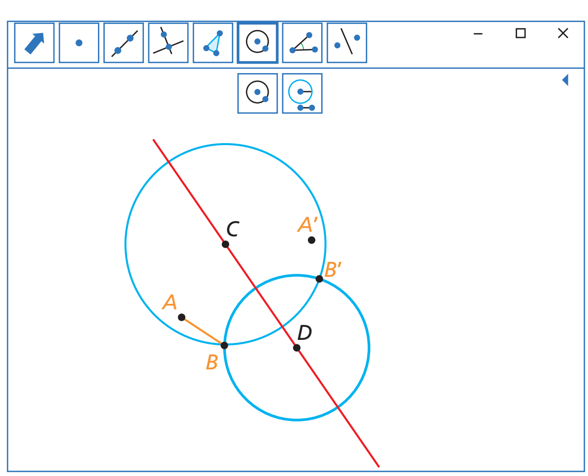
Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma reta $\overleftrightarrow{CD}$, vamos construir o segmento $\overline{A'B'}$, simétrico a $\overline{AB}$.

Comentar com os alunos que, em Geometria, é muito comum encontrarmos situações como essa, em que um passo a passo determina uma construção geométrica particular. Uma sequência de passos finita e bem definida como essa, destinada a realização de uma tarefa, pode ser associada a um dos pilares do pensamento computacional: o **algoritmo**.

1. Definidos o segmento $\overline{AB}$ e a reta $\overleftrightarrow{CD}$, construímos a circunferência de centro *C* e raio $\overline{CA}$ e a circunferência de centro *D* e raio $\overline{DA}$. Uma das intersecções dessas circunferências é o ponto *A*. A outra intersecção é o ponto *A*', simétrico de *A*.



2. Usamos uma função do *software* para ocultar as construções auxiliares para melhor compreensão dos próximos passos da construção principal.
Em seguida, construímos a circunferência de centro *C* e raio $\overline{CB}$ e a circunferência de centro *D* e raio $\overline{DB}$. Uma das intersecções dessas circunferências é o ponto *B*. A outra intersecção é o ponto *B*', simétrico de *B*.

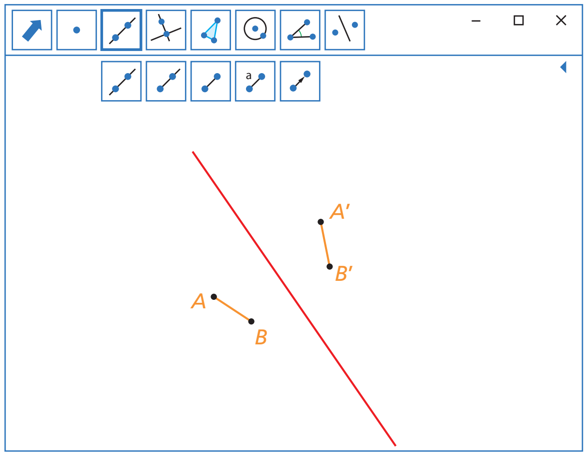


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
MODERNA

Após estudarem a construção, comentar com os alunos que alguns *software* de Geometria dinâmica possuem ferramentas para obter diretamente transformações geométricas isométricas e homotéticas. Em um *software* com essa função, para construir um segmento simétrico como feito abaixo, bastaria selecionar a ferramenta de simetria por uma reta, depois o segmento original e o eixo de simetria.

3. Traçamos o segmento $\overline{A'B'}$, que é o simétrico de $\overline{AB}$, e ocultamos as circunferências do passo 2, bem como os pontos *C* e *D*.



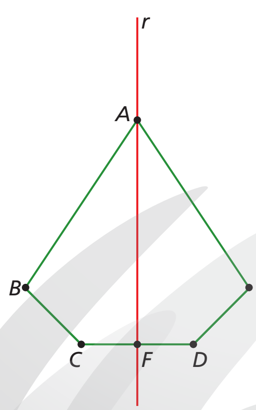
Com a construção geométrica feita acima, podemos perceber que, para determinar o simétrico de um segmento, basta determinar os simétricos das extremidades do segmento e, depois, com as extremidades determinadas, traçar o segmento simétrico.

Figuras com simetria de reflexão

Observe alguns casos de figuras com simetria de reflexão que têm pontos em comum com o eixo de simetria.

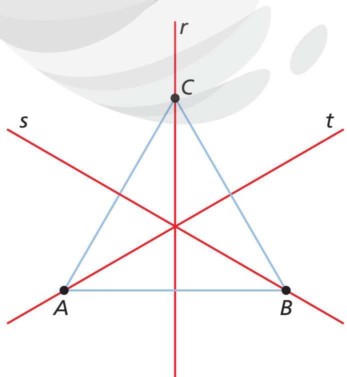
Exemplos

a)



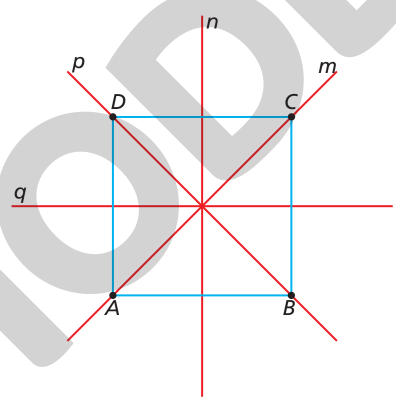
Os pontos *A* e *F* pertencem ao pentágono e à reta *r*, que é o eixo de simetria dessa figura.

b)



O triângulo equilátero tem três eixos de simetria.

c)



O quadrado tem quatro eixos de simetria.

Explore

Em um *software* de Geometria dinâmica, construa um segmento $\overline{PQ}$ e o seu simétrico $\overline{P'Q'}$ em relação a uma reta *s*. Depois, selecione o segmento $\overline{PQ}$ e movimente-o com o botão [botão]. Em seguida, faça o mesmo com o segmento $\overline{P'Q'}$, com a reta *s*, com um ponto da reta *s* e, finalmente, com o ponto *P*. Descreva o que você observou em cada movimento.

Essa atividade contribui com o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, pois há um trabalho de compreensão, de utilização e de criação com tecnologias digitais.
Segmento $\overline{PQ}$: preserva a medida e a direção e, conforme é aproximado ou afastado da reta *s*, o mesmo acontece com o segmento $\overline{P'Q'}$, mantendo a simetria em relação à reta *s*.
Segmento $\overline{P'Q'}$: quando selecionado, não se movimenta.
Reta *s*: preserva a direção no movimento. O segmento $\overline{P'Q'}$ movimenta-se com a reta *s*, mantém a direção e a medida. O segmento $\overline{PQ}$ não se movimenta. Como esperado, é preservada a condição de simetria com o segmento $\overline{PQ}$. Pode-se também, com o movimento, mudar $\overline{P'Q'}$ de semiplano em relação à reta *s*.
Ponto da reta *s*: pode-se mudar a direção de *s* e, consequentemente, mudar a direção de $\overline{P'Q'}$, mantendo a medida e a simetria com $\overline{PQ}$. Com o movimento de um ponto da reta *s*, o segmento $\overline{PQ}$ não se movimenta.
Ponto *P*: com esse movimento, altera-se a medida do segmento, podendo também mudar a sua direção no plano. O segmento $\overline{P'Q'}$ movimenta-se conforme o movimento de $\overline{PQ}$, conservando a simetria em relação à reta *s*. A reta *r* não se movimenta.
Pedir aos alunos que, com o movimento do ponto *P*, façam que ele seja um ponto da reta *s* e, depois, façam que o segmento $\overline{PQ}$ seja concorrente à reta *s*. Ao pertencer à reta *s*, o ponto *P* será coincidente ao ponto *P*'. Ao fazer que $\overline{PQ}$ seja concorrente à reta *s*, acontecerá o mesmo com $\overline{P'Q'}$, de modo a manter a simetria. Com isso, o ponto *P* estará no mesmo semiplano, em relação à reta *s*, do ponto *Q*', oposto ao semiplano dos pontos *P*' e *Q*.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

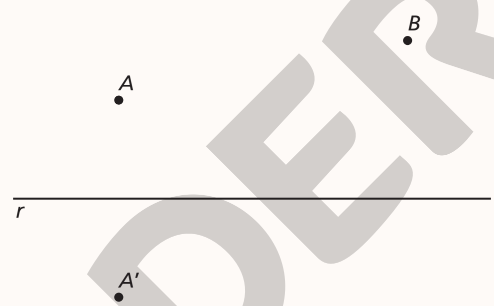
MODERNA

Exercício resolvido

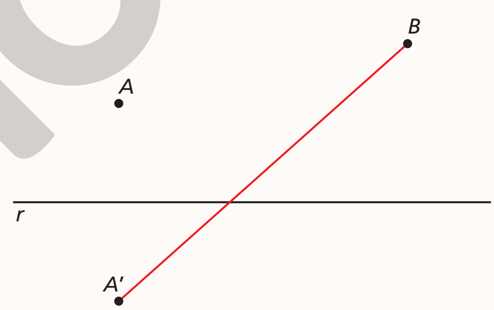
R1. Determinar um ponto C na reta r, de modo que a distância do ponto A ao ponto B, passando por C, seja a menor possível.

▸ Resolução

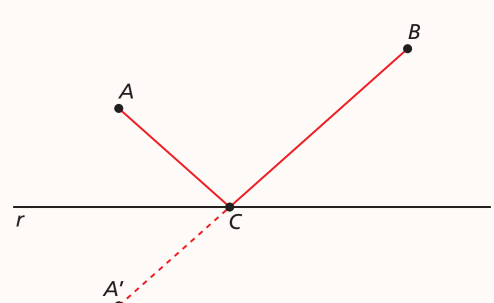
Primeiro, devemos lembrar que a menor distância entre dois pontos é a medida do segmento de reta que tem esses pontos como extremidades. Assim, se conseguirmos obter um segmento de reta com extremidades em A e B que passe por C, teremos a solução do problema. Como isso não é possível, pois os três pontos não são colineares, podemos resolver o problema com o simétrico do ponto A em relação à reta r.



Construímos o ponto A', que é o simétrico do ponto A em relação à reta r. Feito isso, vamos traçar o segmento $\overline{A'B}$.



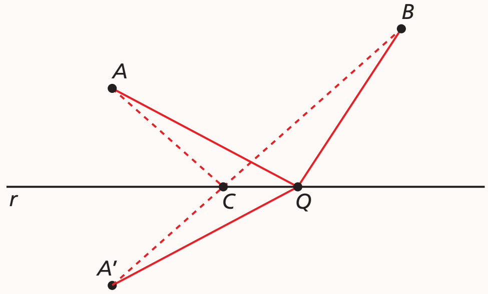
A intersecção entre o segmento $\overline{A'B}$ e a reta r é o ponto C que procuramos, pois r é a mediatriz de $\overline{AA'}$; logo, $A'C = AC$.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Veja o que aconteceria se escolhêssemos um ponto Q, diferente de C, na reta *r*.



Note que $A'C + CB$ é menor que $A'Q + QB$, qualquer que seja Q pertencente à reta *r*, pois C está contido no segmento $\overline{A'B}$ cuja medida apresenta a menor distância entre A' e B.

Portanto, o ponto de intersecção entre a reta *r* e o segmento $\overline{A'B}$, tal que A' é o simétrico de A em relação à reta *r*, é o ponto C, para o qual $AC + CB$ é mínimo.

Se julgar pertinente, apresentar o vídeo sobre desigualdade triangular indicado a seguir. Explicar aos alunos que *A'*, *B* e *Q* é triângulo e, pela desigualdade triangular, $A'Q + QB > A'B$, sempre que *C* não coincidir com *Q*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9R_9QLWWkpg>. Acesso: 22 jun. 2020.

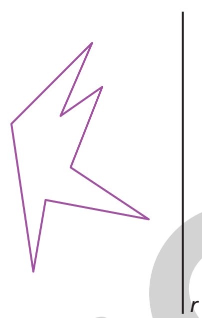
Observação

O exercício **R1** poderia ter sido resolvido usando o mesmo procedimento, porém com o simétrico do ponto B em relação à reta *r*.

Exercícios propostos

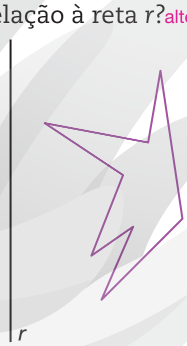
Registre as respostas em seu caderno.

1. Considere a figura a seguir e a reta *r*.

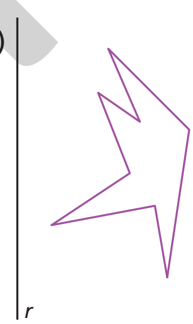


Qual das alternativas apresenta a figura simétrica à figura anterior em relação à reta *r*? alternativa c

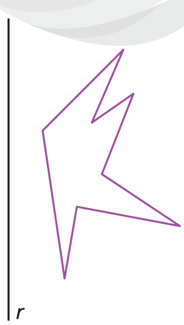
a)



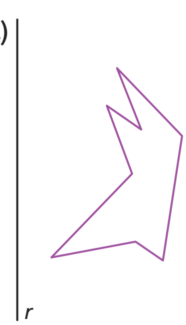
c)



b)



d)



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

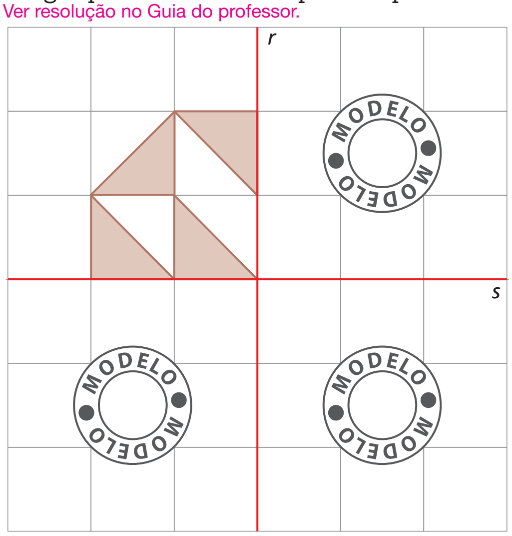
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

4. Essa atividade favorece o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC, pois exercita a curiosidade intelectual e recorre à abordagem própria das Ciências, incluindo a investigação, a reflexão em soluções de problemas, a imaginação e a criatividade para investigar causas. Se julgar oportuno, solicitar aos alunos uma pesquisa sobre a reflexão da luz em espelhos planos (Sugestão: <http://efisica.if.usp.br/otica/basico/reflexao/>. Acesso: 28 maio 2020).

2. Leia o texto a seguir e depois faça o que se pede.

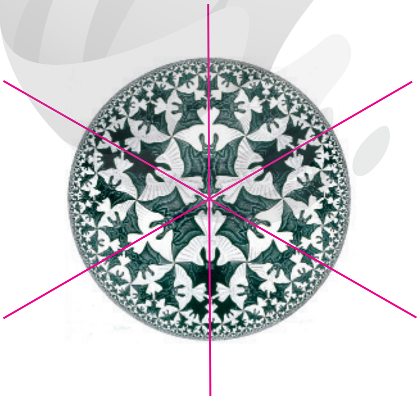
Uma empresa solicitou a um *designer* que fizesse um logotipo. Com o início do trabalho, ele traçou um quarto do projeto e pensou: "vou fazer duas reflexões para concluir o desenho; primeiro, em relação à reta *r*; depois, com a figura original e a obtida na primeira reflexão, faço outra reflexão em relação à reta *s*".

Copie em uma malha quadriculada a figura que se refere a um quarto do projeto e desenhe as duas reflexões que o *designer* pensou para obter o logotipo encomendado pela empresa.
Ver resolução no Guia do professor.



3. Maurits Cornelis Escher foi um artista gráfico holandês conhecido por suas obras de motivos geométricos. Em 1922, visitou o Palácio de Alhambra, na cidade de Granada, Espanha, e encantou-se com os mosaicos que decoravam o palácio. Isso o motivou a trabalhar as transformações geométricas em suas obras.

A seguir, observe a reprodução da obra *Circle limit IV*, de M. C. Escher. Sobreponha à figura um papel vegetal e trace no papel todos os eixos de simetria da obra. Depois, responda à questão.

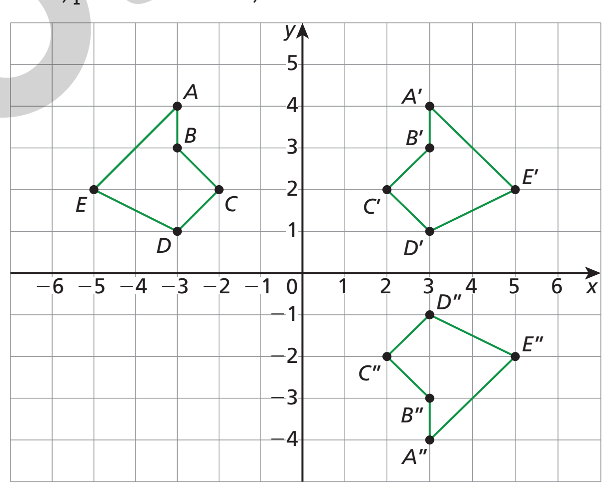


ESCHER, Maurits Cornelis. *Limite Circular IV*. 1960. Impressão em xilogravura, 41,7 cm × 41,7 cm.

- Quantos eixos de simetria há nessa obra de Escher? três eixos de simetria

4. Uma fonte luminosa emite raios de luz em todas as direções e, esses raios, seguem em linha reta a partir dela. Uma fonte está localizada no ponto *A* da figura entre dois espelhos paralelos representados pelas retas *r* e *s*. Copie a figura no caderno e, com régua e compasso, desenhe e explique a trajetória que um raio de luz deve percorrer até atingir o ponto *B*, após refletir uma vez em cada espelho. Considere que o meio em que está sendo propagada a luz é o mesmo em toda a sua trajetória.
Ver resolução no Guia do professor.

5. Uma figura pode ser obtida por meio de uma composição de reflexões. Por exemplo, no plano cartesiano a seguir, o polígono $A'B'C'D'E'$ é a reflexão do polígono $ABCDE$ em relação ao eixo das ordenadas. O polígono $A''B''C''D''E''$, por sua vez, é a reflexão do polígono $A'B'C'D'E'$ em relação ao eixo das abscissas. Assim, podemos dizer que o polígono $A''B''C''D''E''$ é uma reflexão do polígono $ABCDE$, primeiro, em relação ao eixo das ordenadas e, posteriormente, ao eixo das abscissas.



Pensando nessa ideia, um triângulo PQR, que está em um plano cartesiano, foi submetido a duas reflexões: primeiro, em relação ao eixo das abscissas; depois, em relação ao eixo das ordenadas. Assim, foi gerado um triângulo com vértices nos pontos $P''(-1, -4)$, $Q''(-2, -1)$ e $R''(-7, -5)$. Determine as coordenadas dos pontos P, Q e R do triângulo original. $P(1, 4)$, $Q(2, 1)$ e $R(7, 5)$

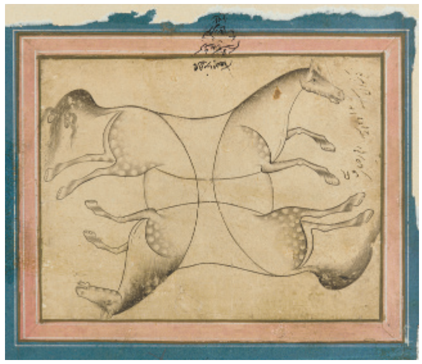
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA
© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Reflexão em relação a um ponto

Observe a reprodução da obra de arte do artista Rza Abbasi. Verifique que há simetria, porém diferente da simetria axial que estudamos.



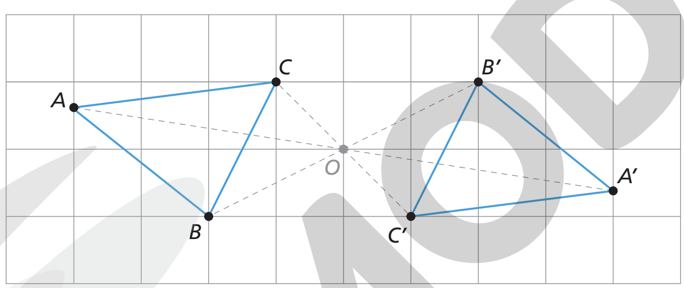
MUSEU NACIONAL DE ARTE ASIÁTICA DO SMITHSONIAN, WASHINGTON, D.C.

ABBASI, Rza. *Quatro cavalos*. 1616. Tinta sobre papel, 12 cm × 15,4 cm.

O tipo de simetria usado na obra de arte é obtido a partir de um ponto. Veremos mais sobre esse tema neste tópico.

No exemplo a seguir, o triângulo $A'B'C'$ é simétrico ao triângulo ABC em relação ao ponto O. Para isso, a distância do ponto A ao ponto O deve ser igual à distância de A' ao ponto O. Note que o mesmo ocorre com os pontos B e C em relação aos pontos B' e C', respectivamente. Isso significa que o ponto O é o ponto médio dos segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$. De forma genérica, o ponto O é também o ponto médio do segmento $\overline{XX'}$, sendo X um ponto qualquer do triângulo ABC e X', o seu simétrico pertencente ao triângulo $A'B'C'$.

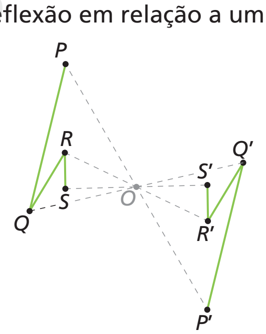
O ponto O é chamado de **centro de reflexão**. Dizemos, por exemplo, que o ponto A' da figura transformada é simétrico ao ponto A em relação ao ponto O, e, reciprocamente, o ponto A é simétrico ao ponto A'.



Sejam os pontos O e P pertencentes a um plano α. Uma reflexão de P em relação ao ponto O gera um ponto P' em α se, e somente se, O é ponto médio do segmento $\overline{PP'}$. Dizemos que P' é a **reflexão** ou o **simétrico** do ponto P **em relação ao ponto** O. Se o ponto P coincidir com o ponto O, a reflexão do ponto P ou o simétrico de P em relação ao ponto O será o próprio ponto P.

Exemplo

Observe outro exemplo de reflexão em relação a um ponto.



A figura $P'Q'R'S'$ é simétrica à figura $PQRS$ em relação ao ponto O.

As reproduções da obra de Rza Abbasi neste tópico e a de Escher, no exercício **3** da página anterior, favorecem o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602** da área de Linguagens e suas Tecnologias, e da competência geral **3** da BNCC, uma vez que os estudantes poderão se apropriar de patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade; fruir e apreciar esteticamente uma manifestação artística e cultural de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

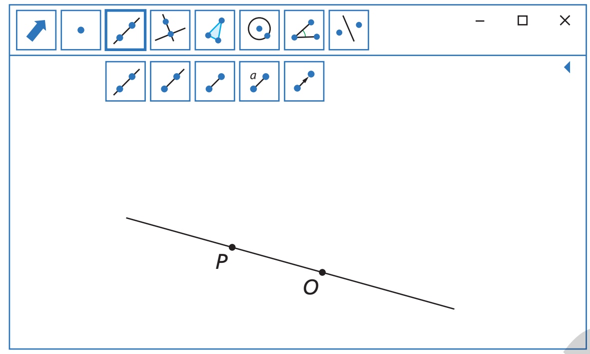
MODERNA

Essa construção favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, pois auxilia a compreensão e a utilização de tecnologias digitais de informação.

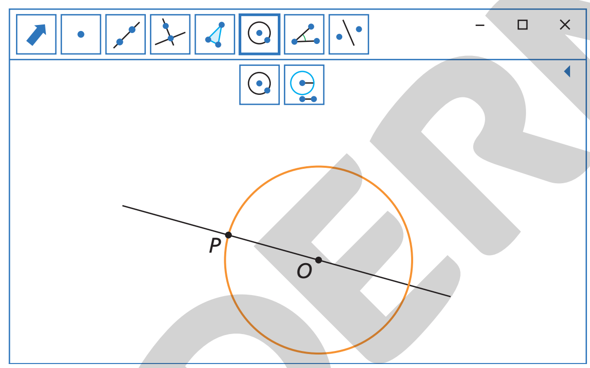
Veja a seguir a construção do simétrico *P*' de um ponto *P* em relação a um centro de reflexão *O* com o uso de um *software* de Geometria dinâmica.

Dados um ponto *O*, centro de reflexão, e um ponto *P*, vamos construir o ponto *P*', simétrico de *P* em relação a *O*.

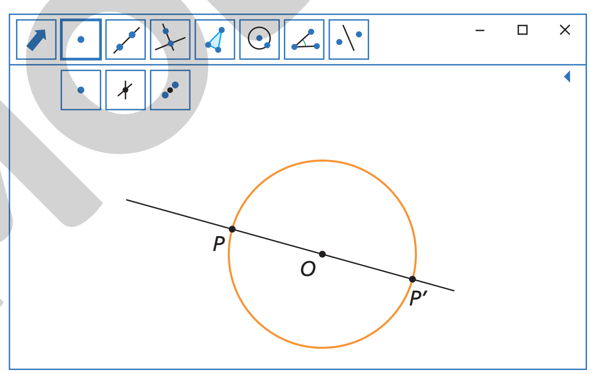
1. Definidos os pontos *P* e *O*, traçamos a reta $\overleftrightarrow{PO}$.



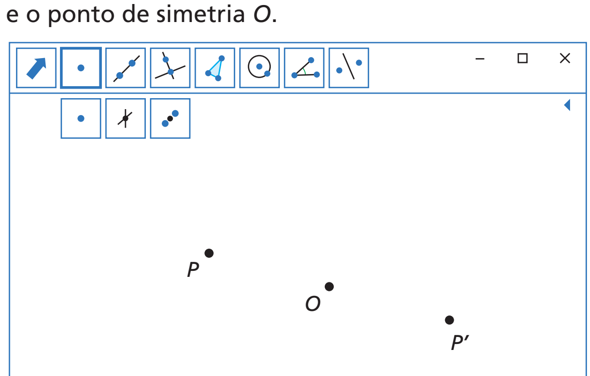
2. Construímos a circunferência de centro *O* e raio $\overline{OP}$.



3. Há duas intersecções entre a reta $\overleftrightarrow{PO}$ e a circunferência de centro *O* e raio $\overline{OP}$, sendo uma delas o ponto *P*. A outra será o ponto *P*', simétrico de *P* em relação a *O*.



4. Ocultamos as construções auxiliares, permanecendo apenas o ponto *P*, o seu simétrico *P*' e o ponto de simetria *O*.



Explore

Use um *software* de Geometria dinâmica para fazer a construção ao lado. Ao terminar, clique no botão e movimente o ponto *P*. Descreva o que você verificou com esse movimento.

Ao movimentar o ponto *P*, o ponto *P*' também se movimentará, mantendo a simetria em relação ao ponto *O*.
Pedir ao aluno que faça o ponto *P* ser coincidente ao ponto *O*. Ele poderá verificar que *P* será coincidente também com *P*'.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

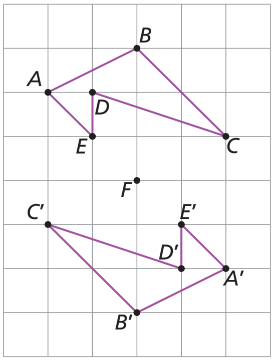
MODERNA

Exercícios propostos

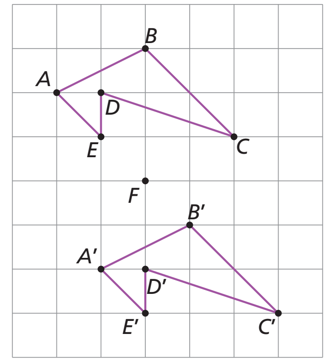
Registre as respostas em seu caderno.

6. Em qual das alternativas a figura $A'B'C'D'E'$ é simétrica da figura $ABCDE$ em relação ao ponto F? alternativa a

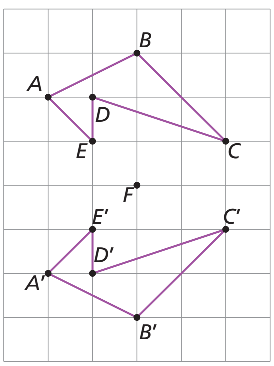
a)



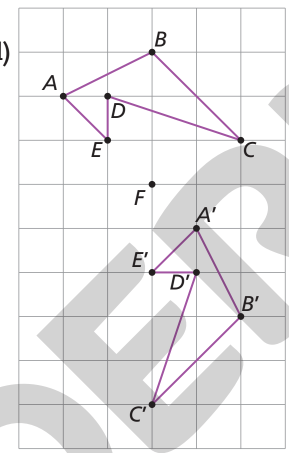
c)



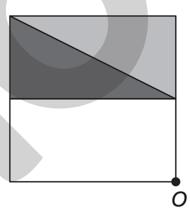
b)



d)

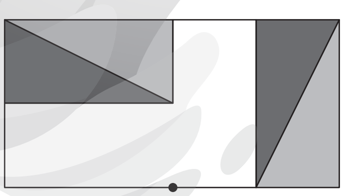


7. (Enem) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O. alternativa e

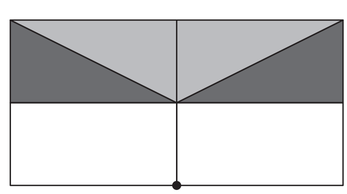


A imagem que representa a nova figura é:

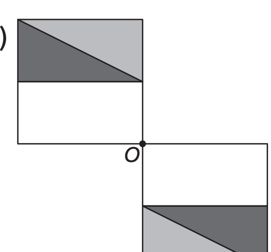
a)



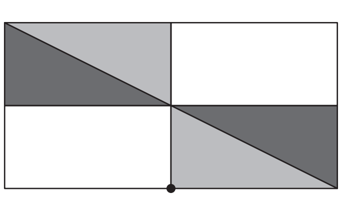
c)



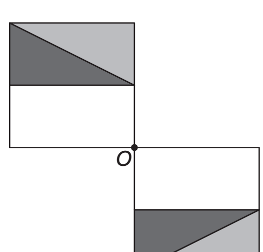
e)



b)



d)

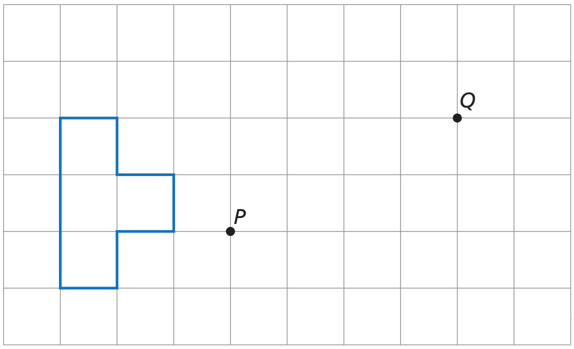


Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

8. Uma figura pode ser obtida por meio de uma composição de reflexões em relação a pontos no plano. Pensando nessa ideia, em uma malha quadriculada, copie a figura e os pontos P e Q. Depois, faça uma reflexão da figura em relação ao ponto P e, com a figura obtida, faça outra reflexão em relação ao ponto Q. Ver resolução no Guia do professor.



NELSON MATSUDA

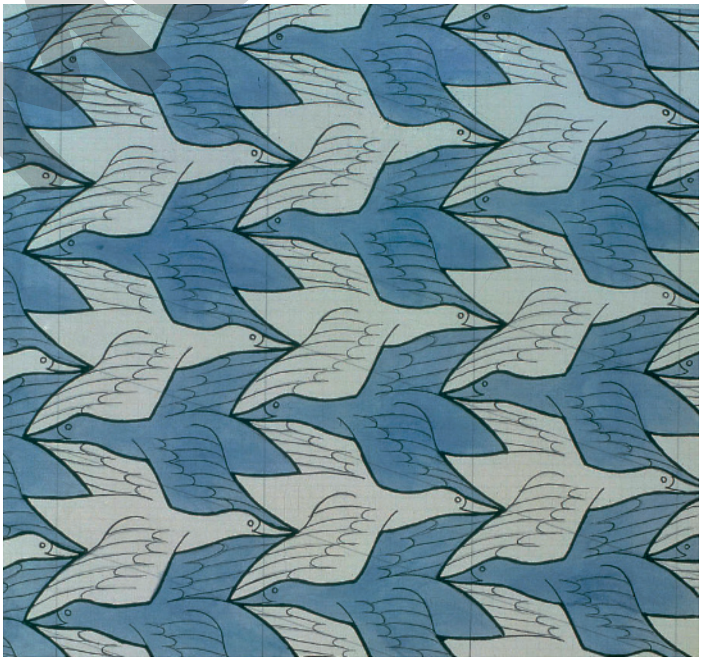
9. Em um papel quadriculado, trace um polígono qualquer $ABCD$. Depois, construa o polígono $A'B'C'D'$ simétrico ao polígono $ABCD$ em relação a um ponto P qualquer do plano. Com a figura obtida, construa o polígono $A''B''C''D''$, simétrico em relação a um ponto Q qualquer do plano, não coincidente a P. Ver resolução no Guia do professor.

Feito isso, meça os segmentos $\overline{AA''}$, $\overline{BB''}$, $\overline{CC''}$ e $\overline{DD''}$ e escreva o que você observou quanto às medidas apuradas e à posição do polígono $A''B''C''D''$ em relação ao polígono $ABCD$. Converse com os colegas da turma e verifique se chegaram à mesma conclusão a que você chegou.

2.2 Translações

Observe que na obra *Dois pássaros*, Escher usa um tipo de transformação geométrica diferente das que estudamos até agora. Perceba que tanto os pássaros de cor branca quanto os de cor azul se repetem, preenchendo o plano e formando um padrão. Vamos trabalhar esse tipo de transformação neste tópico. Acompanhe.

© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM



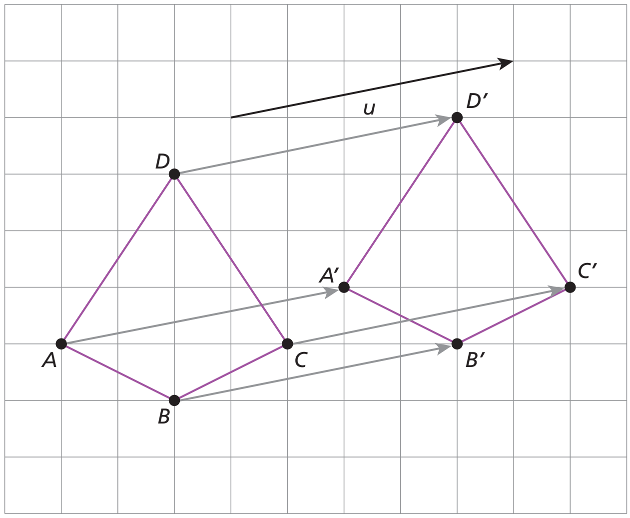
ESCHER, M. C. *Dois pássaros*. 1938. Aquarela, 34 cm × 45 cm.

A obra de Escher contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602** da área de Linguagens e suas Tecnologias da competência geral **3** da BNCC, em que o aluno poderá se apropriar de patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como fruir e apreciar esteticamente uma manifestação artística e cultural mundial, de modo a aguçar a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

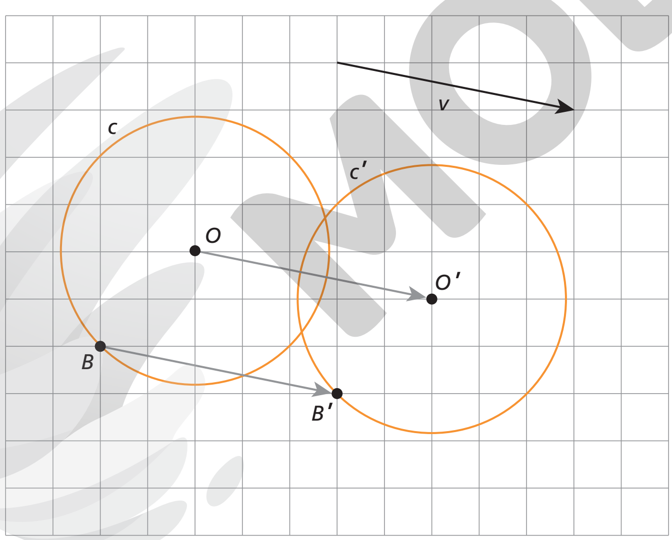
Na figura, dizemos que o polígono *A'B'C'D'* é uma translação da figura *ABCD* determinada pelo vetor $\vec{u}$.



Note que todos os pontos da figura original foram transladados por vetores que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo do vetor $\vec{u}$. Assim, $\vec{u}$ é representado por todos esses vetores.

Sejam um vetor $\vec{w}$ e o ponto *P* pertencentes a um plano α. Se no ponto *P* for posicionada a origem do vetor $\vec{w}$ obtém-se o ponto *P*' em sua extremidade. Pode-se chamar o ponto *P*' de **translação** de *P* ou imagem de *P* determinada pelo vetor $\vec{w}$.

Exemplo



A circunferência *c*' é uma translação da circunferência *c* determinada pelo vetor $\vec{v}$. Cada ponto da circunferência *c* é transladado na mesma direção, no mesmo sentido e do mesmo módulo do vetor $\vec{v}$.

Para fazer a translação da circunferência *c*, basta obter *O*', translação de *O* determinada pelo vetor $\vec{a}$. Depois, traçar a circunferência com a ponta-seca do compasso em *O*' e raio da circunferência *c*.

Reflita

Como você faria para transladar uma circunferência *c* de centro *O* de um vetor $\vec{a}$?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

O tópico sobre a arte do povo indígena Baniwa contempla o tema contemporâneo **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **1** e **3** da BNCC e da habilidade **EM13CHS104**, da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade, bem como na valorização de manifestações artísticas e culturais de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

Arte indígena Baniwa

Os **Baniwa**, indígenas que habitam a região Norte do Brasil nas proximidades do Rio Negro, vivem da produção e da venda de cestos, balaios, jarros e peneiras. As matérias-primas utilizadas para a confecção desses utensílios são as fibras de uma planta chamada **arumã** e pigmentos para colorir, extraídos de outras plantas.

Grande parte da arte indígena brasileira é rica em motivos geométricos.

Veja a seguir fotografias que retratam, na arte desse povo, algumas transformações geométricas que estamos estudando.

ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS

RITA BARRETO/FOTOARENA

FABIO COLOMBINI

FABIO COLOMBINI

Sílabas gráficas de balaios Baniwa.

O boxe **Explore** favorece uma interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias, pois contribui com o desenvolvimento das competências específicas **6** dessa área e das habilidades **EM13LGG201** e **EM13LGG704**. A pesquisa solicitada incentiva os estudantes a apropriarem-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.

Os alunos podem pesquisar, em algum *site* de busca da internet, “arte indígena brasileira” ou “simetria na arte indígena brasileira”. No *site* de busca, pedir a eles que cliquem em imagens. Há uma grande quantidade de exemplos. Se achar conveniente, organizar uma exposição das fotografias impressas com os desenhos elaborados pelos alunos.

Explore

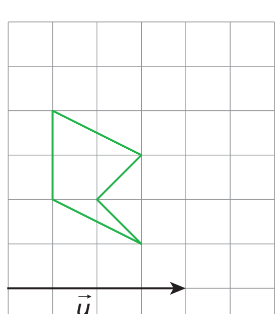
Pesquise na internet fotografias que retratem a arte indígena brasileira (pode ser pintura no corpo ou arte em algum utensílio). A arte deve apresentar alguma transformação geométrica estudada até o momento. Após a escolha, copie parte do desenho geométrico em uma folha avulsa e indique qual tipo de transformação foi utilizada.

Exercícios propostos

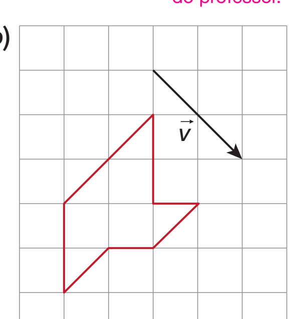
Registre as respostas em seu caderno.

10. Copie as figuras a seguir em papel quadriculado. Depois, faça a translação da figura de cada item em relação ao vetor indicado. Ver resolução no Guia do professor.

a)



b)

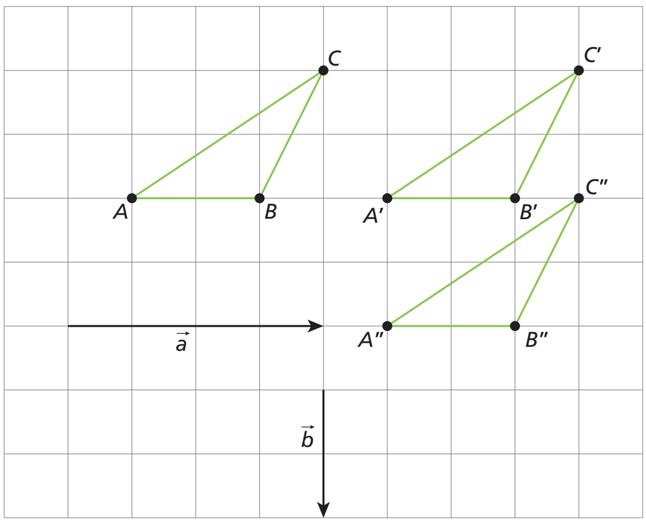


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

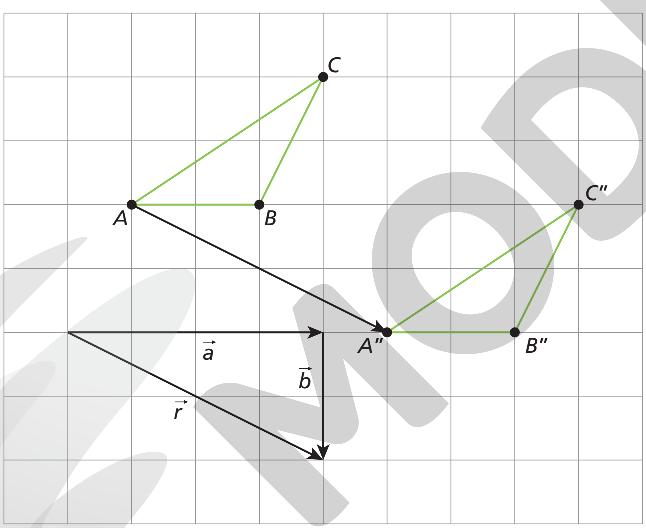
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11. Leia o texto e faça o que se pede. Ver resolução no Guia do professor.

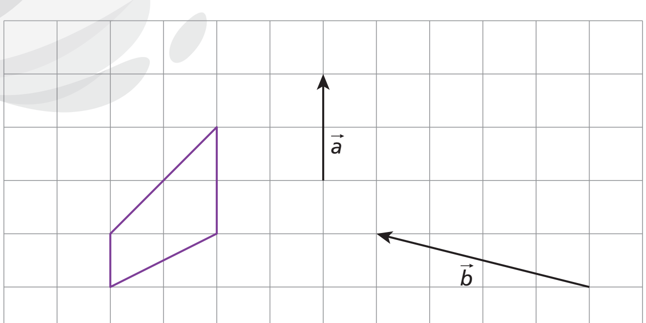
Uma translação pode ser obtida pela composição de duas ou mais translações. Na figura a seguir, note que a figura *ABC* foi transladada **4** unidades da malha quadriculada para a direita, na direção horizontal, e depois a figura obtida *A*'*B*'*C*' foi transladada 2 unidades para baixo, na direção vertical.



Observe que as duas translações feitas podem ser representadas por apenas um movimento, que é indicado pelo vetor soma $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$. Veja:



Copie o quadrilátero e os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ em uma malha quadriculada e translade a figura a seguir em relação ao vetor resultante da soma $\vec{a} + \vec{b}$.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

2.3 Rotações

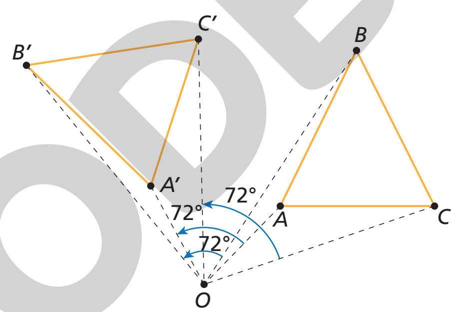
Veja a seguir os flocos de neve fotografados pelo russo Alexey Kljatov.

FOTOS: ALEXEY KLJATOV/SHUTTERSTOCK

A apreciação das fotografias de Alexey Kljatov favorecem o desenvolvimento da competência geral **3** da BNCC.

Observe que o formato da parte do floco de neve indicado pelo ângulo β se repete em torno do centro do floco no plano da fotografia. Esse é um tipo de transformação isométrica que será abordado neste tópico.

No exemplo a seguir, dizemos que o triângulo $A'B'C'$ foi obtido a partir de uma rotação no sentido anti-horário do triângulo ABC por um ângulo de medida igual a 72°, que tem como vértice o ponto O.



O ponto O é chamado de **centro da rotação**, e o ângulo que usamos para rotacionar a figura, de **ângulo de rotação**.

Observação

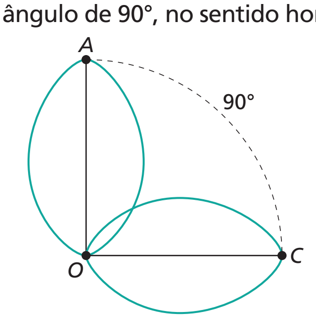
A rotação de P para P' pode ser no sentido horário ou anti-horário.

Sejam um ponto O, um ângulo θ e os pontos P e P' pertencentes a um plano α. P' é uma rotação de P, ou imagem de P, por um ângulo θ em torno do ponto O se, e somente se, $OP = OP'$ e $\text{med}(P\hat{O}P') = \theta$.

Exemplo

O centro de rotação pode ser também um dos pontos da figura.

A seguir, a figura determinada pelos pontos C e O é uma rotação da figura determinada pelos pontos A e O por um ângulo de 90°, no sentido horário, em torno do ponto O.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

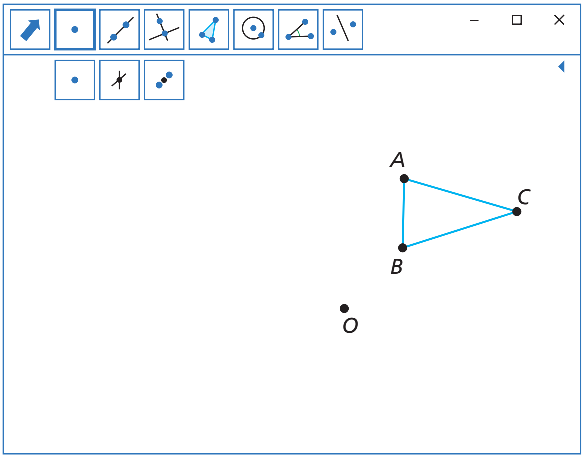
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
MODERNA

Construção da rotação de uma figura com software de Geometria dinâmica

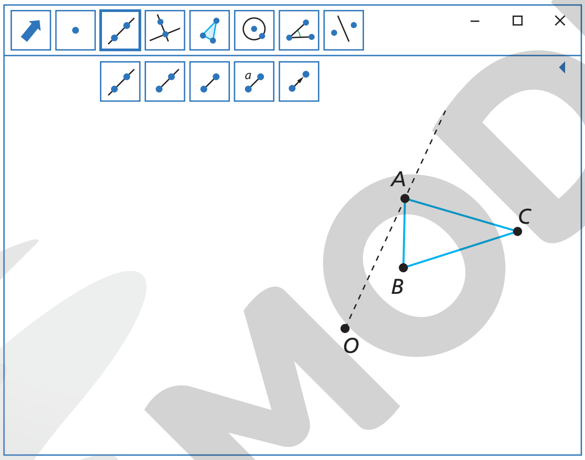
A construção a seguir desenvolve a competência geral **5** da BNCC, pois favorece a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação.

Vamos construir o triângulo $A'B'C'$ por meio de uma rotação aplicada no triângulo ABC. Para isso, escolhemos o ângulo, o centro e o sentido da rotação.

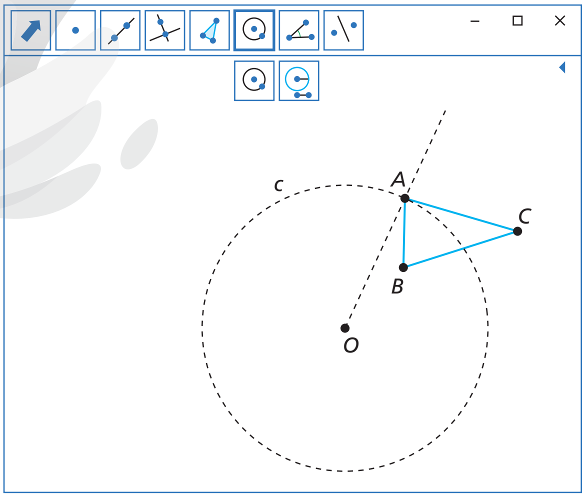
1. Definidos o ângulo e o sentido da rotação, construímos um triângulo ABC e o ponto O, centro da rotação.



2. Construímos a semirreta $\overrightarrow{OA}$. A partir desse passo, vamos deixar tracejadas as construções auxiliares.



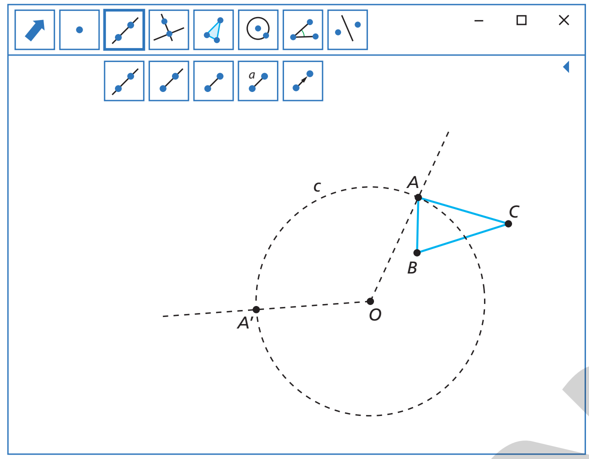
3. Construímos a circunferência c de centro O e raio $\overline{OA}$.



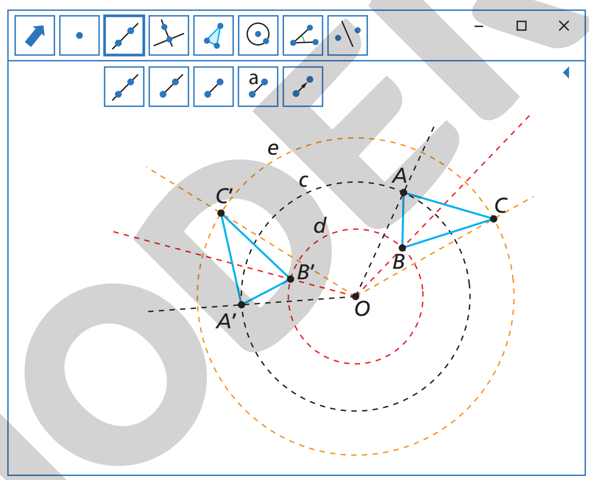
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
MODERNA

4. Nesse exemplo, escolhemos um ângulo de rotação medindo 120° e o sentido da rotação como anti-horário. Então, considerando $\overline{OA}$ um dos lados do ângulo de rotação, construímos o outro lado do ângulo no sentido anti-horário e marcamos o ponto *A*', intersecção da circunferência *c* com o outro lado do ângulo construído.



5. Para determinar os outros vértices *B*' e *C*' da figura rotacionada, utilizamos o mesmo procedimento usado para determinar o ponto *A*'. Para isso, usamos as circunferências *d* e *e*. Concluindo, traçamos os lados do triângulo *A*'*B*'*C*'.

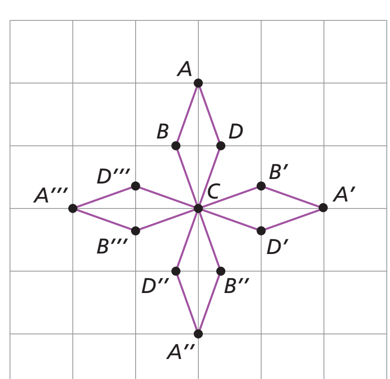


MODERNA

Composição de rotações

Composição de rotações em torno do mesmo ponto

A figura a seguir foi composta por três rotações do losango *ABDC* em torno do ponto *C*. Observe:



Observação

Observe na figura que qualquer losango pode ser uma rotação de qualquer outro losango, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O losango $A'B'CD'$ foi obtido do losango $ABCD$ por uma rotação de 90° no sentido horário ou de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto C.

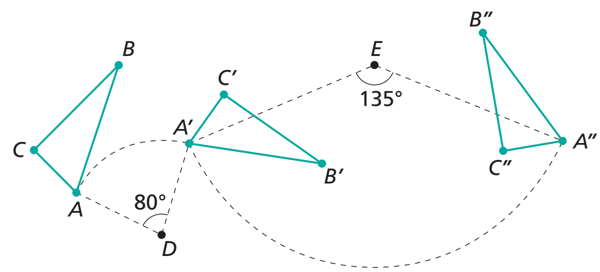
O losango $A''B''CD''$ foi obtido do losango $A'B'CD'$ por uma rotação de 90° no sentido horário ou de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto C.

O losango $A'''B'''CD'''$ foi obtido do losango $A''B''CD''$ por uma rotação de 90° no sentido horário ou de 270° no sentido anti-horário em torno do ponto C.

Note que a segunda e a terceira rotações foram obtidas de outras rotações.

Composição de rotações em torno de pontos distintos

Na figura a seguir, o triângulo $A'B'C'$ foi obtido do triângulo ABC por uma rotação de 80° no sentido horário em torno do ponto D. O triângulo $A''B''C''$ foi obtido do triângulo $A'B'C'$ por uma rotação de 135° no sentido anti-horário em torno do ponto E.

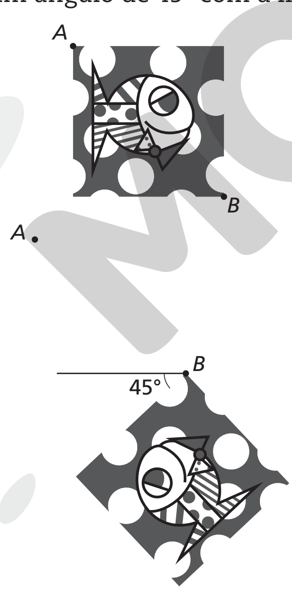


Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

12. (Enem) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.



Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. alternativa b

A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:

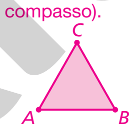
a) 90° no sentido horário.
b) 135° no sentido horário.
c) 180° no sentido anti-horário.
d) 270° no sentido anti-horário.
e) 315° no sentido horário.

A atividade proposta no boxe **Explore** propicia o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC, pois favorece a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação.
Resposta possível: construir um triângulo equilátero *ABC* (função polígono regular com 3 lados) e em torno de um dos vértices. Adotar o sentido horário ou anti-horário e fazer uma rotação de 60°. Proceder da mesma maneira com cada triângulo obtido com a última rotação até obter o hexágono, conforme os passos a seguir.

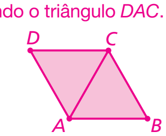
Explore

Em um *software* de Geometria dinâmica, construa um triângulo equilátero e por meio de rotações feitas nesse triângulo, construa um hexágono com lado de mesma medida do triângulo.

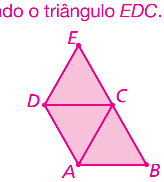
1. Construir um triângulo *ABC* com a função polígono regular (se houver no *software* utilizado, caso contrário construir um triângulo equilátero usando os passos de régua e compasso).



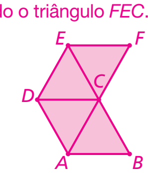
2. Rotacionar no sentido horário do triângulo *ABC* em torno do ponto *C*, obtendo o triângulo *DAC*.



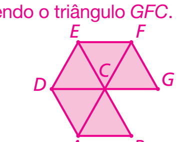
3. Rotacionar no sentido horário do triângulo *DAC* em torno do ponto *C*, obtendo o triângulo *EDC*.



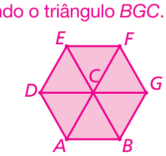
4. Rotacionar no sentido horário do triângulo *EDC* em torno do ponto *C*, obtendo o triângulo *FEC*.



5. Rotacionar no sentido horário do triângulo *FEC* em torno do ponto *C*, obtendo o triângulo *GFC*.



6. Rotacionar no sentido horário do triângulo *GFC* em torno do ponto *C*, obtendo o triângulo *BGC*.

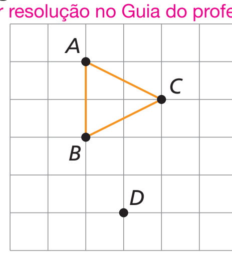


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

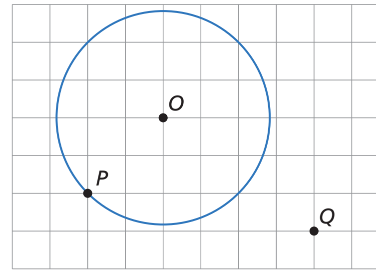
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

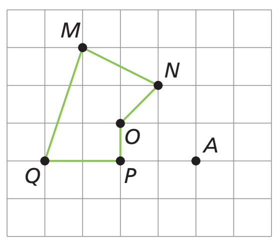
13. Em um papel quadriculado, copie a figura e o centro de rotação de cada item. Depois, usando régua, transferidor e compasso, faça a rotação dessa figura conforme as indicações do sentido e da medida do ângulo.
Ver resolução no Guia do professor.

a)


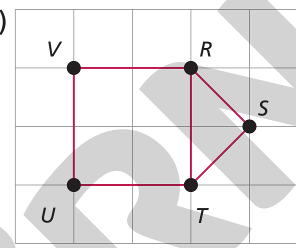
- centro de rotação: *D*
- sentido: horário
- medida do ângulo: 60°

c)


- centro de rotação: Q
- sentido: horário
- medida do ângulo: 80°

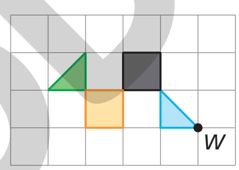
b)


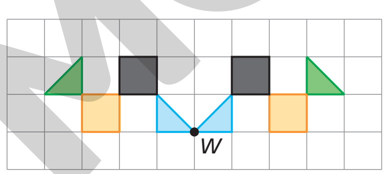
- centro de rotação: *A*
- sentido: anti-horário
- medida do ângulo: 90°

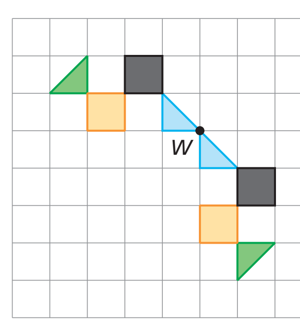
d)


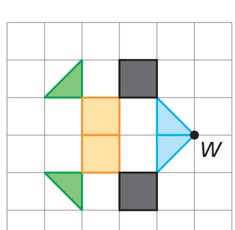
- centro de rotação: S
- sentido: anti-horário
- medida do ângulo: 135°

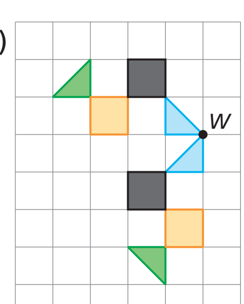
14. Qual das alternativas representa uma rotação da figura a seguir em torno do ponto W? alternativa d



a)


c)


b)


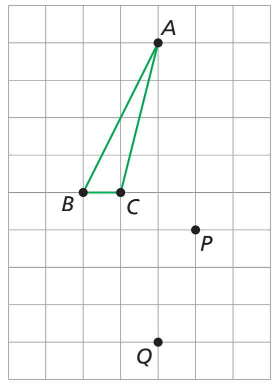
d)


MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

15. Copie o triângulo **ABC** e os pontos **P** e **Q** em uma malha quadriculada. Com régua, transferidor e compasso, determine o triângulo $A''B''C''$, que é resultado de uma composição de rotações, conforme as medidas de ângulo, sentido e centro de rotação indicados. Ver resolução no Guia do professor.



1ª rotação

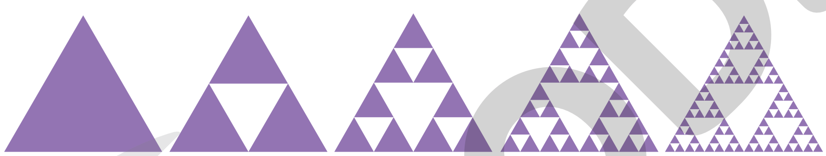
- centro de rotação: P; sentido: horário; medida do ângulo: 65°

2ª rotação

- centro de rotação: Q; sentido: horário; medida do ângulo: 45°

3 Homotetia

O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) foi o primeiro a descrever o fractal conhecido como **Triângulo de Sierpinski**. Essa figura geométrica é obtida por meio de um processo recursivo. Veja os passos da construção do triângulo de Sierpinski a seguir.

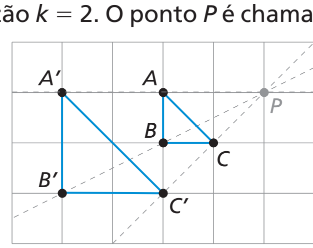


Uma recursão pode ser explicada como uma ação simples que gera um resultado, e essa ação simples pode ser repetida nesse resultado gerado. No caso do Triângulo de Sierpinski, a cada repetição, também chamada de iteração, deve ser "retirado'' o triângulo formado pelos pontos médios de cada triângulo existente no passo anterior. Por exemplo, da figura 2 para a 3, retiramos os três triângulos formados pelos pontos médios de cada um dos três triângulos da figura 2.

Nesse fractal, os espaços deixados pelos triângulos que foram retirados a cada iteração (que também são triângulos) representam a transformação geométrica que iremos estudar nesse tópico.

A **homotetia** é uma transformação geométrica que tem como resultado uma figura semelhante à original. Esse tipo de transformação preserva a razão entre as medidas de segmentos, a medida de ângulos e o paralelismo entre os segmentos correspondentes. A figura obtida com a transformação pode ser uma ampliação, uma redução ou uma congruência.

Na figura a seguir, dizemos que o triângulo $A'B'C'$ é o resultado de uma homotetia do triângulo ABC por uma razão $k = 2$. O ponto P é chamado de **centro da homotetia.**



A situação inicial apresentada nesse tópico favorece o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O ponto A', por exemplo, é obtido como o ponto da semirreta PA tal que $PA' = 2 \cdot PA$; do mesmo modo, $PB' = 2 \cdot PB$ e $PC' = 2 \cdot PC$.

Em uma homotetia, o ponto original, o ponto transformado e o centro de homotetia são sempre colineares.

Se a razão k for maior que zero, a homotetia é chamada de **direta**; se k for menor que zero, a homotetia é chamada de **inversa.**

Observação

O módulo de um número real a, indicado por $|a|$, também é um número real tal que:

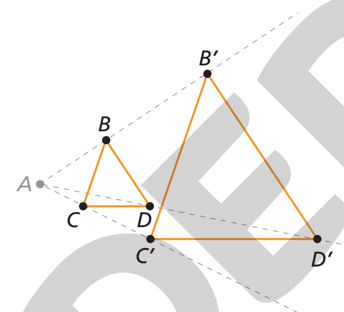
- se $a \geqslant 0$, $|a| = a$;
- se $a < 0$, $|a| = -a$.

Dado um ponto O em um plano α, chamamos de homotetia a transformação geométrica que associa a cada ponto P um ponto P', ambos pertencentes a α, tal que $OP \cdot |k| = OP'$, sendo k um número real diferente de zero, e os pontos P, P' e O, colineares.

Exemplos

a) A homotetia direta com razão k, tal que $k > 1$, resulta em uma ampliação da figura. Verifique a seguir.

O triângulo $B'C'D'$ é uma homotetia do triângulo BCD. O centro de homotetia é o ponto A, e a razão é $\frac{5}{2}$. Podemos dizer também que o triângulo $B'C'D'$ é **homotético** ao triângulo BCD com centro de homotetia em A e razão $\frac{5}{2}$.

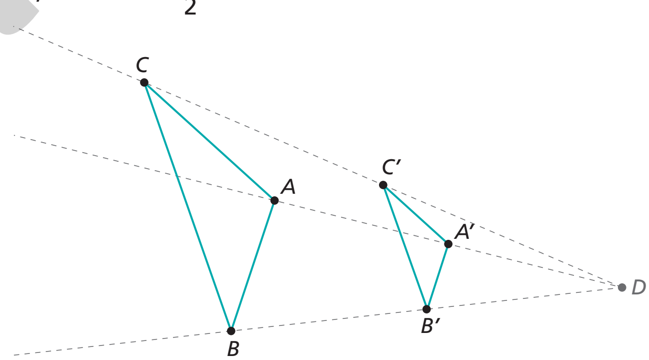


Assim, nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $AX \cdot \frac{5}{2} = AX'$

Em uma homotetia **direta**, o ponto X', homotético de X, pertence à mesma **semirreta** que tem como origem o centro da homotetia e passa por X.

b) A homotetia direta com razão k, tal que $0 < k < 1$, resulta em uma redução da figura original. Verifique a seguir.

O triângulo $A'B'C'$ é uma homotetia do triângulo ABC. O centro de homotetia é o ponto D, e a razão é $\frac{1}{2}$.



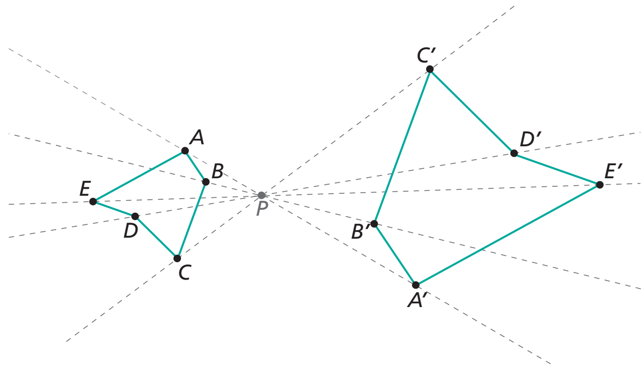
Nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $DX \cdot \frac{1}{2} = DX'$

c) A homotetia inversa com razão k, tal que $k < -1$, resulta em uma ampliação invertida da figura. Verifique a seguir.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

A figura $A'B'C'D'E'$ é uma homotetia da figura $ABCDE$. O centro de homotetia é o ponto P, e a razão é -2.

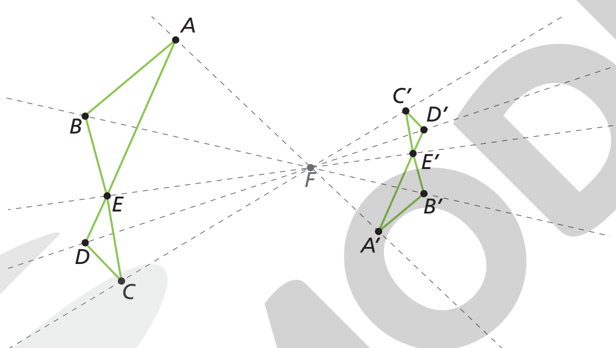


Nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $PX \cdot |-2| = PX'$

Em uma homotetia **inversa**, o ponto X', homotético de X, pertence à **semirreta oposta** à semirreta que tem como origem o centro da homotetia e passa por X.

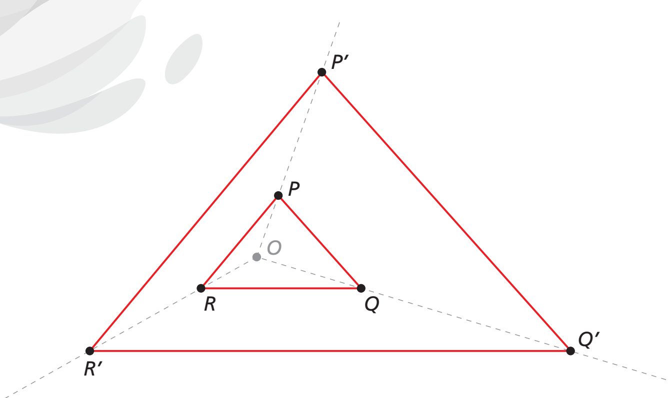
d) A homotetia inversa com a razão k, tal que $-1 < k < 0$, resulta em uma redução invertida da figura. Verifique a seguir.

A figura $A'B'C'D'E'$ é uma homotetia da figura $ABCDE$. O centro de homotetia é o ponto F, e a razão é $-\frac{1}{2}$.



Nesse exemplo, dado um ponto X qualquer da figura original e o seu homotético X', temos: $FX \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| = FX'$

e) O triângulo $P'Q'R'$ é uma homotetia direta do triângulo PQR de centro O e razão 3. Note que, nesse exemplo, o centro de homotetia pertence à região interna da figura.



Reflita

Qual é a posição de um ponto A', homotético de A, em uma homotetia de centro P e razão igual a 1? E se a razão for -1?

Razão 1:
$PA \cdot 1 = PA' \Rightarrow PA = PA'$
Como a homotetia é direta ($k > 0$), o ponto A' pertence à semirreta $\overrightarrow{PA}$. Logo, o ponto A' coincide com o ponto A.
Razão -1:
$PA \cdot |-1| = PA' \Rightarrow PA = PA'$
Como a homotetia é inversa ($k < 0$), o ponto A' pertence à semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{PA}$. Logo, o ponto A' dista 1 unidade de P e pertence à semirreta oposta à $\overrightarrow{PA}$.

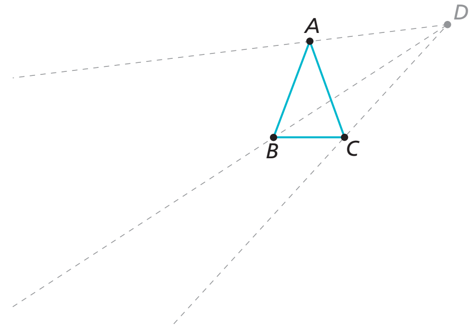
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

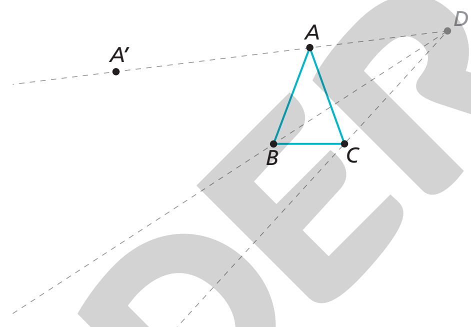
Observe, a seguir, a construção de uma homotetia direta com régua graduada.

Vamos construir um triângulo $A'B'C'$, homotético do triângulo ABC, tal que o ponto D seja o centro da homotetia e a razão seja $k = 2{,}4$.

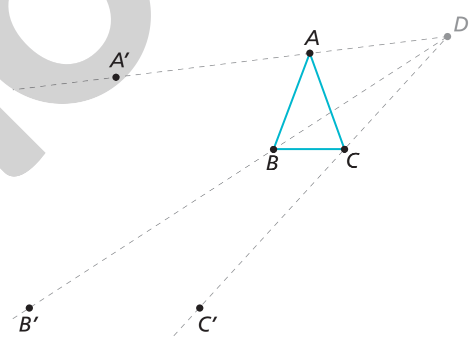
1. Dado o triângulo ABC e o ponto D, construímos as semirretas $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$.



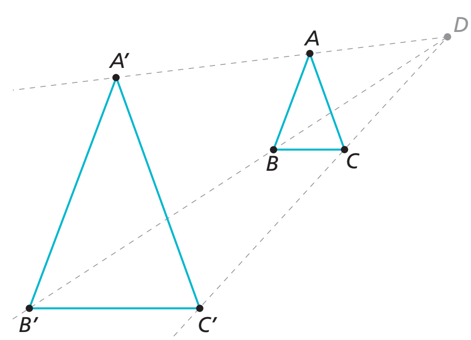
2. Como a razão é 2,4, temos, da definição de homotetia, que $DA' = 2{,}4 \cdot DA$ e que D, A e A' são colineares. Assim, a medida do segmento $\overline{DA'}$ será o produto da medida do segmento $\overline{DA}$ por 2,4. Com a régua graduada, marcamos o ponto A' na semirreta $\overrightarrow{DA}$.



3. Procedemos da mesma maneira para obter os pontos B' e C'. Usamos $DB' = 2{,}4 \cdot DB$ para o ponto B' e $DC' = 2{,}4 \cdot DC$ para o ponto C'.



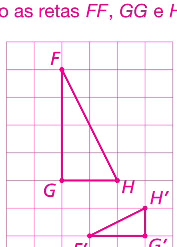
4. Por fim, construímos o triângulo traçando os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{A'C'}$.



Reflita

Figuras homotéticas são semelhantes, porém a recíproca não é verdadeira: figuras semelhantes nem sempre são homotéticas. Explique por que essa afirmação é verdadeira.

Resposta possível: o triângulo FGH, representado a seguir, é semelhante ao triângulo $F'G'H'$, mas eles não são homotéticos, pois não há centro de homotetia. Podemos comprovar isso traçando as retas $\overleftrightarrow{FF'}$, $\overleftrightarrow{GG'}$ e $\overleftrightarrow{HH'}$.



NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

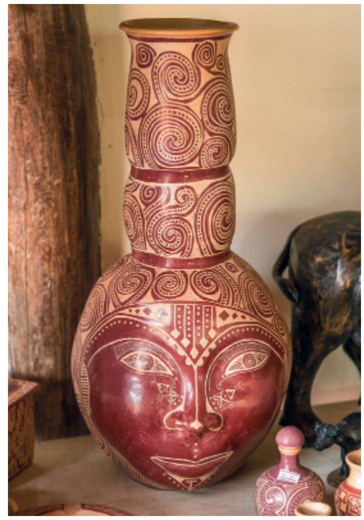
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Cerâmica marajoara

A cerâmica marajoara é um tipo de arte indígena da Ilha de Marajó (PA), reconhecida internacionalmente como interessante, bela e sofisticada. Suas peças têm ornamentos geométricos com abordagens referentes às transformações geométricas, como simetrias, translações e rotações. Veja a seguir fotografias de alguns utensílios de cerâmica marajoara.


JOSÉ BASSIT/PULSAR IMAGENS

Vasos de cerâmica marajoara. Belém – PA. 2013.


RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

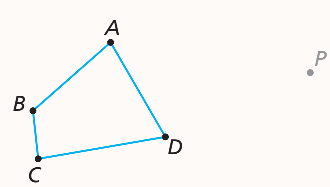
Cerâmica marajoara exposta em ateliê de arte. Soure, Ilha do Marajó – PA. 2019.


MUSEU DE HISTÓRIA NATURAL, NOVA YORK. FABIO COLOMBINI

Cerâmica marajoara, originária da Ilha de Marajó 700-1100 d.C. Museu de História Natural, Nova Iorque. 2013.

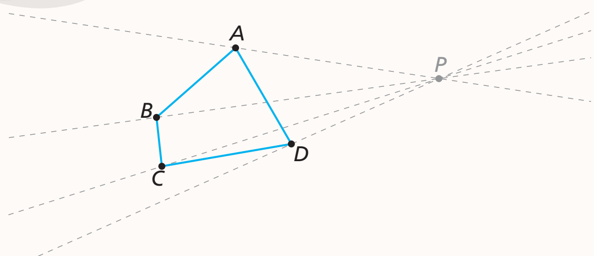
Exercício resolvido

R2. Construir um quadrilátero $A'B'C'D'$, homotético do quadrilátero $ABCD$, com razão igual a $-\frac{1}{2}$ e centro de homotetia P.



▸ **Resolução**

1. Construímos as retas $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{CP}$ e $\overleftrightarrow{DP}$.



O tópico sobre a cerâmica marajoara contempla o tema contemporâneo **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **1** e **3** da BNCC e da habilidade **EM13CHS104** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, pois auxilia na valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural para entender e explicar a realidade, bem como na valorização de manifestações artísticas e culturais de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

Explore

Pesquise na internet fotografias que retratem a cerâmica marajoara. A arte deve apresentar alguma transformação geométrica estudada até o momento. Após a escolha, copie parte do desenho geométrico em uma folha avulsa e indique qual tipo de transformação foi utilizada.

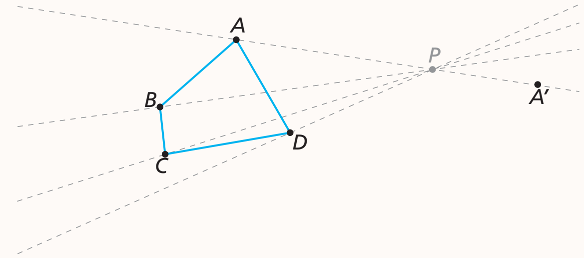
O boxe **Explore** favorece a interdisciplinaridade com a área de Linguagens e suas Tecnologias, pois auxilia parcialmente no desenvolvimento da competência específica **6** dessa área e das habilidades **EM13LGG201** e **EM13LGG704**. A pesquisa solicitada incentiva os estudantes a apropriarem-se criticamente de processos de pesquisa e busca de informação, por meio de ferramentas e dos novos formatos de produção e distribuição do conhecimento na cultura de rede.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

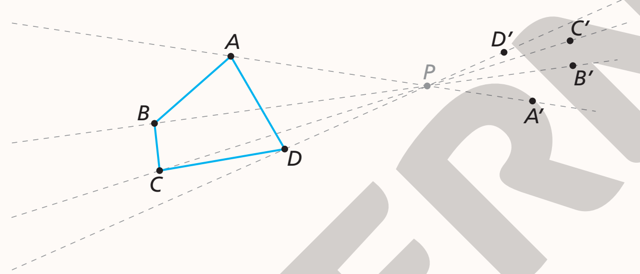
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

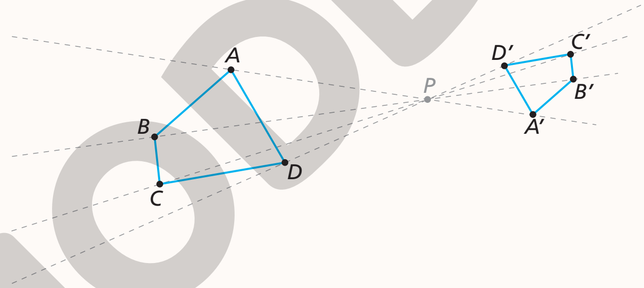
2. Dado que a homotetia é inversa e $PA \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| = PA' \Rightarrow PA \cdot \frac{1}{2} = PA'$, construímos o ponto A' na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{PA}$, sendo que a distância de P ao ponto A' é a metade da distância de P ao ponto A.



3. Procedemos da mesma maneira para obter os pontos B', C' e D' da figura transformada. Para B', usamos a relação $PB \cdot \frac{1}{2} = PB'$; para C', $PC \cdot \frac{1}{2} = PC'$; e para D', $PD \cdot \frac{1}{2} = PD'$. Assim, obtemos:



4. Por fim, traçamos os lados do quadrilátero.

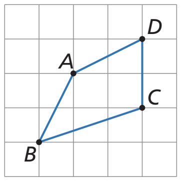


Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

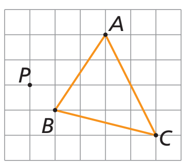
16. Copie a figura de cada item em uma malha quadriculada e construa, com régua graduada, a homotetia conforme centro e razão indicados.

a)



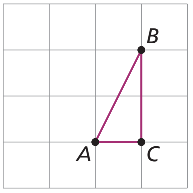
- centro da homotetia: C
- razão: -2

b)



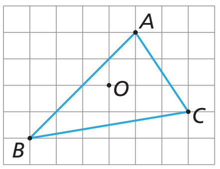
- centro da homotetia: P
- razão: $\frac{3}{2}$

c)



- centro da homotetia: A
- razão: 2

d)



- centro da homotetia: O
- razão: -1

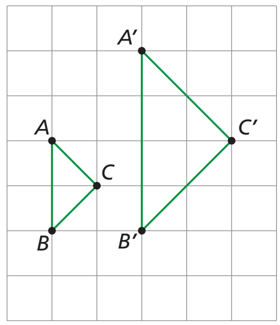
Ver resolução no Guia do professor.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

17. O triângulo $A'B'C'$ é homotético do triângulo ABC. Copie os triângulos em uma malha quadriculada e determine o centro e a razão usados na homotetia. Ver resolução no Guia do professor.



NELSON MATSUDA

4 Matrizes e transformações geométricas

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica **3** , já que os estudantes poderão utilizar estratégias, definições e conceitos matemáticos e as noções de transformações isométricas na construção de figuras com o uso de matrizes em um plano cartesiano.

A imagem em uma tela de TV, computador ou celular é formada por pontos chamados de *pixels*. Os *pixels* são organizados em uma matriz de n colunas $\times$ m linhas. Os valores de m e n determinam o número de *pixels*. Quanto maior esse número, melhor a qualidade da imagem.

Uma TV de alta definição, por exemplo, tem 1.280 *pixels* (quantidade de colunas) por 720 *pixels* (quantidade de linhas), o que resulta em 921.600 *pixels*. Já os aparelhos de tecnologia Ultra HD, chamados de 4K, têm (3.840 $\times$ 2.160) *pixels*, o que resulta em 8.294.400 *pixels*; isso representa uma imagem de qualidade bem superior às telas de alta definição.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

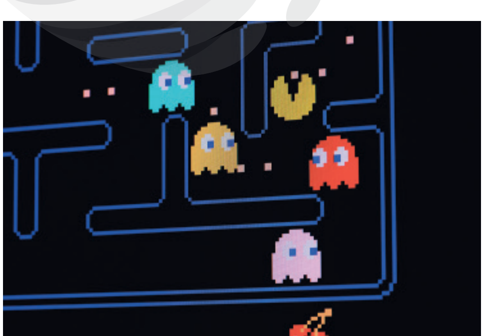
ANDREY_POPOV/SHUTTERSTOCK

Fotografia de pessoa jogando em *tablet*.

As animações dos objetos observadas na tela de um jogo ou de um filme são formadas pela mudança de cores dos *pixels*, e uma ferramenta matemática que torna essa movimentação possível é a operação com matrizes.

A cor nos *pixels* anima os personagens de um jogo de *videogame*.

ILBUSCA/ISTOCK/GETTY IMAGES



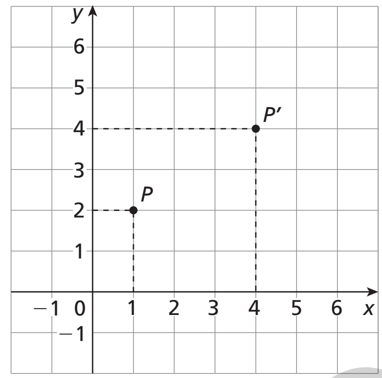
Fotografia de personagens do jogo *Pac-Man*.

A seguir, veremos como fazer algumas transformações geométricas no **plano cartesiano** usando matrizes.

4.1 Translações

A translação de uma figura no plano cartesiano pode ser feita com a adição de matrizes.

No exemplo a seguir, o ponto *P*'(4, 4) é uma translação, no plano cartesiano, do ponto *P*(1, 2).



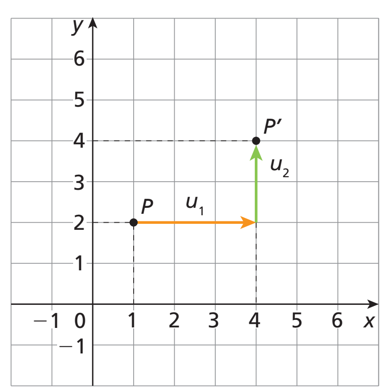
Podemos representar o ponto *P* pela matriz coluna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A abscissa do ponto é representada na matriz pelo elemento a_{11}, e a ordenada é representada pelo elemento a_{21}. O ponto *P*' será representado pela matriz $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Agora, precisamos adicionar uma matriz à matriz do ponto *P* para representar o deslocamento na direção horizontal e na direção vertical, de modo que o resultado seja a matriz $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolvendo a equação matricial, temos $a = 3$ e $b = 2$. Assim, a matriz que representa o deslocamento é $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, de maneira que 3 são as unidades a serem deslocadas na direção do eixo *x* e 2 são as unidades a serem deslocadas na direção do eixo *y*.

Observe, a seguir, que a translação do ponto *P* para o ponto *P*' pode ser feita pelos vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, que têm módulos iguais a 3 e 2, respectivamente.



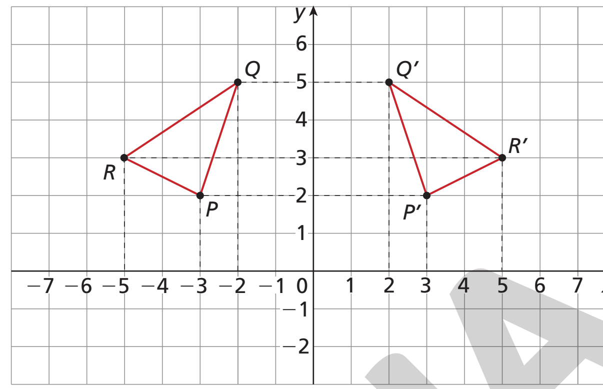
Para uma translação, no plano cartesiano, de um ponto *A*(*x*, *y*) para um ponto *A*', de modo que o deslocamento seja de *a* unidades na direção horizontal (eixo *x*) e de *b* unidades na direção vertical (eixo *y*), fazemos: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

4.2 Reflexões

Reflexões em relação aos eixos *x* e *y* em um plano cartesiano



Observe o triângulo *P'Q'R'*, simétrico ao triângulo *PQR* **em relação ao eixo *y*** ao lado.

Vamos verificar como pode ser feita essa reflexão usando matrizes.

Primeiro, determinamos a matriz que representa o triângulo *PQR*. Assim, da maneira como representamos a matriz de um ponto, as abscissas de cada vértice do triângulo devem ocupar a primeira linha da matriz, e as ordenadas, a segunda linha, sendo cada coluna ocupada pelo par ordenado de cada vértice. Chamaremos a matriz do triângulo *PQR* de *A*.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Note que a primeira coluna da matriz *A* refere-se ao vértice *P*, a segunda coluna, ao vértice *Q*, e a terceira coluna, ao vértice *R*. De posse da matriz *A*, vamos usar determinada operação e outra matriz para obtermos a matriz que representa o triângulo simétrico ao triângulo *PQR*.

A multiplicação por matrizes a fim de realizar transformações geométricas é uma técnica que pode ser utilizada na computação gráfica. Comentar com os alunos que este tópico os coloca em contato com os pilares do *pensamento computacional*: **algoritmo** e **reconhecimento de padrões**.

Nesse caso, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pela matriz *A* para obter a matriz que representa o triângulo *P'Q'R'*.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Com a multiplicação, obtivemos a matriz que representa os pares ordenados (3, 2), (2, 5) e (5, 3), que são exatamente os pares ordenados dos vértices *P'*, *Q'* e *R'* do triângulo simétrico ao triângulo *PQR* em relação ao eixo *y*.

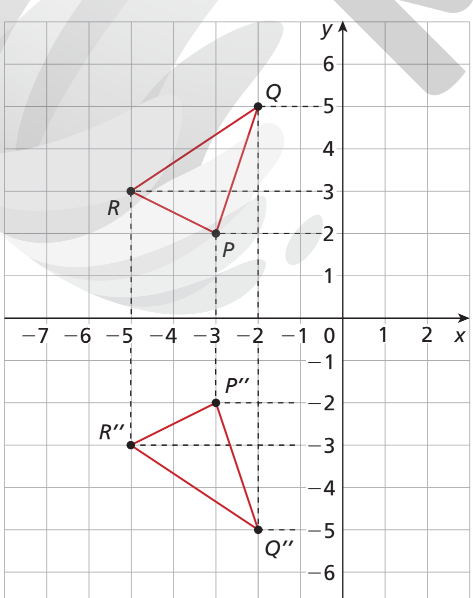
Para refletir o triângulo *PQR* **em relação ao eixo *x***, multiplicamos a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pela matriz *A*. Observe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Observação

Lembre-se: para que um produto de matrizes exista, o número de colunas do primeiro fator deve ser igual ao número de linhas do segundo fator.

A **matriz produto** representa os vértices do triângulo *P''Q''R''*, simétrico ao triângulo *PQR* em relação ao eixo *x*, no plano cartesiano.



Para obter as coordenadas de um ponto *P'*, reflexão do ponto *P*(*x*, *y*) **em relação ao eixo *y***, no plano cartesiano, com a utilização de matrizes, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pela matriz que representa o ponto *P*: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Para obter as coordenadas de um ponto *P''*, reflexão do ponto *P*(*x*, *y*) em **relação ao eixo *x***, no plano cartesiano, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pela matriz que representa o ponto *P*: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

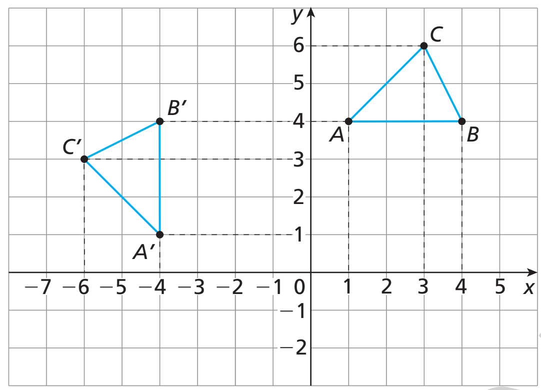
Observação

A seguir, um quadro com o seno e o cosseno dos ângulos notáveis.

ângulo	seno	cosseno
0	0	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	1	0
180°	0	−1
270°	−1	0
360°	0	1

4.3 Rotações em relação à origem de um plano cartesiano

Para fazer a rotação de uma figura em relação à origem de um plano cartesiano, vamos usar também a multiplicação de matrizes. Acompanhe o exemplo a seguir.



O triângulo $A'B'C'$, representado pela matriz $\begin{pmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, é uma rotação de 90° do triângulo ABC em relação à origem do plano cartesiano no sentido anti-horário. A matriz que representa ABC é $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Vamos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ pela matriz do triângulo ABC para, assim, verificar que a matriz obtida será a que representa o triângulo $A'B'C'$. A medida α é a do ângulo de rotação.

Dado que $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para obter as coordenadas a e b de um ponto P', rotação de um ângulo com medida α no sentido anti-horário do ponto $P(x, y)$, em relação à origem de um plano cartesiano, devemos multiplicar a matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ pela matriz que representa o ponto P:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

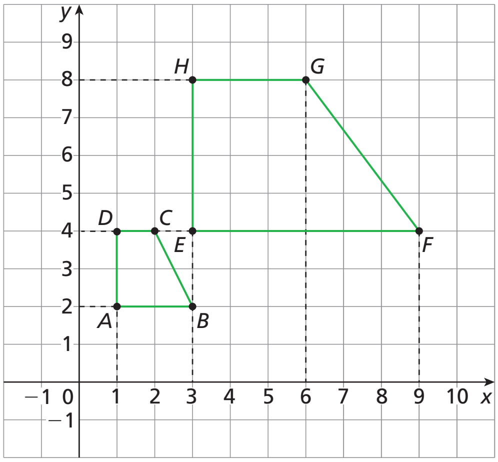
4.4 Transformações por escala

A **transformação por escala** é um tipo diferente das transformações que vimos até aqui, pois, com ela, podemos transformar uma figura na direção horizontal (eixo das abscissas) e na direção vertical (eixo das ordenadas) de modo independente. Ou seja, a razão da transformação na direção do eixo x pode ser diferente da razão da transformação na direção do eixo y.

Para fazer essa transformação, multiplicamos a matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pela matriz que representa a figura original. O elemento a é o fator que transforma a figura original na direção do eixo x, e o elemento b é o fator que transforma a figura na direção do eixo y.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Verifique, no exemplo a seguir, que a figura *ABCD* foi transformada para a figura *EFGH* na direção vertical com uma razão igual a 2 e na direção horizontal com uma razão igual a 3. Note que, portanto, a figura *EFGH* não é semelhante à figura *ABCD*.



NELSON MATSUDA

A matriz que representa a figura *ABCD* é $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Observe que a multiplicação terá como resultado a matriz que representa a figura *EFHG*. Sendo $a = 3$ e $b = 2$, temos:

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$. Assim, como esperado, o resultado é uma matriz que representa os pontos *E*, *F*, *H* e *G*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

18. Em uma malha quadriculada, construa um plano cartesiano e desenhe os triângulos cujos vértices estão representados pelas matrizes a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Ver resolução no Guia do professor.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

19. A matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ representa os vértices de um triângulo que foi transladado 6 unidades para a direita e 1 unidade para cima. Determine a matriz do triângulo que originou essa translação.

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

20. Determine as matrizes que representam as reflexões dos triângulos do exercício 18 em relação ao eixo *x* e ao eixo *y*.
Ver resolução no Guia do professor.

21. Observe a matriz a seguir, que representa os vértices de um quadrilátero no plano cartesiano. Depois, faça o que se pede. Ver resolução no Guia do professor.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Construa a figura em um plano cartesiano.

b) Determine a matriz que representa a rotação em 90° do quadrilátero *ABCD* em torno da origem, no sentido anti-horário.

c) Determine a matriz que representa a rotação de 180° do quadrilátero *ABCD* em torno da origem, no sentido anti-horário.

d) Construa, no mesmo plano cartesiano da figura original, os quadriláteros *A'B'C'D'* e *A''B''C''D''*, rotações dos itens **b** e **c**, respectivamente.

22. Considere o retângulo de vértices *A*(3, 9), *B*(6, 9), *C*(6, 3) e *D*(3, 3) em um plano cartesiano e faça o que se pede. Ver resolução no Guia do professor.

a) Construa o retângulo em um plano cartesiano.

b) Determine a matriz que representa os vértices do retângulo.

c) Determine a matriz que representa a transformação por escala do retângulo na razão $\frac{1}{3}$ nas direções horizontal e vertical.

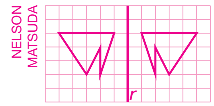
d) Construa a figura transformada no mesmo plano cartesiano do item **a**.

21. b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

22. b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

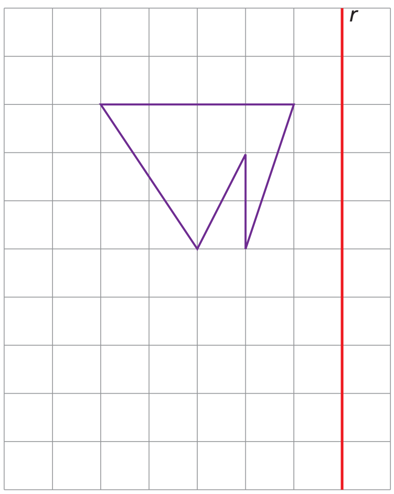
Exercícios complementares

Registre as respostas em seu caderno.

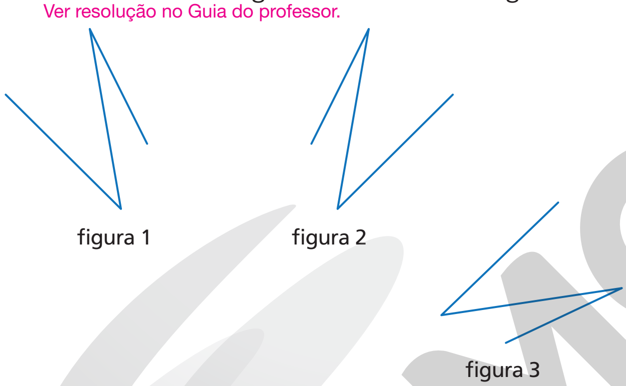


Aplicação

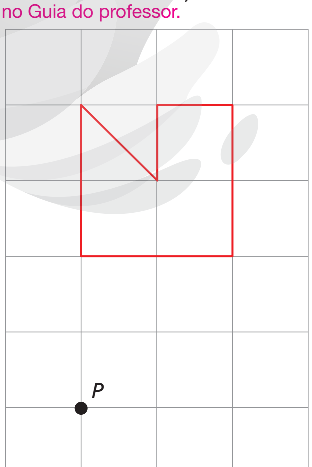
1. Em uma malha quadriculada, copie o pentágono e a reta *r*. Depois, desenhe o simétrico do pentágono em relação à reta *r*.



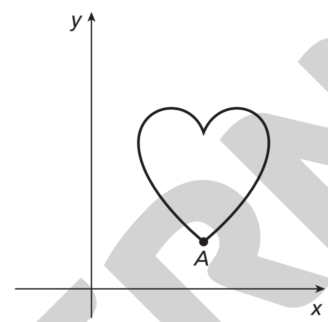
2. Explique um modo de obter exatamente os eixos de simetria entre as figuras 1 e 2 e entre as figuras 2 e 3.
Ver resolução no Guia do professor.



3. Copie em uma malha quadriculada o hexágono e o ponto *P* a seguir. Depois, faça uma rotação da figura em 90° no sentido horário, em torno do ponto *P*.
Ver resolução no Guia do professor.



4. (Enem) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:



1ª) Reflexão no eixo *x*;

2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto *A*;

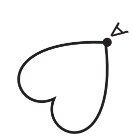
3ª) Reflexão no eixo *y*;

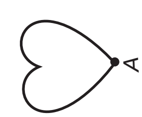
4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto *A*;

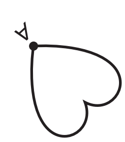
5ª) Reflexão no eixo *x*.

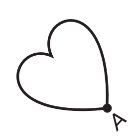
Qual a posição final da figura? alternativa c

a) 

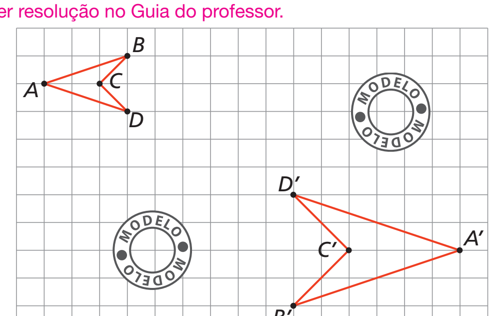
c) 

e) 

b) 

d) 

5. Copie as figuras em uma malha quadriculada. Depois, determine o centro e a razão da homotetia que transforma *ABCD* em *A'B'C'D'*.
Ver resolução no Guia do professor.



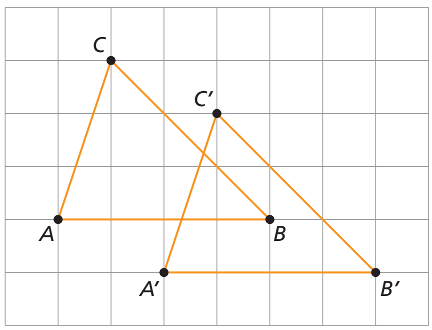
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

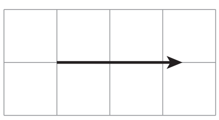
MODERNA

9. Essa atividade favorece o desenvolvimento da competência geral **2** da BNCC, pois faz exercitar a curiosidade intelectual, incluindo a investigação, a reflexão, a imaginação e a criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

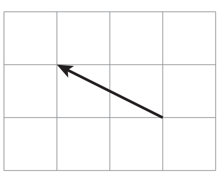
6. Qual vetor representa a translação do triângulo *ABC* para o triângulo *A'B'C'*? alternativa d



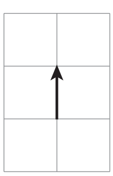
a)



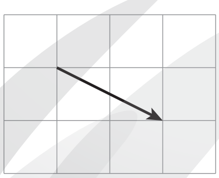
b)



c)



d)



7. Para uma rotação de 180° em torno da origem de um plano cartesiano no sentido anti-horário, qual das matrizes a seguir deve ser multiplicada pela matriz que representa os vértices da figura a ser transformada? alternativa d

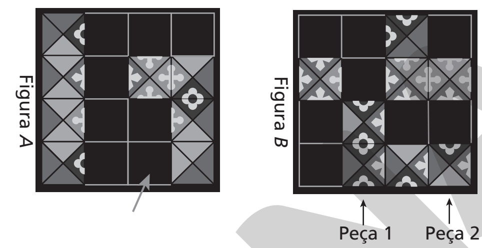
a) $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen}\, 90° \\ \text{sen}\, 90° & \cos 90° \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \cos 180° & \text{sen}\, 180° \\ -\text{sen}\, 180° & \cos 180° \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \cos 180° & \text{sen}\, 180° \\ \text{sen}\, 180° & -\cos 180° \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \cos 180° & -\text{sen}\, 180° \\ \text{sen}\, 180° & \cos 180° \end{pmatrix}$

8. (Enem) As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.



alternativa c

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça:

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário.

b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.

c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.

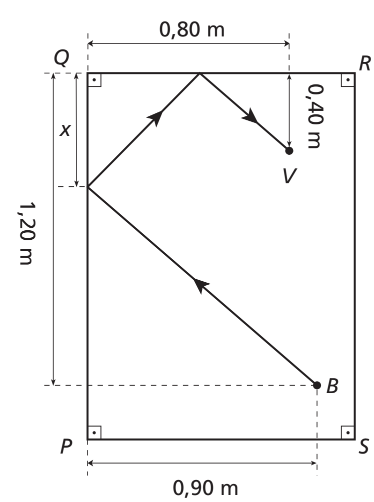
d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.

e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

Desafio

9. Copie a figura abaixo no caderno para resolver o exercício.

(Fuvest-SP) Em uma mesa de bilhar, coloca-se uma bola branca na posição *B* e uma bola vermelha na posição *V*, conforme o esquema abaixo.



Ver resolução no Guia do professor.

Deve-se jogar a bola branca de modo que ela siga a trajetória indicada na figura e atinja a bola vermelha. Assumindo que, em cada colisão da bola branca com uma das bordas da mesa, os ângulos de incidência e de reflexão são iguais, a que distância *x* do vértice Q deve-se jogar a bola branca? $\frac{6}{17}$ m do vértice *Q*.

MODERNA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

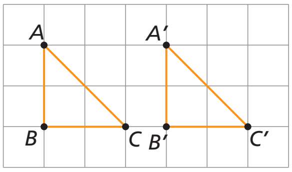
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Autoavaliação

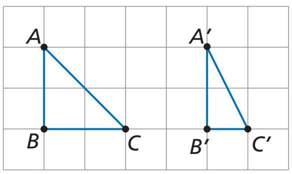
Registre as respostas em seu caderno.

1. Qual alternativa representa uma translação? alternativa a

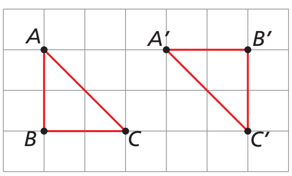
a)



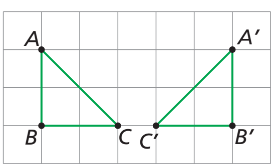
b)



c)

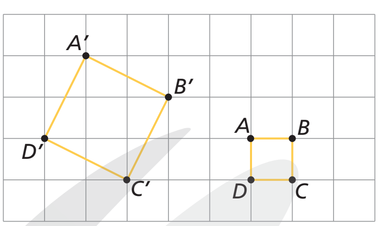


d)

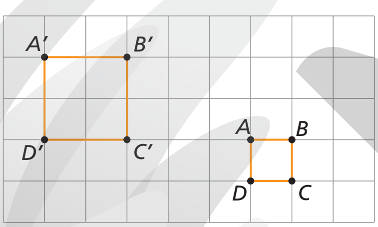


2. Em que alternativa *A'B'C'D'* é a imagem de *ABCD* por uma homotetia? alternativa b

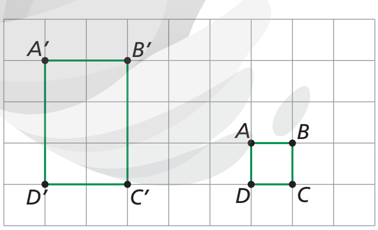
a)



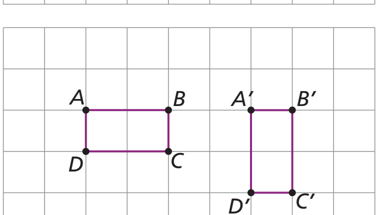
b)



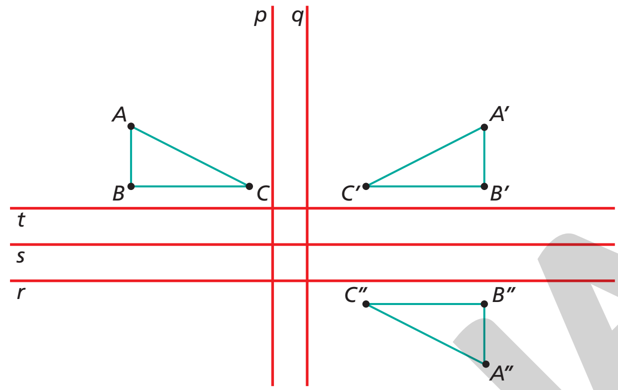
c)



d)



3. Verifique, com uma régua, quais são os eixos de simetria dos triângulos. alternativa b

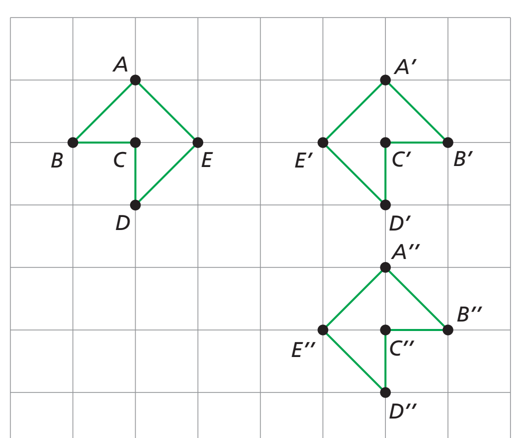


a) *p* e *t*
b) *q* e *s*
c) *q* e *r*
d) *r* e *t*

4. Uma transformação homotética e uma transformação isométrica de um polígono sempre preservam, respectivamente: alternativa c

a) a distância entre pontos e a medida entre ângulos correspondentes.
b) a distância entre pontos e o paralelismo entre os segmentos correspondentes.
c) a medida entre os ângulos correspondentes e a distância entre pontos.
d) a distância entre os pontos e a razão entre os segmentos correspondentes.

5. O polígono *A''B''C''D''E''* é o resultado de uma composição de transformações isométricas no plano aplicada ao polígono *ABCDE*. Quais são essas transformações? alternativa d



a) Rotação e translação.
b) Reflexão em relação a um ponto e rotação.
c) Translação e rotação.
d) Reflexão em relação a uma reta e translação.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

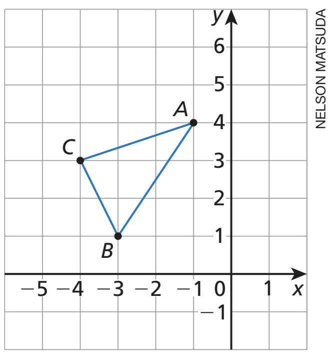
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

MODERNA

6. Uma homotetia de razão -2 é uma: alternativa a

a) ampliação inversa da figura original.
b) ampliação direta da figura original.
c) redução inversa da figura original.
d) redução direta da figura original.

7. A matriz que representa os vértices do triângulo *ABC* é: alternativa d



a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

8. Qual matriz devemos adicionar à matriz que representa um ponto no plano cartesiano para que ele seja transladado 5 unidades na direção vertical, no sentido de baixo para cima? alternativa a

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Retomada de conceitos

Se você não acertou alguma questão, consulte o quadro e verifique o que precisa estudar novamente. Releia a teoria e refaça os exercícios correspondentes.

	Número da questão							
Objetivos do capítulo	1	2	3	4	5	6	7	8
Compreender os principais tipos de transformações isométricas (reflexão, translação e rotação) e as suas composições.	X		X		X			X
Compreender as transformações homotéticas.		X				X		
Distinguir uma transformação isométrica de uma transformação homotética.		X		X				
Realizar algumas transformações geométricas no plano cartesiano por meio de operações com matrizes.							X	X
Páginas do livro referentes ao conceito	110 a 131	112 a 137	112 a 122	112 a 137	112 a 122	131 a 137	137 a 141	137 a 141

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

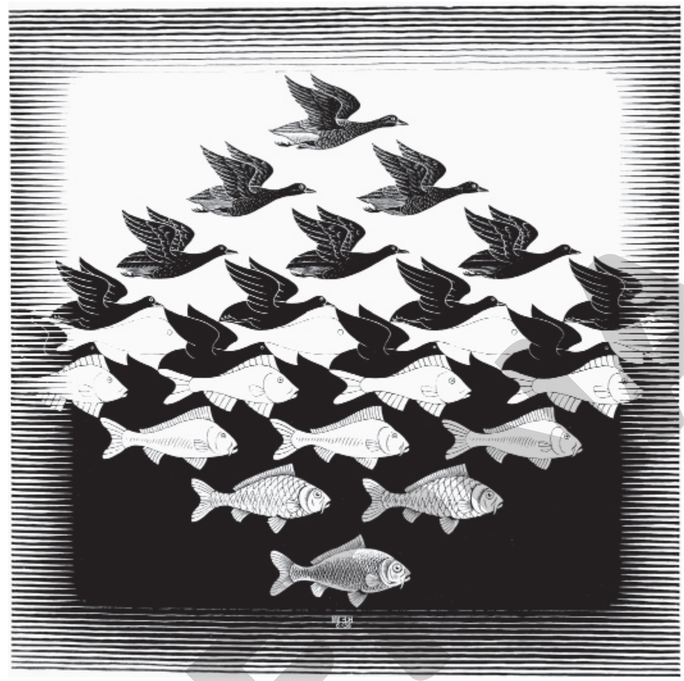
MODERNA

Compreensão de texto

M. C. ESCHER

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) desenvolveu uma vasta obra gráfica, sobretudo em xilografia e litografia, a partir de conceitos matemáticos. Com uma notória perícia técnica no âmbito da gravura, Escher subverteu os princípios clássicos da perspectiva para criar estruturas impossíveis. Em sintonia com os princípios de ruptura da arte contemporânea, encontrou um novo campo de inspiração na inevitável contradição entre a bidimensionalidade do papel ou da tela e a realidade tridimensional. Influenciado pelo ritmo dos padrões geométricos, Escher desconstrói-lhes a previsibilidade, acrescentando-lhes movimentos de translação, rotação, reflexão, ou seja, transformações isométricas que permitem movimentar a figura no espaço.

Influenciado pela arte islâmica e, em particular, pelo geometrismo da decoração azulejar, algumas das composições de Escher derivam da divisão regular do plano numa matriz em que se inserem figuras que se repetem e transfiguram.

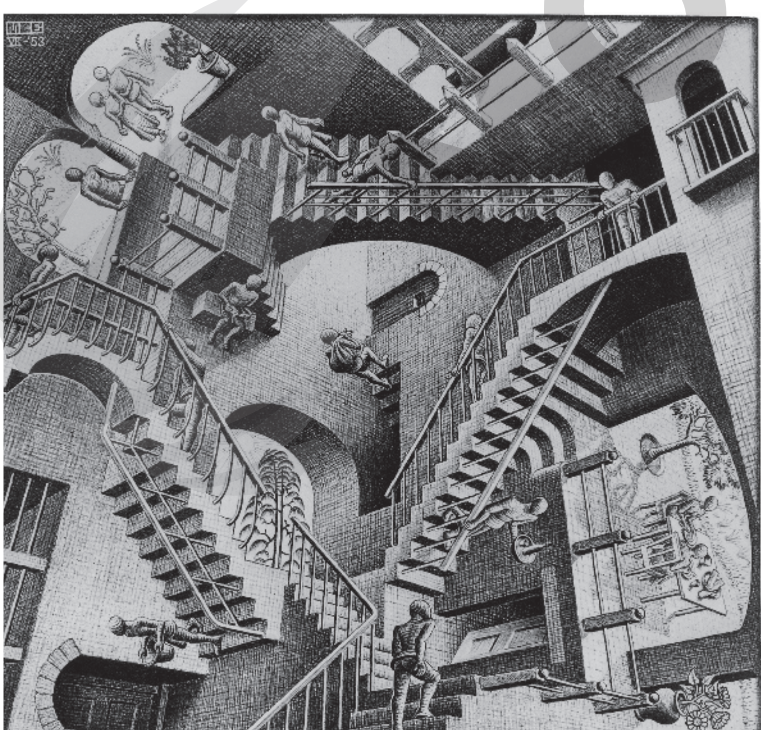


© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ESCHER, M. C. *Céu e Água I*. 1938. Xilogravura, 43,5 cm × 43,9 cm.

Em *Céu e Água I*, cria um padrão losangular imbricado, para criar uma sequência intercambiante de peixe-pássaro, através do uso do positivo e negativo e da aplicação dos conceitos de forma e fundo. No primeiro registro, os peixes destacam-se a branco sobre o fundo negro, estilizando-se no sentido ascendente para, sensivelmente a meio, se salientarem os pássaros a negro sobre o fundo branco, corporizando-se com detalhes cada vez mais precisos à medida que se aproximam do topo.

Essa seção favorece o desenvolvimento da competência geral **3** da BNCC e da competência específica **6** da área de Linguagens e suas Tecnologias, bem como das habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602**. O aluno poderá apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica; fruir e apreciar esteticamente manifestações artísticas e culturais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade e, ainda, relacionar as práticas artísticas às diferentes dimensões da vida social, cultural, política e econômica e identificar o processo de construção histórica dessas práticas.



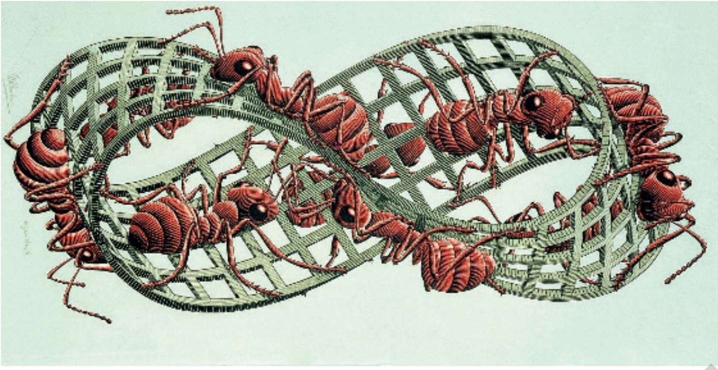
© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM

ESCHER, M. C. *Relatividade*. 1953. Litogravura, 29,4 cm × 28,2 cm.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nas construções impossíveis, Escher cria uma aparência verossímil através de uma ilusão visual: à primeira vista, não são evidentes as divergências entre os seus trabalhos e as gravuras de temática arquitetônica clássica de Piranesi, dado que a capacidade de percepção visual adapta a imagem recebida pela retina a uma configuração real. Exige, por isso, um exercício de verificação para identificar as improbabilidades. Na *Relatividade*, as pessoas sobem e descem simultaneamente numa complexa estrutura de degraus que se elabora como um circuito infinito. O desenho pode ser virado em qualquer direção sem perder a (in)coerência.

© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY, BAEXEM



ESCHER, M. C. *Fita de Moebius II*. 1963. Xilogravura.

O sistema é idêntico nas obras *Fita de Moebius I e II*, onde recriou a faixa desenvolvida pelo matemático alemão Augustus Möbius (1790-1868), um espaço topológico obtido a partir da colagem de duas extremidades de uma fita após efetuar meia torsão numa delas. Em *Fita de Moebius II,* Escher inseriu nove formigas que, aparentemente, circulam pelos dois lados da fita, como se esta tivesse apenas uma superfície.

Enquanto a comunidade científica acolheu as construções de Escher como uma ilustração de conceitos matemáticos, a crítica de arte tendeu a relevá-las como meros formalismos e exercícios geométricos. Ultrapassando os princípios da geometria euclidiana e explorando novas vias da criatividade, um dos inegáveis méritos da sua obra foi o diálogo que estabeleceu entre a linguagem racional e a linguagem estética, entre matemática e arte.

Citado no texto, Giovanni Battista Piranesi (1720-1778) foi gravurista e arquiteto italiano.

ROQUE, Maria Isabel. M. C. Escher. *Boletim Lumen Veritatis*, da Universidade Católica Portuguesa, n. 28, dez. 2013.

1. Respostas possíveis: xilografia; litografia.
2. Resposta possível: sim, a obra tem estruturas impossíveis. Uma dessas estruturas pode ser observada com duas pessoas que sobem e descem uma escada simultaneamente e no mesmo sentido. Ou seja, para essas pessoas, há dois planos diferentes que representam o chão no mesmo espaço.
3. Resposta possível: a obra tem um formato losangular formado por linhas de peixes da parte inferior até a linha central, em que se intercalam as aves. Da linha central para cima, outras linhas são formadas, agora apenas com aves. Os espaços vazios nas linhas inferiores vão se transformando, como em um movimento, até tomarem formas de aves nas linhas superiores; por sua vez, os espaços vazios nas linhas superiores vão se transformando, como em um movimento, até tomarem formas de peixes nas linhas inferiores.
4. Resposta possível: podemos observar que as formigas nunca se cruzarão em sua caminhada e que elas passam pelos dois lados da faixa quando estão caminhando.
5. A comunidade científica acolheu a obra de Escher como a construção de um conceito matemático, e a crítica de arte tendeu a relevá-la como mero formalismo e exercícios geométricos.
6. Resposta possível: ela quer dizer que Escher combinou a racionalidade matemática com a linguagem estética, por vezes aplicada nas artes. Isso significa que ele conseguiu representar temas matemáticos nas artes plásticas.

Atividades

Registre as respostas em seu caderno.

1. Cite um tipo de obra gráfica feita por Maurits Cornelis Escher.
2. A autora do texto afirma: “Com uma notória perícia técnica no âmbito da gravura, Escher subverteu os princípios clássicos da perspectiva para criar estruturas impossíveis.”. Observe a reprodução da obra *Relatividade* e verifique se ela tem alguma estrutura impossível. Se sim, descreva uma dessas estruturas.
3. Descreva o que você observou na reprodução da obra *Céu e Água I*.
4. Observe a obra *Fita de Moebius II*. O que você pode apontar como interessante na reprodução da obra?
5. Explique a diferença de visão entre a comunidade científica e a crítica de arte em relação à obra de Escher.
6. Em sua opinião, o que a autora quer dizer com a frase “um dos inegáveis méritos da sua obra foi o diálogo que estabeleceu entre a linguagem racional e a linguagem estética, entre matemática e arte”?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Economia no mundo

GREENBUTTERFLY/SHUTTERSTOCK

Para começar e pensar

Ver comentários e respostas no Guia do professor.

A expansão europeia promoveu revoluções políticas, sociais e econômicas em todo o mundo – ainda que com intensidades diferentes em cada local. A Revolução Industrial, de meados do século XVIII, por exemplo, permitiu diversificar e aumentar a produção, promovendo, também, mudanças nas relações sociais de trabalho. Uma consequência dessa Revolução foi a diminuição do tempo e do custo de produção, tornando necessária a busca por mercados fora da Europa. Além disso, houve um aumento na demanda por matérias-primas, as quais eram provenientes de outros continentes.

Nesse contexto, as pessoas não dispunham de muitos bens de consumo, meios de transporte próprios ou itens que facilitassem a vida cotidiana. A iluminação doméstica, por exemplo, era por meio de velas – item muito caro na época. O ritmo de vida era mais lento, e as atividades se encerravam com o pôr do sol.

A Revolução Industrial teve consequências além das fronteiras da Inglaterra e muito além da Europa. O trabalho assalariado tornou-se a base da relação de produção e influenciou o fim da escravidão nas ex-colônias da América Latina, em função da necessidade de novos mercados de consumo (influenciou, também, as 13 colônias, que deram origem aos EUA). Fundamentalmente, a Revolução Industrial mudou o acesso a bens de consumo e a vida cotidiana, que era rural e tornou-se urbana.

1. O mundo se desenvolveu em muitos aspectos nos últimos séculos. Cite exemplos que caracterizam mudanças nas áreas de transporte e de comunicação.
2. Pesquise o impacto da substituição do trabalho manual pelas máquinas na circulação econômica. Em seguida, discuta seus apontamentos com a turma.

Para discutir

Por conta dos combates tanto na Primeira quanto na Segunda Guerra Mundial, cidades e economias foram destruídas. Assim, alguns países buscaram estabelecer acordos visando intensificar a circulação econômica entre eles. Nascia, assim, em 1951, o primeiro bloco econômico do mundo, a Comunidade Europeia do Carvão e do Aço (Ceca).

Os blocos econômicos surgiram da necessidade de os governos dos estados nacionais intensificarem as relações econômicas e, em alguns casos, promover integração social. A definição desses acordos objetiva promover o crescimento econômico conjunto – crescimento que seria inviável de maneira isolada. A formação de novos blocos foi potencializada com a globalização, dando origem a blocos como União Europeia, Mercosul, Nafta, Cooperação Econômica Ásia-Pacífico (Apec), Comunidade Andina etc.

3. Considerando a existência de custos para a realização de trocas comerciais internacionais (importação e exportação), discuta com seus colegas as vantagens e as desvantagens de um acordo econômico entre países.
4. Pesquise de que maneira os acordos econômicos e os blocos promovem melhorias nas economias nacionais.
5. Pesquise e liste produtos comercializados em sua região que tenham origem em um dos países pertencentes ao Mercosul.

Objetivos

Discutir aspectos sociais e financeiros relacionados às trocas comerciais internacionais; pesquisar os blocos econômicos e suas problemáticas; pesquisar indicadores econômicos e suas características; discutir as possíveis relações entre crescimento econômico e desenvolvimento sustentável.

A seção potencializa o desenvolvimento das competências gerais **1**, **6** e **7** e favorece o desenvolvimento das competências específicas **1** e **2** de Matemática e suas Tecnologias da BNCC, favorecendo, também, o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT104**.

A discussão e a reflexão sobre a evolução da sociedade e dos mecanismos econômicos possibilitam, ainda, um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, contribuindo com o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** e das habilidades **EM13CHS102** e **EM13CHS301** da BNCC. As atividades propostas também contribuem com os temas contemporâneos: **educação financeira**, ao propiciar a compreensão da economia mundial, e **educação para o consumo**, ao propor a reflexão sobre o desenvolvimento sustentável, com a discussão a respeito dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável da Organização das Nações Unidas.

Observação

Cada bloco econômico possui suas regras. A União Europeia, por exemplo, possui moeda própria que é compartilhada pelos países do bloco. Outras diferenças dizem respeito às isenções de taxas e impostos que incidem sobre os produtos na importação ou na exportação.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A Terceira Revolução Industrial, ocorrida no fim dos anos 1970, marcou a intensificação dos fluxos econômicos entre os países do globo. Os computadores e os novos mecanismos de comunicação foram responsáveis pela ampliação do comércio internacional. Nesse cenário, por um lado, as grandes transnacionais, que já estavam espalhadas por vários países, ganharam uma ferramenta poderosa para ampliar o poder de suas marcas; por outro lado, o surgimento de algumas novas ferramentas de interação social possibilitou que pessoas de todo o mundo pudessem conhecer mais do cotidiano de outros países, além do custo e da qualidade de vida em lugares distantes do que moram.


RAWPIXEL.COM/SHUTTERSTOCK

Nos anos 1990, foi criado o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD). Esse indicador permite que qualquer pessoa possa ter uma perspectiva das diferenças sociais entre os países. Além desse índice, existem outros, como: PIB *per capita* e Dólar PPC.

A tabela ao lado apresenta os países com maior IDH, de acordo com relatório do PNUD de 2019.

A posição do Brasil no *ranking* de 189 países é a 79ª, juntamente com a Colômbia.

Dez melhores Índices de Desenvolvimento Humano em 2018

Posição	País	IDH
1	Noruega	0,954
2	Suíça	0,946
3	Irlanda	0,942
4	Alemanha	0,939
4	Hong Kong	0,939
6	Austrália	0,938
6	Islândia	0,938
8	Suécia	0,937
9	Cingapura	0,935
10	Países Baixos	0,933

Dados obtidos em: *Human Development Report 2019*. United Nations Development Programme (UNDP). Disponível em: <http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr2019.pdf>. Acesso: 1º jun. 2020.

6. Pesquise que informações são consideradas nos cálculos do IDH e do PIB *per capita*. Em seguida, discuta com sua turma a respeito de qual dos dois índices é mais eficiente para retratar a realidade social dos países.

7. Considerando o que foi discutido até agora, é possível afirmar que desenvolvimento econômico garante desenvolvimento social? Discuta com seus colegas e registre seus argumentos.

Para finalizar

O Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD) apresenta 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), também conhecidos como Objetivos Globais. Trata-se de

um chamado universal para ação contra a pobreza, proteção do planeta e para garantir que todas as pessoas tenham paz e prosperidade. Esses 17 Objetivos foram construídos com o sucesso dos Objetivos de Desenvolvimento do Milênio, incluindo novos temas, como a mudança global do clima, desigualdade econômica, inovação, consumo sustentável, paz e justiça, entre outras prioridades. Os objetivos são interconectados – o sucesso de um ODS envolve o combate a temas que estão associados a outros objetivos.

Fonte: PNUD Brasil. Disponível em: <https://www.br.undp.org/content/brazil/pt/home/sustainable-development-goals.html>. Acesso em: 1º jun. 2020.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS

8. Pesquise e enumere os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

9. Como um país pode conciliar crescimento econômico com desenvolvimento sustentável?

10. Os governos nacionais aplicam parte dos recursos obtidos com a arrecadação de impostos na infraestrutura para o setor produtivo e para a sociedade. Considerando sua realidade, você saberia dizer se as ações do poder público da sua cidade, do seu estado e do seu país estão em sintonia com os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável? Justifique sua resposta.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **1**, **3**, **7**, **9** e **10**, da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias e das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT105** da BNCC. Além disso, possibilita promover um trabalho interdisciplinar com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas favorecendo a habilidade **EM13CHS601** da BNCC, no que se refere à análise das demandas políticas, sociais e culturais dos povos afrodescendentes no Brasil e à promoção de ações para reduzir as desigualdades étnico-raciais no país. Além disso, favorece o desenvolvimento da competência específica **6**, da área de Linguagens e suas Tecnologias, e da habilidade **EM13LGG601** da BNCC, ao desenvolver sua visão crítica e histórica, apropriando-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade.

Pesquisa e ação — Exposição de arte

No Brasil e no exterior, ainda hoje os afrodescendentes são vítimas de discriminação e de desigualdade racial. Considerando essa realidade, reconhece-se a importância de proteger e promover os direitos humanos desses povos, eliminando qualquer forma de preconceito.

Para combater o racismo e a desigualdade racial, a Assembleia Geral da Organização das Nações Unidas (ONU) proclamou o período entre 2015 e 2024 a Década Internacional de Afrodescendentes, cujo tema é: "Reconhecimento, justiça e desenvolvimento". Durante esse período, há um programa de atividades cujos objetivos são:

- promover o respeito, proteção e cumprimento de todos os direitos humanos e liberdades fundamentais das pessoas afrodescendentes, como reconhecido na Declaração Universal dos Direitos Humanos;
- promover um maior conhecimento e respeito pelo patrimônio diversificado, a cultura e a contribuição de afrodescendentes para o desenvolvimento das sociedades;
- adotar e reforçar os quadros jurídicos nacionais, regionais e internacionais de acordo com a Declaração e Programa de Ação de Durban e a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial, bem como assegurar a sua plena e efetiva implementação.

Fonte: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. Disponível em: <http://decada-afro-onu.org/plan-action.shtml>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Objetivos

Pesquisar informações sobre discriminação racial e desigualdade racial; pesquisar informações sobre a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial (1968), a Conferência de Durban (2001) e a Década Internacional de Afrodescendentes (2015-2024); apreciar e analisar obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira; criar obra de arte inspirada nas culturas africana e afro-brasileira; promover uma exposição das obras criadas para a comunidade escolar.

Para valorizar a cultura desses povos, nesta seção você vai conhecer algumas produções artesanais e artísticas baseadas nas culturas africana e afro-brasileira, além de descobrir como a geometria está presente nessas produções.

Como exemplo, é possível observar transformações geométricas na confecção de tecidos, na criação de máscaras e nas pinturas corporais, repletas de cores e de significados.

Depois de conhecer e apreciar obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira, você vai criar uma obra de arte e organizar uma exposição para a comunidade escolar.

MUSEU AFRO BRASIL

Em 2017, o Museu Afro Brasil, instituição da Secretaria da Cultura do Estado de São Paulo, realizou a exposição "Geometria afro-brasileira e africana", que mostra como a geometria está presente em diversas manifestações artísticas africanas.

Ver comentários e respostas no Guia do professor.

Etapa 1: Pesquisa e análise de dados sobre desigualdade racial

1. Em duplas, pesquisem as respostas para as seguintes questões:

a) O que é a Convenção Internacional sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação Racial?

b) Por quem e quando foi adotada essa convenção?

c) Quem promoveu a Conferência de Durban? Quando e onde essa conferência foi realizada?

d) O que são a Declaração e o Programa de Ação de Durban?

e) O que é a Década Internacional de Afrodescendentes? Por que ela foi criada?

f) Quais são os objetivos da Década Internacional de Afrodescendentes?

1. f) Se julgar oportuno, sugerir aos alunos que leiam as ações propostas no âmbito "Reconhecimento". Depois, conversar sobre essas propostas, pois tratam da importância de conhecer, reconhecer e valorizar a cultura dos povos afrodescendentes, principal tema desta seção. Essas ações estão disponíveis em: <http://decada-afro-onu.org/recognition.shtml>. Acesso em: 27 maio 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. Reúna-se com quatro colegas e pesquisem, em fontes confiáveis, informações sobre a desigualdade racial no Brasil. Anotem os dados mais interessantes e relevantes que encontrarem, assim como a fonte da qual foram retirados. Conversem sobre eles e, depois, compartilhem com a turma as conclusões do grupo.
3. Agora, toda a turma deve se reunir e conversar sobre as questões e os dados pesquisados. Reflitam sobre a importância de extinguir a discriminação e a desigualdade racial. Conversem também sobre a relevância de conhecer, valorizar e respeitar as manifestações culturais dos povos afrodescendentes.

Todo o trabalho e toda a discussão a respeito de discriminação e desigualdade racial, bem como a apreciação e a criação de obras de arte inspiradas nas culturas africana e afro-brasileira, contribuem para o desenvolvimento dos temas contemporâneos **diversidade cultural**, **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** e **educação em Direitos Humanos**.

Etapa 2: Análise e apreciação de obras de arte baseadas nas culturas africana e afro-brasileira

Muitos trabalhos artísticos baseados nas culturas africana e afro-brasileira apresentam figuras geométricas que se repetem, criando padrões coloridos, como é o caso dos tecidos *kente*, tecidos tradicionais do povo Ashanti, localizado em Gana, na África.

Algumas obras de arte também exploram as figuras geométricas e utilizam o conceito de transformação geométrica em sua criação. Um exemplo são as pinturas a óleo do artista baiano Rubem Valentim (1922-1991), que apresentam transformações geométricas com representações de figuras geométricas planas.


TRACK5/E+/GETTY IMAGES

Os tecidos *kente* apresentam diferentes estampas geométricas e variadas cores. Tradicionalmente, eram utilizados apenas pelos reis do império africano Ashanti.

4. Em duplas, pesquisem outras obras de arte baseadas na cultura africana ou afro-brasileira que apresentem transformações geométricas. Vocês podem pesquisar, por exemplo, quadros de Rubem Valentim e esculturas do artista plástico Jorge dos Anjos (1957-).


MUSEU DE ARTE MODERNA DA BAHIA, SALVADOR.

VALENTIM, Rubem. Sem título, 1989, serigrafia, 100 cm × 70 cm.

Na obra, é possível observar transformações geométricas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Pesquisa e ação

5. Escolha uma das obras pesquisadas e converse com seu colega sobre as obras que selecionaram, baseando-se nas questões a seguir.
   a) Qual é o título da obra? Quem a criou?
   b) O que achei da obra? Ela me faz pensar ou sentir algo? Se sim, o quê?
   c) Quais cores e figuras geométricas foram utilizadas na obra?
   d) Quais figuras geométricas se repetem na obra?
   e) Quais transformações geométricas estão presentes na obra?
   f) Se existem transformações isométricas na obra, de que tipo elas são: translação, reflexão ou rotação?

Etapa 3: Criação de obras de arte

6. Agora é sua vez de criar uma obra de arte inspirada na cultura africana! Com o auxílio de régua, esquadro, transferidor e compasso, faça as transformações geométricas. Use a criatividade e lembre-se de que as obras de arte africanas e afro-brasileiras são muito coloridas. Você pode fazer as ilustrações com lápis grafite e, em seguida, pintá-las com tinta, giz de cera ou outros materiais. Também é possível representar as figuras geométricas usando papéis coloridos e fazendo uma colagem.

Se necessário, retomar o capítulo "Transformações geométricas". Esclarecer possíveis dúvidas e orientar os alunos a realizar as transformações geométricas adequadamente.

Etapa 4: Exposição das obras de arte

7. Com a ajuda do professor, definam um ambiente adequado da escola para expor as obras de arte criadas. Organizem o espaço de maneira que os visitantes possam circular e observar todas as obras expostas.
8. Crie uma ficha de identificação para sua obra contendo: seu nome, o título de sua obra, os materiais utilizados para fazê-la e a técnica escolhida. Na exposição, essa ficha deverá ser posicionada ao lado da obra.
9. Elabore uma apresentação para a abertura da exposição. É imprescindível destacar a importância de conhecer e valorizar as culturas africana e afro-brasileira e de combater a desigualdade e a discriminação racial, além de comentar sobre a Década Internacional de Afrodescendentes.
10. Crie convites impressos ou digitais para a comunidade escolar informando o tema, a data e o local da exposição.

Etapa 5: Análise e síntese do trabalho realizado

11. Após a exposição, reúna-se com toda a turma para avaliar coletivamente o trabalho realizado com a mediação do professor.
12. Escreva sua autoavaliação em um relatório e entregue-a ao professor. Para isso, considere as seguintes questões:
    - Ajudei os colegas nas etapas de pesquisa?
    - Participei ativamente dos momentos de conversa?
    - Participei na organização da exposição?
    - Ouvi as falas dos colegas e do professor com atenção e respeito?
    - Busquei apreciar e analisar as obras de arte pesquisadas?
    - Consegui reconhecer o uso de transformações geométricas nas obras de arte?
    - Senti dificuldades durante a criação da obra de arte? E em outros momentos? Se sim, quais foram as dificuldades? Como busquei resolvê-las?
    - Ajudei a turma propondo ideias e sugestões durante a realização deste trabalho?
    - Compreendi a importância de combater a discriminação racial e a desigualdade racial?
    - O que aprendi durante a criação da obra de arte e a organização da exposição?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

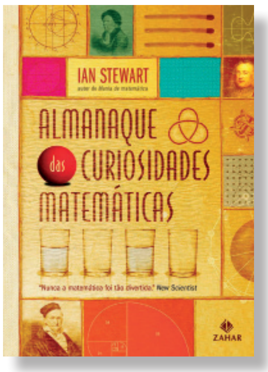
MODERNA

Ampliando os conhecimentos

As indicações desta seção podem ampliar os conhecimentos dos alunos em relação a assuntos vistos na obra, em relação à Matemática em geral, ou em relação a outros assuntos para a formação integral do indivíduo. Devemos lembrar, porém, que cada referência baseia-se no ponto de vista do autor, constituindo apenas uma referência entre tantas outras.

Livros

REPRODUÇÃO



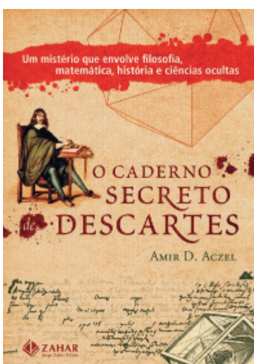
Almanaque das curiosidades matemáticas

Ian Stewart

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Esse almanaque é um apanhado de cadernos de anotações que o autor começou a fazer aos 14 anos. Traz diversos tópicos, com temas variados relacionados à Matemática, apresentados por meio de jogos, quebra-cabeças, histórias, curiosidades, coisas para fazer ou construir etc. É uma leitura agradável e interessante para todos os públicos.

REPRODUÇÃO



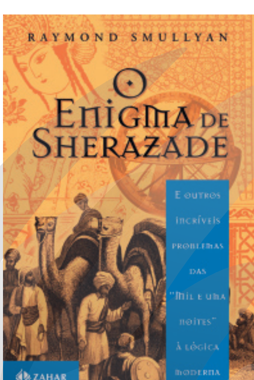
O caderno secreto de Descartes

Amir D. Aczel

Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo **cartesiano** vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da Filosofia moderna. Com um misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos não publicados do filósofo e as circunstâncias suspeitas de sua morte.

REPRODUÇÃO



O enigma de Sherazade: e outros incríveis problemas das "Mil e uma noites" à lógica moderna

Raymond Smullyan

Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

Nessa obra, o autor coloca Sherazade, famosa personagem que narra os contos das *Mil e uma noites*, no centro de narrativas que relatam enigmas, quebra-cabeças e problemas de lógica que envolvem o leitor. O livro propõe charadas matemáticas, adivinhações, enigmas e exercícios de verdade e de mentira, cuja solução exige raciocínio lógico e estratégias que surpreendem o leitor desde a primeira página. Uma leitura original e cativante para todos os leitores.

REPRODUÇÃO

Matemática divertida e curiosa

Malba Tahan

Rio de Janeiro: Record, 2014.

Nessa obra, o autor relata casos curiosos sobre fatos e descobertas matemáticas. Traz, ainda, enigmas, problemas e figuras que surpreendem pela ilusão de óptica. O livro é um clássico do professor Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido pelo pseudônimo Malba Tahan. Uma leitura que amplia o universo de conhecimentos e, ao mesmo tempo, diverte.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sites

Pavimentação, caleidoscópios, caleidociclos, Escher e, até, . . . Matemática!!!

Publicadas no *site* do Clube de Matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), as duas sequências de atividades apresentam explicações, textos extras e vídeos mostrando o uso de transformações geométricas para a pavimentação, de forma lúdica e interessante. Com essas sequências, o leitor aprenderá, inclusive, como construir uma obra de arte usando técnicas e transformações geométricas.

Disponíveis em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-1/>; <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/>.

Acessos em: 29 jun. 2020.

Software

Geogebra

O Geogebra é um *software* que combina Geometria e Álgebra e possui uma versão que pode ser usada *on-line*. Entre suas diversas funcionalidades estão a realização de atividades de Geometria dinâmica e a construção e a manipulação de gráficos de funções diversas.

Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Podcasts

Fronteiras da Ciência

Esse *podcast* é uma iniciativa do Instituto de Física e do departamento de Biofísica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Por intermédio de debates ou entrevistas com pesquisadores e especialistas nos temas abordados, o objetivo do *podcast* é divulgar a Ciência e desfazer mitos por meio de evidências científicas. Os episódios ampliam o conhecimento do ouvinte sobre temas variados, como *fake news* (episódios 29 e 32 da temporada 9), ou outros mais matemáticos, como o que trata do π (episódio 3, temporada 7), do teorema das quatro cores (episódio 41, temporada 6), da modelagem da transmissão da dengue (episódio 2, temporada 9), entre outros.

Disponível em: <http://www.ufrgs.br/frontdaciencia/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Jornal da USP

O *Jornal da USP* produz diversos programas de *podcasts* sobre os mais variados temas, como Ciência USP, Momento Cidade, Momento Tecnologia, Momento Sociedade, Saúde sem Complicações, Brasil Latino, entre outros. Há *podcasts* interessantes não só para a ampliação de conhecimentos matemáticos, mas para a formação geral do ouvinte.

Disponível em: <https://jornal.usp.br/podcasts/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Projeto Matemática no ar

O projeto Matemática no ar foi realizado pelo Laboratório de Estudos Avançados em Jornalismo (Labjor), da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2017. O projeto teve como objetivo mostrar ao público que a Matemática está presente em diversas situações cotidianas. Os conteúdos foram produzidos como entrevistas e *spots*.

Disponível em: <http://oxigenio.comciencia.br/projeto-matematica-no-ar-semana-nacional-de-ciencia-e-tecnologia-2017/>. Acesso em: 11 mar. 2020.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Respostas

CAPÍTULO 1

1. a) 1×3 c) 2×1
b) 3×1 d) 2×2

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 8 & 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $a_{11} = |-6| = 6$ $a_{13} = 3$
$a_{22} = 7$ $a_{31} = -7$
$a_{33} = 9$

5. Resposta possível: $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, em que $a_{ij} = i^j$

6. Não, pois elas não são do mesmo tipo. A primeira é do tipo 5×1, e a segunda é do tipo 1×5.

7. a = 1, b = 3, c = −1 e d = −3

8. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. diagonal principal: 3, 8 e 15; diagonal secundária: 11, 8 e 7

10. 375

11. 1

12. 14

13. a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

c) Não é possível.

14. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

15. a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

16. a) 14 b) $\nexists$

17. resposta pessoal

18. a) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{19}{3} \\ \frac{8}{3} & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

19. a) verdadeira d) falsa
b) verdadeira e) verdadeira
c) verdadeira

20. $X = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$

21. a) $\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) Não é possível calcular.

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -24 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

22. $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{7}{3}$

23. $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

24. $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

X é a matriz identidade de ordem 2.

25. a) • A e A • C e C
• B e B • D e D

b) Os produtos são iguais, respectivamente, às matrizes inventadas.

26. a) gráfica C
b) PB: R$ 2,15; CK: R$ 2,70; CKX: R$ 4,60

27. a) 2 b) 5 c) −1

28. a) 0 b) 0

29. −8

30. a) 20 b) 20 c) 20

31. a) −12 b) −75 c) −225 d) −22

32. a) 0; sim
b) 0; sim; também valeria zero
c) $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$; sim
d) $ad - bc$; $ad - bc$; sim
e) $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$; opostos
f) abc; sim

33. 1, 1, 1. O determinante de I_4 é igual a 1.

Exercícios complementares

1. $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -6 & 1 & 8 \\ -12 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

3. alternativa e

4. a) $H_{3 \times 2}$, $S_{2 \times 5}$, $(H \cdot S)_{3 \times 5}$

b) $\begin{pmatrix} 34 & 41 & 49 & 44 & 38 \\ 62 & 73 & 87 & 78 & 68 \\ 20 & 25 & 30 & 27 & 23 \end{pmatrix}$; total de peças dos itens A, B e C produzidas em cada dia da semana.

c) 62 itens B; 27 itens C

5. a) $\frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ ou $\frac{2 - \sqrt{6}}{2}$ b) 2

6. 1

7. $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

8. a) $X = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 0 \\ -3 & -5 & 9 \\ 21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} -2 & -15 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ -21 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

9. alternativa c

Autoavaliação

1. alternativa b
2. alternativa c
3. alternativa d
4. alternativa d
5. alternativa a
6. alternativa a
7. alternativa c
8. alternativa d
9. alternativa d
10. alternativa d

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

CAPÍTULO 2

1. a) sim b) não
2. 2
3. Respostas possíveis: (0, 0, 0), (1, −1, −1), (1, 1, 5) e (−2, 2, 2)
4. sim
5. resposta pessoal
6. $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$
7. S = {(0, 0)}
8. $m = 1, n = 6$ e $P\left(3, \frac{1}{2}\right)$
9. a) Exemplo de respostas:
   Para $x - y = 0$: (0, 0), (1, 1), (−2, −2)
   Para $x + y = 2$: (1, 1), (2, 0), (0, 2)
   c) S = {(1, 1)}
10. 26 alunos
11. São misturados 60 ℓ de leite com 2% de gordura e 20 ℓ de leite com 4% de gordura.
12. Resposta pessoal
13. a) SPD b) SPI c) SI d) SPI
14. a) $k = 0$ b) $k \neq 0$
15. a) sim,
    $a = \frac{15}{2}; S = \left\{\left(\frac{5 - 2\alpha}{4}, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$
    b) não
16. $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$
17. resposta pessoal
18. $m = 1$ e $n = 3$
19. $a = 2, b = -3$ e $c = -4$
20. a) $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e
    e $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
    b) $N = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
    e $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
21. a) $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$
    b) $\begin{cases} 2x + 7y = -1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$
22. a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$
    b) $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ 5x - 6z = 3 \end{cases}$
23. sim
24. alternativas b, c, d
25. resposta pessoal
26. a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{(2, 8)\}$
    b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(1, 2, 3)\}$
27. $a = 0$ e $b = 1$
28. $m = -\frac{5}{2}$ e $n = 3$
29. (2, −2, 1); sim
30. resposta pessoal
31. a) S = {(2, −1)}; SPD
    b) $S = \{(1, \alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI
    c) S = {(3, −2, −1)}; SPD
    d) $S = \{(7\alpha - 4, 1 - 3\alpha, \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; SPI
32. a) S = {(2, 3)} c) S = {(8, −1)}
    b) S = {(3, −1)} d) S = {(−1, −3)}
33. a) S={(1, 3)}; SPD
    b) S = ∅; SI
    c) S = ∅; SI
    d) S = {(1, 2, −2)}; SPD
    e) $S = \left\{\left(\frac{28 - 3\alpha}{5}, \frac{9 + \alpha}{5}, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$;
    SPI
    f) $S = \left\{\left(\frac{\alpha - 5}{3}, \frac{17 - 4\alpha}{3}, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$;
    SPI

Exercícios complementares

1. 10 ou −4
2. 3.060 residências
3. −1
4. $r_A = 11$ km, $r_B = 7$ km e $r_C = 5$ km
5. b) S = ∅
6. alternativa b
7. 9
8. −1
9. 2.000 maçãs, 3.000 peras e 5.000 laranjas
10. a) SPD; $S = \left\{\left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right)\right\}$
    b) SPI; $S = \{(\alpha, 4 - 2\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$
11. alternativa b
12. alternativa a
13. alternativa b
14. $S = \{(2\alpha, 3\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$
15. alternativa c
16. a) $S = \left\{\left(5, -2, \frac{5}{3}\right)\right\}$
    b) S = {(0, 1, 2, 3)}
    c) S = {(3, 1, 5)}
17. a) Sendo x a quantidade de amendoim, y a quantidade de castanha de caju e z a quantidade de castanha-do-pará, todas em quilograma:
    $\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$
    b) amendoim: 250 g; castanha de caju: 125 g; castanha-do-pará: 125 g
18. S = {(1, −1, 2, 3)}
19. S = {(21, 6)}
20. $S = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$
21. $\frac{1}{2}$
22. b) $-\frac{1}{2}$

Autoavaliação

1. alternativa a
2. alternativa e
3. alternativa c
4. alternativa a
5. alternativa d
6. alternativa b
7. alternativa b
8. alternativa c
9. alternativa c

CAPÍTULO 3

2. a) 4º quadrante
   b) 3º quadrante
   c) 1º quadrante
   d) 2º quadrante
3. a) (0, 3), (1, 2), (3, 2), (2, 0), (3, −2), (1, −2), (0, −3), (−1, −2), (−3, −2), (−2, 0), (−3, 2) e (−1, 2)
   b) não
4. $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $m \leqslant 8$ e $n \geqslant 5$
5. b) 8
   c) 6
   d) resposta pessoal
   e) 10
   f) $\sqrt{a^2 + b^2}$
6. Os pontos pertencem a uma reta:
   a) vertical por (4, 0);
   b) horizontal por (0, −3);

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

c) horizontal por (0, 5);

d) vertical por (−4, 0).

7. a) 5 b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{97}$ d) 4

8. a) $\sqrt{13}$ b) 2 c) 3

9. a) 36 unidades de área

b) 24 unidades de comprimento

c) $6\sqrt{2}$ unidades de comprimento

10. $P\left(0, \frac{71}{6}\right)$

11. resposta pessoal

12. a) isósceles

b) escaleno e retângulo

c) equilátero

13. $C\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, \frac{-9-\sqrt{3}}{2}\right)$ ou

$C\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{-9+\sqrt{3}}{2}\right)$

14. b) $d_{P,\,Q} = 3$ e $d_{P,\,R} = 3$

c) equilátero

d) $\left(\frac{7}{2}, \frac{6-3\sqrt{3}}{2}\right)$

15. a) $M(4, 3)$ b) $M(-5, -2)$

16. a) $M(-2, 4)$

b) A resposta seria a mesma.

c) Não, pois além de $M(-2, 4)$, teríamos também $M'(-1, 3)$.

17. a) $C(3, 5)$ e $D(2, 7)$

b) $\left(10+2\sqrt{5}\right)$ unidades de comprimento

18. $\sqrt{10}$

19. (3, 1), (−5, 7) e (1, −3)

20. resposta pessoal

21. a) sim b) não

22. $x \neq -2$

23. a) $m = 1$ b) $m \neq 1$

24. Há infinitas possibilidades, como P(−1, 2) e Q(2, 5).

25. $x - 3y + 7 = 0$

26. $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $B(0, 1)$

27. a) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

28. a) $y_P = 0$; $P\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$

b) $x_P = 0$; $P\left(0, \frac{11}{7}\right)$

c) $x_P = y_P$; $P\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$

d) $x_P = -y_P$; $P\left(-\frac{11}{9}, \frac{11}{9}\right)$

e) $y_P = 2x_P$; $P\left(\frac{11}{12}, \frac{11}{6}\right)$

29. a) não b) sim

30. a) não

b) sim; $5x - 2y - 5 = 0$

31. $m = 3$

32. $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ e $(-1, 0)$

33. a) $4x + 3y - 17 = 0$

b) $x + 3y - 11 = 0$

c) (2, 3)

34. $A(-4, 5)$, $B(0, -3)$ e $C(4, 3)$

a) $2x + y + 3 = 0$; $3x - 2y - 6 = 0$; $x + 4y - 16 = 0$

b) $5x + 6y - 10 = 0$; $x = 0$; $x - 3y + 5 = 0$

c) $x + 4y + 2 = 0$; $2x + y - 4 = 0$; $3x - 2y + 8 = 0$

35. a) não existe c) 1

b) 0 d) $-\frac{\sqrt{2}}{14}$

36. $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} - 6 = 0$

37. a) $\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

b) $x - y + 3 = 0$

38. a) 65 °H

b) 60 °C ou 60 °H

39. a) $m = \frac{\sqrt{3}}{5}$; $n = \frac{2}{5}$

b) $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $n = \frac{\sqrt{2}}{16}$

40. $\alpha \simeq 53°$

41. $r: y = \sqrt{3}x - 2$; $s: y = -x + 4$

42. a) concorrentes perpendiculares

b) concorrentes

c) paralelas distintas

d) paralelas coincidentes

43. b) r e s são retas paralelas distintas

44. a) $5x - y = 0$ b) $x - 5y = 0$

45. $x + 3y = 0$

46. $y = 2x + 3$

47. a) $y = -x - 2$; $y = \frac{1}{3}x$; $y = 3x + 4$

b) $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

48. a) $A(1, 1)$, $B(5, -1)$, $C(6, 1)$ e $D(2, 3)$

b) $y - 1 = 0$ e $3x + 4y - 17 = 0$

c) 10 unidades de área

d) $6\sqrt{5}$ unidades de comprimento

49. a) $\sqrt{17}$ cm

b) $\sqrt{13}$ cm

50. $\frac{4}{5}$

51. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

52. $\frac{11\sqrt{13}}{26}$

53. a) $A(-1, 2)$; $x - y - 2 = 0$

b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ unidades de comprimento

c) 5 unidades de comprimento

d) área: $\frac{25}{2}$ unidades de área; perímetro: $10\sqrt{2}$ unidades de comprimento

54. $\begin{cases} 2x + 5y - 4 = 5x - 2y + 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x - 7y + 12 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 5y - 4 = -(5x - 2y + 8) \Rightarrow \\ \Rightarrow 7x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$

55. alternativa d

56. resposta pessoal

58. $3x + 2y - 6 \leq 0$

60. a) 84 calças

b) Não, pois, como x e y representam o número de calças de cada tipo, devem ser números naturais.

c) $x = 210$ (ocorre quando $y = 0$); $y = 90$ (ocorre quando $x = 0$)

d) $30x + 70y - 6.300 \leq 0$, com $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$

61. 17 unidades de área

62. a) $A(0, 2)$, $B(0, 6)$, $C(2, 0)$ e $D(4, 0)$

b) $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

c) $\frac{22}{5}$ unidades de área

d) $\frac{14}{5}$ unidades de área

e) $\frac{36}{5}$ unidades de área.

63. (−11, 23) ou (13, −25)

64. resposta pessoal

65. a) $C(1, 2)$ e $r = 10$

b) $C(0, 3)$ e $r = \sqrt{5}$

c) $C(5, 0)$ e $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

66. R e T

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

67. $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

68. a) $(x-1)^2+(y-3)^2=4$
b) $x^2+y^2=16$

69. $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$

70. a) $x^2+y^2=25$
b) $(x-2)^2+(y-1)^2=10$

71. $(x+2)^2+(y-4)^2=50$

72. a) $C(1,-1)$ e $r=\sqrt{2}$
b) Não existem.

73. Não representa.

74. $C(3,-9)$ e $r=\sqrt{82}$

75. a) $x^2+y^2+6x-4y+4=0$
b) $x^2+y^2+10y+20=0$

76. $p<1$

77. a) $y=1$
b) $B(-2,1)$, $C(-2,-1)$ e $D(2,-1)$
c) sim

78. a) exterior c) pertence
b) interior

79. a) exterior c) interior
b) pertence

80. a) 4 ou 2
b) $2<k<4$

81. 01 + 02 + 04 + 08 = 15

82. a) $(x-3)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$
b) $(x-3)^2+(y-2)^2=1$
c) $\frac{\pi}{2}$ unidade de área

83. a) tangente; $P(3,3)$
b) secante; $A(1,0)$ e $B(0,-1)$
c) exterior

84. $-2\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$

85. $4\sqrt{2}$ unidades de comprimento

87. π unidades de área

88. 10π unidades de comprimento

89. a) $(x-2)^2+(y-3)^2\leq 13$
b) $\begin{cases} y=x+3 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$
c) $\begin{cases} y\geq -x-2 \\ (x+2)^2+(y+2)^2\leq 4 \end{cases}$

90. $\Delta>0$: a reta é secante; $\Delta=0$: a reta é tangente; $\Delta<0$: a reta é exterior.

91. resposta pessoal

92. a) tangentes interiores
b) secantes
c) tangentes exteriores
d) disjuntas interiores
e) concêntricas
f) disjuntas exteriores

93. anti-horário

95. Não há pontos comuns.

96. $\begin{cases} x^2+y^2<36 \\ x^2+y^2\geq 4 \end{cases}$

98. $x^2+y^2=16$; $A=16\pi$ unidades de área

99. alternativa c

Exercícios complementares

1. alternativa c
2. $m=3$
3. $x=-6$ ou $x=-4$
4. $2x-7y-6=0$
5. $\frac{4}{5}$
6. $p=-7$
7. $5x+10.000y=10.000$
8. alternativa c
9. 3 minutos e 45 segundos
11. alternativa d
13. alternativa b
14. $(x+1)^2+(y+1)^2=5$
15. a) 2 vezes
b) sim
c) 36 π unidades de área
16. λ_1: $(x+14)^2+y^2=25$
λ_2: $(x+4\sqrt{3})^2+(y+4)^2=25$
λ_3: $x^2+y^2=25$
λ_4: $(x-4\sqrt{3})^2+(y+4)^2=25$
λ_5: $(x-14)^2+y^2=25$
17. $a=36$, $b=0$ e $c<5$
18. $(4,-2)$
19. alternativa a
20. a) $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$
21. $B(-1,4)$
22. 8 unidades de área
23. a) $A=-\alpha^2+2\alpha+3$
b) 1
24. $x+2y=6$
25. $A=\frac{(R+r)\cdot\sqrt{r\cdot R}}{2}$
27. $x+y-4=0$
28. alternativa a
29. $(-2,6)$, $(5,5)$ e $(4,-2)$

Autoavaliação

1. alternativa c
2. alternativa a
3. alternativa a
4. alternativa b
5. alternativa c
6. alternativa a
7. alternativa b
8. alternativa a
9. alternativa c

CAPÍTULO 4

1. alternativa c
3. três eixos de simetria
5. $P(1,4)$, $Q(2,1)$ e $R(7,5)$
6. alternativa a
7. alternativa e
12. alternativa b
14. alternativa d
19. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
20. Reflexão em relação ao eixo y:
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$
Reflexão em relação ao eixo x:
$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$
Matriz B:
Reflexão em relação ao eixo y:
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$
Reflexão em relação ao eixo x:
$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
Matriz C:
Reflexão em relação ao eixo y:
$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
Reflexão em relação ao eixo x:
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$
21. b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
22. b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 9 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercícios complementares

4. alternativa c
6. alternativa d
7. alternativa d
8. alternativa c
9. $\frac{6}{17}$ m do vértice Q

Autoavaliação

1. alternativa a
2. alternativa b
3. alternativa b
4. alternativa c
5. alternativa d
6. alternativa a
7. alternativa d
8. alternativa a

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

BLIKSTEIN, Paulo. *O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação*. Disponível em: <http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html>. Acesso em: 11 maio 2020.

Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas também para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. *Currículo de referência em tecnologia e computação*: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 11 maio 2020.

Esse documento apresenta uma proposta curricular para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental em complemento à BNCC, enfatizando conceitos de tecnologia e de computação. A proposta é organizada considerando-se três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef). *Educação financeira nas escolas*: Ensino Médio: livro do professor. Brasília: Conef, 2013.

Essa coleção é composta de três livros para alunos de Ensino Médio (cada um deles acompanhado de um livro do professor e de um caderno complementar). Os livros trazem diversos conceitos da Educação financeira por meio de temas como vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país, entre outros. Além disso, fornecem ferramentas para que os alunos transformem os conhecimentos em comportamentos financeiros saudáveis.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://ibge.gov.br/>. Acesso em: 11 maio 2020.

O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019.

Esses materiais foram como complementação ao que estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).

Livro conceituado em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. *Matemática*: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

As autoras, professoras que atuam em sala de aula há mais de 25 anos, desde o Ensino Fundamental até a pós-graduação, utilizam sua prática pedagógica para escrever um texto que incentiva o professor de Matemática do Ensino Médio a procurar novas ideias para adotar em sala de aula.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. (Coleção do professor de Matemática).

Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, o objetivo desse livro é classificar as isometrias e analisar as compostas dessas transformações. Esse estudo é feito na reta, no plano e no espaço.

LIMA, Elon Lages *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 3. (Coleção do professor de Matemática).

Voltado a professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro aborda tópicos como Geometria analítica (plana e espacial), vetores, matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares.

MACEDO, Horácio. *Dicionário de Física ilustrado*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.

Destinado a pesssoas que se interessem em ter alguma informação sucinta, embora geral, sobre diversos conceitos de Física, esse dicionário contém, além de definições, comentários e remissões que possibilitam colocar um verbete em um contexto mais amplo com outros verbetes a ele relacionados.

MESTRE, P. A. A. *O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos*. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, Brasil, 2017.

Essa dissertação propõe estratégias para a resolução de problemas matemáticos por meio de um mapeamento entre as capacidades fundamentais da Matemática definidas no nível de letramento do Pisa (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, em português) e os conceitos do pensamento computacional.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

MODERNA

ISBN 978-65-5779-042-7

9 786557 790427