ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

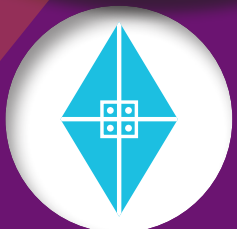
EDITORA RESPONSÁVEL:
Lilian Aparecida Teixeira

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0197P21202
Código da obra: 0197P21202134

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA PLANA







Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MODERNA

MODERNA

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA PLANA

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37387 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

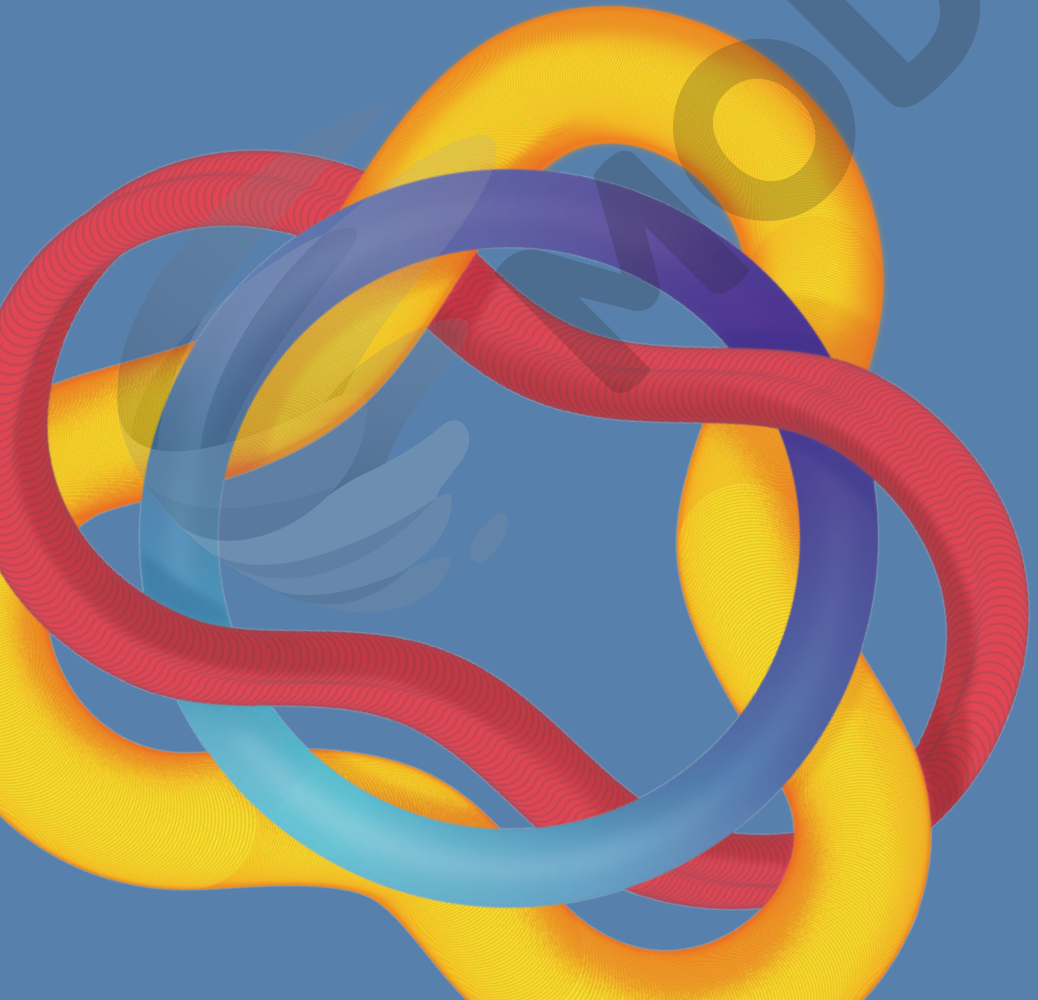
Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Suplemento para o professor



MODERNA

Apresentação

Um meio de inclusão e democratização de oportunidades é a educação. O Ensino Médio representa um momento decisivo na vida de qualquer indivíduo. Assim, cabe ao livro didático auxiliar professores e alunos nessa fase, oferecendo-lhes ferramentas úteis no processo de ensino e aprendizagem. Pensando nisso, esta coleção procurou tratar a Matemática e suas Tecnologias como parte integrante do cotidiano dos alunos, além de estabelecer associação com outros componentes curriculares e com outras áreas do conhecimento.

Tomando diversos documentos oficiais como diretrizes, esta coleção contempla os conteúdos essenciais para esse nível de ensino, apresentando-os de maneira contextualizada e empregando uma linguagem clara e objetiva, em uma sequência que favorece a aprendizagem.

O objetivo é possibilitar aos alunos o desenvolvimento das competências gerais, competências específicas e habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referentes ao Ensino Médio. Porém, é importante que o professor tenha autonomia e consciência de que pode selecionar os conteúdos que serão abordados em sala de aula adotando uma ordem diferente da sugerida no livro do aluno, de acordo com a proposta didático-pedagógica da escola.

Este **Suplemento para o professor** busca oferecer aos docentes subsídios teórico-metodológicos, de maneira a auxiliar seu trabalho na utilização desta coleção em sala de aula e em suas demais atribuições.

MODERNA

Sumário

A estrutura da coleção VI

Livro do aluno VI

Suplemento para o professor X

O Ensino Médio XII

O aluno do Ensino Médio XII

O professor XIII

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos XIV

O convívio social em sala de aula XV

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio XVI

As áreas do conhecimento XVII

Temas contemporâneos transversais XVIII

Orientações didáticas e metodológicas XIX

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção XIX

O computador e o ensino da Matemática XXII

O pensamento computacional XXIII

O aluno no centro do processo de aprendizagem XXIV

Estratégias XXV

Avaliação XXVII

A BNCC e a coleção XXIX

Sugestão de cronograma XXIX

Objetivos, comentários e sugestões XXXII

Tema 1 O Teorema de Tales e a semelhança de triângulos XXXII

Tema 2 As relações métricas e a trigonometria no triângulo retângulo XXXV

Tema 3 Trigonometria em um triângulo qualquer XLII

Tema 4 Trigonometria na circunferência XLV

Tema 5 Funções trigonométricas XLIX

Tema 6 Função do tipo trigonométrica: um modelo matemático LII

Tema 7 Fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas LIV

Tema 8 Ladrilhamento LVII

Tema 9 Área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango LXI

Tema 10 Área do triângulo e de polígonos regulares LXV

Tema 11 Área e as vagas de estacionamento destinadas aos idosos LXIX

Tema 12 Área do círculo LXX

Resoluções dos exercícios e problemas LXXX

Sugestões ao professor CXVII

Leituras sobre o ensino de Matemática CXVII

Leituras sobre a História da Matemática CXIX

Leituras sobre os conteúdos deste volume CXXI

Sugestões de *sites* para o professor CXXII

Referências bibliográficas ... CXXIII



MODERNA

A estrutura da coleção

Esta coleção de Matemática e suas Tecnologias, destinada ao Ensino Médio, é composta de seis volumes, cujos conteúdos estão organizados por temas. Esses temas, por sua vez, foram elaborados com base nas competências gerais, competências específicas e habilidades elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como nos temas contemporâneos transversais.

A seguir, são apresentadas as características das seções e de outros elementos que compõem esta coleção.

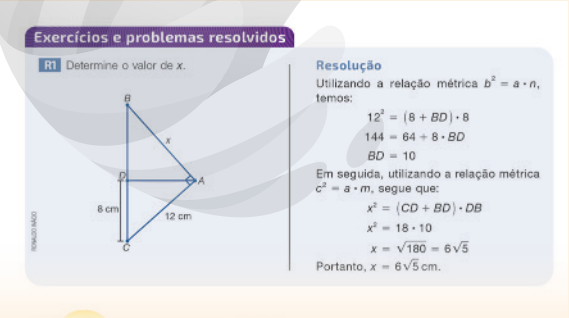
Livro do aluno

Páginas de abertura do tema

As páginas de abertura apresentam uma temática cujas características permitem estabelecer relações com os conteúdos que serão trabalhados naquele tema. Nessas páginas, há informações que se referem a outras áreas do conhecimento ou à própria Matemática, apresentadas por meio de diferentes recursos, como textos, fotografias, gráficos, infográficos e esquemas. Esses recursos são acompanhados por questões que buscam levantar os conhecimentos prévios dos alunos com relação a diversas situações de âmbito geral, bem como estabelecer intuitivamente relações entre o assunto abordado e alguns conteúdos matemáticos. Essas questões propiciam um momento de interação e troca de ideias entre os alunos, auxiliando no desenvolvimento de sua capacidade argumentativa, além de proporcionar momentos nos quais eles devem ouvir e lidar com pensamentos que possam ser divergentes dos seus. Neste **Suplemento para o professor**, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, são apresentadas informações complementares sobre as páginas de abertura referentes a cada tema, além de sugestões para trabalhá-las em sala de aula, dicas de avaliação dos alunos e outros assuntos que podem ser propostos como ideia para a realização de pesquisas extraclasse. Também são sugeridos outros questionamentos, a fim de atingir os objetivos daquele tema específico.

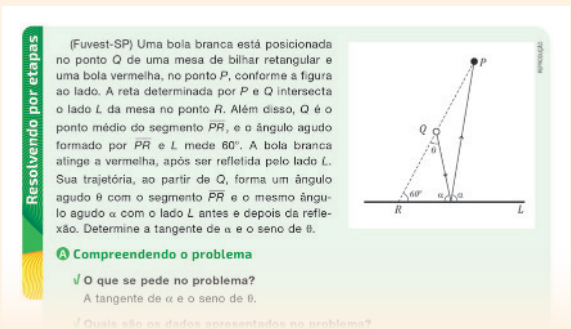


Exercícios e problemas resolvidos



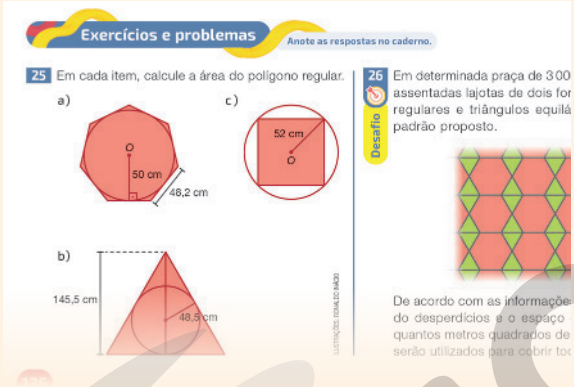
O objetivo dessa seção é complementar a teoria abordada e os exemplos apresentados com o auxílio de tarefas cujas resoluções são apresentadas aos alunos de maneira detalhada, facilitando-lhes compreender a aplicação prática do conteúdo em questão. Essa seção também tem por finalidade auxiliar os alunos a exercitar suas habilidades e estratégias na resolução de tarefas que serão propostas em outras seções, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

Resolvendo por etapas



A seção **Resolvendo por etapas** apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Tais problemas, além de contar com o auxílio do recurso textual, também podem apresentar imagens, gráficos, tabelas, esquemas e outros recursos necessários à compreensão dos alunos. O processo de resolução dos problemas é feito em quatro etapas, denominadas **Compreendendo o problema**, **Organizando as ideias e elaborando um plano**, **Executando o plano** e **Verificando a solução obtida**. Em cada uma dessas etapas, os alunos são orientados a analisar as informações fornecidas no enunciado do problema, separar e organizar os dados apresentados, elaborar e executar um plano que resolva o problema e, por fim, verificar se os procedimentos efetuados estão de acordo com o que foi solicitado. No boxe **Agora é você quem resolve!**, outro problema é apresentado aos alunos. Com isso, eles são levados a analisar se a resolução desse novo problema pode ser obtida seguindo os mesmos procedimentos utilizados na resolução do problema anterior.

Exercícios e problemas


Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

25 Em cada item, calcule a área do polígono regular.

a)

50 cm

48,2 cm

c)

52 cm

b)

145,5 cm

48,5 cm

26 Em determinada praça de 300 assentadas lajotas de dois for regulares e triângulos equilá padrão proposto.

Desafio

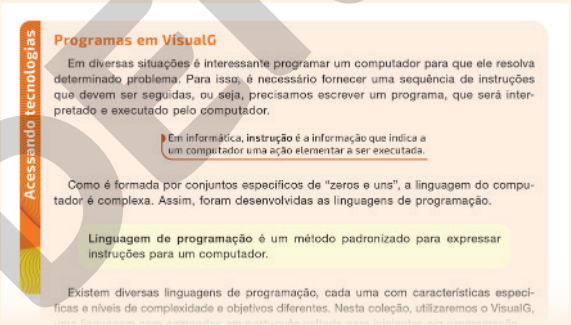
De acordo com as informaçõe do desperdícios e o espaço quantos metros quadrados de serão utilizados para cobrir toc

Essa seção traz tarefas relacionadas ao conteúdo estudado em um ou mais tópicos do tema. Dispostas em nível gradual de complexidade, elas podem ser exploradas, em sua maioria, em sala de aula. Aquelas cuja resolução for indicada para ser realizada fora do ambiente escolar devem ser corrigidas, se possível, em aula imediatamente posterior, a fim de promover uma discussão acerca das diferentes maneiras de resolução que vierem a ser apresentadas pelos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, estão indicadas sugestões de condução para algumas das tarefas apresentadas no livro do aluno, que são propostas por meio de questionamentos adicionais, pesquisas complementares e trabalhos interdisciplinares e transdisciplinares a serem desenvolvidos com base no conteúdo ou na temática tratada, visando desenvolver a autonomia e o pensamento crítico dos alunos.

Nos exercícios, a tarefa solicitada está explícita, ou seja, os alunos deverão aplicar de imediato um conceito ou procedimento-padrão estabelecido anteriormente. Já nos problemas, é esperado que os alunos mobilizem conhecimentos, competências e habilidades a fim de conceber estratégias para resolvê-los.

Acessando tecnologias

A seção **Acessando tecnologias** apresenta propostas de tarefas cujos contextos permitem desenvolver os conceitos estudados com o auxílio de recursos tecnológicos, oferecendo, assim, uma estratégia complementar àquela apresentada no livro do aluno. Tais recursos tratam-se, principalmente, de *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, uso de linguagem de programação, indicações de *sites*, entre outras ferramentas tecnológicas que permitem aprofundar os conteúdos matemáticos trabalhados até então. Essa abordagem contribui para que os alunos visualizem e verifiquem, por meio dessas ferramentas, as propriedades estudadas, auxiliando-os, posteriormente, na resolução de problemas. O principal objetivo dessa seção é estimular o aluno a utilizar ferramentas tecnológicas computacionais com o intuito de agilizar diversas atividades práticas de seu dia a dia. É importante enfatizar que os recursos sugeridos nessa seção são disponibilizados gratuitamente na internet, estando, portanto, ao alcance de todos.


Acessando tecnologias

Programas em VisualG

Em diversas situações é interessante programar um computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Em informática, **instrução** é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

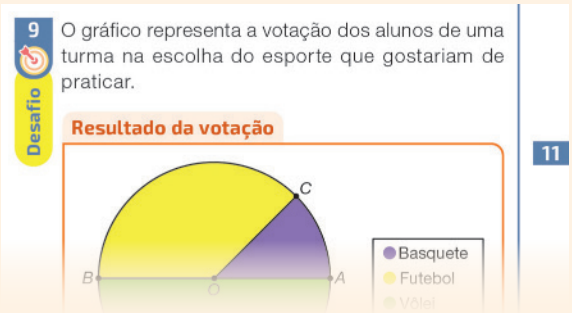
Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Nesta coleção, utilizaremos o VisualG,

Algumas tarefas, por apresentarem certas características, recebem destaques diferentes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Desafio

O destaque **Desafio** indica tarefas que apresentam maior nível de dificuldade e cuja resolução vai além da aplicação imediata do conteúdo trabalhado. De modo geral, o aluno é levado a desenvolver as próprias estratégias de resolução e a aprimorar seu raciocínio lógico.


9 Desafio

O gráfico representa a votação dos alunos de uma turma na escolha do esporte que gostariam de praticar.

Resultado da votação

11

C

B

O

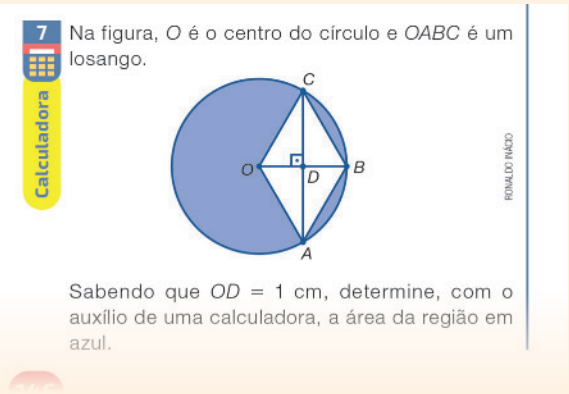
A

Basquete

Futebol

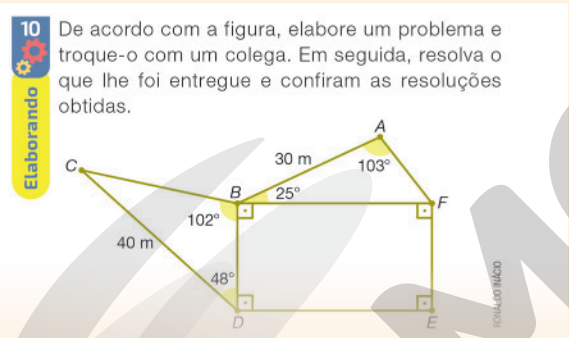
Calculadora

O destaque **Calculadora** é utilizado em tarefas cuja execução dos cálculos deve ser realizada com o auxílio de calculadoras, comuns ou científicas. Em alguns casos, esse instrumento possibilitará ao aluno criar as próprias estratégias de resolução, verificando resultados e regularidades.



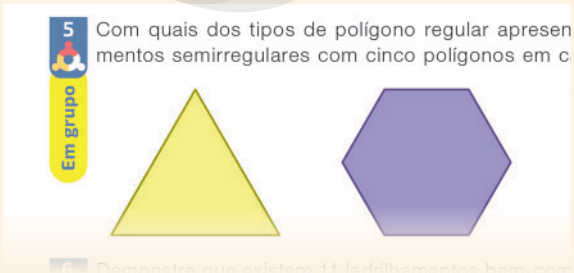
Elaborando

O destaque **Elaborando** indica tarefas que exploram o desenvolvimento da escrita, nas quais os alunos são levados a elaborar problemas, relatórios ou outros tipos de textos tomando como base imagens ou informações previamente apresentadas.



Em grupo

O destaque **Em grupo** é aplicado às tarefas cuja resolução será mais proveitosa aos alunos caso tenham o auxílio de um ou mais colegas, promovendo, assim, um momento de interação e permitindo que eles investiguem, expliquem e justifiquem os problemas resolvidos.

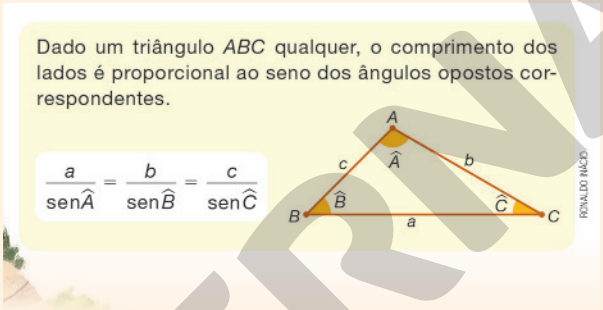


Elementos das teorias e das seções especiais

No decorrer do livro do aluno, alguns elementos, por possuírem certas características, serão apresentados com algum destaque. Os elementos visuais que caracterizam esses destaques estão descritos logo a seguir.

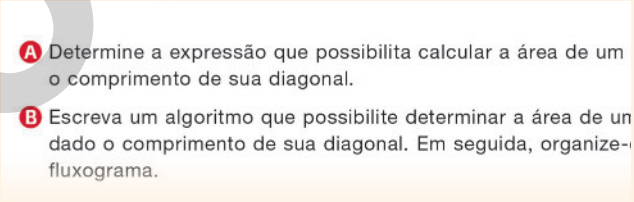
Quadro-teoria

Localizado junto à parte teórica, o **Quadro-teoria** tem o objetivo de formalizar alguns conceitos, apresentando propriedades, definições e relações importantes acerca do conteúdo estudado.



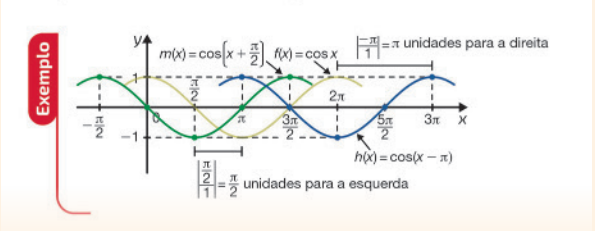
Questão intervenção

Localizada junto à parte teórica, a **Questão intervenção**, que pode apresentar cunho matemático ou de caráter pessoal, leva os alunos a refletir a respeito das aplicações práticas que envolvem o conteúdo apresentado.



Exemplo

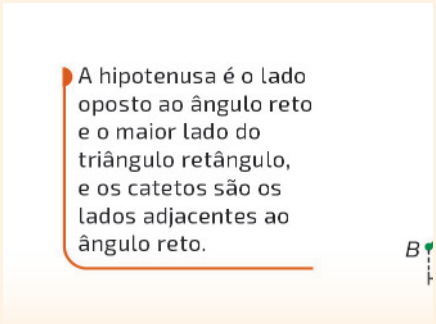
O destaque **Exemplo** tem o objetivo de apresentar aos alunos alguns exemplos práticos que retratam a teoria abordada.



MODERNA

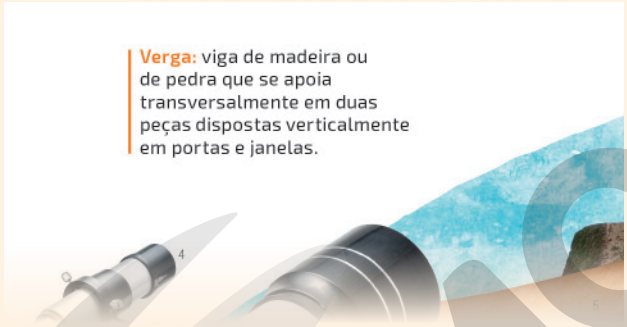
Boxe info

O destaque **Boxe info** apresenta lembretes, dicas ou informações complementares, cujo objetivo é fornecer subsídios que auxiliem os alunos na resolução de algumas tarefas ou na compreensão de determinadas teorias.



Vocabulário

O quadro **Vocabulário** traz o significado de algumas palavras em destaque no texto, geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos alunos, a fim de auxiliar na compreensão das informações apresentadas.



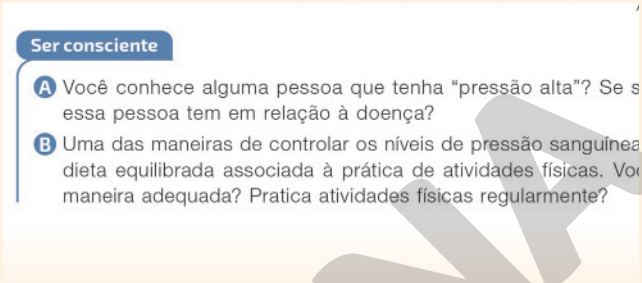
No contexto

O destaque **No contexto** indica tarefas que estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.



Ser consciente

O destaque **Ser consciente** tem o objetivo de abordar assuntos que podem, inclusive, ser relacionados aos temas contemporâneos transversais descritos na BNCC. Geralmente, os contextos que apresentam esse destaque procuram levar os alunos a refletir a respeito de questões que impactam diretamente em alguns aspectos da nossa sociedade, com o intuito de envolvê-los em uma avaliação cidadã e social da situação proposta.



Ícones

Em certos momentos desta coleção, alguns ícones serão utilizados para indicar informações importantes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Proporcionalidade

Indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

Cor

Indica que as cores dos objetos retratados não correspondem à realidade.



Ampliando seus conhecimentos

Encontrada no fim de cada volume, essa seção traz sugestões de livros, *sites* e *podcasts* para complementar o estudo dos conteúdos trabalhados nos temas. É essencial que os alunos sejam incentivados a consultar essas fontes de informação.

MODERNA

Suplemento para o professor

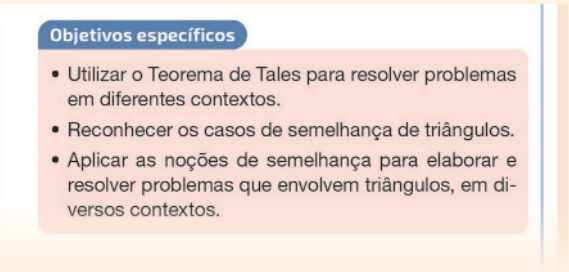
O livro do professor impresso é composto do livro do aluno, com comentários e respostas das tarefas apresentadas, e do **Suplemento para o professor**, constituído de parte geral, parte específica, resoluções dos exercícios e problemas e sugestões de leitura e de *sites*. A parte geral é composta dos pressupostos teóricos e metodológicos que fundamentam esta coleção, da descrição e das orientações acerca das seções e da estrutura de conteúdos, bem como de suas relações com a BNCC e do quadro de distribuição dos conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Já a parte específica, desenvolvida no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, apresenta ao professor orientações específicas dos conteúdos apresentados página a página.

Além do livro impresso, também é disponibilizado um videotutorial de caráter complementar, que tem o objetivo de destacar elementos-chave da obra em linguagem audiovisual atrativa e simplificada para o professor.

Conheça, a seguir, as características da parte específica deste **Suplemento para o professor**.

Objetivos específicos

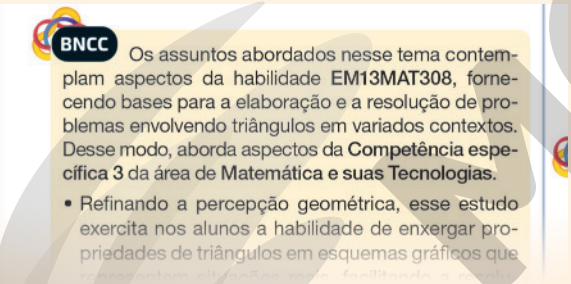
No início de cada tema são apresentados os principais objetivos que se almejam atingir no trabalho com aqueles conteúdos.


Objetivos específicos

- Utilizar o Teorema de Tales para resolver problemas em diferentes contextos.
- Reconhecer os casos de semelhança de triângulos.
- Aplicar as noções de semelhança para elaborar e resolver problemas que envolvem triângulos, em diversos contextos.

BNCC

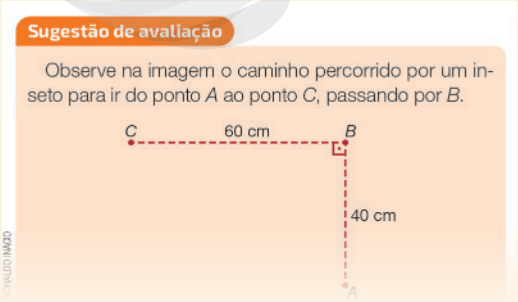
No decorrer dos temas são destacadas e comentadas algumas relações entre o que está sendo abordado no livro do aluno e o que é proposto na BNCC.


BNCC Os assuntos abordados nesse tema contemplam aspectos da habilidade **EM13MAT308**, fornecendo bases para a elaboração e a resolução de problemas envolvendo triângulos em variados contextos. Desse modo, aborda aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

- Refinando a percepção geométrica, esse estudo exercita nos alunos a habilidade de enxergar propriedades de triângulos em esquemas gráficos que

Sugestão de avaliação

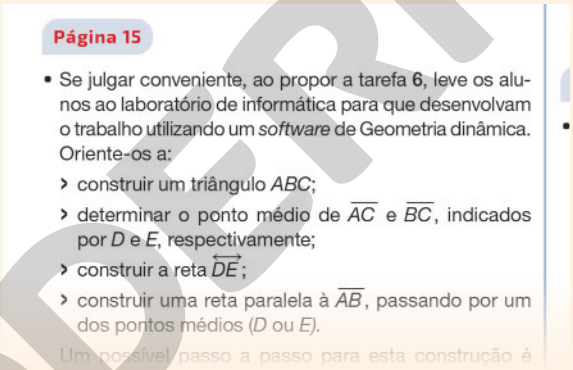
Apresenta sugestões e estratégias de avaliação para que o professor verifique a aprendizagem dos alunos em momentos oportunos.


Sugestão de avaliação

Observe na imagem o caminho percorrido por um inseto para ir do ponto *A* ao ponto *C*, passando por *B*.

Orientações página a página

As orientações e informações complementares importantes para o desenvolvimento dos conteúdos, das tarefas e das seções especiais encontram-se indicadas em tópicos, separadas de acordo com as páginas do livro do aluno.


Página 15

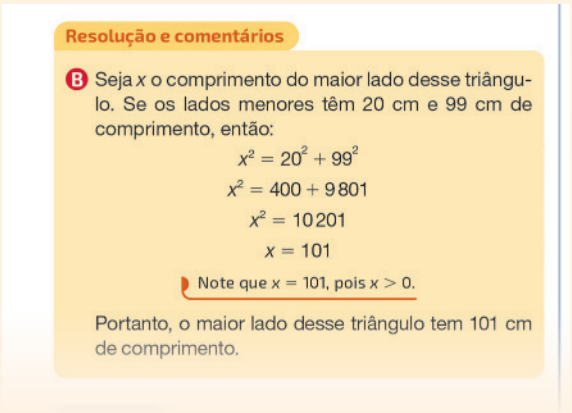
- Se julgar conveniente, ao propor a tarefa **6**, leve os alunos ao laboratório de informática para que desenvolvam o trabalho utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Oriente-os a:
  - construir um triângulo *ABC*;
  - determinar o ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, indicados por *D* e *E*, respectivamente;
  - construir a reta $\overleftrightarrow{DE}$;
  - construir uma reta paralela à $\overline{AB}$, passando por um dos pontos médios (*D* ou *E*).

Um possível passo a passo para esta construção é

Resolução e comentários

As resoluções das questões das páginas de abertura, das questões intervenção e de algumas tarefas específicas encontram-se em boxes como esse.

No decorrer do desenvolvimento dos temas, sempre que for oportuno, são apresentadas citações que enriquecem e fundamentam o trabalho com o conteúdo proposto.


Resolução e comentários

B Seja *x* o comprimento do maior lado desse triângulo. Se os lados menores têm 20 cm e 99 cm de comprimento, então:

$$x^2 = 20^2 + 99^2$$
$$x^2 = 400 + 9\,801$$
$$x^2 = 10\,201$$
$$x = 101$$

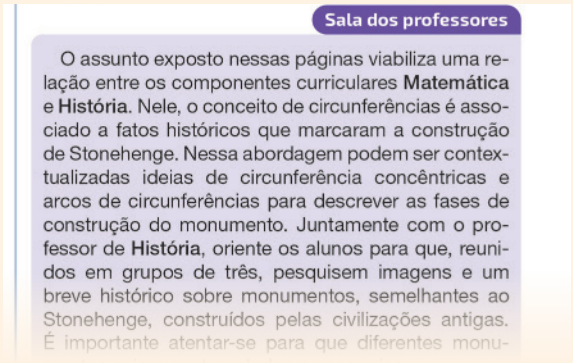
Note que $x = 101$, pois $x > 0$.

Portanto, o maior lado desse triângulo tem 101 cm de comprimento.

MODERNA

Sala dos professores

Esse boxe estará presente em abordagens e tarefas que permitam relacionar o conteúdo com outras áreas do conhecimento, apresentando sugestões e subsídios para a construção de aulas em conjunto com professores de outros componentes curriculares.

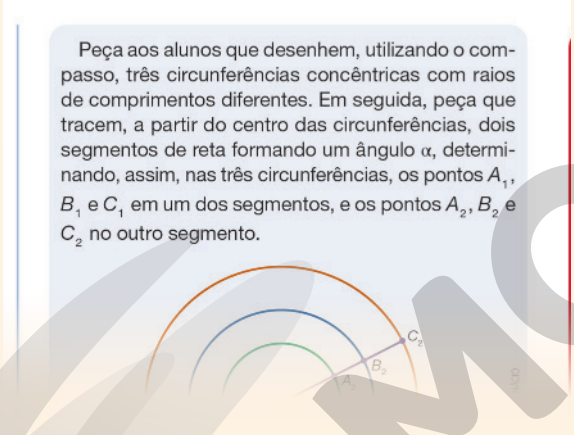


Sala dos professores

O assunto exposto nessas páginas viabiliza uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **História**. Nele, o conceito de circunferências é associado a fatos históricos que marcaram a construção de Stonehenge. Nessa abordagem podem ser contextualizadas ideias de circunferência concêntricas e arcos de circunferências para descrever as fases de construção do monumento. Juntamente com o professor de **História**, oriente os alunos para que, reunidos em grupos de três, pesquisem imagens e um breve histórico sobre monumentos, semelhantes ao Stonehenge, construídos pelas civilizações antigas. É importante atentar-se para que diferentes monu-

Tarefas extras

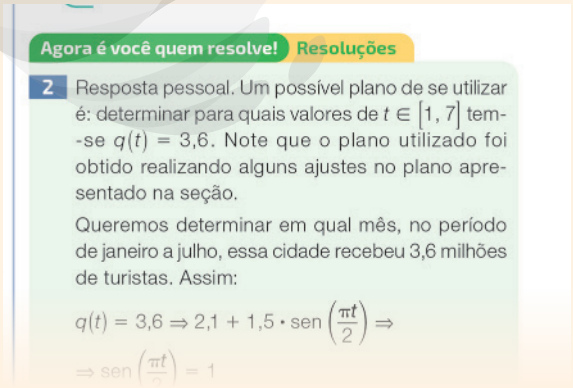
Apresenta sugestões de tarefas extras com o objetivo de complementar o trabalho com o conteúdo do respectivo tema.



Peça aos alunos que desenhem, utilizando o compasso, três circunferências concêntricas com raios de comprimentos diferentes. Em seguida, peça que tracem, a partir do centro das circunferências, dois segmentos de reta formando um ângulo α, determinando, assim, nas três circunferências, os pontos A_1, B_1 e C_1 em um dos segmentos, e os pontos A_2, B_2 e C_2 no outro segmento.

Agora é você quem resolve! **Resolução**

Apresenta as respostas da seção **Resolvendo por etapas**.



Agora é você quem resolve! **Resoluções**

2 Resposta pessoal. Um possível plano de se utilizar é: determinar para quais valores de $t \in [1, 7]$ tem-se $q(t) = 3{,}6$. Note que o plano utilizado foi obtido realizando alguns ajustes no plano apresentado na seção.

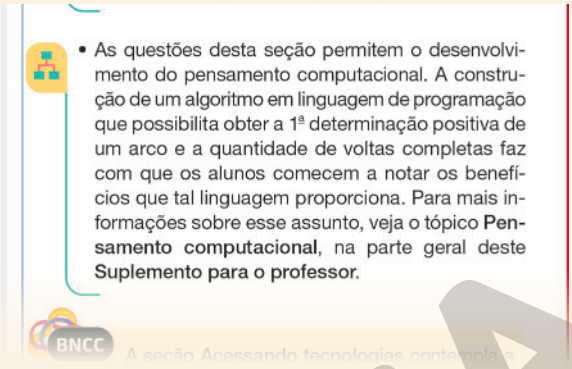
Queremos determinar em qual mês, no período de janeiro a julho, essa cidade recebeu 3,6 milhões de turistas. Assim:

$$q(t) = 3{,}6 \Rightarrow 2{,}1 + 1{,}5 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 1$$

Pensamento computacional

Selo utilizado para indicar que o texto apresenta informações a respeito do pensamento computacional.

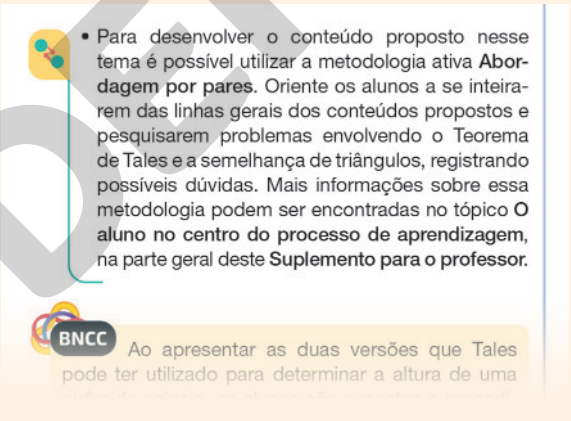


- As questões desta seção permitem o desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um algoritmo em linguagem de programação que possibilita obter a 1ª determinação positiva de um arco e a quantidade de voltas completas faz com que os alunos comecem a notar os benefícios que tal linguagem proporciona. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC A seção Acessando tecnologias contempla

Metodologia ativa

Selo utilizado para sinalizar que o texto apresenta indicações quanto ao uso das metodologias ativas.

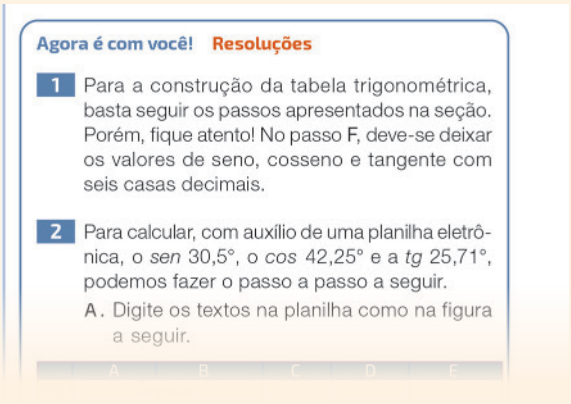


- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirarem das linhas gerais dos conteúdos propostos e pesquisarem problemas envolvendo o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos, registrando possíveis dúvidas. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Ao apresentar as duas versões que Tales pode ter utilizado para determinar a altura de uma

Agora é com você! **Resolução**

Apresenta as respostas da seção **Acessando tecnologias**.



Agora é com você! **Resoluções**

1 Para a construção da tabela trigonométrica, basta seguir os passos apresentados na seção. Porém, fique atento! No passo F, deve-se deixar os valores de seno, cosseno e tangente com seis casas decimais.

2 Para calcular, com auxílio de uma planilha eletrônica, o *sen* 30,5°, o *cos* 42,25° e a *tg* 25,71°, podemos fazer o passo a passo a seguir.

A. Digite os textos na planilha como na figura a seguir.

MODERNA

O Ensino Médio

Nos últimos anos, o Ensino Médio no Brasil passou por uma reforma que instituiu novos parâmetros e diretrizes para esse segmento. O objetivo dessas mudanças foi combater índices de evasão escolar, promovendo um ensino que atendesse às expectativas dos jovens em relação ao seu projeto de vida pessoal e profissional e que estivesse alinhado com as necessidades e os anseios desse público. Além disso, almejava-se também ampliar o engajamento desses alunos, para que pudessem desenvolver maneiras autônomas de lidar com os desafios do mundo contemporâneo.

Com base nessas novas perspectivas educacionais, é necessário compreender o Ensino Médio como uma etapa de grande importância política e social, aspecto que supera o conceito de apenas ser uma fase passageira na vida dos jovens. Na verdade, o Ensino Médio constitui-se um momento fundamental de protagonismo e de desenvolvimento pessoal. É nessa fase que os alunos ampliam suas perspectivas culturais, convivendo em um espaço de ampla diversidade de ideias e de opiniões. Também desenvolvem suas capacidades de tomada de decisão, cujo maior desafio é aprender a fazer escolhas coerentes e alinhadas com seu projeto de vida.

Assim, é fundamental que a escola do Ensino Médio desenvolva uma atitude acolhedora das juventudes, estando preparada para os desafios que essa fase exige, principalmente no que se refere à formação profissional e à construção da cidadania dos jovens. Isso requer condutas que priorizem a construção da autonomia dos alunos, que em breve estarão atuando na vida pública sem o acompanhamento de adultos. Desse modo, como podemos preparar os jovens para participar da sociedade de forma responsável?

> A experiência participativa representa uma das formas de os jovens vivenciarem processos de construção de pautas, projetos e ações coletivas. Além disso, a experiência participativa também é importante por permitir a vivência de valores, como os da solidariedade e da democracia, e o aprendizado da alteridade. O que significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças. O exercício da participação pode ser, então, uma experiência decisiva para a vida dos jovens um efetivo contraponto – em uma sociedade que, ao se individualizar, enfraquece ideias, valores e práticas relacionadas à dimensão coletiva da vida social.
>
> BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 46.

É no Ensino Médio também que ocorre a preparação mais intensa e aprofundada dos alunos para os vestibulares e os exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Algumas instituições, inclusive, aceitam alunos que não tenham completado o Ensino Médio como uma espécie de "treineiros", para testar suas habilidades e seus conhecimentos antes da prova efetiva ao final desse ciclo. Esses exames têm como objetivo verificar o desempenho e avaliar o preparo dos jovens para os desafios da vida adulta, seja no âmbito profissional, seja no social. Além disso, as avaliações em larga escala contribuem para monitorar as redes de ensino de modo a oferecer soluções educacionais viáveis por meio de políticas públicas.

Esta coleção apresenta diversos subsídios para auxiliar os alunos na preparação para esses exames, entre eles o Enem. Nas seções **Exercícios e problemas resolvidos** e **Exercícios e problemas**, por exemplo, sempre que possível, apresentamos questões extraídas diretamente do Enem e de vestibulares atuais para que os alunos possam se familiarizar com o formato das provas fornecidas por essas instituições. Além disso, há propostas de elaboração de problemas e articulações interdisciplinares e transdisciplinares, com abordagens que podem contribuir para o desempenho dos alunos em futuras avaliações.

O aluno do Ensino Médio

Existem diversas maneiras de conceituar a fase da juventude. Época de incertezas e de definição identitária, por muito tempo a juventude foi compreendida como um período de passagem, uma etapa prévia da vida adulta, marcada por uma faixa etária delimitada. Porém, de acordo com o estudioso Juarez Dayrell (2016), as pesquisas mais atuais têm demonstrado que a juventude deve ser compreendida como uma categoria socialmente construída na qual os jovens se assumem como verdadeiros sujeitos, ou seja, possuem determinada origem familiar, estão inseridos em relações sociais, apresentam uma historicidade específica, movem-se por desejos e se constituem como seres ativos e produtores de conhecimento.

> A juventude constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social, no qual o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe, por exemplo), a diversidade cultural (a cor da pele, as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero e

MODELO

de orientação afetiva e até mesmo as diferenças territoriais se articulam para a constituição das diferentes modalidades de se vivenciar a juventude.

DAYRELL, Juarez. (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016, p. 27.

Para que as relações possam ser fecundas e mutuamente respeitosas no ambiente escolar, uma opção interessante é investir no trabalho com as diversas manifestações culturais juvenis, ou seja, fazer da escola um território de produção cultural da juventude e não apenas um local de aprendizado de uma cultura externa ou "adulta". Nesse contexto, o jovem deve se identificar com as produções culturais com as quais convive, deve se sentir incluído e, principalmente, valorizado.

> Os jovens sujeitos do Ensino Médio nos trazem cotidianamente desafios para o aprimoramento de nosso ofício de educar. Entre esses desafios, encontra-se a difícil tarefa de compreensão dos sentidos os quais os jovens elaboram no agir coletivo, em seus grupos de estilo e identidades culturais e territoriais que, em grande medida, nos são apenas "estranhos" (no sentido de estrangeiros) e diferem de muitas de nossas concepções (adultas) de educação (escolar ou não), de autoridade, de respeito, de sociabilidade "adequada" e produção de valores e conhecimentos.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I - caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 20.

Realizar esse trabalho de aproximação e de valorização das culturas juvenis exige muito mais do professor. A primeira etapa é passar a compreender o jovem como um sujeito de interlocução, com o qual podemos aprender e expandir nossos horizontes culturais. Essa aproximação requer uma flexibilidade por parte dos professores, que muitas vezes terão de superar visões estereotipadas e superficiais sobre a juventude atual. Assim, deve-se considerar que os jovens não estão inseridos em uma cultura única. A juventude se constitui como categoria socialmente construída, que deve ser analisada com base no contexto de cada comunidade. Existem jovens, por exemplo, que já estão inseridos no mercado de trabalho e que vivenciam a juventude de um modo muito diferente daqueles que têm mais tempo de lazer ou de estudo.

Compreender essas múltiplas culturas juvenis que permeiam o contexto escolar faz parte do processo de inovação que tem marcado o curso educativo nos últimos anos. Em vez de "transmitirmos os saberes" aos jovens, por que não trocarmos e compartilharmos conhecimento, abrindo espaços e criando condições para que as culturas juvenis se expressem no ambiente escolar? Essas novas práticas compõem um caminho de construção coletiva do conhecimento. Sob esse ponto de vista, a aprendizagem passa a ser encarada como uma via de mão dupla, como uma troca e, assim, tende a criar um clima mais saudável e menos impositivo, sendo menos propício ao desenvolvimento de problemas indisciplinares e de relações conflituosas.

O professor

Diante desses novos desafios educacionais, que envolvem inclusive o trabalho com metodologias ativas e tecnologias, o professor assume cada vez mais o papel de mediador das relações entre os alunos e o conhecimento, orientando o caminho a ser adotado no processo de ensino e aprendizagem. Essa mediação ocorre de acordo com um planejamento bem definido das aulas, no qual são explicitadas as estratégias de engajamento e protagonismo dos alunos. Supera-se a postura de um profissional meramente transmissor de informações e almeja-se uma conduta mais interativa, que toma como base a colaboração.

> O papel do professor é mais o de curador e de orientador. Curador, que escolhe o que é relevante entre tanta informação disponível e ajuda a que os alunos encontrem sentido no mosaico de materiais e atividades disponíveis. Curador, no sentido também de cuidador: ele cuida de cada um, dá apoio, acolhe, estimula, valoriza, orienta e inspira. Orienta a classe, os grupos e cada aluno.

MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Orgs.). Coleção Mídias Contemporâneas. *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. v. II. Ponta Grossa: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. p. 24.

Sabe-se que no Brasil as turmas de Ensino Médio são diversificadas e são formadas por grupos de alunos que possuem diferenças nos modos de aprender. O processo de ensino e aprendizagem é complexo e envolve diversas dimensões da vida dos sujeitos. Knud Illeris (2013), por exemplo, descreve a aprendizagem em três dimensões: a de conteúdo, a de incentivo e a de interação. A dimensão de **conteúdo** envolve a aprendizagem cognitiva, relacionada aos conhecimentos que são internalizados. Já a dimensão de **incentivo** se relaciona às sensibilidades, ao equilíbrio mental e às motivações que instigam as pessoas no aprendizado. Por fim, a dimensão de **interação** é aquela que está ligada à sociabilidade e à comunicação do indivíduo.

Desse modo, uma maneira de o professor lidar com a diversidade em sala de aula é identificar em qual dimensão de aprendizagem estão as defasagens dos alunos. Com esse diagnóstico, pode-se, então, desenvolver estratégias adequadas ao tipo de dificuldade específica apresentada por eles. Por exemplo, em casos de defasa-

REPRODUÇÃO

gem na dimensão de interação, o professor poderá desenvolver estratégias de trabalho em grupo e dinâmicas que exijam a troca de ideias. Quando o problema for em relação à dimensão de incentivo, o professor poderá repensar as maneiras pelas quais aquele conteúdo instiga os alunos e se relaciona com o cotidiano deles.

Nesse sentido, sabe-se que não é fácil a adequação aos novos parâmetros que têm sido delimitados na educação no século XXI. Muitos professores vão precisar de um período de adaptação para renovar e implementar suas práticas. Para contribuir com esse processo, sugerimos a seguir algumas condutas que podem ser utilizadas durante o planejamento e durante as aulas com turmas do Ensino Médio.

- Observar os alunos de modo personalizado, adequando os desafios e as propostas às características de cada um e procurando colocar a diferença como um agregador e um ponto positivo em relação ao coletivo.
- Organizar planejamentos coletivos e individuais para lidar com as turmas como um todo e também de modo personalizado.
- Relacionar os temas e conteúdos à realidade próxima dos alunos, problematizando as experiências vivenciadas e alinhando os conteúdos aos interesses da turma.
- Dar importância à significação dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula.
- Propor constantemente diferentes maneiras de autoavaliação, permitindo aos alunos um momento de reflexão a respeito de suas atividades e seu aprendizado e, também, permitindo ao professor avaliar suas práticas em sala de aula.
- Desenvolver flexibilidade para improvisar, quando necessário, e para adequar as propostas metodológicas à realidade de cada turma.
- Acompanhar a evolução de cada grupo ou aluno, avaliando-a sob uma perspectiva processual.
- Evitar propostas que abordem capacidades meramente interpretativas e que não desafiem os alunos a desenvolver sua criatividade e seu pensamento crítico.
- Inserir opiniões e sugestões dos alunos no planejamento das tarefas, considerando suas dificuldades e preferências.
- Capacitar os alunos em determinadas atividades com as quais eles possam não estar acostumados, como a realização de uma pesquisa bem fundamentada ou a produção de um texto-síntese.
- Gerir o tempo de modo personalizado, observando os ritmos de aprendizagem específicos das turmas.
- Aderir a dinâmicas que alterem o posicionamento tradicional das carteiras em sala de aula, promovendo atividades em grupo e explorando os diversos ambientes da escola.
- Propor trabalhos em grupos, para que os alunos desenvolvam suas capacidades de expressão e de socialização.

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a adolescência é o período de 10 a 19 anos de idade (BRASIL, 2018d). Nessa etapa da vida, o indivíduo ainda se encontra em desenvolvimento e vários fatores podem interferir em seu comportamento e em sua saúde mental. Trata-se de um período de mudanças e descobertas, no qual o jovem constrói e reconstrói sua identidade. Fatores emocionais associados à realidade social, econômica, histórica e cultural tornam essa parcela da população muito vulnerável mental e emocionalmente.

Entre os problemas relacionados à saúde mental que mais afetam os jovens, de acordo com entidades internacionais, está a violência familiar, o *bullying*, a depressão, a ansiedade e a dependência química.

Os casos de *bullying*, por exemplo, envolvem relações de poder e dominação que provocam violência psicológica e, muitas vezes, física, sem motivos aparentes. Em alguns casos, os indivíduos agressores recebem punição, mas é necessário promover um trabalho de conscientização para que esses jovens possam refletir sobre suas ações e analisar os impactos emocionais que elas acarretam para as vítimas. Os jovens que praticam *bullying* geralmente são atraídos por um imaginário preestabelecido de padrões de beleza, comportamento, consumo e configurações sociais. Por isso, as ações de combate a essa prática devem contribuir para a desconstrução desses padrões e para o respeito à diversidade.

Além disso, é preciso analisar o contexto familiar desses jovens, que, muitas vezes, vivem em ambientes onde há violência e/ou negligência. Por essas razões, é imprescindível o papel da escola no cuidado com a saúde mental dos alunos, combatendo ativamente todos os modos de discriminação e violência.

Para isso, são necessários programas para prevenir o *bullying* e qualquer outro tipo de violência, além do abuso de substâncias nocivas. Esses programas devem ter a participação da escola, dos familiares, da comunidade e de profissionais, como psicólogos e psicopedagogos. Tal união pode contribuir para detectar os sinais de problemas envolvendo a saúde mental dos alunos e para

MODERNA

tomar as medidas necessárias antes que esse tipo de comportamento resulte em alguma consequência grave.

Como a escola pode contribuir na promoção da saúde mental dos alunos?

A escola deve ser um espaço de disseminação do respeito e da proteção social dos jovens, atuando com a participação ativa das famílias. Nela, os alunos podem ser organizados em grupos a fim de possibilitar a troca de experiências em debates mediados por um psicólogo. Assim, os jovens tendem a se sentir mais à vontade para discutir e relatar sua realidade, compartilhando suas emoções e descobrindo os gatilhos que os fazem reagir com violência, ansiedade ou tristeza, por exemplo. Trata-se de uma oportunidade para trabalhar o autoconceito, a autoimagem e a autoestima dos jovens.

Averigue a possibilidade de a escola oferecer espaços em horários alternativos para que os alunos desenvolvam atividades extracurriculares, como esportes, oficinas de teatro, atividades de cuidado com a escola e com os colegas, oficinas de dança, gincanas, competições e simulados. Nesses momentos, é importante incluir alunos de diferentes perfis. A convivência é essencial para o desenvolvimento do respeito mútuo e da empatia, colaborando com a saúde mental deles.

Atividades envolvendo atitudes solidárias podem contribuir para que os alunos se coloquem no lugar de outras pessoas, desenvolvendo a empatia. Uma sugestão é promover campanhas de coleta de produtos com o intuito de disponibilizá-los às pessoas vulneráveis e em situação de necessidade assistidas por instituições sociais do município.

Outras atividades podem envolver o futuro dos alunos, identificando os potenciais de cada um a fim de construir um projeto de vida. Mostrar que suas atitudes hoje influenciam o futuro incentiva-os a refletir sobre suas escolhas e opções. A escola, então, tem o papel de ajudá-los a ultrapassar as barreiras com atividades que envolvam a autoestima, o autoconhecimento e o autocuidado.

O professor deve ficar atento aos sinais que denotem mudança de comportamento dos alunos e que demandem o encaminhamento para avaliação da equipe formada pelos profissionais que cuidam da saúde mental, ações que contribuem para prevenir transtornos. Para isso, é muito importante que o professor converse com a administração da escola sobre a possibilidade de promover eventos de formação continuada relacionada à saúde mental.

O convívio social em sala de aula

A convivência social é um aspecto importante na vida de qualquer indivíduo. Vivemos constantemente em interação com outras pessoas e dependemos delas em muitas atividades do dia a dia. Por isso, é necessário ter harmonia no convívio social, com proveito mútuo e respeito constante. Não ter preconceitos, compreender as necessidades do outro, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para criar um ambiente propício para o crescimento em conjunto exige, além de boa vontade, ações de inclusão e integração comunitária.

Na socialização humana, em especial no ambiente escolar, lidamos com indivíduos de diferentes perfis, com diversas crenças e opiniões. Respeitar essas diferenças é dever de cada um e a palavra-chave, em todos os casos, é empatia.

Comumente, a escola é um dos primeiros lugares onde boa parte dos jovens tem contato com outras pessoas. Assim, entre as tarefas do professor, está a necessidade de orientar e instruir os alunos a ser empáticos, desenvolvendo a tolerância, a sensibilidade e, principalmente, o respeito para com os demais. Por meio de práticas saudáveis e bons exemplos, é possível que o professor consiga influenciar seus alunos em um sentido positivo de comportamento socialmente responsável, o qual poderá vir a ter impactos benéficos na sociedade como um todo.

Ações que podem facilitar a construção de um ambiente com essas características incluem, por exemplo, conversas amistosas nas quais, um a um, os alunos possam expressar suas opiniões e compartilhar suas emoções sobre os mais variados assuntos. Tal prática pode ser incrementada com atividades complementares, como a solicitação de pesquisas extraclasse, para posterior debate construtivo, a respeito de temas como as relações familiares, a importância dos vínculos de amizade, a aceitação de ideias contrárias às nossas e o respectivo respeito, o pluralismo cultural na escola e no ambiente de trabalho, a promoção da paz na comunidade escolar, entre outros.

A Matemática, nesse contexto, pode ser uma ferramenta para analisar dados acerca da distribuição de renda ou das discriminações em razão de etnia, sexo ou crença, investigando e interpretando as porcentagens de cada grupo sociocultural em diferentes estudos estatísticos. Com base em análises quantitativas, é possível discutir os desafios que a sociedade enfrenta rumo à efetividade da justiça social, que pode ser um ponto de partida para a troca de ideias e o autoconhecimento por parte dos alunos, inclusive com o envolvimento do professor. Para isso, noções de proporcionalidade, de causas e consequências lógicas e até mesmo da objetividade dos números na descrição dos fenômenos naturais, incluindo os socioeconômicos, são fatores importantes para a compreensão da realidade e, também, para aumentar a consciência dos jovens de modo a auxiliá-los no embasamento de argumentos.

Ademais, sempre que julgar conveniente, o professor pode conversar com os alunos, dispondo-se a ouvi-los e incentivando-os a expressar suas ideias. Atitudes desse tipo favorecem o respeito e a admiração mútuos, contribuindo para o engajamento saudável e natural em sala de aula.

EDITORIAL

Além disso, é importante conversar com os alunos sobre traçar planos em busca de sonhos e alcançar os meios necessários para consolidá-los pelo próprio esforço. Justamente por essa razão, também estão entre seus maiores desafios.

Nesse processo dinâmico, muitas vezes sem fim, a educação assume um papel importantíssimo, em especial nas peculiares etapas de transição entre a infância e a vida adulta. Ao lado da família, da sociedade e da autodeterminação do próprio sujeito, a escola é o fator mais importante na produção desse despertar de consciência e de responsabilidade no jovem, instruindo-o, tanto quanto possível, na estruturação gradativa e na viabilização sensata de um projeto de vida tão necessário. Tal projeto, constituindo o alicerce em que o futuro do jovem será edificado, deve levar em consideração os múltiplos âmbitos interconectados em que a vida se manifesta: pessoal, educacional, profissional, social, político, moral, intelectual e emocional.

O anseio por objetivos de vida maiores e mais realistas do que aqueles dos primeiros sonhos da infância costumam despontar com ímpeto durante a juventude, e normalmente o fazem de maneira desordenada, cheia de agitação, ingenuidades, inseguranças e receios. Assim, a escola deve se preocupar com a formação integral dos alunos e assumir o compromisso de lidar adequadamente com essas questões, elegendo a construção da autonomia como o eixo central em torno do qual organizar suas atividades.

Sendo a última etapa da Educação Básica, no Ensino Médio tais questões devem ser trabalhadas pelo professor com maior atenção e de maneira mais explícita, ora no contexto das tarefas do componente curricular, ora em conversas com a turma, mas sempre por meio de exemplos e de aconselhamentos que fomentem o delineamento de planos de vida e o recrudescimento do caráter.

Nesse sentido, a trajetória escolar deve ser capaz de dialogar com os jovens, desenvolvendo neles habilidades e conhecimentos que incentivem atitudes efetivas para lidar com os desafios da sociedade, promovendo a maturação de valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida. Além de prepará-los para o mercado de trabalho, fornecer orientação vocacional e capacitá-los para eventuais estudos mais complexos no ensino superior ou para aperfeiçoamento técnico em cursos profissionalizantes, conforme as circunstâncias de cada caso.

O estabelecimento do projeto de vida, como já frisado, é um processo dinâmico que conta com diálogos entre jovens, família, amigos, escola e sociedade. Contudo, a liberdade e o protagonismo são exclusivos do indivíduo: é ele que escolherá sua profissão, decidirá constituir família ou não, e vai direcionar sua atenção e seus esforços para a área de seu interesse. Desse modo, o projeto de vida que os alunos almejam, projetam e redefinem para si ao longo de suas trajetórias, praticamente coincidindo com o desenvolvimento da própria identidade, é apenas motivado e instruído pela escola, nunca imposto forçosamente por ela. As escolhas devem ocorrer naturalmente em uma multiplicidade de influências, experiências e aprendizagens que enriquecem à medida que se tornam plurais, de tal modo que os alunos de diferentes perfis aprendem uns com os outros por interação mútua e convívio constante, mediados – e não determinados – pela família, pelo professor, pela escola como um todo e, ainda mais amplamente, pelas conjunturas socioculturais nas quais o jovem está inserido.

É, enfim, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de modo controlado, as interações com o outro e com o mundo, vislumbrando, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e futuro. É nessa riqueza de motivação que o jovem deve traçar o próprio caminho, explorando seus talentos e potencialidades, assumindo deveres e responsabilidades, aprendendo a fruir e a conter desejos, a dosar razão com emoção, a harmonizar lazer com labor, a mesclar estudos com diversão, disciplina com curiosidade. Com isso, ele estará apto a constituir-se um ser humano íntegro, seguro de si, cônscio de quem é, dos próprios méritos e limitações, atento ao seu papel no mundo e ativo quanto às necessidades de seu tempo e de sua comunidade.

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Com o intuito de substituir o currículo do Ensino Médio isolado em componentes curriculares, a BNCC apresenta, para essa etapa, as aprendizagens essenciais distribuídas por áreas do conhecimento. Assim, para cada área são definidas competências específicas que se relacionam diretamente com as habilidades da área. Essa estrutura constitui a formação geral básica que, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), "[...] é composta por competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e articuladas como um todo indissociável, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social [...]" (BRASIL, 2018b).

Além de estabelecer que os conteúdos sejam apresentados por área (formação geral básica), a BNCC prevê, tendo como documento orientador as DCNEM, os itinerários formativos, em que os alunos poderão escolher, por exemplo, a formação técnica como maneira de complementar sua formação escolar. Veja o esquema a seguir.

EXEMPLAR



BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 469. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Com essa estruturação, a BNCC do Ensino Médio articula-se às habilidades e competências do Ensino Fundamental, com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral dos alunos, possibilitando, assim, a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

As áreas do conhecimento

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área e supõe um trabalho interdisciplinar e transdisciplinar. Isso requer um currículo que integre não só os conteúdos dos componentes de determinada área (interdisciplinaridade), mas também os componentes de outras áreas, estabelecendo relações transdisciplinares. As áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares são divididos na BNCC conforme apresenta o quadro a seguir.

ÁREAS DO CONHECIMENTO	COMPONENTES CURRICULARES
Linguagens e suas Tecnologias	- Arte - Educação Física - Língua Inglesa - Língua Portuguesa
Matemática e suas Tecnologias	- Matemática
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	- Biologia - Física - Química
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	- Filosofia - Geografia - História - Sociologia

As dez competências gerais da Educação Básica, previstas na BNCC, têm como principal objetivo formar cidadãos conscientes do seu papel na sociedade e que saibam agir de maneira justa. Essas competências se desdobram na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes.

1 – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 – Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 – Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 – Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

MODERNA

5 – Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 – Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 – Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 – Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 – Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para que os alunos desenvolvam as competências gerais é preciso, primeiramente, adquirirem as aprendizagens essenciais de cada área, por meio das habilidades, desenvolvendo, também, os princípios das competências específicas.

Esta coleção foi organizada de maneira a contemplar as habilidades e as competências específicas relacionadas à área do conhecimento **Matemática e suas Tecnologias**, bem como contemplar as competências gerais propostas na BNCC. Essas relações estão presentes nas abordagens dos conteúdos, nas teorias, nas seções especiais e nas tarefas apresentadas. O livro do aluno aborda as relações entre as habilidades e/ou competências, de maneira que os conteúdos de Matemática estão destacados, permitindo que tanto os alunos quanto o professor confiram como esses elementos são desenvolvidos. Já o **Suplemento para o professor** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências e os conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**, assim como as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, auxiliando o professor a verificar como esses itens podem ser desenvolvidos, a fim de contribuir com a formação integral dos alunos.

As diferentes maneiras de trabalhar com esses elementos serão explicitadas no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**. Além disso, no tópico **A BNCC e a coleção** há um mapeamento em que são apresentados os elementos da BNCC desenvolvidos em cada tema deste volume.

Temas contemporâneos transversais

Os temas contemporâneos transversais não são novidade nos documentos oficiais para a Educação Básica. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997, eram chamados **temas transversais** e pressupunha-se que fossem incluídos nos currículos das escolas. Contudo, como os PCNs não tinham caráter obrigatório e os seis temas listados não eram pautados em nenhuma legislação ou norma específica, nem sempre essa inclusão acontecia no contexto escolar.

Com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) de 2013, os Temas transversais receberam o nome de **eixos temáticos** ou **eixos norteadores**, e pressupunham que os professores e os alunos escolhessem temas/assuntos afeitos ao componente curricular que desejassem estudar, contextualizando-os com outros. O trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, por meio de eixos temáticos, tornou-se obrigatório a fim de conduzir os alunos na reflexão sobre a vida em sociedade.

Com a homologação da BNCC, em 2018, eles passaram a ser chamados **temas contemporâneos** e tornaram-se uma referência obrigatória para a elaboração dos currículos. Em 2019, com a publicação do documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC*, passaram a ser chamados **temas contemporâneos transversais** (TCTs). Essa mudança de nomenclatura é pautada na BNCC, que afirma: "[...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma **transversal** e integradora." (BRASIL, 2018a, grifo nosso).

Na BNCC, os TCTs foram distribuídos em seis áreas temáticas, conforme apresentado no quadro a seguir.

MODERNA

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS					
CIÊNCIA E TECNOLOGIA • Ciência e tecnologia	**MEIO AMBIENTE** • Educação ambiental • Educação para o consumo	**ECONOMIA** • Trabalho • Educação financeira • Educação fiscal	**MULTICULTURALISMO** • Diversidade cultural • Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	**CIDADANIA E CIVISMO** • Vida familiar e social • Educação para o trânsito • Educação em direitos humanos • Direitos da criança e do adolescente • Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso	**SAÚDE** • Saúde • Educação alimentar e nutricional

Os TCTs não pertencem a nenhuma área específica do conhecimento e devem ser abordados por todas elas de maneira integrada e complementar, possibilitando aos alunos a melhor compreensão da sociedade em que vivem. Seguindo essa premissa, e com o objetivo de orientar o professor no trabalho com os TCTs, esta coleção aborda esses temas por meio de recursos e tarefas, tanto no livro do aluno quanto neste **Suplemento para o professor**. Essas abordagens percorrem as áreas do conhecimento e proporcionam aos alunos a reflexão sobre seu papel na sociedade, contribuindo para sua formação cidadã.

Orientações didáticas e metodológicas

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção

Esta coleção propõe a contextualização sociocultural do aluno, tornando-o protagonista de seu processo de aprendizagem. Embora a Matemática seja, "[...] por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados [...]" (BRASIL, 2018, p. 265), o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática tem importância considerável e deve fazer parte, sempre que possível, das tarefas discentes, a fim de produzir questionamentos saudáveis, levantar conjecturas e buscar contra-exemplos, entre outras situações. Nesse sentido, em diversos momentos desta coleção a condução dos conceitos busca ferramentas da tendência socioetnocultural, amparada na Etnomatemática, que propõe troca de conhecimento entre professor e aluno, incentivando sua autonomia crítica, criativa e transformadora na aprendizagem de um saber prático e dinâmico. Além disso, a realidade do aluno é, muitas vezes, problematizada e tomada como contexto para explorar novos conceitos e ampliar os conhecimentos prévios deles.

O ponto de partida da tendência socioetnocultural está pautado nos "problemas oriundos do meio cultural, das práticas cotidianas. Professor e alunos trocariam seus conhecimentos [...]. Isso se evidencia pelo trabalho pedagógico a partir da abordagem de temas envolvendo o conhecimento cotidiano dos alunos." (ZIMER, 2008, p. 86-87).

Dessa maneira, a Matemática é uma ciência prática e dinâmica, produzida histórica e culturalmente em diversos contextos sociais, em que sua história desmitifica a realidade e estabelece estratégias que incentivam e facilitam as ações dos alunos, contribuindo para a construção de uma consciência cidadã e democrática. Além disso, as trocas de conhecimentos entre o professor e os alunos por meio de metodologias ativas objetivam a formação crítica, pessoal e social.

Ademais, os recursos tecnológicos são ferramentas potenciais de ensino ao apoiar a autoprodução de conhecimentos por parte dos alunos.

Sabe-se que os resultados matemáticos são obtidos por meio de deduções pautadas em axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados ou proposições. Grande parte do ensino atual está relacionada à mera reprodução de algoritmos. No entanto, não podemos reduzir a Matemática à simples aplicação de fórmulas e à resolução de exercícios, pois são procedimentos mecânicos, que não possibilitam o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno. Com o objetivo de mudar essa abordagem em sala de aula, algumas concepções no ensino de Matemática podem ser adotadas, visando tornar o aluno protagonista do próprio processo de aprendizagem. Entre elas, temos a Etnomatemática, a História da Matemática, a Investigação matemática, a Resolução de problemas e a Modelagem matemática.

No Brasil, o precursor da Etnomatemática é o professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio. Etimologicamente, Etnomatemática significa a maneira, a técnica ou a arte (*tica*) de explicar, conhecer e entender (*mathema*) a realidade natural e sociocultural em que o indivíduo está inserido (*etno*). Nesse sentido, o autor a concebe como "o reconhecimento que as ideias matemáticas, substanciadas nos processos de comparar, classificar, quantificar, medir, organizar e de inferir e de concluir, são próprias da natureza humana. Em todo ser humano, cérebro e mente se organizam para execução desses processos" (D'AMBROSIO, 2008, p. 164). Para D'Ambrosio, a Matemática é espontânea e individual, motivada e desenvolvida de acordo com o ambiente social e cultural em que o indivíduo se encontra. Ao sugerir um vínculo entre a Etnomatemática e a sala de aula, D'Ambrosio argumenta que "a proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. E através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos

CONTEMPORÂNEA

nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural" (D'AMBROSIO, 2015, p. 46-47).

Nesta coleção, a Etnomatemática é trabalhada em alguns contextos e tarefas que apresentam o conhecimento matemático atrelado a diversas culturas, oportunizando momentos de reflexão quanto ao papel social que a Matemática representa nas relações humanas. Por meio dessa abordagem, é esperado que os alunos descubram métodos úteis para resolver, de maneira eficaz, problemas em contextos não tão comuns à própria realidade. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, são apresentadas diversas situações que permitem ao professor promover, junto aos alunos, um debate acerca da importância da Etnomatemática.

A História da Matemática, como uma tendência de ensino, excede a descrição de fatos históricos ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. Esse ramo envolve a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático, favorecendo a contextualização dos objetos de conhecimento. Segundo Lopes e Ferreira (2013), uma dinâmica interessante para introduzir um novo conteúdo em sala de aula é proporcionar aos alunos o contato com o desenvolvimento histórico desse conceito, apontando, sempre que possível, quais eram as condições sociais, econômicas e políticas que, possivelmente, levaram ao surgimento daquela ideia. Para Miguel e Miorim (2011), o professor pode buscar na História da Matemática o apoio de que necessita para atingir os objetivos pedagógicos que levem os alunos a perceber:

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.
>
> MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. p. 53.

Nesta coleção, a História da Matemática é abordada, sempre que oportuno, por meio de situações motivadoras, que propiciam o trabalho com os aspectos históricos dos conceitos envolvidos. Tais situações podem ser encontradas tanto no decorrer das teorias quanto nos enunciados das tarefas propostas.

A Investigação matemática, por sua vez, consiste no trabalho com situações abertas, isto é, situações em que a questão principal não está bem definida. Visto que os alunos podem tomar diferentes pontos de partida, é provável que os resultados obtidos também sejam diferentes ao final do processo de investigação. Para Ponte, Brocado e Oliveira (2016), a Investigação matemática pode ser concebida como uma atividade de ensino e aprendizagem que favorece "o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016, p. 23). O desenvolvimento de atividades de investigação envolve quatro momentos distintos: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016). Em um primeiro momento, os alunos devem reconhecer e explorar a situação-problema proposta, além de formular questões que serão investigadas no decorrer desse processo. Em um segundo momento, eles são levados a organizar os dados coletados e propor conjecturas com base nas informações obtidas até então. Depois, eles devem testar tais conjecturas, verificando sua validade e reformulando-as, caso necessário. Por fim, devem justificar essas conjecturas, avaliando o raciocínio desenvolvido e os resultados obtidos.

Nesta coleção, a Investigação matemática é trabalhada em contextos nos quais os alunos são levados a: investigar algoritmos e representá-los por meio de um fluxograma; elaborar enunciados de problemas, nos quais eles devem investigar problemas parecidos que envolvam os conceitos estudados, tomando-os como base para criar uma nova situação; investigar propriedades matemáticas e estabelecer relações entre diferentes conceitos, de modo a formular conjecturas e validá-las sempre que necessário; entre outros casos.

Outra tendência no ensino de Matemática é a Resolução de problemas, que consiste em trabalhar com situações cujos procedimentos que permitem sua resolução não estão predefinidos. Em primeiro lugar, é preciso definir o conceito de problema. Para Onuchic (1999), problemas são situações nas quais não se sabe o que fazer, mas há interesse em solucioná-las. Em outras palavras, são situações que levam o aluno a pensar em algum procedimento de resolução que ainda não está bem definido. A autora ainda destaca que, na abordagem da Resolução de problemas, o aluno, por um lado, aprende Matemática para resolver problemas e, por outro, aprende Matemática resolvendo problemas. Polya (1999), ao tratar da Resolução de problemas no ensino de Matemática, propõe uma heurística de resolução, isto é, resolver um problema consiste em seguir determinadas etapas. O primeiro passo é compreender o problema interpretando o enunciado. Em seguida, elabora-se um plano de resolução, no qual é possível identificar procedimentos mate-

COPEIA

máticos que podem ser úteis. Definido o plano, deve-se colocá-lo em execução, encontrando uma solução para o problema. Por fim, a última etapa consiste na comparação dos resultados obtidos com o enunciado do problema, verificando todos os procedimentos utilizados e analisando se a solução é consistente com o que foi solicitado.

De acordo com a BNCC:

> [...]
>
> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.
>
> No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.
>
> Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 535. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Nesta coleção, a Resolução de problemas é abordada na seção **Resolvendo por etapas**, em que são apresentadas situações que complementam os conteúdos trabalhados no livro do aluno. Por meio de orientações específicas detalhadas em algumas etapas, os alunos são levados a determinar a resposta do problema proposto. Dependendo do que o professor julgar conveniente, o trabalho com essa seção poderá ser desenvolvido individualmente ou em grupos.

As atividades de cunho predominantemente investigativo, que não possuem procedimentos de resolução previamente determinados, não se restringem apenas à Resolução de problemas ou à Investigação matemática. A Modelagem matemática, enquanto tendência de ensino, também tem como base as atividades investigativas. Porém, o que a diferencia das outras tendências é o fato de que as atividades abordam situações do mundo real, em contextos próximos à realidade dos alunos. A Modelagem matemática pode ser considerada uma alternativa pedagógica, que aborda situações não matemáticas, isto é, reais, por meio da Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nesse sentido, ao trabalhar com uma atividade na perspectiva da Modelagem matemática, os alunos têm como ponto de partida uma situação-problema cujo contexto está relacionado ao mundo real e cujos dados só serão conhecidos por meio da coleta de informações. Essa etapa leva os alunos a elaborar problemas que serão investigados por meio da Matemática, resultando em um modelo formado por um sistema conceitual expresso em linguagem matemática. A construção desse modelo matemático requer que os alunos criem estratégias que os auxiliem na resolução do problema, mesmo que tais estratégias não sejam determinadas *a priori*. Por fim, é necessário que eles determinem a resolução do problema por meio do modelo matemático elaborado, cuja resposta será confrontada com o enunciado, buscando possíveis divergências de valores. Essa interpretação do resultado pode resultar em uma solução que satisfaça o problema ou, então, em uma solução que não seja condizente com as informações previamente apresentadas. Nesse último caso, é necessário orientar o aluno para que retome os procedimentos a fim de encontrar o erro cometido e, assim, executar novamente os procedimentos com o intuito de encontrar a solução correta. Esse tipo de atividade, além de proporcionar uma aprendizagem significativa, pode causar motivação nos alunos, visto que são estudadas situações de seu cotidiano. O desenvolvimento de atividades sob a luz da Modelagem matemática exige que o professor desempenhe o papel de orientador, tornando o aluno o próprio protagonista de seu processo de aprendizagem.

Apesar das diferentes características entre as tendências citadas, todas elas destacam o papel do professor distinto do modelo usual de ensino. Quando inserido em atividades com as características descritas, ele deve se tornar um mediador do ensino, no sentido de fazer com que os alunos utilizem suas habilidades e técnicas na resolução dos problemas e/ou situações que surgirem. Nesse sentido, há dois caminhos que podem ser percorridos: primeiro, o professor encaminha os alunos na resolução do problema por meio de dicas e orientações que, na verdade, não os auxiliam no desenvolvimento do raciocínio crítico; segundo, o professor, por meio de questionamentos, auxilia os alunos na resolução da situação proposta sem revelar a solução do problema inicial. Em qualquer caso, cabe ao professor utilizar todo o conhecimento relacionado à sua prática pedagógica para refletir acerca do caminho mais adequado para aquela situação, de acordo com o trabalho que estiver sendo desenvolvido.

EM ABERTURA

O computador e o ensino da Matemática

O advento da tecnologia beneficiou diversos setores importantes da nossa sociedade, um deles foi a educação. Os computadores, celulares, *tablets* e outros dispositivos eletrônicos estão presentes em qualquer ambiente, inclusive na sala de aula. Assim, é de se esperar que tais equipamentos passem a fazer parte do cotidiano escolar dos alunos, contrariando grande parte da população que considera instrumentos escolares apenas a lousa, o giz e o livro didático.

Apesar da constante presença em diversos setores e do comprovado auxílio de um computador a um ambiente escolar, muitos professores ainda apresentam certa resistência à sua implementação na sala de aula. Enquanto alguns encaram os equipamentos tecnológicos como eficazes transmissores de conhecimento (informática na educação), outros ainda acreditam que deveria ser criado um componente curricular específico no currículo escolar dos alunos com o intuito de auxiliá-los a manipular tais equipamentos (educação informática). Mas qual seria a diferença entre esses dois conceitos?

De maneira geral, o objetivo da educação informática é preparar o indivíduo para o mercado de trabalho, ensinando-lhe alguns conceitos computacionais, os fundamentos sobre como um computador funciona e a utilização de alguns *softwares* para trabalhos específicos. Contudo, esse tipo de serviço ainda é ofertado pelas escolas de informática em algumas localidades. Já em relação à informática na educação, o computador assume outro papel: sua inserção na rotina escolar tem participação no processo de ensino e aprendizagem. Nesse caso, é possível obter e trocar informações, desenvolver conceitos, entre outras possibilidades.

Focando no segundo conceito, informática na educação, podem surgir algumas perguntas que merecem reflexão.

- De quais maneiras é possível inserir o computador no ambiente escolar?
- Que tipo de contribuição esse instrumento pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem?
- Quais são os *softwares* mais adequados para o trabalho em sala de aula?
- Que cuidados devemos ter para que o computador seja uma ferramenta efetiva utilizada para fins educativos?

As respostas para essas e outras perguntas devem surgir de acordo com o planejamento do projeto pedagógico da escola, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

O uso de um computador como recurso didático requer muito mais do que a simples instalação desse equipamento e de como os professores farão uso dele. É necessário que eles sejam capazes de extrair todo o potencial desse equipamento no ambiente escolar. Com o objetivo de alcançar resultados cada vez mais satisfatórios, ao trabalhar com o auxílio da tecnologia, o professor deve explorá-la como uma ferramenta pedagógica capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. É importante enfatizar que, diante de todas essas transformações, o professor em sala de aula deixa de ser apenas um transmissor de informações para ser mediador do processo de ensino e aprendizagem.

> Os recursos computacionais em si mesmos, quando amplamente dominados pelo professor, não são suficientes para garantir uma ação educacional diferenciada, se não estiverem claras e fundamentadas as teorias. Assim, além da necessidade de saber lidar com o computador, o professor deve entregar-se ao processo de construir para si mesmo um novo conhecimento, incorporando não somente os princípios que estão sendo atualmente desenvolvidos sobre informática e educação, mas acima de tudo, passando pelas considerações teóricas sobre a aprendizagem que melhor explicam a aquisição do conhecimento e o desenvolvimento cognitivo. Trata-se de dominar o conhecimento científico de uma maneira ampla e necessária para o seu próprio aprimoramento intelectual.

OLIVEIRA, 2007, p. 59, apud FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Ponta Grossa. *Anais* [...]. Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1023.

Em certos momentos, especificamente nas aulas de Matemática, a utilização de alguns *softwares* pode facilitar algumas dinâmicas em sala de aula ou propiciar a exploração de algo que seria inviável sem esses recursos. Os *softwares* contribuem de maneira significativa no processo de ensino e aprendizagem, pois são interativos, promovem maior abertura para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, estimulam a pesquisa e auxiliam na construção de um saber coletivo. Portanto, quanto maior a gama de *softwares* distintos conhecidos pelo professor, mais rica, dinâmica e produtiva será a aula ministrada.

> [...] Inovações didáticas resultantes da utilização do computador podem ser ilustradas por *softwares* destinados ao ensino da geometria, incorporando o recurso do movimento e da simulação na representação de conceitos. Essa é uma novidade, uma vez que o movimento é um recurso mais próximo da flexibilidade da representação por imagens mentais, restritas ao cérebro humano.
>
> [...]

PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 40-41.

MODERNA

Nesta coleção, alguns temas relacionados ao uso do computador em sala de aula são abordados em diversos momentos. Por exemplo, na seção **Acessando tecnologias** são apresentados *softwares* e outros recursos tecnológicos que complementam o ensino dos conteúdos abordados no livro do aluno. O trabalho com essa seção poderá ser realizado no laboratório de informática da escola ou, ainda, proposto como atividade extraclasse.

O pensamento computacional

Vivemos em uma sociedade na qual a presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) provoca importantes transformações em diversos setores, como na economia, na cultura e na educação. Diante disso, pesquisadores de campos relacionados às políticas educacionais enfatizam a importância da implantação da programação e de conceitos oriundos da ciência da computação no currículo escolar, uma vez que o trabalho realizado no âmbito dessa ciência desenvolve capacidades relacionadas ao pensamento computacional, que, junto à leitura, à escrita e à aritmética, deveria ser uma das habilidades analíticas inerentes a cada indivíduo (RAABE, 2017).

Mas o que é o pensamento computacional?

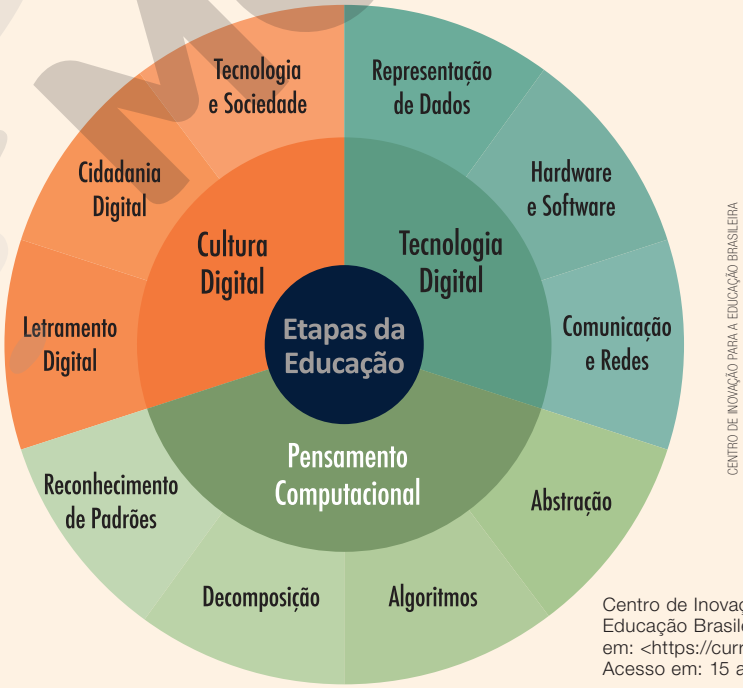
> [...]
>
> Pensamento computacional é uma forma para seres humanos resolverem problemas; não é tentar fazer com que seres humanos pensem como computadores. Computadores são tediosos e enfadonhos; humanos são espertos e imaginativos. Nós humanos tornamos a computação empolgante. Equipados com aparelhos computacionais, usamos nossa inteligência para resolver problemas que não ousaríamos sequer tentar antes da era da computação e construir sistemas com funcionalidades limitadas apenas pela nossa imaginação.
>
> [...]

WING, Jeannette. *Computational Thinking*. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, n. 3, p. 4, 2006. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Um dos eixos do currículo de referência em tecnologia e computação, do Centro de Inovação para a Educação Brasileira, é o pensamento computacional, o qual dissera sobre a resolução de problemas que envolvem tecnologias digitais considerando quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo (CIEB, 2018; BRACKMANN, 2017).

- **Decomposição:** decompor o problema em problemas menores, conhecidos como subproblemas, mais fáceis de serem resolvidos.
- **Reconhecimento de padrões:** analisar os subproblemas individualmente, com o objetivo de reconhecer padrões e identificar características comuns que ajudam na sua resolução.
- **Abstração:** filtrar, classificar e organizar as informações relevantes ao considerar apenas os dados essenciais para a resolução do problema e ignorar as informações irrelevantes, atingindo uma generalização dos padrões identificados.
- **Algoritmo:** construção de estratégias ou instruções claras e ordenadas que auxiliam a resolução dos subproblemas e, consequentemente, a obter a solução do problema principal.

Para mais informações a respeito do currículo de referência em tecnologia e computação, acesse o *site* do CIEB. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.



Centro de Inovação para a Educação Brasileira. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

MODELO

Como estratégia didática para o desenvolvimento do pensamento computacional, os conceitos relacionados à linguagem de programação, quando o contexto assim solicitar, podem ser utilizados de modo contextualizado a fim de que os alunos exercitem sua aprendizagem e autonomia para estabelecer relações com situações de seu cotidiano. O uso de simulações, *softwares* ou equipamentos específicos, por exemplo, pode levar os alunos a estudar determinados fenômenos reais que dificilmente seriam possíveis sem o auxílio desses recursos.

No Ensino Médio, ao trabalhar com abordagens que desenvolvem o pensamento computacional, deve-se planejar a maneira como as atividades propostas serão efetuadas, considerando diferentes perfis de alunos, bem como as características de cada turma, além de fazer uso dos recursos disponíveis no ambiente escolar e de perseguir os objetivos a serem alcançados.

Sabe-se que as escolas públicas brasileiras, muitas vezes, não possuem o aparato tecnológico e computacional necessário para o desenvolvimento de atividades com essas tecnologias. Nesses casos, o professor deve recorrer ao trabalho com o pensamento computacional sem o auxílio de recursos tecnológicos, conhecido como pensamento computacional desplugado, ou *unplugged*. Segundo Brackmann (2017), essa alternativa, por ser de fácil aplicação em diferentes realidades, foi pensada justamente com o intuito de atender às escolas públicas que não possuem condições socioeconômicas de ter acesso a computadores ou outras tecnologias. Desse modo, o professor pode aplicar abordagens lúdicas, como truques de mágica e competições entre os alunos ou, ainda, usar objetos manipuláveis, como jogos (de tabuleiro, de cartas, de peças), livros, fichas, figuras e, até mesmo, o próprio material escolar dos alunos.

Além disso, de acordo com a BNCC (2018, p. 474), o pensamento computacional "envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, nesta coleção, o pensamento computacional é incentivado eventualmente: em tarefas que envolvem a organização do pensamento; no registro e na análise de resultados e dados por meio de planilhas e gráficos; no uso de *softwares* de geometria dinâmica; nas construções de algoritmos e fluxogramas; por meio de linguagem de programação usando o *software* VisualG – programa que possibilita a criação, edição, interpretação e execução de algoritmos, bastante utilizado para o ensino da lógica de programação por ser de fácil manipulação.

No trabalho com o VisualG, os alunos são levados a interpretar as informações do problema proposto e organizá-las em uma sequência de instruções que devem ser transformadas em um algoritmo. Então, essas instruções são transcritas no *software*, realizando a codificação do problema, apresentado em linguagem materna, para uma linguagem de programação. Com isso, os alunos desenvolvem os quatro pilares do pensamento computacional. O VisualG é livre e seu *download* pode ser feito por meio do *site* disponível em: <https://visualg3.com.br/>. Acesso em: 14 maio 2020.

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 271. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para auxiliar nas práticas que propiciam o desenvolvimento do pensamento computacional em sala de aula, veja algumas referências no tópico **Sugestões ao professor** deste **Suplemento para o professor.**

O aluno no centro do processo de aprendizagem

Metodologias ativas

Nas últimas décadas, o advento da tecnologia e as discussões envolvendo novos métodos de ensino têm gerado grandes desafios aos professores e às escolas. Estruturas de ensino tradicionais, nas quais professores transmitem conhecimentos aos alunos, têm sido cada vez mais questionadas quanto ao seu papel efetivo no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, as metodologias ativas são uma maneira de transformar essa realidade, engajando o aluno e tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo. As estratégias de metodologias ativas são um processo de ensino e aprendizagem em que o aluno é o protagonista da construção do conhecimento, tendo o professor como mediador para atingir um objetivo de aprendizagem de modo interativo, dinâmico, reflexivo e colaborativo.

Nesse tipo de abordagem, o professor deixa de ser o transmissor do conhecimento, passando a ser um mediador ao planejar as aulas com foco em orientar e incentivar os alunos.

> As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as eta-

MODERNA

pas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor [...].

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, L; MORAN, J. (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 02-25.

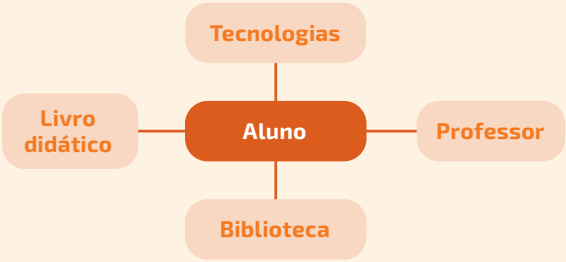
As dez competências gerais propostas pela BNCC estão alinhadas às situações de aprendizagem que podem ser conduzidas por meio da aplicação de estratégias de metodologias ativas, incentivando o protagonismo do aluno.

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 14. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

As competências gerais da BNCC centralizam no aluno o processo de ensino e aprendizagem, colocando-o como produtor efetivo de conhecimento. Assim, as competências visam à mobilização de conhecimentos com o intuito de atender às demandas cotidianas e também aos problemas sociais mais complexos, sempre conferindo ao aluno um papel central e ativo nesse processo.

Ao empregar estratégias de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, os alunos são incentivados a construir o conhecimento de modo integrado às necessidades de seu cotidiano. Nesse processo, é possível agregar o uso de recursos diversos, como o livro didático usado em sala de aula, os livros disponíveis na biblioteca e os recursos provenientes da tecnologia, como o computador, o celular, a internet e as plataformas digitais.



Considerando esse contexto, esta coleção busca explorar diferentes estratégias de metodologias ativas por meio de tarefas que incentivam o protagonismo dos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, encontra-se o destaque **Metodologia ativa,** que explica, de maneira geral, como algumas estratégias podem ser aplicadas em determinados momentos, orientando o professor, sempre que conveniente, sobre a metodologia ativa mais adequada para ser adotada naquele contexto específico.

Estratégias

Design thinking (Pensamento de *design*)

Design thinking (DT) é uma estratégia baseada em empatia, colaboração, criatividade e otimismo, que busca soluções para determinada necessidade por meio de um processo estruturado.

Inspirado na maneira como os *designers* resolvem problemas, o processo do Design thinking parte da compreensão de um problema para um *brainstorming* e, por fim, segue para a criação de soluções inovadoras. Veja a seguir as principais etapas do DT.

EMPATIZAR

Conhecer e compreender a realidade do problema. Podem ocorrer por meio de pesquisas em diversas fontes ou de diálogos com as pessoas envolvidas.

DEFINIR

O grupo deve se unir para compartilhar o que percebeu na etapa da empatia e analisar todos os dados coletados para definir sobre qual aspecto do problema vai se debruçar. Recomenda-se expressar esse desafio por meio de uma pergunta iniciada com "Como podemos...?".

Exemplo: Como podemos conscientizar os moradores do bairro sobre o problema da dengue?

IDEAR

Momento de *brainstorming*. Todos devem se sentir à vontade para sugerir. Após esse processo, o grupo deve refinar as opções, escolhendo as que podem ser aplicadas. Em seguida, devem antecipar as dificuldades de cada uma, até chegar à que será executada. Nessa etapa, o *feedback* do público envolvido é importante.

PROTOTIPAR

Fazer um protótipo é tornar uma ideia tangível, como a primeira versão de algo. Um protótipo pode ser um produto, um processo ou uma experiência. É a proposta do grupo para a solução do problema.

TESTAR

O teste é a parte da implementação e execução da proposta feita pelo grupo. É necessário um plano de ação para aplicá-la. É importante que o grupo acompanhe e esteja atento a possíveis necessidades de modificações no protótipo.

Fonte de pesquisa: ROCHA, Julciane. Design thinking na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Orgs.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

MODELO

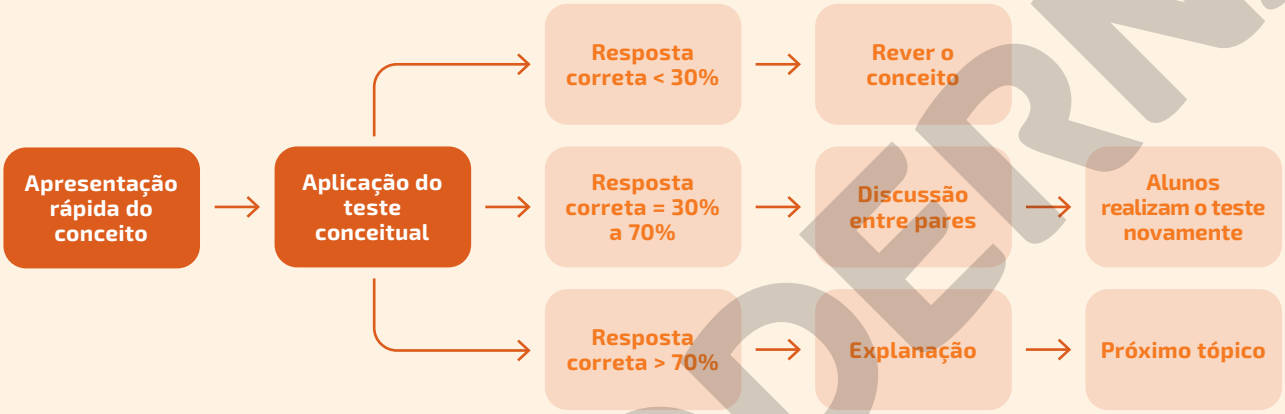
Na educação, a estratégia DT pode ser aplicada tanto em atividades que levem horas para serem resolvidas, como as problematizações de conteúdos em aulas expositivas, quanto em atividades que podem levar semanas ou meses, como as campanhas na escola. Essa metodologia ativa contribui para o desenvolvimento da empatia, da criatividade e da colaboração entre os alunos.

Peer instruction (Abordagem por pares)

A estratégia Peer instruction ou abordagem por pares consiste em uma dinâmica na qual a aprendizagem dos alunos não se baseia somente no estudo individual e na explicação do professor, mas também em auxiliar e ser auxiliado pelos colegas para compreender conceitos.

A estratégia é organizada da seguinte maneira.

- O aluno estuda os conteúdos antes da aula.
- Em sala de aula, o professor faz uma breve exposição do assunto e aplica um teste, preferencialmente oral e com respostas de múltipla escolha.
- Ao fazer a primeira pergunta, o professor deve avaliar as respostas da turma: se mais de 70% dos alunos acertarem a resposta, o professor faz uma breve explanação da resposta correta e dos motivos pelos quais as outras estão erradas e prossegue com o teste. Se menos de 30% dos alunos responderem corretamente, é necessário voltar aos conteúdos e revisá-los de maneira aprofundada. Se a porcentagem de acertos ficar entre 30% e 70%, o professor deve pedir aos alunos que se reúnam em duplas ou grupos para conversar sobre a questão, explicando ao colega o que foi entendido e chegando a um consenso. Ao terminarem a conversa, o professor faz a pergunta novamente, e segue nesse ciclo.



Fonte de pesquisa: FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa.* São Paulo: Saraiva Educação, 2018. p. 46.

Há diversas maneiras de aplicar o teste para os alunos: pode-se indicar alternativas e pedir que levantem as mãos; distribuir cartões coloridos e pedir que os levantem conforme a resposta; registrar em papel ou utilizar aplicativos.

Essa estratégia é válida, por exemplo, para iniciar os estudos sobre o tema e para revisar os conteúdos estudados. A abordagem por pares contribui com a interação, a colaboração e o diálogo entre os alunos.

Gallery walk (Caminhada na galeria)

Gallery walk é uma estratégia que desenvolve a habilidade de síntese e estimula a interação, o trabalho em equipe e a socialização do conhecimento. Nela, os alunos exibem seus trabalhos em cartazes que devem ser afixados em paredes, como obras de arte em uma galeria. Em seguida, a turma circula pela sala, observando os cartazes afixados, debatendo e refletindo sobre o tema proposto.

Há diversas possibilidades de condução dessa estratégia: trabalhos individuais apresentados enquanto a turma percorre a "galeria" em conjunto; circulação livre dos alunos pela "galeria", colando notas adesivas nos cartazes com dúvidas ou sugestões; entre outras.

Essa dinâmica pode ser aplicada na apresentação, revisão ou mesmo na avaliação de conteúdos. Cabe ao professor definir os objetivos e o tema a serem trabalhados, orientando a turma em relação à atividade. Durante o processo, o docente assume o papel de observador, permitindo que os alunos se organizem e intervindo somente se for necessário. Ao final, é importante promover um debate geral com a turma ou fazer uma breve explanação sobre os trabalhos e o processo da Gallery walk.

Sorting strips (Tiras de classificação)

Na estratégia Sorting strips, trechos de informações ou conteúdos são separados em tiras de papel para serem organizados em sequência ou classificados em categorias.

Essa dinâmica auxilia a sistematização da aprendizagem de modo colaborativo, incentivando a troca de ideias entre os alunos e possibilitando a discussão de ideias opostas, complementares ou sequenciais ao conteúdo das tiras.

A estratégia pode ser aplicada para explorar a compreensão de processos, o encadeamento de ideias e o exercício de classificações.

MODERNA

Think-pair-share (Pensar-conversar-compartilhar)

Think-pair-share é uma estratégia de aprendizagem cooperativa que consiste em pensar, individualmente, sobre uma questão ou um problema levantado pelo professor, compartilhar o raciocínio individual com um colega e, em seguida, socializar com um grupo maior os pensamentos e as conclusões aos quais a dupla chegou.

Essa estratégia favorece os alunos que não se sentem à vontade em compartilhar suas opiniões ou seus conhecimentos com a turma ou com um grupo, mas são capazes de conversar com um colega sobre determinada situação antes de se posicionar diante de um grupo maior.



Think

O professor expõe o problema e o aluno reflete individualmente sobre a situação.



Pair

O aluno reúne-se com um colega para trocar percepções sobre a situação.

É interessante que as duplas sejam definidas antes de a questão ser exposta, a fim de que as reflexões dos alunos não sejam interrompidas para que eles encontrem um par.



Share

As duplas se unem em grupos maiores para compartilhar as conclusões a que chegaram após a discussão conjunta. O grupo discute todas as percepções e chega a uma nova síntese das ideias com base na discussão coletiva.

Em outro modelo de socialização, o professor pode pedir a algumas duplas que compartilhem suas conclusões com toda a turma.

ILUSTRAÇÕES: LAÍS GARBELINI

Essa estratégia desenvolve habilidades de oralidade e argumentação, além de incentivar os alunos a ouvir e respeitar diferentes opiniões.

Quick writing (Escrita rápida)

Quick writing é uma estratégia que consiste em escrever uma resposta relacionada a um conteúdo em, no máximo, cinco minutos.

Essa dinâmica desenvolve a fluência na escrita e a capacidade de síntese. A pergunta é feita pelo professor e pode se relacionar tanto aos assuntos estudados quanto à vivência dos alunos. É possível aplicar essa estratégia baseando-se em abordagens como: explicação de conceitos ou vocabulários de um texto; formulação de hipóteses; ou inferências e explanação de conhecimentos prévios.

Avaliação

A etapa escolar do Ensino Médio busca o desenvolvimento **integral** dos jovens alunos. Os objetivos pedagógicos, portanto, de acordo com as orientações da BNCC, devem propiciar o desenvolvimento de **competências** nesses jovens, não apenas no sentido de **saber**, mas principalmente de **saber fazer**. Desse modo, nesta coleção, os alunos são envolvidos em situações de estudo que perpassam suas necessidades e seus interesses, ampliam seus conhecimentos e permitem a mobilização desses conhecimentos visando atender às demandas do mundo onde vivem.

Portanto, a **avaliação das aprendizagens** desses alunos, como parte indissociável do processo de ensino e aprendizagem, deve estar alinhada a esses objetivos na atividade escolar.

A prática avaliativa tem sido cada vez mais reconhecida por sua importância, pois auxilia o trabalho do professor, e por seu caráter legítimo na validação da condução didático-pedagógica. Desse modo, faz-se necessário compreender a essência de algumas modalidades de avaliação e implementá-las de acordo com os objetivos definidos para cada momento do processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação diagnóstica

Toda avaliação tem caráter diagnóstico, pois tende a obter informações sobre a aprendizagem dos alunos. Essa é uma prática muito importante ao iniciar um conteúdo, pois, por meio dela, é possível identificar os conhecimentos prévios de cada um. Desse modo, é possível tomar decisões sobre seu planejamento de ensino, caso seja necessário complementá-lo ou resumi-lo.

Avaliação somativa

Em geral, é aplicada ao final do estudo de um conteúdo e pode valer-se de diferentes tipos de instrumentos. Fornece dados ou informações que sintetizam os avanços das aprendizagens dos alunos em relação a tal conteúdo. Busca, de maneira pontual e conclusiva, sintetizar e registrar os resultados verificados, com finalidade informativa ou classificatória.

Avaliação formativa

É parte integrante de todo o processo de ensino e aprendizagem, pois busca melhorias na atividade em curso. Oferece subsídios que respaldam a interferência no processo de atuação do professor e de aprendizagem dos alunos, com vistas ao seu aprimoramento. Desse modo, permite a retomada e a revisão de conceitos e temas, além do ajuste da prática pedagógica.

A avaliação e o trabalho do professor

Alguns fatores são fundamentais para que a prática avaliativa possa contribuir de modo efetivo com o professor em seu trabalho diário.

A avaliação e a prática pedagógica

É possível observar casos de práticas avaliativas que se limitam, na maioria das vezes, a uma verificação resumida de notas, seguida de progressão e certificação. Essas práticas, em geral, estão relacionadas a encaminha-

MOD PNA

mentos pedagógicos em que o professor é um transmissor de conhecimento e os alunos, meros receptores. Por outro lado, em algumas metodologias, nas quais o aluno assume parte importante no processo de construção e ampliação de seu conhecimento, a avaliação preocupa-se mais com "como" o aluno aprende e menos com "o que" ele aprende. Portanto, o acompanhamento das aprendizagens dos alunos está intrinsicamente relacionado à **opção teórico-metodológica** escolhida, ou seja, o modo como se avalia diz muito sobre o modo como se ensina, e vice-versa.

Uma prática constante

A avaliação não deve ser estanque ou limitada a determinados momentos. Uma prova ao final do estudo de um conteúdo não é suficiente para obter todas as informações necessárias sobre a aprendizagem de cada aluno. Desse modo, a **diversificação** de dinâmicas e instrumentos de avaliação, assim como o registro das informações que elas fornecem sobre o processo de aprendizagem, devem ser analisados e confrontados constantemente, a fim de embasar o prosseguimento do trabalho do professor.

Há diferentes maneiras de **registrar** a trajetória dos alunos em relação à sua aprendizagem. Muitos professores fazem relatórios de observação diária, constroem um portfólio ou anotam comentários em um diário de aulas. Esses registros podem conter descrições ou conceitos que indiquem o progresso ou as dificuldades dos alunos de maneira individual, em pequenos grupos ou de toda a turma. Com base neles, é possível decidir sobre a retomada de explicações, sugestões de leituras ou atividades paralelas, que auxiliem o acompanhamento dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Esse **aspecto qualitativo** da prática avaliativa exige do professor uma postura ativa, reflexiva e reguladora em relação ao processo de ensino e aprendizagem. E, portanto, é inevitável que a avaliação seja **constante**, estando inserida em diversos momentos desse processo.

A seguir, apresentamos um modelo de **relatório** que pode auxiliar no acompanhamento da aprendizagem dos alunos. O modelo traz itens de acompanhamento diferentes em cada linha a fim de exemplificar a variação a ser aplicada nesse documento. É possível considerar os objetivos de aprendizagem do estudo de cada tema ou outros objetivos propostos em seus planejamentos. Também é possível acompanhar o desempenho dos alunos em relação às habilidades a serem desenvolvidas. Outra alternativa é registrar os indicadores de aprendizagem dos alunos obtidos por meio de uma determinada tarefa que pode ser desenvolvida individualmente ou em grupos. O campo de observações é muito importante para que comentários e lembretes de detalhes sejam registrados, auxiliando nas futuras tomadas de decisões com base nesses relatórios.

Lembramos que esse relatório figura como modelo que pode (e deve) ser adaptado de acordo com as necessidades e realidade de trabalho de cada turma ou escola.

Modelo de relatório de acompanhamento da aprendizagem

MODELO

NOME DO ALUNO					
Componente curricular		Ano		Turma	
Objetivos/habilidades ou atividades propostas	Período letivo do registro			Apresentou progressos durante o período letivo indicado?	
	NÃO consegue executar	Executa com DIFICULDADE	Executa com FACILIDADE	SIM	NÃO
Reconhecer algumas unidades de medida de base do Sistema Internacional de Unidades (SI).					
(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.					
Síntese conclusiva da utilização de diferentes unidades de medida de base pertencentes ou não ao Sistema Internacional de Unidades (SI).					
Observações					

Instrumentos de avaliação diversificados

Independentemente do instrumento de avaliação que o professor decida utilizar, é fundamental que os objetivos a serem atingidos estejam bem definidos. Obter **indicadores** da aprendizagem dos alunos deve ser a essência de cada instrumento de avaliação elaborado pelo professor. Portanto, provas objetivas ou discursivas, seminários, produções de textos, sínteses de pesquisas, debates, dramatizações, produção de esquemas ou desenhos e trabalhos em grupo ou individuais estão entre as variações possíveis.

Quanto ao professor, é preciso esclarecer os **objetivos** de ensino a serem investigados em relação à aprendizagem dos alunos. Já os alunos devem receber, por parte do professor, toda e qualquer **orientação** possível sobre a dinâmica proposta, de modo que estejam conscientes a respeito de como e quando serão avaliados.

Mas, por que a avaliação deve ter essa **diversificação**? Porque os alunos são diferentes, aprendem de maneiras distintas e expressam-se também de modos diversos. Alguns têm mais facilidade em aprender ouvindo explicações, enquanto outros precisam ler textos, resumos ou esquemas. Há aqueles que demonstram o que sabem por meio de conversas ou debates, mas apresentam dificuldade para se expressar por meio da escrita. Enquanto alguns têm facilidade em compreender raciocínios lógico-matemáticos, outros têm destreza na produção de textos.

A variedade de estratégias, como dinâmicas em grupo ou individuais, ou de participação anônima, por exemplo, também são recursos que auxiliam no trabalho com grupos de **diferentes perfis**. O incentivo à socialização e à junção de grupos heterogêneos, a relevância dos temas de estudos e o envolvimento dos jovens também são fatores que podem tornar eficaz o trabalho de professores e alunos no processo de ensinar, aprender e avaliar.

A avaliação nesta coleção

Nesta coleção, a opção por um trabalho que destaque o protagonismo dos alunos do Ensino Médio apresenta **oportunidades constantes** de avaliação do processo de ensino e aprendizagem, privilegiando **dinâmicas diversificadas**, em especial aquelas fundamentadas em **metodologias ativas**. Para tanto, no trabalho com as diferentes unidades temáticas, são propostas dinâmicas e atividades variadas, com a exploração de diversos recursos (textuais e imagéticos), ocasiões que permitem o acompanhamento do professor em relação à aprendizagem dos alunos.

Também são disponibilizadas, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, diversas orientações com dicas pontuais, alinhadas aos objetivos de ensino e a uma avaliação formativa. Destacamos o boxe **Sugestão de avaliação**, que apresenta, em geral, orientações específicas para os momentos de avaliação, com sugestões de como obter informações a respeito da aprendizagem dos alunos, e as possibilidades de escolher o melhor procedimento a ser tomado.

A **autoavaliação** também é uma ferramenta que colabora coerentemente com o propósito de que os alunos assumam o protagonismo no processo de formação do seu conhecimento. Essa proposta de reflexão a respeito de sua aprendizagem, participação, limitações e potencialidades deve ser mediada pelo professor como um processo construtivo e positivo, para que não se encaminhe de modo depreciativo e interfira na autoestima dos alunos. Ao contrário, deve ser encarada e assimilada como um procedimento de verificação dos caminhos possíveis para superar os diferentes desafios que a vida lhes colocará.

Em se tratando de desafios, esta coleção também se preocupa em preparar os alunos para os **exames de larga escala**. Para isso, a condução dos estudos é norteada pelo objetivo de desenvolver **habilidades** e **competências** que permitam o embasamento em conhecimentos científicos, o exercício da criatividade, a resolução de problemas com base em saberes interdisciplinares e transdisciplinares, a valorização da cultura em suas diversas expressões, expressar-se e argumentar por meio de diferentes linguagens, inclusive a tecnológica e a digital, agindo com respeito a si mesmo e aos outros, sempre com responsabilidade.

A BNCC e a coleção

Cada volume desta coleção foi organizado e desenvolvido de maneira a contemplar as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais elencados na BNCC, estabelecendo, sempre que possível, conexões com outras áreas do conhecimento. É possível perceber tais relações na maneira como os temas foram estruturados e abordados, nas questões-teoria ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, nas seções especiais e nas tarefas propostas no decorrer do livro do aluno. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor** há o aporte para o desenvolvimento do trabalho com esses objetos.

Sugestão de cronograma

Apresentamos, a seguir, uma proposta de cronograma para elaborar o planejamento deste volume. No entanto, cabe ao professor a decisão de como utilizar o livro didático como apoio pedagógico, seguindo critérios de seleção dos temas e levando em consideração diversos fatores, como o projeto pedagógico da escola, as condições da turma, a carga horária e a grade

MODERNA

curricular. Da maneira como está estruturada, esta coleção permite que o professor tenha autonomia pedagógica para decidir sobre quais temas abordar ou deixar de abordar, no todo ou em partes; sobre seguir a ordem apresentada ou reagrupar os temas de acordo com os critérios organizacionais escolhidos e, com isso, estabelecer as conexões entre os temas dentro desses critérios.

No caso de um cronograma bimestral, considerando que a duração do curso seja de 12 bimestres, este volume pode ser trabalhado, em sua totalidade, em 2 bimestres, ou seja, aproximadamente 16 semanas.

Sugestão de cronograma bimestral			
1º bimestre		**2º bimestre**	
1ª semana	Tema 1	9ª semana	Temas 5 e 6
2ª semana	Tema 2	10ª semana	
3ª semana		11ª semana	Tema 7
4ª semana		12ª semana	Tema 8
5ª semana	Tema 3	13ª semana	Tema 9
6ª semana	Tema 4	14ª semana	Temas 10 e 11
7ª semana		15ª semana	
8ª semana	Temas 5 e 6	16ª semana	Tema 12

O quadro a seguir apresenta os principais conceitos, as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais trabalhados neste volume, organizados de acordo com cada tema, especificando, também, as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, quando estas forem abordadas.

Neste quadro, por exemplo:

CG1 indica a **Competência geral 1**.

CE3MAT indica a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

CE1CNT indica a **Competência específica 1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Tema	Principais conceitos	Habilidades	Competências gerais; competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Temas contemporâneos transversais
1	• Teorema de Tales • Semelhança de triângulos	• EM13MAT308	• CG2 • CG5 • CE3MAT	
2	• Relações métricas no triângulo retângulo • Teorema de Pitágoras • Trigonometria no triângulo retângulo • Ângulos notáveis • Tabela trigonométrica	• EM13MAT308 • EM13MAT405	• CG1 • CG4 • CE3MAT • CE4MAT • CE1CNT • CE2CNT	• Educação ambiental • Educação em direitos humanos

MODERNA

3	• Trigonometria em um triângulo qualquer • Lei dos senos e lei dos cossenos	• EM13MAT308	• CG1 • CE3MAT	• Ciência e tecnologia
4	• Trigonometria na circunferência • Arcos da circunferência • Circunferência trigonométrica • Arcos côngruos • Seno, cosseno e tangente de um arco • Redução ao 1º quadrante	• EM13MAT315 • EM13MAT405	• CG4 • CE3MAT • CE4MAT	
5	• Funções • Noção de conjuntos • Conjuntos numéricos • Intervalos reais • Valor absoluto de um número real • Conceito de função • Funções trigonométricas	• EM13MAT306 • EM13MAT308	• CE3MAT	
6	• Função do tipo trigonométrica: um modelo matemático	• EM13MAT306	• CE3MAT • CE2CNT	• Ciência e tecnologia
7	• Fórmulas de transformação • Relações trigonométricas • Equações trigonométricas	• EM13MAT306	• CE3MAT	• Saúde • Educação alimentar e nutricional
8	• Polígonos • Ladrilhamento no plano • Ladrilhamento regular e semirregular	• EM13MAT505	• CE3MAT • CE5MAT	
9	• Estudando a área de figuras planas • Área do quadrado • Área do retângulo • Área do paralelogramo • Área do losango	• EM13MAT307 • EM13MAT315	• CE3MAT • CE1CNT • CE2CNT	• Educação ambiental
10	• Área do triângulo • Área do trapézio • Cálculo da área de um triângulo utilizando a trigonometria • Área de polígonos regulares • Razão entre área de figuras planas	• EM13MAT307 • EM13MAT315 • EM13MAT405	• CG5 • CE3MAT • CE4MAT	• Educação para o consumo • Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
11	• Área e as vagas de estacionamento destinadas aos idosos	• EM13MAT307	• CG9 • CE3MAT	• Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
12	• Estudando a área do círculo • Área do setor circular • Área da coroa circular	• EM13MAT307 • EM13MAT315	• CE3MAT	• Educação para o trânsito

MODERNA

Objetivos, comentários e sugestões

Nesta seção do **Suplemento para o professor**, para cada tema que compõe o livro do aluno são apresentados objetivos, comentários e sugestões, oferecendo ao professor subsídios para seu trabalho em sala de aula.

Nos comentários de cada tema, são abordados inicialmente os objetivos específicos e questões relativas à organização do conteúdo. Há sugestões de condução e tarefas para a abordagem inicial, resgatando os conhecimentos prévios dos alunos. Essas sugestões estão relacionadas às páginas iniciais do tema, complementando a situação nelas tratada. No entanto, existem casos em que é sugerida outra abordagem inicial para o conteúdo, oferecendo a você, professor, novos elementos, de modo que possa escolher essas situações e adaptá-las segundo sua realidade.

Na sequência, encontram-se comentários e sugestões a respeito de algumas seções e tarefas que envolvem o tema. Por exemplo, há comentários adicionais sobre as páginas de abertura, sugestões de condução, tarefas que podem ser desenvolvidas em sala de aula e informações complementares às apresentadas no livro do aluno. Também são apresentadas demonstrações, sugestões de condução para a resolução de algumas tarefas, comentários e informações, entre outros recursos.

1 O Teorema de Tales e a semelhança de triângulos

Objetivos específicos

- Utilizar o Teorema de Tales para resolver problemas em diferentes contextos.
- Reconhecer os casos de semelhança de triângulos.
- Aplicar as noções de semelhança para elaborar e resolver problemas que envolvem triângulos, em diversos contextos.

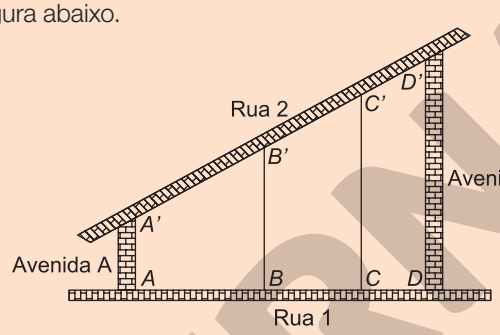
Neste tema, busca-se conectar os conteúdos trabalhados com situações práticas, por exemplo, medidas de distâncias inacessíveis, a fim de que os alunos sejam capazes de resolver problemas do cotidiano.

Para isso, é enunciado e demonstrado o Teorema de Tales. Além disso, estudaremos os casos de semelhança de triângulos, que estabelecem condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. Enunciaremos e demonstraremos o **caso de semelhança AA**. Já os casos **LAL** e **LLL** serão apenas enunciados, pois as demonstrações podem ser de difícil compreensão para esse nível de ensino.

Por ser um conteúdo estudado no Ensino Fundamental, é de suma importância avaliar o conhecimento prévio dos alunos sobre o Teorema de Tales. A seguir, é apresentada uma sugestão de problema que possibilitará esse diagnóstico.

Sugestão de avaliação

(UFU-MG) Uma área delimitada pelas Ruas 1 e 2 e pelas Avenidas A e B tem a forma de um trapézio $ADD'A'$, com $AD = 90\,m$ e $A'D' = 135\,m$, como mostra o esquema da figura abaixo.



RONALDO INÁCIO

Tal área foi dividida em terrenos $ABB'A'$, $BCC'B'$ e $CDD'C'$, todos na forma trapezoidal, com bases paralelas às avenidas tais que $AB = 40\,m$, $BC = 30\,m$ e $CD = 20\,m$.

De acordo com essas informações, a diferença, em metros, $A'B' - C'D'$ é igual a

a) 20. **b)** 30. **c)** 15. **d)** 45.

Resolução

Pelo Teorema de Tales, segue que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$

Deste modo:

- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} \Rightarrow \frac{40}{A'B'} = \frac{90}{135} \Rightarrow A'B' = 60$

Assim, $A'B' = 60\,m$.

- $\frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} \Rightarrow \frac{20}{C'D'} = \frac{90}{135} \Rightarrow C'D' = 30$

Logo, $C'D' = 30\,m$.

Agora, calculamos a diferença $A'B' - C'D'$. Neste caso:

$$A'B' - C'D' = 60\,m - 30\,m = 30\,m$$

Portanto, a alternativa correta é **b**.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 10 e 11 **Tales e as pirâmides do Egito**

- Essas páginas apresentam uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **História**. Nelas, são apresentadas duas versões que Tales pode ter

MODERNA

utilizado para determinar a altura de uma pirâmide egípcia: uma por relação e outra por proporção, utilizando um bastão, a sombra dele e a sombra da pirâmide. Se julgar conveniente, comente com os alunos que, segundo Sócrates, Tales de Mileto, juntamente com Sólon, Bias de Priene, Pítaco de Mitilene, Quílon de Esparta, Cleóbulo de Lindos e Míson de Queneia (substituído posteriormente por Periandro de Corinto) constituíam o grupo dos Sete Sábios.

- Uma sugestão para conduzir o trabalho com essas páginas é realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate a fim de observar a compreensão dos alunos acerca do assunto apresentado. Na sequência, possibilite que respondam às questões propostas e sugira que alguns deles apresentem suas respostas na lousa. A fim de avaliá-los, organize-os em grupos e proponha alguns problemas envolvendo contextos reais, como medir a altura de uma árvore ou um poste, para que, utilizando um dos métodos apresentados, obtenham sua solução.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirarem das linhas gerais dos conteúdos propostos e pesquisarem problemas envolvendo o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos, registrando possíveis dúvidas. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC

Ao apresentar as duas versões que Tales pode ter utilizado para determinar a altura de uma pirâmide egípcia, os alunos são expostos a procedimentos e métodos possivelmente utilizados na antiguidade, exercitando, assim, a curiosidade intelectual deles. Espera-se que essa abordagem desenvolva a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade dos alunos, possibilitando que eles investiguem e resolvam problemas, assim como sugere a **Competência geral 2** da BNCC.

Nesse tema, os alunos são desafiados a aplicar a semelhança de triângulos para construir modelos e elaborar e resolver problemas que envolvam triângulos em diferentes contextos, conforme orientam a habilidade **EM13MAT308** e a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Sala dos professores

Caso julgue conveniente, proponha um trabalho em conjunto com o professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, mais especificamente, com o professor do componente curricular **História**. Aproveite a integração e explore as pirâmides do Egito. Explique aos alunos que a Grande Pirâmide de Gizé, no Egito, possui 146,6 metros de altura e foi construída há cerca de 4 500 anos. Diga-lhes, também, que esse monumento é considerado uma das Sete Maravilhas do Mundo Antigo. Proponha que realizem uma pesquisa acerca do motivo de os egípcios terem escolhido a forma de pirâmide para a construção desse monumento e, em posterior debate, deixe que exponham seus resultados e opiniões sobre o assunto.

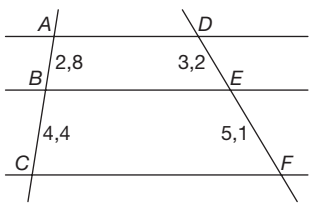
Páginas 12 e 13

- Nessas páginas, é enunciado e demonstrado o famoso Teorema de Tales. Veja a seguir uma tarefa que pode ser utilizada para auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos. Tal tarefa consiste em investigar empiricamente a validade do Teorema de Tales, utilizando, para isso, régua, esquadro e uma calculadora (ou o aplicativo Calculadora do *smartphone*).

  Providencie uma folha sulfite para cada aluno e oriente-os a desenhar um feixe de retas paralelas, utilizando a régua e o esquadro. Quanto maior for o desenho, mais fácil será realizar medições com precisão.

  Após eles desenharem o feixe de paralelas, oriente-os a traçar retas transversais às retas paralelas, quantas eles acharem conveniente, e com os mais variados ângulos de inclinação em relação às paralelas. Peça-lhes que nomeiem os pontos de interseção das paralelas com as transversais, medindo e registrando o comprimento dos segmentos, em centímetros, contidos nas retas transversais, que unem uma reta paralela a outra.

  Veja abaixo um exemplo em que um feixe de três retas paralelas é cortado por duas retas transversais.



RONALDO INÁCIO

  O Teorema de Tales diz que, se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes na outra transversal.

  Calculando, no exemplo apresentado, as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{DE}{EF}$, temos:

  › $\frac{AB}{BC} = \frac{2,8}{4,4} = 0,\overline{63}$

  › $\frac{DE}{EF} = \frac{3,2}{5,1} \simeq 0,63$

EM OBRA

Note que os valores numéricos são muito próximos, e só não são iguais porque existem erros de medição. O mesmo ocorre ao calcularmos as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{DE}{EF}$, ou seja:

› $\frac{AB}{BC} = \frac{2,8}{2,8 + 4,4} = \frac{2,8}{7,2} = 0,\overline{38}$

› $\frac{DE}{DF} = \frac{3,2}{3,2 + 5,1} = \frac{3,2}{8,3} = 0,38$

Oriente os alunos a explorarem, além dessas razões, outras que condizem com o teorema.

Após apresentar a demonstração do Teorema de Tales, verifique a possibilidade de realizar a dinâmica descrita a seguir.

- Organize os alunos em grupos e leve-os ao pátio da escola ou a uma praça para que calculem a altura de alguma construção ou árvore, utilizando o teorema demonstrado.

Página 13

- Após desenvolver o trabalho com as tarefas dessa página, verifique a possibilidade de aplicar um problema sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 15

- Se julgar conveniente, ao propor a tarefa **6**, leve os alunos ao laboratório de informática para que desenvolvam o trabalho utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Oriente-os a:
  - › construir um triângulo *ABC*;
  - › determinar o ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, indicados por *D* e *E*, respectivamente;
  - › construir a reta $\overleftrightarrow{DE}$;
  - › construir uma reta paralela à $\overline{AB}$, passando por um dos pontos médios (*D* ou *E*).

  Um possível passo a passo para esta construção é apresentado a seguir.

  a) Selecione a ferramenta **Ponto** e construa os pontos *A*, *B* e *C*.

  b) Com a ferramenta **Polígono**, clique sobre os pontos *A*, *B*, *C* e *A*, nessa ordem. Deste modo, obtém-se o triângulo *ABC*.

  c) Marque o ponto médio do lado $\overline{AC}$, o qual será denotado por *D*. Para isso, selecione a ferramenta **Ponto Médio ou Centro** e clique sobre os pontos *A* e *C*. Em seguida, repetindo o mesmo procedimento, porém clicando sobre os pontos *B* e *C*, obtenha o ponto médio de $\overline{BC}$, o qual indicaremos por *E*.

  d) Selecione a ferramenta **Reta** e clique sobre os pontos *D* e *E* para construir a reta $\overleftrightarrow{DE}$.

  e) Construa uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$ passando por um dos pontos médios (*D* ou *E*). Para isso, selecione a ferramenta **Reta Paralela**, clique sobre o lado $\overline{AB}$ e sobre o ponto *D*, por exemplo.

  Por fim, oriente os alunos a manipularem a construção, para que investiguem e, posteriormente, justifiquem a resposta dada ao problema proposto na tarefa, utilizando os conteúdos estudados.

- No trabalho sugerido com o *software* de Geometria dinâmica, os alunos são desafiados a decompor problemas, reconhecer padrões, filtrar, classificar e organizar informações relevantes e construir algoritmos, desenvolvendo assim, o pensamento computacional. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral desse **Suplemento para o professor**.

BNCC Ao desenvolver o trabalho com o *software* de Geometria dinâmica, os alunos podem, por meio de tecnologias digitais, se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, elaborar e resolver problemas, exercendo protagonismo na vida pessoal e coletiva, desenvolvendo, assim, a **Competência geral 5** da BNCC.

Páginas 16 a 18

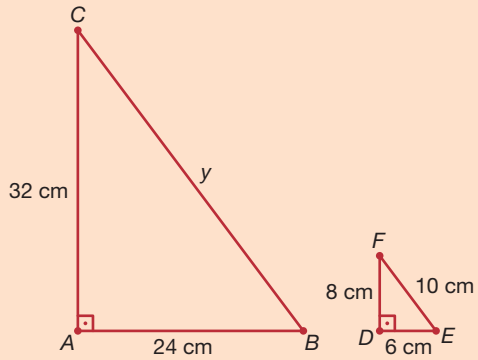
- O tópico **Semelhança de triângulos** favorece a utilização de *softwares* de Geometria dinâmica. No *site* do GeoGebra, *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de Geometria e Álgebra, é possível encontrar algumas tarefas envolvendo esse conteúdo. Essas tarefas podem ser acessadas no *link* <https://www.geogebra.org/search/semelhan%C3%A7a%20de%20triangulos>. Acesso em: 3 maio 2020. Outras sugestões para as elaborações de tarefas envolvendo *softwares* de Geometria dinâmica e semelhança de triângulo podem ser encontradas no artigo Atividades com o GeoGebra: uma proposta para o ensino de semelhança, de Marcos Fabrício Ferreira Pereira. Disponível em: <https://jem.unifesspa.edu.br/images/2JEM/ANAIS/CC/ATIVIDADES_COM_O_GEOGEBRA_UMA_.pdf>. Acesso em: 3 maio 2020.
- Antes de propor as tarefas desse tópico é importante verificar se os alunos compreenderam os casos de semelhança. Para isso, proponha que resolvam, em duplas, algumas tarefas relacionadas a essa temática.

MODERNA

Sugestão de avaliação

Para verificar como os alunos estão lidando com o conteúdo desse tópico, avalie a conveniência de escrever na lousa a tarefa a seguir pedindo a eles que copiem no caderno para resolvê-la.

Considere os triângulos *ABC* e *DEF*.



RONALDO INÁCIO

a) Esses triângulos são semelhantes? Se sim, qual caso garante essa semelhança?

b) Qual é o valor de *y*, em centímetros?

Resoluções e comentários

a) Nesses triângulos, temos:

- $\frac{DE}{AB} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
- $\frac{DF}{AC} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
- $\widehat{A} = \widehat{D}$ (Lê-se: o ângulo $\widehat{A}$ é congruente ao ângulo $\widehat{D}$)

Ou seja, os triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por eles são congruentes. Portanto, pelo caso de semelhança **LAL**, os triângulos *ABC* e *DEF* são semelhantes.

b) Como os triângulos são semelhantes, segue que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{24} \Rightarrow y = 40$$

Portanto, $y = 40$ cm.

Página 19

- Se julgar conveniente, oriente que os alunos utilizem calculadora ou o aplicativo Calculadora do *smartphone* para resolver algumas das tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas**.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

2 As relações métricas e a trigonometria no triângulo retângulo

Objetivos específicos

- Apresentar as relações métricas no triângulo retângulo, com especial ênfase no Teorema de Pitágoras, demonstrando sua validade.
- Utilizar as relações métricas, inclusive o Teorema de Pitágoras, na resolução de situações-problema.
- Reconhecer ângulos notáveis.
- Estabelecer relação em situações distintas e aplicar os resultados genéricos aos casos particulares.
- Utilizar a relação trigonométrica fundamental na resolução de problemas.
- Determinar distâncias inacessíveis utilizando relações trigonométricas.

O tema trata das relações métricas no triângulo retângulo, das quais emerge um dos teoremas mais famosos e importantes de toda a Matemática, o Teorema de Pitágoras. Essas relações são fundamentais para que se dê um passo além no estudo da Geometria, levando a descobertas e construindo ferramentas matemáticas que são de grande utilidade em uma ampla gama de situações práticas (desde a simples medição de terrenos até a Astronomia, por exemplo). Além disso, tais relações métricas fornecem a base teórica para que se introduza com adequado encadeamento lógico os primeiros conceitos e resultados da Trigonometria.

A abordagem trabalhada no tema é tal que, ao mesmo tempo em que estimula a intuição geométrica dos alunos, fazendo-os visualizar a validade de cada relação apresentada com base na percepção empírica, também os orienta no indispensável formalismo lógico, demonstrando com rigor matemático todos os teoremas e relações apresentados. Dessa maneira, procura-se aumentar a maturidade matemática e o senso crítico dos alunos bem como desenvolver a percepção necessária para associar os conteúdos estudados a fenômenos físicos do mundo real.

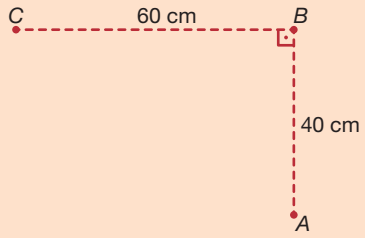
A fim de impulsionar a criatividade geométrica e trigonométrica dos alunos na resolução de problemas, as tarefas propostas englobam uma grande variedade de situações que, cada qual à sua maneira, demandam a capacidade de interpretar informações e abstrair dados na construção de esquemas gráficos envolvendo triângulos retângulos para que, em seguida, sejam aplicados os conhecimentos teóricos capazes de fornecer uma resposta satisfatória.

Provavelmente, os alunos já estudaram as relações métricas no triângulo retângulo no Ensino Fundamental. Com o intuito de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca do tema, proponha problemas contextualizados que direcionem suas atenções às relações envolvendo triângulos retângulos. Uma sugestão de problema que possibilita esse diagnóstico é apresentada a seguir.

MODERNA

Sugestão de avaliação

Observe na imagem o caminho percorrido por um inseto para ir do ponto *A* ao ponto *C*, passando por *B*.



RONALDO INÁCIO

Se esse inseto tivesse feito o caminho entre *A* e *C* em linha, qual seria a distância percorrida por ele?

Resolução e comentários

Note que o triângulo *ABC* é retângulo. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, segue que:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(AC)^2 = 40^2 + 60^2$$
$$(AC)^2 = 1\,600 + 3\,600$$
$$(AC)^2 = 5\,200$$
$$AC = \sqrt{5\,200}$$
$$AC \simeq 72{,}11$$

Note que $AC \simeq 72{,}11$, pois $AC > 0$.

Portanto, o inseto teria percorrido, aproximadamente, 72,11 cm.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas estão disponíveis no tópico **Avaliação** deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Os assuntos abordados nesse tema contemplam aspectos da habilidade **EM13MAT308**, fornecendo bases para a elaboração e a resolução de problemas envolvendo triângulos em variados contextos. Desse modo, aborda aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

- Refinando a percepção geométrica, esse estudo exercita nos alunos a habilidade de enxergar propriedades de triângulos em esquemas gráficos que representem situações reais, facilitando a resolução de problemas das mais variadas espécies, desde situações envolvendo medições até, futuramente, em problemas das **Ciências da Natureza**.

Páginas 20 e 21 A corda de 13 nós

- O tema é introduzido por meio da apresentação de um procedimento prático, conhecido como "a corda de 13 nós", que civilizações antigas utilizavam para construir ângulos retos, os quais são de grande importância em edificações e em demarcações de terras. Mais do que mostrar uma prática envolvendo triângulos retângulos, pretende-se, comentando sobre tal procedimento, despertar a curiosidade quanto ao motivo pelo qual ele é válido.

A fim de desenvolver um trabalho com Etnomatemática, solicite que os alunos pesquisem outras estratégias de construção de ângulos retos, adotadas em diferentes regiões, para que, em posterior debate, exponham suas opiniões acerca da temática. Por fim, explique-lhes a importância de valorizar e respeitar a cultura de cada povo.

Ao trabalhar com a questão **A**, para que os alunos sintam um pouco da experiência dos antigos egípcios, organize-os em grupos e entregue a cada um deles pedaços de barbante. Em seguida, peça para que tentem construir triângulos retângulos com outras quantidades de nós, anotando os sucessos e os casos em que a construção não tenha sido possível. Pergunte se, agindo assim, sem utilizar o conhecimento do Teorema de Pitágoras, eles são capazes de garantir, sem margem para dúvidas, quais quantidades de nós possibilitam a delimitação de um ângulo reto e quais não permitem tal construção. Faça-os perceber que o método da tentativa e do erro, além de ser demorado e trabalhoso, não proporciona certezas nem indica maneiras diretas de se determinar novas configurações ou de ser aproveitado em casos mais gerais, restringindo-se tão somente à aplicabilidade experimental.

- Para desenvolver o conteúdo proposto neste tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirarem das linhas gerais dos conteúdos propostos e a pesquisarem problemas envolvendo as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, registrando possíveis dúvidas. Em seguida, permita que eles conversem aos pares sobre esses problemas para que, depois, apresentem as conclusões para toda a sala. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Os assuntos trazidos à tona nessas páginas permitem o trabalho com a **Competência geral 1** da BNCC. Ao fornecer embasamento histórico quanto ao desenvolvimento das ideias e dos recursos matemáticos desde suas origens em práticas experimentais rudimentares, valoriza-se a percepção das contribuições de diferentes culturas, em diferentes épocas e lugares, na edificação progressiva do conhecimento sobre o mundo físico. Assim, é possível compreender melhor a evolução do pensamento humano, com suas técnicas e abordagens diversificadas, para entender e explicar a realidade.

Sala dos professores

Avalie a conveniência de preparar uma aula em conjunto com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do com-

EDITORIA

ponente curricular **História**, a fim de apresentar mais aspectos históricos tanto sobre os antigos egípcios quanto sobre a época de Pitágoras, em especial para evidenciar como as diferenças socioculturais tornaram uma civilização mais propensa do que a outra para cada tipo de progresso técnico e matemático, o que evidencia como a pluriculturalidade pode ser benéfica aos saberes da humanidade como um todo.

É relevante que os alunos conheçam a existência da Escola Pitagórica e tome ciência de suas ideias filosóficas, percebendo como, em outras épocas, Matemática, Filosofia e Religião ainda não eram ramos inteiramente separados, mas que se confundiam entre si. Para tanto, também pode ser produtivo preparar a aula em conjunto com um professor do componente curricular **Filosofia**, para que se trate dos pensamentos esotéricos dos pitagóricos e de como tais pensamentos influenciaram em suas descobertas matemáticas (por vezes estimulando-as – como no caso do Teorema de Pitágoras –, por vezes limitando-as – como no caso da negação à existência dos números irracionais).

Resolução e comentários

B Seja x o comprimento do maior lado desse triângulo. Se os lados menores têm 20 cm e 99 cm de comprimento, então:

$$x^2 = 20^2 + 99^2$$
$$x^2 = 400 + 9\,801$$
$$x^2 = 10\,201$$
$$x = 101$$

Note que $x = 101$, pois $x > 0$.

Portanto, o maior lado desse triângulo tem 101 cm de comprimento.

Página 22

- É importante, na dedução das relações métricas, fazer com que os alunos percebam as implicações lógicas que acarretam nos resultados, de modo a não restar dúvidas quanto à validade dessas relações. Esse cuidado no ensino é fundamental não só para que os alunos de fato compreendam os teoremas e não necessitem decorá-los de modo irrefletido, mas também para acostumá-los a um pensamento dedutivo mais rigoroso, capaz de fornecer certezas com alto grau de generalização.

  Na obtenção das relações métricas, deve ficar claro para os alunos que elas são decorrências lógicas da semelhança de triângulos. Por isso, a principal preocupação do professor nesta etapa deve ser a de conseguir fazer com que os alunos realmente enxerguem o raciocínio que leva às relações, capacitando-os a reproduzi-lo, se necessário, para que a resolução de problemas futuros não dependa exclusivamente da memória, mas se apoiem também no entendimento, na criatividade e na dedução.

Resoluções e comentários

A

- Analisando os triângulos ABC e ABH separadamente, podemos notar que $B\hat{A}C = A\hat{H}B$, pois ambos são retos, e que $A\hat{B}C = H\hat{B}A$, pois é comum aos dois triângulos. Portanto, pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos ABC e ABH são semelhantes.
- Analogamente, analisando os triângulos ABH e ACH separadamente, podemos notar que $B\hat{H}A = C\hat{H}A$, pois ambos são retos. Além disso, temos:

  $$B\hat{A}H = 180° - 90° - \hat{B} = A\hat{C}H$$

  Portanto, pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos ABH e ACH são semelhantes.

B

- Decorrente da semelhança dos triângulos ABC e ABH, podemos estabelecer a seguinte relação:

  $$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$$

- Decorrente da semelhança dos triângulos ABH e ACH, podemos estabelecer a seguinte relação:

  $$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot m$$

- Decorrente da semelhança dos triângulos ABH e ACH, podemos estabelecer a seguinte relação:

  $$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

Página 23

- Na manipulação algébrica das equações resultantes das relações métricas, é muito comum que surjam casos em que a incógnita esteja elevada ao quadrado. No exercício resolvido **R1**, por exemplo, obtém-se a equação $x^2 = 180$. Sempre que oportuno, não se esqueça de alertar aos alunos que esse tipo de equação possui duas raízes (uma positiva e outra negativa), mas que apenas uma delas é a solução para o problema, pois o comprimento de um segmento de reta é sempre um valor positivo.
- A tarefa **4** se relaciona com as culturas juvenis dos mangás. Alguém da turma se interessa por mangás? Os alunos preferem mangás ou gibis tradicionais? Quais são seus títulos favoritos? Os mangás são mais interessantes do que suas adaptações em animes e filmes? Por quê? Envolva a sala na discussão, desperte o ânimo dos alunos e converse sobre o tema.
- No item **a** da tarefa **4**, explique aos alunos que um polígono é dito inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos da circunferência.
- As relações métricas no triângulo retângulo, e posteriormente os resultados da Trigonometria, são úteis em muitas áreas das **Ciências da Natureza**, principalmente na **Física**, quando se trabalha com vetores para descrever velocidade, aceleração e forças atuantes sobre um dado objeto. Para obter a velocidade de uma partícula, por exemplo, é frequente que se tenha de adicio-

MODERNA

nar os vetores de sua velocidade no eixo horizontal com a velocidade no eixo vertical, de onde quase sempre ocorre o surgimento de um triângulo retângulo. Reciprocamente, uma mesma velocidade pode ser decomposta em seus componentes verticais e horizontais, o que facilita os cálculos em várias situações, como na cinemática do arremesso de um projétil. Esse é um dos exemplos que revelam a utilidade da Matemática na investigação científica para descrever, compreender e prever fenômenos da realidade.

Páginas 24 e 25

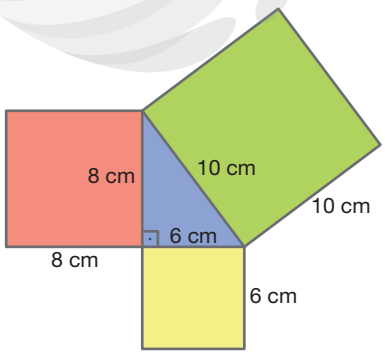
- O Teorema de Pitágoras é possivelmente o teorema mais famoso de toda a Matemática. Além disso, sua história é rica e tem um significado ímpar. Por essas razões, é desejável que se dê grande ênfase a seu estudo. Sabe-se que o fato de o quadrado da hipotenusa ser igual à soma dos quadrados dos catetos é algo que já havia sido percebido por várias civilizações muito anteriores a Pitágoras.

  Sobre o assunto, Maria Helena Souza explica que:

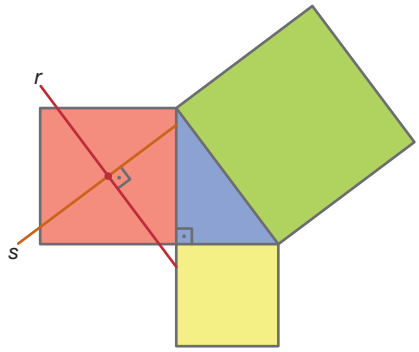
> A originalidade pitagórica foi a introdução da ideia de matemática abstrata, estabelecida na Grécia, na primeira metade do século V a.C., e que serviu de referência para o seu desenvolvimento entre as épocas de Tales e de Euclides. O que se enfatiza [...] é a passagem de uma matemática marcada por cálculos e técnicas operatórias, realizada por babilônios e egípcios, para outra mais teórica, a praticada pelos gregos, que se consolidou com base em argumentações e demonstrações consistentes.
>
> SOUZA, Maria Helena. *21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.

- Um teorema não possui, necessariamente, apenas uma demonstração. No caso do Teorema de Pitágoras, mais de trezentas provas diferentes são hoje conhecidas, variando em complexidade e nas abordagens empregadas.
- Após a introdução do conteúdo abordado nessa página, incentive os alunos a realizar uma pesquisa sobre as outras demonstrações do Teorema de Pitágoras. Veja a seguir uma demonstração geométrica.

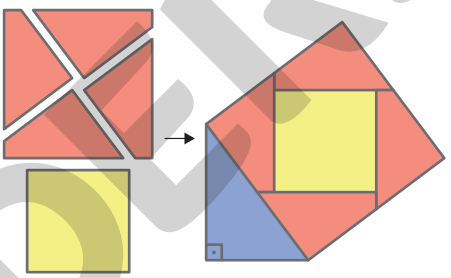
  Construa, numa folha de papel, uma região determinada por um triângulo retângulo cujos catetos tenham 6 cm e 8 cm de comprimento, e a hipotenusa, 10 cm. Em seguida, a partir de cada um dos lados desse triângulo, construa uma região quadrada, conforme mostra a figura.



Marque o ponto central da região quadrada com 8 cm de lado e trace uma reta *r*, paralela à hipotenusa do triângulo, que passe por esse ponto. Depois, trace uma reta *s*, perpendicular a *r* no ponto marcado.



Recorte as regiões quadradas de 6 cm e 8 cm de lado e corte as retas marcadas, obtendo, assim, cinco regiões poligonais. Utilize essas regiões para sobrepor a região quadrada de 10 cm de lado. Verifique que a área da região quadrada construída a partir da hipotenusa do triângulo é igual à soma das áreas das regiões quadradas construídas a partir dos catetos.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Utilizando esse mesmo procedimento, é possível demonstrar a validade do Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos cujos lados possuem comprimentos expressos por números reais.

- O problema resolvido **R2** permite o desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um algoritmo para cálculos a fim de se determinar o comprimento de um dos lados de um triângulo retângulo, dados os outros dois, promove uma compreensão mais detalhada e organizada dos procedimentos algébricos, viabilizando uma estruturação ordenada que, posteriormente, poderá ser implementada em um programa de computador. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Se achar conveniente, explique aos alunos que, segundo a normativa ISO 5807, em um fluxograma podem ser utilizados vários outros símbolos cujos significados podem ser consultados no *site*. Disponível em: <http://www.cantareira.br/thesis2/ed_1/1_navarro.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2020.

MODERNA

Página 26

- Ao trabalhar com a tarefa **8**, destaque a importância de se conhecer a História da Matemática. Estudar as origens dos conhecimentos hoje já consolidados é importante para que se reconheça os méritos das gerações passadas e para compreender que a Matemática não é algo que surge "do nada" ou que já está pronto e acabado, mas, sim, que ela é fruto do trabalho coletivo de pensadores de inúmeras épocas e lugares, os quais acrescentam suas descobertas e invenções ao conhecimento geral. Esse tipo de comentário é importante para que os alunos percam a ingenuidade quanto ao desenvolvimento da Matemática, em particular, e da ciência, em geral, passando a compreender que o conhecimento humano é algo que está em permanente construção.

BNCC

A tarefa **9** tem relação com o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**. Os painéis fotovoltaicos para captação de energia solar, mencionados na tarefa, são boas alternativas para a alimentação da energia elétrica de uma residência. Essa fonte de energia, além de ser não poluente, é mais barata do que as fontes tradicionais, sendo, portanto, ambientalmente sustentável e economicamente favorável. Além disso, essa tarefa possui conexão com a **Competência específica 1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global."

Na tarefa, a Matemática é utilizada como ferramenta para viabilizar a utilização de painéis fotovoltaicos, incentivando os alunos a analisar processos tecnológicos ambientalmente sustentáveis, com base nas interações entre matéria e energia, para pensar sobre ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos ambientais e melhorem as condições de vida.

Página 27

- Ao desenvolver a pesquisa proposta no item **d** da tarefa **12**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 28 e 29 Acessando tecnologias

- O trabalho com a seção **Acessando tecnologias** poderá ser realizado no laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se de que todos os computadores possuam o *software* VisualG instalado, por meio do qual a tarefa será realizada. O *download* pode ser feito gratuitamente no *site* <https://visualg3.com.br>. Acesso em: 8 maio 2020.

  Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e atente-se ao fato de que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

  A fim de que os alunos trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitar as instruções correspondentes no *software* e atribuir valores às variáveis definidas.

- Ao trabalhar com o item **2**, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- A construção de um algoritmo em linguagem de programação para cálculos envolvendo o Teorema de Pitágoras faz com que os alunos comecem a notar os benefícios que tal linguagem proporciona. Além disso, a tarefa proposta oportuniza uma nova abordagem para o problema resolvido **R2** da página **24**. Assim, a experiência favorece a compreensão das diferentes maneiras existentes para se obter a solução de um mesmo problema, evidenciando os benefícios de cada uma delas. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC

A seção **Acessando tecnologias** contempla a habilidade **EM13MAT405** e aspectos da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Nas tarefas propostas, conceitos iniciais de uma linguagem de programação são utilizados para a implementação de um algoritmo que permita, computacionalmente, determinar o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo, desde que se informe os comprimentos do outro cateto e da hipotenusa. Além disso, os alunos utilizam diferentes linguagens, possibilitando que, a partir delas, eles se expressem e partilhem informações, experiências, ideias e sentimentos, como sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

MODERNA

Agora é com você! **Resoluções**

1 O comprimento de um dos catetos do triângulo retângulo.

2 Possível resposta:

```
1  Algoritmo "pitagoras_cateto"
2  Var
3  a, b, c: real
4  Inicio
5  escreva("Digite o comprimento da hipotenusa: ")
6  leia(c)
7  escreva("Digite o comprimento de um dos
   catetos: ")
8  leia(a)
9  b <- raizq(c*c–a*a)
10 escreva("O comprimento do outro cateto
   é: ",b)
11 Fimalgoritmo
```

Página 31

- Para introduzir os conteúdos do tópico **Relações envolvendo seno, cosseno e tangente**, peça aos alunos que construam diferentes triângulos retângulos e, com o auxílio de régua e transferidor, verifiquem a validade das igualdades apresentadas.

Página 36 Acessando tecnologias

- É possível desenvolver o trabalho com essa seção utilizando o programa Calc, que é uma planilha eletrônica do pacote LibreOffice, versão gratuita de aplicativos que inclui, além da planilha eletrônica, editores de textos, de apresentações, de desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o *site* <https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/>. Acesso em: 30 abr. 2020.
- Uma sugestão para o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** é utilizar, se possível, o laboratório de informática da escola. Para isso, verifique antecipadamente se todos os computadores possuem o *software* necessário para o desenvolvimento do contexto. Durante a tarefa, caso os alunos apresentem dificuldades, auxilie-os na execução das etapas propostas.
- Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e atente-se ao fato de que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

- Ao trabalhar com a tarefa proposta na seção **Acessando tecnologias**, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Organize os alunos em grupos e lhes apresente, fora de ordem, as instruções para a construção de uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente. Em seguida, peça para que os grupos tentem organizar as etapas e concluir a tarefa, compondo a tabela com os valores corretos e dentro da aproximação solicitada de seis casas decimais. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- As tarefas da seção **Acessando tecnologias** favorecem o pensamento computacional. Por meio da construção da tabela trigonométrica em uma planilha eletrônica, evidencia-se a possibilidade de se valer de recursos computacionais na resolução de problemas que envolvam triângulos. Estimula-se, portanto, a versatilidade em traduzir ideias de um registro a outro, verificando a conveniência de cada linguagem ou ferramenta nos problemas práticos. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! **Resoluções**

1 Para a construção da tabela trigonométrica, basta seguir os passos apresentados na seção. Porém, fique atento! No passo **F**, deve-se deixar os valores de seno, cosseno e tangente com seis casas decimais.

2 Para calcular, com auxílio de uma planilha eletrônica, o *sen* 30,5°, o *cos* 42,25° e a *tg* 25,71°, podemos fazer o passo a passo a seguir.

A. Digite os textos na planilha como na figura a seguir.

	A	B	C	D	E
1		Ângulo			
2	em graus	em radianos	Seno	Cosseno	Tangente
3					
4					
5					

SERGIO L. FILHO

B. Na célula **A3**, digite 30,5, que corresponde a 30,5° e, em **B3**, digite = radianos(A3) e pressione a tecla **Enter** para converter a unidade graus em radianos, já que, em geral, as planilhas utilizam radianos para o cálculo das razões trigonométricas.

C. Na célula **A4**, digite 42,25 para indicar 42,25°. Em seguida, para converter a unidade graus em radianos, repita, na célula **B4**, o procedimento do passo **B**.

D. Na célula **A5**, digite 25,71 para indicar 25,71°. Em seguida, para converter a unidade graus em radianos, repita, na célula **B5**, o procedimento do passo **B**.

E. Na célula **C3**, digite = sen(B3) e pressione a tecla **Enter**. O valor do seno do ângulo indicado na célula **B3** será calculado.

MODERNA

F. Na célula D4, digite $= \cos(B4)$ e pressione a tecla **Enter**. O valor do cosseno do ângulo indicado na célula **B4** será calculado.

G. Na célula E5, digite $= \tan(B5)$ e pressione a tecla **Enter**. O valor da tangente do ângulo indicado na célula **B5** será calculado.

SERGIO L. FILHO

	A	B	C	D	E
1	Ângulo				
2	em graus	em radianos	Seno	Cosseno	Tangente
3	30,5	0,532325	0,507538		
4	42,25	0,737402		0,740218	
5	25,71	0,448724			0,481482

Portanto:

a) *sen* 30,5° ≃ 0,507538.

b) *cos* 42,25° ≃ 0,740218.

c) *tg* 25,71° ≃ 0,481482.

Página 40

Na tarefa **31**, verifique a conveniência de trabalhar com a metodologia ativa **Think-pair-share**. A tarefa envolve um contexto de Astronomia que pode ser novo para os alunos, e por isso pode ser desafiador. Ao empolgá-los com o tema e motivá-los a perceber o uso criativo da Matemática na relação entre trigonometria e Ciências da Natureza, peça que os alunos tentem resolver esse problema individualmente para, depois, reunirem-se com um colega a fim de discutirem os raciocínios empregados. Em seguida, peça que as duplas apresentem as conclusões para toda a sala. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC

A tarefa **31** da página **40** se associa à **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

Nessa tarefa, recursos trigonométricos são aplicados para analisar e interpretar fenômenos astronômicos de relevância para a dinâmica da vida na Terra. Por meio desse tipo de análise, capacita-se os alunos a elaborar argumentações coerentes no sentido de explicar o funcionamento da natureza, bem como os instruem na realização de previsões, com embasamento científico, acerca dos fenômenos naturais. Com tais conhecimentos, fomenta-se a capacidade dos alunos de fundamentar e defender atitudes éticas e responsáveis nas situações que envolverem tomadas de decisões quanto a elementos da natureza.

Página 41

- No destaque **Ser Consciente**, com o objetivo de uma ênfase a aspectos colaborativos, utilize a metodologia ativa **Gallery walk** ao propor que os alunos apresentem os resultados de sua pesquisa. Essa metodologia favorece a aprendizagem social, cognitiva e construtivista, além de destacar as opiniões, ideias e experiências dos alunos. Mais informações sobre **Gallery walk** podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC

A tarefa **32** permite abordar o tema contemporâneo transversal **Educação em direitos humanos**. Nessa tarefa, os conhecimentos técnicos de trigonometria são úteis para observar o respeito à legislação que protege pessoas com deficiências físicas, promovendo a inclusão social. Assim, revela-se uma inusitada, mas necessária, aplicação da Matemática para favorecer a garantia dos direitos à liberdade e à igualdade das pessoas com deficiência, sem os quais não se pode concretizar o desenvolvimento pleno dos indivíduos.

A tarefa **33** contempla aspectos da habilidade **EM13MAT308**, ao propor a participação ativa e criativa dos alunos para elaborar uma questão envolvendo relações métricas e trigonometria no triângulo retângulo. Essa "inversão de perspectiva" é positiva, pois faz com que os alunos pensem nos assuntos estudados por um novo ponto de vista, possibilitando-os a compreender com maior profundidade a matéria e a adquirir mais habilidade no manuseio dos assuntos estudados. Ainda mais, estimula uma postura menos passiva no processo de ensino e aprendizagem, indo além da resolução de problemas e vislumbrando as inúmeras possibilidades na criação deles.

- Ao fim do trabalho com este tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite, se possível, que os alunos comentem quais eles pensam ser as vantagens dos estudos matemáticos sobre relações métricas e trigonometria no triângulo retângulo. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

3 Trigonometria em um triângulo qualquer

Objetivos específicos

- Utilizar a lei dos senos e a lei dos cossenos na resolução de situações-problema.
- Compreender em quais situações é mais conveniente utilizar a lei dos senos ou a lei dos cossenos.
- Obter o comprimento dos lados ou a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, dados o comprimento de alguns lados ou a medida de alguns ângulos.

Procura-se conectar os conteúdos desse tema com situações práticas, por exemplo, medidas de distâncias inacessíveis, a fim de que os alunos sejam capazes de resolver problemas do cotidiano.

O estudo da Trigonometria no Ensino Médio possibilita uma aprendizagem contextualizada considerando seu desenvolvimento histórico e suas aplicações. Se julgar conveniente, organize debates com o intuito de explorar situações em que se faz necessário conhecer a respeito dessa temática evidenciando sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, como na Astronomia, Física, Engenharia, entre outras, tendo em vista que elas estão direta ou indiretamente relacionadas com o dia a dia dos jovens.

Os conteúdos estudados nesse tema estabelecem relações com a trigonometria na circunferência e funções trigonométricas, fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas, e áreas de figuras planas, que serão estudadas em temas posteriores.

BNCC Os conteúdos abordados nesse tema possibilitam o desenvolvimento da **Competência geral 1** da BNCC, no intuito de valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Além disso, as tarefas propostas visam oportunizar a aplicação das leis do seno e do cosseno na resolução e na elaboração de problemas que envolvam triângulos em diferentes contextos, contemplando assim, a habilidade **EM13MAT308** da BNCC. Desse modo, aborda-se aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Páginas 44 e 45 Triangulação

- Essas páginas visam incentivar o conhecimento acerca da trigonometria apresentando o contexto histórico da criação do metro como uma unidade de medida de comprimento. Um modo de conduzir o trabalho com essas páginas seria realizar uma leitura coletiva do texto e, em seguida, promover um debate acerca da temática exposta.

Se julgar necessário, explique aos alunos que:

› meridianos são linhas imaginárias que cortam a superfície da Terra no sentido Norte-Sul, ligando um polo ao outro. São utilizados como referência na localização de um ponto em qualquer parte do planeta. O principal é o meridiano de Greenwich, que divide a Terra em Leste e Oeste.

› paralelos são linhas imaginárias que circulam a Terra no sentido Leste-Oeste. Assim como os meridianos, também são utilizados como referência na localização de um ponto em qualquer parte do planeta. O principal é a linha do Equador, que divide a terra nos hemisférios Norte e Sul.

Na sequência, peça que os alunos expliquem o que entendem por: "A distância entre o Polo Norte e a linha do Equador corresponde a um quadrante de meridiano terrestre". Nesse momento, espera-se que eles compreendam que a distância entre o Polo Norte e a linha do Equador corresponde a um quarto da "circunferência" imaginária que corta a superfície terrestre no sentido Norte-Sul, ligando um polo ao outro. Caso apresentem dificuldades, mostre-lhes a distância em questão dando as devidas explicações e utilizando a representação do planeta Terra apresentada nessas páginas ou até mesmo um globo terrestre.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 46 e 47

- Ao iniciar o trabalho com o tópico **Lei dos senos**, explique aos alunos que esse resultado é muito importante, pois nos possibilita determinar os comprimentos dos lados e a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, relacionando dois lados e seus respectivos ângulos opostos.

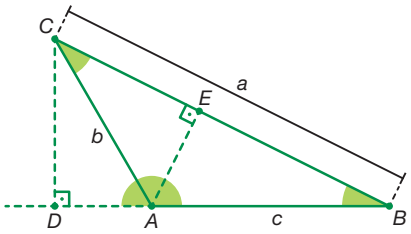
Após apresentar a demonstração da lei dos senos para um triângulo acutângulo, se julgar conveniente, solicite que os alunos demonstrem a validade desse resultado para triângulos obtusângulos e retângulos. A seguir, é apresentada a demonstração para ambos os casos.

› Triângulo obtusângulo

Triângulo obtusângulo é aquele em que pelo menos um ângulo interno é obtuso, ou seja, maior do que 90°.

EM ABERTA

Para demonstrar a lei dos senos para triângulos obtusângulos, vamos considerar o triângulo *ABC*.



Nos triângulos retângulos obtidos ao traçarmos as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, temos:

- $\triangle BCD$: $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{CD}{a} \Rightarrow CD = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$
- $\triangle ACD$: $\operatorname{sen}\left(180° - \hat{A}\right) = \frac{CD}{b} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{CD}{b} \Rightarrow CD = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$
- $\triangle ABE$: $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{AE}{c} \Rightarrow AE = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$
- $\triangle ACE$: $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{AE}{b} \Rightarrow AE = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$

Assim:

$$a \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \quad \text{(I)}$$

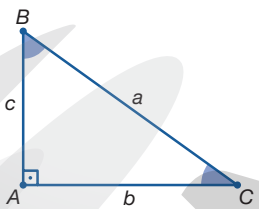
$$c \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad \text{(II)}$$

Portanto, de **I** e **II** segue que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

› Triângulo retângulo

Para demonstrar a lei dos senos para triângulos retângulos, consideramos o triângulo *ABC*.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Nesse triângulo, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \quad \text{(I)}$$

Lembre-se que $\operatorname{sen} 90° = 1$.

Analogamente, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{1} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad \text{(II)}$$

Portanto, de **I** e **II** segue que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Páginas 48 e 49

- Ao desenvolver o trabalho com essas páginas, verifique a possibilidade de aplicar um problema sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC

Aproveite que o contexto trabalhado na tarefa **5** da página **48** fala sobre previsões meteorológicas e estabeleça conexão com o tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**. Promova um debate com a turma a respeito dos métodos utilizados na coleta de dados meteorológicos, como a sondagem, que faz uso do balão meteorológico para coletar informações. Diga aos alunos que nesse método, um dispositivo (sonda) é acoplado a um balão que, ao ser inflado, sobe a altitudes de cerca de 20 a 25 km. Essa sonda faz a leitura das informações referentes ao clima e as envia a um receptor localizado em solo, que as decodifica em mensagens numéricas, que são enviadas aos órgãos responsáveis pela elaboração das previsões meteorológicas. Esses órgãos, por sua vez, decodificam os dados numéricos e transmitem as informações a todos os interessados, como emissoras de televisão, agricultores, aviadores, entre outros.

- Aproveite o contexto apresentado na tarefa **7** da página **49**, que se relaciona com a cultura juvenil dos filmes. Faça perguntas como: "Qual seu gênero de filme preferido? A quais filmes você mais gostou de assistir? Você prefere filmes adaptados de livros ou os próprios livros? Por quê?" Envolva toda a turma, desperte o ânimo dos alunos e converse sobre o tema.

BNCC

A tarefa **10** da página **49** contempla aspectos da habilidade **EM13MAT308**, ao propor a participação ativa e criativa dos alunos para elaborar um problema envolvendo a lei dos senos. Esse tipo de tarefa faz com que os alunos pensem nos assuntos estudados sob um novo ponto de vista, possibilitando que eles compreendam com maior profundidade os conteúdos estudados.

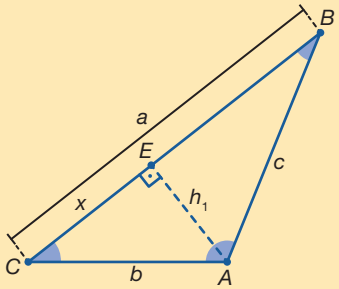
Páginas 50 e 51

- Ao iniciar o trabalho com o tópico **Lei dos cossenos**, explique aos alunos que, assim como a lei dos senos, esse resultado é muito importante, pois possibilita a determinação do comprimento de lados e da medida dos ângulos de um triângulo qualquer, relacionando os três lados e um ângulo do triângulo.

MODELO

Resolução e comentários

- No triângulo *ABC*, traçamos a altura relativa ao lado $\overline{CB}$.



No triângulo *ACE*, temos:

$$b^2 = h_1^{\,2} + x^2 \quad \text{(I)}$$

Adicionando $\left(-x^2\right)$ a ambos os membros da equação, obtemos:

$$h_1^{\,2} = b^2 - x^2 \quad \text{(II)}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos \widehat{C} \quad \text{(III)}$$

No triângulo *ABE*, segue que:

$$c^2 = h_1^{\,2} + (a - x)^2 \quad \text{(IV)}$$

Adicionando $(a - x)^2$ a ambos os membros da equação e desenvolvendo $-(a - x)^2$, obtemos:

$$h_1^{\,2} = c^2 - a^2 + 2ax - x^2 \quad \text{(V)}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{a - x}{c} \Rightarrow x = -c \cdot \cos \widehat{B} + a \quad \text{(VI)}$$

Substituindo **V** em **I**, temos:

$$b^2 = h_1^{\,2} + x^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2 + x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 + 2ax \quad \text{(VII)}$$

Substituindo **VI** em **VII**, segue que:

$$b^2 = c^2 - a^2 + 2ax \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 + 2a \cdot$$
$$\cdot \left(-c \cdot \cos \widehat{B} + a\right) \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}$$

Substituindo **II** em **IV**, temos:

$$c^2 = h_1^{\,2} + (a - x)^2 \Rightarrow c^2 = b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2ax \quad \text{(VIII)}$$

Substituindo **III** em **VIII**, segue que:

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ax \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C}$$

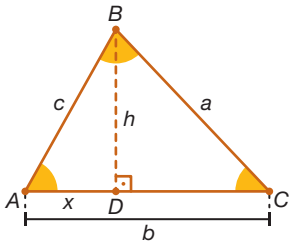
Portanto,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \text{ e } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C}.$$

- Explique para os alunos que a lei dos cossenos é válida para todos os triângulos e, se julgar conveniente, peça que demonstrem a validade desse resultado para triângulos acutângulos e retângulos. A seguir, é apresentada a demonstração para os triângulos acutângulos. No caso dos triângulos retângulos, vide o problema resolvido **R5**, da página **51**.

› Triângulo acutângulo

Para demonstrar a lei dos cossenos para triângulos acutângulos, consideramos o triângulo *ABC* e traçamos a altura relativa ao lado $\overline{AC}$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

No triângulo *BCD*, temos:

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \quad \text{(I)}$$

No triângulo *ABD*, segue que:

$$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2 \quad \text{(II)}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos \widehat{A} \quad \text{(III)}$$

Substituindo **II** em **I**, temos:

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bx \quad \text{(IV)}$$

Substituindo **III** em **IV**, obtemos:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bx \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \text{ e } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C}.$$

Páginas 52 e 53 — Resolvendo por etapas

- Para desenvolver o trabalho com essa seção é possível utilizar a metodologia ativa **Design thinking**. Para isso, proponha que os alunos resolvam, em grupo, o problema proposto na seção antes de apresentá-la. Essa proposta é interessante para que os alunos possam obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 54 a 56

- Após os alunos solucionarem o problema proposto na tarefa **18**, solicite que realizem uma pesquisa exploratória sobre o uso de instrumentos tecnológicos, em especial os *drones*, para que, em debate posterior, exponham seus resultados e suas opiniões sobre a temática. Uma possibilidade é orientá-los a pesquisar sobre o uso de *drones* na topografia.
- Ao desenvolver a pesquisa proposta na tarefa **21**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre

MODERNA

esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC A tarefa **21** propõe que os alunos elaborem um problema envolvendo a lei dos cossenos, contribuindo assim para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**. O processo de elaboração de problemas, além de estimular a investigação, possibilita que os alunos reflitam sobre os conteúdos estudados por um novo ponto de vista.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite que expliquem qual é a importância do estudo de trigonometria em um triângulo qualquer na Matemática, na Ciência, no desenvolvimento tecnológico e em situações da vida cotidiana. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

4 Trigonometria na circunferência

Objetivos específicos

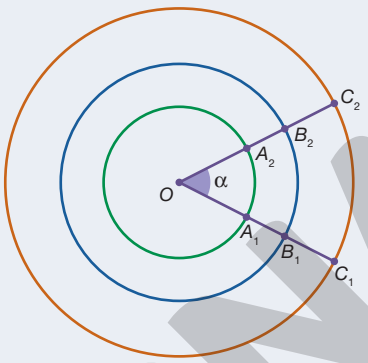
- Conceituar as medidas de arcos em graus e em radianos.
- Entender a relação entre o comprimento de um arco e suas diferentes formas de representação.
- Generalizar resultados para qualquer número de voltas na circunferência trigonométrica.
- Determinar o quadrante e o número de voltas completas de um ângulo qualquer a partir da circunferência trigonométrica.
- Ampliar os conceitos de seno, cosseno e tangente para arcos trigonométricos e trabalhar a redução ao 1º quadrante.

Esse tema aborda conteúdos que tratam de medidas na circunferência trigonométrica. É objetivo desse tema propiciar aos alunos uma compreensão significativa da circunferência trigonométrica e a ampliação de conceitos de seno, cosseno e tangente para arcos trigonométricos.

A tarefa apresentada a seguir pode ser desenvolvida durante a introdução desse tema, com a finalidade de atribuir maior significado aos conceitos que serão trabalhados.

Para a realização dessa tarefa, os alunos precisarão de régua, compasso e transferidor.

Peça aos alunos que desenhem, utilizando o compasso, três circunferências concêntricas com raios de comprimentos diferentes. Em seguida, peça que tracem, a partir do centro das circunferências, dois segmentos de reta formando um ângulo α, determinando, assim, nas três circunferências, os pontos A_1, B_1 e C_1 em um dos segmentos, e os pontos A_2, B_2 e C_2 no outro segmento.



RONALDO INÁCIO

Oriente os alunos a medir e anotar os valores do ângulo α e dos raios das três circunferências. Suponha que o ângulo obtido meça 54°, e os raios dessas circunferências tenham 3 cm; 4,7 cm e 6,9 cm de comprimento, respectivamente. Assim, calculamos, em valores aproximados, os comprimentos de cada circunferência e, por meio de uma regra de três, calculamos também os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{B_1B_2}$ e $\overset{\frown}{C_1C_2}$ que, nesse caso, são 2,83 cm; 4,43 cm e 6,5 cm, respectivamente.

Depois, solicite que calculem a razão entre o comprimento do arco de circunferência e o comprimento do raio da circunferência que contém esse arco. Ao calcular as razões para as três circunferências, obtêm-se os respectivos resultados: $\frac{2,83}{3} \simeq 0,943$, $\frac{4,43}{4,7} \simeq 0,943$ e $\frac{6,5}{6,9} \simeq 0,942$. Pergunte aos alunos se eles percebem alguma regularidade nesses resultados.

Para avaliar a compreensão dos alunos, questione-os sobre qual seria o valor aproximado da razão entre o comprimento do arco determinado pelos segmentos nessa circunferência e o comprimento de seu raio, caso fosse construída outra circunferência concêntrica às anteriores. Diga-lhes que os valores numéricos das razões são iguais. Explique-lhes que, nos cálculos apresentados nesse caso, eles se diferenciaram em razão de imprecisão de medição e de arredondamentos, mas é importante esclarecer que a razão é constante para essas três (ou até mais) circunferências concêntricas, pois o ângulo α permaneceu constante. Assim, a razão entre o comprimento do arco de uma circunferência e o comprimento do raio dessa circunferência depende exclusivamente do ângulo central α que determina o arco.

MODERNA

Se julgar oportuno, proponha que os alunos realizem a tarefa apresentada anteriormente com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica. Nesse caso, uma sugestão de passo a passo para a construção da figura é apresentada a seguir.

A. Com a ferramenta **Ponto**, construa um ponto A qualquer.

B. Construa uma circunferência de centro A. Para isso, selecione a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**, clique sobre o ponto A e sobre outro ponto do plano.

C. De maneira semelhante à apresentada no passo **B**, construa as outras duas circunferências de centro A, de maneira que as três circunferências possuam raios de diferentes comprimentos.

D. Com a ferramenta **Ponto**, construa os pontos E e F, de maneira que $E \neq F$

E. Construa a semirreta $\overrightarrow{AE}$. Para isso, selecione a ferramenta **Semirreta**, clique sobre os pontos A e F.

F. De maneira semelhante à apresentada no passo E, construa a semirreta $\overrightarrow{AF}$.

G. Marque as interseções entre as circunferências e a semirreta $\overrightarrow{AE}$. Para isso, selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, clique sobre uma das circunferências e sobre $\overrightarrow{AE}$. Repita o procedimento clicando sobre as outras circunferências.

H. De maneira semelhante à apresentada no passo **G**, marque as interseções entre as circunferências e a semirreta $\overrightarrow{AF}$.

Para que os alunos meçam:

- o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AF}$, oriente-os a selecionar a ferramenta **Ângulo** e clicar, no sentido anti-horário, sobre os pontos A, E e F.
- o comprimento do raio de cada circunferência, oriente-os a usar a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro** e clicar sobre o centro da circunferência (ponto A) e sobre um ponto pertencente a ela (por exemplo, a interseção entre a circunferência e a semirreta).

Páginas 56 e 57 As misteriosas circunferências de pedras

- Essas páginas propõem o estudo de fatos históricos relacionados às fases de construção de Stonehenge, contextualizando-o com conceitos de circunferência. Alguns desses conceitos eram indispensáveis para que as antigas civilizações fossem capazes de pôr em prática a construção desse tipo de obra.
- Determine um tempo (por exemplo, 15 minutos) para que os alunos leiam o texto e respondam às questões propostas. Em seguida, promova um debate sobre a temática apresentada envolvendo toda a turma. Deixe que exponham seus conhecimentos e opiniões sobre o assunto.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

O assunto exposto nessas páginas viabiliza uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **História**. Nele, o conceito de circunferências é associado a fatos históricos que marcaram a construção de Stonehenge. Nessa abordagem podem ser contextualizadas ideias de circunferência concêntricas e arcos de circunferências para descrever as fases de construção do monumento. Juntamente com o professor de **História**, oriente os alunos para que, reunidos em grupos de três, pesquisem imagens e um breve histórico sobre monumentos, semelhantes ao Stonehenge, construídos pelas civilizações antigas. É importante atentar-se para que diferentes monumentos sejam contemplados na pesquisa.

Página 61

BNCC A intervenção da página **61** por meio do questionamento aborda a habilidade **EM13MAT315**, ao favorecer a organização do pensamento para a construção de um algoritmo e sua organização em um fluxograma. Desse modo, aborda-se aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Resolução e comentários

Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Em seguida, devemos responder às seguintes questões.

1. Quais são os dados de entrada, ou seja, quais são os dados fornecidos no problema?
   R.: Dados de entrada: medida do arco em graus.
2. Quais são os dados de saída, ou seja, quais são os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?
   R.: Dados de saída: medida do arco em radianos.
3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais procedimentos devem ser realizados?
   R.: Neste caso, usaremos uma regra de três. Para isso, indicamos por **a** e **b** a medida do arco em graus e em radianos, respectivamente. Assim:

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
a	b

$$\frac{180}{a} = \frac{\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{a\pi}{180}$$

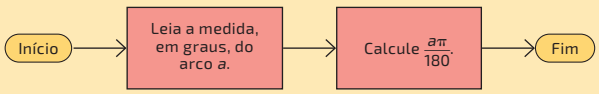
MODERNA

Consequentemente, para converter em radianos a medida de um arco em graus, dividimos o produto entre a medida do arco em graus e π por 180.

Agora, escrevemos um possível algoritmo.

Início
1. Leia a medida, em graus, do arco a.
2. Calcule $\frac{a\pi}{180}$.
Fim

Finalmente, organizamos um fluxograma.



- As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas**, de modo geral, se complementam, pois, ao calcular as medidas dos arcos da circunferência em graus e em radianos, como nas tarefas **1** e **2**, os alunos compreendem conceitos que serão usados para resolver problemas propostos nas tarefas **4**, **5** e **7**, por exemplo.
- Caso os alunos tenham dificuldade na resolução do item **a** da tarefa **4**, questione-os acerca da situação apresentada, de maneira que eles possam compreender melhor o problema. A seguir, são apresentadas algumas sugestões de perguntas.

1 Qual é o comprimento total da pista?

Resolução e comentários

Como o raio da pista tem 500 m de comprimento, segue que o comprimento total da pista C é:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 500 = 3\,140$$

Portanto, o comprimento total da pista é de, aproximadamente, 3 140 m.

2 Quantos metros um ciclista percorrerá ao completar 3 voltas nessa pista?

Resolução e comentários

Como uma volta completa tem, aproximadamente, 3 140 m de comprimento, temos:

$$3 \cdot 3\,140 = 9\,420$$

Portanto, ao completar 3 voltas nessa pista um ciclista percorrerá, aproximadamente, 9 420 m.

Página 62

Sala dos professores

Ao abordar o contexto proposto na tarefa **10**, verifique a possibilidade de elaborar uma aula em conjunto com um professor da área de **Linguagem e suas Tecnologias**, preferencialmente com o do componente curricular **Arte**. Oriente os alunos para que, em grupos, pesquisem outras situações em que a proporção áurea é obtida, como em obras de arte, em elementos da natureza etc.

Páginas 64 e 65 — Acessando tecnologias

- O trabalho com a seção **Acessando tecnologias** poderá ser realizado no laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se de que todos os computadores possuam o *software* VisualG instalado, por meio do qual a tarefa será realizada. O *download* pode ser feito gratuitamente no *site* <http://visualg3.com.br>. Acesso em: 8 maio 2020.
- Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e atente-se ao fato de que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.
- Esse tipo de tarefa possibilita aos alunos entrarem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

A fim de que os alunos trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitar as orientações no *software* e atribuir valores às variáveis definidas.

- Ao trabalhar com essa seção, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- As questões desta seção permitem o desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um algoritmo em linguagem de programação que possibilita obter a 1ª determinação positiva de um arco e a quantidade de voltas completas faz com que os alunos comecem a notar os benefícios que tal linguagem proporciona. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC

A seção **Acessando tecnologias** contempla a habilidade **EM13MAT405** e aspectos da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Nas tarefas propostas, conceitos iniciais de uma linguagem de programação são utilizados para a implementação de um algoritmo que permita, computacionalmente, obter a 1ª determinação positiva de um arco e a quantidade de voltas completas, desde que se informe a medida do arco em graus. Além disso, os alunos utilizam diferentes linguagens, possibilitando que, a partir delas, eles se expressem e partilhem informações, experiências, ideias e sentimentos, como sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

MODERNA

- Se julgar conveniente, ao trabalhar com a questão **1** do **Agora é com você!**, apresente aos alunos os cálculos que serão realizados pelo programa caso a medida do arco seja expressa por um número menor do que zero.

  Caso o usuário digite, por exemplo, -540, o valor atribuído a k será dado pela parte inteira da divisão $-540 : 360$ menos 1, ou seja:

$$k = \underbrace{-1}_{\text{int}(-540:360)} - 1 = -2$$

  Em seguida, para obter a primeira determinação positiva do arco (ou seja, *pdp*), o programa vai executar a seguinte operação:

$$-540 - \underbrace{(-2)}_{k} \cdot 360 = 180$$

  Assim, $pdp = 180°$.

Agora é com você! **Resoluções**

1 O número que expressa a medida do arco digitada pelo usuário deve ser menor do que zero.

2 Possível resposta:

```
1  Algoritmo "Distancia_percorrida_pela_cabine_roda_gigante"
2  Var
3  d, r, c: real
4  Inicio
5  escreva("Digite o comprimento do diâmetro da roda gigante, em metros: ")
6  leia(d)
7  r <- d/2
8  c <- 2*pi*r
9  se(c>2*pi*75) entao
10 escreva("Distância percorrida maior do que a cabine de Singapore Flyer")
11 senao
12 se(c<2*pi*75) entao
13 escreva("Distância percorrida menor do que a cabine de Singapore Flyer")
14 senao
15 escreva("Distância percorrida igual a cabine de Singapore Flyer")
16 fimse
17 fimse
18 Fimalgoritmo
```

Página 67

- Ao trabalhar os conteúdos dessas páginas, lembre os alunos de que os conceitos de seno, cosseno e tangente, estudados anteriormente, foram estabelecidos a partir dos ângulos internos e dos lados do triângulo. No entanto, quando estudamos esses conceitos no ciclo trigonométrico, estendemos o domínio a todos os reais, e os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo foram transcendidos para seno, cosseno e tangente de um arco.

Página 73 Acessando tecnologias

- É possível desenvolver o trabalho com essa seção utilizando o GeoGebra, um *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de Geometria e Álgebra. Nesse programa, podemos realizar diversas construções geométricas utilizando pontos, retas, circunferência e outras curvas, considerando relações entre os elementos envolvidos, como posição relativa, pertinência e interseção. Utilizado em escolas e universidades de diversos países, esse *software* pode ser obtido gratuitamente e está disponível em vários idiomas, inclusive em Português. O *download* pode ser feito no *site* <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 22 abr. 2020.

  Caso as tarefas dessa seção sejam realizadas no laboratório de informática da escola, certifique-se de que todos os computadores estão com o *software* instalado. Uma alternativa é utilizar a versão *on-line* do GeoGebra, disponível no mesmo *site*.

  Esse tipo de tarefa possibilita aos alunos entrarem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- O trabalho pode ser desenvolvido com a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! **Resoluções**

1 1º quadrante; 3º quadrante

2 aproximadamente 0,92 e – 0,92

3 45° e 225°; 135° e 315°

- Ao fim do trabalho com este tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

5 Funções trigonométricas

Objetivos específicos

- Compreender e consolidar o conceito de conjuntos.
- Identificar e representar conjuntos de diferentes maneiras, como chaves e lei de formação.
- Estabelecer relações de pertinência entre objetos e conjuntos.
- Estabelecer relações de continência entre conjuntos.
- Identificar os elementos dos conjuntos de números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.
- Compreender o conceito de funções trigonométricas, destacando os aspectos que caracterizam a função seno e a função cosseno.
- Reconhecer que fenômenos periódicos da natureza podem ser analisados e interpretados por funções trigonométricas.

O estudo sobre funções trigonométricas requer alguns conhecimentos prévios. Nesse aspecto, esse tema aborda a noção de conjuntos, subconjuntos, conjuntos numéricos, módulo de um número real, o conceito de função e as funções trigonométricas. Ao iniciar o trabalho, realize questionamentos a fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos sobre esses assuntos, visto que muitos deles podem ter sido tratados em anos anteriores.

O objetivo desse tema é proporcionar que os alunos relacionem alguns movimentos periódicos presentes no cotidiano e na natureza com as funções trigonométricas, por exemplo, a respiração de um ser humano e a variação das marés.

BNCC Esse tema propicia aos alunos a utilização de estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos relacionados às funções trigonométricas para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados, contemplando, assim, a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Páginas 74 e 75 Variação das marés

- Nessas páginas a noção de periodicidade é relacionada, de maneira intuitiva, às funções trigonométricas.

  Determine um tempo (por exemplo, 15 minutos) para que os alunos leiam o texto e respondam às questões. Em seguida, por meio de um debate com toda a turma, colete informações acerca da compreensão deles a respeito da temática abordada.

  Se julgar conveniente, complemente as informações expostas nessas páginas dizendo aos alunos que a Baía Fundy, localizada na costa atlântica da América do Norte, é conhecida por ter a maior variação de maré do mundo – variação essa de incríveis 16 metros. Informe-os, também, que no Brasil a maior variação de maré acontece no Maranhão e chega a 8 metros.

  Uma maneira de complementar as questões propostas nessas páginas é solicitar que os alunos, em grupos, realizem uma pesquisa sobre outros fenômenos periódicos. Para isso, leve-os ao laboratório de informática ou à biblioteca da escola e oriente-os a escolher um fenômeno (por exemplo, a duração de um dia ou as fases da Lua) e a pesquisar sobre sua periodicidade. Em seguida, peça a cada grupo que apresente as informações coletadas para toda a turma.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirarem das linhas gerais dos conteúdos, registrando possíveis dúvidas. Em seguida, permita que eles conversem aos pares sobre esses conteúdos para que, depois, apresentem as conclusões para toda a sala. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Caso julgue conveniente, proponha um trabalho em conjunto com o professor da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o do componente curricular **Física**. Nesse momento, é importante que o professor de Física explique aos alunos o conceito de forças gravitacionais diferenciais e sua relação com as marés. Mais informações sobre esse assunto estão disponíveis no *site* <http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/aulafordif.htm>. Acesso em: 25 maio 2020. Avalie também a possibilidade de apresentar aos alunos o vídeo "Como funciona a influência da Lua nas marés". Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=sYss-N7EnEw>. Acesso em: 25 maio 2020. Também é possível que eles assistam a esse vídeo em casa.

Página 76

- No tópico **Noção de conjuntos**, após definir os conceitos de conjuntos finitos e conjuntos infinitos, solicite que os alunos, em grupos, escrevam outros exemplos. Por fim, solicite que exponham os conjuntos que escreveram para toda a turma. Aproveite esse momento para instigá-los a representar cada um desses conjuntos de diferentes maneiras (com chaves e lei de formação).

Página 77

Sugestão de avaliação

Após trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, a fim de avaliar a compreensão dos alu-

SOBERANA

nos quanto à relação de pertinência entre um objeto e um conjunto e a relação de continência entre conjuntos, proponha a eles a seguinte tarefa.

Considerando os conjuntos A, B e C, responda às questões.

$$A = \{a \mid a \text{ é primo}\}$$
$$B = \{b \mid b \text{ é um número ímpar}\}$$
$$C = \{c \mid c \text{ é um múltiplo de } 3\}$$

a) O conjunto A está contido no conjunto B? Justifique sua resposta.

b) O número 15 pertence a quais conjuntos?

c) O conjunto C está contido no conjunto B? Justifique sua resposta.

d) Se $b_1 \in B$ e $b_2 \in B$, é correto afirmar que $(b_1 + b_2) \in B$? Justifique sua resposta.

Resoluções e comentários

a) O conjunto A não está contido no conjunto B, pois o número 2 é primo e não é ímpar, ou seja, $2 \in A$ mas $2 \notin B$.

b) Vamos analisar a pertinência do número 15 em cada um dos conjuntos.

- Conjunto A: o número 15 é divisível por 1, 3, 5 e 15. Logo, 15 não é primo e, consequentemente, $15 \notin A$.
- Conjunto B: o número 15 pode ser escrito na forma $2n + 1$, em que n é um número natural.

$$15 = 2 \cdot 7 + 1$$

Logo, 15 é ímpar e, consequentemente, $15 \in B$.

- Conjunto C: note que $15 = 3 \cdot 5$. Assim, 15 é múltiplo de 3 e, consequentemente, $15 \in C$.

Portanto, o número 15 pertence aos conjuntos B e C.

c) Não, pois, por exemplo, $6 \in C$ e $6 \notin B$.

d) Se $b_1 \in B$ e $b_2 \in B$, então podemos escrever $b_1 = 2n_1 + 1$ e $b_2 = 2n_2 + 1$, sendo n_1 e n_2 números naturais. Desse modo:

$b_1 + b_2 = 2n_1 + 1 + 2n_2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 + b_2 = 2n_1 + 2n_2 + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 + b_2 = 2 \cdot (n_1 + n_2) + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 + b_2 = 2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)$

Ou seja, a soma de dois números ímpares é um número par. Portanto, se $b_1 \in B$ e $b_2 \in B$, não é correto afirmar que $(b_1 + b_2) \in B$, pois, nesse caso, temos $(b_1 + b_2) \notin B$.

Página 80

- Após trabalhar com o tópico **Intervalos reais**, realize alguns questionamentos a fim de verificar se os alunos compreenderam os conceitos expostos. Esses conteúdos serão de suma importância para o desenvolvimento do tópico **Funções trigonométricas**. Algumas sugestões de questionamento são:

› Quantos números pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$? Os números π, 2 e 7 pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$?

Caso os alunos apresentem dificuldades, retome o assunto explicando os aspectos necessários.

Página 81

- Caso os alunos apresentem dificuldades no desenvolvimento do item **b** da tarefa **10**, na lousa, escreva na forma de fração a dízima periódica $0,\overline{84}$. A seguir são apresentados os procedimentos necessários para essa representação.

Seja $x = 0,\overline{84}$. Logo:

$$100x = 0,\overline{84} \cdot 100$$
$$100x = 84,\overline{84}$$
$$100x = 84 + \underbrace{0,\overline{84}}_{x}$$
$$100x = 84 + x$$
$$99x = 84$$
$$x = \frac{84}{99}$$

Portanto, $0,\overline{84} = \frac{84}{99}$.

Página 87

- Caso os alunos tenham dificuldades na resolução da tarefa **15**, peça que esbocem os gráficos das funções f e g e questione-os acerca do problema apresentado, de maneira a facilitar a compreensão. A seguir, é apresentada uma sugestão de questão.

Qual é o valor de $h(x)$ para $x = 0$? E para $x = \frac{\pi}{2}$?

Resolução e comentários

Sabemos que:

$h(x) = (g(x))^2 + f(x) - 1 \Rightarrow h(x) = (\operatorname{sen} x)^2 + \cos x - 1$

Calculando o valor de $h(x)$ para $x = 0$, temos:

$h(0) = (\operatorname{sen} 0)^2 + \cos 0 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$

Agora, calculamos o valor de $h(x)$ para $x = \frac{\pi}{2}$.

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cos \frac{\pi}{2} - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$

Portanto, $h(0) = 0$ e $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

BNCC O tópico **Funções do tipo trigonométricas:** $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ possibilita que os alunos resolvam e elaborem problemas envolvendo fenômenos periódicos reais. Além disso, viabiliza a comparação da representação desses fenômenos com as funções trigonométricas, contemplando, assim, a habilidade **EM13MAT306** da BNCC.

MODERNA

Página 89 Acessando tecnologias

- É possível desenvolver o trabalho com essa seção utilizando o GeoGebra, um *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de Geometria e Álgebra. Nele, podemos realizar diversas construções geométricas utilizando pontos, retas, circunferência e outras curvas, considerando relações entre os elementos envolvidos, como posição relativa, pertinência e interseção. Utilizado em escolas e universidades de diversos países, o *software* pode ser obtido gratuitamente e está disponível em vários idiomas, inclusive em Português. O *download* pode ser feito no *site* <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 22 abr. 2020.
- Caso as tarefas dessa seção sejam realizadas no laboratório de informática da escola, certifique-se de que todos os computadores estão com o *software* instalado. Uma alternativa é utilizar a versão *on-line* do GeoGebra, disponível no mesmo *site*.
- Esse tipo de tarefa possibilita aos alunos entrarem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Esse estudo pode ser desenvolvido com a metodologia ativa **Sorting strips**. Para isso, utilize os passos apresentados na seção ou até mesmo proponha outra construção. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! Resoluções

1 Uma possível resposta.

a) No campo **Entrada**, digite $a = 0$ e pressione a tecla **Enter**. Repita o procedimento para $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.

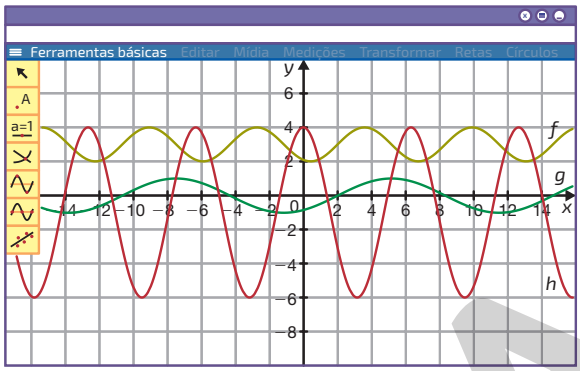
b) Digite $f(x) = a + b * \cos(c * x + d)$ no campo **Entrada** e pressione a tecla **Enter**.

2 Para que possamos analisar o gráfico de cada uma dessas funções, vamos construí-los utilizando um *software* de Geometria dinâmica. A seguir, são apresentados os passos necessários para realizar a construção desses três gráficos em um mesmo plano cartesiano.

a) Para esboçar o gráfico da função f dada por $f(x) = 3 - \text{sen}(-x + 2)$, basta digitar $f(x) = 3 - \text{sen}(-x + 2)$ no campo **Entrada** e pressionar a tecla **Enter**.

b) Digite $g(x) = \text{sen}(0.5*x - 1)$ no campo **Entrada**, e pressione a tecla **Enter**. Assim, será construído o gráfico da função g dada por $g(x) = \text{sen}(0{,}5x - 1)$.

c) Por fim, para esboçar o gráfico da função h dada por $h(x) = -1 + 5 \cdot \cos(x)$, basta digitar $h(x) = -1 + 5 * \cos(x)$ no campo **Entrada** e pressionar a tecla **Enter**.



De acordo com os gráficos construídos, é possível perceber que a função de maior período é a função g.

3 Existem várias respostas para essa questão. Vamos apresentar duas delas.

Sabemos que $\cos 0 = 1$. Assim, uma possível resposta é $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = 0$. Nesse caso, temos:

$f(x) = 0 + 1 \cdot \cos(0 \cdot x + 0) = 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

Outra possível resposta é $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ e $d = 0$. Nesse caso, segue que:

$f(x) = 1 + 0 \cdot \cos(0 \cdot x + 0) = 1 + 0 = 1$

Página 90

- Antes de propor o problema resolvido **R6**, caso julgue conveniente, peça aos alunos que o resolvam utilizando um *software* de Geometria dinâmica. No *site* do GeoGebra é possível encontrar um *applet* que permite avaliar a influência dos parâmetros a, b, c e d no gráfico das funções trigonométricas estudadas. Esse *applet* está disponível em <https://www.geogebra.org/m/z9gJwjss>. Acesso: 26 maio 2020.

Página 91

Sugestão de avaliação

- Para avaliar como os alunos estão lidando com os conteúdos estudados até o momento, proponha que eles resolvam a seguinte tarefa.

Determine o período de cada função apresentada a seguir.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}(2x + \pi)$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1 + \cos\left(2\pi - \frac{x}{2}\right)$

Resoluções e comentários

a) O período da função trigonométrica m dada por $m(x) = \text{sen}\, x$ é $p_m = 2\pi$. Logo:

MODERNA

RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

$$p = \frac{p_m}{|c|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

Portanto, o período da função f é π.

b) O período da função trigonométrica n dada por $n(x) = \cos x$ é $p_n = 2\pi$. Logo:

$$p = \frac{p_n}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

Portanto, o período da função g é 4π.

Página 92

- Ao trabalhar com a seção **Exercícios e problemas**, é possível escolher e aplicar um problema sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Após os alunos resolverem esse problema, peça que apresentem suas soluções para toda a turma. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.
- A tarefa **23** apresenta uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **Biologia**. Nela, o conceito de função trigonométrica é associado ao estudo do sistema respiratório humano. Nessa abordagem, uma função do tipo trigonométrica é utilizada para modelar a velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo.

Sala dos professores

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho com os professores de **Biologia** e de **Educação Física**, propondo exercícios de reeducação respiratória com os alunos aproveitando a oportunidade para informá-los sobre a importância de respirar corretamente. Apresente aos alunos o texto a seguir, que contém informações sobre a respiração.

A respiração é um ato involuntário, porém é possível aprimorá-la, de maneira a obter um melhor aproveitamento do ar inspirado e, consequentemente, uma melhor qualidade de vida.

Existem vários tipos de respiração, e a mais proveitosa e saudável é a diafragmática ou abdominal. Nesse tipo de respiração, o diafragma desce durante a inspiração e sobe durante a expiração.

Muitas pessoas respiram errado: ao inspirar, expandem o tórax, fazendo com que o ar entre em apenas uma parte do pulmão, que funciona com sua potência incompleta. Além disso, ao expirar, contraem o peito, fazendo com que parte do gás carbônico produzido no organismo permaneça nos pulmões, causando uma pequena intoxicação.

A respiração pode ser influenciada de forma consciente ou inconsciente, porém não conseguimos ficar sem respirar por um longo período de tempo. Se a respiração é contida por muito tempo, os mecanismos automáticos do corpo tomam o controle e é impossível não respirar. Quando estamos dormindo, necessitamos de menos oxigênio, e o encéfalo (órgão que regula a respiração) diminui seu ritmo, tornando a respiração mais lenta. Quando estamos praticando uma atividade física, necessitamos de mais oxigênio, e o encéfalo intensifica a respiração, fazendo com que inspiremos quase 20 vezes mais que numa inspiração normal.

- A tarefa **25** consiste em uma oportunidade de trabalho interdisciplinar com Física, pois o Movimento Harmônico Simples (MHS) está presente em diversos fenômenos do dia a dia, os quais são tratados com mais detalhes nesse componente curricular.

BNCC A tarefa **26** contempla aspectos da habilidade **EM13MAT308** ao propor a participação ativa e criativa dos alunos para elaborar um problema envolvendo fenômenos periódicos e funções trigonométricas. Essa "inversão de perspectiva" é positiva, pois faz com que os alunos pensem nos assuntos estudados sob um novo ponto de vista, possibilitando-lhe compreender com maior profundidade o conteúdo e adquirir mais habilidade no manuseio dos assuntos estudados. Além disso, estimula uma postura menos passiva no processo de ensino e aprendizagem, indo além da resolução de problemas e vislumbrando as inúmeras possibilidades na criação deles.

- Ao fim do trabalho com este tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite, se possível, que os alunos comentem quais eles pensam ser as vantagens dos estudos matemáticos sobre funções trigonométricas. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

6 Função do tipo trigonométrica: um modelo matemático

Objetivos específicos

- Reconhecer e aplicar o conceito de função trigonométrica na resolução de problemas.
- Interpretar algébrica e graficamente uma função periódica.

MODERNA

Nesse tema, o conceito de função trigonométrica é associado aos movimentos realizados pelo planeta Terra, denominados rotação e translação. Nessa abordagem, uma função do tipo trigonométrica é utilizada para modelar o tempo de duração aproximado do dia no município de São Paulo, que varia de acordo com a posição da Terra em relação ao Sol.

Páginas 94 e 95 Duração do dia

- Essas páginas apresentam uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **Física**. Nelas, o conceito de funções trigonométricas é associado ao estudo do tempo de duração dos dias, de acordo com o movimento da Terra. Uma sugestão de condução, para o trabalho com essas páginas, é estabelecer um tempo (por exemplo, 15 minutos) para que os alunos leiam o texto e respondam às questões propostas. Em seguida, promova um debate, atuando como mediador a fim de avaliar a compreensão dos alunos sobre a temática.

  Caso julgue oportuno, a fim de ampliar as informações apresentadas nas páginas e enriquecer o debate proposto, assista com os alunos ao vídeo A dança do Sol, no *site* da Unicamp. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1080>. Acesso em: 27 maio 2020. Nele, um mestre de obras precisa utilizar informações a respeito da posição aparente do Sol para planejar uma construção.

BNCC O trabalho com essas páginas permite o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Ciência e Tecnologia**, uma vez que trata da duração do dia de acordo com o movimento e a posição da Terra em relação ao Sol. Além disso, aborda aspectos da habilidade **EM13MAT306** da BNCC, ao trazer para discussão a resolução de problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais. O trabalho com esse tema requer, ainda, que os alunos saibam utilizar estratégias e conceitos matemáticos para interpretar, analisar e resolver problemas relacionados a fenômenos naturais e realizar previsões sobre o funcionamento do Universo. Tais requisitos estão relacionados à **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e à **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e dos Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

Sala dos professores

Avalie a conveniência de elaborar uma aula em conjunto com um professor da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Física**. Aproveite a oportunidade para desenvolver previsões relativas ao movimento da Terra no espaço, destacando o imenso potencial da ciência. Informe-os que essas previsões apresentam informações sobre o futuro próximo ou distante, possibilitando, assim, a reflexão sobre o alcance dos conhecimentos científicos. Se possível, proponha aos alunos que construam representações ou protótipos envolvendo a temática em questão.

Resoluções e comentários

C O período da função trigonométrica t dada por $t(x) = \cos(x)$ é $p_t = 2\pi$. Logo:

$$p = \frac{pt}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{365}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{365}} = 365$$

Portanto, o período da função h é 365. No contexto apresentado, esse período significa que a quantidade de horas de duração do dia em São Paulo (SP) se repete a cada 365 dias.

D No solstício de verão em São Paulo, são passados 0 dias de 21 de dezembro de 2018. Assim:

$$h(0) = A + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot 0}{365}\right)$$

$$13{,}58 = A + B \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi \cdot 0}{365}\right)}_{1} \Rightarrow 13{,}58 = A + B$$

Já no solstício de inverno, são passados 182 dias de 21 de dezembro de 2018. Desse modo:

$$h(182) = A + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot 182}{365}\right)$$

$$10{,}68 = A + B \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi \cdot 182}{365}\right)}_{-1} \Rightarrow 10{,}68 = A - B$$

Note que $\cos\left(\frac{2\pi \cdot 182}{365}\right) \simeq -0{,}999$. Nesse caso, sem perda de generalidade, consideramos $\cos\left(\frac{2\pi \cdot 182}{365}\right) = -1$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 13{,}58 = A + B \\ 10{,}68 = A - B \end{cases}$, obtemos $A = 12{,}13$ e $B = 1{,}45$.

Portanto, a função h que descreve a duração aproximada do dia, medida em horas, em São Paulo, é dada por:

$$h(x) = 12{,}13 + 1{,}45 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{365}\right)$$

EXCLUSIVO

7 Fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas

Objetivos específicos

- Aplicar adequadamente as fórmulas de transformação trigonométrica.
- Resolver situações-problema com base em conhecimentos trigonométricos.
- Aplicar com coerência as relações trigonométricas.
- Resolver alguns tipos de equações trigonométricas.

Esse tema contempla as ideias relacionadas a transformações trigonométricas, relações fundamentais da trigonometria e algumas equações trigonométricas. O objetivo desse tema é esclarecer a importância de utilizar algumas transformações trigonométricas, além de propiciar aos alunos que resolvam e elaborem problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais.

Desse modo, é importante avaliar o conhecimento prévio dos alunos acerca dos conteúdos estudados em temas anteriores. Para isso, proponha que resolvam problemas envolvendo os conceitos de seno, cosseno e tangente. A seguir, é apresentada uma sugestão de tarefa que possibilita realizar esse diagnóstico.

Sugestão de avaliação

Sabendo que $\cos x = -\frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine o valor de $\operatorname{sen} 2x$.

Resolução e comentários

Sabemos que a relação $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ é válida para todo número real x. Como $\cos x = -\frac{4}{5}$, temos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{3}{5}$$

Como x pertence ao 2º quadrante, então $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 96 e 97 **Como está sua pressão arterial?**

- Essas páginas apresentam uma relação existente entre os componentes curriculares **Matemática** e **Biologia**. Uma sugestão para desenvolver o trabalho dessas páginas é estabelecer um tempo (por exemplo, 15 minutos) para que os alunos leiam o texto e respondam às questões propostas. Em seguida, organize um debate para que eles exponham suas opiniões sobre o assunto.

Para complementar as informações apresentadas, comente com os alunos que, em 2018, 24,7% da população que vive nas capitais brasileiras afirmaram ter diagnóstico de hipertensão. Explique para eles que as pessoas com maiores riscos a se tornar hipertensas são as que consomem bebida alcoólica com frequência, estão acima do "peso", não praticam exercício físico regularmente, são diabéticas, possuem histórico familiar de hipertensão, fazem ingestão em excesso de sal ou consomem alimentos considerados "não saudáveis". Tais riscos podem aumentar em até 50% as chances de desenvolver a doença quando se chega à velhice.

Se julgar conveniente, organize debates com o intuito de explorar situações em que se faz necessário conhecer a respeito da pressão arterial. Caso seja possível, combine previamente com um profissional de saúde para que ele realize uma visita à escola a fim de aferir a pressão arterial dos alunos e orientá-los quanto aos demais cuidados de prevenção à doença, uma vez que ela atinge qualquer faixa etária.

Destaque que, em 1896, foi criado o primeiro aparelho utilizado para aferir a pressão arterial e se chamava esfigmomanômetro. Existem outros tipos de esfigmomanômetros que são utilizados para esse mesmo fim. Explique que em hospitais, clínicas, postos de saúde ou até mesmo em residências podem haver diferentes tipos desse aparelho.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirar das linhas gerais do conteúdo proposto e pesquisar problemas envolvendo fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas, registrando possíveis dúvidas. Mais informações sobre essa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Verifique a oportunidade de elaborar uma aula em conjunto com um professor da área **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Biologia**. Uma sugestão é solicitar aos alunos que, em grupos, realizem uma pesquisa acerca do funcionamento do coração e os fatores que levam à alteração na pressão arterial. Por fim, solicite aos grupos que apresentem suas pesquisas para toda a turma.

MODERNA

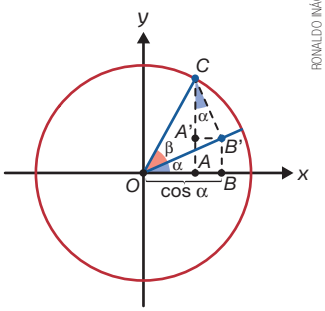
BNCC A temática proposta nessas paginas possibilita uma conexão com os temas contemporâneos transversais **Saúde** e **Educação alimentar e nutricional**, uma vez que expõem orientações a respeito de alimentação e nutrição para um desenvolvimento humano de qualidade.

Páginas 98 e 99

- Considerando os aspectos relevantes das fórmulas de transformação, apresentaremos as demonstrações das fórmulas do cosseno, do seno e da tangente da soma e da diferença de dois arcos.

Cosseno da soma e da diferença

Na figura ao lado, temos:



RONALDO INACIO

- $OA = \cos(\alpha + \beta)$.
- $OB' = \cos\beta$.
- $B'C = \operatorname{sen}\beta$.
- $AB = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$, pois $AB = A'B'$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{A'B'}{B'C}$ e $B'C = \operatorname{sen}\beta$.
- $OB = \cos\alpha \cdot \cos\beta$, pois $\cos\alpha = \frac{OB}{OB'}$ e $OB' = \cos\beta$.

Lembre-se de que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim:

$$OA = OB - AB = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Logo:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Assim, para calcular o **cosseno da soma de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

No caso do cosseno da diferença de dois arcos, temos:

$\cos(\alpha + (-\beta)) =$

$= \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

Assim, para calcular o **cosseno da diferença de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Seno da soma e da diferença

Inicialmente, observe que:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\beta$

Assim:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos(\pi + \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow -(\cos\pi \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\pi \cdot \operatorname{sen}\alpha) = \cos\alpha$

De acordo com as igualdades obtidas e utilizando a fórmula do cosseno da soma de dois arcos, temos:

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$

$= -\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{sen}\beta\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = -(-\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

Assim, para calcular o **seno da soma de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

No caso do seno da diferença de dois arcos, temos:

$\operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

Assim, para calcular o **seno da diferença de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Tangente da soma e da diferença

Utilizando a fórmula do seno da soma de dois arcos, do cosseno da soma de dois arcos e a relação fundamental, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, vamos deduzir a fórmula que permite calcular $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Assim, para calcular a **tangente da soma de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$, válida para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

No caso da tangente da diferença de dois arcos, temos:

$\operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(-\beta)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$

MODERNA

Assim, para calcular a tangente da diferença de dois arcos, temos a seguinte fórmula:

$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$, válida para $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha - \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

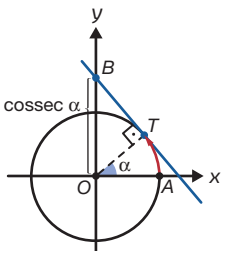
Note que:

$\operatorname{tg}(-\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$

para $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

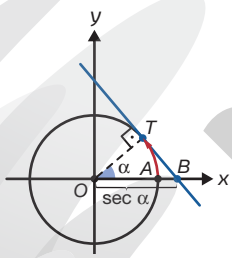
Páginas 100 e 101

- Ao trabalhar com as relações cossecante, secante e cotangente, mostre aos alunos suas representações no ciclo trigonométrico.
  - Considere no ciclo trigonométrico o arco $\overset{\frown}{AT}$ de medida α, em que $\alpha \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.



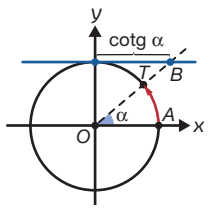
A cossecante é a ordenada de B, que é dada pela interseção do eixo dos senos e a reta que tangencia o ciclo em T. Verifique se os alunos perceberam que a cossecante é positiva no 1º e 2º quadrantes e negativa no 3º e 4º quadrantes.

  - Considere no ciclo trigonométrico o arco $\overset{\frown}{AT}$ de medida α, em que $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.



A secante é a abscissa de B, que é dada pela interseção do eixo dos cossenos e a reta que tangencia o ciclo em T. Verifique se os alunos perceberam que a secante é positiva no 1º e 4º quadrantes e negativa no 2º e 3º quadrantes.

  - Considere no ciclo trigonométrico o arco $\overset{\frown}{AT}$ de medida α, em que $\alpha \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.



A cotangente é a abscissa de B, que é dada pela interseção da reta $\overleftrightarrow{OT}$ e a reta que tangencia o ciclo no ponto $(0, 1)$. Verifique se os alunos perceberam que a cotangente é positiva no 1º e 3º quadrantes e negativa no 2º e 4º quadrantes.

- Na tarefa **18** da página **101**, destaque a importância de se trabalhar com diferentes unidades de medidas e saber fazer a conversão para as unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI), e vice-versa. Para avaliar os alunos, peça que realizem uma pesquisa em grupo acerca de unidades que não constam no SI, mas são frequentemente utilizadas em determinadas situações, como pés, utilizada na aviação, e a milha náutica, utilizada para expressar distâncias em navegações marítimas. No desenvolvimento dessa pesquisa, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 103 e 104 Resolvendo por etapas

- Para desenvolver o trabalho com essa seção, é possível utilizar a metodologia ativa **Design thinking**. Para isso, proponha aos alunos que resolvam, em grupos, o problema proposto na seção antes de apresentá-la. Mais informações sobre essa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é você quem resolve! Resoluções

2 Resposta pessoal. Um possível plano de se utilizar é: determinar para quais valores de $t \in [1, 7]$ tem-se $q(t) = 3{,}6$. Note que o plano utilizado foi obtido realizando alguns ajustes no plano apresentado na seção.

Queremos determinar em qual mês, no período de janeiro a julho, essa cidade recebeu 3,6 milhões de turistas. Assim:

$q(t) = 3{,}6 \Rightarrow 2{,}1 + 1{,}5 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) = 1$

Na primeira volta positiva, temos $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

$\dfrac{\pi t}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = 1 + 4k$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MOLDURA

Como $t \in [1, 7]$, temos $t = 1$ e $t = 5$. Portanto, essa cidade recebeu 3,6 mil turistas nos meses de janeiro e maio.

BNCC Ao trabalhar com a questão **2** do **Agora é você quem resolve!**, os alunos são desafiados a resolver um problema cujo contexto pode ser modelado por uma função trigonométrica, contemplando, assim, aspectos da habilidade **EM13MAT306**.

Página 105

BNCC As tarefas da seção **Exercícios e problemas** possibilitam aos alunos que resolvam e elaborem problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais. Além disso, possibilita que comparem a representação desses fenômenos com as funções trigonométricas, no plano cartesiano, contemplando, assim, a habilidade **EM13MAT306** e a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos. Em debate, solicite que expliquem qual é a importância do estudo das fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas em situações da vida cotidiana. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

8 Ladrilhamento

Objetivos específicos

- Identificar os ladrilhamentos regulares do plano.
- Resolver problemas envolvendo ladrilhamento regular e semirregular do plano.
- Determinar os onze ladrilhamentos bem-comportados do plano.

Esse tema aborda conteúdos que tratam sobre o ladrilhamento do plano utilizando polígonos regulares. O objetivo é propiciar a reflexão dos alunos a respeito dos tipos ou composições de polígonos regulares que podem ser utilizados em ladrilhamentos.

Para um bom desenvolvimento desse estudo é necessário que os alunos tenham alguns conhecimentos acerca de polígonos, por exemplo, a medida dos ângulos internos de um polígono regular. Neste caso, ao iniciar o trabalho com o tema, proponha alguns problemas envolvendo essa temática.

A seguir é apresentado um problema que possibilita esse diagnóstico.

Sugestão de avaliação

Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e que, de um vértice qualquer de um n-ágono regular partem $(n - 3)$ diagonais, determine a medida do ângulo interno de um:

a) pentágono regular.
b) hexágono regular.
c) n-ágono regular.

Resolução e comentários

a) A partir de um vértice qualquer, traçamos duas diagonais que decompõem o pentágono em três $(5 - 2)$ triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos do pentágono é:

$$3 \cdot 180° = 540°$$

Como o pentágono regular possui cinco ângulos congruentes, então a medida x de cada ângulo interno é:

$$x = \frac{540°}{5} = 108°$$

b) A partir de um vértice qualquer, traçamos três diagonais que decompõem o hexágono em quatro $(6 - 2)$ triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos do hexágono é:

$$4 \cdot 180° = 720°$$

Como o hexágono regular possui seis ângulos internos congruentes, então a medida x de cada ângulo interno é:

$$x = \frac{720°}{6} = 120°$$

c) A partir de um vértice qualquer, traçamos $(n - 3)$ diagonais que decompõem o n-ágono em $(n - 2)$ triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos do n-ágono é:

$$(n - 2) \cdot 180°$$

Como o n-ágono regular possui n ângulos internos congruentes, então a medida x de cada ângulo interno é:

$$x = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Neste tema os alunos serão desafiados a pensarem sobre os tipos ou composições de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamentos,

MODERNA

identificando a necessidade ou não de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas, conforme orienta a habilidade **EM13MAT505** e as **Competências específicas 3** e **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Página 106 A escadaria de Selarón

- Nessa página é apresentado o ladrilhamento como forma de arte. Nessa abordagem, são citadas algumas obras artísticas. Determine um tempo (por exemplo, 15 minutos) para que os alunos leiam o texto e respondam às questões propostas nessa página.

  Em seguida, por meio de um debate com toda a turma, colete a opinião deles sobre a temática e aproveite a questão **A** para que eles exponham algumas de suas vivências. Nesse momento, se julgar conveniente, complemente o trabalho com essa página apresentando informações sobre outros artistas, por exemplo, o brasileiro Paulo Werneck e o holandês Escher.

  - Paulo Werneck é um muralista responsável por ilustrações de painéis em mosaico projetados em diversos locais, tais como: terraço do Ministério da Fazenda, na Igreja da Pampulha e no Estádio do Maracanã. Para mais informações sobre esse artista, bem como conhecer suas obras, acesse o *site* Paulo Werneck, disponível em: <http://paulowerneck.org/?cat=8>. Acesso em: 21 maio 2020.
  - Maurits Cornelis Escher usufruía de conhecimento sobre regularidades e estruturas matemáticas para construir sua arte, com grande destaque na criação de ladrilhamentos. Obras como Limite Circular IV, Céu e Água I, *Systematic study* e o mural *Wall mosaic in the alhambra*, ficaram conhecidas mundialmente. Para mais informações sobre essas obras, acesse o catálogo *O mundo mágico de Escher*, disponível em: <https://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>. Acesso em: 21 maio 2020.

- Ao desenvolver a pesquisa proposta no item **B**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirarem das linhas gerais dos conteúdos, registrando possíveis dúvidas. Em seguida, permita que eles conversem aos pares sobre esses conteúdos para que, depois, apresentem as conclusões para toda a sala. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

- O trabalho com essa página possibilita uma integração entre os componentes curriculares **Matemática** e **Arte**. Aproveite o momento e apresente aos alunos a história do mais antigo ladrilhamento do mundo. Datado de 2600 a.C., o Estandarte de Ur é uma placa de madeira de forma trapezoidal. As quatro faces da placa são inteiramente recobertas por ladrilhamentos, os quais foram compostos de conchas, pedaços de marfim, cornalina, lápis-lazúli e até ouro. Esse ladrilhamento foi descoberto durante as escavações do cemitério real de Ur, antiga cidade no sul do atual Iraque. Ele faz parte de um precioso achado arqueológico pertencente aos sumérios, que formaram a primeira civilização da Mesopotâmia.



KAMIRA/SHUTTERSTOCK

Estandarte de Ur.

Página 108

- Nas páginas para reprodução deste **Suplemento para o professor** estão disponibilizados os polígonos necessários para o desenvolvimento das questões, intervenções e tarefas desse tema. Após os alunos utilizarem essas figuras na resolução das questões **A**, **B** e **C** dessa página, peça-lhes que as guardem, pois elas serão utilizadas nas questões e nas tarefas do tópico **Ladrilhamento semirregular**.

  Caso julgue conveniente, leve os alunos ao laboratório de informática da escola para que eles realizem as investigações propostas nessa página com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica. A seguir é apresentado um passo a passo que possibilita a construção de um ladrilhamento regular do plano utilizando triângulos equiláteros.

  A. Utilizando a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**, construa um segmento $\overline{AB}$ com, por exemplo, 3 cm de comprimento.

  B. Selecione a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos *A* e *B*, nessa ordem. Na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de lados do polígono, nesse caso, 3.

C. Com a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos *C* e *B*, nessa ordem. Em seguida, na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de lados do polígono, nesse caso, 3.

D. Selecione a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos *A* e *C*, nessa ordem. Em seguida, na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de lados do polígono, nesse caso, 3.

E. Novamente com a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos *B* e *A*, nessa ordem. Em seguida, na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de lados do polígono, nesse caso, 3.

F. De maneira semelhante à apresentada nos passos anteriores, construa triângulos equiláteros ao redor de cada um dos vértices dos triângulos obtidos.

G. Repita, sucessivamente, o passo **F**.

Sugira que, utilizando estratégias análogas à apresentada, os alunos realizem as investigações envolvendo os outros polígonos regulares.

Página 109 Resolvendo por etapas

- No trabalho com a seção **Resolvendo por etapas**, é possível recorrer à metodologia ativa **Design thinking**. Sugira aos alunos que realizem a tarefa em grupos, promovendo, assim, a colaboração entre os colegas e o desenvolvimento da criatividade, no sentido de encontrar uma solução adequada ao problema proposto. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 110

- Antes de desenvolver o trabalho com essa página, proponha que os alunos resolvam a tarefa apresentada a seguir.

Copiem e completem o seguinte quadro.

Quantidade de lados do polígono regular	Medida do ângulo interno
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	

Quais das medidas obtidas por você são expressas por um número divisor de 360? A quais polígonos regulares essas medidas correspondem?

Resolução e comentários

Inicialmente, calculamos a medida do ângulo interno de cada um dos polígonos regulares. Para isso, utilizaremos a fórmula: $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$, em que n indica a quantidade de lados do polígono. Nesse caso, se:

- $n = 3$, temos: $\frac{(3-2)\cdot 180^\circ}{3} = 60^\circ$
- $n = 4$, temos: $\frac{(4-2)\cdot 180^\circ}{4} = 90^\circ$
- $n = 5$, temos: $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$
- $n = 6$, temos: $\frac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$
- $n = 7$, temos: $\frac{(7-2)\cdot 180^\circ}{7} = 128{,}6^\circ$
- $n = 8$, temos: $\frac{(8-2)\cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$
- $n = 9$, temos: $\frac{(9-2)\cdot 180^\circ}{9} = 140^\circ$
- $n = 10$, temos: $\frac{(10-2)\cdot 180^\circ}{10} = 144^\circ$
- $n = 11$, temos: $\frac{(11-2)\cdot 180^\circ}{11} \simeq 147{,}3^\circ$
- $n = 12$, temos: $\frac{(12-2)\cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$
- $n = 13$, temos: $\frac{(13-2)\cdot 180^\circ}{13} \simeq 152{,}3^\circ$
- $n = 14$, temos: $\frac{(14-2)\cdot 180^\circ}{14} \simeq 154{,}3^\circ$

MODERNA

Desse modo:

Quantidade de lados do polígono regular	Medida do ângulo interno
3	60°
4	90°
5	108°
6	120°
7	aproximadamente 128,6°
8	135°
9	140°
10	144°
11	aproximadamente 147,3°
12	150°
13	aproximadamente 152,3°
14	aproximadamente 154,3°

Dentre os resultados obtidos, aqueles que são expressos por números divisores de 360 são os correspondentes ao triângulo equilátero, ao quadrado e ao hexágono regular, ou seja, 60, 90 e 120, respectivamente.

Resoluções e comentários

Primeiro, determinamos a medida do ângulo interno de um quadrado (α_1), de um hexágono regular (α_2) e de um dodecágono regular (α_3).

– Quadrado: $\alpha_1 = \frac{(4-2)\cdot 180^\circ}{4} = 90^\circ$

– Hexágono: $\alpha_2 = \frac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$

– Dodecágono: $\alpha_3 = \frac{(12-2)\cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$

Assim:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 90^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 360^\circ$$

Página 111

- Os quadrados necessários para o desenvolvimento da questão **C**, assim como os outros polígonos, estão disponibilizados nas páginas para reprodução desse **Suplemento para o professor**. Anteriormente, apresentou-se um passo a passo que permite a construção de um ladrilhamento regular com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica. Se julgar oportuno, leve os alunos ao laboratório de informática para que, de maneira semelhante à sugerida, eles realizem as investigações propostas nessa página.
- Se julgar conveniente, exponha aos alunos a simplificação da equação

$$\frac{(n_1-2)\cdot 180^\circ}{n_1} + \frac{(n_2-2)\cdot 180^\circ}{n_2} + \frac{(n_3-2)\cdot 180^\circ}{n_3} = 360^\circ$$

, apresentada a seguir.

$$\frac{(n_1-2)\cdot 180^\circ}{n_1} + \frac{(n_2-2)\cdot 180^\circ}{n_2} + \frac{(n_3-2)\cdot 180^\circ}{n_3} = 360^\circ$$

$$180^\circ \cdot \left[\frac{(n_1-2)}{n_1} + \frac{(n_2-2)}{n_2} + \frac{(n_3-2)}{n_3}\right] = 360^\circ$$

$$\frac{n_2\cdot n_3(n_1-2) + n_1\cdot n_3(n_2-2) + n_1\cdot n_2(n_3-2)}{n_1\cdot n_2\cdot n_3} = \frac{360^\circ}{180^\circ}$$

$$n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\left(\frac{1-\frac{2}{n_1}+1-\frac{2}{n_2}+1-\frac{2}{n_3}}{n_1\cdot n_2\cdot n_3}\right) = 2$$

$$1-\frac{2}{n_1}+1-\frac{2}{n_2}+1-\frac{2}{n_3} = 2$$

$$3-2\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right) = 2$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3} = \frac{2-3}{-2}$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

Página 113

- Caso julgue conveniente, leve os alunos ao laboratório de informática para que eles realizem as investigações propostas nas tarefas da seção **Exercícios e problemas** com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite que os alunos expliquem qual é a importância do estudo de ladrilhamento na Matemática, nas Ciências e em situações da vida cotidiana. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

9 Área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango

Objetivos específicos

- Estudar o conceito de área de figuras geométricas planas.
- Deduzir expressões para o cálculo da área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango.
- Resolver situações-problema envolvendo área de quadrados, retângulos, paralelogramos e losangos.
- Utilizar os conhecimentos geométricos quanto à área em aplicações práticas, inclusive para determinar áreas aproximadas de regiões não poligonais (mapas, terrenos, lagos etc.).

O presente tema trata da área de quadrados, retângulos, paralelogramos e losangos. Ao longo do tema, os alunos serão expostos a deduções de expressões para o cálculo de área e, também, desafiados a realizar algumas demonstrações, como no caso da expressão de cálculo da área do losango. Os alunos serão levados a aplicar as expressões deduzidas não só em contextos puramente matemáticos, mas em situações práticas em que a Geometria se revelar útil.

Em adição aos cálculos exatos, são apresentados exemplos e tarefas que instruem os alunos a utilizar diversos métodos para determinar áreas aproximadas de regiões com formas mais complexas, como mapas geográficos, terrenos, lagos e zonas florestais, por exemplo, as quais normalmente possuem formatos não poligonais.

Conhecer com clareza o conceito de área, conseguir aplicar adequadamente expressões de cálculo e saber utilizar a criatividade geométrica para determinar áreas de figuras em vários contextos são competências fundamentais na educação matemática. Tais habilidades, se bem estimuladas, aguçam a percepção geométrica e desenvolvem o raciocínio lógico dos alunos, além de ser indispensáveis em inúmeras circunstâncias da vida prática.

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca do tema, proponha problemas contextualizados que exijam conhecimentos acerca de áreas. A seguir, é apresentada uma sugestão de problema que possibilita esse diagnóstico.

Sugestão de avaliação

Joana, uma artista plástica, está pintando figuras geométricas em uma tela retangular de 20 cm de comprimento por 50 cm de altura. No centro da tela, há um quadrado pintado inteiramente de preto. Sabendo que a tinta preta foi utilizada apenas no quadrado central e que as outras cores cobrem 77,5% da tela, qual é o comprimento, em centímetros, do lado desse quadrado?

Resolução e comentários

Inicialmente, calculamos a área total da tela. Como suas dimensões são 20 cm por 50 cm, temos:

$$20 \cdot 50 = 1\,000$$

Assim, a área da tela é 1 000 cm^2. Agora, calculamos a área da tela que não foi colorida de preto. Para isso, calculamos 77,5% de 1 000 cm^2, ou seja:

$$0{,}775 \cdot 1\,000 = 775$$

Logo, 775 cm^2 da tela não foram coloridos com tinta preta e, consequentemente, a área do quadrado central é:

$$1\,000\ cm^2 - 775\ cm^2 = 225\ cm^2$$

Por fim, calculamos o comprimento do lado x desse quadrado. Para isso, fazemos:

$$x = \sqrt{225} \Rightarrow x = 15$$

Note que $x = 15$, pois $x > 0$.

Portanto, o lado do quadrado central tem 15 cm de comprimento.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas estão disponíveis no tópico **Avaliação** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 114 e 115 **Floresta em perigo**

- O tema é introduzido com uma discussão a respeito do desmatamento da Floresta Amazônica. Com base na análise da dimensão das regiões desmatadas, é natural o surgimento de uma reflexão a respeito do conceito de área e de como calcular a área de certas regiões.

Para o desenvolvimento do trabalho com essas páginas, solicite aos alunos que leiam o texto e respondam às questões propostas em um intervalo de tempo determinado (por exemplo, 20 minutos). Em seguida, a fim de complementar as informações apresentadas, proponha que realizem a leitura do texto apresentado a seguir.

A Amazônia é uma floresta úmida que engloba uma imensa região rica em vida e diversidade. Sua existência é fundamental para o equilíbrio do clima em todo o planeta, e sua fauna e flora concentram a maior quantidade de diferentes espécies vivas de todo o mundo. É atravessada pelo Rio Amazonas, que possui mais de mil afluentes (muitos deles de grande magnitude, como o Rio Negro e o Rio Madeira) e é considerado um dos dois rios mais extensos do mundo (ao lado do Rio Nilo, que certos estudos consideram maior, enquanto outros, menor do que o Amazonas). Estima-se que o Rio Amazonas contém um quinto de toda a água doce do planeta.

A Floresta Amazônica, muito embora tenha a alcunha de "pulmão do mundo", não é a maior responsável

MODERNA

pela filtragem do ar em nível global, ao contrário do que comumente se pensa. Isso porque a quase totalidade do oxigênio gerado por sua flora é consumido dentro da própria biodiversidade da floresta, não havendo fornecimento de um excedente tão volumoso de ar limpo para o resto do mundo. Apesar disso, a Amazônia tem um papel igualmente importante, que é na manutenção do clima e no controle do aquecimento global, de modo que seu desmatamento é desastroso não apenas na zona regional em que ocorre, mas para todo o planeta. Além do aquecimento global e das drásticas mudanças climáticas, o desmatamento causa a perda do habitat natural de várias espécies animais, bem como a extinção da biodiversidade, e leva ao empobrecimento do solo, ao assoreamento de rios e à ocorrência de enchentes e deslizamento de terras.

O aumento vertiginoso do desmatamento na Amazônia se deu com a construção, entre as décadas de 1960 e 1970, da Rodovia Transamazônica, que corta o Brasil de Leste a Oeste a fim de ligar a região Norte às demais localidades do país. Essa construção atraiu um enorme contingente populacional para a região, e, desde então, práticas agrícolas e industriais crescentes acarretam a destruição progressiva do bioma. Entre as principais causas do desmatamento estão, tradicionalmente, os projetos de infraestrutura e de colonização de algumas áreas, a instalação de hidrelétricas, a expansão da mineração e o crescimento populacional. Atualmente, a expansão do agronegócio, bem como o extrativismo vegetal e mineral praticado na ilegalidade para alimentar indústrias e as construções civis e moveleiras, leva o desmatamento para além do arco próximo às estradas e rodovias a que até então se restringia. A esses fatores se soma a falta de fiscalização para o efetivo cumprimento das leis de proteção ambiental.

Existe uma íntima relação entre o desmatamento da Amazônia e as dinâmicas econômicas dos países. Quando a economia está em alta, a procura por terras aumenta, ao passo que em épocas de recessão econômica, normalmente, importam em relativas tréguas nas queimadas e devastações ambientais. Por essa razão, é fundamental a existência de programas legais e incentivos fiscais que evitem o desmatamento imoderado e promovam o desenvolvimento econômico ambientalmente sustentável e o reflorestamento de áreas afetadas. Um exemplo é o Plano de Ação para Prevenção e Controle do Desmatamento na Amazônia Legal (PPCDAm), criado pelo governo federal em 2004, e que, em 10 anos, estimativamente conquistou uma redução de 10% na taxa de desmatamento. A existência de benefícios financeiros para empresas que promovam o reflorestamento, além de penas severas para as que ajam na ilegalidade, são medidas importantes na prevenção da degradação ambiental da Amazônia.

- Ao trabalhar com a questão **B**, peça aos alunos que, em duplas, pensem em métodos para conseguir calcular a área de regiões geometricamente irregulares, como a Amazônia Legal. Em seguida, permita que conversem para desenvolver melhor as ideias e, depois, solicite às duplas que apresentem as conclusões para toda a turma. No desenvolvimento dessa dinâmica, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirar das linhas gerais dos conteúdos, registrando possíveis dúvidas. Em seguida, permita que conversem aos pares sobre esses conteúdos para que, depois, apresentem as conclusões para toda a sala. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC As páginas de abertura promovem o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental** e, também, o exercício da **Competência específica 1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global."

A discussão travada nessas páginas desperta a consciência ambiental, analisando criticamente causas e consequências de práticas humanas que deterioram o meio ambiente, afetando todo o planeta. Por meio desse debate, é possível pensar em ações individuais e coletivas que aperfeiçoem os processos produtivos de modo a se tornar sustentáveis em suas relações com a natureza, promovendo benefícios em âmbitos local, regional e até global, uma vez que a Floresta Amazônica tem importância mundial na harmonização dos climas e no controle da temperatura do planeta.

MODERNA

Sala dos professores

- Avalie a conveniência de preparar uma aula em conjunto com um professor da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente do componente curricular **Biologia**, a fim de apresentar mais informações quanto aos impactos do desmatamento desenfreado na fauna e na flora locais e aos prejuízos que tais impactos podem trazer na biodiversidade do mundo como um todo. Além disso, é interessante fazer com que os alunos compreendam a importância dessa riqueza de diversidade encontrada na Amazônia, bem como o enorme tempo que a natureza levou para desenvolver toda essa abundância de vida e preciosidades minerais.
- Também é pertinente que se prepare a aula em conjunto com professores dos componentes curriculares **História** e **Geografia**, a fim de examinar, criticamente, as ocorrências históricas que acarretaram na atual situação de exploração excessiva dos recursos naturais da Amazônia, bem como as circunstâncias socioculturais atuais que motivam essas práticas, analisando os complexos embates entre progresso econômico e proteção ambiental.
- Esse tipo de trabalho multidisciplinar é propício para o trabalho com a **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

  "Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

  Com base nesse pensamento multidisciplinar, os alunos são instigados a aprender a analisar a dinâmica da vida na Terra, em suas várias facetas, para, com embasamento científico, poder aplicar interpretações lúcidas a fim de defender decisões éticas e responsáveis nos domínios pessoal, profissional, econômico, social e ambiental, conciliando-os tanto quanto possível.

Páginas 116 e 117

- Para deduzir a fórmula da área das figuras, verifique a possibilidade de os alunos fazerem as construções geométricas das figuras. Para isso, leve para a sala de aula uma malha quadriculada com quadradinhos de 1 cm de lado. Esse tipo de tarefa leva os alunos a identificar relações e a avaliar o resultado obtido.

BNCC A questão intervenção **B** da página **117** aborda a habilidade **EM13MAT315**, na medida que favorece a organização do pensamento para a construção de um algoritmo e sua organização em um fluxograma.

Resoluções e comentários

A Considerando um quadrado de lado a e diagonal d, temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot a^2$$

Sabemos que a área A de um quadrado de lado a é a^2. Assim:

$$d^2 = 2 \cdot a^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot A \Rightarrow A = \frac{d^2}{2}$$

Portanto, a expressão que possibilita calcular a área A de um quadrado de diagonal d é:

$$A = \frac{d^2}{2}$$

B Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Em seguida, devemos responder às seguintes questões.

1. Quais são os dados de entrada?

   R.: Dados de entrada: comprimento da diagonal do quadrado.

2. Quais são os dados de saída?

   R.: Dados de saída: área do quadrado.

3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais procedimentos devem ser realizados?

   R.: De acordo com a questão A, para calcular a área do quadrado, dividimos o quadrado do comprimento de sua diagonal por 2.

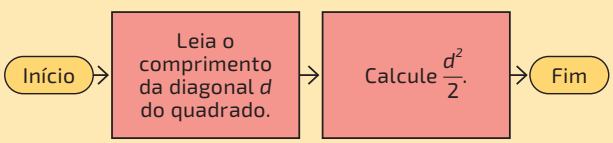
Agora, escrevemos um possível algoritmo.

Início

1. Leia o comprimento da diagonal d do quadrado.
2. Calcule $\frac{d^2}{2}$.

Fim

Finalmente, organizamos um fluxograma.



- Após trabalhar os conteúdos dessas páginas, peça aos alunos que, em grupos, estimem a área da superfície da carteira, da sala de aula ou da quadra de esportes. Questione se essas áreas são maiores ou menores do que 1 m² e, em seguida, peça a eles que meçam o comprimento e a largura reais, comparando os resultados.
- Providencie papel-jornal e proponha a construção de uma região com 1 m² de área, usando o material. Incentive os alunos a não construir um quadrado de lado 1 m. Um exemplo de região é um retângulo cujas dimensões são 2 m e 0,5 m. Essas medidas podem ser apresentadas na lousa.

MODERNA

Página 118

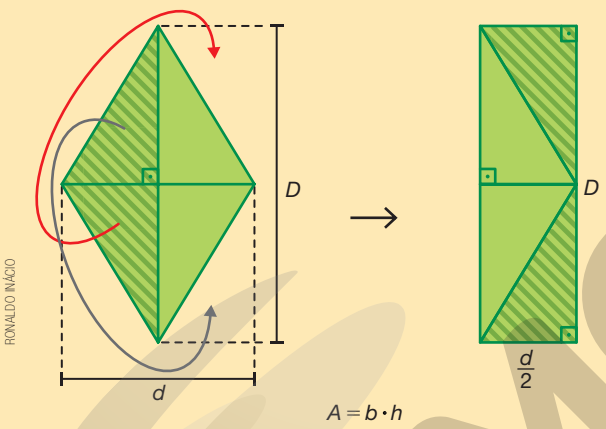
BNCC Nessa página, os alunos são levados a deduzir a expressão de cálculo da área de um losango, contemplando, assim, aspectos da habilidade **EM13MAT307**.

Resolução e comentários

C Ao traçarmos as diagonais D e d, obtemos quatro triângulos, que, pelo caso de congruência **LLL**, são congruentes.

> Note que os triângulos possuem lados correspondentes congruentes, pois o losango possui todos os lados com o mesmo comprimento e suas diagonais encontram-se em seus pontos médios.

Assim, ao reconfigurarmos o losango, conforme apresentado a seguir, obtemos um retângulo de dimensões D e $\frac{d}{2}$ e área A_R igual à área do losango.



RONALDO INÁCIO

Assim, a área A do losango é dada por:

$$A = A_R = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Páginas 120 e 121

BNCC As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas** visam possibilitar aos alunos que empreguem diferentes métodos para a obtenção da área de uma região e apliquem as expressões de cálculos deduzidas anteriormente em situações reais, contemplando, assim, a habilidade **EM13MAT307** da BNCC e aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Sala dos professores

A tarefa **4**, da página **120**, aborda a sequência de Fibonacci, a qual possui um vasto e rico histórico que abrange importantes passagens da História da Matemática e do desenvolvimento dos conhecimentos humanos, inclusive em temas como estética e beleza das proporções na natureza e na Arte. Assim sendo, investigue a possibilidade de propor uma aula em conjunto com professores dos componentes curriculares **História**, **Filosofia** e/ou **Arte**, a fim de abordar pelo menos alguns dos aspectos da famosa sequência. Procure comentar sobre como se descobriu que a sequência de Fibonacci é recorrente em padrões de crescimento na natureza, como nas orquídeas, nas conchas de certos moluscos e em diversos aspectos da anatomia humana. Mais ainda, as proporções geradas pela sequência de Fibonacci, em especial pela espiral que se pode desenhar com base na justaposição de quadrados cujos lados são expressos por termos da sequência – a qual, não por acaso, é o símbolo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) –, são associadas, historicamente, à beleza e à harmonia, estando presentes em construções da Grécia Antiga, em trabalhos de Leonardo da Vinci e, atualmente, na proporção das dimensões de telas de computador, cartões de crédito, folhas de papel, aparelhos de celular e no *design* de uma série de produtos que buscam harmonia formal. Por essas razões, à sequência de Fibonacci, e também ao chamado Número de Ouro (representado pela letra grega φ), que a ela está intimamente relacionado, são atribuídos significados filosóficos que remontam aos antigos pensadores pré-socráticos.

A tarefa **8** da página **121** permite realizar um trabalho em conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente junto ao professor do componente curricular **Geografia**. Nela, o conceito de área de um polígono é associado ao cálculo aproximado da área de uma região representada em um mapa. Nessa abordagem, estuda-se uma maneira de calcular a área aproximada do estado de Santa Catarina por meio da fórmula de Pick.

- Ao fim do trabalho com este tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite, se possível, aos alunos que comentem quais eles consideram ser os métodos mais interessantes e inventivos para calcular a área de figuras irregulares. Peça que falem se já conheciam as deduções das expressões apresentadas para o cálculo da área dos quadriláteros. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODELO

10 Área do triângulo e de polígonos regulares

Objetivos específicos

- Resolver e representar situações-problema, utilizando conceitos de figuras planas.
- Deduzir expressões para o cálculo da área de triângulos, trapézios e polígonos regulares.
- Calcular a área de regiões pelo método da reconfiguração.

Esse tema retoma alguns polígonos estudados em anos anteriores e aprofunda-se no conceito de área de triângulos, trapézios e polígonos regulares. Nele, propõe-se a consolidação de conteúdos estudados em etapas anteriores, pois, nesse nível de ensino, os alunos já estão aptos a compreender a dedução de expressões para o cálculo de área.

Procura-se, nesse tema, diferentes maneiras para trabalhar a compreensão e o cálculo de áreas. Para dar mais significado ao conteúdo, buscou-se, também, possibilitar que os alunos apliquem as expressões deduzidas em situações reais como o remanejamento e a distribuição de plantações.

O trabalho com esse tema desenvolve a formação de alunos capazes de atuar de forma consciente e reflexiva em diversas situações do cotidiano que envolvem o conceito de áreas, baseando a tomada de decisões em argumentos matemáticos.

Página 122 O mundo dos quebra-cabeças

- Essa página aborda a ideia do cálculo de área de figuras por reconfiguração. Para tal, é utilizado o tangram, que possibilita a representação de vários elementos com suas sete peças.
- Determine um tempo (por exemplo, 15 minutos) para que os alunos leiam o texto e respondam à questão proposta. Se julgar conveniente, solicite que realizem, em grupos, uma pesquisa sobre outras lendas do surgimento do tangram. Em seguida, peça que exponham seus resultados para toda a turma.
- No desenvolvimento dessa dinâmica, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirar das linhas gerais dos conteúdos, registrando possíveis dúvidas. Em seguida, permita que eles conversem aos pares sobre esses conteúdos para que, depois, apresentem as conclusões para toda a sala. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Verifique a possibilidade de elaborar uma aula em conjunto com um professor da área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Língua Portuguesa**. É importante que, nesse momento, os alunos conheçam a história do tangram, analisando o texto de maneira crítica, criativa e propositiva.

Página 123

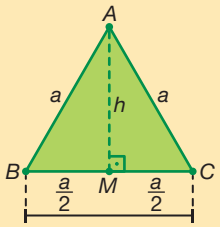
- Assim como sugerido no tema anterior, se julgar conveniente, oriente os alunos a fazer as construções geométricas das figuras a fim de auxiliá-los na dedução das expressões de cálculo de área. Para isso, reproduza e leve para a sala de aula a malha quadriculada com quadradinhos de 1 cm de lado que se encontra nas páginas para reprodução deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Na questão intervenção **B**, os alunos são desafiados a escrever um algoritmo que possibilite calcular a área de um triângulo equilátero, dado o comprimento de sua altura, e organizá-lo em um fluxograma, contemplando assim, a habilidade **EM13MAT315** da BNCC.

Resoluções e comentários

A No triângulo equilátero *ABC* de lado *a*, traçamos a altura $\overline{AM}$.

Note que o triângulo *AMC* é retângulo. Utilizando o Teorema de Pitágoras, determinamos o comprimento da altura do triângulo *ABC* em função de *a*.



RONALDO INÁCIO

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Note que $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pois $h > 0$ e $a > 0$.

MODERNA

Sabemos que a área A do triângulo ABC é $A = \frac{a \cdot h}{2}$, em que a e h indicam, respectivamente, o comprimento da base e da altura do triângulo. Assim, substituindo h por $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, obtemos:

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, a altura h e a área A de um triângulo equilátero, em função do comprimento a do lado, podem ser expressas, respectivamente, por $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

B Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Em seguida, devemos responder às seguintes questões.

1. Quais são os dados de entrada?
   R.: Dados de entrada: comprimento da altura do triângulo equilátero.
2. Quais são os dados de saída?
   R.: Dados de saída: área do triângulo equilátero.
3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais procedimentos devem ser realizados?
   R.: Neste caso, precisamos, inicialmente, escrever o comprimento do lado a de um triângulo equilátero em função de sua altura h. Sabemos do tópico **A** que:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3} \cdot h}{3}$$

Consequentemente:

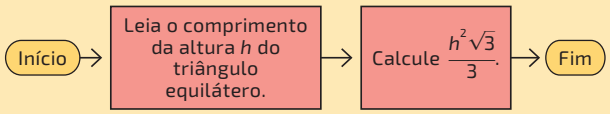
$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3} \cdot h}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot h^2 \cdot \sqrt{3}}{9 \cdot 4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$

Então, para calcular a área do triângulo equilátero de altura h efetuamos $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$.

Agora, escrevemos um possível algoritmo.

Início
1. Leia o comprimento da altura h do triângulo equilátero.
2. Calcule $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$.
Fim

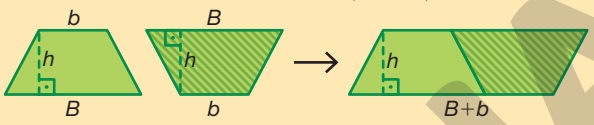
Finalmente, organizamos o algoritmo em um fluxograma.



BNCC Na questão **C**, os alunos são desafiados a mostrar que a área A de um trapézio de base maior B, base menor b e altura h é igual a $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$, contemplando, dessa maneira, aspectos da habilidade **EM13MAT307** da BNCC.

Resolução e comentários

C Considere o trapézio de base maior B, base menor b e altura h. Com outro trapézio congruente a esse, podemos compor um paralelogramo cuja altura é h e o comprimento da base é $(B + b)$.



RONALDO INÁCIO

A área A_p do paralelogramo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_p = (B + b) \cdot h$.

Como a área A do trapézio é igual a metade da área do paralelogramo, temos:

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

Páginas 126 a 130

BNCC As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas** visam possibilitar que os alunos empreguem diferentes métodos para a obtenção da área de uma região e apliquem as expressões de cálculos deduzidas anteriormente em situações reais, contemplando, assim, a habilidade **EM13MAT307** da BNCC.

- Aproveite o contexto abordado na tarefa **11** da página **127** para conversar com os alunos sobre a cultura musical dos jovens. Alguém da turma se interessa por música? Os alunos tocam algum instrumento musical? Quais são suas bandas preferidas? Qual é o estilo musical preferido? Envolva a sala, desperte o ânimo dos alunos e converse sobre o tema.

BNCC Aproveite o contexto abordado na tarefa **11**, e promova um debate acerca do tema contemporâneo transversal **Educação para o consumo**. Utilize esse momento para conversar com os alunos sobre os direitos do consumidor ao adquirir um ingresso para um *show* musical, por exemplo. Informe-os que, de acordo com o artigo 49 do Código de Defesa do Consumidor, o comprador tem até sete dias, a partir da data da compra ou da entrega do ingresso, para cancelá-lo e receber o dinheiro de volta. Se julgar conveniente, leve os alunos até o laboratório de informática para que acessem o Código de Defesa do Consumidor. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8078.htm>. Acesso em: 28 maio 2020.

MODERNA

- A tarefa **14**, das páginas **128** e **129**, apresenta uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **História**. Nela, o conceito de área de um polígono é associado ao método utilizado pelos antigos egípcios para demarcar as divisões de terras. Nessa abordagem, é aplicado o método de cubação para calcular áreas de terrenos, técnica utilizada no antigo Egito.

  Aproveite essa tarefa para desenvolver um trabalho com Etnomatemática. Verifique se os alunos percebem que o cálculo de área de figuras planas estudado na escola nem sempre é o mesmo que o utilizado pelos camponeses. Diga que o cálculo utilizado para a determinação de áreas pode variar de acordo com as circunstâncias socioculturais de cada civilização, embora todos esses métodos devam concordar, ao menos aproximadamente, no resultado obtido, considerando-se eventuais conversões de medidas.

  Para complementar as informações do texto, diga aos alunos que existem medidas agrárias que não são padronizadas. O alqueire, utilizado na maioria das regiões do Brasil para determinar áreas rurais, é um exemplo, pois o alqueire paulista possui 24 200 m^2, enquanto o alqueire mineiro possui o dobro, 48 400 m^2.

BNCC A tarefa **14** trata a respeito dos diferentes métodos utilizados para determinar a área de certa região. Assim, é esperado que os alunos mobilizem conceitos e estratégias matemáticas, fazendo uso de diferentes tipos de representações, principalmente a geométrica, na determinação dos resultados do problema proposto. Com isso, contempla-se aspectos das **Competências específicas 3** e **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

A tarefa **17** da página **130** contempla a habilidade **EM13MAT315**, pois solicita que os alunos criem um algoritmo que possibilite determinar a área de um triângulo equilátero, dado seu perímetro, e, em seguida, o organize em um fluxograma.

Página 135 Acessando tecnologias

- É possível desenvolver o trabalho com essa seção utilizando o GeoGebra, um *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de Geometria e Álgebra. Nesse programa, podemos realizar diversas construções geométricas utilizando pontos, retas, circunferência e outras curvas, considerando relações entre os elementos envolvidos, como posição relativa, pertinência e interseção. Utilizado em escolas e universidades de diversos países, o *software* pode ser obtido gratuitamente e está disponível em vários idiomas, inclusive em Português. O *download* pode ser feito no *site* <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 22 abr. 2020.

  Caso essa seção seja realizada no laboratório de informática da escola, certifique-se de que todos os computadores estejam com o *software* instalado. Uma alternativa é utilizar a versão *on-line* do GeoGebra, disponível no mesmo *site*.

Esse tipo de abordagem possibilita aos alunos entrarem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Para o trabalho com esse tema, pode-se utilizar a metodologia ativa **Sorting strips**. Para isso, utilize os passos apresentados na seção ou até mesmo proponha outra construção. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC A questão **4** desafia os alunos a utilizar os conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de um algoritmo que possibilita determinar a área de um polígono regular qualquer, dado o comprimento de seu apótema, a quantidade de lados e o comprimento de cada um deles, contemplando, assim, a habilidade **EM13MAT405** da BNCC.

Agora é com você! Resoluções

1 Utilizando a estratégia apresentada na seção, porém:
- construindo, no passo A, $AB = 6$ e indicando, no passo C, que o polígono tem 3 vértices, obtemos que a área do triângulo equilátero de lados 6 cm é, aproximadamente, 15,59 cm^2.
- construindo, no passo A, $AB = 2$ e indicando, no passo C, que o polígono tem 6 vértices, obtemos que a área do hexágono regular de lados 2 m é, aproximadamente, 10,39 m^2.
- construindo, no passo A, $AB = 7$ e indicando, no passo C, que o polígono tem 5 vértices, obtemos que a área do pentágono regular de lados 7 dm é, aproximadamente, 84,3 dm^2.
- construindo, no passo A, $AB = 1$ e indicando, no passo C, que o polígono tem 12 vértices, obtemos que a área do dodecágono regular de lados 1 mm é, aproximadamente, 11,2 mm^2.

2 Um possível passo a passo para a construção do triângulo é apresentado a seguir.

A. Utilizando a ferramenta **Ponto**, marque o ponto *A*.

B. Selecione a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio** e construa uma circunferência de centro *A* e raio 7. Para isso, clique sobre o ponto *A* e, na janela **Círculo dados Centro e Raio**, indique o comprimento do raio, nesse caso, 7.

C. Com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto *B* sobre a circunferência.

MODERNA

D. Marque o ponto B' sobre a circunferência de maneira que $B\hat{A}B'$ tenha medida igual ao ângulo central do triângulo equilátero. Para isso, selecione a ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa** e clique sobre os pontos B e A, nessa ordem. Em seguida, na janela **Ângulo com Amplitude Fixa**, digite a medida do ângulo, nesse caso, 120°.

E. Marque o ponto B'' sobre a circunferência de maneira que $B'\hat{A}B''$ tenha medida igual ao ângulo central do triângulo equilátero. Para isso, repita o procedimento apresentado no item **D**, porém, clicando sobre os pontos B' e A, nessa ordem.

F. Selecione a ferramenta **Reta Tangente** e construa uma reta r tangente à circunferência passando pelo ponto B. Para isso, clique sobre o ponto B e sobre a circunferência.

G. Repita o procedimento apresentado no item **F** para os pontos B' e B'', construindo, assim, as retas s e t, respectivamente.

H. Com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, marque os pontos de interseção C, D e E entre as retas r e s, r e t, s e t, respectivamente. Para isso, clique nas retas duas a duas.

I. Selecione a ferramenta **Polígono** e clique sobre os pontos C, D, E e C, nessa ordem.

J. Com a ferramenta **Área**, clique sobre o triângulo construído.

A construção do pentágono pode ser feita de maneira análoga à apresentada, porém, a circunferência construída deve ter raio 3 e deve-se marcar 5 pontos sobre ela, de maneira que dois pontos consecutivos, juntamente com o centro da circunferência, formem ângulos cuja medida seja igual ao ângulo central do pentágono regular, ou seja, 72°.

Seguindo as estratégias apresentadas, obtemos que a área do triângulo é, aproximadamente, 254,61 cm^2 e a do pentágono, aproximadamente, 32,69 dm^2.

3 Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes.

Em seguida, devemos responder às seguintes questões.

1. Quais são os dados de entrada?

   R.: Dados de entrada: comprimento do apótema; quantidade de lados; e o comprimento de cada um dos lados.

2. Quais são os dados de saída?

   R.: Dados de saída: área do polígono regular.

3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais procedimentos devem ser realizados?

   R.: Indicando por a, n e c, respectivamente, o comprimento do apótema, a quantidade de lados e o comprimento de cada lado, temos que a área A de um polígono regular é:

$$A = n \cdot \frac{c \cdot a}{2}$$

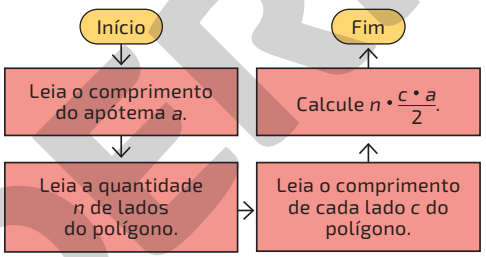
Portanto, para calcular a área do polígono regular devemos efetuar $n \cdot \frac{c \cdot a}{2}$.

Agora, escrevemos um possível algoritmo.

Início
1. Leia o comprimento do apótema a.
2. Leia a quantidade n de lados do polígono.
3. Leia o comprimento de cada lado c do polígono.
4. Calcule $n \cdot \frac{c \cdot a}{2}$.

Fim

Finalmente, organizamos o algoritmo em um fluxograma.



4 Uma possível resposta é:

```
1  Algoritmo "area_de_um_poligono_regular_qualquer"
2  Var
3  a, n, c, area: real
4  Inicio
5  escreva("Digite a quantidade de lados do polígono ")
6  leia(n)
7  escreva("Digite o comprimento de cada lado do polígono ")
8  leia(c)
9  escreva("Digite o comprimento do apótema ")
10 leia(a)
11 area <- (n*c*a)/2
12 escreva("A área do polígono regular é ", area)
13. Fimalgoritmo
```

BNCC Ao desenvolver o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** os alunos podem, por meio de tecnologias digitais, se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, elaborar e resolver problemas, exercendo protagonismo na vida pessoal e coletiva, desenvolvendo assim, a **Competência geral 5** da BNCC.

MODERNA

Página 137

BNCC A tarefa **28** trata a respeito do processo de produção de peças em cerâmica. Esse contexto permite estabelecer conexão com o tema contemporâneo transversal **Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, levando os alunos a perceber a pluralidade cultural que ajuda a formar a identidade brasileira. Se julgar conveniente, oriente os alunos a realizar uma pesquisa sobre a cerâmica marajoara, feita pelos indígenas da Ilha de Marajó. Informe-os que essa cerâmica é a mais antiga dentre as artes em cerâmica do Brasil.

Sala dos professores

O contexto abordado na tarefa **31** permite a articulação com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares **Língua Portuguesa** e **Arte**. Proponha que os alunos, em grupos, pesquisem sobre vida e obra de Erico Santos, destacando algumas curiosidades e suas principais contribuições para o cenário musical brasileiro. Por fim, solicite que apresentem suas pesquisas para toda a turma.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

11 Área e as vagas de estacionamento destinadas aos idosos

Objetivos específicos

- Identificar informações relevantes frente a situações-problema.
- Realizar um paralelo lógico entre as tarefas propostas e as situações do cotidiano.
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de área em situações reais.

Esse tema apresenta informações referentes aos direitos dos idosos, em especial, às vagas de estacionamento.

Ao trabalhar com a Lei Federal nº 10.741, de 1º de outubro de 2003, buscou-se propiciar aos alunos que calculassem a área de uma vaga destinada a idosos, dadas as suas dimensões, aplicando assim, conceitos estudados em temas anteriores.

Páginas 138 e 139 Menos crianças, mais idosos

- Essas páginas apresentam informações sobre o aumento da população de idosos no Brasil, e aproveita o assunto para expor algumas informações sobre o respeito a esse grupo.

Uma sugestão para a condução dessas páginas é estabelecer um tempo para que os alunos leiam o texto e respondam às questões (por exemplo, 20 minutos). Em seguida, promova um debate coletivo para que eles conheçam mais sobre os direitos dos idosos e, principalmente, despertem a consciência para o respeito aos idosos, reconhecendo sua participação na sociedade e compreendendo suas contribuições.

Uma sugestão de trabalho complementar é a realização de uma pesquisa sobre a porcentagem de idosos na população de outros países, como os da Europa e da África.

BNCC O contexto abordado nessas páginas possibilita o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso**. Com o objetivo de formar cidadãos conscientes capazes de viver em sociedade, converse com os alunos sobre a importância de respeitar e valorizar a população idosa, pois esse tipo de abordagem contribui para a saúde mental dos alunos. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Aproveite a conversa para destacar a importância de se exercitar a empatia, o diálogo e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito aos idosos e aos seus direitos, com acolhimento e valorização, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da **Competência geral 9** da BNCC.

Na questão intervenção **B**, os alunos são levados a aplicar a fórmula da área do retângulo, deduzida anteriormente, para calcular a área de uma vaga destinada a idosos, contemplando, assim, aspectos da habilidade **EM13MAT307** e da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias.**

Resoluções e comentários

A Para determinar a quantidade mínima de vagas que devem ser destinadas a idosos, devemos calcular 5% da quantidade total de vagas (500), ou seja:

$$0{,}05 \cdot 500 = 25$$

Portanto, devem ser destinadas, no mínimo, 25 vagas a idosos.

B Inicialmente, vamos determinar a largura da vaga. Para isso, fazemos:

$$0{,}12\ \text{m} + 2{,}2\ \text{m} + 0{,}12\ \text{m} = 2{,}44\ \text{m}$$

Assim, as dimensões da vaga são 5,25 m e 2,44 m. Como a vaga tem formato retangular, segue que sua área A é:

$$A = 5{,}25 \cdot 2{,}44 = 12{,}81$$

Logo, a área de uma vaga é 12,81 m^2. Multiplicando essa medida pelo preço do metro quadrado cobrado pelo profissional, temos:

$$12{,}81 \cdot 25 = 320{,}25$$

Portanto, esse profissional cobrou R$ 320,25 para pintar uma dessas vagas.

- Com o objetivo de dar ênfase a aspectos colaborativos, utilize a metodologia ativa **Gallery walk** ao propor que os alunos trabalhem com o **Ser consciente**. Essa metodologia favorece a aprendizagem social, cognitiva e construtivista, além de destacar as opiniões, ideias e experiências dos alunos. Mais informações sobre a **Gallery Walk** podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

12 Área do círculo

Objetivo específico

- Distinguir e resolver problemas que envolvam área do círculo, do setor circular e da coroa circular.

Esse tema retoma algumas ideias de circunferência e círculo estudadas em anos anteriores e aprofunda-se no conceito de área. Nele, é apresentada uma maneira que auxilia na compreensão da fórmula da área do círculo.

Ao longo do tema, além da fórmula da área do círculo, serão apresentadas aos alunos as fórmulas da área de um setor circular e de uma coroa circular. Porém, é importante que eles percebam a possibilidade de resolver problemas relacionados à área dessas figuras sem o uso de fórmulas específicas, utilizando, para tanto, a fórmula da área do círculo.

BNCC Nesse tema, os alunos são levados a utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos envolvendo círculos e circunferências para interpretar, construir modelos e resolver problemas envolvendo o cálculo de área em diferentes contextos, contemplando, assim, a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Além disso, conforme sugere a habilidade **EM13MAT307**, eles serão desafiados a utilizar diferentes métodos para a obtenção de área de regiões e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais.

Páginas 140 e 141 **Discos de vinil**

- Nessas páginas, de maneira intuitiva, a ideia de área da coroa circular está relacionada às faixas musicais gravadas em discos de vinil. O texto apresenta subsídios para que os alunos entendam que, quanto maior a duração da música, maior também será a área da faixa, ou seja, da coroa circular.

  Solicite aos alunos que leiam o texto e respondam às questões propostas em um intervalo de tempo determinado (por exemplo, 15 minutos). Na sequência, corrija as questões oralmente e converse com eles para coletar informações sobre a compreensão do tema abordado. Avalie a possibilidade de levar alguns discos de vinil para a sala de aula, a fim de que manuseiem e observem como as faixas musicais são distribuídas.

  Converse com os alunos sobre as diferenças entre os discos de vinil e outras mídias atuais. Verifique se eles conseguem estabelecer relações entre a área da faixa e a duração da música. É necessário conferir se eles entendem que, quando duas músicas com o mesmo tempo de duração são gravadas no mesmo disco, uma delas próxima à borda e a outra mais ao centro, a faixa próxima à borda será mais estreita que a outra, pois a área das coroas circulares deve ser igual.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirar das linhas gerais dos conteúdos propostos e a pesquisar problemas envolvendo área de círculos, de setores circulares e de coroas circulares, registrando possíveis dúvidas. Em seguida, permita que eles conversem aos pares sobre esses problemas para que, depois, apresentem as conclusões para toda a turma. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Ao trabalhar com essas páginas, verifique a possibilidade de elaborar uma aula em conjunto com um professor da área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Arte**. Proponha que os alunos, em grupos, realizem uma pesquisa sobre as relações entre Música e Matemática, destacando, por exemplo, as contribuições de Pitágoras para a música. Além disso, promova um debate envolvendo toda a turma sobre a diversidade de gêneros e estilos musicais presentes no Brasil.

EM MODERNA

Página 143

- Depois de apresentado o conteúdo do tópico **Área da coroa circular** e de avaliar os alunos quanto à compreensão dessas informações, retome a temática exposta nas páginas **140** e **141**, levando um disco de vinil para os alunos analisarem. Uma tarefa que pode ser realizada nesse momento é pedir a eles que, em duplas, desenhem uma réplica do disco com faixas de mesma área. Essa tarefa pode ajudá-los a perceber que, quanto mais afastada do centro a faixa estiver, mais estreita ela será, pois $R - r$ será cada vez menor, considerando que R e r indicam os comprimentos dos raios das circunferências maior e menor, respectivamente.

BNCC

Ao trabalhar com a questão intervenção **B**, os alunos têm a oportunidade de escrever um algoritmo que possibilita calcular a área da coroa circular, dado o comprimento dos raios das circunferências que a determinam, contemplando, assim, a habilidade **EM13MAT315** da BNCC.

Resolução e comentários

B Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Em seguida, devemos responder às seguintes questões.

1 Quais são os dados de entrada?

R.: Dados de entrada: comprimento dos raios das circunferências concêntricas que determinam a coroa circular.

2 Quais são os dados de saída?

R.: Dados de saída: área da coroa circular.

3 Conhecendo os dados de entrada e saída, quais procedimentos devem ser realizados?

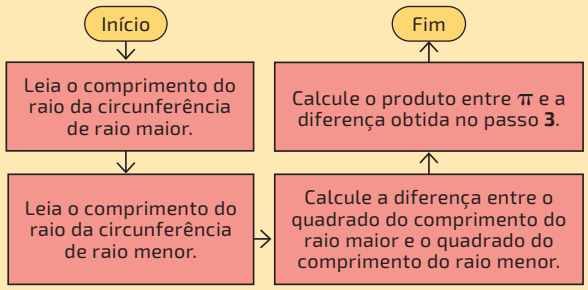
R.: Para calcular a área da coroa circular determinada pelas circunferências concêntricas de raios R e r efetuamos $\pi\left(R^2 - r^2\right)$.

Agora, escrevemos um possível algoritmo.

Início
1. Leia o comprimento da circunferência de raio maior.
2. Leia o comprimento da circunferência de raio menor.
3. Calcule a diferença entre o quadrado do comprimento do raio maior e o quadrado do comprimento do raio menor.
4. Calcule o produto entre π e a diferença obtida no passo 3.

Fim

Finalmente, organizamos um fluxograma.



Páginas 146 e 147

BNCC

Ao desenvolver o trabalho com a tarefa **6** da página **146**, converse com os alunos sobre a importância das placas de sinalização de trânsito, desenvolvendo assim, uma conexão com o tema contemporâneo transversal **Educação para o trânsito**. Explique para eles que o objetivo das placas de sinalização é informar aos condutores sobre, por exemplo, proibições, restrições ou obrigações. Se julgar conveniente, oriente-os a realizar, em grupos, uma pesquisa sobre outros tipos de placas de sinalização de trânsito, destacando seus significados. Por fim, peça que apresentem os resultados obtidos para toda a turma.

No desenvolvimento dessa dinâmica, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Ao resolver a tarefa **11** da página **147**, peça aos alunos que utilizem a fórmula de resolução do **Problema 50** do Papiro de Rhind para verificar se a aproximação feita pelos egípcios é satisfatória. Solicite que construam um círculo de raio 9 cm e um quadrado de lado $\frac{8}{9}d$, em que d indica o comprimento do diâmetro do círculo construído. Por fim, oriente-os a comparar a área dessas duas figuras visual e numericamente.

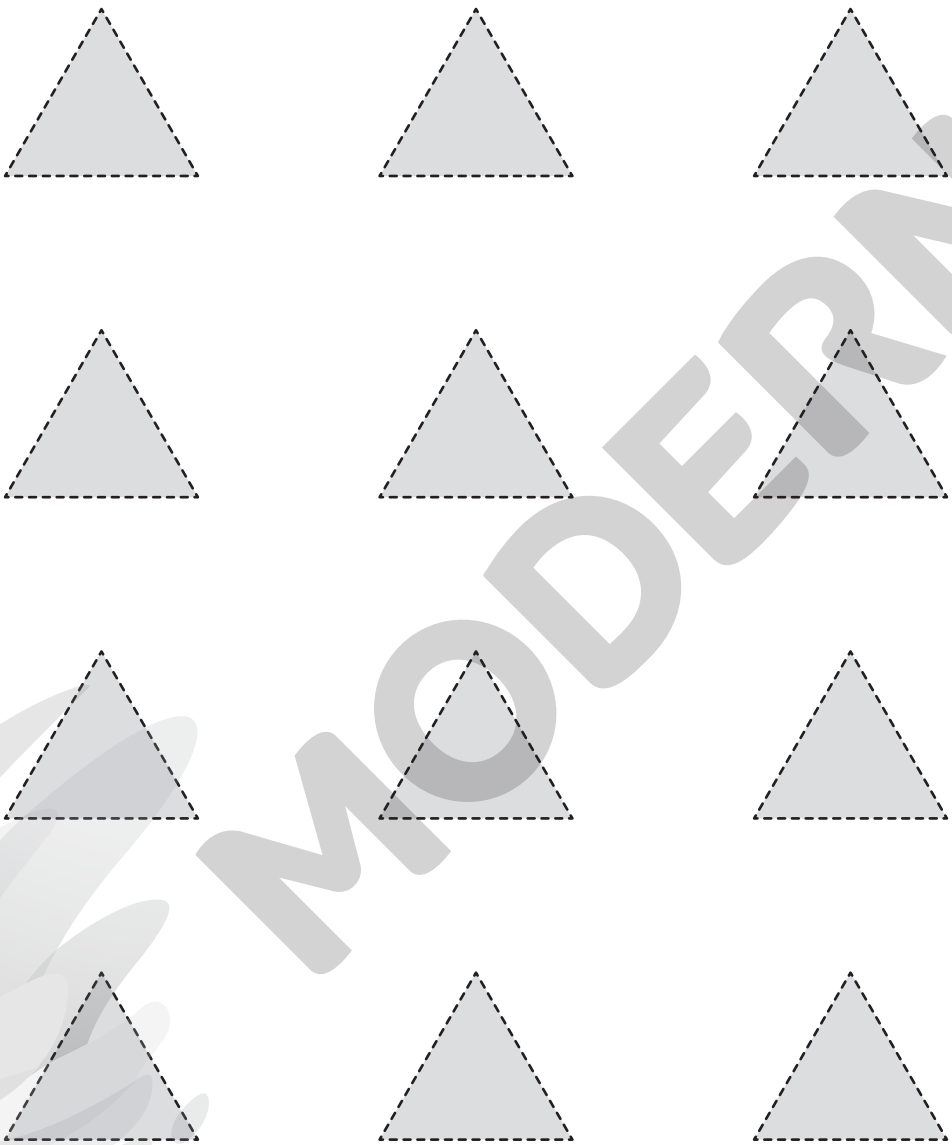
- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite, se possível, que eles comentem quais as vantagens dos estudos matemáticos sobre a área do círculo, do setor circular e da coroa circular. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

EM OFERTA

Triângulos

Referente ao **tema 8**

MODELO



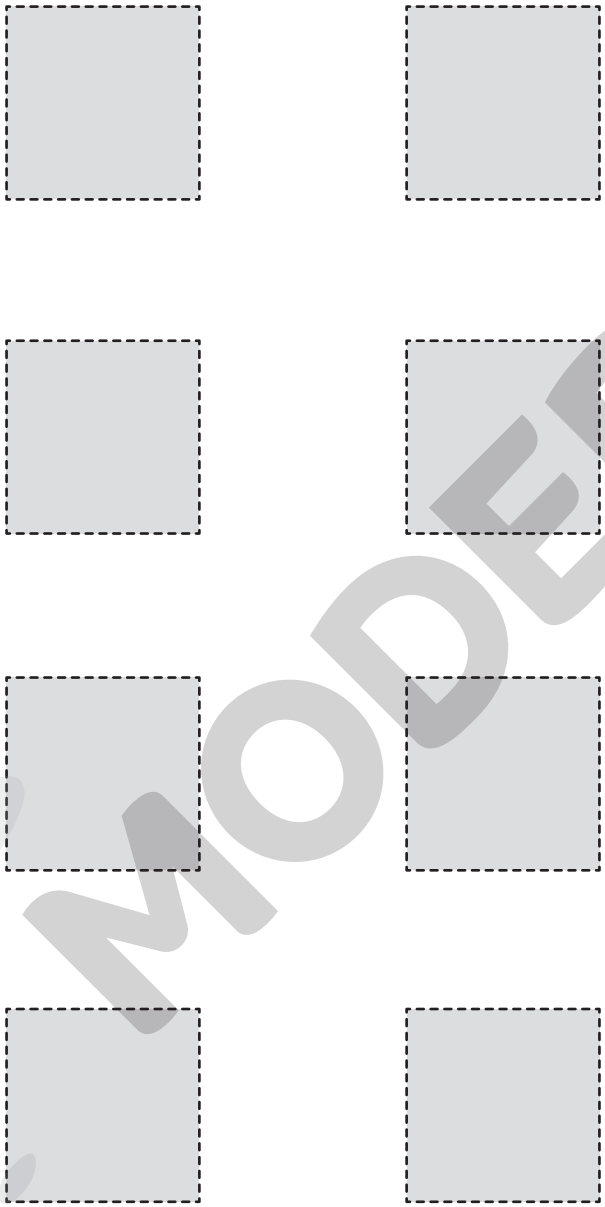
RONALDO INÁCIO

MODERNA

Quadrados

Referente ao **tema 8**

MODELO



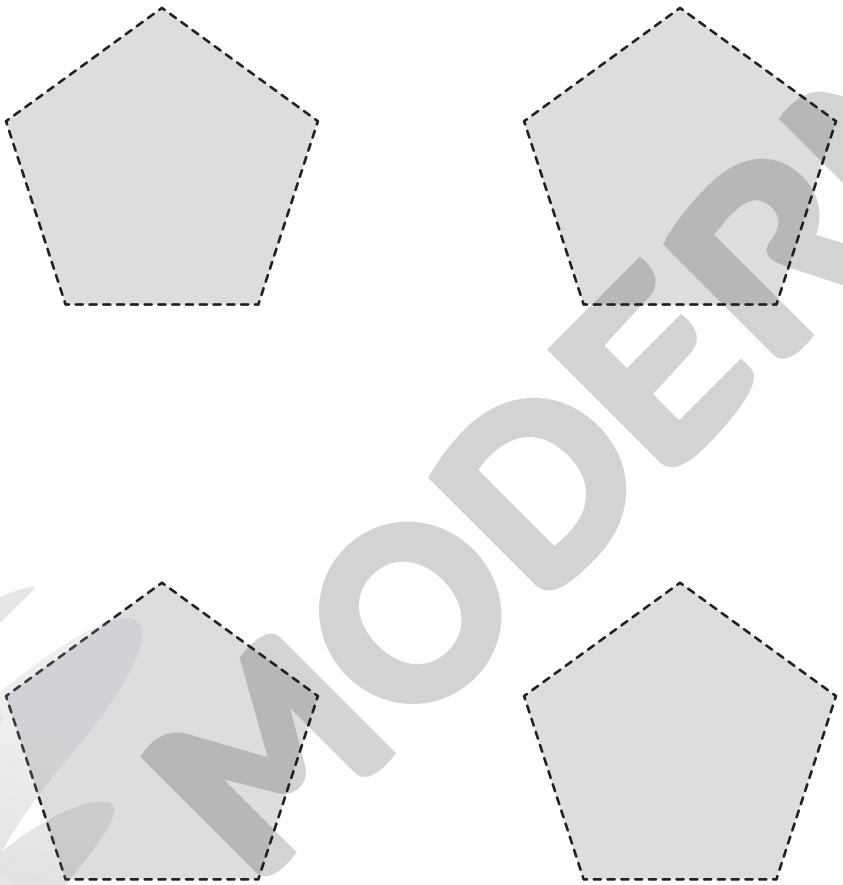
RIONALDO INÁCIO

MODERNA

Pentágonos

Referente ao **tema 8**

MODELO



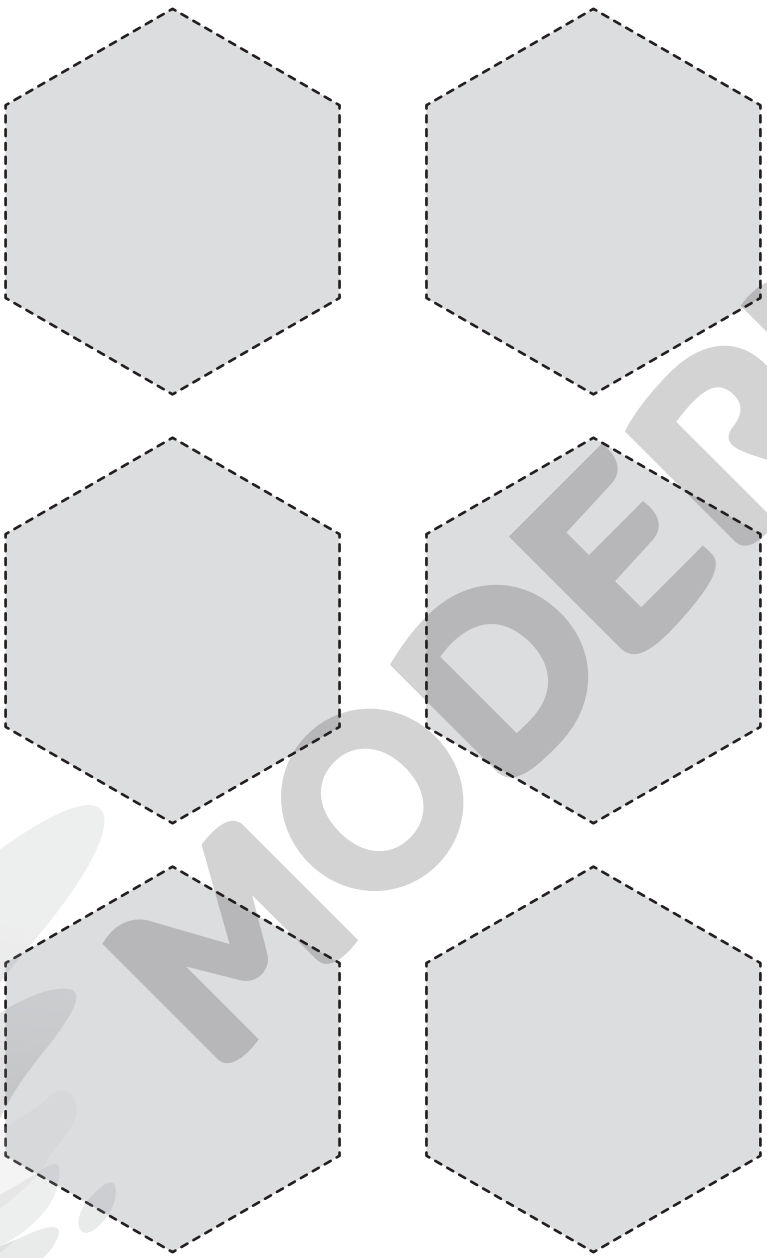
RONALDO INÁCIO

MODERNA

Hexágonos

Referente ao **tema 8**

MODELO



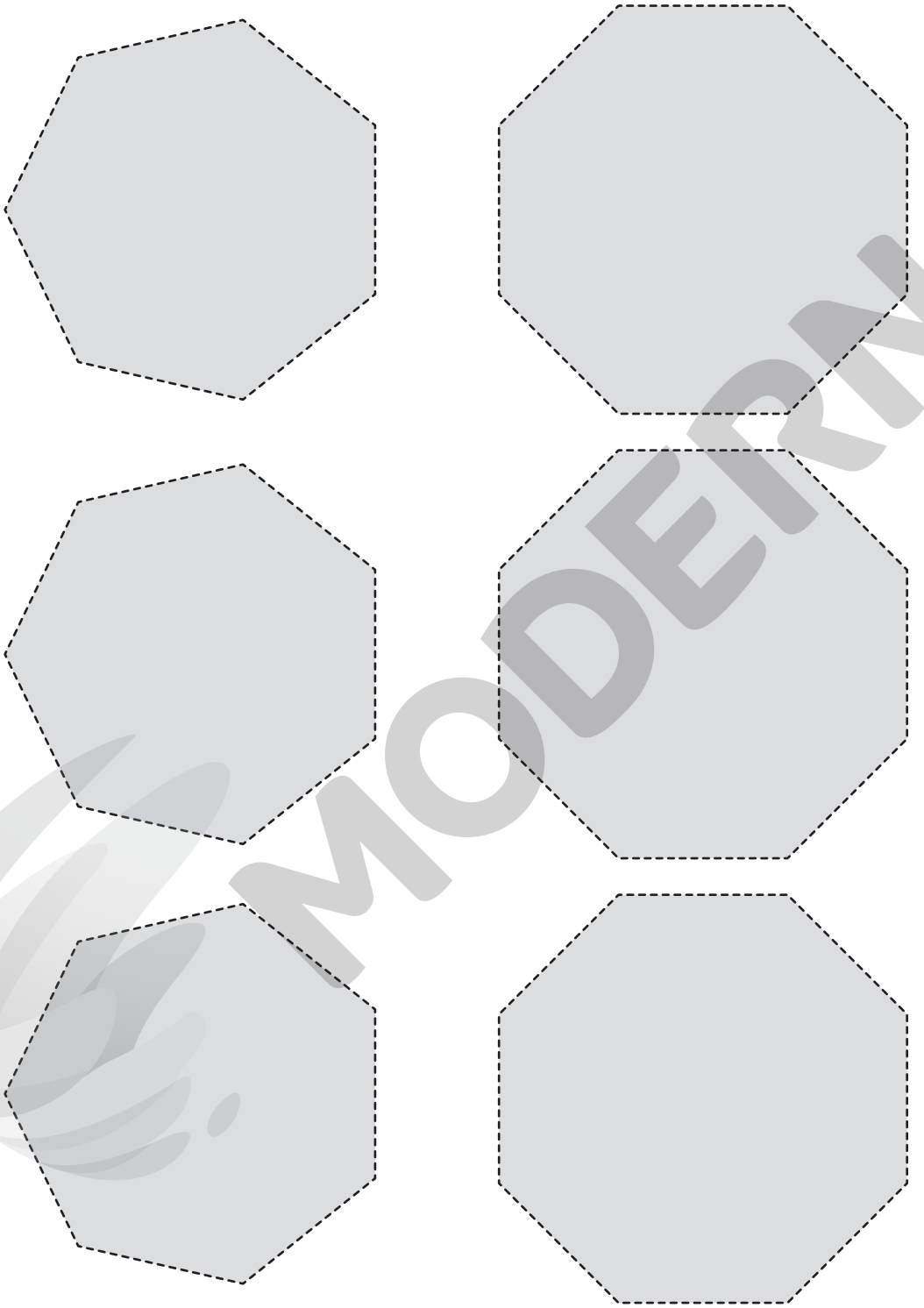
RONALDO INÁCIO

MODERNA

Heptágonos e octógonos

Referente ao **tema 8**

MODELO



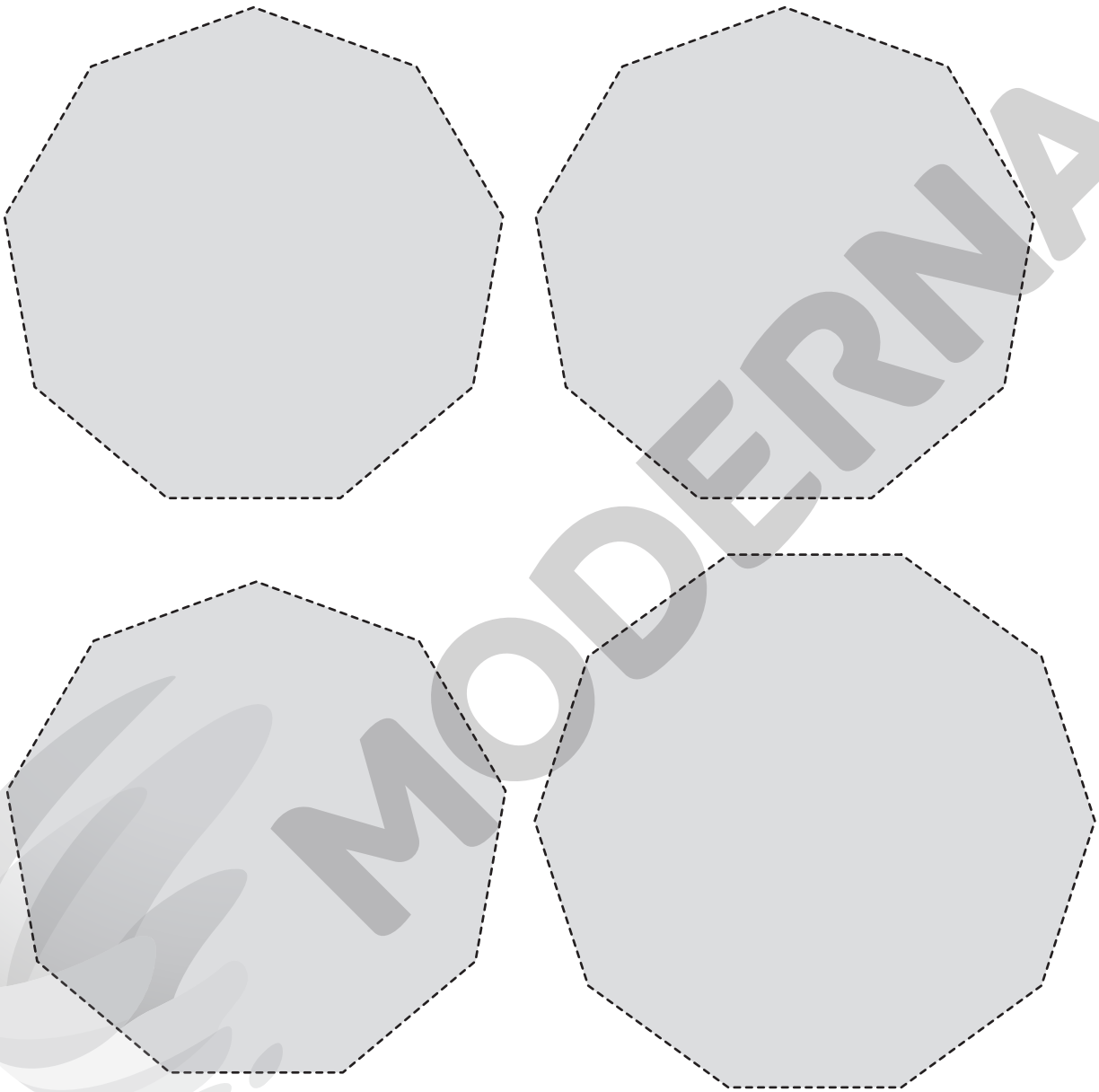
RONALDO INÁCIO

MODERNA

Eneágonos e decágono

Referente ao **tema 8**

MODELO



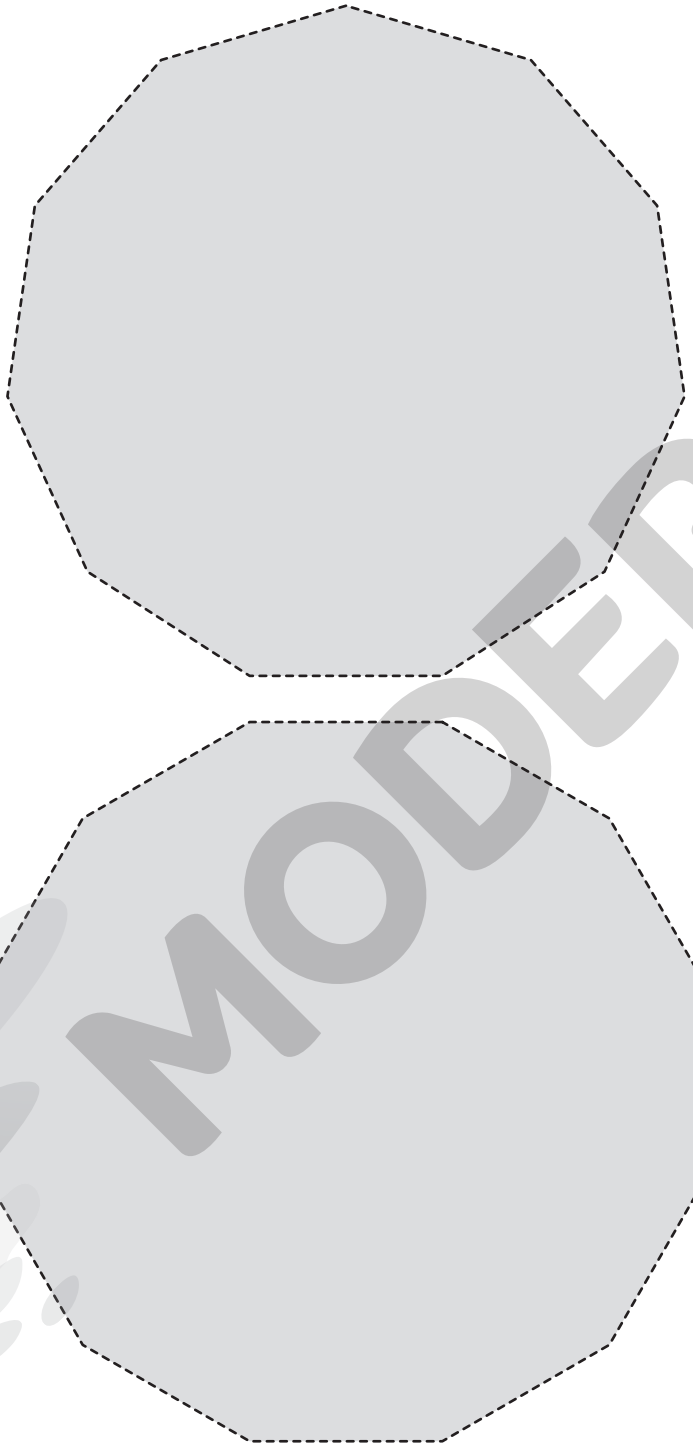
RONALDO INÁCIO

MODERNA

Undecágono e dodecágono

Referente ao **tema 8**

MODELO



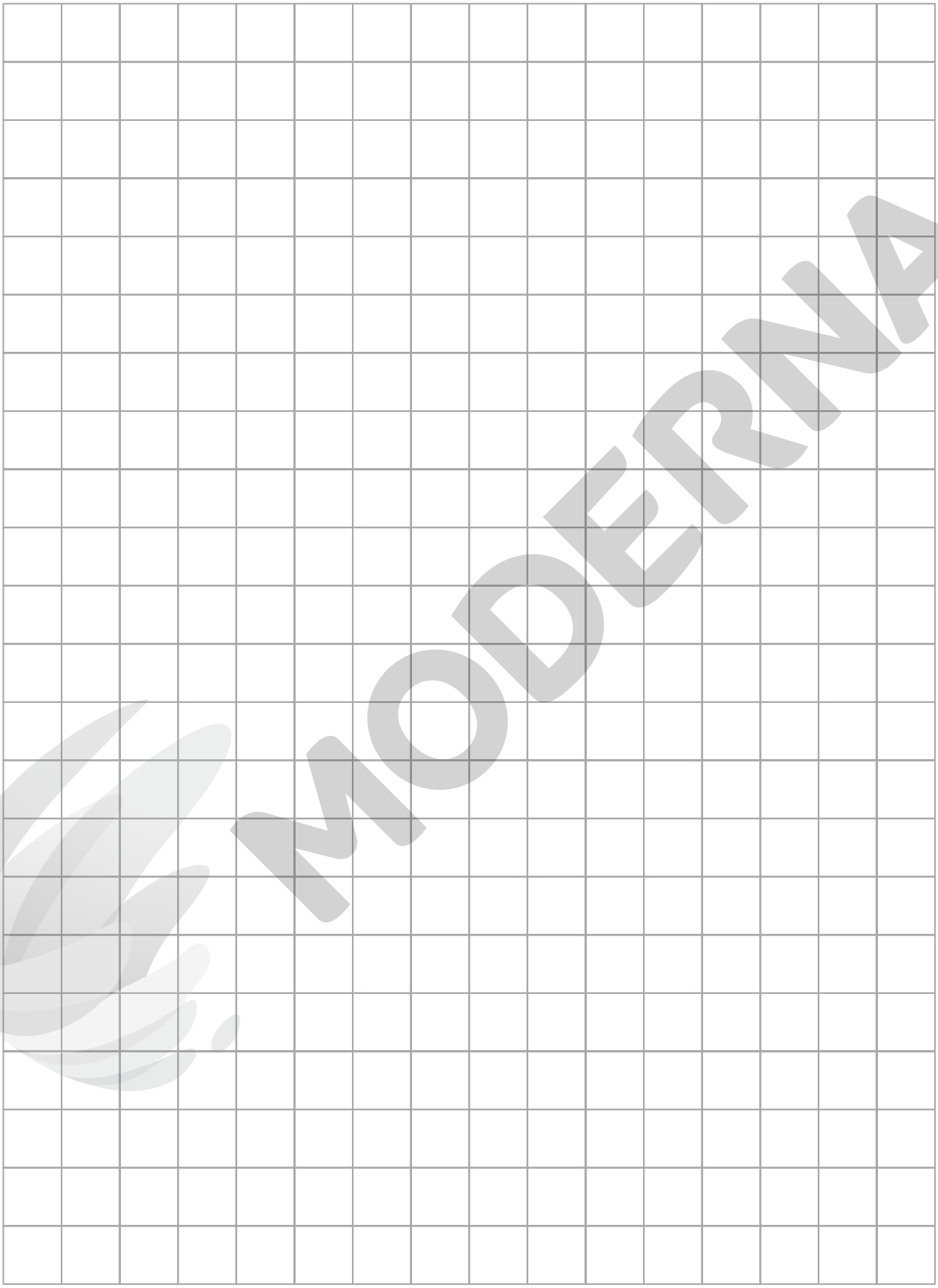
RONALDO INÁCIO

MODERNA

Malha quadriculada

Referente ao **tema 10**

MODELO



SERGIO L. FILHO

MODERNA

1 O Teorema de Tales e a semelhança de triângulos

1. **a)** De acordo com o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{12}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4}{\frac{12}{9}} \Rightarrow x = 3$$

b) De acordo com o Teorema de Tales, segue que:

$$\frac{x+4}{5} = \frac{x+2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (x+4) = 5 \cdot (x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 16 = 5x + 10 \Rightarrow x = 6$$

2. Usando o Teorema de Tales, temos:

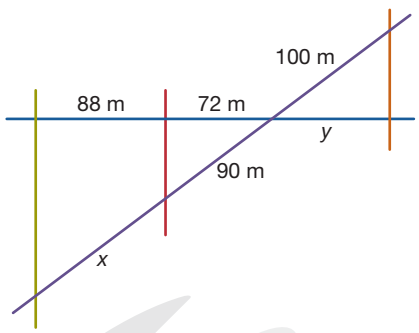
$$\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{CE}{10} \Rightarrow CE = 5$$

Calculando o perímetro, temos:

$$12 + 6 + 12 + 5 + 10 = 45$$

Portanto, o perímetro desse triângulo é 45 cm.

3. Para resolver esse problema, considere o seguinte esquema, que representa parte das ruas do mapa.



RONALDO INÁCIO

Como as ruas Brasil, Sergipe e Araguaia são paralelas, utilizando o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{90} = \frac{88}{72} \Rightarrow x = 110 \text{ e } \frac{y}{72} = \frac{100}{90} \Rightarrow y = 80$$

Assim, temos $x = 110$ m e $y = 80$ m.

a) $100 + 90 + x = 190 + 110 = 300$

Portanto, o pedestre vai percorrer 300 m.

b) $88 + 72 + y = 160 + 80 = 240$

Portanto, nesse caso, o pedestre vai percorrer 240 m.

4. Considere x como o comprimento do segmento $\overline{BP_1}$.

Como $\overline{BC} // \overline{P_1A}$, temos:

$$\frac{BP_2}{BP_1} = \frac{CP_2}{AC} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{12}{48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 48 \cdot \frac{10}{12} \Rightarrow x = 40$$

Logo, $BP_1 = 40$ m.

A quantidade mínima de cabo utilizada é dada por:

$$BP_1 + BP_2 = 40 + 10 = 50$$

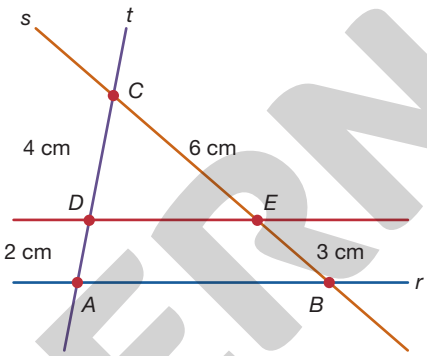
Portanto, foram utilizados, no mínimo, 50 m de cabo entre P_1 e P_2.

5. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

6. Paralela, pois a razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes é a mesma, ou seja, em um triângulo ABC, se D e E são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, temos:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1$$

7. **a)** Utilizando os processos descritos na tarefa, obtemos o seguinte esquema de retas:



RONALDO INÁCIO

b) De acordo com o esquema de retas obtido no item **a**, temos:

$$\frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{CE}{9} = \frac{4}{6} \Rightarrow CE = 6$$

Portanto, o segmento $\overline{CE}$ tem 6 cm de comprimento.

c) Espera-se que os alunos respondam que em um ΔABC qualquer, traçamos duas retas, r e s, uma contendo $\overline{AB}$ e outra contendo $\overline{AC}$, respectivamente. Em r, marcamos um ponto D tal que B esteja entre A e D. Em seguida, medimos o comprimento de $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$, e calculamos $d = AC \cdot \frac{BD}{AB}$. Depois, marcamos em s um ponto E, tal que C esteja entre A e E e $CE = d$. Por fim, traçamos a reta que passa por D e E, obtendo $\overline{BC} // \overline{DE}$.

8. Pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos ABC e EBD são semelhantes.

Assim, temos:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{EB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+8}{6} = \frac{2x+6}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot (x+8) =$$

$$= 6 \cdot (2x+6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 64 = 12x + 36 \Rightarrow x = 7$$

9. Supondo que a semelhança entre os triângulos ABC e FGH seja estabelecida pela correspondência entre A e F, B e G, C e H e que a razão de proporcionalidade entre eles seja k, podemos escrever:

MODERNA

$$\frac{AB}{FG} = \frac{AC}{FH} = \frac{BC}{GH} = k$$

Consequentemente:

$$AB = k \cdot FG,\ AC = k \cdot FH \text{ e } BC = k \cdot GH$$

Agora, vamos calcular a razão entre o perímetro do triângulo *ABC* e o perímetro do triângulo *FGH*.

$$\frac{AB + AC + BC}{FG + FH + GH} = \frac{k \cdot FG + k \cdot FH + k \cdot GH}{FG + FH + GH} = k$$

10. Ao resolver essa tarefa, espera-se que os alunos apliquem o resultado demonstrado na tarefa anterior.

Inicialmente, calculamos o perímetro do triângulo *ABC*.

$$8{,}3 \text{ cm} + 6{,}5 \text{ cm} + 9{,}2 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

Da tarefa anterior, sabemos que a razão entre os perímetros de dois triângulos semelhantes é igual à razão de proporcionalidade entre esses triângulos. Assim:

$$\frac{480}{24} = 20$$

Logo, a razão de proporcionalidade entre esses triângulos é 20.

Como o menor lado do triângulo *ABC* tem 6,5 cm de comprimento, fazemos:

$$20 \cdot 6{,}5 = 130$$

Portanto, o comprimento do menor lado desse triângulo é 130 cm.

11. Note que pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos *AGF* e *BGC* são semelhantes.

Assim:

$$\frac{AF}{BC} = \frac{AG}{BG} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{30}{BC} = \frac{20}{(20 - AB)}$$

Como $AB = BC$, temos:

$$\frac{30}{BC} = \frac{20}{(20 - AB)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{30}{BC} = \frac{20}{(20 - BC)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 600 - 30BC = 20BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 600 = 50BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{600}{50} \Rightarrow BC = 12$$

Logo, $BC = 12$ cm e, consequentemente, o perímetro *P* do quadrado é:

$$P = 4 \cdot BC = 4 \cdot 12 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$$

Portanto, o perímetro do quadrado *ABCD* é 48 cm.

12. Inicialmente, nomeamos o triângulo construído a partir do lado do quadrado de lado 8 cm por T_1 e o triângulo construído a partir do lado do quadrado de lado *x* por T_2. Nesse caso:

- o comprimento da base de T_1 é 8 cm e o da altura é 5 cm, pois 13 cm − 8 cm = 5 cm.
- o comprimento da base de T_2 é *x* e o da altura é 8 cm − *x*.

Além disso, pelo caso de semelhança **AA** os triângulos T_1 e T_2 são semelhantes. Desse modo:

$$\frac{5}{8 - x} = \frac{8}{x} \Rightarrow 5x = 64 - 8x \Rightarrow 13x = 64 \Rightarrow x = \frac{64}{13}$$

Assim, $x = \frac{64}{13}$ cm. Agora, calculamos o perímetro *P* do quadrado destacado em azul.

$$P = 4 \cdot x = 4 \cdot \frac{64}{13} = \frac{256}{13}$$

Portanto, o perímetro do quadrado destacado em azul é $\frac{256}{13}$ cm.

13. Indicando por *P* o perímetro do triângulo *ABC*, segue que:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{P}{\underbrace{552}_{\substack{\text{perímetro do} \\ \text{triângulo MNO}}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25}{150} = \frac{P}{552} \Rightarrow 150P = 13\,800 \Rightarrow P = 92$$

Portanto, o perímetro do triângulo *ABC* é 92 cm.

14. Dadas as informações do problema, devemos verificar, utilizando o caso de semelhança **LAL**, se os triângulos são semelhantes. Observe que $\hat{A} = \hat{E}$, porém:

$$\frac{5}{2{,}5} \neq \frac{7}{3{,}7} \quad \text{e} \quad \frac{7}{2{,}5} \neq \frac{5}{3{,}7}$$

Logo, os triângulos não são semelhantes, pois os lados correspondentes não são proporcionais.

15. **a)** Sim. O caso que garante a semelhança é o **LLL**, pois os lados correspondentes são proporcionais, isto é:

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{GF} = \frac{BC}{EF}$$

b) Observe que, devido à semelhança dos triângulos, $\hat{B} = \hat{F}$ e $\hat{C} = \hat{E}$.

Assim,

- $4x - 45 = 5y \Rightarrow 4x - 5y = 45$
- $3y + 30 = 2x + 11 \Rightarrow 2x - 3y = 19$

Por meio dessas equações, montamos o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} 4x - 5y = 45 \\ 2x - 3y = 19 \end{cases}$$

Assim, $x = 20°$ e $y = 7°$. Consequentemente:

- $\hat{B} = 4 \cdot \underbrace{20°}_{x} - 45° = 35°$;
- $\hat{C} = 3 \cdot \underbrace{7°}_{y} + 30° = 51°$.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow z + 35° + 51° = 180° \Rightarrow z = 94°$$

Portanto, o valor de *z* é 94°.

16. Sendo *h* a altura do poste, temos:

$$\frac{h}{1{,}6} = \frac{3}{1{,}2} \Rightarrow h = 4$$

Portanto, a altura do poste é 4 m.

17. alternativa **c**

Pelo caso de semelhança **AA**, temos:

- os triângulos *AEF* e *ADB* são semelhantes e, consequentemente, $\frac{\underbrace{EF}_{6}}{\underbrace{BD}} = \frac{AF}{AB}$.
- os triângulos *BEF* e *BCA* são semelhantes e, consequentemente, $\frac{\underbrace{EF}_{4}}{\underbrace{AC}} = \frac{FB}{AB}$.

Os alunos ainda podem ter dúvidas na verificação de outras relações necessárias à conclusão do cálculo, conforme segue:

Além disso, como $AF + FB = AB$, segue que:

MODERNA

$$\frac{EF}{\underbrace{6}_{BD}} + \frac{EF}{\underbrace{4}_{AC}} = \frac{AF}{AB} + \frac{FB}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = \overset{AF + FB}{\overbrace{\frac{AB}{AB}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = 1 \Rightarrow \frac{5EF}{12} = 1 \Rightarrow EF = 2{,}4$$

Portanto, o comprimento da haste EF é 2,4 m.

18. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

2 As relações métricas e a trigonometria no triângulo retângulo

1. Primeiro, usamos o Teorema de Pitágoras para determinar o comprimento do lado $\overline{BC}$.

$$(BC)^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (BC)^2 = 625 \Rightarrow BC = 25$$

Usando a relação métrica $a \cdot h = b \cdot c$, temos:

$$25 \cdot x = 15 \cdot 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x = 300 \Rightarrow x = 12$$

Portanto, o valor de x é 12 cm.

2. Nessa tarefa, os alunos podem apresentar dificuldades quanto à relação que devem usar para obter cada uma das medidas. Oriente-os caso ache necessário.

Considere c o comprimento do cateto $\overline{AB}$, b o comprimento do cateto $\overline{AC}$, m e n o comprimento das projeções desses catetos sobre a hipotenusa a, respectivamente.

Usando as relações métricas do triângulo retângulo, temos:

$$a \cdot h = b \cdot c \Rightarrow a \cdot 7{,}2 = 12 \cdot 9 \Rightarrow a = 15$$

Logo:

$$c^2 = a \cdot m \Rightarrow 9^2 = 15 \cdot m \Rightarrow m = 5{,}4$$

$$b^2 = a \cdot n \Rightarrow 12^2 = 15 \cdot n \Rightarrow n = 9{,}6$$

Portanto, o comprimento da projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa é 5,4 cm e o comprimento da projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa é 9,6 cm.

3. Observe que a distância entre os postes P_1 e P_4 representa um dos catetos do triângulo retângulo $P_1P_4P_3$.

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(P_1P_3)^2 = (P_3P_4)^2 + (P_1P_4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100^2 = 80^2 + (P_1P_4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1P_4 = 60$$

Assim, a distância entre os postes P_1 e P_2 é 60 m.

Para calcular a distância entre os postes P_2 e P_3, fazemos:

$$(P_3P_4)^2 = P_1P_3 \cdot P_2P_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 80^2 = 100 \cdot P_2P_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2P_3 = 64$$

Logo, a distância entre os postes P_2 e P_3 é 64 m.

4. a) Inicialmente, determinamos o comprimento do lado $\overline{AM}$ em centímetros.

$$(MN)^2 = (AN)^2 + (AM)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{13^2}_{2 \cdot r = 2 \cdot 6{,}5} = 12^2 + (AM)^2 \Rightarrow AM = 5$$

Em seguida, calculamos o comprimento, em centímetros, da projeção do cateto $\overline{AM}$ sobre a hipotenusa, ou seja, comprimento do segmento $\overline{SM}$.

$$(AM)^2 = (SM) \cdot (NM) \Rightarrow 25 = SM \cdot 13 \Rightarrow SM \simeq 1{,}92$$

Observe que o comprimento de $\overline{GS}$ é $\underbrace{4{,}58 \text{ cm}}_{6{,}5 \text{ cm} - 1{,}92 \text{ cm}}$. Sendo A' o ponto médio de $\overline{GS}$, segue que $SA' \simeq \underbrace{2{,}29 \text{ cm}}_{4{,}58 \text{ cm} : 2}$.

Assim:

$$MA' = A'S + SM \Rightarrow MA' \simeq 2{,}29 + 1{,}92 \Rightarrow MA' \simeq 4{,}21$$

Portanto, o comprimento aproximado do segmento $\overline{MA'}$ é 4,21 cm.

b) Resposta pessoal.

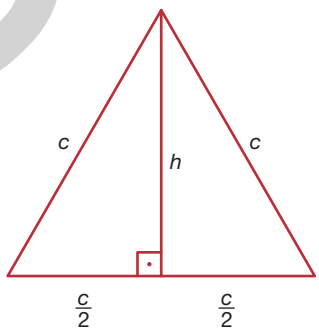
5. a) $3^2 + 4^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} \Rightarrow x = 5$

b) $5^2 + x^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} \Rightarrow x = 12$

c) $4{,}5^2 + x^2 = 7{,}5^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36} \Rightarrow x = 6$

6. Nessa tarefa, é de suma importância que os alunos saibam que, em um triângulo equilátero, a altura divide a base em dois segmentos congruentes.

Se julgar conveniente, no desenvolvimento da tarefa, oriente-os a representar geometricamente a situação exposta, conforme mostra a figura a seguir.



RONALDO INÁCIO

Note que, em nossa representação, c indica o comprimento do lado do triângulo equilátero. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

Como c é igual a 8 cm, segue que:

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$$

Portanto, a altura do triângulo é $4\sqrt{3}$ cm.

7. Sejam a e b as dimensões do retângulo.

De acordo com as informações dadas no problema, temos:

- $2a + 2b = 98$;
- $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

Assim, escrevemos e resolvemos o seguinte sistema de equações.

MODERNA

$$\begin{cases} 2a + 2b = 98 \\ \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow a = 21 \text{ e } b = 28$$

Logo, $a = 21$ cm e $b = 28$ cm.
Sendo d o comprimento da diagonal do retângulo, então:

$$d^2 = 21^2 + 28^2 \Rightarrow d = \sqrt{1225} \Rightarrow d = 35$$

Portanto, o comprimento da diagonal é 35 cm.

8. **a)** Indicando por d essa distância, temos:

$$10^2 = d^2 + 6^2 \Rightarrow d^2 = 64 \Rightarrow d = 8$$

Portanto, essa escada alcança uma distância de 8 cúbitos.

b) Indicando por a e b os comprimentos dos lados desse retângulo, temos:

- $a \cdot b = 60$;
- $\sqrt{a^2 + b^2} = 13$.

Assim, escrevemos e resolvemos o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} a \cdot b = 60 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 13 \end{cases} \Rightarrow a = 5 \text{ e } b = 12$$

Portanto, os lados do retângulo têm comprimentos de 5 e 12 cúbitos.

9. alternativa **a**
A diagonal de cada célula é dada por:

$$x^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

Cada célula produz $\underbrace{240}_{10 \cdot 24}$ Wh por dia. Como há 100 células, a produção diária é 24 000 Wh. Assim:

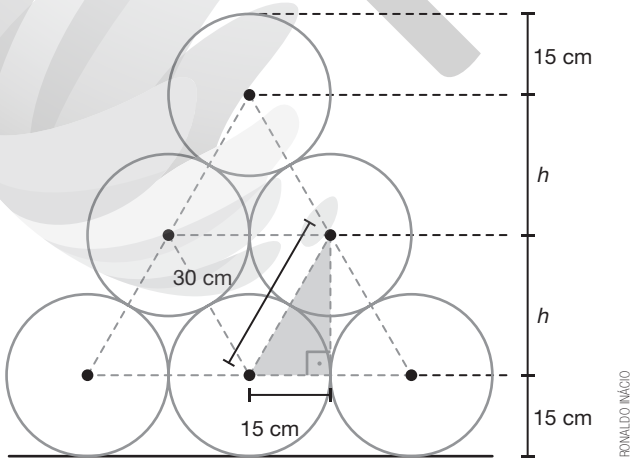
$$\underbrace{24\,000}_{\substack{\text{quantidade} \\ \text{produzida}}} - \underbrace{20\,160}_{\substack{\text{quantidade} \\ \text{consumida}}} = 3\,840$$

Desse modo, essa casa produz 3 840 Wh a mais do que consome. Por fim, para determinar a quantidade de células que devem ser retiradas, efetuamos:

$$\frac{3\,840}{240} = 16$$

Portanto, para que o proprietário atinja seu objetivo, ele deve retirar 16 células.

10. Para facilitar o entendimento dos alunos, proponha um esquema como o apresentado abaixo.



RONALDO INÁCIO

$$30^2 = h^2 + 15^2 \Rightarrow h^2 = 675 \Rightarrow h = 15\sqrt{3}$$

Logo, podemos determinar a altura H de uma pilha com n camadas conforme segue:

$$H = 15 + \underbrace{h + h + \ldots + h}_{n - 1 \text{ vezes}} + 15 \Rightarrow H = 30 + (n - 1) \cdot h$$

Desse modo, se $H = 1{,}86$ m, então:

$$H = 186 \Rightarrow 30 + (n - 1) \cdot 15\sqrt{3} = 186 \Rightarrow n \simeq 7$$

Assim, existem aproximadamente 7 camadas na pilha.
Calculando a quantidade por camadas, temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Portanto, a pilha possui no mínimo 7 camadas e um total de 28 tubos.

11. **a)** Se os alunos apresentarem dúvidas na resolução dos sistemas de equações, sugira a eles que isolem uma das variáveis da primeira equação e façam a substituição na segunda equação.
Indicando por x a altura e y a largura, temos:

- 29”

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 29^2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x \simeq 25{,}3$” e $y \simeq 14{,}2$”.

- 32”

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 32^2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x \simeq 27{,}9$” e $y \simeq 15{,}7$”.

- 42”

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 42^2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x \simeq 36{,}6$” e $y \simeq 20{,}6$”.

b) De acordo com o comprimento de 110,69 cm e a largura de 62,26 cm da tela de um televisor retangular, podemos usar o Teorema de Pitágoras para determinar o comprimento da diagonal d dessa tela.

$$d^2 = \left(110{,}69\right)^2 + \left(62{,}26\right)^2 \Rightarrow d \simeq 127$$

Assim, essa tela tem uma diagonal de, aproximadamente, 127 cm.
Conforme os dados do problema, uma polegada tem 2,54 cm, assim:

$$\frac{127}{2{,}54} \simeq 50$$

Portanto, a tela desse televisor tem 50”.

12. **a)** Porque $1^2 = 0{,}6^2 + 0{,}8^2$, e se em um triângulo qualquer o quadrado do comprimento do lado maior for igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros lados, então o triângulo é retângulo.

b) Em cada um dos triângulos, indicaremos por a o comprimento do maior lado e por b e c o comprimento dos lados menores.

- No triângulo ABC, temos:

$a^2 = 37^2 = 1\,369$, $b^2 = 12^2 = 144$ e $c^2 = 35^2 = 1\,225$. Como $1\,369 = 144 + 1\,225$, então o triângulo ABC é retângulo, pois satisfaz a recíproca do Teorema de Pitágoras.

MODERNA

- No triângulo *EFG*, temos:

  $a^2 = (35{,}7)^2 = 1\,274{,}49$, $b^2 = 29^2 = 841$ e
  $c^2 = (20{,}93)^2 = 438{,}0649$.

  Como $1\,274{,}49 \neq 841 + 438{,}0649$, então o triângulo *EFG* não é retângulo, pois não satisfaz a recíproca do Teorema de Pitágoras.

- No triângulo *MNO*, temos:

  $a^2 = (5{,}3)^2 = 28{,}09$, $b^2 = (4{,}5)^2 = 20{,}25$ e
  $c^2 = (2{,}8)^2 = 7{,}84$.

  Como $28{,}09 = 20{,}25 + 7{,}84$, então o triângulo *MNO* é retângulo, pois satisfaz a recíproca do Teorema de Pitágoras.

c) Indicando por *a* o comprimento do cateto desconhecido e aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$7{,}5^2 = 4{,}5^2 + a^2 \Rightarrow a = 6$$

Agora, calculamos o perímetro da região destinada à construção do cômodo.

$$2 \cdot 4{,}5 + 2 \cdot 6 = 21$$

Portanto, o perímetro da região destinada à construção desse cômodo é 21 m.

d) Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

13. Indicando por *x* o comprimento de um dos catetos do triângulo, segue que:

$$12^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow 144 = x^2 + 64 \Rightarrow x = 4\sqrt{5}$$

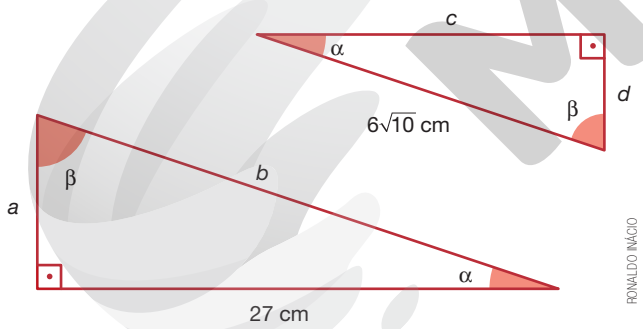
Logo, temos as seguintes relações trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

14. Observe a figura a seguir.



RONALDO INÁCIO

De acordo com as medidas apresentadas na figura, temos as seguintes relações:

- $\frac{b}{6\sqrt{10}} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 9\sqrt{10}$, ou seja, $9\sqrt{10}$ cm
- $\frac{27}{c} = \frac{3}{2} \Rightarrow c = 18$
- $b^2 = a^2 + 27^2 \Rightarrow \left(9\sqrt{10}\right)^2 = a^2 + 729 \Rightarrow a = 9$
- $\frac{a}{d} = \frac{3}{2} \Rightarrow d = 6$

Portanto:

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{9}{9\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\cos\alpha = \frac{27}{9\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

d) $\operatorname{sen}\beta = \frac{27}{9\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

e) $\cos\beta = \frac{9}{9\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

f) $\operatorname{tg}\beta = \frac{27}{9} = 3$

15. Como o perímetro do retângulo *ABCD* é 76 cm, temos:

$$2 \cdot AD + 2 \cdot 16 \text{ cm} = 76 \text{ cm} \Rightarrow AD = 22 \text{ cm}$$

Assim:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{\underbrace{DE}_{AD - AE}} = \frac{16}{22 - 4} = \frac{8}{9}$$

Portanto, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{9}$.

16. Se os alunos apresentarem dúvidas nessa tarefa, oriente-os na manipulação das operações trigonométricas.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

17. ΔABC

- $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{\sqrt{15}}{8} \Rightarrow \frac{AB}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8} \Rightarrow AB = 2\sqrt{15}$

  $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow 16^2 = \left(2\sqrt{15}\right)^2 + (BC)^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (BC)^2 = 196 \Rightarrow BC = 14$

Logo:

$$\cos\hat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

ΔDEF

- $\operatorname{sen}\hat{E} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{11{,}4}{DE} = \frac{3}{5} \Rightarrow DE = 19$

  $(DE)^2 = (DF)^2 + (EF)^2 \Rightarrow 19^2 = 11{,}4^2 + (EF)^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (EF)^2 = 231{,}04 \Rightarrow EF = 15{,}2$

Logo:

$$\cos\hat{E} = \frac{EF}{DE} = \frac{15{,}2}{19} = \frac{4}{5}$$

ΔGHI

- $\operatorname{sen}\hat{G} = \frac{5\sqrt{41}}{41} \Rightarrow \frac{HI}{3\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41} \Rightarrow HI = 15$

  $(GH)^2 = (GI)^2 + (HI)^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{41}\right)^2 = (GI)^2 + 15^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (GI)^2 = 144 \Rightarrow GI = 12$

Logo:

$$\cos\hat{G} = \frac{GI}{GH} = \frac{12}{3\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$$

18. **a)** $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

MODERNA

c) $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow AC = 10$

Portanto, a hipotenusa tem 10 m de comprimento.

d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BC}{5\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 5$

Portanto, o comprimento do cateto oposto a α é 5 m.

19. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\beta}} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{1 - \operatorname{sen}^2\beta} = \frac{9}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2\beta = 9 - 9\operatorname{sen}^2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 13\operatorname{sen}^2\beta = 9 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\beta = \frac{9}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

20. **a)** $\cos 60° = \frac{x}{26} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{26} \Rightarrow x = 13$

Portanto, $x = 13$ cm.

b) $\operatorname{tg} 30° = \frac{16}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 16\sqrt{3}$

Portanto, $x = 16\sqrt{3}$ cm.

c) $\operatorname{sen} 45° = \frac{x}{22} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{22} \Rightarrow x = 11\sqrt{2}$

Portanto, $x = 11\sqrt{2}$ cm.

d) Sendo y o comprimento do cateto oposto ao ângulo de 60°, temos:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{y}{18} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{18} \Rightarrow y = 9\sqrt{3}$$

Assim:

$$\cos 30° = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{9\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{27}{2}$$

Portanto, $x = \frac{27}{2}$ cm.

21. Como o triângulo ABC é retângulo e dois de seus ângulos são congruentes, segue que seus ângulos medem 90°, 45° e 45°. Como $\overline{BC}$ é a hipotenusa do triângulo, fazemos:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{BC} \Rightarrow BC = 10$$

Portanto, o comprimento de $\overline{BC}$ é 10 cm.

22. Para a resolução dessa tarefa nomearemos por α o ângulo indicado em verde.

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{18}{36} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{30}{10\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$

c) $\cos\alpha = \frac{28}{28\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$

23. alternativa **a**

Inicialmente, vamos determinar o comprimento dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo.

$$\cos 60° = \frac{AB}{AC} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{4{,}5}{AC} \Rightarrow AC = 9$$

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{9} \Rightarrow BC = 4{,}5 \cdot \sqrt{3}$$

Deste modo, $AC = 9$ cm e $BC = 4{,}5 \cdot \sqrt{3}$ cm. Consequentemente, segue que a soma das áreas dos quadrados é:

$$(4{,}5)^2 + 9^2 + \left(4{,}5 \cdot \sqrt{3}\right)^2 = 20{,}25 + 81 + 60{,}75 = 162$$

Portanto, a soma das áreas dos três quadrados é 162 cm².

24. **a)** Para determinarmos a distância entre os cones A e B, basta calcularmos o comprimento do diâmetro da circunferência. Como a circunferência tem raio 5 m, segue que:

$$AB = 2 \cdot 5 = 10$$

Portando, a distância entre os cones A e B é 10 m.

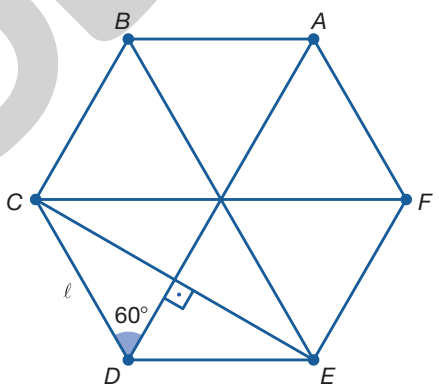
b) Como $\overline{AB}$ é a hipotenusa do triângulo ABC, temos:

$$\cos 30° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = 5\sqrt{3}$$

Portanto, a distância entre os cones A e C é $5\sqrt{3}$ m.

25. Decompondo o hexágono em seis triângulos equiláteros, temos:



RONALDO INÁCIO

Como o perímetro do hexágono é 6 cm, cada lado da figura tem 1 cm de comprimento.

Sendo ℓ o comprimento do lado do hexágono, temos:

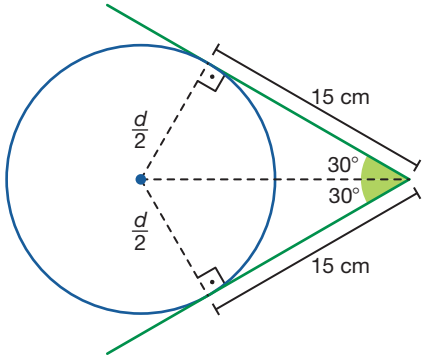
- $\operatorname{sen} 60° = \frac{\frac{CE}{2}}{\ell} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{CE}{2}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow CE = \sqrt{3}$
- $\overline{AD} = 2\ell = 2 \cdot 1 = 2$

Portanto, o comprimento de $\overline{CE}$ é $\sqrt{3}$ cm e o de $\overline{AD}$ é 2 cm.

26. Algumas dúvidas podem surgir na identificação dos triângulos na figura. Nesse caso, explique aos alunos que o raio da circunferência forma um ângulo de 90° com a reta tangente.

Seja d o comprimento do diâmetro do tubo. Logo:

MODERNA



RONALDO INÁCIO

Calculando a tangente do ângulo cuja medida é 30°, temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{d}{2}}{15} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{d}{2}}{15} \Rightarrow d \simeq 17{,}3$$

Portanto, o comprimento do diâmetro do tubo é, aproximadamente, 17,3 cm.

27. **a)** Para determinar a razão $\frac{a}{b}$, separamos o triângulo ADC em outros dois triângulos semelhantes: ABD e CBD, ambos retângulo em $\hat{B}$.

- $\text{tg } 30° = \frac{BD}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BD}{a} \Rightarrow BD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
- $\text{tg } 60° = \frac{BD}{b} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BD}{b} \Rightarrow BD = b\sqrt{3}$

Como o lado $\overline{BD}$ é comum aos dois triângulos, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = b\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = 3$$

b) Como $B\hat{D}C$ é o complementar de $B\hat{C}D$, então:

$$\text{sen}\left(B\hat{D}C\right) = \cos\left(B\hat{C}D\right) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

c) Como $A\hat{D}B$ é o complementar de $B\hat{A}D$, então:

$$\text{tg}\left(A\hat{D}B\right) = \frac{\text{sen}\left(A\hat{D}B\right)}{\cos\left(A\hat{D}B\right)} = \frac{\cos\left(B\hat{A}D\right)}{\text{sen}\left(B\hat{A}D\right)} = \frac{\cos 30°}{\text{sen } 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

28. Calculando a tangente dos ângulos α e γ, segue que:

- $\text{tg } \alpha = \frac{9\sqrt{3}}{27} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$
- $\text{tg } \gamma = \frac{9\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \text{tg } \gamma = \sqrt{3} \Rightarrow \gamma = 60°$

Como α, γ e β são os ângulos internos do triângulo, temos:

$$30° + \beta + 60° = 180° \Rightarrow \beta = 90°$$

Portanto, $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$ e $\gamma = 60°$.

29. **a)** $\text{sen } 78° = 0{,}978$; $\cos 78° = 0{,}208$; $\text{tg } 78° = 4{,}705$

b) $\text{sen } 5° = 0{,}087$; $\cos 5° = 0{,}996$; $\text{tg } 5° = 0{,}087$

c) $\text{sen } 52° = 0{,}788$; $\cos 52° = 0{,}616$; $\text{tg } 52° = 1{,}280$

30. Para a resolução dessa tarefa nomearemos o ângulo desconhecido por α.

a) $\text{sen } \alpha = 0{,}21 \Rightarrow \alpha \simeq 12°$

b) $\cos \alpha = 0{,}239 \Rightarrow \alpha \simeq 76°$

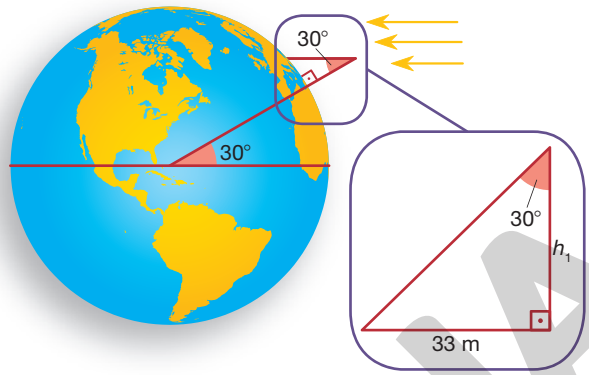
c) $\text{tg } \alpha = 0{,}858 \Rightarrow \alpha \simeq 41°$

31. Os esquemas que seguem nessa tarefa podem ajudar a superar algumas dificuldades dos alunos ao desenvolvê-la.

Sejam h_1 a altura da torre e h_2 a altura da pessoa.

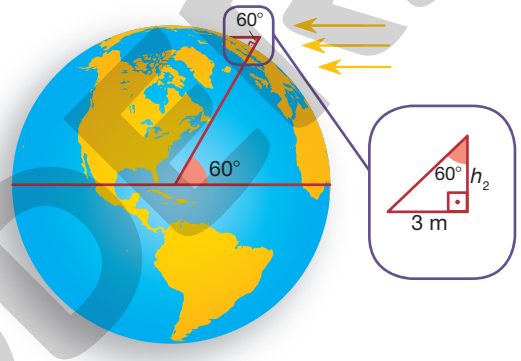
Assim, temos as seguintes situações:

- Torre (h_1):



$$\text{tg } 30° = \frac{33}{h_1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{33}{h_1} \Rightarrow h_1 \simeq 57$$

- Pessoa (h_2):



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

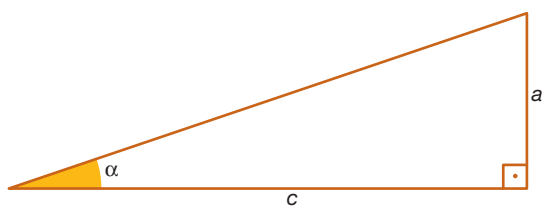
$$\text{tg } 60° = \frac{3}{h_2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3}{h_2} \Rightarrow h_2 \simeq 1{,}73$$

Portanto, a altura da torre é, aproximadamente, 57 m e a altura da pessoa é aproximadamente 1,73 m.

32. **a)** Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é para evitar rampas muito íngremes, o que dificultaria o deslocamento sobre elas.

b) Se para uma rampa de altura 1 m é necessário que o comprimento horizontal seja ao menos 12 m, para uma rampa com metade da altura, 50 cm, precisamos de metade de 12 m, isto é, 6 m ou 600 cm.

c) Podemos representar a rampa por meio de um triângulo, conforme a imagem a seguir.



RONALDO INÁCIO

MODERNA

Deste modo, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{12} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha \simeq 0{,}0833$$

De acordo com a tabela trigonométrica que se encontra na página **35**, podemos concluir que o ângulo deve estar entre 4° e 5°.

- Algumas possíveis respostas: banheiros adaptados para cadeirantes e piso tátil para deficientes visuais.

33. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

34. **a)** $\text{sen}\ 53° = \frac{20}{x} \Rightarrow 0{,}79863551 = \frac{20}{x} \Rightarrow x \simeq 25$

Portanto, $x \simeq 25$ cm.

b) $\cos 20° = \frac{16}{x} \Rightarrow 0{,}93969262 = \frac{16}{x} \Rightarrow x \simeq 17$

Portanto, $x \simeq 17$ cm.

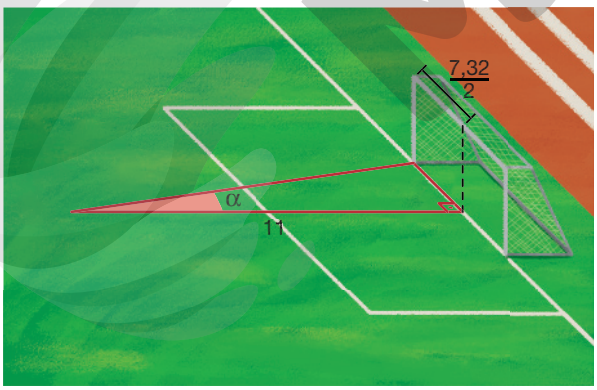
c) $\text{tg}\ 49° = \frac{15}{x} \Rightarrow 1{,}150368407 = \frac{15}{x} \Rightarrow x \simeq 13$

Portanto, $x \simeq 13$ cm.

35. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

36. Observe as figuras a seguir, as quais descrevem cada uma das situações. Os alunos podem apresentar dificuldade na elaboração desses esquemas. Caso ache necessário, auxilie-os na resolução dessa tarefa.

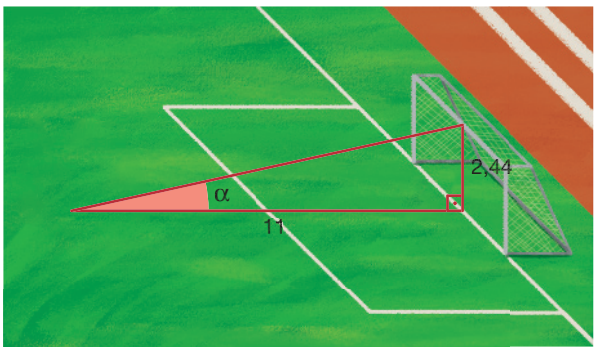
a) Inicialmente, construímos um esquema para representar a situação desejada.



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{7{,}32}{2}}{11} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha \simeq 0{,}333 \Rightarrow \alpha \simeq 18°$$

Portanto, o jogador deve chutar a bola formando um ângulo cuja medida é, aproximadamente, 18°.

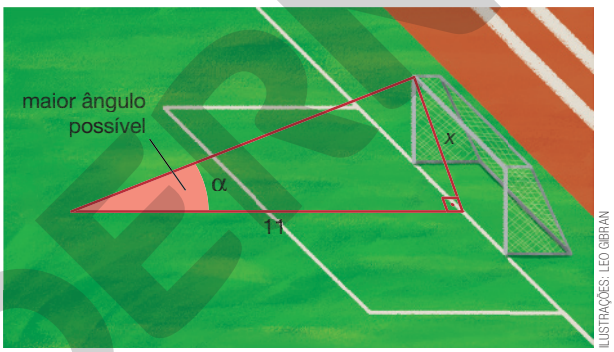
b) Inicialmente, construímos um esquema para representar a situação desejada.



$$\text{tg}\,\alpha = \frac{2{,}44}{11} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha \simeq 0{,}222 \Rightarrow \alpha \simeq 12°$$

Portanto, o jogador deve chutar a bola formando um ângulo cuja medida é, aproximadamente, 12°.

c) Inicialmente, construímos um esquema para representar a situação desejada.



ILUSTRAÇÕES: LEO GIBRAN

Assim:

$$x^2 = 2{,}44^2 + \left(\frac{7{,}32}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 4{,}4$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{4{,}4}{11} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha \simeq 0{,}4 \Rightarrow \alpha \simeq 22°$$

Portanto, se o jogador chutar a bola num ângulo maior do que 30° em relação ao centro do gol, ela não atingirá a área interna às traves, pois o maior ângulo possível para acertar o gol é aproximadamente 22°.

37. **a)** Indicando por a a altura do retângulo, temos:

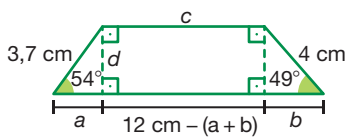
$$\text{tg}\ 65° = \frac{14}{a} \Rightarrow 2{,}145 = \frac{14}{a} \Rightarrow a \simeq 6{,}5$$

Assim, a altura do retângulo é, aproximadamente, 6,5 cm. Agora, calculamos o perímetro do retângulo.

$$2 \cdot 6{,}5 + 2 \cdot 14 = 13 + 28 = 41$$

Portanto, o perímetro desse retângulo é, aproximadamente, 41 cm.

b)



RONALDO INÁCIO

De acordo com a imagem, temos:

- $\cos 54° = \frac{a}{3{,}7} \Rightarrow 0{,}588 = \frac{a}{3{,}7} \Rightarrow a \simeq 2{,}2$
- $\cos 49° = \frac{b}{4} \Rightarrow 0{,}656 = \frac{b}{4} \Rightarrow b \simeq 2{,}6$

MODERNA

Assim:

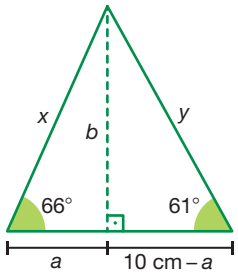
$c = 12 - (a + b) \Rightarrow c = 12 - (2{,}2 + 2{,}6) \Rightarrow c \simeq 7{,}2$

Por fim, calculamos o perímetro do trapézio.

$3{,}7 + 7{,}2 + 4 + 12 = 26{,}9$

Portanto, o perímetro do trapézio é aproximadamente 27 cm.

c)



RONALDO INÁCIO

De acordo com a imagem, temos:

- $\text{tg } 66° = \frac{b}{a} \Rightarrow 2{,}246 = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{2{,}246}$
- $\text{tg } 61° = \frac{b}{10 - a} \Rightarrow 1{,}804 = \frac{b}{10 - a} \Rightarrow$

$\Rightarrow 18{,}04 - 1{,}804a = b \Rightarrow a = \frac{18{,}04 - b}{1{,}804}$

Igualando essas equações, temos:

$\frac{b}{2{,}246} = \frac{18{,}04 - b}{1{,}804} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}804b = 40{,}51784 - 2{,}246 \cdot b \Rightarrow$

$\Rightarrow 4{,}05b = 40{,}51784 \Rightarrow b \simeq 10$

Assim, b é aproximadamente 10 cm.

Como $a = \frac{b}{2{,}246}$, segue que $a \simeq 4{,}45$

Logo, a é aproximadamente 4,45 cm.

Agora, vamos calcular o comprimento dos lados do triângulo.

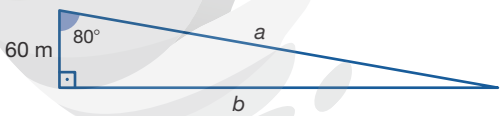
- $\text{sen } 66° = \frac{10}{x} \Rightarrow x \simeq 10{,}9$
- $\text{sen } 61° = \frac{10}{y} \Rightarrow y \simeq 11{,}4$

Deste modo, temos que o perímetro P desse triângulo é:

$P = 10 + 10{,}9 + 11{,}4 \Rightarrow P = 32{,}3$

Portanto, o perímetro desse triângulo é, aproximadamente, 32,3 cm.

38. alternativa **b**



RONALDO INÁCIO

De acordo com a imagem, temos:

$\cos 80° = \frac{60}{a} \Rightarrow 0{,}174 = \frac{60}{a} \Rightarrow a \simeq 345$

$\text{tg } 80° = \frac{b}{60} \Rightarrow 5{,}671 = \frac{b}{60} \Rightarrow b \simeq 340$

Portanto, $a \simeq 345$ m e $b \simeq 340$ m.

Analisando cada uma das alternativas, temos o seguinte.

a) Falsa, pois a distância horizontal do percurso é, aproximadamente, $\underbrace{98\%}_{\frac{340}{345}}$ do comprimento do cabo.

b) Verdadeira, pois, a uma velocidade de 12 m/s durante 29 s, o praticante vai percorrer uma distância, ao longo do cabo, de $\underbrace{348}_{12 \cdot 29}$ m, que é a distância aproximada do percurso.

c) Falsa, pois, a uma velocidade vertical de 5 m/s durante 20 s, o praticante vai percorrer uma distância vertical de $\underbrace{100}_{5 \cdot 20}$ m, e não 60 m, que é a altura do percurso.

d) Falsa, pois a distância do percurso é, aproximadamente, 345 m.

39. Para resolverem essa tarefa, os alunos podem ter dúvidas ao identificar o triângulo que representa essa situação. Peça a eles que primeiro identifiquem os triângulos *ADP* e *ADE* e observem as afirmações apresentadas no enunciado.

Como $B\hat{A}C = 87°$, no triângulo *ADE*, temos:

$\text{tg } 87° = \frac{DE}{AD} \Rightarrow 19{,}081 = \frac{DE}{1{,}7} \Rightarrow DE \simeq 32$

Portanto, a distância do navio até a praia é, aproximadamente, 32 m.

40. **a)** Usando a relação apresentada nessa tarefa e com a altitude convertida em quilômetros, temos:

$r = \frac{h \cdot \text{sen } \alpha}{1 - \text{sen } \alpha} \Rightarrow r = \frac{11 \cdot \text{sen } 86{,}53°}{1 - \text{sen } 86{,}53°} \Rightarrow r \simeq 5\,989$

Portanto, o comprimento aproximado do raio da Terra nessa situação é 5 989 km.

b) 6 380 km − 5 989 km = 391 km

Portanto, a diferença entre o resultado obtido no item **a** e o valor apresentado no item **b** é de 391 km.

3 Trigonometria em um triângulo qualquer

1. **a)** $\text{sen } 95° = \text{sen}(180° - 95°) = \text{sen } 85° = 0{,}996$

$\cos 95° = -\cos(180° - 95°) = -\cos 85° = -0{,}087$

b) $\text{sen } 110° = \text{sen}(180° - 110°) = \text{sen } 70° = 0{,}940$

$\cos 110° = -\cos(180° - 110°) = -\cos 70° = -0{,}342$

c) $\text{sen } 125° = \text{sen}(180° - 125°) = \text{sen } 55° = 0{,}819$

$\cos 125° = -\cos(180° - 125°) = -\cos 55° = -0{,}574$

d) $\text{sen } 168° = \text{sen}(180° - 168°) = \text{sen } 12° = 0{,}208$

$\cos 168° = -\cos(180° - 168°) = -\cos 12° = -0{,}978$

e) $\text{sen } 174° = \text{sen}(180° - 174°) = \text{sen } 6° = 0{,}105$

$\cos 174° = -\cos(180° - 174°) = -\cos 6° = -0{,}995$

2. **a)** Usando a lei dos senos, segue que:

- $\frac{x}{\text{sen } 68°} = \frac{96}{\text{sen } 58°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}927} = \frac{96}{0{,}848} \Rightarrow x \simeq 105$
- $\frac{y}{\text{sen } 54°} = \frac{96}{\text{sen } 58°} \Rightarrow \frac{y}{0{,}809} = \frac{96}{0{,}848} \Rightarrow y \simeq 91{,}6$

Portanto, os valores de x e y são aproximadamente 105 m e 91,6 m, respectivamente.

b) - $\frac{x}{\text{sen } 68°} = \frac{55}{\text{sen } 27°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}927} = \frac{55}{0{,}454} \Rightarrow x \simeq 112{,}3$
- $\frac{y}{\text{sen } 85°} = \frac{55}{\text{sen } 27°} \Rightarrow \frac{y}{0{,}996} = \frac{55}{0{,}454} \Rightarrow y \simeq 120{,}7$

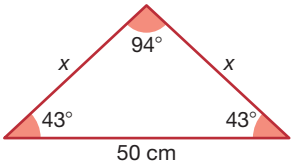
Portanto, os valores de x e y são aproximadamente 112,3 m e 120,7 m, respectivamente.

MODERNA

3. Inicialmente, vamos representar o triângulo descrito na tarefa. Temos que:

$$43° + 43° + \hat{A} = 180° \Rightarrow \hat{A} = 94°$$

Assim, o ângulo oposto à base mede 94°. Logo, temos o seguinte triângulo:



RONALDO INÁCIO

Para resolver essa tarefa, vamos usar a lei dos senos. Primeiro, calculamos o seno do ângulo cuja medida é 94°.

$$\operatorname{sen} 94° = \operatorname{sen}(180° - 94°) = \operatorname{sen} 86° \simeq 0{,}998$$

Logo:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 43°} = \frac{50}{\operatorname{sen} 94°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}682} = \frac{50}{0{,}998} \Rightarrow x \simeq 34{,}2$$

Portanto, o seno do ângulo oposto à base é, aproximadamente, 0,998 e o comprimento dos lados são 50 cm, aproximadamente 34,2 cm e aproximadamente 34,2 cm.

4. Para ampliar as possibilidades de resolução dessa tarefa, verifique se os alunos perceberam que os triângulos *ABE* e *ACD* são semelhantes.

Usando a lei dos senos, vamos primeiro determinar os comprimentos, em metros, dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$.

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 54°} = \frac{BE}{\operatorname{sen} 80°} \Rightarrow \frac{AB}{0{,}809} = \frac{4}{0{,}985} \Rightarrow AB \simeq 3{,}3$$

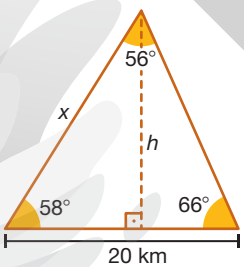
$$\frac{AE}{\operatorname{sen} 46°} = \frac{BE}{\operatorname{sen} 80°} \Rightarrow \frac{AE}{0{,}719} = \frac{4}{0{,}985} \Rightarrow AE \simeq 2{,}9$$

Como $\Delta ABE \sim \Delta ACD$, temos:

- $\frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AB + BC} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{3{,}3}{3{,}3 + a} \Rightarrow a = 6{,}6$
- $\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AE + DE} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{2{,}9}{2{,}9 + b} \Rightarrow b = 5{,}8$

Portanto, os valores aproximados de *a* e *b* são 6,6 m e 5,8 m, respectivamente.

5. Ao observarem os dados do problema, os alunos devem identificar que a altura do triângulo representa a altura do balão em relação ao solo. Como são conhecidos dois ângulos do triângulo e a distância entre as duas estações meteorológicas, podemos construir o seguinte esquema.



RONALDO INÁCIO

Aplicando a lei dos senos no triângulo representado, temos:

$$\frac{20}{\operatorname{sen} 56°} = \frac{x}{\operatorname{sen} 66°} \Rightarrow \frac{20}{0{,}829} = \frac{x}{0{,}914} \Rightarrow x = 22{,}1$$

Calculando o seno do ângulo cuja medida é 58°, temos:

$$\operatorname{sen} 58° = \frac{h}{x} \Rightarrow 0{,}848 = \frac{h}{22{,}1} \Rightarrow h \simeq 18{,}7$$

Portanto, a altura do balão em relação ao plano horizontal, nesse instante, é aproximadamente 18,7 km.

6. Usando a lei dos senos, temos:

$$\underbrace{\frac{2x + 10}{\operatorname{sen} 120°}}_{\operatorname{sen} 60°} = \frac{\sqrt{3}x}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \frac{2x + 10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 10 = 3x \Rightarrow x = 10$$

Logo, $x = 10$.

7. **a)** Inicialmente, calculamos a distância entre o ponto *C* e o:

- carro *A*.

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 36°} = \frac{AC}{\operatorname{sen} 38°} \Rightarrow \frac{400}{0{,}588} = \frac{AC}{0{,}616} \Rightarrow AC \simeq 419$$

- carro *B*.

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 36°} = \frac{BC}{\underbrace{\operatorname{sen} 106°}_{\operatorname{sen} 74°}} \Rightarrow \frac{400}{0{,}588} = \frac{BC}{0{,}961} \Rightarrow BC \simeq 654$$

Portanto, a distância entre o carro *A* e o ponto *C* é aproximadamente 419 m e a distância entre o carro *B* e o ponto *C* é aproximadamente 654 m.

b) Observe que a velocidade v_A do carro *A* é de 18 m/s. Sendo assim:

$$v_A = \frac{AC}{t} \Rightarrow 18 = \frac{419}{t} \Rightarrow t \simeq 23$$

Com isso, podemos determinar qual deve ser a velocidade do carro *B*.

$$v_B = \frac{BC}{t} \Rightarrow v_B = \frac{654}{23} \Rightarrow v_B \simeq 28{,}4$$

Portanto, a velocidade do carro *B* deve ser aproximadamente 28 m/s.

c) De acordo com o item anterior, podemos observar que o tempo é aproximadamente 23 s.

8. Vamos analisar os triângulos *BCD*, *ACD*, *BCE* e *ABE* separadamente.

- No ΔBCD, temos:

$$\operatorname{sen}\left(180° - \hat{B}\right) = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \quad \text{(I)}$$

$$\Rightarrow CD = a \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(180° - \hat{B}\right)}_{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow CD = a \cdot \operatorname{sen} \hat{B}$$

- No ΔACD, temos:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = b \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), segue que:

$$a \cdot \operatorname{sen} \hat{B} = b \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \quad \text{(III)}$$

- No ΔBCE, temos:

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow BE = a \cdot \operatorname{sen} \hat{C} \quad \text{(IV)}$$

- No ΔABE, temos:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BE = c \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \quad \text{(V)}$$

De (IV) e (V), segue que:

$$a \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = c \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{C}} \quad \text{(VI)}$$

Portanto, de (III) e (VI), obtemos a lei dos senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

MODERNA

9. a) Inicialmente, calculamos a distância entre cada um dos navios e o porto.

- Navio A

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{AC}{\operatorname{sen} 74^\circ} \Rightarrow \frac{90}{0{,}766} = \frac{AC}{0{,}961} \Rightarrow AC \simeq 113$$

- Navio B

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{BC}{\operatorname{sen} 56^\circ} \Rightarrow \frac{90}{0{,}766} = \frac{BC}{0{,}829} \Rightarrow BC \simeq 97$$

Como $BC < AC$, temos que o navio B está mais próximo do porto.

b) Inicialmente, calculamos o tempo gasto pelo:

- navio $A\left(t_A\right)$.

$$v_A = \frac{AC}{t_A} \Rightarrow 37 = \frac{113}{t_A} \Rightarrow t_A \simeq 3$$

- navio $B\left(t_B\right)$.

$$v_B = \frac{BC}{t_B} \Rightarrow 32 = \frac{97}{t_B} \Rightarrow t_B \simeq 3$$

Portanto, cada navio chegará ao porto em, aproximadamente, 3 h.

c) Como o navio A deve chegar ao porto em 3,5 h, temos:

$$v_A = \frac{AC}{t_A} \Rightarrow v_A = \frac{113}{3{,}5} \Rightarrow v_A \simeq 32$$

Portanto, para cumprir o planejado, o navio A deverá navegar a 32 km/h.

10. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

11. Para calcular o perímetro aproximado de cada triângulo, vamos obter o comprimento de um de seus lados usando a lei dos cossenos.

Em cada item, seja x o comprimento, em metros, do lado oposto ao ângulo dado e P o perímetro, em metros.

a) $x^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 65^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 625 - 600 \cdot 0{,}423 \Rightarrow x = \sqrt{371{,}2} \Rightarrow x \simeq 19{,}3$

Consequentemente:

$$P = 20 + 15 + 19{,}3 = 54{,}3$$

Portanto, o perímetro aproximado é 54,3 m.

b) $x^2 = 24^2 + 18^2 - 2 \cdot 24 \cdot 18 \cdot \cos 52^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 900 - 864 \cdot 0{,}616 \Rightarrow x = \sqrt{367{,}776} \Rightarrow x \simeq 19{,}2$

Consequentemente:

$$P = 24 + 18 + 19{,}2 = 61{,}2$$

Portanto, o perímetro aproximado é 61,2 m.

c) $x^2 = 16^2 + 16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot \underbrace{\cos 132^\circ}_{-\cos 48^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 512 - 512 \cdot (-0{,}669) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{854{,}528} \Rightarrow x \simeq 29{,}2$

Consequentemente:

$$P = 16 + 16 + 29{,}2 = 61{,}2$$

Portanto, o perímetro aproximado é de 61,2 m.

d) $x^2 = 12^2 + 14^2 - 2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \underbrace{\cos 116^\circ}_{-\cos 64^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 340 - 336 \cdot (-0{,}438) \Rightarrow$

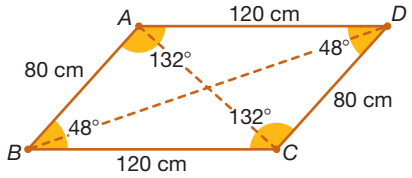
$\Rightarrow x = \sqrt{487{,}168} \Rightarrow x \simeq 22{,}1$

Consequentemente:

$$P = 12 + 14 + 22{,}1 = 48{,}1$$

Portanto, o perímetro aproximado é 48,1 m.

12. Fazendo um esquema que representa essa situação, temos:



RONALDO INÁCIO

- Usando a lei dos cossenos no triângulo BCD, temos:

$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot (BC) \cdot (CD) \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow (BD)^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \cdot 120 \cdot 80 \cdot \underbrace{\cos 132^\circ}_{-\cos 48^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow (BD)^2 = 20\,800 - 19\,200 \cdot (-0{,}669) \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = \sqrt{33\,644{,}8} \Rightarrow BD \simeq 183{,}4$, ou seja, aproximadamente 183,4 cm

- Usando a lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (BC) \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow$

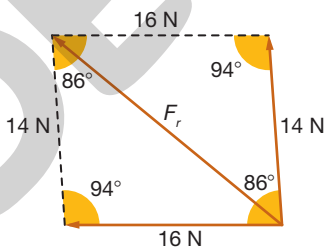
$\Rightarrow (AC)^2 = 80^2 + 120^2 - 2 \cdot 80 \cdot 120 \cdot \cos 48^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 = 20\,800 - 19\,200 \cdot 0{,}669 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{7\,955{,}2} \Rightarrow AC \simeq 89{,}2$

Portanto, os comprimentos das diagonais do paralelogramo são aproximadamente 183,4 cm e 89,2 cm.

13. Indicando por F_r a intensidade da força resultante, temos:



RONALDO INÁCIO

$$F_r = \underbrace{14^2}_{F_1} + \underbrace{16^2}_{F_2} - 2 \cdot 14 \cdot 16 \cdot \underbrace{\cos 94^\circ}_{-\cos 86^\circ} \Rightarrow$$

$\Rightarrow F_r^2 = 452 - 448 \cdot (-0{,}070) \Rightarrow$

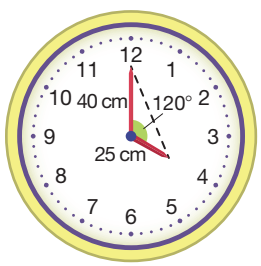
$\Rightarrow F_r = \sqrt{483{,}36} \Rightarrow F_r \simeq 22$

Portanto, $F_r \simeq 22$ N.

14. Quando o relógio marca 4 h o menor ângulo formado entre os ponteiros é 120°, pois:

$$\frac{360^\circ}{12} \cdot 4 = 120^\circ$$

Indicando por x a distância entre as extremidades desses ponteiros, segue que:



SERGIO L. FILHO

$$x^2 = 25^2 + 40^2 - 2 \cdot 25 \cdot 40 \cdot \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\cos 60^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2\,225 - 2\,000 \cdot (-0{,}500) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3\,225} \Rightarrow x \simeq 56{,}8$$

Portanto, a distância entre as extremidades dos ponteiros é, aproximadamente, 56,8 cm.

MODERNA

15. Observe que os triângulos dessa tarefa apresentam o comprimento de todos os lados, porém as medidas dos ângulos não estão indicadas. Assim, usaremos a lei dos cossenos em cada um dos triângulos para determinar a medida aproximada do ângulo α.

a) $72^2 = 54^2 + 90^2 - 2 \cdot 54 \cdot 90 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\,832 = 9\,720 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0{,}6 \Rightarrow \alpha \simeq 53°$

Portanto, α mede aproximadamente 53°.

b) $56^2 = 48^2 + 72^2 - 2 \cdot 48 \cdot 72 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\,352 = 6\,912 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha \simeq 0{,}630 \Rightarrow \alpha \simeq 51°$

Portanto, α mede aproximadamente 51°.

c) $110^2 = 71^2 + 45^2 - 2 \cdot 71 \cdot 45 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\,034 = -6\,390 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow -\cos\alpha \simeq 0{,}788 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(180° - \alpha) \simeq 0{,}788 \Rightarrow$

$\Rightarrow 180° - \alpha \simeq 38° \Rightarrow \alpha \simeq 142°$

Portanto, α mede aproximadamente 142°.

d) $95^2 = 56^2 + 53^2 - 2 \cdot 56 \cdot 53 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\,080 = -5\,936 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow -\cos\alpha \simeq 0{,}519 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(180° - \alpha) \simeq 0{,}519 \Rightarrow$

$\Rightarrow 180° - \alpha \simeq 59° \Rightarrow \alpha \simeq 121°$

Portanto, α mede aproximadamente 121°.

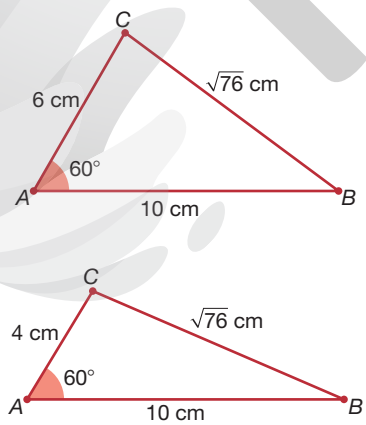
16. Não, pois:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (AC) \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{76}\right)^2 = 10^2 + (AC)^2 - 2 \cdot 10 \cdot (AC) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 - 10 \cdot (AC) + 24 = 0 \begin{cases} (AC)_1 = 6 \\ (AC)_2 = 4 \end{cases}$

Os triângulos a seguir evidenciam esses comprimentos e justificam a resposta do problema.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Portanto, os triângulos cujos comprimentos dos lados são 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 6 cm; ou 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 4 cm têm as características citadas, mas não são congruentes.

17. **a)** • $(AB)^2 = (BE)^2 + (AE)^2 - 2 \cdot (BE) \cdot (AE) \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 = 1\,300 - 1\,200 \cdot 0{,}500 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{700} \Rightarrow AB \simeq 26{,}5$

Portanto, o comprimento de $\overline{AB}$ é aproximadamente 26,5 m.

• $(BC)^2 = (BF)^2 + (CF)^2 - 2 \cdot (BF) \cdot (CF) \cdot \cos 35° \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 = 60^2 + 35^2 - 2 \cdot 60 \cdot 35 \cdot \cos 35° \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 = 4\,825 - 4\,200 \cdot 0{,}819 \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \sqrt{1\,385{,}2} \Rightarrow BC \simeq 37{,}2$

Portanto, o comprimento de $\overline{BC}$ é aproximadamente 37,2 m.

• $(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot (AD) \cdot (CD) \cdot \cos 58° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos 58° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 = 2\,500 - 2\,400 \cdot 0{,}530 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{1\,228} \Rightarrow AC \simeq 35$

Portanto, o comprimento de $\overline{AC}$ é aproximadamente 35 m.

Calculando o perímetro P do triângulo ABC, temos:

$P = AB + BC + AC = 26{,}5 + 37{,}2 + 35 \Rightarrow P = 98{,}7$

Assim, o perímetro aproximado do ΔABC é 98,7 m.

b) Para resolver esse item, considere os triângulos BCD, ACD e ABD.

• No ΔBCD, segue que:

$\frac{CD}{\text{sen } 22°} = \frac{BD}{\text{sen } 110°} \Rightarrow \frac{60}{0{,}375} = \frac{BD}{0{,}940} \Rightarrow BD \simeq 150{,}4$

Assim, BD é aproximadamente 150,4 m.

• No ΔACD, temos que:

$\frac{CD}{\text{sen } 24°} = \frac{AD}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{60}{0{,}407} = \frac{AD}{0{,}500} \Rightarrow AD \simeq 73{,}7$

Logo, AD é aproximadamente 73,7 m.

• No ΔABD, segue que:

$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2 - 2 \cdot (AD) \cdot (BD) \cdot \cos 78° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 = 73{,}7^2 + 150{,}4^2 - 2 \cdot 73{,}7 \cdot 150{,}4 \cdot 0{,}208 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \simeq 153{,}1$

Portanto, o comprimento de $\overline{AB}$ é aproximadamente 153,1 m.

18. alternativa **d**

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$(BC)^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \underbrace{\cos 120°}_{-\cos 60°} \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot (-0{,}5) \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \sqrt{300} \Rightarrow BC = 10\underbrace{\sqrt{3}}_{1{,}7} \Rightarrow BC \simeq 17{,}3$

Portanto, o comprimento do raio BC está no intervalo $15 < R \leqslant 21$.

19. $(AB)^2 = (500)^2 + (1\,000)^2 - 2 \cdot 500 \cdot 1\,000 \cdot \cos 75° \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \simeq \sqrt{991\,181} \Rightarrow AB \simeq 995{,}58$

Agora, calculamos a diferença entre a distância percorrida pelo *drone* e distância em linha reta entre A e B.

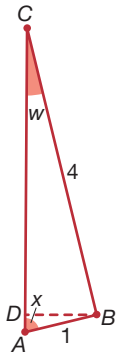
$1\,500 - 995{,}58 = 504{,}42$

Portanto, o *drone* teria percorrido aproximadamente 504,42 m a menos nessa entrega.

MODERNA

20. alternativa d

Para resolver essa tarefa, oriente os alunos a construir um esquema, como o apresentado a seguir.



RONALDO INÁCIO

No triângulo retângulo CDB, temos:

$$\cos w = \frac{CD}{4} \Rightarrow CD = 4 \cos w \qquad \text{(I)}$$

No triângulo retângulo ADB, temos:

$$\cos x = \frac{AD}{1} \Rightarrow AD = \cos x \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) e (II) em $AC = CD + DA$, segue que:

$$AC = CD + AD \Rightarrow AC = 4 \cos w + \cos x \qquad \text{(III)}$$

Agora, aplicamos a lei dos senos no triângulo ABC.

$$\frac{1}{\operatorname{sen} w} = \frac{4}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{sen} w = \frac{\operatorname{sen} x}{4} \qquad \text{(IV)}$$

Além disso, temos:

$$\operatorname{sen}^2 w + \cos^2 w = 1 \Rightarrow \cos w = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 w} \qquad \text{(V)}$$

Por fim, substituímos (IV) e (V) em (III). Assim:

$AC = 4 \cos w + \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 4\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 w} + \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 4\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} x}{4}\right)^2} + \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2 x} + \cos x$

Indicando AC por y, temos:

$$y = \cos x + \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2 x}$$

21. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

4 Trigonometria na circunferência

1. a) Inicialmente, calculamos a medida de $\overset{\frown}{AB}$.

$$\overset{\frown}{AB} = 360° - 250° \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 110°$$

Agora, calculamos o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$. Para isso, usaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Comprimento do arco em cm
360	$2\pi r$
110	x

$$\frac{360}{110} = \frac{2\pi \overset{3}{\hat{r}}}{x} \Rightarrow 360x = 660\pi \Rightarrow x \simeq 5{,}76$$

Portanto, a medida de $\overset{\frown}{AB}$ é 110° e seu comprimento é aproximadamente 5,76 cm.

b) Inicialmente, temos $\overset{\frown}{AB} = 90°$.

Agora, vamos calcular o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$. Para isso, usaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Comprimento do arco em cm
360	$2\pi r$
90	x

$$\frac{360}{90} = \frac{2\pi \overset{2}{\hat{r}}}{x} \Rightarrow 360x = 360\pi \Rightarrow x \simeq 3{,}14$$

Portanto, a medida de $\overset{\frown}{AB}$ é 90° e seu comprimento é aproximadamente 3,14 cm.

c) Inicialmente, calculamos a medida de $\overset{\frown}{AB}$.

$$\overset{\frown}{AB} = 360° - 180° = 180°$$

Agora, vamos calcular o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$. Para isso, usaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Comprimento do arco em cm
360	$2\pi r$
180	x

$$\frac{360}{180} = \frac{2\pi \overset{2,5}{\hat{r}}}{x} \Rightarrow 360x = 900\pi \Rightarrow x \simeq 7{,}85$$

Portanto, a medida de $\overset{\frown}{AB}$ é 180° e seu comprimento é aproximadamente 7,85 cm.

d) Inicialmente, calculamos a medida de $\overset{\frown}{AB}$.

$$\overset{\frown}{AB} = 360° - 315° = 45°$$

Em seguida, calculamos o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$. Para isso, usaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Comprimento do arco em cm
360	$2\pi r$
45	x

$$\frac{360}{45} = \frac{2\pi \overset{3,5}{\hat{r}}}{x} \Rightarrow 360x = 315\pi \Rightarrow x \simeq 2{,}75$$

Portanto, a medida de $\overset{\frown}{AB}$ é 45° e seu comprimento é aproximadamente 2,75 cm.

2. a) Para escrever a medida de $\overset{\frown}{AB}$ em radianos, utilizaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
110	x

$$\frac{180}{110} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 110\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{18}$$

Portanto, 110° equivalem a $\frac{11\pi}{18}$ rad.

MODERNA

b) Para escrever a medida de $\overset{\frown}{AB}$ em radianos, utilizaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
90	x

$$\frac{180}{90} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 90\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, 90° equivalem a $\frac{\pi}{2}$ rad.

c) Para escrever a medida de $\overset{\frown}{AB}$ em radianos, utilizaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
180	x

$$\frac{180}{180} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 180\pi \Rightarrow x = \pi$$

Portanto, 180° equivalem a π rad.

d) Para escrever a medida de $\overset{\frown}{AB}$ em radianos, utilizaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
45	x

$$\frac{180}{45} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 45\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, 45° equivalem a $\frac{\pi}{4}$ rad.

3. a) Para escrever a medida de $\overset{\frown}{AB}$ em graus, utilizaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
x	$\frac{5\pi}{6}$

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{5\pi}{18}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{18}{5} \Rightarrow x = 50$$

Portanto, $\overset{\frown}{AB} = 50°$.

b) Para escrever a medida de $\overset{\frown}{CD}$ em graus, utilizaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
x	$\frac{7\pi}{9}$

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{7\pi}{9}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{9}{7} \Rightarrow x = 140$$

Portanto, $\overset{\frown}{CD} = 140°$.

c) Para escrever a medida de $\overset{\frown}{EF}$ em graus, utilizaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
x	$\frac{13\pi}{9}$

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{13\pi}{9}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{9}{13} \Rightarrow x = 260$$

Portanto, $\overset{\frown}{EF} = 260°$.

d) Para escrever a medida de $\overset{\frown}{GH}$ em graus, utilizaremos uma regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
x	$\frac{16\pi}{9}$

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{16\pi}{9}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{9}{16} \Rightarrow x = 320$$

Portanto, $\overset{\frown}{GH} = 320°$.

4. a) Observe que o raio da pista mede 500 m, ou seja, 0,5 km.

Calculando o comprimento C da pista, temos:

$$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 \Rightarrow C = 3{,}14$$

Logo, o comprimento de uma volta na pista é, aproximadamente, 3,14 km. Desse modo, para determinar o número de voltas necessárias, efetuamos:

$$78{,}5 : 3{,}14 = 25$$

Portanto, serão necessárias, no mínimo, 25 voltas.

b) Inicialmente, escrevemos 2 h 30 min em minutos. Para isso, fazemos:

2 h 30 min = 2 h + 30 min = 120 min + 30 min = 150 min

Em seguida, determinamos o tempo médio máximo x utilizando uma regra de três simples.

Número de voltas	Tempo em minutos
25	$\overbrace{150}^{\text{2 h 30 min}}$
1	x

$$\frac{25}{1} = \frac{150}{x} \Rightarrow 25x = 150 \Rightarrow x = 6$$

Portanto, um atleta deve realizar cada volta em um tempo médio máximo de 6 min.

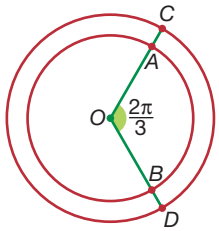
5. Indicando por C a distância percorrida pela cabine ao completar uma volta, temos:

$$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 75 \Rightarrow C = 471$$

Portanto, a distância aproximada percorrida por uma das cabines após realizar uma volta completa é 471 m.

MODERNA

6. A construção de um esquema para representar a situação pode auxiliar os alunos na resolução da tarefa.



RONALDO INÁCIO

a) Inicialmente, escrevemos o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$ em função de r_1. Para isso, indicamos por x o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$ e utilizamos uma regra de três.

Comprimento do arco em centímetro	Medida do arco em radianos
$2\pi r_1$	2π
x	$\frac{2\pi}{3}$

$$\frac{2\pi r_1}{x} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow x = \frac{2\pi r_1}{3}$$

Como o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$ é 25,12 cm, temos:

$$\frac{2\pi r_1}{3} = 25{,}12 \Rightarrow r_1 = \frac{3 \cdot 25{,}12}{2\pi} \Rightarrow r_1 \simeq 12$$

Assim, $r_1 \simeq 12$ cm. Agora, calculamos o comprimento de r_2.

$$r_2 = r_1 + 3 \Rightarrow r_2 \simeq 12 + 3 \Rightarrow r_2 \simeq 15$$

Portanto, o comprimento de r_1 é, aproximadamente, 12 cm e o de r_2 é aproximadamente 15 cm.

b) Indicando por x o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{CD}$ e utilizamos uma regra de três, temos:

Comprimento do arco em centímetro	Medida do arco em radianos
$2\pi r_2$	2π
x	$\frac{2\pi}{3}$

$$\frac{2\pi r_2}{x} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow x \simeq \frac{2\pi \cdot 15}{3} \Rightarrow x \simeq 10\pi \Rightarrow x \simeq 31{,}4$$

Portanto, o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{CD}$ é, aproximadamente, 31,4 cm.

c) Sim, pois esses arcos são determinados pelo mesmo ângulo; no caso dos arcos menores, pelo ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad.

7. Inicialmente, escrevemos 2 h 45 min em horas. Para isso, fazemos:

$$2\,\text{h}\,45\,\text{min} = 2\,\text{h} + 45\,\text{min} = 2\,\text{h} + \frac{45}{60}\,\text{h} = 2\,\text{h} + 0{,}75\,\text{h} = 2{,}75\,\text{h}$$

Sabendo que, passada uma hora, o ponteiro das horas gira 30°, podemos utilizar uma regra de três para determinar o ângulo x que representa o giro do ponteiro das horas ao passar 2,75 h.

Tempo em horas	Medida do ângulo em graus
1	30
2,75	x

$$\frac{1}{2{,}75} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 82{,}5$$

Portanto, o ponteiro das horas girou 82,5°.

8. Indicando por C o comprimento da circunferência, temos:

$$C = 2\pi r \Rightarrow C = \pi d$$

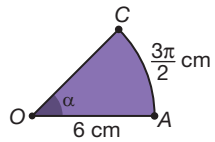
em que r e d indicam, respectivamente, o comprimento do raio e do diâmetro da circunferência. Como $d \simeq 86{,}6$ m, segue que:

$$C = \pi d \Rightarrow C \simeq 86{,}6 \cdot \pi \Rightarrow C \simeq 272$$

Portanto, ao realizar uma volta completa sobre a circunferência percorreríamos, aproximadamente, 272 m.

9. **a)** O mais votado foi o vôlei.

Para calcular a quantidade de alunos que optaram por esse esporte, considere o seguinte setor circular.



RONALDO INÁCIO

Logo, utilizando a regra de três simples, temos:

Medida do arco em graus	Comprimento do arco em cm
360	$2\pi r$
α	$\frac{3\pi}{2}$

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{2\pi \cdot 6}{\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{540\pi}{12\pi} \Rightarrow \alpha = 45°$$

Indicando por x a quantidade de alunos que optaram por esse esporte, segue que:

Ângulo em graus	Votos
45	4
180	x

$$\frac{45}{180} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 16$$

Portanto, 16 alunos optaram pelo vôlei.

b) Para determinar a quantidade (y) de pessoas que participaram da votação, utilizamos regra de três simples.

Ângulo em graus	Votos
45	4
360	y

$$\frac{45}{360} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 32$$

Portanto, 32 alunos participaram da votação.

c) Indicando por z a quantidade de alunos que votaram em futebol, segue que:

$$\underbrace{16}_{\text{vôlei}} + \underbrace{4}_{\text{basquete}} + \underbrace{z}_{\text{futebol}} = 32 \Rightarrow z = 12$$

Portanto, 12 alunos votaram em futebol.

10. Observe que o comprimento de cada arco da espiral é $\frac{1}{4}$ do comprimento das circunferências cujos raios são os números da sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8 e 13, respectivamente.

$$\frac{1}{4}\left(2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot 3 + 2\pi \cdot 5 + 2\pi \cdot 8 + 2\pi \cdot 13\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13\right) \simeq 51{,}81$$

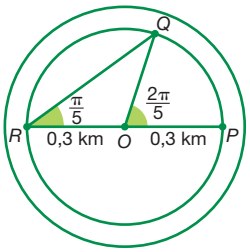
Portanto, o comprimento total da espiral é aproximadamente 51,81 unidades de comprimento.

MODERNA

11. alternativa **d**

Tomando O como o centro da circunferência, e sabendo que a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do ângulo central correspondente, temos:

$$P\hat{O}Q = 2 \cdot P\hat{R}Q = 2 \cdot \frac{\pi}{5}\text{ rad} = \frac{2\pi}{5}\text{ rad}$$



RONALDO INÁCIO

Agora, vamos determinar a distância percorrida por uma pessoa para ir do ponto P ao ponto Q andando pela circunferência interna. Para isso, indicamos por x o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ e utilizamos uma regra de três simples.

Medida do arco em radianos	Comprimento do arco em km
2π	$2\pi \overset{0,3}{\frown} r$
$\frac{2\pi}{5}$	x

$$\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,3}{x} \Rightarrow 5x = 0,6\pi \Rightarrow x = 0,12\pi$$

Portanto, uma pessoa que vai do ponto P ao ponto Q andando pela circunferência interna, no sentido anti-horário, percorrerá $0,12\pi$ km.

12. **a)** $1\,460° = \underbrace{20°}_{\alpha} + 4 \cdot 360°$

1ª determinação positiva: 20°

b) $-900° = \underbrace{180°}_{\alpha} - 3 \cdot 360°$

1ª determinação positiva: 180°

c) $\frac{27\pi}{4} = \underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\alpha} + 3 \cdot 2\pi$

1ª determinação positiva: $\frac{3\pi}{4}$

13. **a)** $45° + k \cdot 360°$, sendo k um número inteiro.

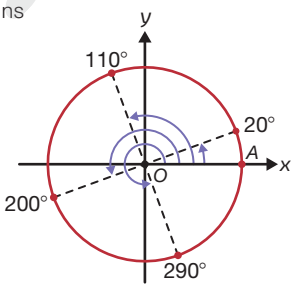
b) $210° + k \cdot 360°$, sendo k um número inteiro.

c) $\underbrace{\frac{5\pi}{3}}_{-\frac{\pi}{3} + 2\pi} + k \cdot 2\pi$, sendo k um número inteiro.

d) $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, sendo k um número inteiro.

14. Inicialmente, atribuímos alguns valores para k.

- Para $k = 0$, temos:
  $20° + 0 \cdot 90° = 20°$
- Para $k = 1$, temos:
  $20° + 1 \cdot 90° = 110°$
- Para $k = 2$, temos:
  $20° + 2 \cdot 90° = 200°$
- Para $k = 4$, temos:
  $20° + 3 \cdot 90° = 290°$

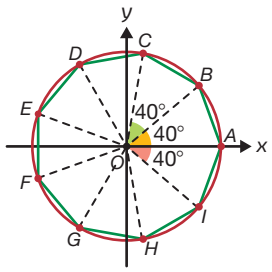


RONALDO INÁCIO

15. **a)** Como o eneágono regular está inscrito na circunferência, segue que o ângulo central desse polígono é:

$$\frac{360°}{9} = 40°$$

Assim:



RONALDO INÁCIO

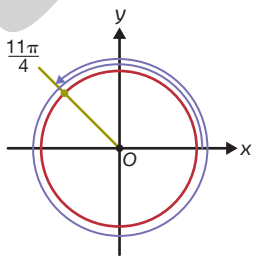
Portanto, a medida do arco de origem em A e extremidade no vértice C é 80° ou $\frac{4\pi}{9}$.

b) De acordo com o item **a**, é possível perceber que os arcos de origem em A e extremidades em cada vértice do eneágono são múltiplos de 40°, ou seja, a expressão geral é:

$$k \cdot 40° \text{ ou } \frac{k \cdot 2\pi}{9}\text{, sendo } k \text{ um número inteiro}$$

16. **a)** Não, pois o arco representado por ele é côngruo ao arco de $\frac{5\pi}{6}$ e não ao arco de $\frac{3\pi}{4}$. A resposta correta seria um arco da expressão geral $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, sendo k um número inteiro.

b) Uma possível resposta:



RONALDO INÁCIO

17. **a)** No 2º ou 3º quadrante, pois o cosseno nesses quadrantes é negativo.

b) No 1º ou 2º quadrante, pois o seno nesses quadrantes é positivo.

c) No 1º ou 3º quadrante, pois a tangente nesses quadrantes é positiva.

d) No 3º ou 4º quadrante, pois o seno nesses quadrantes é negativo.

e) No 2º ou 4º quadrante, pois a tangente nesses quadrantes é negativa.

f) No 1º ou 4º quadrante, pois o cosseno nesses quadrantes é positivo.

18. **a)** $2\,120° = 320° + 5 \cdot 360°$

Como 2 120° está no 4º quadrante, então sen 2 120° é negativo.

b) $-\frac{39\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - 4 \cdot 2\pi$

Como $-\frac{39\pi}{5}$ está no 1º quadrante, então $\text{sen}\left(-\frac{39\pi}{5}\right)$ é positivo.

MODERNA

c) $-1\,605° = 195° - 5 \cdot 360°$

Como $-1\,605°$ está no 3º quadrante, então $\operatorname{sen}(-1\,605°)$ é negativo.

d) $\frac{43\pi}{9} = \frac{7\pi}{9} + 2 \cdot 2\pi$

Como $\frac{43\pi}{9}$ está no 2º quadrante, então $\operatorname{sen}\left(\frac{43\pi}{9}\right)$ é positivo.

19. a) 2º quadrante c) 1º quadrante e) 3º quadrante
b) 2º quadrante d) 4º quadrante

20. a) Inicialmente, calculamos a 1ª determinação positiva do arco de 500°.

$$500° = 140° + 360°$$

Deste modo:

$$\operatorname{sen} 500° = \operatorname{sen} 140° = \operatorname{sen}(180° - 140°) = \operatorname{sen} 40°$$

Em seguida, calculamos a 1ª determinação positiva do arco de 3 200°.

$$3\,200° = 320° + 8 \cdot 360°$$

Deste modo:

$$\cos 3\,200° = \cos 320° = \cos(360° - 320°) = \cos 40°$$

Consequentemente:

$$A = \operatorname{sen} 500° \cdot \cos 3\,200° = \operatorname{sen} 40° \cdot \cos 40°$$

Como $\operatorname{sen} 40° > 0$ e $\cos 40° > 0$, então $A > 0$.

b) Inicialmente, calculamos a 1ª determinação positiva do arco de $\frac{22\pi}{3}$. Para isso, fazemos:

$$\frac{22\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi$$

Deste modo:

$$\cos\frac{22\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$$

Em seguida, calculamos a 1ª determinação positiva do arco de $-\frac{\pi}{6}$.

$$-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} - 2\pi$$

Deste modo:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{11\pi}{6} = -\operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$$

Consequentemente:

$$A = \cos\frac{22\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} \cdot \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$$

Como $-\cos\frac{\pi}{3} < 0$ e $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} < 0$, então $A > 0$.

c) Inicialmente, calculamos a 1ª determinação positiva do arco de 1 345°. Para isso, fazemos:

$$1\,345° = 265° + 3 \cdot 360°$$

Deste modo:

$$\operatorname{tg} 1\,345° = \operatorname{tg} 265° = \operatorname{tg}(265° - 180°) = \operatorname{tg} 85°$$

Em seguida, calculamos a 1ª determinação positiva do arco de $-1\,975°$.

$$-1\,975° = 185° - 6 \cdot 360°$$

Deste modo:

$$\operatorname{sen}(-1\,975°) = \operatorname{sen} 185° =$$

$$= -\operatorname{sen}(185° - 180°) = -\operatorname{sen} 5°$$

Consequentemente:

$$A = \operatorname{tg} 1\,345° \cdot \operatorname{sen}(-1\,975°) = \operatorname{tg} 85° \cdot (-\operatorname{sen} 5°)$$

Como $\operatorname{tg} 85° > 0$ e $-\operatorname{sen} 5° < 0$, então $A < 0$.

d) Inicialmente, calculamos a 1ª determinação positiva do arco de $\frac{27\pi}{5}$. Para isso, fazemos:

$$\frac{27\pi}{5} = \frac{7\pi}{5} + 2 \cdot 2\pi$$

Deste modo:

$$\cos\frac{27\pi}{5} = \cos\frac{7\pi}{5} = -\cos\left(\frac{7\pi}{5} - \pi\right) = -\cos\frac{2\pi}{5}$$

Em seguida, calculamos a 1ª determinação positiva do arco de $-2\,780°$.

$$-2\,780° = 100° - 8 \cdot 360°$$

Deste modo:

$$\operatorname{sen}(-2\,780°) = \operatorname{sen} 100° = \operatorname{sen}(180° - 100°) = \operatorname{sen} 80°$$

Consequentemente:

$$A = \cos\frac{27\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}(-2\,780°) = -\cos\frac{2\pi}{5} \cdot \operatorname{sen} 80°$$

Como $-\cos\frac{2\pi}{5} < 0$ e $\operatorname{sen} 80° > 0$, então $A < 0$.

21. a) A medida do ângulo entre duas posições adjacentes é $\underbrace{45°}_{\frac{360°}{8}}$ no sentido anti-horário e $\underbrace{-45°}_{\frac{360°}{8}}$ no sentido horário.

Assim,

- I: $5 \cdot (-45°) = -225°$
- II: $2 \cdot 45° = 90°$
- III: $4 \cdot 45° = 180°$
- IV: $3 \cdot (-45°) = -135°$

b) $-225° + 90° + 180° - 135° = -90°$

Portanto, no sentido anti-horário, a diferença é de 270°.

c) Calculando o seno e o cosseno desse ângulo, temos:

$$\operatorname{sen}(-90°) = \operatorname{sen} 270° = -1$$

$$\cos(-90°) = \cos 270° = 0$$

22. a) $\frac{25}{8} \cdot \underbrace{360°}_{1 \text{ volta}} = 1\,125°$

O ângulo do arco que representa todo o trajeto percorrido é 1 125°.

b) Os alunos devem compreender que o ângulo, nesse caso, representa a 1ª determinação positiva do arco.

$$1\,125° = 45° + 3 \cdot 360°$$

Portanto, o ângulo do menor arco é 45°.

c) Calculando o seno e o cosseno desse ângulo, temos:

$$\operatorname{sen} 1\,125° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e}$$

$$\cos 1\,125° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) $\frac{\overbrace{2\,565°}^{\substack{\text{arco descrito}\\ \text{em todo o}\\ \text{percurso}}} - \overbrace{1\,125°}^{\substack{\text{arco que}\\ \text{representa o}\\ \text{trajeto percorrido}}}}{360°} = 4$

Portanto, o ciclista deve percorrer 4 voltas a mais.

23. a) Obtendo a 1ª determinação positiva, temos:

$$5\,550° = 150° + 15 \cdot 360°$$

Logo, a diferença é de 150°.

b) Calculando o seno e o cosseno do ângulo obtido no item a, temos:

$$\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen}(180° - 150°) = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

MODERNA

24. As dificuldades dos alunos nessa tarefa podem estar na compreensão da 1ª determinação positiva do arco e na verificação do quadrante que corresponde ao arco.

a) $1\,110° = 30° + 3 \cdot 360°$

$\operatorname{sen} 1\,110° = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$

b) $765° = 45° + 2 \cdot 360°$

$\operatorname{tg} 765° = \operatorname{tg} 45° = 1$

c) $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4 \cdot 2\pi$

$\cos \frac{25\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{29\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 4 \cdot 2\pi$

$\operatorname{sen} \frac{29\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = -\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) =$

$= -\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $-2\,310° = 210° - 7 \cdot 360°$

$\cos(-2\,310°) = \cos 210° = -\cos(210° - 180°) =$

$= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $1\,770° = 330° + 4 \cdot 360°$

$\cos(1\,770°) = \cos 330° = \cos(360° - 330°) =$

$= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

25. a) Da relação trigonométrica fundamental, temos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm\frac{12}{13}$$

Como α pertence ao 4º quadrante, ou seja, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13}$.

Utilizando a relação $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, segue que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$$

Logo, $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13}$ e $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$.

b) Da relação trigonométrica fundamental, temos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \left(-\frac{15}{17}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{225}{289} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{64}{289} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm\frac{8}{17}$$

Como α pertence ao 3º quadrante, ou seja, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{8}{17}$.

Utilizando a relação $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, segue que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{8}{17}}{-\frac{15}{17}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$$

Logo, $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{8}{17}$ e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$.

26. As possíveis respostas dessa tarefa correspondem aos arcos cuja primeira determinação positiva é do segundo quadrante.

27. Sim, pois para qualquer valor de k os arcos serão 150°, 300° e 225° ou arcos côngruos a eles; portanto, a igualdade será sempre verdadeira:

$$\frac{\operatorname{sen}(150° + 2k\pi) + \cos(300° + 2k\pi)}{\operatorname{tg}(225° + 2k\pi)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1} = 1$$, sendo k um número inteiro.

5 Funções trigonométricas

1. a) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; conjunto finito

b) {Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins}; conjunto finito

c) $\{4, 8, 12, 16, \ldots\}$; conjunto infinito

d) $\{c, j, n, o, t, u\}$; conjunto finito

2. Inicialmente, escrevemos o conjunto D.

$$D = \{1, 9, 25, 49, 81, 121\}.$$

Portanto, o conjunto D tem 6 elementos.

3. a) $4 \in A$; $4 \in B$

b) $6 \notin A$; $6 \notin B$

c) $10 \in A$; $10 \notin B$

d) $16 \notin A$; $16 \in B$

e) $25 \notin A$; $25 \in B$

f) $50 \notin A$; $50 \notin B$

4. Para que o número seja divisível por 15, ele deve ser divisível por 3 e por 5, simultaneamente, ou seja, a soma de seus algarismos deve ser divisível por 3 e o algarismos das unidades deve ser 0 ou 5.

Assim, $Y = 0$ ou $Y = 5$.

- Para $Y = 0$, temos:

$$5 + x + 2 + 0$$

Logo, X pode ser 2, 5 ou 8.

- Para $Y = 5$, temos:

$$5 + x + 2 + 5$$

Logo, X pode ser 0, 3, 6 ou 9.

Consequentemente:

$$A = \{(2, 0), (5, 0), (8, 0), (0, 5), (3, 5), (6, 5), (9, 5)\}$$

Portanto, o conjunto A tem 7 elementos.

5. São afirmativas corretas: **a**, **b**, **c** e **e**.

Se algum aluno afirmar que a afirmativa **d** está correta, explique a ele que o símbolo $\subset$ é uma notação para estabelecer relações entre conjuntos e, no caso, está relacionando elemento e conjunto; a alternativa **f** não pode ser considerada correta pois o 2 não é elemento do conjunto A, portanto não pode formar um subconjunto de A.

MODERNA

6. a) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

b) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c,d\}$

c) $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

d) $\{a, b, c, d\}$

7. a) $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $B = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1\}$

c) $C = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, ...\}$

d) $D = \varnothing$

8. a) $|-5| + |2| = 5 + 2 = 7$

b) $|-3 \cdot 2| = |-6| = 6$

c) $|-2| \cdot |7| = 2 \cdot 7 = 14$

d) $|-5 + 3| + |2 - 8| = |-2| + |-6| = 2 + 6 = 8$

9. $-\frac{16}{7} < -\frac{A}{11} \Rightarrow \frac{16}{7} > \frac{A}{11} \Rightarrow \frac{176}{7} > A \Rightarrow A < 25{,}14$

Portanto, o maior número natural A é 25.

10. a) Seja $x = 36{,}8$.

Logo:

$$10 \cdot x = 36{,}8 \cdot 10$$
$$10x = 368$$
$$x = \frac{368}{10} = \frac{184}{5}$$

Portanto, $36{,}8 = \frac{184}{5}$.

b) Seja $x = 1{,}\overline{65}$. Indicamos essa equação por I.

Logo:

$$100 \cdot x = 1{,}\overline{65} \cdot 100$$
$$100x = 165{,}\overline{65} \quad (II)$$

Subtraindo I de II, temos:

$$100x - x = 165{,}\overline{65} - 1{,}\overline{65}$$
$$99x = 164$$
$$x = \frac{164}{99}$$

Portanto, $1{,}\overline{65} = \frac{164}{99}$.

c) Seja $x = 0{,}9375$.

Logo:

$$10\,000 \cdot x = 0{,}9375 \cdot 10\,000$$
$$10\,000x = 9\,375$$
$$x = \frac{9\,375}{10\,000} = \frac{15}{16}$$

Portanto, $0{,}9375 = \frac{15}{16}$.

d) Seja $x = 0{,}\overline{843}$. Indicamos essa equação por I.

Logo:

$$1\,000 \cdot x = 0{,}\overline{843} \cdot 1\,000$$
$$1\,000x = 843{,}\overline{843} \quad (II)$$

Subtraindo I de II, temos:

$$1000 \cdot x - x = 843{,}\overline{843} - 0{,}\overline{843}$$
$$999 \cdot x = 843$$
$$x = \frac{843}{999} = \frac{281}{333}$$

Portanto, $0{,}\overline{843} = \frac{281}{333}$.

e) Seja $x = 7{,}5\overline{81}$.

Logo:

$$10 \cdot x = 7{,}5\overline{81} \cdot 10$$
$$10x = 75{,}\overline{81} \quad (I)$$
$$100 \cdot 10x = 75{,}\overline{81} \cdot 100$$
$$1\,000x = 7\,581{,}\overline{81} \quad (II)$$

Subtraindo I de II, temos:

$$1\,000x - 10x = 7\,581{,}\overline{81} - 75{,}\overline{81}$$
$$990x = 7\,506$$
$$x = \frac{7\,506}{990} = \frac{417}{55}$$

Portanto, $7{,}5\overline{81} = \frac{417}{55}$.

f) Seja $x = 12{,}3\overline{2}$.

Logo:

$$10 \cdot x = 12{,}3\overline{2} \cdot 10$$
$$10x = 123{,}\overline{2} \quad (I)$$
$$10 \cdot 10x = 123{,}\overline{2} \cdot 10$$
$$100x = 1\,232{,}\overline{2} \quad (II)$$

Subtraindo I de II, temos:

$$100x - 10x = 1\,232{,}\overline{2} - 123{,}\overline{2}$$
$$90x = 1\,109$$
$$x = \frac{1\,109}{90}$$

Portanto, $12{,}3\overline{2} = \frac{1\,109}{90}$.

11. a) Utilizando o método de Herão, temos:

$$\sqrt{8} \simeq \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Logo, $\sqrt{8} \simeq 3$. Usando uma calculadora, obtemos $\sqrt{8} \simeq 2{,}8284$.

b) Utilizando o método de Herão, temos:

$$\sqrt{6} \simeq \frac{2 + 3}{2} = 2{,}5$$

Logo, $\sqrt{6} \simeq 2{,}5$. Usando uma calculadora, obtemos $\sqrt{6} \simeq 2{,}4495$.

c) Utilizando o método de Herão, temos:

$$\sqrt{12} \simeq \frac{3 + 4}{2} = 3{,}5$$

Logo, $\sqrt{12} \simeq 3{,}5$. Usando uma calculadora, obtemos $\sqrt{12} \simeq 3{,}4641$.

d) Utilizando o método de Herão, temos:

$$\sqrt{24} \simeq \frac{4 + 6}{2} = 5$$

Logo, $\sqrt{24} \simeq 5$. Usando uma calculadora, obtemos $\sqrt{24} \simeq 4{,}8990$.

MODERNA

12. **a)** A sentença é falsa, pois $-\frac{18}{4} = -4{,}5$ e $-4{,}5 \notin [4, 5]$.

b) verdadeira

c) verdadeira

d) A sentença é falsa, pois, por exemplo, $-7{,}3$ pertence a $]-\infty, -4[$ e $-7{,}3$ não pertence a $\mathbb{Z}$.

Assim, $]-\infty, -4[\not\subset \mathbb{Z}$.

e) A sentença é falsa, pois, por exemplo, 2,3 pertence a $[2, 5]$ e 2,3 não pertence a $]3, 5[$

Portanto, $[2, 5] \not\subset]3, 5[$.

f) A sentença é falsa, pois, por exemplo – 7,5 pertence a $]-8, 7]$ e $-7, 5$ não pertence a $]-7, 4]$.

Logo, $]-8, 2[\not\subset]-7, 4]$.

13. **a)** Nesse caso, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como o cosseno é positivo no 1º e no 4º quadrante, para k inteiro:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

- $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{9}{8}$

  Como k é um número inteiro, $k = 1$.

  Logo:

  $$x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4}$$

- $\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{3}{8} < k < \frac{11}{8}$

  Como k é um número inteiro, $k = 1$.

  Logo:

  $$x = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$$

  Portanto, $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{9\pi}{4}$.

b) Temos $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$. Como o seno é negativo no 3º e no 4º quadrante, para k inteiro:

$$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

- $2\pi < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{5}{12} < k < \frac{7}{6}$

  Como k é um número inteiro, $k = 1$.

  Logo:

  $$x = \frac{7\pi}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{19\pi}{6}$$

- $2\pi < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{13}{12} < k < \frac{11}{6}$

  Como k é um número inteiro, não existe k que satisfaça a inequação.

  Portanto, $x = \frac{19\pi}{6}$.

c) Temos $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como o cosseno é negativo no 2º e no 3º quadrante, para k inteiro:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 150° + k \cdot 360° \\ \text{ou} \\ x = 210° + k \cdot 360° \end{cases}$$

- $90° < 150° + k \cdot 360° < 540° \Rightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{13}{12}$

  Como k é um número inteiro, $k = 0$ ou $k = 1$.

  Para $k = 0$, temos:

  $$x = 150° + 0 \cdot 360° \Rightarrow x = 150°$$

  Para $k = 1$, temos:

  $$x = 150° + 1 \cdot 360° \Rightarrow x = 510°$$

- $90° < 210° + k \cdot 360° < 540° \Rightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{11}{12}$

  Como k é um número inteiro, $k = 0$.

  Logo:

  $$x = 210° + 0 \cdot 360° \Rightarrow x = 210°$$

  Portanto, $x = 150°$ ou $x = 210°$ ou $x = 510°$.

d) Temos $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como o seno é positivo no 1º e no 2º quadrante, para k inteiro:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

- $\frac{11\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \frac{9\pi}{2} \Rightarrow \frac{5}{4} < k < \frac{17}{8}$

  Como k é um número inteiro, $k = 2$.

  Logo:

  $$x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{17\pi}{4}$$

- $\frac{11\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < \frac{9\pi}{2} \Rightarrow 1 < k < \frac{15}{8}$

  Como k é um número inteiro, não existe k que satisfaça a inequação.

  Portanto, $x = \frac{17\pi}{4}$.

e) Temos $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como o seno é negativo no 3º e no 4º quadrante, para k inteiro:

$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 240° + k \cdot 360° \\ \text{ou} \\ x = -60° + k \cdot 360° \end{cases}$$

- $360° < 240° + k \cdot 360° < 720° \Rightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{4}{3}$

  Como k é um número inteiro, $k = 1$.

  Logo:

  $$x = 240° + 1 \cdot 360° \Rightarrow x = 600°$$

- $360° < -60° + k \cdot 360° < 720° \Rightarrow \frac{7}{6} < k < \frac{13}{6}$

  Como k é um número inteiro, $k = 2$.

  Logo:

  $$x = -60° + 2 \cdot 360° \Rightarrow x = 660°$$

  Portanto, $x = 600°$ ou $x = 660°$.

MODERNA

f) Temos $\cos x = \frac{1}{2}$. Como o cosseno é positivo no 1º e no 4º quadrante, para k inteiro:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° + k \cdot 360° \\ \text{ou} \\ x = -60° + k \cdot 360° \end{cases}$$

- $390° < 60° + k \cdot 360° < 630° \Rightarrow \frac{11}{12} < k < \frac{19}{12}$

  Como k é um número inteiro, $k = 1$.

  Logo:

  $$x = 60° + 1 \cdot 360° \Rightarrow x = 420°$$

- $390° < -60° + k \cdot 360° < 630° \Rightarrow \frac{5}{4} < k < \frac{23}{12}$

  Como k é um número inteiro, não existe k que satisfaça a inequação.

  Portanto, $x = 420°$.

14. a) $0 < 3 - m < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3 < -m < -2 \Rightarrow 2 < m < 3$

b) $-1 < 2m + 1 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 < 2m < -1 \Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{2}$

c) $-1 < \frac{3m - 2}{4} < 0 \Rightarrow -4 < 3m - 2 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 < 3m < 2 \Rightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$

d) $-1 < -2m + 7 < 1 \Rightarrow -8 < -2m < -6 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4 < -m < -3 \Rightarrow 3 < m < 4$

15. a) Inicialmente, determinamos a lei de formação da função h. Para isso, fazemos:

$$h(x) = [g(x)]^2 + f(x) - 1 = \cos^2 x + \operatorname{sen} x - 1 =$$
$$= \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x - 1 = -\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x$$

Agora, calculamos para qual valor de x a função h atinge seu valor máximo. Para isso, considere $\operatorname{sen} x = Y$.

$$-Y^2 + Y = 0$$

Deste modo:

$$Y_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow Y_v = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow Y_v = \frac{1}{2}$$

Segue que:

$$\operatorname{sen} x = Y \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Portanto, para k inteiro, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

b) Como $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, então:

$$h(x) = -\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Portanto, o valor máximo de h é $\frac{1}{4}$.

16. a) O gráfico da função cosseno é congruente ao da função seno transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.

b) Como $\operatorname{sen} x = \cos x$ para $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com k sendo um número inteiro, então:

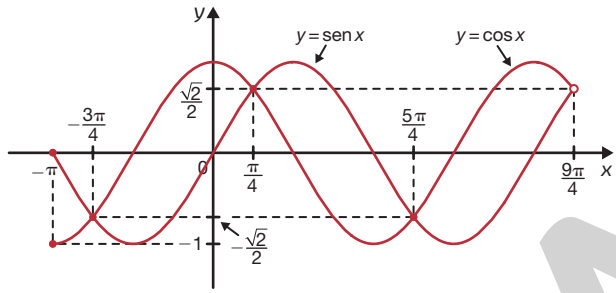
$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{9\pi}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} \leq k < 2$$

Logo, $k = -1$ ou $k = 0$ ou $k = 1$.

Portanto, no intervalo em questão, o gráfico do seno cruza o do cosseno nos pontos de coordenadas

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

c)



RONALDO INÁCIO

17. a) $Im(f) = [-1, 1]$ e $Im(g) = [-1, 5]$

A constante a desloca o gráfico duas unidades para cima, e a constante b amplia o gráfico verticalmente.

b) Observe que o período da função é π. Logo:

$$\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = 2$$

Uma possível resposta é $a = 2$, $b = 3$ e $c = 2$.

O gráfico de g, em comparação com o gráfico da função f, foi transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a direita, logo $d = \pi$.

Portanto, $g(x) = 2 + 3 \operatorname{sen}(2x + \pi)$.

18. a) $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 \leq -2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \leq 3 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 5$

Portanto, a diferença é $\underbrace{4}_{5-1}$.

b) $-1 \leq \cos(3x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}\cos(3x) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{5}{4} \leq -1 + \frac{1}{4}\cos(3x) \leq -\frac{3}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{5}{4} \leq g(x) \leq -\frac{3}{4}$

Portanto, a diferença é $\underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)}$.

c) $-1 \leq \operatorname{sen}(2x + \pi) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\operatorname{sen}(2x + \pi) \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \leq -\operatorname{sen}(2x + \pi) \leq 4 \Rightarrow 2 \leq h(x) \leq 4$

Portanto, a diferença é $\underbrace{2}_{4-2}$.

d) $-1 \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3 \leq 1 + 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 5 \Rightarrow -3 \leq n(x) \leq 5$

Portanto, a diferença é $\underbrace{8}_{5-(-3)}$.

19. a) De acordo com a fórmula da distância percorrida pela bola após ser lançada pelo jogador, temos:

MODERNA

$R = \frac{v_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2\varphi_0 \Rightarrow 40 = \frac{20^2}{10} \cdot \operatorname{sen} 2\varphi_0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2\varphi_0 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

Portanto, o ângulo é 45°.

b) Não, pois a distância percorrida é diretamente proporcional a $\operatorname{sen} 2\varphi_0$ e a tacada já foi realizada com $\varphi = 45°$.

20. a) Note que a função h é do tipo trigonométrica. Desse modo, $Im(h) = [-m, m]$. Como a diferença entre a maré alta e a maré baixa, em casos extremos, chega a 16 m, segue que:

$b - (-b) = 16 \Rightarrow 2b = 16 \Rightarrow b = 8$

Como a altura da maré se repete a cada 12,4 horas, o período da função h é 12,4.

Logo:

$$|c| = 2\frac{\pi}{\underbrace{\frac{62}{5}}_{12,4}} \Rightarrow |c| = \frac{5\pi}{31}$$

Portanto, $h(t) = 8 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$.

b) Altura máxima: 8 m; altura mínima: −8 m.

21. a) As funções g e h.

Espera-se que os alunos digam que, se considerarmos as funções na forma $m(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, os coeficientes b em g e em h são opostos e os demais coeficientes são iguais, ou seja, $g(x) = -h(x)$.

b) $Im(f) = [-1, 1]$, $Im(g) = [-2, 2]$ e $Im(h) = [-2, 2]$.

c) Observe que as funções possuem pontos em comum nos arcos côngruos de $\frac{\pi}{2}$.

Assim, $f(x) = g(x) = h(x)$ para $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

22. a) Calculando $C(h)$ para $h = 18$, temos:

$C(18) = 20 - 15 \cdot \cos\left(\frac{18\pi}{12}\right) \Rightarrow C(18) = 20$

Portanto, às 18 horas havia 20 clientes.

b) Como $a = 20$ e $b = -15$, temos: $Im(C) = [5,35]$.

Logo, a quantidade de clientes é maior para $C(h) = 35$.

Com isso, temos:

$20 - 15\cos\left(\frac{h\pi}{12}\right) = 35 \Rightarrow \cos\left(\frac{h\pi}{12}\right) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{h\pi}{12} = \pi + 2k\pi \Rightarrow h = 12 + 24k,$

sendo k um número inteiro.

Como $0 < h \leq 24$, então a quantidade média de clientes é maior às 12 horas, e nesse horário há 35 clientes.

c) A quantidade de clientes é menor para $C(h) = 5$.

Assim:

$20 - 15\cos\left(\frac{h\pi}{12}\right) = 5 \Rightarrow \cos\left(\frac{h\pi}{12}\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{h\pi}{12} = 2k\pi \Rightarrow h = 24k,$

sendo k um número inteiro.

Como $0 < h \leq 24$, então a quantidade média de clientes é menor às 24 horas, e nesse horário há 5 clientes.

23. alternativa **d**

O período da função é 5. Assim:

$p = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow 5 = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{2\pi}{5}$

Como a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 ℓ/s, segue que $b = 0{,}6$.

Logo, $V(t) = 0{,}6 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

24. a) Substituindo os dados do problema na equação, temos:

$T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}5 \cdot \cos\theta}{10}} \Rightarrow T(\theta) = 2\pi\frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow T(\theta) = \pi\sqrt{\cos\theta}$

Portanto, a lei de formação da função que descreve esse momento é $T(\theta) = \pi\sqrt{\cos\theta}$.

b) Como θ é o ângulo que a corda faz com a vertical, então $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Portanto, $D(T) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

25. a) Como $b = 3$, o valor máximo de m é 3.

Assim:

$m(t) = 3 \Rightarrow 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \Rightarrow t = \frac{1}{2} + 4k,$

sendo k um número inteiro não negativo.

b) Fazendo $m(t) = 0$, segue que:

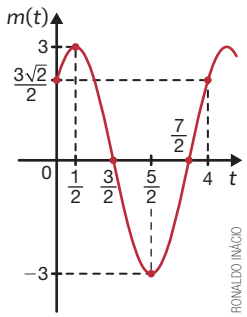
$3\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow t = \frac{3}{2} + 2k,$

sendo k um número inteiro não negativo.

c) Para esboçar o gráfico de m, atribuímos alguns valores para t.

t	$m(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$
0	$m(0) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$	$m\left(\frac{1}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 3$
$\frac{3}{2}$	$m\left(\frac{3}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
$\frac{5}{2}$	$m\left(\frac{5}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -3$
$\frac{7}{2}$	$m\left(\frac{7}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{7}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
4	$m(4) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 4 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$



26. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

MODERNA

7 Fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas

1. a) $\operatorname{sen}15° = \operatorname{sen}(45° - 30°) =$

$= \operatorname{sen}45° \cdot \cos 30° - \operatorname{sen}30° \cdot \cos 45° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° + \operatorname{sen}45° \cdot \operatorname{sen}30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

c) $\operatorname{sen}255° = \operatorname{sen}(270° - 15°) =$

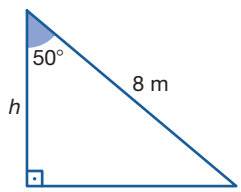
$= \operatorname{sen}270° \cdot \cos 15° - \operatorname{sen}15° \cdot \cos 270° =$

$= (-1) \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cdot 0 = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

d) $\operatorname{tg}75° = \operatorname{tg}(30° + 45°) =$

$= \frac{\operatorname{tg}30° + \operatorname{tg}45°}{1 - \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = 2 + \sqrt{3}$

2. Indicando por h a altura atingida pelo topo da escada na parede, podemos representar a situação da seguinte maneira.



RONALDO INÁCIO

De acordo com a imagem, temos:

$$\cos 50° = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 8 \cdot \cos 50°$$

Agora, calculamos o cosseno do ângulo cuja medida é 50°.

$$\cos 50° = \cos(20° + 30°) =$$
$$= \cos 20° \cdot \cos 30° - \operatorname{sen}20° \cdot \operatorname{sen}30° =$$
$$= 0{,}9397 \cdot 0{,}866 - 0{,}342 \cdot 0{,}5 = 0{,}6428$$

Em seguida, determinamos a altura atingida pelo topo da escada.

$$h = 8 \cdot \cos 50° \Rightarrow h = 8 \cdot 0{,}6428 \Rightarrow h \simeq 5{,}14$$

Neste caso, o topo da escada atingiu aproximadamente 5,14 m. Portanto, o vidraceiro não posicionou a escada corretamente.

3. alternativa b

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \operatorname{sen}x \cdot \cos\frac{\pi}{2} =$

$= 1 \cdot \cos x + \operatorname{sen}x \cdot 0 = \cos x$

4. $\operatorname{sen}20° = \operatorname{sen}(10° + 10°) =$

$= \operatorname{sen}10° \cdot \cos 10° + \cos 10° \cdot \operatorname{sen}10° \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}20° = 0{,}171 + 0{,}171 \Rightarrow \operatorname{sen}20° = 0{,}342$

Sendo h a altura da entrada em relação ao nível da calçada, temos:

$$\operatorname{sen}20° = \frac{h}{19} \Rightarrow 0{,}342 \cdot 1{,}9 = h \Rightarrow h = 0{,}6498$$

Portanto, a altura da entrada em relação ao nível da calçada é de aproximadamente 0,65 metros.

5. Inicialmente, calculamos:

- $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

- $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

Assim:

$$\cos\frac{5\pi}{12} + \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

6. Nessa tarefa, verifique se os alunos compreendem que o ângulo externo 105º é o suplementar do ângulo interno do triângulo retângulo.

$$\cos \underbrace{75°}_{180° - 105°} = \frac{12{,}2}{x} \Rightarrow x = \frac{12{,}2}{\cos 75°}$$

Para calcular o cos 75°, fazendo a adição de arco, temos:

$$\cos 75° = \cos(30° + 45°) =$$
$$= \cos 30° \cdot \cos 45° - \operatorname{sen}30° \cdot \operatorname{sen}45° =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}245$$

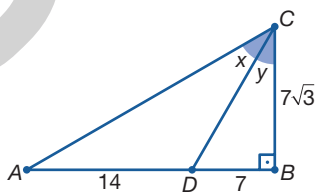
Assim, $x = \frac{12{,}2}{\cos 75°} \Rightarrow x = \frac{12{,}2}{0{,}245} \Rightarrow x \simeq 49{,}8$.

Portanto, o navio percorreu aproximadamente $\underbrace{62}_{12{,}2 + 49{,}8}$ km.

7. Utilizando a fórmula do arco duplo para o seno, temos:

$$\operatorname{sen}2y = 2 \cdot \operatorname{sen}y \cdot \cos y = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

8. Indicando o ângulo $B\hat{C}D$ por y, temos:



RONALDO INÁCIO

Sendo assim:

- $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{14 + 7}{7\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
- $\operatorname{tg}y = \frac{7}{7\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Consequentemente:

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg}(x + y) \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\operatorname{tg}x + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \operatorname{tg}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3\operatorname{tg}x + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}\operatorname{tg}x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3} - 3\operatorname{tg}x = 3\operatorname{tg}x + \sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3} = 6\operatorname{tg}x \Rightarrow \operatorname{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $0° < x < 90°$, temos $x = 30°$.

9. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{4}{5}$

Como α está no 3º quadrante, então:

MODERNA

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$$

10. a) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3}$

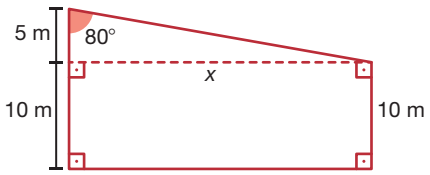
Como $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então:

$$\cos\theta = -\frac{1}{3}$$

b) $\operatorname{cossec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. Vamos decompor o terreno em duas figuras: um triângulo retângulo e um retângulo, conforme apresentado a seguir.



RONALDO INÁCIO

Assim, de acordo com o triângulo retângulo formado na figura, temos:

$$\operatorname{tg}80° = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5 \cdot \operatorname{tg}80°$$

Para determinar o valor de x, inicialmente, determinamos $\operatorname{tg}80°$.

$$\operatorname{tg}80° = \frac{\operatorname{sen}80°}{\underbrace{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 80°}}_{\cos 80°}} \Rightarrow \operatorname{tg}80° = \frac{0{,}985}{\sqrt{1 - 0{,}985^2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}80° \simeq 5{,}71$

Assim:

$$x = 5 \cdot \operatorname{tg}80° \Rightarrow x = 5 \cdot 5{,}71 \Rightarrow x \simeq 28{,}6$$

Agora, indicando por y o comprimento da hipotenusa do triângulo, segue que:

$$\cos 80° = \frac{5}{y} \Rightarrow 0{,}173 = \frac{5}{y} \Rightarrow y \simeq 28{,}9$$

Por fim, calculamos o perímetro do terreno.

$$15 + 28{,}9 + 10 + 28{,}6 = 82{,}5$$

Portanto, o perímetro aproximado do terreno é 82,5 m.

12. $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= 1 + \operatorname{sen}2\alpha = 1 + \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{13\pi}{12}\right) = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

Temos:

$$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$$

Assim, segue que:

$(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{6}\right) = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Portanto, $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{3}{2}$.

13. a) Inicialmente, calculamos o seno do ângulo cuja medida é $\frac{3\pi}{4}$.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim:

$$\operatorname{cossec}\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

b) Inicialmente, calculamos o cosseno do ângulo cuja medida é 195°.

$$\cos 195° = -\cos(195° - 180°) =$$

$$= -\cos 15° = -\cos(45° - 30°) =$$

$$= -(\cos 45° \cdot \cos 30° + \operatorname{sen}45° \cdot \operatorname{sen}30°) =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Assim:

$$\sec 195° = \frac{1}{\cos 195°} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2} - \sqrt{6}$$

c) $\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{3} = \frac{\cos\frac{5\pi}{3}}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}}$

- $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Assim:

$$\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{3} = \frac{\cos\frac{5\pi}{3}}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

14. alternativa a

$$\underbrace{(\operatorname{cotg}^2 x + 1)}_{\operatorname{cossec}^2 x}\underbrace{(1 - \cos^2 x)}_{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cossec}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x = 1$$

15. $\cos^4\beta - \operatorname{sen}^4\beta = \underbrace{(\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta)}_{1}\underbrace{(\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta)}_{\cos 2\beta} =$

$= \cos 2\beta$

16. alternativa b

$$\sec x = -2 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

Assim:

$$\operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

17. Indicando por h a altura do prédio, segue que:

$$\operatorname{tg}42° = \frac{h - 1{,}8}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \operatorname{tg}42° + 1{,}8$$

Calculando $\operatorname{tg}42°$, temos:

$$\operatorname{tg}42° = \frac{\operatorname{sen}42°}{\underbrace{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 42°}}_{\cos 42°}} = \frac{0{,}67}{\sqrt{1 - 0{,}67^2}} \simeq 0{,}9$$

Assim:

$$h = 10 \cdot \operatorname{tg}42° + 1{,}8 \Rightarrow h = 10 \cdot 0{,}9 + 1{,}8 \Rightarrow h = 10{,}8$$

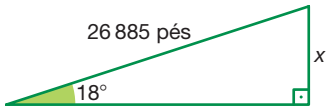
Portanto, a altura do prédio é aproximadamente 10,8 m.

18. a) Inicialmente, convertemos 8 200 m em pés. Como 30,5 cm = 0,305 m, fazemos:

MODERNA

$$\frac{8\,200}{0{,}305} \simeq 26\,885$$

Agora, de acordo com a medida obtida e as informações expostas no problema, podemos construir o seguinte esquema.



De acordo com o esquema, temos:

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{x}{26\,885} \Rightarrow x = 26\,885 \cdot \operatorname{sen} 18°$$

Calculando sen 18°, temos:

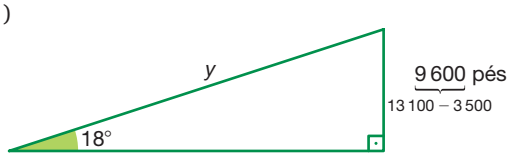
$$\operatorname{sen} 18° = \frac{1}{\operatorname{cossec} 18°} = \frac{1}{3{,}236} \simeq 0{,}309$$

Consequentemente:

$x = 26\,885 \cdot \operatorname{sen} 18° \Rightarrow x = 26\,885 \cdot 0{,}309 \Rightarrow x \simeq 8\,308$

Portanto, a altura aproximada do avião é $\underbrace{11\,808}_{8\,308 + 3\,500}$ pés.

b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{9\,600}{y} \Rightarrow y = \frac{9\,600}{\operatorname{sen} 18°}$$

Conforme calculamos no item **a**, sen 18° = 0,309.

Assim:

$$y = \frac{9\,600}{\operatorname{sen} 18°} \Rightarrow y = \frac{9\,600}{0{,}309} \Rightarrow y \simeq 31\,068$$

Portanto, o avião deve percorrer cerca de 31 068 pés, ou seja, aproximadamente 9 476 m.

19. a) Para k inteiro, temos:

$$x - \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Sabemos que o seno é negativo no 3º e no 4º quadrante. Desse modo, devemos analisar dois casos. Para k inteiro, temos:

- $x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$
- $x + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) Note que:

$$\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = \pm\frac{1}{2}$$

Na primeira volta positiva, temos:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Assim, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

$$2x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Note que:

$$\cos x - \underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{1 - \cos^2 x} = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

Tomando $y = \cos x$, obtemos:

$$y^2 + y - 2 = 0 \begin{cases} y_1 = -2 \text{ (não convém)} \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Assim, para k inteiro, temos:

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

20. a) Substituindo $t = 2$ e $t = 16$ em $h(t)$, obtemos:

- $h(t) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right) \Rightarrow h(2) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31} \cdot 2\right) \Rightarrow$
  $\Rightarrow h(2) \simeq 2{,}55$
- $h(t) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right) \Rightarrow h(16) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31} \cdot 16\right) \Rightarrow$
  $\Rightarrow h(16) \simeq 2{,}9$

Portanto, a altura da maré às 2 h é aproximadamente 2,55 m e às 16 h, aproximadamente 2,90 m.

b) Para determinar o tempo que corresponde a essa altura da maré, fazemos:

$$h(t) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right) \Rightarrow 1{,}5 = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{31}t = \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{menor valor}} \Rightarrow t = 1{,}0\overline{3}$$

Calculando o tempo em horas e minutos, temos:

$$1{,}0\overline{3}\text{ h} \simeq 1\text{ h } 2\text{ min}$$

Portanto, o menor intervalo de tempo é aproximadamente 1 h 2 min.

c) Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

21. De acordo com a distância percorrida pela bola, segue que:

$$d = \frac{v^2}{10} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \Rightarrow 16{,}2 = \frac{18^2}{10} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \Rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{1}{2}$$

Como $0 < \alpha < 90°$, temos:

$$2\alpha = 30° \Rightarrow \alpha = 15°$$

Portanto, o ângulo α formado pela trajetória da bola com a horizontal é 15°.

22. a) De acordo com o gráfico, o período da função é 0,8. Assim:

$$p = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow 0{,}8 = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{5\pi}{2}$$

Além disso, como $f(t) = 70$ para $t = 0$, a lei de formação da função cujo gráfico mais se aproxima dessa curva é $f(t) = 95 - 25 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$, pois $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

MODERNA

b) De acordo com o item a, a pressão sanguínea desse indivíduo no instante inicial é 70 mmHg.

c) Para resolver esse item, devemos resolver a equação $f(t) = 120$. Para isso, fazemos:

$$120 = 95 - 25 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{2}t = \pi \Rightarrow t = 0{,}4$$

Portanto, após 0,4 s a pressão sanguínea desse indivíduo será igual a 120 mmHg.

23. Para resolver essa tarefa, os alunos devem observar que o cosseno tem valor negativo no 2º e no 3º quadrante. Além disso, $\cos x \Rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

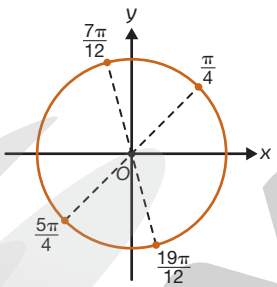
Inicialmente, resolvemos a equação:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Na 1ª volta positiva, temos $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ e $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

- $2x + \frac{\pi}{6} = \underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\pi - \frac{\pi}{3}} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
- $2x + \frac{\pi}{6} = \underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{\pi + \frac{\pi}{3}} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$

Por fim, representamos, na primeira volta positiva, as soluções no ciclo trigonométrico.

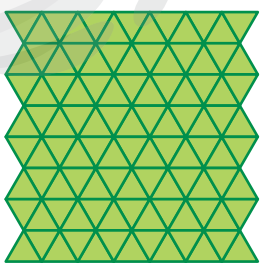


RONALDO INÁCIO

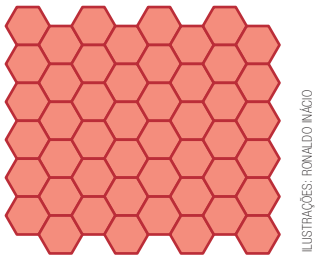
8 Ladrilhamento

1. O ladrilhamento B, pois satisfaz as seguintes condições: as peças são polígonos regulares; a interseção de duas, se existir, é um lado ou um vértice; a distribuição de peças ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento é sempre a mesma.

2. a) Possível resposta:



b) Possível resposta:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

3. a) Considere quatro polígonos regulares de n_1, n_2, n_3 e n_4 lados, respectivamente. Suponha que seja possível ladrilhar o plano utilizando esses polígonos. Assim:

$$\frac{(n_1 - 2)\cdot 180°}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)\cdot 180°}{n_2} + \frac{(n_3 - 2)\cdot 180°}{n_3} + \frac{(n_4 - 2)\cdot 180°}{n_4} = 360°$$

Simplificando essa equação, obtemos:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

Suponha que $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4$. Assim:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{4}{n_1} \Rightarrow 3 \leqslant n_1 \leqslant 4$$

Se $n_1 = 3$, então:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant \frac{3}{n_2} \Rightarrow 3 \leqslant n_2 \leqslant 4$$

Desse modo, analisaremos os seguintes casos:

- $n_1 = n_2 = 3$

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{2}{n_3} \Rightarrow 4 \leqslant n_3 \leqslant 6$$

Além disso:

$$\frac{1}{n_4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n_3} = \frac{n_3 - 3}{3n_3}$$

Diante disso, temos: $n_3 = 4$, então $n_4 = 12$; $n_3 = 6$, então $n_4 = 6$.

- $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{5}{12} \leqslant \frac{2}{n_3} \Rightarrow n_3 = 4 \text{ e } n_4 = 6$$

Se $n_1 = 4$, então:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \leqslant \frac{3}{n_2} \Rightarrow 3 \leqslant n_2 \leqslant 4$$

Já analisamos o caso $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$. Agora, vamos analisar o que ocorre quando:

- $n_1 = n_2 = 4$

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{n_3} \Rightarrow n_3 = n_4 = 4$$

Sabendo que a posição dos polígonos importa, organizamos, no quadro abaixo, as possíveis combinações com quatro polígonos.

n_1	n_2	n_3	n_4
3	3	4	12
3	3	6	6
3	4	3	12
3	6	3	6
3	4	4	6
3	4	6	4
4	4	4	4

Como queremos apenas as combinações de quatro polígonos regulares de dois ou mais tipos ao redor de

MODERNA

um vértice comum, então as outras quatro soluções são $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$ e $(3, 4, 4, 6)$.

b) No item **a**, obtemos as possíveis combinações com quatro polígonos. Agora, vamos determinar quais delas ladrilham o plano. Com as soluções $(3, 3, 4, 12)$, $(3, 4, 3, 12)$, $(3, 4, 4, 6)$ e $(3, 3, 6, 6)$ não é possível obter ladrilhamentos semirregulares, pois a distribuição de peças ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento não é sempre a mesma. Portanto, os ladrilhamentos semirregulares com quatro polígonos regulares em cada vértice são $(3, 6, 3, 6)$ e $(3, 4, 6, 4)$.

4. **a)** A afirmação é falsa, pois é impossível obter ladrilhamentos regulares do plano utilizando octógonos regulares.

b) A afirmação é falsa, pois se indicarmos por α_1 e por α_2, respectivamente, a medida do ângulo interno do octógono e do quadrado, temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_2 = \frac{(8 - 2) \cdot 180°}{8} + 3 \cdot 90° =$$

$$= 405° > 360°$$

c) Verdadeira, pois, como demonstrado na teoria, a combinação (4, 8, 8) ladrilha o plano.

5. Considere cinco polígonos regulares de, respectivamente, n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 lados. Suponha que $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$, assim:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{5}{n_1} \Rightarrow n_1 = 3$$

Consequentemente:

- $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{7}{6} \leq \frac{4}{n_2} \Rightarrow n_2 = 3$
- $\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{5}{6} \leq \frac{3}{n_3} \Rightarrow n_3 = 3$
- $\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{n_4} \Rightarrow 3 \leq n_4 \leq 4$

Além disso:

$$\frac{1}{n_4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n_5} \Rightarrow \frac{1}{n_4} = \frac{n_5 - 2}{2n_5}$$

Logo, temos: $n_4 = 3$, então $n_5 = 6$; $n_4 = 4$, então $n_5 = 4$.

Sabendo que a posição dos polígonos importa, organizamos, no quadro abaixo, as possíveis combinações com cinco polígonos.

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4
3	3	4	3	4

Portanto, é possível utilizar o triângulo equilátero, o hexágono regular e o quadrado.

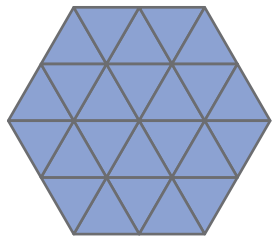
6. Até o momento, analisamos as possíveis combinações de três, quatro e cinco polígonos posicionados ao redor de um vértice. Agora, vamos analisar o caso em que seis polígonos regulares são posicionados ao redor de um vértice.

Considere seis polígonos regulares de n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 e n_6 lados, respectivamente. Suponha que $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5 \leq n_6$. Assim:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2$$

Efetuando os cálculos, obtemos $n_i = 3$, para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Logo, a única composição com 6 polígonos é $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Portanto, de acordo com as verificações feitas até o momento, os 11 ladrilhamentos bem-comportados do plano são: $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4, 4)$, $(6, 6, 6)$, $(3, 12, 12)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ e $(3, 3, 4, 3, 4)$.

Por fim, construímos esses ladrilhamentos.



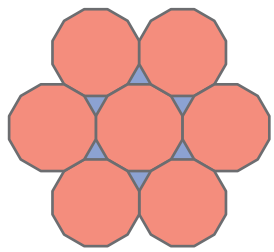
$(3, 3, 3, 3, 3, 3)$



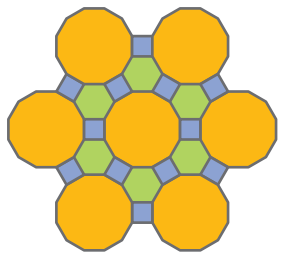
$(4, 4, 4, 4)$



$(6, 6, 6)$



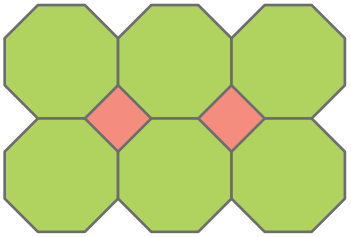
$(3, 12, 12)$



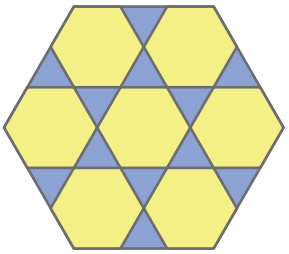
$(4, 6, 12)$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

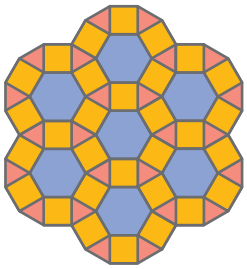
MODERNA



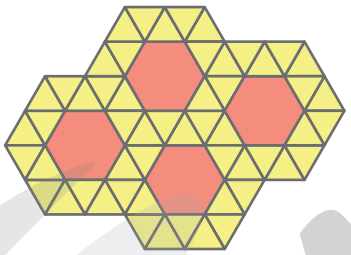
(4, 8, 8)



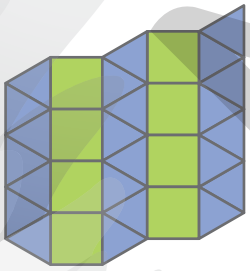
(3, 6, 3, 6)



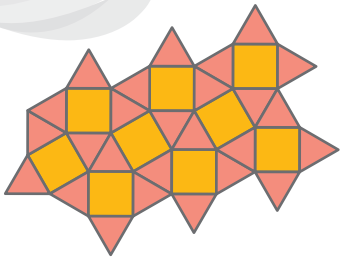
(3, 4, 6, 4)



(3, 3, 3, 3, 6)



(3, 3, 3, 4, 4)



(3, 3, 4, 3, 4)

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

9 Área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango

1. a) Primeiro, vamos calcular o comprimento da diagonal menor (d) do losango. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 4^2$$

$$\frac{d^2}{4} = 20 - 16$$

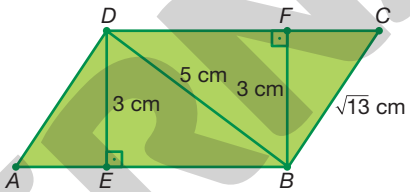
$$d^2 = 16$$

Como $d > 0$, temos $d = 4$. Assim, a área A do losango é:

$$A = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$

Portanto, a área do losango é 16 cm².

b) A fim de auxiliar na resolução dessa tarefa, vamos decompor o paralelogramo em triângulos, conforme apresentado a seguir.



RONALDO INÁCIO

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BDE, temos:

$$5^2 = 3^2 + (BE)^2$$

$$(BE)^2 = 25 - 9$$

$$(BE)^2 = 16$$

Como $BE > 0$, então $BE = 4$. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCF, temos:

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 3^2 + (FC)^2$$

$$(FC)^2 = 13 - 9$$

$$(FC)^2 = 4$$

Como $FC > 0$, então $FC = 2$.
Assim, a área A do paralelogramo é:

$$A = DC \cdot DE = (DF + FC) \cdot DE = 6 \cdot 3 = 18$$

Portanto, a área do paralelogramo é 18 cm².

2. a) Inicialmente, calculamos as seguintes áreas:

- área A da quadra.

$$A = 16\,\text{m} \cdot 27\,\text{m} = 432\,\text{m}^2$$

- área A_1 da parte amarela.

$$A_1 = 16\,\text{m} \cdot 9\,\text{m} = 144\,\text{m}^2$$

- área A_2 da parte azul, que é dada pela diferença entre a área da quadra e a área da parte amarela.

$$A_2 = A - A_1 = 432\,\text{m}^2 - 144\,\text{m}^2 = 288\,\text{m}^2$$

Na sequência, calculamos quantos litros de cada tinta, no mínimo, serão necessários para pintar a quadra.

- Com 1 litro de tinta azul é possível pintar, no máximo, 18 m². Assim:

$$\frac{288}{18} = 16$$

MODERNA

- Com 1 litro de tinta amarela é possível pintar, no máximo, 16 m^2. Desse modo:

$$\frac{144}{16} = 9$$

Portanto, serão necessários, no mínimo, 16 litros de tinta azul e 9 litros de tinta amarela.

b) Inicialmente, determinamos a quantidade de latas de cada uma das tintas necessária para pintar a quadra. Para isso, dividimos a quantidade mínima necessária de cada tinta pela capacidade da lata comercializada, que é 3,6 litros.

- Tinta azul: $\frac{16}{3,6} \simeq 4,44$.

Assim, são necessárias, no mínimo, 5 latas de tinta azul.

- Tinta amarela: $\frac{9}{3,6} \simeq 2,5$.

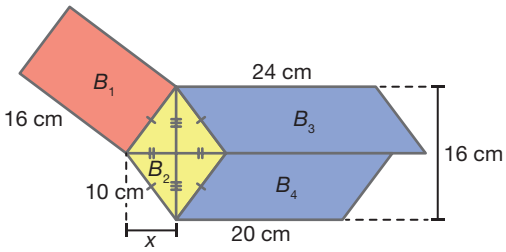
Logo, são necessárias, no mínimo, 3 latas de tinta azul.

Cada lata de tinta custa R$ 29,50, assim a quantia, mínima, em reais que será gasta com a compra das tintas é:

$$29,5 \cdot (5 + 3) = 236$$

Portanto, com a compra das tintas nessa etapa, serão gastos, no mínimo, R$ 236,00.

3.



RONALDO INÁCIO

Indicando por B_1, B_2, B_3 e B_4, respectivamente, a área do retângulo em vermelho, a área do losango, a área do paralelogramo de base 24 cm e a área do paralelogramo de base 20 cm, temos:

- $B_1 = 16 \cdot 10 = 160$

Logo, a área do retângulo é 160 cm^2.

- $B_2 = \frac{16 \cdot 2x}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$10^2 = 8^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 36$$

Como $x > 0$, então $x = 6$. Desse modo:

$$B_2 = \frac{16 \cdot 2x}{2} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 6}{2} = 96$$

Assim, a área do losango é 96 cm^2.

- $B_3 = 24 \cdot 8 = 192$

Logo, a área do paralelogramo de base 24 cm é 192 cm^2.

- $B_4 = 20 \cdot 8 = 160$

Logo, a área do paralelogramo de base 20 cm é 160 cm^2.

Por fim, calculamos a área F da figura, que é dada pela soma das áreas obtidas.

$F = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 160 + 96 + 192 + 160 = 608$

Portanto, a área da figura é 608 cm^2.

4. a) $21^2 + 21 \cdot 13 = 714$

Portanto, á área da figura obtida ao justapor o quadrado que corresponde ao 8º termo, na sequência de Finonacci, é 714 m^2.

b) $34^2 + 34 \cdot 21 = 1\,870$

Portanto, á área da figura obtida ao justapor o quadrado que corresponde ao 9º termo, na sequência de Fibonacci, é 1 870 m^2.

5. a) Para determinar a área Q desmatada da Amazônia Legal nesse período, fazemos:

$Q = 27\,772 + 19\,014 + 14\,286 + 11\,651 + 12\,911 + 7\,464 +$
$+ 7\,000 + 6\,418 + 4\,571 + 5\,891 + 5\,012 + 6\,207 +$
$+ 7\,893 + 6\,947 + 7\,536$

$Q = 150\,573$

Portanto, nesse período foram desmatados 150 573 km^2.

b) Inicialmente, calculamos a área A, em metros, de um campo de futebol.

$$A = 68 \cdot 105 = 7\,140$$

Assim, um campo de futebol tem 7 140 m^2 de área ou 0,00714 km^2. Logo:

$$\frac{\overbrace{150\,573}^{\text{área desmatada da Amazônia Legal no período 2004-2018}}}{\underbrace{0,00714}_{\text{área de um campo de futebol}}} \simeq 21\,088\,655$$

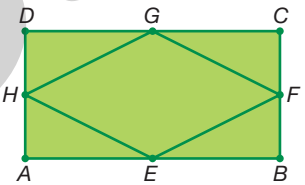
Portanto, o desmatamento nesse período corresponde a, aproximadamente, 21 088 655 campos de futebol.

6. Um paralelogramo em que todos os ângulos são retos e todos os lados têm a mesma medida de comprimento é, na verdade, um quadrado. Assim, a área A desse paralelogramo é:

$$A = (12)^2 = 144$$

Portanto, a área desse paralelogramo é 144 cm^2.

7. Consideremos o losango $EFGH$ formado pelos pontos médios do retângulo $ABCD$.



RONALDO INÁCIO

Observe que o comprimento da diagonal maior e o da diagonal menor do losango $EFGH$ são iguais ao comprimento dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do retângulo, respectivamente. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$\left(6\sqrt{5}\right)^2 = \underbrace{(AB)^2}_{2 \cdot BC} (BC)^2$$

$$5(BC)^2 = 180$$

$$(BC)^2 = \frac{180}{5}$$

$$(BC)^2 = 36$$

Como $BC > 0$, então $BC = 6$. Além disso, $AB = 2 \cdot BC = 2 \cdot 6 = 12$. Assim, a área A do retângulo é:

$$A = \frac{FH \cdot EG}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36$$

Portanto, a área do losango $EFGH$ é 36 cm^2.

8. a) $A = 0,5 \cdot 12 + 3 - 1 = 8$

Portanto, a área da figura é aproximadamente 8 u.

MODERNA

b) $A = 0{,}5 \cdot 18 + 9 - 1 = 17$

Como a escala é de 1 cm para 72 km, fazemos:

$$17 \cdot 72^2 = 88\,128$$

Portanto, a área de Santa Catarina é aproximadamente 88 128 km². Resposta pessoal.

9. Espera-se que os alunos concluam, com auxílio de uma régua, que as dimensões do retângulo são 4 cm e 2,5 cm. Assim, a área A da região é:

$$A \simeq 4 \cdot 2{,}5 = 10$$

Portanto, a área do retângulo é aproximadamente 10 cm².

10. a) Espera-se que os alunos concluam, com o auxílio de uma régua, que as dimensões do retângulo são: 4,6 cm e 3,2 cm. Após obter essas medidas, calculamos a área do retângulo.

$$4{,}6 \cdot 3{,}2 = 14{,}72$$

Como 1 cm corresponde a 600 km, então 1 cm² corresponde a 360 000 km². Deste modo, a área A da Amazônia Legal é:

$$A \simeq 14{,}72 \cdot 360\,000 = 5\,299\,200$$

Portanto, a área da Amazônia Legal é aproximadamente 5 299 200 km².

b)

$$P = \frac{\overbrace{150\,573}^{\text{área desmatada da Amazônia Legal no período de 2004 a 2018}}}{\underbrace{5\,299\,200}_{\text{área aproximada da Amazônia Legal obtida no item a}}} \simeq 0{,}0284$$

Portanto, a área desmatada da Amazônia Legal nesse período corresponde a, aproximadamente, 2,84% de sua área total.

10 Área do triângulo e de polígonos regulares

1. a) Para calcular a área desse triângulo, utilizaremos a fórmula de Herão. Para isso, inicialmente, determinamos o semiperímetro p do triângulo.

$$p = \frac{20 + 16 + 18}{2} = 27$$

Em seguida, calculamos a área A do triângulo.

$$A = \sqrt{27(27 - 20)(27 - 16)(27 - 18)} = \sqrt{18\,711} \simeq 136{,}8$$

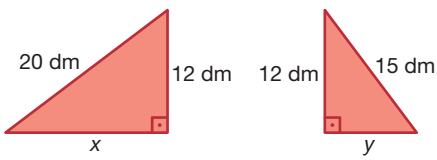
Portanto, a área desse triângulo é, aproximadamente, 136,8 dm².

b) Calculando a área A do triângulo, temos:

$$A = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$$

Portanto, a área desse triângulo é 96 dm².

c) Para auxiliar na resolução dessa tarefa, vamos decompor o triângulo em dois outros triângulos.



RONALDO INÁCIO

Agora, determinamos o valor de x e de y. Para isso, aplicamos o Teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos.

$$20^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 256$$

Como $x > 0$, então $x = 16$ dm.

$$15^2 = 12^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 81$$

Como $y > 0$, então $y = 9$ dm. Por fim, calculamos a área A do triângulo inicial.

$$A = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150$$

Portanto, a área do triângulo é 150 dm².

2. Indicando o semiperímetro do triângulo por p e sua área por A, temos:

a) $p = \frac{5 + 7 + 4}{2} = 8$

$A = \sqrt{8(8 - 5)(8 - 7)(8 - 4)} = 4\sqrt{6}$

Portanto, a área do triângulo é $4\sqrt{6}$ m².

b) $p = \frac{12 + 15 + 9}{2} = 18$

$A = \sqrt{18(18 - 12)(18 - 15)(18 - 9)} =$

$= \sqrt{2\,916} = 54$

Portanto, a área do triângulo é 54 dm².

c) $p = \frac{2 + 3 + 4}{2} = \frac{9}{2}$

$A = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2} - 2\right)\left(\frac{9}{2} - 3\right)\left(\frac{9}{2} - 4\right)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

Portanto, a área do triângulo é $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ km².

d) $p = \frac{14 + 16 + 10}{2} = 20$

$A = \sqrt{20(20 - 14)(20 - 16)(20 - 10)} = \sqrt{4\,800} =$

$= 40\sqrt{3}$

Portanto, a área do triângulo é $40\sqrt{3}$ cm².

3. Inicialmente, determinamos o comprimento desconhecido do cateto. Para isso, vamos utilizar o Teorema de Pitágoras.

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5$$

Como $c > 0$, então $c = \sqrt{5}$ cm. Agora, calculamos a área A do triângulo.

$$A = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Portanto, a área A do triângulo é $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm².

4. a) $A_{ocupada} = 8 \cdot 10{,}6 = 84{,}8$

Portanto, a área da superfície ocupada é 84,8 m².

b) $A_{parede} = 2\left(4 \cdot 18{,}6 + \frac{2{,}5 \cdot 10{,}6}{2}\right) - 8 = 167{,}3$

Portanto, serão necessários, no mínimo, 167,3 m² de madeira para construir as paredes desse armazém.

MODERNA

5. Primeiro, vamos calcular o comprimento da base do triângulo retângulo *MBA*. Usando a lei dos senos, temos:

$$\frac{4\sqrt{3}}{\operatorname{sen}(60°)} = \frac{MB}{\operatorname{sen}(30°)} \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{MB}{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot MB = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MB = 4$$

Assim, $BC = CM + MB = 13 + 4 = 17$. Consequentemente, a área A do trapézio é:

$$A = \frac{(BC + AD) \cdot AM}{2} = \frac{(17 + 13) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}$$

Portanto, a área do trapézio *ABCD* é $60\sqrt{3}$ dm^2.

6. Verdadeira. Possível resposta: os triângulos *ABC* e *AFC* possuem a mesma área, pois têm base $\overline{AC}$ comum e altura com mesmo comprimento. O mesmo ocorre com os triângulos *AED* e *AGD*. Já o triângulo *ACD* é comum ao triângulo *AFG* e ao pentágono *ABCDE*. Dessa maneira, como o triângulo *AFG* e o pentágono *ABCDE* são formados por triângulos com áreas equivalentes, eles possuem a mesma área.

7. Indicando por a o comprimento do lado do triângulo, temos:

$$9\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2 = 36$$

Como $a > 0$, então $a = 6$ cm. Agora, calculamos o comprimento da altura h.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Portanto, o comprimento da altura desse triângulo é $3\sqrt{3}$ cm.

8. Indicando por u o comprimento do lado de um quadradinho da malha e por P a área do paralelogramo, temos:

$$P = 2u \cdot u \Rightarrow 10 = 2u^2 \Rightarrow u^2 = 5$$

Como $u > 0$, então $u = \sqrt{5}$ cm.

Calculando a área A do tangram, obtemos:

$$A = (4u)^2 \Rightarrow A = \left(4\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow A = 80$$

Como a figura é composta por todas as peças do tangram, sua área é 80 cm^2.

9. Podemos decompor o polígono *ABCDEFG* em dois triângulos retângulos (*AGH* e *BCD*), um retângulo (*ABDG*) e um trapézio (*DEFG*). Assim, calculamos a área de cada uma dessas figuras.

- Triângulos *AGH* e *BCD*.

  Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(AH)^2 = (AG)^2 + (HG)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AG)^2 = 4 \cdot 2 - 4 \Rightarrow (AG)^2 = 4$$

  Como $AG > 0$, então $AG = 2$ cm. Indicando por A_1 e A_2, respetivamente, a área dos triângulos *AGH* e *BCD*, segue que:

$$A_1 = A_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

  Logo, a área de cada um desses triângulos é 2 cm^2.

- Retângulo *ABDG*.

  Indicando por A_3 a área do retângulo *ABDG*, temos:

$$A_3 = 2 \cdot 2 = 4$$

  Assim, a área desse retângulo é 4 cm^2.

- Trapézio *DEFG*.

  Indicando por A_4 a área do trapézio *DEFG*, temos:

$$A_4 = \frac{(6 + 5) \cdot 2}{2} = 11$$

  Logo, a área desse trapézio é 11 cm^2.

Agora, determinamos a área do polígono *ABCDEFG*. Para isso, fazemos:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2 + 2 + 4 + 11 = 19$$

Portanto, a área do polígono *ABCDEFG* é 19 cm^2.

10. a) Podemos reconfigurar o polígono transladando o triângulo de lados $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{5}$ cm e 4 cm. Neste caso, obtemos um retângulo de dimensões 4 cm e 5 cm, cuja área, que indicaremos por A, sabemos calcular.

$$A = 4 \cdot 5 = 20$$

Portanto, a área do retângulo é 20 cm^2 e, consequentemente, a área do polígono é 20 cm^2.

b) Podemos decompor o polígono em um trapézio (T), um retângulo (R_1) e um triângulo (T_1). Assim, inicialmente, calculamos a área de cada uma dessas figuras.

- Trapézio T.

  O trapézio T tem base maior com 5 cm, base menor com 3 cm e altura com 4cm. Deste modo, a área A_T desse trapézio é:

$$A_T = \frac{(3 + 5) \cdot 4}{2} = 16$$

  Logo, a área desse trapézio é 16 cm^2.

- Retângulo R_1.

  Considere que R_1 é o retângulo de dimensões 2 cm e 6 cm. Deste modo, a área A_{R_1} desse retângulo é:

$$A_{R_1} = 6 \cdot 2 = 12$$

  Assim, a área desse retângulo é 12 cm^2.

- Triângulo T_1.

  O triângulo T_1 possui altura e base com 4 cm e 6 cm de comprimento, respectivamente. Desse modo, a área A_{T_1} desse triângulo é:

$$A_{T_1} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

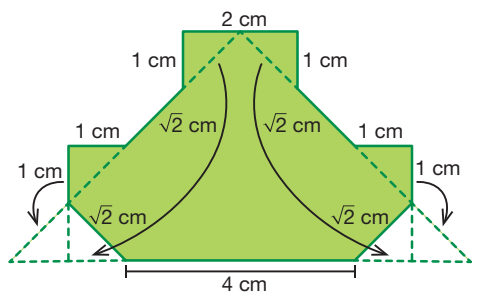
  Logo, a área desse triângulo é 12 cm^2.

Por fim, calculamos a área A do polígono. Para isso, fazemos:

$$A = A_T + A_{R_1} + A_{T_1} = 16 + 12 + 12 = 40$$

Portanto, a área do polígono é 40 cm^2.

c) Podemos reconfigurar o polígono transladando e rotacionando os triângulos indicados na imagem.



RONALDO INÁCIO

Neste caso, obtemos um triângulo de altura 4 cm e base 8 cm, cuja área, que indicaremos por A, sabemos calcular.

$$A = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$

Portanto, a área do triângulo é 16 cm^2 e, consequentemente, a área do polígono é 16 cm^2.

MODERNA

11. Calculando as áreas da arquibancada e da pista, em metros quadrados, temos:

$$\text{Área}_{\text{arquibancada}} = 2 \cdot \frac{(40 + 30) \cdot 4}{2} = 280$$

$$\text{Área}_{\text{pista}} = 30 \cdot 30 = 900$$

Assim, a área máxima disponível para o público, em metros quadrados, é:

$$\text{Área}_{\text{público}} = \text{Área}_{\text{arquibancada}} + \text{Área}_{\text{pista}} = 280 + 900 = 1\,180$$

Como a área máxima disponível para o público tem capacidade máxima de 6 pessoas por metro quadrado, segue que o público máximo é:

$$\text{Público}_{\text{max}} = \underbrace{6}_{\substack{\text{quantidade máxima de}\\ \text{pessoas por metro}\\ \text{quadrado}}} \cdot \underbrace{1\,180}_{\substack{\text{área total}\\ \text{disponível para o}\\ \text{público em metros}\\ \text{quadrados}}} = 7\,080$$

Portanto, esse evento poderá receber um público máximo de 7 080 pessoas.

12. Calculando a área total do terreno do agricultor, temos:

$$\text{Área}_{\text{total}} = \frac{100 \cdot 300}{2} = 15\,000$$

Como as partes do terreno possuem áreas iguais, temos:

$$\text{Área}_{\text{triângulo}} = \text{Área}_{\text{trapézio}} = \frac{\text{Área}_{\text{total}}}{2} = \frac{15\,000}{2} = 7\,500$$

Por outro lado:

$$\text{Área}_{\text{triângulo}} = \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow x \cdot y = 2 \cdot 7\,500 = 15\,000$$

$$\text{Área}_{\text{trapézio}} = \frac{(100 + x) \cdot (300 - y)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 7\,500 = 30\,000 + 300x - 100y - \underbrace{x \cdot y}_{15\,000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300x - 100y = 15\,000 - 30\,000 + 15\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300x = 100y \Rightarrow x = \frac{1}{3}y$$

Assim:

$$x \cdot y = 15\,000 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}y\right) \cdot y = 15\,000 \Rightarrow y^2 = 45\,000$$

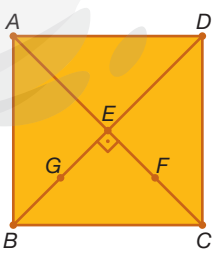
Como $y > 0$, temos $y = 150\sqrt{2}$.

Substituindo o valor de y em uma das igualdades anteriores, obtemos:

$$x = \frac{1}{3}y \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot 150\sqrt{2} \Rightarrow x = 50\sqrt{2}$$

Portanto, $x = 50\sqrt{2}$ m e $y = 150\sqrt{2}$ m.

13. Primeiro, fazemos uma possível representação da situação apresentada no enunciado.



RONALDO INÁCIO

Calculando o comprimento de cada lado do quadrado, temos:

$$\text{Área}_{\text{quadrado}} = 9 \Rightarrow (AB)^2 = 9 \Rightarrow AB = 3$$

Sabemos que $\overline{FG}$ é paralelo a $\overline{AB}$. Assim:

$$EF = EG = \frac{1}{3}AB = \frac{3}{3} = 1$$

Além disso, o triângulo EFG é retângulo. Então:

$$\text{Área}_{EFG} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0{,}5$$

Portanto, a área do triângulo EFG é 0,5 cm^2.

14. **a)** A necessidade de realizar medições de terrenos destinados à agricultura, sobretudo aqueles cujas demarcações eram perdidas nas cheias do rio Nilo.

b) O quadrilátero $ABCD$ foi decomposto em dois triângulos: ABC e ADC. O cálculo da área desses triângulos foi obtido por meio da fórmula de Herão:

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que a, b e c são os comprimentos dos lados, e $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

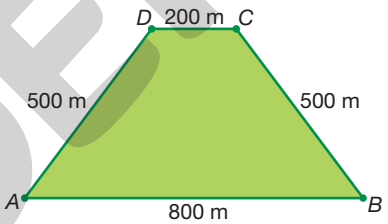
c) Temos:

$$\text{Erro} = \frac{\text{Área}_{\text{aproximada}} - \text{Área}_{\text{real}}}{\text{Área}_{\text{real}}} =$$

$$= \frac{52\,650 - 50\,677{,}56}{50\,677{,}56} \simeq 0{,}039$$

Portanto, o erro é, aproximadamente, 3,9%.

d) Considere o trapézio $ABCD$.



RONALDO INÁCIO

Usando o método de cubação, vamos aproximar a área desse trapézio pela área de um retângulo $A'B'C'D'$ com:

- $A'B' = \frac{200 + 800}{2} = 500$
- $B'C' = \frac{500 + 500}{2} = 500$

Logo:

$$\text{Área}_{A'B'C'D'} = (A'B') \cdot (B'C') = 500 \cdot 500 = 250\,000$$

Portanto, a área do trapézio é aproximadamente 250 000 m^2.

e) Resposta pessoal.

15. alternativa **e**

Vamos calcular as áreas das regiões destinadas ao plantio de flores (F_1) e de hortaliças (H_1) antes do remanejamento, ambas em metros quadrados.

$$\text{Área}_{F_1} = \frac{(20 + 25) \cdot 10}{2} = 225;\ \text{Área}_{H_1} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100$$

Em seguida, calculamos as áreas das regiões destinadas ao plantio de flores (F_2) e de hortaliças (H_2) depois do remanejamento, ambas em metros quadrados.

$$\text{Área}_{F_2} = 10 \cdot 10 = 100;\ \text{Área}_{H_2} = \frac{15 \cdot 30}{2} = 225$$

MODERNA

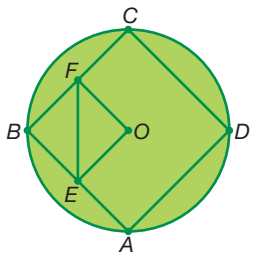
Logo, a área destinada ao plantio de flores diminuiu e a área destinada ao plantio de hortaliças aumentou. Sendo assim:

$$\frac{\text{Área}_{F_2} - \text{Área}_{F_1}}{\text{Área}_{F_1}} = \frac{100 - 225}{225} = -0,5\overline{5}$$

$$\frac{\text{Área}_{H_2} - \text{Área}_{H_1}}{\text{Área}_{H_1}} = \frac{225 - 100}{100} = 1,25$$

Portanto, de acordo com os resultados obtidos, a área destinada ao plantio de flores diminuiu em aproximadamente 55,56% e a área destinada ao plantio de hortaliças aumentou 125%.

16. Uma possível configuração da situação mostrada no enunciado é a seguinte.



RONALDO INÁCIO

Observe que o losango *ABCD* é de fato um quadrado. Calculando o comprimento do lado de *ABCD,* temos:

$$(BC)^2 = (BO)^2 + (OC)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (BC)^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow (BC)^2 = 8$$

Como $BC > 0$, então $BC = 2\sqrt{2}$.

Assim, $BE = BF = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Logo:

$$\text{Área}_{OEF} = \frac{\text{Área}_{BEOF}}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

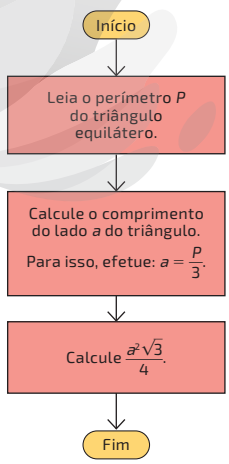
Portanto, a área do triângulo *OEF* é 1 cm².

17. Algoritmo:

Início

1. Leia o perímetro *P* do triângulo equilátero.
2. Calcule o comprimento do lado *a* do triângulo. Para isso, efetue: $a = \frac{P}{3}$.
3. Calcule $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Fim



18. alternativa **c**

Observe inicialmente que a lona é um trapézio *ABCD* cujo comprimento da base maior é igual ao comprimento da lateral do prédio mais alto. Já o comprimento da base menor é igual ao comprimento da lateral do prédio mais baixo. Assim, $AB = 28$ m e $CD = 20$ m. Para calcular área do trapézio *ABCD*, resta calcular sua altura (h). Como os dois prédios distam entre si 15 m e como a diferença entre suas alturas é 80 m − 60 m = 20 m, então, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$h^2 = (15)^2 + (20)^2 \Rightarrow h^2 = 225 + 400 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \sqrt{625}$$

Como $h > 0$, então $h = 25$. Logo:

$$\text{Área}_{ABCD} = \frac{(28 + 20) \cdot 25}{2} = 24 \cdot 25 = 600$$

Portanto, a área dessa lona é 600 m².

19. Pelo caso de semelhança **LAL**, os triângulos *APB* e *EPF* são semelhantes com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$, pois *E* e *F* são, respectivamente, pontos médios dos segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$. Assim:

$$EF = \frac{1}{2}AB \Rightarrow EF = \frac{1}{2} \cdot 10 \Rightarrow EF = 5$$

Do mesmo modo, os triângulos *CDP* e *GHP* são semelhantes com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$. Desse modo:

$$GH = \frac{1}{2}DC \Rightarrow GH = \frac{1}{2} \cdot 4 \Rightarrow GH = 2$$

Os pontos *E*, *H*, *G* e *F* são, respectivamente, pontos médios dos segmentos $\overline{AP}$, $\overline{DP}$, $\overline{CP}$ e $\overline{BP}$. Então, pelo caso de semelhança **LAL**, os triângulos *APD* e *EPH* são semelhantes com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$ e os triângulos *BPC* e *FPG* também são semelhantes com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$. Como o trapézio *ABCD* é isósceles, temos:

$$AD = BC = 2EH = 2GF \Rightarrow EH = GF = \frac{1}{2}AD$$

Agora, vamos calcular *AD* utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$(AD)^2 = 6^2 + \left(\frac{10 - 4}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AD)^2 = 36 + 9 \Rightarrow (AD)^2 = 45$$

Como $AD > 0$, então $AD = 3\sqrt{5}$. Consequentemente:

$$EH = GF = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Na sequência, calculamos a altura do trapézio *EFGH*, que indicaremos por *h*. Como o trapézio *EFGH* é isósceles, utilizando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(EH)^2 = h^2 + \left(\frac{5 - 2}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = h^2 \Rightarrow h^2 = 9$$

Como $h > 0$, então $h = 3$. Por fim, calculamos a área *A* do novo jardim. Para isso, fazemos:

$$A = \frac{(5 + 2) \cdot 3}{2} = 10,5$$

Portanto, a área do novo jardim é 10,5 m².

MODERNA

20. a) $S = \frac{90 \cdot 70 \cdot \operatorname{sen} 30°}{2} = \frac{6\,300 \cdot 0{,}500}{2} = 1\,575$

Portanto, a área do triângulo é 1 575 cm².

b) $S = \frac{85 \cdot 40 \cdot \operatorname{sen} 118°}{2} \simeq \frac{3\,400 \cdot 0{,}883}{2} = 1\,501{,}1$

Portanto, a área do triângulo é aproximadamente 1 501,1 cm².

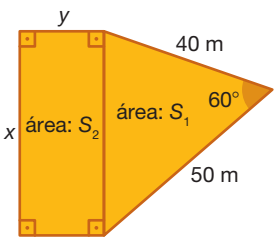
c) $S = \frac{60 \cdot 80 \cdot \operatorname{sen} 52°}{2} \simeq \frac{4\,800 \cdot 0{,}788}{2} = 1\,891{,}2$

Portanto, a área do triângulo é aproximadamente 1 891,2 cm².

d) $S = \frac{90 \cdot 90 \cdot \operatorname{sen} 43°}{2} \simeq \frac{8\,100 \cdot 0{,}682}{2} = 2\,762{,}1$

Portanto, a área do triângulo é aproximadamente 2 762,1 cm².

21.



RONALDO INÁCIO

- $x^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4\,100 - 4\,000 \cdot 0{,}500 \Rightarrow x = \sqrt{2\,100} \Rightarrow x \simeq 45{,}8$

- $S_1 = \frac{40 \cdot 50 \cdot \operatorname{sen} 60°}{2} \simeq \frac{2\,000 \cdot 0{,}866}{2} = 866$
- $S_1 = S_2 \Rightarrow 866 = xy \Rightarrow 866 = 45{,}8 \cdot y \Rightarrow y \simeq 18{,}9$

Portanto, as dimensões do terreno retangular são, aproximadamente, 18,9 m e 45,8 m.

22. $83{,}1 = \frac{12 \cdot 16 \cdot \overbrace{\operatorname{sen}\alpha}^{\operatorname{sen}(180° - \alpha)}}{2} \Rightarrow 83{,}1 = 96 \cdot \operatorname{sen}(180° - \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(180° - \alpha) \simeq 0{,}866 \Rightarrow 180° - \alpha \simeq 60° \Rightarrow \alpha \simeq 120°$

23. Seja x a medida do outro lado do terreno. Assim:

$x^2 = 80^2 + 90^2 - 2 \cdot 80 \cdot 90 \cdot \cos 70° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 14\,500 - 14\,400 \cdot 0{,}342 \Rightarrow x = \sqrt{9\,575{,}2} \Rightarrow x \simeq 98$

Agora, calculamos:

- o comprimento total de arame utilizado na construção da cerca.

$4 \cdot (80 + 90 + 98) = 1\,072$

Portanto, foram utilizados, ao todo, aproximadamente 1 072 m de arame.

- a área cercada, a qual indicaremos por S.

$S = \frac{80 \cdot 90 \cdot \operatorname{sen} 70°}{2} = \frac{7\,200 \cdot 0{,}940}{2} = 3\,384$

Portanto, a área cercada tem aproximadamente 3 384 m².

24. $S_2 = 3 \cdot S_1 \Rightarrow \frac{b \cdot b \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} = 3 \cdot \frac{a \cdot a \cdot \operatorname{sen}\alpha}{2} \Rightarrow$

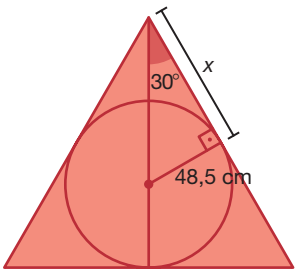
$\Rightarrow b^2 = 3 \cdot a^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 3 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{3}$

25. a) Indicando por A a área do polígono, temos:

$A = 7 \cdot \frac{48{,}2 \cdot 50}{2} = 8\,435$

Portanto, a área do polígono é 8 435 cm².

b)



RONALDO INÁCIO

$\operatorname{tg} 30° = \frac{48{,}5}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{48{,}5}{x} \Rightarrow x = 48{,}5\sqrt{3}$

Indicando por A a área do polígono, temos:

$A = 3 \cdot \frac{\left(2 \cdot 48{,}5\sqrt{3} \cdot 48{,}5\right)}{2} \simeq 12\,222{,}6$

Portanto, a área do polígono é, aproximadamente, 12 222,6 cm².

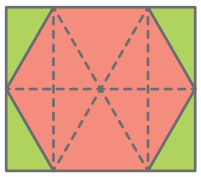
c) Indicando por a o comprimento do lado do quadrado e por A sua área, temos:

$a^2 = 52^2 + 52^2 \Rightarrow a = 52\sqrt{2}$

$A = 52\sqrt{2} \cdot 52\sqrt{2} = 5\,408$

Portanto, a área do polígono é 5 408 cm².

26. A área será coberta por retângulos do tipo:



RONALDO INÁCIO

Decompondo esse retângulo em triângulos, basta calcular a proporção de cada formato de lajota.

triângulos: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

hexágonos: $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Em seguida, determinamos a área coberta por lajotas com formato de:

- triângulo equiláteros.

$\frac{1}{4} \cdot 3\,000 = 750$

- hexágonos regulares.

$\frac{3}{4} \cdot 3\,000 = 2\,250$

Portanto, serão usados 750 m² de lajotas com formato de triângulo equilátero e 2 250 m² de lajotas com formato de hexágono regular.

MODERNA

27. a) $p = \dfrac{15{,}3 + 14 + 12 + 15}{2} = 28{,}15$

$A = \sqrt{12{,}85 \cdot 14{,}15 \cdot 16{,}15 \cdot 13{,}15} \simeq 196{,}5$

Portanto, a área do polígono é aproximadamente 196,5 m².

b) $p = \dfrac{15 + 18 + 16 + 4{,}9}{2} = 26{,}95$

$A = \sqrt{11{,}95 \cdot 8{,}95 \cdot 10{,}95 \cdot 22{,}05} \simeq 160{,}7$

Portanto, a área do polígono é aproximadamente 160,7 m².

28. alternativa c

Indicando por A e B, respectivamente, a área da base da cerâmica antes e depois do cozimento, temos:

$$A = 30 \cdot 15 = 450$$

$$B = (0{,}8 \cdot 30) \cdot (0{,}8 \cdot 15) = 288$$

Deste modo, segue que:

$$\frac{A - B}{A} = \frac{450 - 288}{450} = 0{,}36 = 36\%$$

Portanto, em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em 36%.

29. Se k é a razão entre o comprimento dos lados desses decágonos, então a razão entre suas áreas é k^2. Assim:

$$k^2 = \left(\frac{9}{3}\right)^2 = 9$$

Portanto, a razão entre a área desses decágonos é 9.

30. Sabemos que a razão entre a área da região em amarelo e a área da região em verde é 6. Assim:

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2} = 6 \Rightarrow 7a^2 = b^2 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 7$$

Como $a > 0$ e $b > 0$, então $\dfrac{b}{a} > 0$. Consequentemente, $\dfrac{b}{a} = \sqrt{7}$. Portanto, a razão de proporcionalidade entre o quadrado maior e o quadrado menor é $\sqrt{7}$ e a razão entre suas áreas é 7.

31. $R = \dfrac{40 \cdot 50}{9 \cdot 7{,}2} \Rightarrow R \simeq 30{,}86$

12 Área do círculo

1. a) Note que o triângulo AOB é isósceles. Desse modo:

$$AH = HB = \frac{AB}{2} \Rightarrow AH = HB = \frac{8}{2} = 4$$

Agora, determinaremos o comprimento do raio r do círculo. Para isso, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo AOH.

$$(AO)^2 = (AH)^2 + (OH)^2 \Rightarrow r^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 25$$

Como $r > 0$, então $r = 5$. Agora, calculamos a área A do círculo.

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 5^2 \Rightarrow A = 78{,}5$$

Portanto, a área do círculo é, aproximadamente, 78,5 cm².

b) Inicialmente, calculamos o comprimento do raio r do círculo. Para isso, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC.

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2r)^2 = \left(2\sqrt{7}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4r^2 = 4 \cdot 7 + 4 \cdot 2 \Rightarrow r^2 = 9$$

Como $r > 0$, então $r = 3$. Agora, calculamos a área A do círculo.

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 3^2 \Rightarrow A = 28{,}26$$

Portanto, a área do círculo é, aproximadamente, 28,26 cm².

2. a) Para calcular a área A_s do setor circular indicado em verde, vamos utilizar uma regra de três simples.

Ângulo (em graus)	Área
360	$\underbrace{\pi 20^2}_{r}$
60	A_s

$$\frac{360}{60} = \frac{\pi \cdot 20^2}{A_s} \Rightarrow A_s \cdot 360 = 60 \cdot 400 \cdot \pi \Rightarrow A_s = \frac{200\pi}{3}$$

Portanto, a área desse setor circular é $\dfrac{200\pi}{3}$ cm².

b) Para calcular a área A_s do setor circular em verde, vamos utilizar uma regra de três simples.

Ângulo (em graus)	Área
360	$\underbrace{\pi 15^2}_{r}$
$\overbrace{280}^{360° - 80°}$	A_s

$$\frac{360}{280} = \frac{\pi \cdot 15^2}{A_s} \Rightarrow A_s \cdot 360 = 280 \cdot 225 \cdot \pi \Rightarrow A_s = 175\pi$$

Portanto, a área desse setor circular é 175π cm².

3. a) Calculando a área A de cada um dos círculos, temos:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 100^2 \Rightarrow A = 31\,400$$

Portanto, a área aproximada de cada círculo é 31 400 cm².

b) Precisamos calcular as áreas do triângulo equilátero, do quadrado, do pentágono e do decágono.

- Triângulo equilátero $(n = 3)$.

Indicando por c o comprimento do lado do triângulo, temos:

$$100^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 50^2 \Rightarrow c^2 = 30\,000$$

Assim, a área A do triângulo é:

$$A = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{30\,000\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 7\,500\sqrt{3} \Rightarrow A \simeq 12\,990$$

Logo, a área do triângulo é, aproximadamente, 12 990 cm².

MODERNA

- Quadrado $(n = 4)$.

  Indicando por c o comprimento do lado do quadrado e por A sua área, temos:

  $$100^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (70{,}7)^2 \Rightarrow c^2 = 20\,006{,}04 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow A = 20\,006{,}04$$

  Logo, a área do quadrado é 20 006,04 cm².

- Pentágono $(n = 5)$.

  Indicando por c o comprimento do lado do pentágono, temos:

  $$100^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (80{,}9)^2 \Rightarrow c^2 = 13\,820{,}76$$

  Como $c > 0$, então $c \simeq 117{,}56$. Assim, a área A do pentágono é:

  $$A \simeq \frac{5 \cdot 117{,}56}{2} \cdot 80{,}9 \Rightarrow A \simeq 23\,776{,}51$$

  Logo, a área do pentágono é, aproximadamente, 23 777 cm².

- Decágono $(n = 10)$.

  Indicando por c o comprimento do lado do decágono, temos:

  $$100^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (95{,}1)^2 \Rightarrow c^2 = 3\,823{,}96$$

  Como $c > 0$, então $c \simeq 61{,}84$. Assim, a área A do decágono é:

  $$A \simeq \frac{10 \cdot 61{,}84}{2} \cdot 95{,}1 \Rightarrow A \simeq 29\,405$$

  Logo, a área do decágono é aproximadamente 29 405 cm².

c) Espera-se que os alunos respondam que a área do polígono inscrito se aproxima da área do círculo circunscrito.

4. Indicando por r o comprimento da haste desse pivô e por A a área da região circular, temos:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow 7\,850 = 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = 2\,500$$

Como $r > 0$, então $r = 50$. Portanto, a haste desse pivô tem aproximadamente 50 m de comprimento.

5. Inicialmente, calculamos a área A_s de um semicírculo.

$$A_s = \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow A_s = 9{,}8125$$

Assim, a área de um semicírculo é aproximadamente 9,8125 cm².

Em seguida, calculamos a área A_q do quadrado.

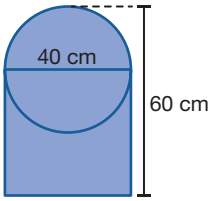
$$A_q = 5^2 \Rightarrow A_q = 25$$

Assim, a área do quadrado é 25 cm². Por fim, calculamos a área A_t do tapete. Para isso, fazemos:

$$A_t = 20 \cdot \left(4A_s + A_q\right) \Rightarrow A_t \simeq 20 \cdot (4 \cdot 9{,}8125 + 25) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t = 1\,285$$

Portanto, foram utilizados aproximadamente 1 285 cm² de tecido na confecção desse tapete.

6. alternativa **b**



RONALDO INÁCIO

Cada placa é formada por um semicírculo de raio 20 cm e um quadrado de lado 40 cm. Assim, indicando por A a soma das áreas de dez placas, temos:

$$A = 10 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 20^2}{2} + 40^2\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \simeq 10 \cdot \left(\frac{1\,256}{2} + 1\,600\right) \Rightarrow A \simeq 22\,280$$

Portanto, a soma das áreas das dez placas é aproximadamente 22 280 cm².

7. Vamos determinar o comprimento da diagonal maior do losango $(\overline{AC})$. Para isso, inicialmente, aplicaremos o Teorema de Pitágoras no triângulo ODC.

$$(OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^2 = 1^2 + (DC)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (DC)^2 = 3$$

Como $DC > 0$, então $DC = \sqrt{3}$. Consequentemente:

$$AC = 2 \cdot DC = 2\sqrt{3}$$

Agora, calculamos a área A da região em azul.

$$A = \pi \cdot 2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2}\right) \Rightarrow A \simeq 9{,}10$$

Portanto, a área dessa região é aproximadamente 9,10 cm².

8. a) Indicando por A a área da região em azul, temos:

$$A = \frac{\pi \cdot 15^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot 10^2}{2} + \frac{\pi \cdot 5^2}{2}\right) \Rightarrow A = 50\pi$$

Portanto, a área da região em azul é 50π cm².

b) Note que $DI = FI$. Assim:

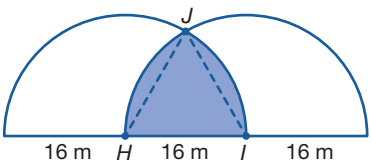
$$20^2 = (DI)^2 + (FI)^2 \Rightarrow 20^2 = 2(DI)^2 \Rightarrow DI = 10\sqrt{2}$$

Agora, indicando por A a área da região em azul, temos:

$$A = \frac{\pi\left(10\sqrt{2}\right)^2}{2} - \frac{2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = 100\pi - 200 = 100(\pi - 2)$$

Portanto, a área da região em azul é $100(\pi - 2)$ m².

c) Observe que o triângulo HIJ na figura a seguir é equilátero.



RONALDO INÁCIO

MODERNA

Assim, indicando por A a área da região destacada em azul, temos:

$$A = 2 \cdot \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 16^2 - \frac{16^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{64}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Portanto, a área da região em azul é $\frac{64}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$ m².

9. Conhecendo a área do círculo maior, podemos calcular o comprimento de seu raio r_M.

$$100\pi = \pi \cdot r_M^2 \Rightarrow r_M^2 = 100$$

Como $r_M > 0$, então $r_M = 10$. Observe agora que a altura do triângulo OAB em relação ao lado AB é um raio do círculo de menor raio. Indicando o comprimento dessa altura por r_m, temos:

$$48 = \frac{16 \cdot r_m}{2} \Rightarrow r_m = 6$$

Por fim, calculamos a área A da coroa circular indicada em verde. Para isso, fazemos:

$$A = \pi\left(r_M^2 - r_m^2\right) = \pi\left(10^2 - 6^2\right) = 64\pi \text{ cm}^2$$

10. Ao reconfigurarmos a região em vermelho, obteremos um retângulo de dimensões 10 cm e 5 cm. Assim, a área A da região indicada em vermelho é:

$$A = 10 \cdot 5 = 50$$

Portanto, a área dessa região é 50 cm².

11. **a)** De acordo com os dados do problema **50**, temos:

$$64 = \pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow \pi = 64 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi = \frac{256}{81} \Rightarrow \pi \simeq 3{,}1605$$

Portanto, a aproximação era 3,1605.

b) Indicando por A_c a área do círculo e por A_q a área do quadrado, respetivamente, temos:

- $A_c = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$
- $A_q = a^2$

Desse modo:

$$A_c = A_q \Rightarrow \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = a^2 \Rightarrow a = \frac{8}{9}d$$

Chegamos, portanto, à seguinte relação:

$$a = \frac{8}{9}d$$

12. alternativa **e**

Indicando por d e c, respectivamente, o comprimento da diagonal e o comprimento do lado do quadrado, temos:

$$2R = d \Rightarrow 2R = c\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Desse modo, segue que:

$$1 = R + r \Rightarrow r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por fim, calculamos a área A da região destacada.

$$A = 1^2 - 2 \cdot \frac{\pi R^2}{4} - 2 \cdot \frac{\pi r^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{\pi}{2} \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{2}{4} + 1 - \sqrt{2} + \frac{2}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\pi$$

13. **a)** Inicialmente, calculamos a área A_{f1} da faixa **1**.

$$A_{f1} = \pi\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \pi(6{,}8)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{f1} = \pi(72{,}25 - 46{,}24) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{f1} = 81{,}6714$$

Logo, a área da faixa **1** é aproximadamente 81,6714 cm².

Em seguida, calculamos a área A_{f2} da faixa **2**.

$$A_{f2} = \pi(6{,}8)^2 - \pi(4{,}3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{f2} = \pi(46{,}24 - 18{,}49) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{f2} = 87{,}135$$

Portanto, a área da faixa **2** é aproximadamente 87,135 cm².

b) Faixa **2**, pois sua área é maior do que a da faixa **1**.

14. Como $180° - 140° = 40°$ e $40° = \frac{360°}{9}$, então a área A dessa região é dada pela diferença entre a área do círculo de raio OC e oito nonos da área da coroa circular determinada pela circunferência de raio OA e pela circunferência de raio OB.

$$A = \pi \cdot (OC)^2 - \frac{8}{9}\left(\pi\left((OB)^2 - (OA)^2\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \pi \cdot (OA + AB + BC)^2 - \frac{8}{9}\left(\pi\left((OA + AB)^2 - (OA)^2\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \pi \cdot (6 + 4 + 2)^2 - \frac{8}{9}\left(\pi\left((6 + 4)^2 - (6)^2\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \pi \cdot (12)^2 - \frac{8}{9}\left(\pi\left((10)^2 - (6)^2\right)\right) \Rightarrow A = 144\pi - \frac{8}{9} \cdot 64\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \simeq 273{,}5$$

Portanto, a área dessa região é aproximadamente 273,5 cm².

MODERNA

Sugestões ao professor

- Nesta seção, apresentamos sugestões de livros e *sites* que podem ser consultados com o objetivo de complementar os conteúdos tratados neste volume, bem como obter subsídios teórico-metodológicos para o trabalho em sala de aula. É importante, também, que seja consultada a seção **Ampliando seus conhecimentos**, onde há sugestões de livros e *sites* para os alunos.

Leituras sobre o ensino de Matemática

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; SILVA, Karina Pessoa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

  Este artigo apresenta algumas considerações a respeito da aplicação de uma tarefa sob a ótica da Modelagem matemática para uma turma de 1º ano do Ensino Médio, abordando conceitos de Geometria plana.

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; *et al*. *Práticas de modelagem matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2015.

  Este livro aborda aspectos da Modelagem matemática, apresentando resultados de pesquisas e experiências em sala de aula e destacando a possibilidade de trabalhar com essa metodologia na perspectiva da Educação Matemática.

- ARAÚJO, Jussara de Loiola. *Educação matemática crítica*: reflexões e diálogos. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2007.

  Este livro traz reflexões e diálogos sobre a Educação Matemática crítica, como uma preocupação educacional, incluindo sugestões sobre o que isso pode significar visando à justiça social.

- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.) *Educação matemática*: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

  Nesta obra os autores tratam a respeito da ambiguidade gerada no processo de pesquisa. Embora os textos de vários autores expressem diferentes perspectivas, no geral convergem para o mesmo significado.

- BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

  O livro apresenta explicações sobre modelo matemático e Modelagem matemática. Também traz algumas orientações sobre como o professor pode proceder para utilizar a Modelagem no ensino de Matemática.

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Este livro trata da informática educativa, abordando aspectos que vão desde as políticas governamentais até as questões epistemológicas e pedagógicas. São apresentados exemplos de como usar informática com alunos e professores, bem como questões referentes ao uso de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

  O livro descreve um conjunto de princípios que buscam ajudar os professores a planejar e implementar trabalhos com projetos. Contém, ainda, exemplos de projetos e mostra como desenvolvê-los em sala de aula.

- CAINELLI, Marlene Rosa; TOMAZINI, Elizabete Cristina de Souza. A aula-oficina como campo metodológico para a formação de professores em história: um estudo sobre o Pibid/História/UEL. *História & Ensino*, Londrina, v. 23, n. 2, p. 11-33, 2017.

  Este estudo apresenta a aula-oficina como possibilidade de exercício da docência com base em relatórios e entrevistas concedidas por alunos de iniciação científica do curso de História da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

- CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Na vida dez, na escola zero*. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2015.

  O livro traz considerações sobre o motivo pelo qual muitas pessoas são capazes de utilizar a Matemática para resolver problemas em situações de seu cotidiano, mas, quando se trata da Matemática escolar, elas apresentam dificuldades.

- CURY, Helena Noronha. *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro é apresentada uma visão geral sobre a análise de erros, que, segundo a autora, pode ser encarada como uma abordagem de pesquisa e como uma metodologia de ensino, em ambos os casos, utilizada com o intuito de auxiliar na prática em sala de aula. Também são indicadas pesquisas e sugestões sobre como os erros dos alunos podem ser utilizados nas aulas de Matemática.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

MODERNA

Nesta obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações sobre aspectos da cognição, da natureza da Matemática e das questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

• _____. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 189-204, set./dez. 2018. p. 189. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300189>. Acesso em: 13 jun. 2020.

Este artigo discute as contribuições da Etnomatemática para a formação de indivíduos capazes de produzir conhecimentos e de se comunicarem, colaborando para a superação das desigualdades sociais e garantindo dignidade a todos os cidadãos, independentemente das classes sociais nas quais estão inseridos, e voltados à preservação da natureza por meio da adoção de uma postura que defenda a sustentabilidade.

- FERREIRA, Mariana Kawall Leal (Org.). *Ideias matemáticas de povos culturalmente distintos*. São Paulo: Global, 2002. (Série Antropologia e Educação).

  O livro aborda tópicos relacionados à educação e à Matemática do cotidiano. Também trata a respeito da organização social e da Matemática de povos indígenas no Brasil, e da aritmética e da ornamentação geométrica no Brasil e na África.

- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

  Esta obra é destinada a professores e pesquisadores em Educação Matemática, pois orienta esses profissionais sobre como iniciar uma pesquisa nessa área. O livro traz orientações a respeito do processo de investigação na área, além do surgimento e do desenvolvimento desse componente curricular no Brasil.

- GARDNER, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Trad. Maria A. V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

  Neste trabalho, o autor explica as ideias fundamentais que desencadeiam uma revolução na aprendizagem e mostra como elas podem ser aplicadas em toda sala de aula onde se espera que os alunos pensem.

- HUETE, J. C. Sánchez; BRAVO, J. A. Fernández. *O ensino da Matemática*: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2005.

  O livro pode ser usado como uma ferramenta de estudo e análise teórica para a construção do conhecimento matemático e para a resolução de problemas, visando a melhoras nas práticas em sala de aula.

- KNIJNIK, Gelsa et al. *Etnomatemática em movimento*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro apresenta textos, discussões e reflexões sobre a trajetória e os rumos dos estudos e pesquisas no âmbito da Etnomatemática, tendo como principal referência o professor Ubiratan D'Ambrosio.

- LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

  Este livro pode servir de referência aos professores no sentido de propor uma reflexão sobre a avaliação da aprendizagem escolar em termos sociais e pedagógicos.

- MENDES, Iran Abreu. *Investigação histórica no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

  O livro trata do uso de projetos de investigação histórica como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática. As experiências de tarefas investigativas apresentadas no livro evidenciam a relevância dessa abordagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

- MENDES, Iran Abreu. *Matemática e investigação em sala de aula*: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro contém perspectivas didáticas que buscam contribuir para o ensino e aprendizagem mais significativo da Matemática, ampliando o conhecimento a respeito desse campo.

- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria M. M. S. *A formação matemática do professor*: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro aborda questões referentes à formação do professor de Matemática, trazendo aspectos do conhecimento acadêmico e do conhecimento escolar. Para ilustrar sua posição, os autores apresentam como os conjuntos numéricos são trabalhados no nível escolar acadêmico e básico.

- ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa em Educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999.

  Este trabalho busca valorizar a interação tanto entre professor e aluno quanto entre os próprios alunos no processo de ensino e aprendizagem, apontando para a importância de as tarefas matemáticas propostas em sala de aula assumirem uma natureza problemática.

EM ABERTA

Além disso, trata da necessidade de o professor ser capaz de estabelecer um ambiente de trabalho estimulante, que propicie a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

- PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Este livro levanta questões e propõe reflexões sobre aspectos metodológicos do ensino de Matemática, levando em consideração o saber matemático e os desafios de seu ensino e aprendizagem.

- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. e adapt. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

  Neste livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

- _____. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

  Este trabalho tece comentários a respeito das maneiras de resolver um problema, no qual o processo de solução é mais importante do que a própria solução em si. Para tanto, Polya estabelece as quatro fases da resolução de um problema: compreendendo o problema, elaborando um plano, executando o plano e fazendo o retrospecto.

- RIBEIRO, Alessandro J.; CURY, Helena N. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro, os autores discutem a respeito do ensino e da aprendizagem da Álgebra, com enfoque especial aos assuntos relacionados a equações e funções, fazendo uma breve revisão histórica e apresentando pesquisas relacionadas ao tema.

- SADOVSKY, Patricia. *O ensino de matemática hoje*: enfoques, sentidos e desafios. Trad. Antonio de Padua Danesi. São Paulo: Ática, 2007. (Educação em Ação).

  Neste livro são apresentadas propostas para rever e analisar a Matemática e, assim, reformular a relação entre professor e aluno.

- SKOVSMOSE, O. *Educação matemática crítica*: a questão da democracia. Trad. Abgail Lins e Jussara L. Araújo. Campinas: Papirus, 2017.

  O autor aborda a Educação Matemática por meio de uma perspectiva democrática, propondo que trabalhos com projetos de modelagem possam ser encarados como uma possível saída para a questão democrática na sala de aula.

- TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro as autoras esclarecem como lidar com a interdisciplinaridade no ensino de Matemática. São tratadas, ainda, situações com diferentes abordagens interdisciplinares sobre os conteúdos escolares que possibilitam ao professor refletir sobre como a Matemática e os demais componentes curriculares auxiliam na formação do aluno como cidadão.

- VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

  Em textos que aliam teoria e prática em sala de aula, os autores propõem discussões e reflexões sobre as crenças que permeiam o ensino de Matemática e apontam sugestões de como elas podem ser trabalhadas.

- ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf>. Acesso em: 26 maio 2020.

  A tese apresentada neste documento disserta, entre outros assuntos pedagógicos, a respeito da importância do professor como elemento mediador entre as concepções pessoais e a prática pedagógica.

Leituras sobre a História da Matemática

- ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

  Neste livro, o autor relata as expedições – que duraram sete anos – de Pierre François André Méchain e Jean Baptiste Joseph Delambre, que, com o intuito de medir o planeta e estabelecer um padrão comum de medida, seguiram em direções opostas. Nesse contexto foi definida uma nova medida – o metro – como sendo a décima milionésima parte da distância entre o Polo Norte e a linha do Equador.

- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  A História da Matemática é abordada neste livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, e finalmente chegando aos

MODERNA

avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

- CANE, Philip. *Gigantes da ciência*. Rio de Janeiro: Ediouro, [s.d.].

  Biografia de 50 dos grandes nomes da humanidade, incluindo Pitágoras, Aristóteles, Arquimedes, Galileu, Einstein, Leonardo da Vinci, Euclides, bem como alguns inventos relacionados a esses gênios.

- CARVALHO, Luiz Mariano et al. (Org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

  O livro apresenta uma coleção de artigos que relaciona o uso de recursos tecnológicos e a História da Matemática ao ensino de Matemática.

- Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual.

  Nesta coleção, em que os volumes são assinados por autores diferentes, são abordados conteúdos matemáticos, como Geometria, Álgebra e Trigonometria, com base em seus aspectos históricos.

- DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *O sonho de Descartes*: o mundo de acordo com a matemática. Trad. Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

  O livro trata de René Descartes e de quatro séculos de avanço matemático após o sonho desse estudioso francês sobre a matematização do mundo. Nesse contexto, são abordados conteúdos matemáticos presentes no cotidiano, como é o caso da utilização da linguagem computacional.

- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

  O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para a resolução.

- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

  No volume 1, a história dos algarismos é apresentada considerando a origem da representação simbólica dos números em diversas civilizações, como os gregos, os romanos e os maias. Já no volume 2, é explicado por que a civilização indiana é considerada o berço da numeração moderna e são refeitos os caminhos que levaram o homem a inventar o computador.

- _____. *Os números*: a história de uma grande invenção. 11. ed. Trad. Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 2005.

  O livro aborda uma resumida História da Matemática e acompanha a evolução da arte de calcular, contada desde a Pré-História.

- LEAVITT, David. *O homem que sabia demais*: Alan Turing e a invenção do computador. Ribeirão Preto: Novo Conceito, 2011.

  O livro traz a biografia do matemático Alan Turing, que, por meio da proposta de uma máquina ainda imaginária, abriu as portas para a era dos computadores.

- LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. Abakós, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

  Neste livro, os autores defendem o uso da História da Matemática como metodologia em sala de aula, realizando uma abordagem histórica dos conteúdos como meio de facilitar o entendimento da Matemática.

- MAOR, Eli. *e*: a história de um número. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

  O livro traz em ordem cronológica desde o cálculo com logaritmos até descobertas mais recentes relacionadas ao número *e*.

- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação matemática*: propostas e desafios. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Neste livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

- MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

  O texto apresenta as principais questões e os momentos mais significativos do ensino da Matemática ao longo dos tempos.

- ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  O livro aborda a História da Matemática desde a Mesopotâmia até o século XIX. Um dos objetivos principais da autora é mostrar que a Matemática não é essencialmente abstrata e teórica. O livro também apresenta diferentes práticas matemáticas de povos da Antiguidade para a solução de problemas semelhantes.

MODERNA

- SINGH, Simon. *O livro dos códigos*: a ciência do sigilo: do antigo Egito à criptografia quântica. 7. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2010.

  O texto é uma narrativa sobre códigos e criptografia, bem como sobre os campos onde os códigos são e foram utilizados.

- STEWART, Ian. *Uma história da simetria na Matemática*. Trad. Cláudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  O livro apresenta a busca por soluções de equações algébricas, relatando essa história por meio de uma linha do tempo que vai desde a antiga Babilônia até chegar à Física do século XXI.

Leituras sobre os conteúdos deste volume

- BARBOSA, João Lucas M. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Este livro dá ao professor uma visão ampliada do que ensina em sala de aula, mostrando a Geometria euclidiana plana de um ponto de vista que vai além dos tópicos do Ensino Básico.

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal*: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro apresenta um estudo dos fractais voltado para a sala de aula, além de conter características artísticas sem perder a precisão e o rigor matemático.

- *Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 2013.

  Esta coleção abarca uma grande variedade de conteúdos e conceitos, dispostos em dez volumes e direcionados a alunos dos Ensinos Médio e Superior.

- COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). *As ideias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

  Esta obra comenta a prontidão para conceitos, equações, expressões, resolução de problemas, utilização de computadores e calculadoras voltados ao aprendizado da Álgebra, entre outros temas de grande importância.

- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.

  Este volume é composto de teorias, exercícios de aplicação e testes de vestibular que envolvem Geometria plana, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, sempre acompanhados de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre a história da Matemática relacionados aos temas abordados.

- GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

  Em meio a uma rede de intrigas envolvendo a máfia, sequestros e enigmas intelectuais, este romance desafia o leitor a compreender e organizar a história do pensamento matemático, desde a Antiguidade até os dias atuais.

- IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar*: trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 3.

  Este volume é composto de teorias e exercícios de aplicação, testes de vestibular referentes a Trigonometria, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Uma coleção de crônicas e comentários em torno de um tema comum: a Matemática estudada nos últimos três anos que antecedem a universidade.

- LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).

  O foco desta obra é o trabalho com as funções de uma variável, estudadas sem o uso do cálculo infinitesimal. Tal abordagem elementar traz noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números, como os naturais, os inteiros, os racionais e os reais. Na segunda parte do livro são apresentadas funções variadas: afins, quadráticas, polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar P.; GUIMARÃES FILHO, Florêncio F. *Coordenadas no plano*: com as soluções dos exercícios. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).

  O tema abordado no livro é o uso de coordenadas como método para estudar Geometria plana. A primeira parte contém uma simplificação da Geometria analítica plana; a segunda, uma introdução aos vetores; e na terceira parte, as coordenadas e vetores são utilizados com a finalidade de estudar as transformações geométricas simples.

- WAGNER, Eduardo. *Construções geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

MODERNA

Este livro visa mostrar que as construções geométricas são um importante instrumento no ensino da Geometria e da Álgebra. O texto explora as propriedades geométricas das figuras e a construção a partir da solução algébrica.

Sugestões de *sites* para o professor

- **Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação**

  Disponível em: <https://anped.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Neste *site* é possível obter informações sobre pós-graduação e pesquisa na área de educação, acessar publicações e consultar datas e locais de eventos sobre o tema.

- **Centro de Informação e Biblioteca em Educação**

  Disponível em: <http://inep.gov.br/pesquisa-ao-acervo>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  O acervo da biblioteca do Cibec é composto de livros, periódicos, teses, dissertações, folhetos e relatórios de pesquisa, materiais de multimídia, além de obras raras e especiais e documentos a respeito da educação brasileira.

- **Canal Colaborativo**

  Disponível em: <http://inep.gov.br/pesquisa-ao-acervo>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* contempla um sistema de gestão escolar integrado com um ambiente colaborativo. Nele, escolas e redes de ensino públicas e privadas encontram recursos para construção e publicação de *sites* e serviços a alunos, educadores e comunidade.

- **Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática João Affonso Pascarelli**

  Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* tem por objetivo a prestação de serviços para professores e, por meio dele, é possível se inscrever e participar de cursos de atualização profissional, oficinas, palestras e seminários.

- **Domínio Público – Biblioteca Digital Desenvolvida em *Software* Livre**

  Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Com este *site*, o Governo Federal visa disponibilizar conhecimentos, colocando à disposição de todos uma biblioteca virtual. Alunos e professores podem utilizá-la para estudos, pesquisas e desenvolvimento profissional.

- **Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec)**

  Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/index.php>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* contém *softwares* disponíveis para *download*, artigos e atividades que tratam da tecnologia informática no âmbito da educação matemática escolar.

- **Educação Matemática em Revista**

  Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Essa revista tem como foco o trabalho do professor em sua prática de educador matemático.

- **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE**

  Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Com este *site* o Ministério da Educação busca prover ações para o desenvolvimento da educação, proporcionando ao professor uma fonte de informações sobre os programas gerenciados pelo FNDE, os financiamentos escolares, os projetos e as ações educacionais.

- **Geometria não euclidiana**

  Disponível em: <https://www.deviante.com.br/podcasts/scicast-362/>. Acesso em: 27 jun. 2020.

- **Mathema**

  Disponível em: <https://mathema.com.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Neste *site* o professor encontrará informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação Matemática.

- **Ministério da Educação**

  Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* apresenta informações sobre o órgão governamental responsável pela Educação no Brasil (MEC). Além disso, o professor tem acesso aos projetos desenvolvidos pelo governo para a educação no país.

- **Nova Escola**

  Disponível em: <https://novaescola.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A edição *on-line* da revista Nova Escola proporciona ao leitor o acesso a diversas informações sobre a educação em várias áreas do conhecimento. Neste *site* pode-se ter acesso às edições da revista e pesquisar artigos publicados.

MODERNA

- **Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)**

  Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  Neste *site* encontram-se informações sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática, organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática. Nele, estão disponíveis datas, provas e gabaritos, bem como outras informações relevantes sobre as Olimpíadas.

- **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**

  Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* contém várias informações sobre o evento e possibilita às escolas que se inscrevam *on-line*. Apresenta ainda informações sobre provas, gabaritos, datas, escolas inscritas, entre outras.

- **Portal do Núcleo de Pesquisas das Novas Tecnologias de Comunicação Aplicadas à Educação – Escola do Futuro USP**

  Disponível em: <https://www.futuro.usp.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* proporciona ao professor acesso a novas tecnologias da informação e comunicação, bem como a projetos de pesquisa e a produções científicas.

- **Revista Brasileira de Educação – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**

  Disponível em: <https://anped.org.br/site/rbe>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  A revista é voltada à publicação de artigos acadêmico-científicos, visando fomentar e facilitar o intercâmbio acadêmico nos âmbitos nacional e internacional. Por meio do *site*, é possível ter acesso às edições da revista, pesquisar, enviar artigos etc.

- **Revista do Professor de Matemática**

  Disponível em: <http://rpm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* abrange informações sobre a publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. A revista é destinada àqueles que ensinam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No *site*, estão disponíveis artigos, edições da revista e informações a respeito da publicação de artigos.

- **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**

  Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Tem como finalidade congregar profissionais (pesquisadores, professores e alunos) da área de Educação Matemática e de áreas afins. No *site*, podem ser encontradas diversas informações sobre a Educação Matemática no Brasil e no exterior.

- **Sociedade Brasileira de Matemática**

  Disponível em: <https://www.sbm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* busca estimular o desenvolvimento da pesquisa e do ensino da Matemática no Brasil. Nele, estão disponíveis ao professor informações sobre eventos e atividades da área.

- **Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência**

  Disponível em: <http://portal.sbpcnet.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* disponibiliza informações, eventos, publicações, vídeos, notícias, entre outras atividades relacionadas à Ciência.

- **Vênus e trigonometria**

  Disponível em: <https://anchor.fm/matematica-multimidia/episodes/Srie-Rdio-Vnus-e-trigonometria-eean6v>. Acesso em: 27 jun. 2020.

Referências bibliográficas

- ABRAMOVAY, Miriam; SILVA, Ana Paula da; FIGUEIREDO, Eleonora. *Guia para diretores e professores*: reflexões e práticas sobre violência e convivência escolar: faça você mesmo. Rio de Janeiro: Flacso Brasil/BID, 2018.

  Guia que apresenta orientações aos professores sobre os principais temas da contemporaneidade, relacionados à violência e à convivência escolar, de maneira reflexiva e prática.

- ACTIVE learning strategies. *Berkeley Center for Teaching & Learning.* Disponível em: <https://teaching.berkeley.edu/active-learning-strategies>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Página elaborada pelo Centro de Ensino e Aprendizagem da Universidade da Califórnia, em Berkeley, nos Estados Unidos, que apresenta definições, organização e exemplos de diversas estratégias associadas às metodologias ativas.

- ARAÚJO, Luciene da Costa; VIEIRA, Kay F. L.; COUTINHO, Maria da Penha de Lima. Ideação suicida na adolescência: um enfoque psicossociológico no contexto do ensino médio. *Psico-USF*, Itatiba, v. 15, n. 1, p. 47-57, jan./abr. 2010.

  Artigo que apresenta um estudo sobre as representações sociais da ideação suicida e a presença desse fenômeno em adolescentes do Ensino Médio.

- BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e

MODERNA

tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Este livro reúne artigos de professores que apresentam conceitos, reflexões, experiências e possibilidades de implementação do ensino híbrido nas escolas.

- BARCA, Isabel. Aula oficina: do projeto à avaliação. In: *Para uma educação de qualidade*: atas da Quarta Jornada de Educação Histórica. Braga, Centro de Investigação em Educação (CIED) / Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, 2004. p. 131-144.

  Artigo que apresenta, de maneira objetiva e estruturada, as etapas de uma aula-oficina.

- BARCELOS, Thiago Schumacher; SILVEIRA, Ismar Frango. Pensamento computacional e educação matemática: relações para o ensino de computação na educação básica. In: *WORKSHOP* SOBRE EDUCAÇÃO EM COMPUTAÇÃO, 20., 2012, Curitiba. *Anais*... Curitiba: SBC, 2012. p. 1-10. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/256439343_Pensamento_Computacional_e_Educacao_Matematica_Relacoes_para_o_Ensino_de_Computacao_na_Educacao_Basica/link/0deec5228dfbb4d377000000/download>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Artigo que busca discutir as relações entre conhecimento, habilidades e atitudes possíveis de serem estabelecidas entre Matemática e Ciência da Computação.

- _____. Relações entre o pensamento computacional e a matemática através da construção de jogos digitais. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE *GAMES* E ENTRETENIMENTO DIGITAL, 12., 2013, São Paulo. *Anais*... São Paulo: SBC, 2013. p. 52-55. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/wei/article/view/10222>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Esta pesquisa busca estudar a relação entre a Matemática aprendida no Ensino Básico e o sucesso nos cursos de introdução à Ciência da Computação, analisando o modo pelo qual os alunos estimulam as competências matemáticas no processo de desenvolvimento do pensamento computacional, tomando como base as atividades práticas de desenvolvimento de jogos digitais.

- BEFORE, during, or after reading: reflection quick write. *Lakehead University*. Disponível em: <https://teachingcommons.lakeheadu.ca/sites/default/files/inline-files/Quick%20Writes%20explanation.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Texto que apresenta um breve resumo a respeito da metodologia ativa **Quick writing**, publicado na página da Universidade de Lakehead, localizada no Canadá.

- BENINCASA, Miria; REZENDE, Manuel Morgado. Tristeza e suicídio entre adolescentes: fatores de risco e proteção. *Boletim de Psicologia*, São Paulo, v. 55, n. 124, p. 93-110, jun. 2006.

  Artigo que apresenta informações sobre os fatores de risco e proteção relacionados ao suicídio.

- BOUCINHA, Rafael Marimon et al. Construção do pensamento computacional através do desenvolvimento de *games*. *Renote*, v. 15, n. 1, p. 1-10, jul. 2017. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/75146>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo apresenta uma proposta metodológica que busca desenvolver o pensamento computacional nos alunos por meio do desenvolvimento de *games*.

- BRACKMANN, Christian Puhlmann. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Trabalho que busca verificar a possibilidade do desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica por meio de atividades exclusivamente desplugadas, ou seja, sem o uso de aparatos eletrônicos.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018a. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018b. p. 21-24. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/dcnem.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Esta resolução atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicadas em 2012. Nela, são apresentadas as mudanças necessárias para a implementação da proposta do Novo Ensino Médio.

EM MODERNA

- _____. Ministério da Educação. *Diretrizes para a Educação Básica*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/323-secretarias-112877938/orgaos-vinculados-82187207/12992-diretrizes-para-a-educacao-basica>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Conjunto de pareceres e resoluções que regulamentam a Educação Básica no Brasil.

- _____. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência Enem*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Matriz de referência é um termo utilizado especificamente no contexto das avaliações em larga escala para indicar habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização e orientar a elaboração de itens de testes e provas, bem como a construção de escalas de proficiência que definem o que e o quanto o aluno realiza no contexto da avaliação.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 30 maio 2020.

  As diretrizes reunidas neste documento estabelecem a base nacional comum, que orienta a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino do país.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

  Nessa obra, voltada à formação de professores, são discutidos diversos temas relacionados ao Ensino Médio. Em um primeiro momento, discute-se o conceito de juventude com o objetivo de propor mudanças nas maneiras de conceber essa faixa etária. Esses textos buscam valorizar o papel do jovem como sujeito de sua história. Em seguida, os textos destacam temas como juventude e tecnologia, questão do mercado de trabalho e projeto de vida, além do papel da escola no processo de formação dos jovens.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este documento apresenta o histórico dos Temas Contemporâneos Transversais, sua divisão em seis grandes áreas e a importância desses temas para os currículos da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000.

  Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional.

- _____. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Ações Programáticas e Estratégicas. *Proteger e cuidar da saúde de adolescentes na atenção básica*. 2. ed. Brasília 2018c. Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/proteger_cuidar_adolescentes_atencao_basica_2ed.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2021.

  Este documento do Ministério da Saúde foi elaborado para auxiliar as Equipes de Atenção Básica/Saúde da Família no trabalho com adolescentes, propondo o cuidado com a saúde, a adoção de hábitos saudáveis e a atenção aos principais aspectos clínicos.

- CAMARGO, Fausto; DAROS, Thuinie. *A sala de aula inovadora*: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018.

  Este livro é organizado em duas partes: a primeira apresenta reflexões dos autores sobre possibilidades de inovação em sala de aula; a segunda aborda mais de 40 estratégias que contribuem para a aplicação dessas metodologias.

- CAMPOS, Herculano Ricardo; CARDOSO, Samia Dayana J. Violência na escola: uma reflexão sobre o *bullying* e a prática educativa. *Em Aberto*, Brasília, v. 23, n. 83, p. 107-128, mar. 2010.

  Artigo que apresenta informações estatísticas sobre o *bullying* na escola e o papel do professor diante de situações como essa.

- CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

EM ABERTA

O objetivo deste currículo é oferecer diretrizes e orientações que visam apoiar as escolas a incluir em suas propostas curriculares os temas tecnologia e computação, potencializando o uso da tecnologia na aprendizagem.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

  O autor propicia uma análise do papel da Matemática na cultura ocidental e da noção de que a Matemática é apenas uma forma de Etnomatemática.

- DAYRELL, Juarez (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

  Juarez Dayrell é um pesquisador que investiga questões sobre a juventude e a educação, analisando a importância das culturas juvenis na construção de um cenário educativo mais democrático e significativo. Nessa obra, ele traz algumas experiências vivenciadas no projeto Observatório da Juventude, da Universidade Federal de Minas Gerais (UGMG), que trabalha desde 2003 com a formação de professores e discussões envolvendo a juventude.

- DRIEU, Didier; PROIA-LELOUEY, Nadine; ZANELLO, Fabrice. Ataques ao corpo e traumatofilia na adolescência. *Ágora*, Rio de Janeiro, v. 14, n. 1, p. 9-20, jan./jun. 2011.

  Artigo que apresenta um estudo sobre a relação entre as mudanças que ocorrem na puberdade e os comportamentos suicidas.

- FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa*. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

  Este livro traz aplicações práticas e estratégias de trabalho com diversos tipos de metodologias que apresentam elementos de inovação nas práticas de ensino e aprendizagem, chamadas pelas autoras de metodologias "inov-ativas".

- FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: *SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009*, Ponta Grossa. *Anais...* Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1013-1026.

  Aborda, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, a utilização de recursos de Tecnologia da Informação e Comunicação como tendência em Educação Matemática.

- FORTES, Isabel; MACEDO, Mônica Medeiros Kother. Automutilação na adolescência: – rasuras na experiência de alteridade. *Psicogente*, Barranquilla, v. 20, n. 38, p. 353-367, jul./dez. 2017. Disponível em: <http://revistas.unisimon.edu.co/index.php/psicogente/article/view/2556>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo de reflexão teórica que aborda aspectos do comportamento de automutilação, propondo-se a analisar o tema com base em algumas narrativas em *blogs* de adolescentes.

- FRANÇA, Rozelma; TEDESCO, Patrícia. Desafios e oportunidades ao ensino do pensamento computacional na educação básica no Brasil. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4., 2015, Maceió. *Anais...* Maceió: SBC, 2015. p. 1464-1473. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/283347058_Desafios_e_oportunidades_ao_ensino_do_pensamento_computacional_na_educacao_basica_no_Brasil>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Este trabalho busca discutir os desafios do ensino do pensamento computacional na Educação Básica, apontando alguns dos principais desafios a serem vencidos, bem como oportunidades de pesquisa na área.

- FRANCISCO, Marcos Vinicius; LIBÓRIO, Renata Maria C. Um estudo sobre *bullying* entre escolares do Ensino Fundamental. *Psicologia*: reflexão e crítica, Porto Alegre, v. 22, n. 2, p. 200-207, 2009.

  Artigo que busca caracterizar o *bullying* em escolas públicas, destacando os efeitos tanto sobre o comportamento quanto sobre o sentimento dos vitimados.

- ILLERIS, Knud (Org.). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Porto Alegre: Penso, 2013.

  Nesta obra, o pesquisador Knud Illeris reúne diferentes autores e teorias da aprendizagem que têm sido desenvolvidas na contemporaneidade e apresenta um conjunto de textos que tratam sobre o tema. Cada pesquisador contribui com suas reflexões, buscando caminhos na compreensão sobre o conceito de educar e sobre como funciona o complexo processo de ensino e aprendizagem na atualidade.

- LEAL, Edvalda Araújo; MIRANDO, Gilberto José; CASA NOVA, Silvia Pereira de Castro. *Revolucionando a sala de aula*: como envolver o estudante aplicando técnicas de metodologias ativas de aprendizagem. São Paulo: Atlas, 2017.

  Este livro aborda algumas metodologias ativas de aprendizagem utilizando tanto estratégias tradicionais quanto estratégias contemporâneas e inovadoras.

- MENTAL healt atlas 2017. Genebra: World Health Organization, 2018.

  Documento que reúne uma compilação de dados sobre a saúde mental da população em nível mundial.

MODERNA

- MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, Lilian; MORAN, José (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 2-25.

  Este artigo apresenta práticas pedagógicas baseadas em metodologias ativas que valorizam o protagonismo dos alunos.

- _____. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Org.). *Convergências midiáticas*, educação e cidadania: aproximações jovens. Ponta Grossa: Foca Foto/Proex/UEPG, 2015. v. 2. (Mídias Contemporâneas).

  Esse texto aborda as diferentes facetas das tecnologias educacionais, trazendo reflexões sobre a educação no mundo contemporâneo e as novas concepções de ensino relacionadas às metodologias ativas.

- MORENO, Montserrat et al. *Falemos de sentimentos*: a afetividade como um tema transversal. Trad. Maria Cristina de Oliveira. São Paulo: Moderna, 1999. (Educação em Pauta: Temas Transversais).

  Relacionando aspectos cognitivos e afetivos, este trabalho afirma que é possível aprender em sala de aula características relacionadas à solidariedade, à ajuda mútua e à luta contra a discriminação, com base em ações e reflexões sobre os próprios sentimentos e comportamentos.

- PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Nesta obra é apresentada uma coletânea de ensaios que tratam da inserção da informática na educação escolar, promovendo articulações entre o uso dessa tecnologia e o fenômeno da cognição.

- PARA UMA ABORDAGEM multicultural: o Programa Etnomatemática. Nuno Vieira entrevista Ubiratan D'Ambrosio. Revista Lusófona de Educação, Lisboa, n. 11, p. 163-168, 2008.

  Entrevista realizada com o precursor da Etnomatemática, Professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio.

- PAULINO FILHO, Lucival Bento; PELLOSO, João Augusto Grecco; CAETANO, Willyan da Silva. Debates orientados: uma abordagem da aprendizagem ativa no desafio da formação integral. In: ENCONTRO NACIONAL DE JOVENS INVESTIGADORES, 4., 2019, Salvador. *Anais...* Salvador: 2019. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57573> Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo apresentado em evento promovido pela Universidade do Estado da Bahia (Uneb), que aborda a realização de debates sob a perspectiva da aprendizagem ativa.

- PENSAMENTO computacional e programação como ferramentas de aprendizagem. *Instituto Ayrton Senna*, 13 set. 2019. Disponível em: <https://www.institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Nesse texto, o pensamento computacional e a programação são indicados como estratégias eficazes na busca por práticas pedagógicas que promovam o desenvolvimento pleno.

- PIVA JUNIOR, Dilermando. *Sala de aula digital*: uma introdução à cultura digital para educadores. São Paulo: Saraiva, 2013.

  Esta obra discute questões relacionadas à utilização de recursos tecnológicos em ambiente escolar, oferecendo ferramentas para que os educadores possam fundamentar e utilizar a cultura digital a serviço de sua principal atividade: a arte de educar.

- PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

  Nesta obra, os autores apresentam os possíveis modos de introduzir em sala de aula as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos, apontando as vantagens e desvantagens no trabalho com essa perspectiva. Também são analisados os papéis dos alunos e professores em sala de aula ao lidar com problemas relacionados às áreas de Geometria, Estatística e Aritmética.

- RAABE, André. Pensamento computacional na educação: para tod*s, por tod*s! *Computação Brasil,* Porto Alegre, Sociedade Brasileira de Computação (SBC), v. 34, n. 2, p. 54-63, jul. 2017. Disponível em: <https://www.sbc.org.br/component/flippingbook/book/35/1?page=54>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Com o intuito de apontar para a grande importância da ampliação do pensamento computacional no Ensino Básico, o autor discorre, neste artigo, a respeito dos esforços e das dificuldades encontradas no processo de valorização da Ciência da Computação como área de conhecimento.

- REIS, Angelina Fatima Moreno Vaz dos; BARRETO, Maria Auxiliadora Motta. *Uma experiência com think pair share no Ensino Fundamental I*. Práxis, Volta Redonda, v. 9, n. 17, p. 55-67, jun. 2017.

  Este artigo apresenta definições e a organização da estratégia **Think-pair-share** por meio da aplicação dessa abordagem em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental.

MODERNA

- ROCHA, Julciane. *Design thinking* na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

  O objetivo é apresentar aos professores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar e, com isso, trazer benefícios para o dia a dia da sala de aula, como engajamento, maior aproveitamento, personalização, comunicação e outros.

- ROCHA, Ricael Spirandeli; CARDOSO, Iara Maria Dâmaso; MOURA, Monthelli Aparecida Estevão de. O uso da *gallery walk* como metodologia ativa em sala de aula: uma análise sistemática no processo de ensino-aprendizagem. *Revista Sítio Novo*, Palmas, v. 4, n. 1, p. 162-170, jan./mar. 2020.

  Este artigo apresenta possibilidades de aplicação da estratégia **Gallery walk** por meio da análise documental de publicações de sete experiências vivenciadas em salas de aula de Uberaba-MG.

- SOUZA, Maria Helena. 21 *teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.

  Este livro apresenta uma viagem pela história dos teoremas desde os primórdios da humanidade, de modo a estabelecer relações com outras áreas do conhecimento. Nessa viagem, incorpora, por exemplo, a beleza no teorema dos fractais e a possibilidade de obter a medida de distâncias inalcançáveis por meio do teorema de Tales.

- TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. 17. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

  O livro traz considerações e reflexões sobre os saberes docentes que servem de base para o trabalho dos professores, bem como sobre os fundamentos sociocognitivos do ensino e a análise do trabalho e da formação dos professores.

- TOKARNIA, Mariana. Um em cada dez estudantes no Brasil é vítima frequente de *bullying. Agência Brasil,* 19 abr. 2017. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-04/um-em-cada-dez-estudantes-no-brasil-e-vitima-frequente-de-bullying>. Acesso em: 27 abr. 2020.

  Diante da realidade das escolas brasileiras, esta reportagem apresenta um levantamento de dados a respeito da ocorrência de situações de *bullying* em escolas da Educação Básica, sustentada por informações coletadas do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) de 2015. O texto discute as causas e consequências envolvendo esse tipo de situação e a atuação de pais, professores e demais estudantes no enfrentamento do *bullying*.

- VALENTE, Jonas. Agência Brasil explica: o que é a tecnologia 5G. *Agência Brasil*, 30 mar. 2020. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2020-03/agencia-brasil-explica-o-que-e-tecnologia-5g>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Esta reportagem mostra as principais características da tecnologia 5G, considerando os benefícios que podem ser obtidos com a implantação dessa nova tecnologia, em diversas áreas da sociedade, além de apresentar as perspectivas para seu desenvolvimento em relação à implantação no Brasil.

- VALENTE, José Armando. Integração do pensamento computacional no currículo da educação básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. *e-Curriculum*, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 864-897, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/curriculum/article/view/29051/20655>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Neste artigo, o autor busca analisar as diferentes estratégias de implantação do pensamento computacional no currículo da Educação Básica. Essas estratégias foram classificadas em três categorias: a inclusão de temas relacionados à Ciência da Computação, a inserção de componentes curriculares que exploram os conceitos do pensamento computacional por meio de tecnologias e, por fim, a exploração dos conceitos do pensamento computacional de maneira transversal ao currículo do aluno.

- VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

  Relatório que busca fornecer dados atualizados sobre a violência escolar e *bullying*, destacando sua natureza, abrangência e impactos, assim como apresentar iniciativas para enfrentar esses problemas.

- WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia,* Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/4711/pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo traz uma discussão a respeito do pensamento computacional, enfatizando sua importância como habilidade analítica que deve ser desenvolvida nos alunos do Ensino Básico, auxiliando na resolução de quaisquer tipos de problemas.

MODELO

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA PLANA

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37384 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Para conhecer seu livro

Olhar o mundo à nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos de nossa sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações, tomar decisões com base em constatações matemáticas e lidar com os recursos tecnológicos são exemplos da importância da Matemática em nossa vida.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a esta etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos, exercícios e problemas resolvidos, seguidos de propostas de exercícios e problemas que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que tratam do uso de *softwares* e de linguagem de programação.

Por fim, desejamos a você, aluno ou aluna, que desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações de seu professor, faça uso deste material com dedicação, protagonismo e entusiasmo.

Bom estudo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

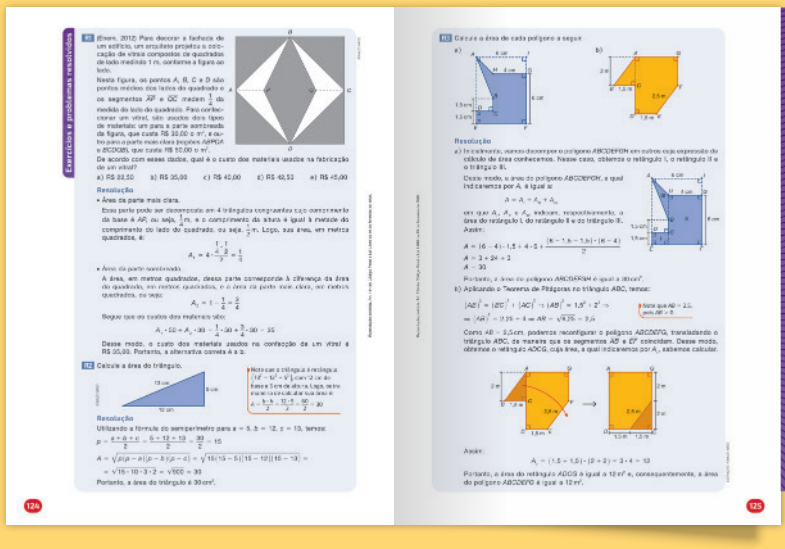

6 Função do tipo trigonométrica: um modelo matemático

Duração do dia

As estações do ano

Abertura

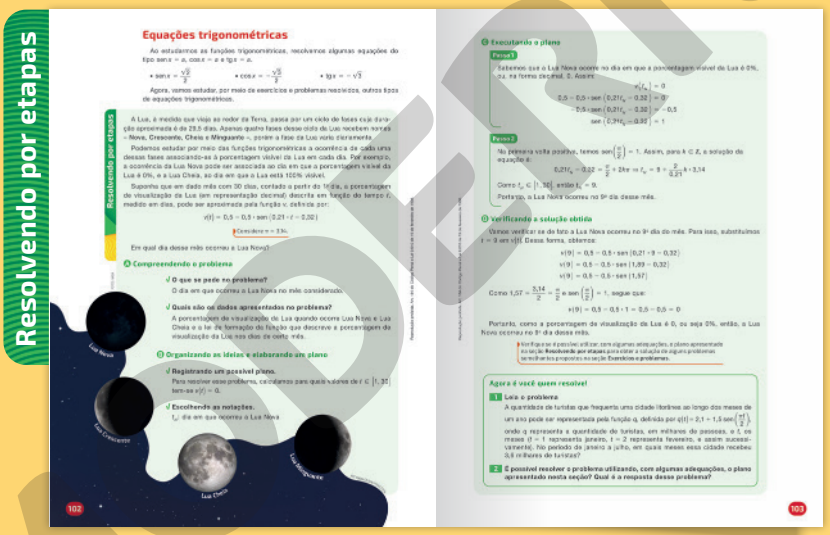
Na abertura de cada tema você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversas temáticas.



Exercícios e problemas resolvidos

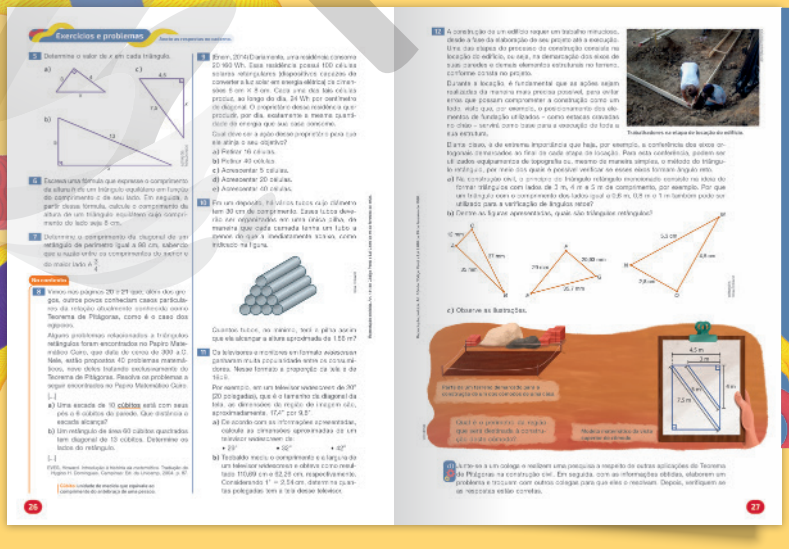
Estes exercícios e problemas auxiliam a exercitar habilidades, competências e estratégias para resolver todas as outras tarefas propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

Esta seção apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Espera-se que, a partir dela, você seja capaz de desenvolver estratégias para resolver diversos problemas, matemáticos ou não.



Resolvendo por etapas

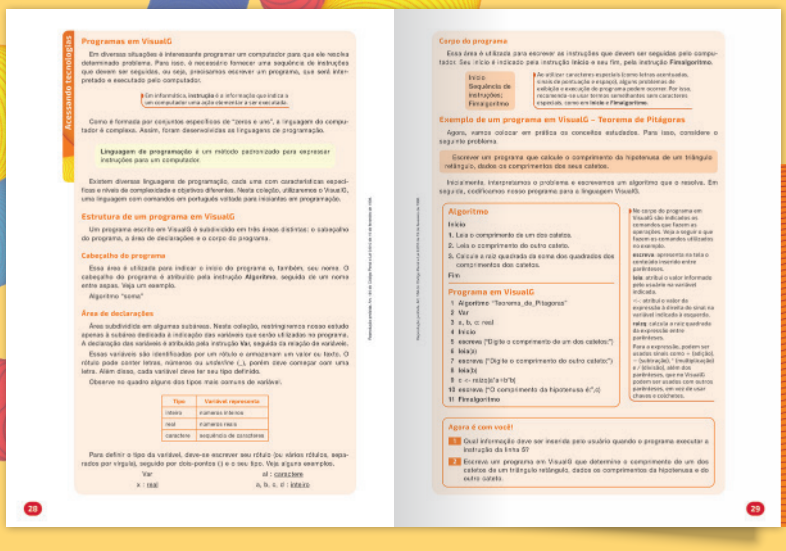
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Exercícios e problemas

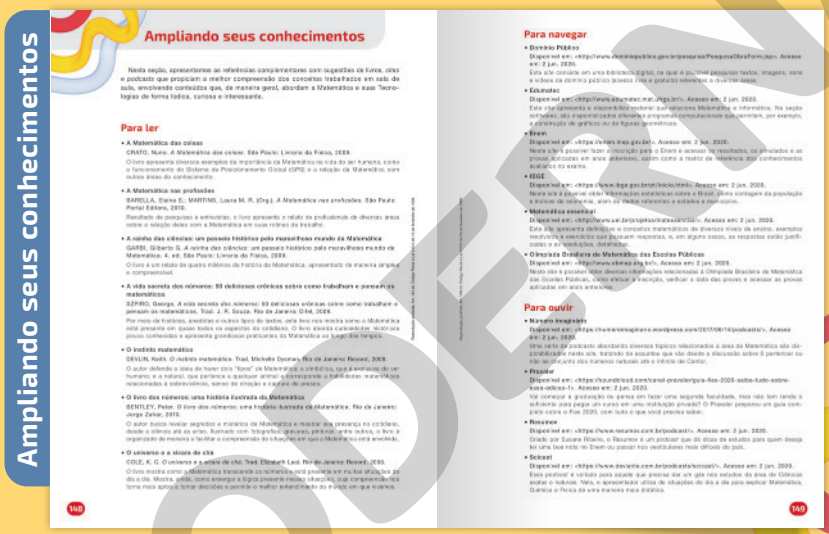
Esta seção apresenta exercícios e problemas diversificados para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Vários deles apresentam relações com outras áreas do conhecimento e outros componentes curriculares, além de questões de provas, como vestibular e Enem.

MODELO



Nesta seção, você vai encontrar exemplos e tarefas que complementam o que foi estudado nos temas, utilizando *softwares*, linguagem de programação e aplicativos disponíveis em *sites*.

Esta seção apresenta sugestões de livros, vídeos, *sites* e *podcasts* para você conhecer mais sobre o que foi estudado nos temas e para ampliar seus conhecimentos.



Calculadora As tarefas com destaque **Calculadora** exploram procedimentos para usar os recursos dessa ferramenta.

Desafio As tarefas com destaque **Desafio** possuem caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

No contexto As tarefas com destaque **No contexto** estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.

Este ícone indica que as cores dos objetos retratados não correspondem às reais.

Em grupo As tarefas com destaque **Em grupo** serão mais proveitosas se realizadas com a colaboração de um ou mais colegas.

Elaborando As tarefas com destaque **Elaborando** exploram o desenvolvimento da escrita, da imaginação, da investigação e da reflexão.

Ser consciente Nas tarefas com destaque **Ser consciente** você refletirá a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde, cidadania, entre outros, possibilitando uma avaliação cidadã e social da temática abordada.

Este ícone indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

No final do livro, você vai encontrar as **Referências bibliográficas** usadas neste volume e a seção **Ampliando seus conhecimentos**, contendo referências complementares de livros, *sites* e *podcasts* para ampliar seus conhecimentos sobre os temas estudados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Objetivos

A finalidade deste volume é ampliar seus conhecimentos a respeito de **Geometria plana**. Os conteúdos nele abordados são apresentados de maneira simples e precisa, visando ao seu protagonismo na aprendizagem e à construção de uma visão integrada da Matemática em diversos contextos.

O objetivo é que você amplie sua compreensão acerca das noções relacionadas a elementos do plano, calcule áreas de figuras geométricas planas, como triângulo, retângulo, entre outras, e reconheça as relações trigonométricas no triângulo e na circunferência. Espera-se que, com os conteúdos expostos, e com os exercícios e problemas propostos, você desenvolva sua capacidade de observação, resolução e comunicação de resultados de maneira clara.

Além disso, durante o desenvolvimento dos conteúdos você será desafiado a propor estratégias para modelar soluções de determinados problemas e escrevê-las em uma linguagem de programação.

Base Nacional Comum Curricular - BNCC

Em toda a coleção, visando favorecer o desenvolvimento das Competências Gerais da Educação Básica, das Competências Específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades relacionadas a cada uma delas, serão propostas tarefas (problemas, vivências, investigações etc.) para que você as resolva de maneira reflexiva.

A seguir, apresentaremos as competências e as habilidades cujo desenvolvimento é favorecido neste volume.

Competências gerais da educação básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.



VIKTORIA YAMS/SHUTTERSTOCK

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Competências específicas

1. **CE1CNT:** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.
2. **CE2CNT:** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

Matemática e suas Tecnologias: Competências específicas e habilidades

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

   EM13MAT306: Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

   EM13MAT307: Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

   EM13MAT308: Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

   EM13MAT315: Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

   EM13MAT405: Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

   EM13MAT505: Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

EM13MAT308

- O primeiro par de letras indica a etapa do **Ensino Médio**.
- O primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio.
- A segunda sequência de letras indica a área ou o componente curricular: **MAT** = Matemática e suas Tecnologias.
- Os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXPERIMENTA

SUMÁRIO

1 O Teorema de Tales e a semelhança de triângulos 10

Teorema de Tales 12
- **Exercícios e problemas** 14

Semelhança de triângulos 16
- Casos de semelhança de triângulos 16
- **Exercícios e problemas** 19

2 As relações métricas e a trigonometria no triângulo retângulo 20

Relações métricas no triângulo retângulo 22
- **Exercícios e problemas** 23

Teorema de Pitágoras 24
- **Exercícios e problemas** 26

Acessando tecnologias
- Programas em VisualG 28

Trigonometria no triângulo retângulo 30
- Relações envolvendo seno, cosseno e tangente 31
- **Exercícios e problemas** 33
- Ângulos notáveis 34
- Tabela trigonométrica 35

Acessando tecnologias
- Construção de tabela trigonométrica 36
- **Exercícios e problemas** 39

3 Trigonometria em um triângulo qualquer 44

Estudando trigonometria em um triângulo qualquer 46
- Lei dos senos 46
- **Exercícios e problemas** 48
- Lei dos cossenos 50
- **Resolvendo por etapas** 52
- **Exercícios e problemas** 54

4 Trigonometria na circunferência 56

Estudando trigonometria na circunferência 58
- Arcos da circunferência 58
- Medida de um arco de circunferência 59
- **Exercícios e problemas** 61
- Circunferência trigonométrica 63

Acessando tecnologias
- Condições no VisualG 64
- **Exercícios e problemas** 66

Seno, cosseno e tangente de um arco 67
- Redução ao 1º quadrante 69
- **Exercícios e problemas** 72

Acessando tecnologias
- Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica 73

5 Funções trigonométricas 74

Funções 76

Noção de conjuntos 76
- Subconjunto 77
- **Exercícios e problemas** 77

Conjuntos numéricos 78
- Conjunto dos números naturais e dos números inteiros 78
- Conjunto dos números racionais 78
- Conjunto dos números irracionais 79
- Conjunto dos números reais 80
- Intervalos reais 80
- Valor absoluto de um número real 81
- **Exercícios e problemas** 81

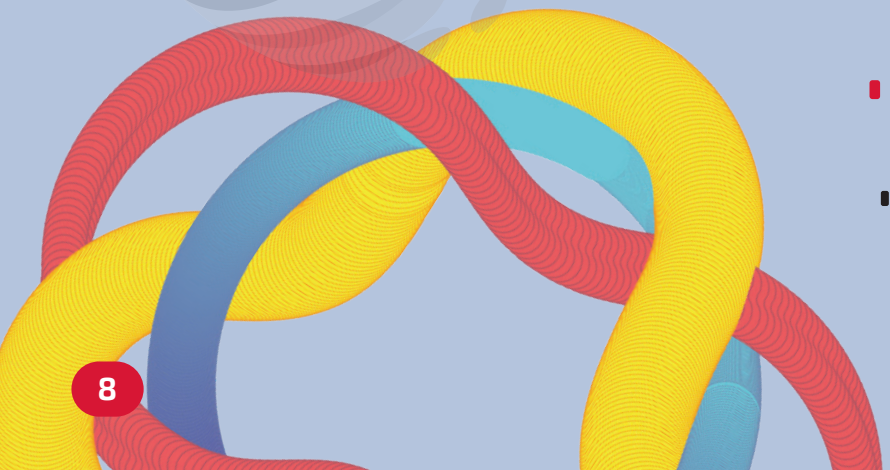
Conceito de função 82

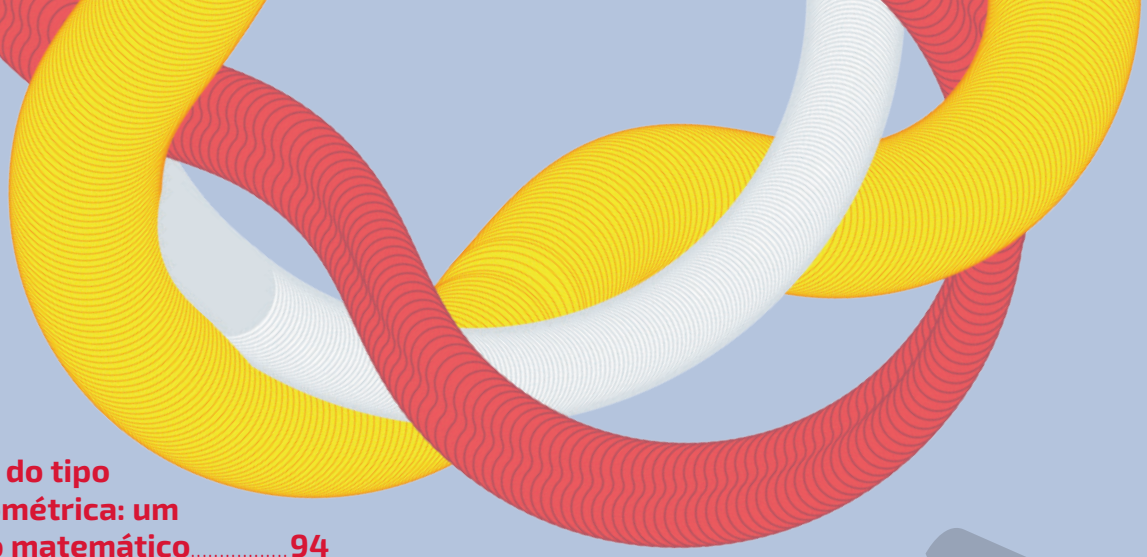
Funções trigonométricas 83
- Função seno 83
- Função cosseno 85
- **Exercícios e problemas** 87
- Funções do tipo trigonométricas: $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ 87

Acessando tecnologias
- Gráfico de funções do tipo trigonométricas 89
- **Exercícios e problemas** 92

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.





6 Função do tipo trigonométrica: um modelo matemático 94

7 Fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas 96

Fórmulas de transformação 98
- **Exercícios e problemas** 99

Relações trigonométricas 100
- **Exercícios e problemas** 101

Equações trigonométricas 102
- **Resolvendo por etapas** 102
- **Exercícios e problemas** 105

8 Ladrilhamento 106

Alguns conceitos necessários 107
- Polígonos 107

Ladrilhamento do plano 107

Ladrilhamento regular 108
- **Resolvendo por etapas** 109
- **Exercícios e problemas** 110

Ladrilhamento semirregular 110
- **Exercícios e problemas** 113

9 Área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango 114

Estudando área de figuras planas 116

Área do quadrado 116

Área do retângulo 117

Área do paralelogramo 118

Área do losango 118
- **Exercícios e problemas** 120

10 Área do triângulo e de polígonos regulares 122

Área do triângulo 123

Área do trapézio 123
- **Exercícios e problemas** 126

Cálculo da área de um triângulo utilizando trigonometria 131
- **Exercícios e problemas** 132

Área de polígonos regulares 133

Acessando tecnologias

Área de polígonos regulares com auxílio de *software* de geometria dinâmica 135

Razão entre área de figuras planas 136
- **Exercícios e problemas** **136**

11 Área e as vagas de estacionamento destinadas aos idosos 138

12 Área do círculo 140

Estudando a área do círculo 142
- Área do setor circular 143
- Área da coroa circular 143
- **Exercícios e problemas** 145

Ampliando seus conhecimentos 148

Respostas 150

Referências bibliográficas 158

Lista de siglas 160

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 O Teorema de Tales e a semelhança de triângulos

Tales e as pirâmides do Egito

O grego Tales de Mileto, que viveu por volta da primeira metade do século VI a.C., é considerado o pai da **Geometria demonstrativa**, na qual se faz necessário justificar, por meio de demonstrações lógicas, os conhecimentos geométricos. Os estudos de Tales contribuíram para diversas áreas do conhecimento, como Matemática, Filosofia e Astronomia, tornando-se conhecido como um dos sete sábios da Antiguidade.

Acredita-se que Tales tenha vivido parte de sua vida no Egito, onde se deparou com um problema: calcular a medida da altura de uma pirâmide.

Para essa história, há duas versões sobre os procedimentos utilizados por Tales. Apresentaremos essas versões na página seguinte.

A fim de simplificar a escrita, não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, utilizaremos expressões do tipo "segmento com 5 cm de comprimento" quando, na realidade, queremos nos referir à medida do comprimento do segmento, que nesse caso é 5 cm.

As imponentes pirâmides egípcias foram construídas para servir de túmulos aos faraós e a seus familiares. Entre elas, recebem grande destaque as chamadas pirâmides de Gizé.

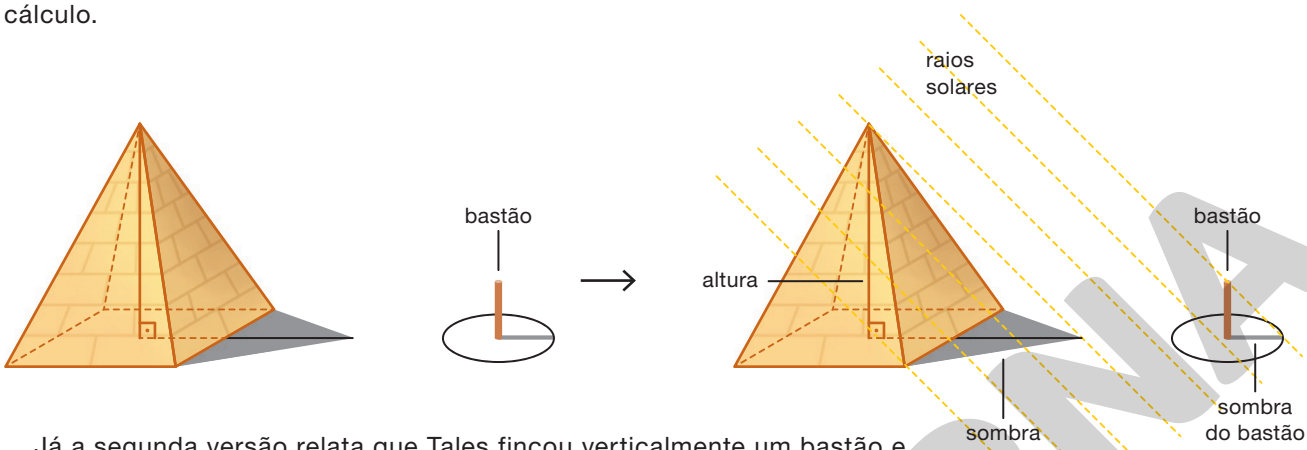
FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.KALEN/SHUTTERSTOCK; 2.EVGENY TOMEEV/SHUTTERSTOCK; 3.AKAMAKIS/SHUTTERSTOCK; 4.ANTON_IVANOV/SHUTTERSTOCK; 5.INCOME/SHUTTERSTOCK; 6.JAROSLAV MORAVCIK/SHUTTERSTOCK; 7.JENA_VELOUR/SHUTTERSTOCK; 8.WHITEVECTOR/SHUTTERSTOCK; 9.WITR/SHUTTERSTOCK; 10.HEIN NOUWENS/SHUTTERSTOCK; 11.SMILE19/SHUTTERSTOCK; 12.BENVENUTO CELLINI/SHUTTERSTOCK; 13.NACI YAVUZ/SHUTTERSTOCK; 14.MANGA MECÂNICA

MODERNA

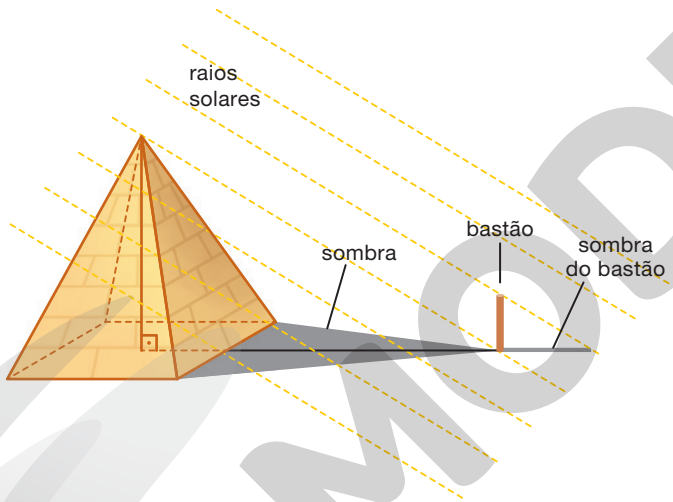
Na primeira versão, Tales teria medido a altura de uma pirâmide do Egito observando o comprimento de sombras. Ele teria fincado um bastão verticalmente no chão, próximo à pirâmide, e aguardado até que o comprimento da sombra do bastão fosse igual à sua altura.

BNCC
EM13MAT308

Como os raios solares que atingem a Terra são paralelos entre si, Tales sabia, naquele momento, que a altura da pirâmide era igual ao comprimento de sua sombra. Veja a seguir uma situação ideal para determinar as medidas necessárias desse cálculo.



Já a segunda versão relata que Tales fincou verticalmente um bastão e fez uso da semelhança de triângulos. Veja a seguir uma situação ideal para determinar as medidas necessárias desse cálculo.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Vale ressaltar que a situação ideal ilustrada para ambas as versões é rara e, assim, não podemos afirmar que Tales tenha realizado essa medição nesse excepcional fenômeno.

Em ambas as versões, não foi mencionada a dificuldade em obter o comprimento da sombra da pirâmide, caso essa medição não tenha ocorrido na situação ideal apresentada. Dessa maneira, há grandes dúvidas sobre as contribuições de Tales nesse assunto.

Fontes de pesquisa: Howard, Eves. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues: Editora da Unicamp, 2004. NOBRE, Sergio. Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática. *Ciência & Educação*, Bauru, v.10, n.3, p.531-543, 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ciedu/v10n3/15.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Se Tales tiver utilizado o método descrito na primeira versão, a medição da altura da pirâmide teria sido realizada em um momento específico do dia? E o método sugerido na segunda versão? Justifique sua resposta.

B É correto afirmar que o método apresentado na primeira versão seria um caso particular do apresentado na segunda versão? Por quê?

Sim, pois a utilização da semelhança de triângulos permite que a medição seja realizada em diferentes momentos do dia, inclusive no descrito na primeira versão.

Nas próximas páginas, demonstraremos o **Teorema de Tales** e estudaremos os casos de **semelhança de triângulos**.

A) Utilizando o método descrito na primeira versão, a medição teria de ocorrer no momento em que o comprimento da sombra do bastão fosse igual à altura dele, portanto em um momento específico do dia. Já na segunda versão, a medição poderia ser realizada em diferentes momentos do dia, pois, para estabelecer a proporção entre as medidas, o comprimento da sombra do bastão não precisaria ser igual à sua altura.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



ACE FOTOSTOCK/EASYPIX – COLEÇÃO PARTICULAR

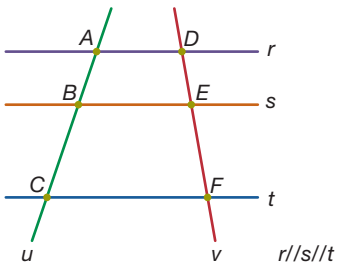
Tales de Mileto.

Teorema de Tales

Vimos nas páginas anteriores que o método empregado por Tales para calcular a altura de uma pirâmide ficou conhecido como **Teorema de Tales**. Agora, vamos enunciar e demonstrar esse teorema.

Para enunciá-lo, consideraremos inicialmente um feixe de retas paralelas e duas retas transversais.

Um conjunto de três ou mais retas paralelas contidas em um plano é chamado **feixe de retas paralelas**.



Na figura, *r*, *s* e *t* são **retas paralelas** e *u* e *v*, **retas transversais**.

Na figura, temos:

- *A* e *D*, *B* e *E*, *C* e *F*, determinados nas retas transversais pela mesma reta paralela, denominados pontos correspondentes;
- $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$, determinados nas retas transversais pelo mesmo par de retas paralelas, denominados segmentos correspondentes.

De acordo com o Teorema de Tales:

Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas retas transversais, segmentos correspondentes proporcionais.

A partir desse teorema, em relação à figura anterior, temos:

- $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$
- $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$
- $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$

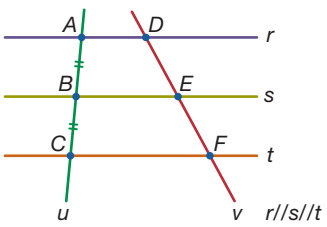
Para demonstrar o Teorema de Tales, consideraremos dois casos.

1º caso

Indicamos o comprimento de $\overline{AB}$ por *AB*.

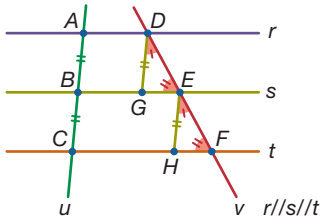
Considere um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, que divide duas transversais *u* e *v* de maneira que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ possuam comprimentos iguais, ou seja, sejam congruentes $\left(\overline{AB} \cong \overline{BC}\right)$.

Vamos mostrar que $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ também são congruentes e, por consequência, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



Traçando os segmentos $\overline{DG}$ e $\overline{EH}$, paralelos à reta *u*, obtemos os paralelogramos *ABGD* e *BCHE*, de maneira que *AB* = *DG* e *BC* = *EH*. Como *AB* = *BC*, temos *DG* = *EH*.

Consequentemente, pelo caso de congruência **LAA$_o$** (lado, ângulo, ângulo oposto), os triângulos *DGE* e *EHF* são congruentes. Portanto, $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, ou seja, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = 1$.



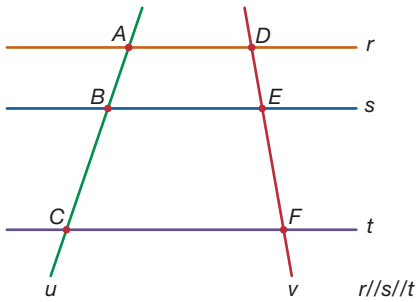
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

2º caso

- Considere um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, que divide duas transversais *u* e *v* de maneira que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sejam comensuráveis.

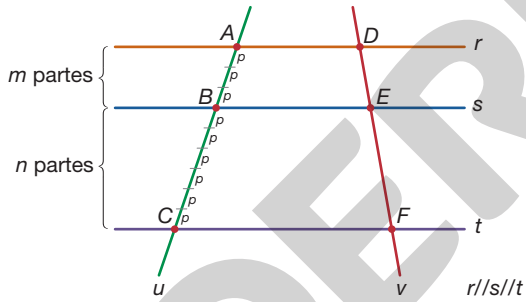


Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis quando existe um segmento *x* que cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e um número inteiro de vezes em $\overline{CD}$.

Vamos mostrar que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

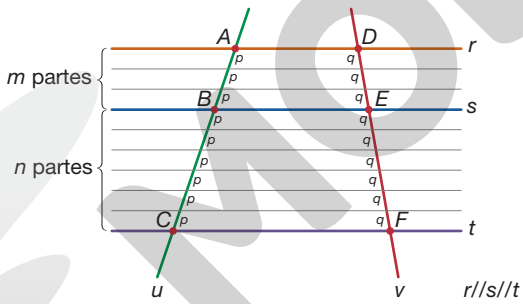
Como $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis, existe um segmento *p* que cabe *m* vezes em $\overline{AB}$ e *n* vezes em $\overline{BC}$. Assim:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}$$



Na figura ao lado, foi exemplificado o caso em que $m = 3$ e $n = 6$.

Pelos pontos que dividem $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, traçamos retas paralelas ao feixe de retas *r*, *s* e *t*.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

De acordo com o 1º caso, as retas paralelas determinam em $\overline{DE}$ e em $\overline{EF}$, respectivamente, *m* e *n* segmentos congruentes, cujo comprimento está indicado por *q*.

Assim:

$$\frac{DE}{EF} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}$$

Portanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Demonstramos o Teorema de Tales para segmentos comensuráveis, porém ele também é válido para segmentos que não são comensuráveis.

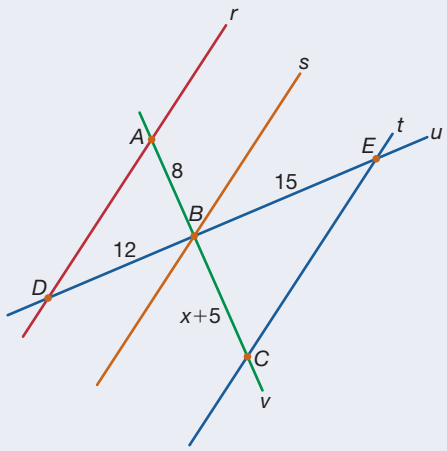
É possível demonstrar que a recíproca do Teorema de Tales é verdadeira, ou seja, se um feixe de retas dividir duas transversais em partes proporcionais, as retas do feixe são paralelas. Contudo, não apresentaremos essa demonstração nesta coleção.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Calcule o valor de x sabendo que $r//s//t$.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Note que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ estão contidos na reta v e $\overline{DB}$ e $\overline{BE}$ estão contidos na reta u.

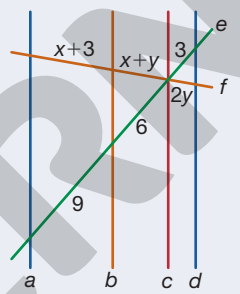
De acordo com o Teorema de Tales:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BE} \Rightarrow \frac{8}{x+5} = \frac{12}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x + 60 = 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x = 60 \Rightarrow x = 5$$

R2 Determine os valores de x e y sabendo que $a//b//c//d$.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Utilizando o Teorema de Tales, temos:

- $\frac{3}{6} = \frac{2y}{x+y} \Rightarrow 3x + 3y = 12y \Rightarrow 3x = 9y \Rightarrow x = 3y$ (I)
- $\frac{6}{9} = \frac{x+y}{x+3} \Rightarrow 6x + 18 = 9x + 9y \Rightarrow 3x + 9y = 18$ (II)

Substituindo I em II, obtemos y.

$$3x + 9y = 18 \Rightarrow 3 \cdot \left(3y\right) + 9y = 18 \Rightarrow 18y = 18 \Rightarrow y = 1$$

Calculamos x substituindo o valor de y na igualdade $x = 3y$.

$$x = 3y \Rightarrow x = 3 \cdot 1 \Rightarrow x = 3$$

Portanto, $x = 3$ e $y = 1$.

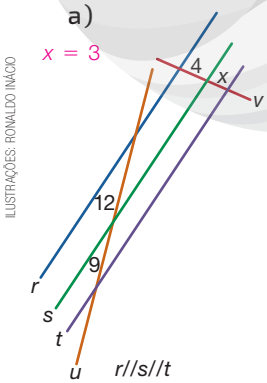
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

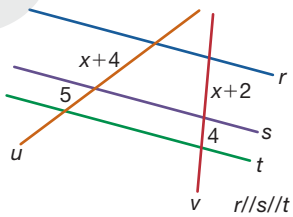
Anote as respostas no caderno.

1 Determine o valor de x em cada figura.

a) $x = 3$

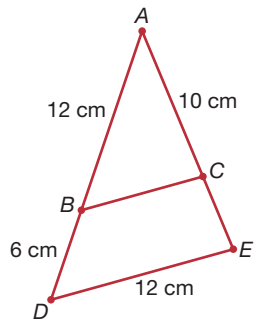


b) $x = 6$



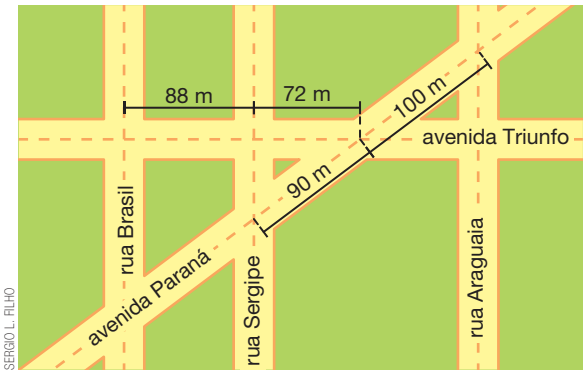
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

2 Calcule o perímetro do triângulo ABC sabendo que $\overline{BC}//\overline{DE}$. 45 cm



RONALDO INÁCIO

3 Observe parte do mapa de uma cidade.



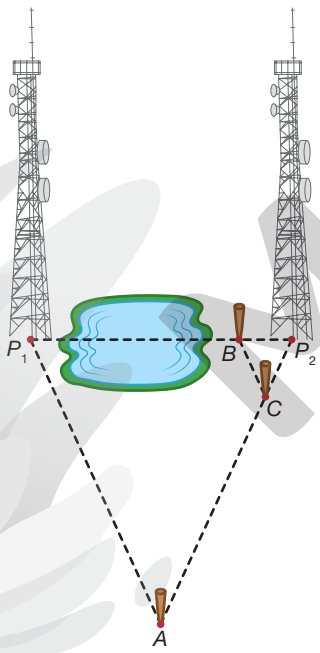
SERGIO L. FILHO

Considerando as ruas como retas e sabendo que as ruas Brasil, Sergipe e Araguaia são paralelas, determine quantos metros um pedestre irá percorrer se caminhar em linha reta da esquina da rua:

a) Araguaia com a avenida Paraná à esquina da rua Brasil com a avenida Paraná. 300 m

b) Brasil com a avenida Triunfo à esquina da rua Araguaia com a avenida Triunfo. 240 m

4 Uma empresa de telefonia instalou duas torres idênticas (P_1 e P_2), uma em cada lado de uma lagoa, conforme o esquema abaixo, para passar por elas um cabo telefônico.



RONALDO INÁCIO

Para calcular o comprimento mínimo necessário de cabo (P_1P_2), foram fincadas estacas nos pontos A, B e C, de modo que $\overline{BC} // \overline{PA}$, e medidas as distâncias $AP_2 = 60$ m, $CP_2 = 12$ m e $BP_2 = 10$ m.

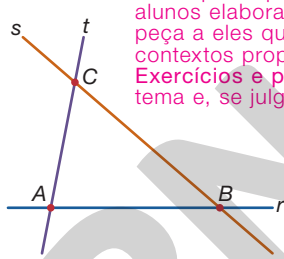
Quantos metros de cabo, no mínimo, foram utilizados entre P_1 e P_2? 50 m

5 Elabore um problema envolvendo o Teorema de Tales. Em seguida, troque esse problema com um colega para que ele o resolva e, depois, verifique se a resposta dele está correta.

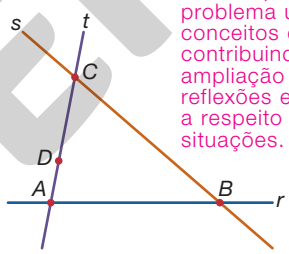
6 Em um triângulo qualquer, se traçarmos uma reta passando pelos pontos médios de dois de seus lados, ela será paralela ou concorrente a uma reta que contém o terceiro lado? Por quê?
Resposta no final do livro.

7 Veja como pode ser traçada uma reta paralela a uma reta r dada.

- Traçamos duas retas s e t, concorrentes à r nos pontos A e B, tal que s e t se intersectem em C.

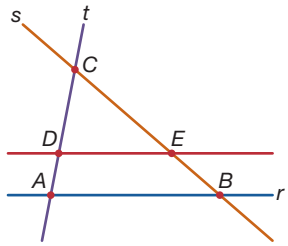


- Marcamos sobre t um ponto D a uma distância conveniente de A.



- Para obter o ponto E sobre a reta s, de maneira que $r // \overleftrightarrow{DE}$, utilizamos a igualdade $\frac{BE}{BC} = \frac{AD}{AC}$ para calcular a distância BE.

- Por fim, traçamos a reta $\overleftrightarrow{DE}$, paralela à r.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

a) Utilizando esse método, trace em uma folha de papel duas retas paralelas para o caso em que $AC = 6$ cm, $AD = 2$ cm e $BC = 9$ cm.

b) De acordo com as medidas indicadas no item a, quantos centímetros tem $\overline{CE}$? 6 cm

c) Com base no método apresentado, descreva o procedimento para traçar uma reta externa a um triângulo, que seja paralela a um de seus lados. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

5. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

A tarefa 5 propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

7. a) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

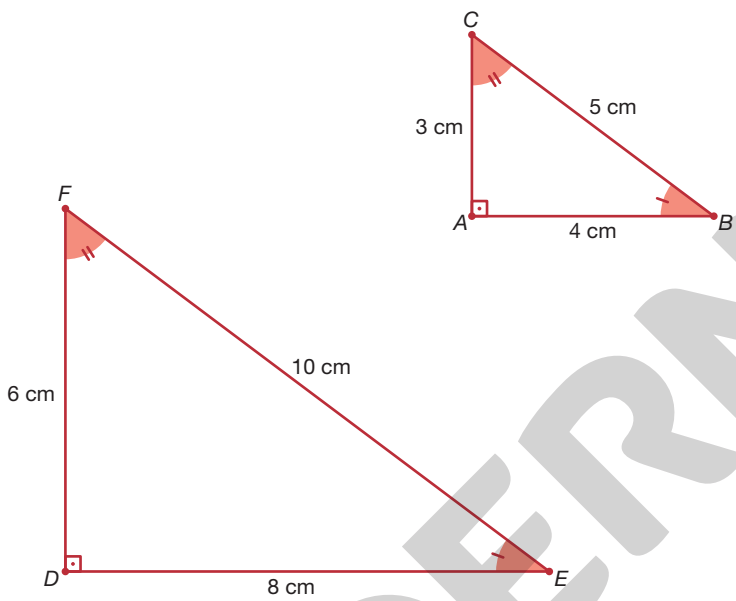
Semelhança de triângulos

Dois polígonos são **semelhantes** se possuem os lados correspondentes proporcionais e os ângulos internos correspondentes congruentes.

Indicamos um ângulo e sua medida pelo mesmo símbolo.

Exemplo

Considere os triângulos *ABC* e *DEF*.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Esses triângulos são semelhantes, pois:

- os ângulos correspondentes são congruentes;

$$\hat{A} = \hat{D},\ \hat{B} = \hat{E} \text{ e } \hat{C} = \hat{F}$$

- os lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{1}{2}$$

No exemplo apresentado, a semelhança é estabelecida pela correspondência entre *A* e *D*, *B* e *E* e *C* e *F*.

O quociente comum entre o comprimento dos lados correspondentes é denominado **razão de proporcionalidade**.

Porém, para verificar se dois triângulos são semelhantes, não é necessário analisar ambas as condições. A seguir, estudaremos os casos de semelhança de triângulos, que estabelecem condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

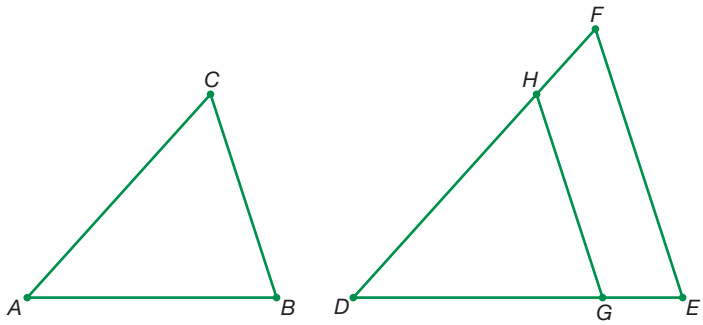
Casos de semelhança de triângulos

Caso de semelhança AA: se dois triângulos possuem dois ângulos internos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Demonstração: considere os triângulos *ABC* e *DEF* em que $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{F}$ são congruentes. Agora, vamos mostrar que os lados correspondentes são proporcionais. Para isso, marque sobre o lado $\overline{DE}$ do triângulo *DEF* um ponto *G* de maneira que *AB* = *DG* e, em seguida, trace o segmento $\overline{GH}$ paralelo ao lado $\overline{EF}$.



RONALDO INÁCIO

Note que $\widehat{G} = \widehat{E}$, pois são ângulos correspondentes de paralelas cortadas por uma transversal.

Note que, pelo caso de congruência **ALA** (ângulo, lado, ângulo), os triângulos *ABC* e *DGH* são congruentes, pois $\widehat{A} = \widehat{D}$, *AB* = *DG* e $\widehat{B} = \widehat{G} = \widehat{E}$.

Pelo Teorema de Tales, segue que:

$$\frac{DH}{DF} = \frac{DG}{DE} \Rightarrow \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$$

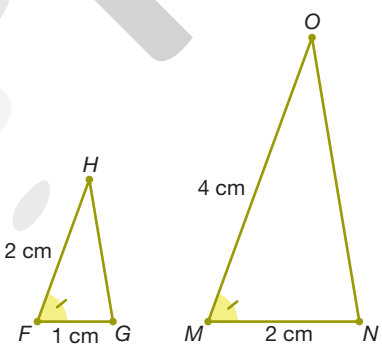
De maneira semelhante, mostra-se que $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Consequentemente, $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ e, portanto, os triângulos *ABC* e *DEF* são semelhantes, como queríamos demonstrar.

Agora, vamos conhecer outros dois casos de semelhanças. Estes também podem ser demonstrados, porém não apresentaremos as demonstrações nesta coleção.

Caso de semelhança LAL: se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Exemplo

Considere os triângulos *FGH* e *MNO*.



RONALDO INÁCIO

No exemplo apresentado, a semelhança é estabelecida pela correspondência entre *F* e *M*, *G* e *N* e *H* e *O*.

Pelo caso de semelhança **LAL**, esses triângulos são semelhantes, pois:

$$\frac{FG}{MN} = \frac{FH}{MO} \text{ e } \widehat{F} = \widehat{M}$$

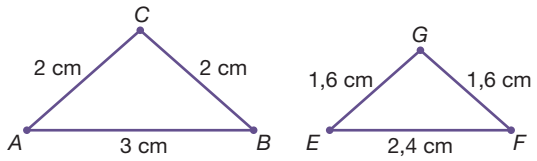
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Caso de semelhança LLL: se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

Exemplo

Considere os triângulos *ABC* e *EFG*.



RONALDO INÁCIO

Pelo caso de semelhança **LLL**, esses triângulos são semelhantes, pois:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG} = 1{,}25$$

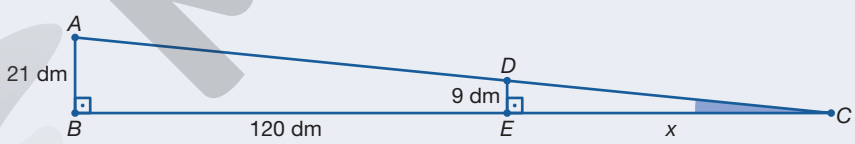
No exemplo apresentado, a semelhança é estabelecida pela correspondência entre *A* e *E*, *B* e *F* e *C* e *G*.

Exercícios e problemas resolvidos

R3 (Unesp) Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 21 dm, com alta velocidade inicial e passa rente à rede, a uma altura de 9 dm. Desprezando-se os efeitos do atrito da bola com o ar e do seu movimento parabólico, considere a trajetória descrita pela bola como sendo retilínea e contida num plano ortogonal à rede. Se a bola foi sacada a uma distância de 120 dm da rede, a que distância da mesma, em metros, ela atingirá o outro lado da quadra?

Resolução

Indicando por *x* a distância entre a rede e a posição em que a bola atingirá o outro lado da quadra, e com base nas informações do enunciado, podemos construir o seguinte esquema.



RONALDO INÁCIO

Pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos *ABC* e *DEC* são semelhantes. Desse modo, temos:

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{120 + x}{x} = \frac{21}{9} \Rightarrow 21x = 9 \cdot (120 + x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21x = 1\,080 + 9x \Rightarrow 21x - 9x = 1\,080 \Rightarrow x = \frac{1\,080}{12} = 90$$

Portanto, a bola atingirá o outro lado da quadra a uma distância de 90 dm da rede.

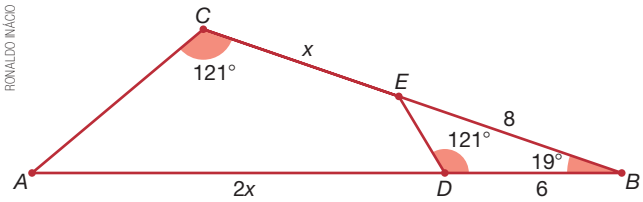
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

8 De acordo com a figura abaixo, calcule o valor de x. $x = 7$

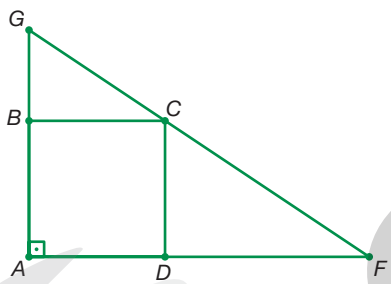


RONALDO INÁCIO

9 Considere os triângulos semelhantes ABC e FGH. Mostre que a razão de proporcionalidade entre eles é igual à razão entre seus perímetros.
Resposta no final do livro.

10 Considere um triângulo ABC cujo comprimento dos lados seja: 8,3 cm, 6,5 cm e 9,2 cm. Qual é a medida do menor lado de um triângulo, com perímetro de 480 cm, semelhante a ABC?
130 cm

11 O quadrado $ABCD$ possui um vértice em comum com o triângulo AFG e, além disso, os vértices B, C e D pertencem a cada um dos lados do triângulo AFG.

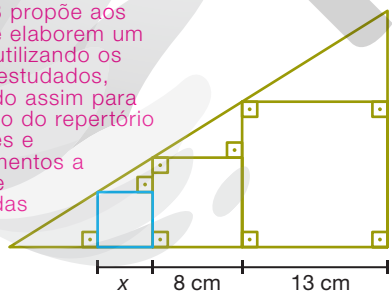


RONALDO INÁCIO

Sabendo que $AG = 20$ cm e que $AF = 30$ cm, determine o perímetro do quadrado $ABCD$.
48 cm

12 Calcule o perímetro do quadrado destacado em azul. $\frac{256}{13}$ cm

A tarefa **18** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.



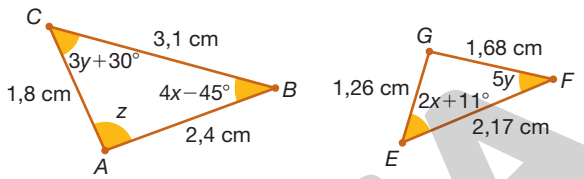
RONALDO INÁCIO

13 Considere os triângulos semelhantes ABC e MNO, cuja semelhança é estabelecida pela correspondência entre A e M, B e N e C e O. Sabendo que $AB = 25$ cm, $MN = 150$ cm e que o perímetro do triângulo MNO é 552 cm, determine o perímetro do triângulo ABC. 92 cm

15. a) Sim. O caso que garante a semelhança é o LLL, pois $\frac{AC}{EF} = \frac{AB}{GF} = \frac{BC}{EF}$.

14 Considere os triângulos ABC e EFG retângulos em A e E, respectivamente. Sabendo que $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm, $EF = 2{,}5$ cm e $EG = 3{,}7$ cm, determine se esses triângulos são semelhantes. Justifique sua resposta.
Não, pois os lados correspondentes não são proporcionais.

15 Observe os triângulos.



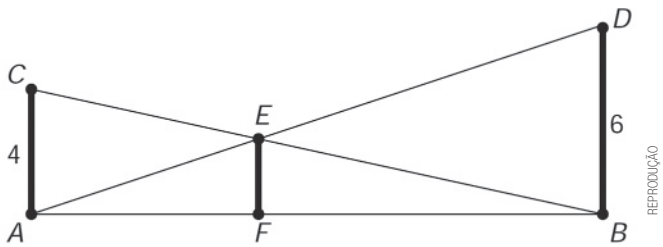
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

a) Os triângulos ABC e GFE são semelhantes? Se sim, qual caso garante a semelhança?

b) Qual o valor de z? 94°

16 Determine a altura de um poste cuja sombra, em determinado momento do dia, mede 3 m, tendo como referência uma pessoa de 1,6 m de altura, cuja sombra nesse mesmo momento mede 1,2 m.
4 m

17 (Enem, 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e a haste é representada pelo $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.



REPRODUÇÃO

Qual deve ser o comprimento da haste EF?
alternativa c

a) 1 m
b) 2 m
c) 2,4 m
d) 3 m
e) $2\sqrt{6}$ m

18 Elabore um problema envolvendo semelhança de triângulos. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva e, depois, verifiquem se a resposta está correta. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 As relações métricas e a trigonometria no triângulo retângulo

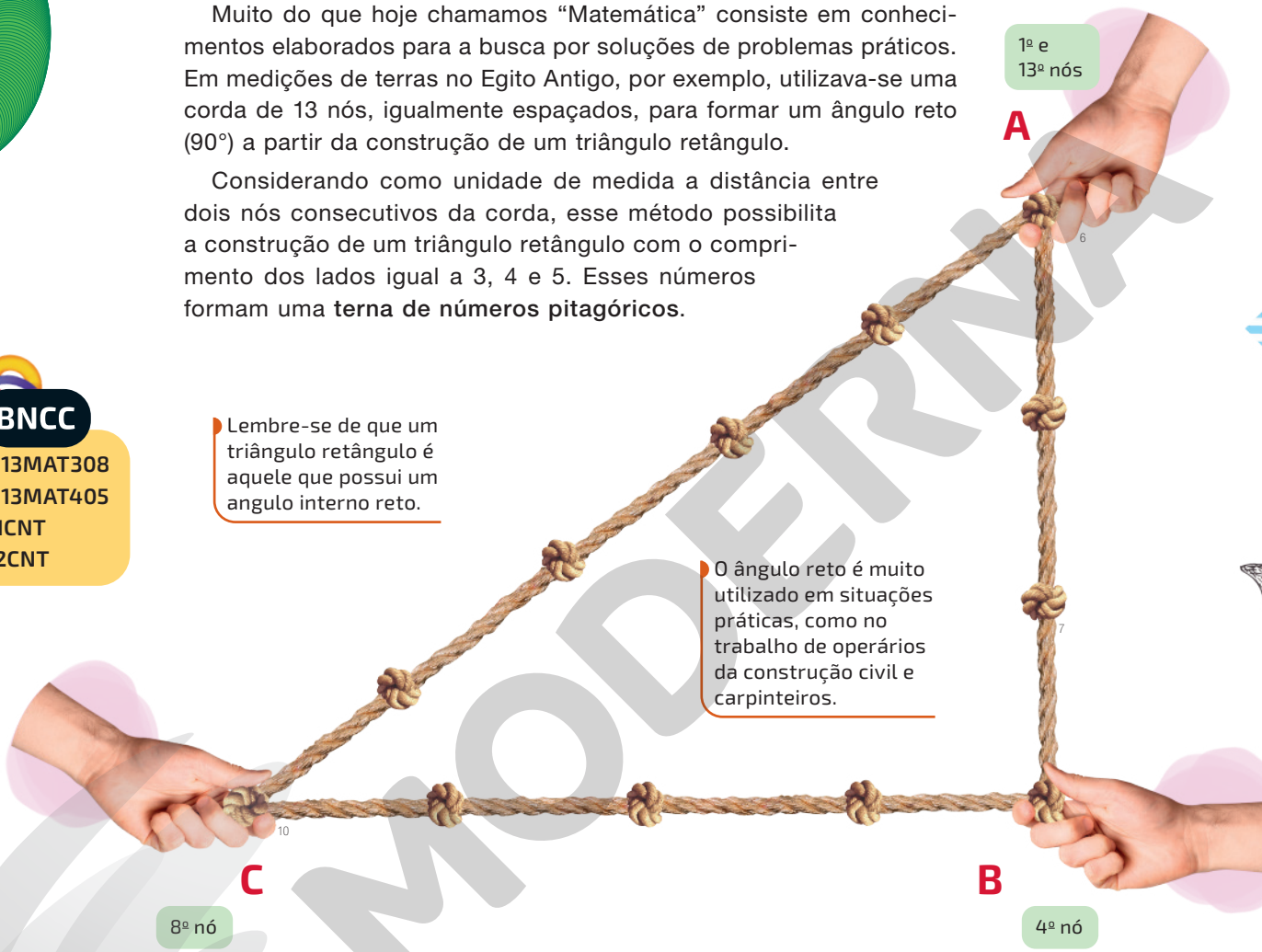
A corda de 13 nós

Muito do que hoje chamamos "Matemática" consiste em conhecimentos elaborados para a busca por soluções de problemas práticos. Em medições de terras no Egito Antigo, por exemplo, utilizava-se uma corda de 13 nós, igualmente espaçados, para formar um ângulo reto (90°) a partir da construção de um triângulo retângulo.

Considerando como unidade de medida a distância entre dois nós consecutivos da corda, esse método possibilita a construção de um triângulo retângulo com o comprimento dos lados igual a 3, 4 e 5. Esses números formam uma **terna de números pitagóricos**.

BNCC
- EM13MAT308
- EM13MAT405
- CE1CNT
- CE2CNT

Lembre-se de que um triângulo retângulo é aquele que possui um angulo interno reto.



O ângulo reto é muito utilizado em situações práticas, como no trabalho de operários da construção civil e carpinteiros.

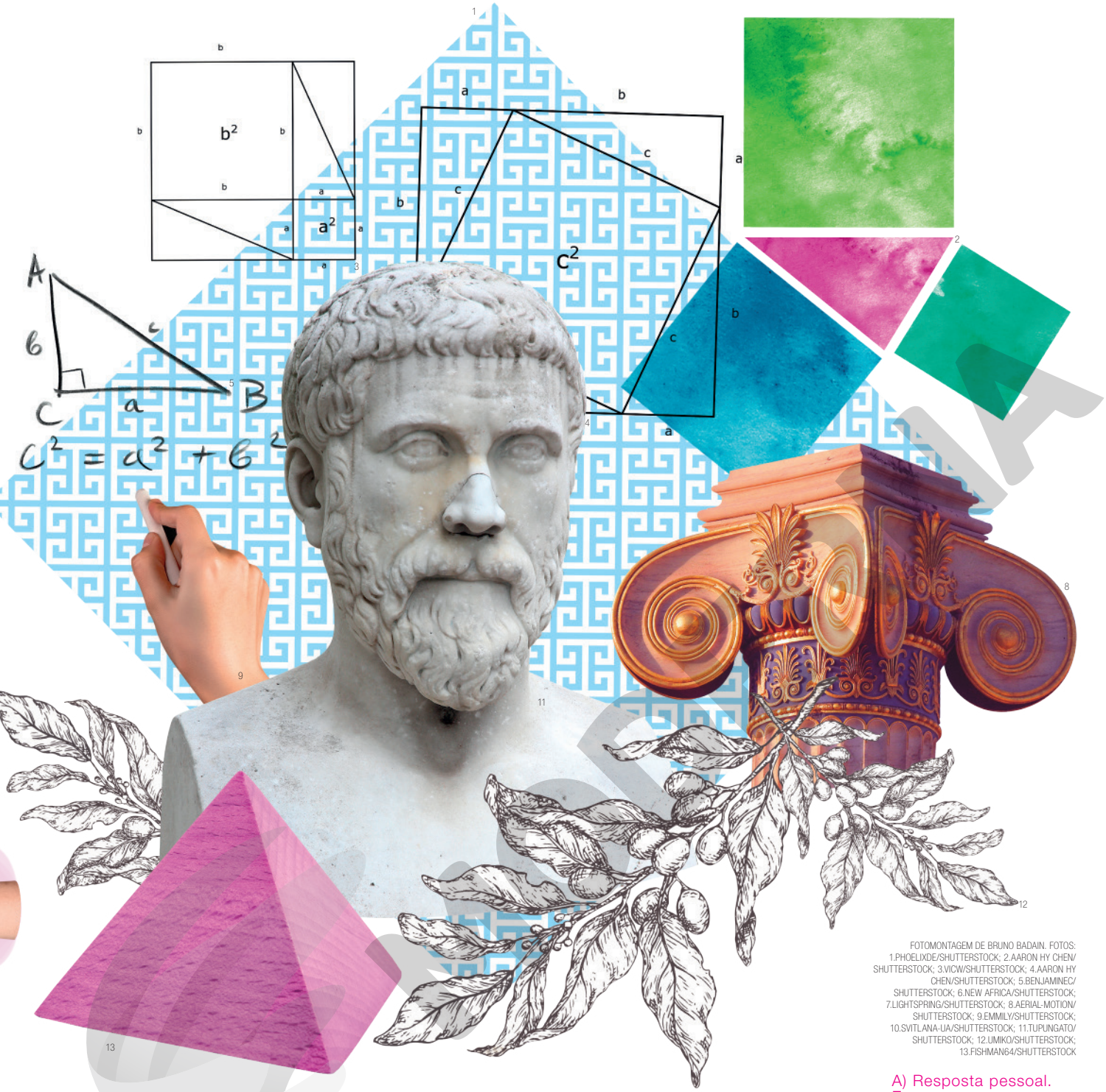


SEE CAPTON/ALAMY/FOTOARENA

Plimpton 322.

A validade do método das cordas de nós é explicada segundo um resultado hoje conhecido como **Teorema de Pitágoras**. No entanto, tabelas contendo ternas de números inteiros que são lados de algum triângulo retângulo – ternas de números pitagóricos – foram encontradas na Babilônia e no Egito Antigo antes mesmo do nascimento do matemático Pitágoras. Essas ternas de números apareceram, por exemplo, em registros da Matemática babilônica, em especial no Plimpton 322, que é uma tábula de números cunhada em argila, com quatro colunas e quinze linhas, em notação sexagesimal. Há também indícios do uso dessas ternas em construções de templos, edificados no 3º milênio a.C.

MODERNA



FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.PHOELIXDE/SHUTTERSTOCK; 2.AARON HY CHEN/SHUTTERSTOCK; 3.VICW/SHUTTERSTOCK; 4.AARON HY CHEN/SHUTTERSTOCK; 5.BENJAMINEC/SHUTTERSTOCK; 6.NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK; 7.LIGHTSPRING/SHUTTERSTOCK; 8.AERIAL-MOTION/SHUTTERSTOCK; 9.EMMILY/SHUTTERSTOCK; 10.SVITLANA-UA/SHUTTERSTOCK; 11.TUPUNGATO/SHUTTERSTOCK; 12.UMIKO/SHUTTERSTOCK; 13.FISHMAN64/SHUTTERSTOCK

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Utilizando um barbante, faça 25 nós igualmente espaçados e verifique se é possível construir um triângulo em que um dos ângulos internos seja reto.

A) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos verifiquem que é possível construir um triângulo em que um dos ângulos internos seja reto com lados medindo, respectivamente, 6, 8 e 10 nós.

B O Teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. De acordo com ele, "o quadrado do comprimento do maior lado é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos lados menores". Utilizando esse teorema, determine o comprimento do maior lado de um triângulo retângulo cujos lados menores têm 20 cm e 99 cm de comprimento.

O maior lado tem 101 cm de comprimento, pois $20^2 + 99^2 = 101^2$.

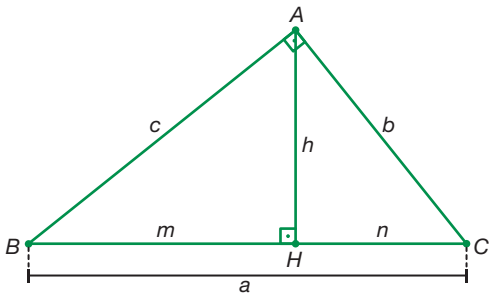
Nas próximas páginas, apresentaremos as **relações métricas no triângulo retângulo** e, em especial, enunciaremos e demonstraremos o **Teorema de Pitágoras**. Além disso, estudaremos a **trigonometria no triângulo retângulo**.

Relações métricas no triângulo retângulo

Além do **Teorema de Pitágoras**, que estudaremos no próximo tópico, os triângulos retângulos possuem outras relações métricas que envolvem os comprimentos de seus lados.

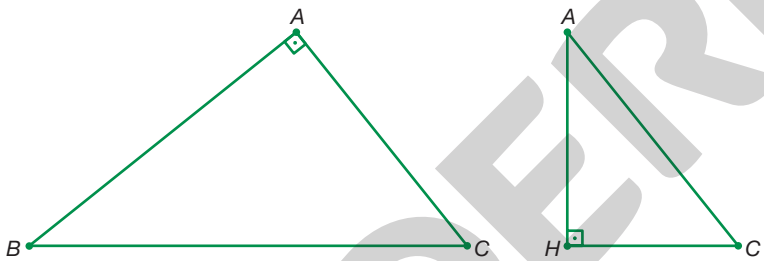
Considere o triângulo retângulo *ABC*.

A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e o maior lado do triângulo retângulo, e os catetos são os lados adjacentes ao ângulo reto.



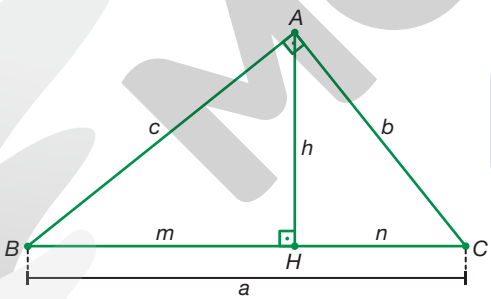
- a: comprimento da hipotenusa;
- b e c: comprimentos dos catetos;
- h: comprimento da altura relativa à hipotenusa;
- m e n: comprimento das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Note que ao traçarmos a altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa desse triângulo obtemos dois outros triângulos: o *AHB* e o *AHC*. Para que possamos estabelecer algumas relações métricas no triângulo retângulo, vamos mostrar que *AHC* e *BAC* são semelhantes.



Note que $B\hat{A}C = A\hat{H}C$, pois são ângulos retos e que $A\hat{C}B = A\hat{C}H$, pois é comum aos dois triângulos. Portanto, pelo caso de semelhança **AA** os triângulos *AHC* e *BAC* são semelhantes.

Decorrente dessa semelhança, podemos estabelecer as seguintes relações métricas no triângulo *ABC*.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \qquad a \cdot h = b \cdot c$$

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{h} \qquad b \cdot h = c \cdot n$$

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \qquad b^2 = a \cdot n$$

A Mostre que os triângulos: Resposta no Suplemento para o professor.

- *ABC* e *BHA* são semelhantes.
- *ABH* e *ACH* são semelhantes.

B De maneira semelhante à apresentada, mostre que: Resposta no Suplemento para o professor.

- $c^2 = a \cdot m$
- $c \cdot h = b \cdot m$
- $h^2 = m \cdot n$

No triângulo retângulo *ABC* apresentado anteriormente, temos as seguintes relações métricas.

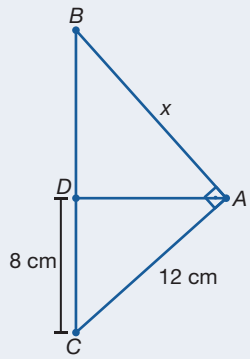
- $a \cdot h = b \cdot c$
- $b \cdot h = c \cdot n$
- $c \cdot h = b \cdot m$
- $b^2 = a \cdot n$
- $c^2 = a \cdot m$
- $h^2 = m \cdot n$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Determine o valor de x.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Utilizando a relação métrica $b^2 = a \cdot n$, temos:

$$12^2 = (8 + BD) \cdot 8$$
$$144 = 64 + 8 \cdot BD$$
$$BD = 10$$

Em seguida, utilizando a relação métrica $c^2 = a \cdot m$, segue que:

$$x^2 = (CD + BD) \cdot DB$$
$$x^2 = 18 \cdot 10$$
$$x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

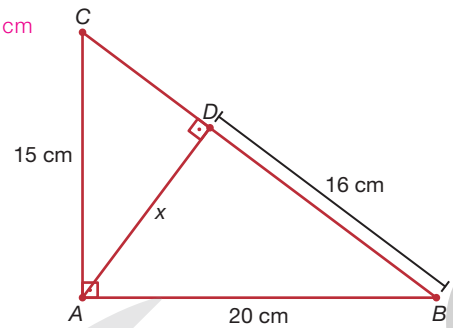
Portanto, $x = 6\sqrt{5}$ cm.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Determine o valor de x.

$x = 12$ cm

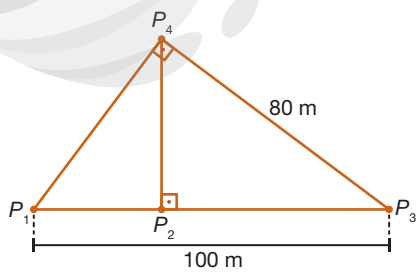


RONALDO INÁCIO

2 Considere o triângulo ABC, retângulo em A. Determine o comprimento das projeções dos catetos desse triângulo sobre a hipotenusa, sabendo que $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm e que o comprimento da altura relativa à hipotenusa é 7,2 cm.

Projeção do cateto AB: 5,4 cm; projeção do cateto AC: 9,6 cm.

3 No parque de certa cidade, serão instalados quatro novos postes de iluminação: P_1, P_2, P_3 e P_4. O esquema apresentado a seguir indica a posição em que eles serão instalados e a distância entre alguns deles.



RONALDO INÁCIO

Qual é a distância entre os postes P_1 e P_4? E entre os postes P_2 e P_3? 60 m; 64 m

4 Tobias tem, nas redes sociais, um perfil que aborda temas relacionados ao *mangá* (história em quadrinhos japonesa).

A foto desse perfil foi elaborada por ele e é composta de uma circunferência, um triângulo retângulo e uma semicircunferência, além da frase, BATE-PAPO SOBRE *MANGÁ*.



HELOÍSA PINTARELLI

a) Na figura elaborada por Tobias, o triângulo AMN está inscrito na circunferência de centro G e $\overline{AS}$ é a altura relativa à hipotenusa de AMN. Supondo que $AN = 12$ cm, que o raio da circunferência tenha 6,5 cm de comprimento e que A' é o ponto médio de $\overline{GS}$, determine o comprimento aproximado do segmento $\overline{MA'}$. aproximadamente 4,21 cm

b) Você lê *mangá* ou outras histórias em quadrinhos? Converse com os colegas e o professor a respeito das histórias que você leu ou gostaria de ler. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Teorema de Pitágoras



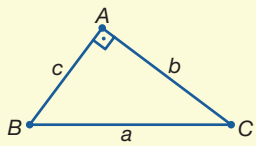
REPRODUÇÃO — BIBLIOTECA NACIONAL DA FRANÇA, PARIS

Demonstração grega do Teorema de Pitágoras, por volta do ano 800 d.C.

Um dos teoremas matemáticos mais conhecidos é o Teorema de Pitágoras. Demonstrado pela primeira vez há cerca de 2 500 anos, pelo matemático grego Pitágoras (c. 585-500 a.C.), esse teorema é um dos que possuem maior número de demonstrações. A imagem ao lado é um fragmento de um texto grego de cerca de 800 d.C., que apresenta a demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides de Alexandria.

O Teorema de Pitágoras apresenta a seguinte relação entre os três lados de um triângulo retângulo:

> Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

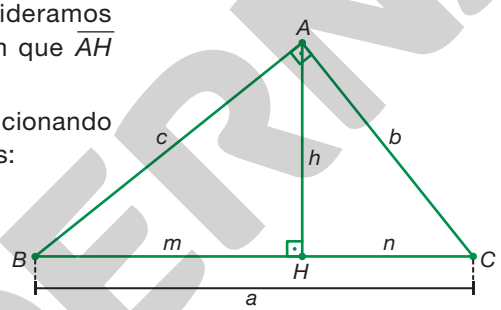
Para demonstrar esse teorema, consideramos inicialmente o triângulo retângulo ABC, em que $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa.

Sabemos que $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$. Adicionando membro a membro dessas relações, temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot (\underbrace{n + m}_{a})$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Portanto, como queríamos demonstrar, $a^2 = b^2 + c^2$.

É possível demonstrar que a recíproca do Teorema de Pitágoras é verdadeira, ou seja, em um triângulo qualquer, se o quadrado do comprimento do lado maior for igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros lados, então o triângulo é retângulo. Porém, não apresentaremos essa demonstração nesta coleção.

Exercícios e problemas resolvidos

R2 Escreva um algoritmo que possibilite determinar o comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo, dados os comprimentos do outro cateto e da hipotenusa. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para a construção de um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

> Um **algoritmo** é uma sequência de instruções ordenadas de forma lógica para resolução de uma determinada tarefa ou problema.

Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes.

Em seguida, devemos responder às seguintes questões.

1. Quais são os **dados de entrada**, ou seja, quais são os dados fornecidos no problema?

   Dados de entrada: comprimento de um dos catetos e da hipotenusa do triângulo.

2. Quais são os **dados de saída**, ou seja, quais são os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?

   Dados de saída: comprimento do outro cateto.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?

Para responder à questão **3**, utilizaremos o Teorema de Pitágoras. Para isso, inicialmente, indicamos por a, b e c o comprimento dos lados desse triângulo, em que a expressa o comprimento da hipotenusa. Desse modo, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

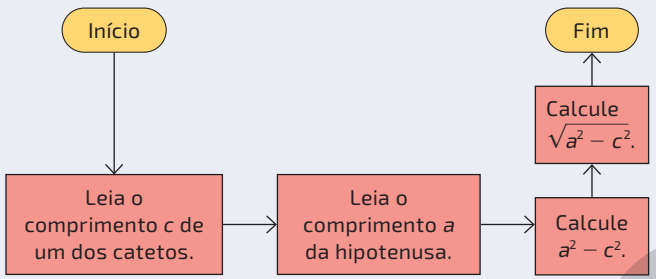
Consequentemente, para determinar o comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo, devemos calcular a diferença entre os quadrados dos comprimentos da hipotenusa e do outro cateto e, por fim, determinar a raiz quadrada positiva desse resultado.

Agora, escrevemos o algoritmo.

Início
1. Leia o comprimento c de um dos catetos.
2. Leia o comprimento a da hipotenusa.
3. Calcule $a^2 - c^2$.
4. Calcule a raiz quadrada positiva de $a^2 - c^2$.

Fim

Finalmente, organizamos o algoritmo em um fluxograma.



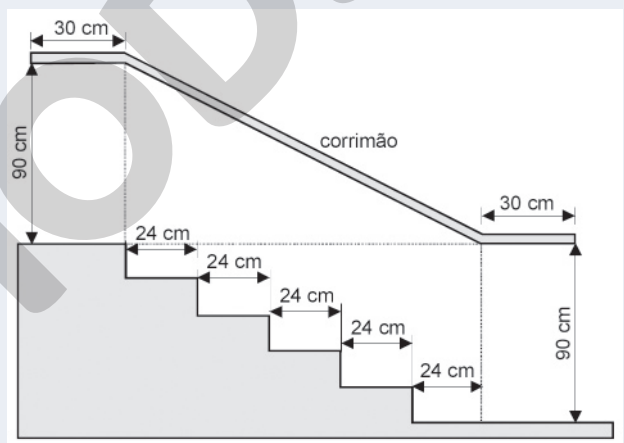
Em um fluxograma, cada tipo de figura possui um significado. No fluxograma ao lado, por exemplo, foram utilizadas as seguintes figuras:

Figura utilizada para indicar o início e o fim do fluxograma.

Figura utilizada para indicar uma ação a ser tomada.

R3 (Enem, 2006) Na figura ao lado, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a) 1,8 m c) 2,0 m e) 2,2 m
b) 1,9 m d) 2,1 m



REPRODUÇÃO

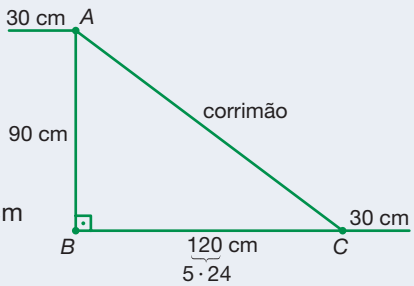
Resolução

Parte do corrimão da escada pode ser representado pela hipotenusa do ΔABC, como indicado no esquema.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = 22\,500 \Rightarrow AC = \sqrt{22\,500} = 150$$



RONALDO INÁCIO

Logo, o comprimento total do corrimão é:

$$30\,\text{cm} + AC + 30\,\text{cm} = 30\,\text{cm} + 150\,\text{cm} + 30\,\text{cm} = 210\,\text{cm}$$

Convertendo 210 cm em metros, temos:

$$210\,\text{cm} = 210 \cdot \frac{1}{100}\,\text{m} = 2{,}1\,\text{m}$$

Portanto, a alternativa correta é **d**.

Note que $AC = 150$ cm, pois $AC > 0$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

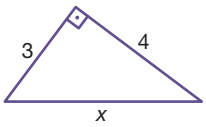
MODERNA

Exercícios e problemas

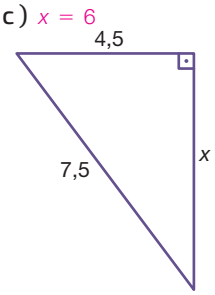
Anote as respostas no caderno.

5 Determine o valor de x em cada triângulo.

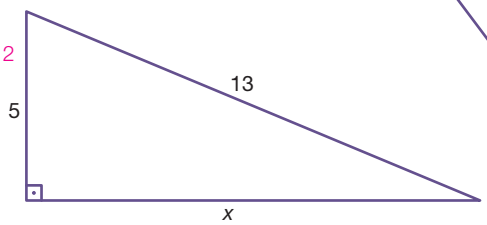
a) $x = 5$



c) $x = 6$



b) $x = 12$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

6 Escreva uma fórmula que expresse o comprimento da altura h de um triângulo equilátero em função do comprimento c de seu lado. Em seguida, a partir dessa fórmula, calcule o comprimento da altura de um triângulo equilátero cujo comprimento do lado seja 8 cm. $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$; $4\sqrt{3}$ cm

7 Determine o comprimento da diagonal de um retângulo de perímetro igual a 98 cm, sabendo que a razão entre os comprimentos do menor e do maior lado é $\frac{3}{4}$. 35 cm

No contexto

8 Vimos nas páginas 20 e 21 que, além dos gregos, outros povos conheciam casos particulares da relação atualmente conhecida como Teorema de Pitágoras, como é o caso dos egípcios.

Alguns problemas relacionados a triângulos retângulos foram encontrados no Papiro Matemático Cairo, que data de cerca de 300 a.C. Nele, estão propostos 40 problemas matemáticos, nove deles tratando exclusivamente do Teorema de Pitágoras. Resolva os problemas a seguir encontrados no Papiro Matemático Cairo.

[...]

a) Uma escada de 10 cúbitos está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que distância a escada alcança? 8 cúbitos

b) Um retângulo de área 60 cúbitos quadrados tem diagonal de 13 cúbitos. Determine os lados do retângulo. 5 e 12 cúbitos

[...]

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 87.

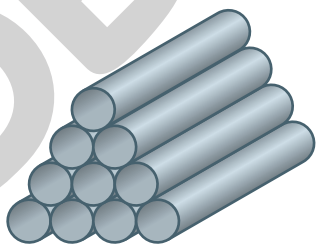
Cúbito: unidade de medida que equivale ao comprimento do antebraço de uma pessoa.

9 (Enem, 2014) Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm × 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo? alternativa a

a) Retirar 16 células.
b) Retirar 40 células.
c) Acrescentar 5 células.
d) Acrescentar 20 células.
e) Acrescentar 40 células.

10 Em um depósito, há vários tubos cujo diâmetro tem 30 cm de comprimento. Esses tubos deverão ser organizados em uma única pilha, de maneira que cada camada tenha um tubo a menos do que a imediatamente abaixo, como indicado na figura.



RONALDO INÁCIO

Quantos tubos, no mínimo, terá a pilha assim que ela alcançar a altura aproximada de 1,86 m? 28 tubos

11 Os televisores e monitores em formato *widescreen* ganharam muita popularidade entre os consumidores. Nesse formato a proporção da tela é de 16 : 9.

Por exemplo, em um televisor *widescreen* de 20" (20 polegadas), que é o tamanho da diagonal da tela, as dimensões da região de imagem são, aproximadamente, 17,4" por 9,8".

a) De acordo com as informações apresentadas, calcule as dimensões aproximadas de um televisor *widescreen* de:
- 29" 25,3" por 14,2"
- 32" 27,9" por 15,7"
- 42" 36,6" por 20,6"

b) Teobaldo mediu o comprimento e a largura de um televisor *widescreen* e obteve como resultado 110,69 cm e 62,26 cm, respectivamente. Considerando 1" = 2,54 cm, determine quantas polegadas tem a tela desse televisor. 50"

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

12 A construção de um edifício requer um trabalho minucioso, desde a fase da elaboração de seu projeto até a execução. Uma das etapas do processo de construção consiste na locação do edifício, ou seja, na demarcação dos eixos de suas paredes e demais elementos estruturais no terreno, conforme consta no projeto.

Durante a locação, é fundamental que as ações sejam realizadas da maneira mais precisa possível, para evitar erros que possam comprometer a construção como um todo, visto que, por exemplo, o posicionamento dos elementos de fundação utilizados – como estacas cravadas no chão – servirá como base para a execução de toda a sua estrutura.



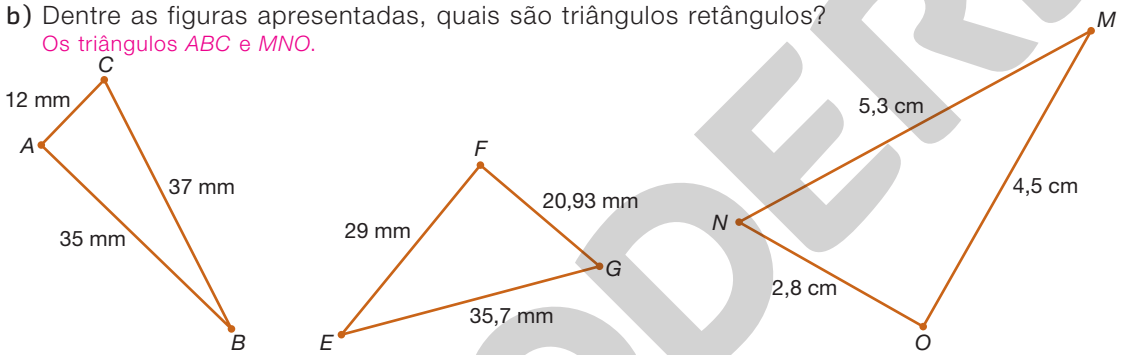
JOY FERA/SHUTTERSTOCK

Trabalhadores na etapa de locação do edifício.

Diante disso, é de extrema importância que haja, por exemplo, a conferência dos eixos ortogonais demarcados ao final de cada etapa de locação. Para esta conferência, podem ser utilizados equipamentos de topografia ou, mesmo de maneira simples, o método do triângulo retângulo, por meio dos quais é possível verificar se esses eixos formam ângulo reto.

a) Na construção civil, o princípio do triângulo retângulo mencionado consiste na ideia de formar triângulos com lados de 3 m, 4 m e 5 m de comprimento, por exemplo. Por que um triângulo com o comprimento dos lados igual a 0,6 m, 0,8 m e 1 m também pode ser utilizado para a verificação de ângulos retos?

b) Dentre as figuras apresentadas, quais são triângulos retângulos?
Os triângulos *ABC* e *MNO*.



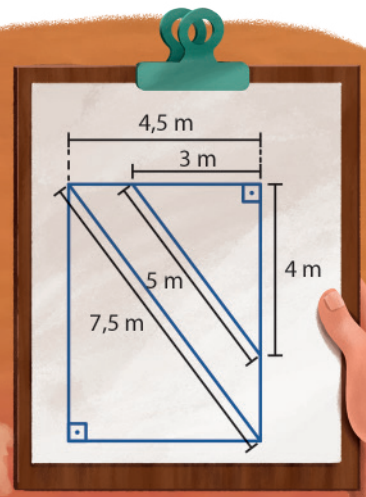
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

c) Observe as ilustrações.

a) Porque $1^2 = 0{,}6^2 + 0{,}8^2$, e se em um triângulo qualquer o quadrado do comprimento do lado maior for igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros lados, então o triângulo é retângulo.



Parte de um terreno demarcado para a construção de um dos cômodos de uma casa.



Modelo matemático da vista superior do cômodo.

LEO GIBRAN

Qual é o perímetro da região que será destinada à construção deste cômodo? 21 m

O item **d** da tarefa **12** propõe aos alunos que elaborem um problema/questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

d) Junte-se a um colega e realizem uma pesquisa a respeito de outras aplicações do Teorema de Pitágoras na construção civil. Em seguida, com as informações obtidas, elaborem um problema e troquem com outros colegas para que eles o resolvam. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Programas em VisualG

Em diversas situações é interessante programar um computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Em informática, **instrução** é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Nesta coleção, utilizaremos o VisualG, uma linguagem com comandos em português voltada para iniciantes em programação.

Estrutura de um programa em VisualG

Um programa escrito em VisualG é subdividido em três áreas distintas: o cabeçalho do programa, a área de declarações e o corpo do programa.

Cabeçalho do programa

Essa área é utilizada para indicar o início do programa e, também, seu nome. O cabeçalho do programa é atribuído pela instrução **Algoritmo**, seguida de um nome entre aspas. Veja um exemplo.

Algoritmo "soma"

Área de declarações

Área subdividida em algumas subáreas. Nesta coleção, restringiremos nosso estudo apenas à subárea dedicada à indicação das variáveis que serão utilizadas no programa. A declaração das variáveis é atribuída pela instrução **Var**, seguida da relação de variáveis.

Essas variáveis são identificadas por um rótulo e armazenam um valor ou texto. O rótulo pode conter letras, números ou *underline* (_), porém deve começar com uma letra. Além disso, cada variável deve ter seu tipo definido.

Observe no quadro alguns dos tipos mais comuns de variável.

Tipo	Variável representa
inteiro	números inteiros
real	números reais
caractere	sequência de caracteres

Para definir o tipo da variável, deve-se escrever seu rótulo (ou vários rótulos, separados por vírgula), seguido por dois-pontos (:) e o seu tipo. Veja alguns exemplos.

Var

x : real

al : caractere

a, b, c, d : inteiro

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Corpo do programa

Essa área é utilizada para escrever as instruções que devem ser seguidas pelo computador. Seu início é indicado pela instrução **Inicio** e seu fim, pela instrução **Fimalgoritmo**.

```
Início
Sequência de
instruções;
Fimalgoritmo
```

Ao utilizar caracteres especiais (como letras acentuadas, sinais de pontuação e espaço), alguns problemas de exibição e execução do programa podem ocorrer. Por isso, recomenda-se usar termos semelhantes sem caracteres especiais, como em **Inicio** e **Fimalgoritmo**.

Exemplo de um programa em VisualG – Teorema de Pitágoras

Agora, vamos colocar em prática os conceitos estudados. Para isso, considere o seguinte problema.

Escrever um programa que calcule o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, dados os comprimentos dos seus catetos.

Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo que o resolva. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1. Leia o comprimento de um dos catetos.
2. Leia o comprimento do outro cateto.
3. Calcule a raiz quadrada da soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Fim

Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "Teorema_de_Pitagoras"
2  Var
3  a, b, c: real
4  Inicio
5  escreva ("Digite o comprimento de um dos catetos: ")
6  leia(a)
7  escreva ("Digite o comprimento do outro cateto: ")
8  leia(b)
9  c <- raizq(a*a+b*b)
10 escreva ("O comprimento da hipotenusa é: ",c)
11 Fimalgoritmo
```

No corpo do programa em VisualG são indicados os comandos que fazem as operações. Veja a seguir o que fazem os comandos utilizados no exemplo.

escreva: apresenta na tela o conteúdo inserido entre parênteses.

leia: atribui o valor informado pelo usuário na variável indicada.

<-: atribui o valor da expressão à direita do sinal na variável indicada à esquerda.

raizq: calcula a raiz quadrada da expressão entre parênteses.

Para a expressão, podem ser usados sinais como + (adição), − (subtração), * (multiplicação) e / (divisão), além dos parênteses, que no VisualG podem ser usados com outros parênteses, em vez de usar chaves e colchetes.

Agora é com você!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 Qual informação deve ser inserida pelo usuário quando o programa executar a instrução da linha 5?

2 Escreva um programa em VisualG que determine o comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo, dados os comprimentos da hipotenusa e do outro cateto.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



GRANGER/FOTOARENA

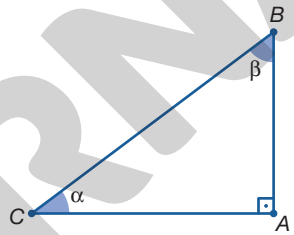
Um dos mais importantes astrônomos da Antiguidade foi o grego Hiparco, que viveu por volta de 146 a.C. Além de feitos notáveis na Astronomia, Hiparco realizou diversas contribuições para o desenvolvimento da Trigonometria.

Trigonometria no triângulo retângulo

Conforme estudamos anteriormente, as relações métricas (incluindo o Teorema de Pitágoras) envolvem os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Contudo, existem relações que envolvem tanto os comprimentos dos lados quanto as medidas dos ângulos internos de um triângulo. O estudo dos métodos para calcular os comprimentos dos lados ou a medida dos ângulos de um triângulo faz parte do ramo da Geometria denominado Trigonometria (trigon = triângulo e metria = medida).

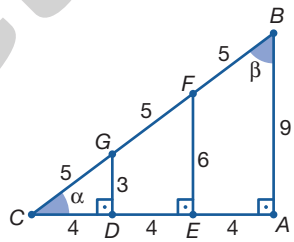
Não se sabe ao certo a origem da Trigonometria, porém, há registros relacionados a ela no Papiro de Rhind, que data de cerca de 1650 a.C. É provável que seu estudo inicial esteja diretamente ligado à Astronomia. Atualmente, a Trigonometria é utilizada por profissionais de diversas áreas, como engenheiros, astrônomos e geógrafos.

Para iniciarmos o estudo da Trigonometria, considere o triângulo retângulo *ABC* ao lado.



Nesse triângulo, em relação ao ângulo α, $\overline{AB}$ é o **cateto oposto** e $\overline{AC}$ é o **cateto adjacente**. Já em relação ao ângulo β, $\overline{AC}$ é o cateto oposto e $\overline{AB}$ é o cateto adjacente.

Agora, considere a figura ao lado. Nela podemos identificar os triângulos retângulos semelhantes *ABC*, *EFC* e *DGC*.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Qual caso garante a semelhança dos triângulos *ABC*, *EFC* e *DGC*? Caso de semelhança AA.

Em relação ao ângulo α, por semelhança de triângulos, temos:

- as razões entre o comprimento do cateto oposto a α e o comprimento da hipotenusa em cada triângulo são iguais.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FC} = \frac{DG}{GC} = \frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

A razão entre o comprimento do cateto oposto a α e o comprimento da hipotenusa é denominada **seno** do ângulo cuja medida é α e é indicada por $\operatorname{sen}\alpha$. Nesse caso, $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$.

- as razões entre o comprimento do cateto adjacente a α e o comprimento da hipotenusa em cada triângulo são iguais.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{EC}{FC} = \frac{DC}{GC} = \frac{12}{15} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

A razão entre o comprimento do cateto adjacente a α e o comprimento da hipotenusa é denominada **cosseno** do ângulo cuja medida é α e é indicada por $\cos\alpha$. Nesse caso, $\cos\alpha = 0{,}8$.

- as razões entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente a α em cada triângulo são iguais.

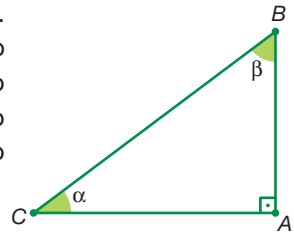
$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EC} = \frac{DG}{DC} = \frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

A razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente a α é denominada **tangente** do ângulo cuja medida é α e é indicada por $\operatorname{tg}\alpha$. Nesse caso, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

As razões seno, cosseno e tangente são denominadas **razões trigonométricas**. Em um triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é dado pela razão entre o comprimento do cateto oposto a ele e o comprimento da hipotenusa; o cosseno desse ângulo é dado pela razão entre o comprimento do cateto adjacente a ele e o comprimento da hipotenusa; e a tangente é dada pela razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente a esse ângulo.



Considere, por exemplo, o triângulo retângulo *ABC* ao lado.

Com base nesse triângulo, temos:

- em relação ao ângulo α:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overbrace{AB}^{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}}{\underbrace{BC}_{\text{comprimento da hipotenusa}}} \qquad \cos\alpha = \frac{\overbrace{AC}^{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}}{\underbrace{BC}_{\text{comprimento da hipotenusa}}} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overbrace{AB}^{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}}{\underbrace{AC}_{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}}$$

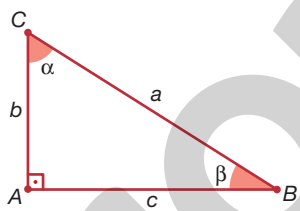
- em relação ao ângulo β:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overbrace{AC}^{\text{comprimento do cateto oposto a } \beta}}{\underbrace{BC}_{\text{comprimento da hipotenusa}}} \qquad \cos\beta = \frac{\overbrace{AB}^{\text{comprimento do cateto adjacente a } \beta}}{\underbrace{BC}_{\text{comprimento da hipotenusa}}} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\overbrace{AC}^{\text{comprimento do cateto oposto a } \beta}}{\underbrace{AB}_{\text{comprimento do cateto adjacente a } \beta}}$$

Relações envolvendo seno, cosseno e tangente

Observe algumas relações envolvendo o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo.

Considerando o triângulo retângulo *ABC*, temos:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

- A relação fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

  Para demonstrar essa relação, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*: $a^2 = b^2 + c^2$. Dividindo ambos os membros por a^2, temos:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

  Como $\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, segue que:

$$1 = (\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

- $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$.

  Essa relação estabelece que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do complementar desse ângulo, e vice-versa.

  A demonstração dessa relação é imediata. Do triângulo retângulo *ABC*, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} = \cos\beta \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$$

> Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90°.
> Logo, podemos interpretar a relação $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ como
> $\operatorname{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha)$ e $\cos\alpha = \operatorname{sen}(90° - \alpha)$, para $0° < \alpha < 90°$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

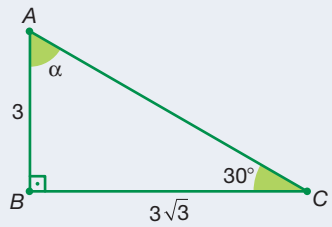
MODERNA

R4 Observe o triângulo retângulo ao lado.
Em relação a esse triângulo, determine:

a) sen 30°, cos 30° e tg 30°.

b) a medida do ângulo α.

c) sen α, cos α e tg α.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Inicialmente, determinamos AC utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = 36 \Rightarrow AC = \sqrt{36} = 6$$

Note que $AC = 6$, pois $AC > 0$.

a) $\text{sen } 30° = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \text{sen } 30° = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30° = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow \cos 30° = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 30° = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \text{tg } 30° = \dfrac{3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, logo:

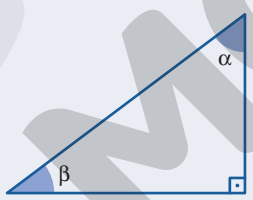
$$\alpha + 30° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 120° = 60°$$

c) $\text{sen } \alpha = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow \text{sen } 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \alpha = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \cos 60° = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \text{tg } 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

R5 Calcule tg β no triângulo retângulo a seguir, sabendo que sen $\alpha = 0{,}8$.



RONALDO INÁCIO

As razões trigonométricas sen α, cos α e tg α são sempre positivas no triângulo retângulo, pois são calculadas a partir dos comprimentos de seus lados.

Resolução

Da relação $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0{,}8^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}36 \Rightarrow \underbrace{\cos\alpha}_{\cos\alpha > 0} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

Como α e β são complementares, temos sen β = cos α e cos β = sen α. Para calcular tg β, podemos utilizar a relação $\text{tg } \beta = \dfrac{\text{sen } \beta}{\cos \beta}$:

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{\overbrace{\cos \alpha}^{\text{sen } \beta = \cos \alpha}}{\underbrace{\text{sen } \alpha}_{\cos \beta = \text{sen } \alpha}} \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

Note que, de maneira geral, $\text{sen}^2\alpha \neq \text{sen } \alpha^2$, pois:
- $\text{sen}^2\alpha = (\text{sen } \alpha)^2 = \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \alpha$
- $\text{sen } \alpha^2 = \text{sen}\left(\alpha^2\right) = \text{sen}(\alpha \cdot \alpha)$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

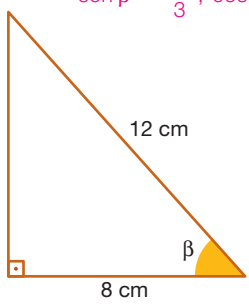
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

13 Calcule o seno, o cosseno e a tangente de β.

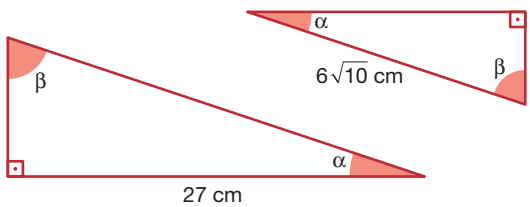
$\text{sen}\,\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$ e $\text{tg}\,\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

RONALDO INÁCIO



14 Os triângulos a seguir são semelhantes, com razão de proporcionalidade $\frac{3}{2}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

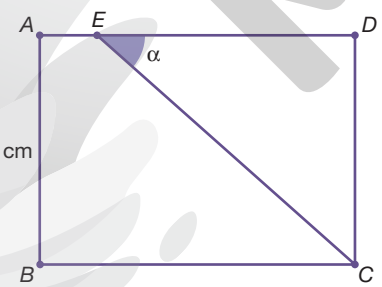


De acordo com as medidas indicadas, determine:

a) sen α.
b) cos α.
c) tg α.
d) sen β.
e) cos β.
f) tg β.

a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ f) 3

15 Calcule a tangente de α, sabendo que o retângulo *ABCD* tem 76 cm de perímetro e o trapézio *ABCE*, 4 cm de base menor. $\text{tg}\,\alpha = \frac{8}{9}$



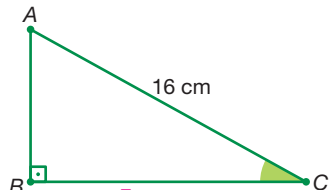
RONALDO INÁCIO

16 Se α e β são ângulos agudos e complementares, mostre que $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\beta}$.

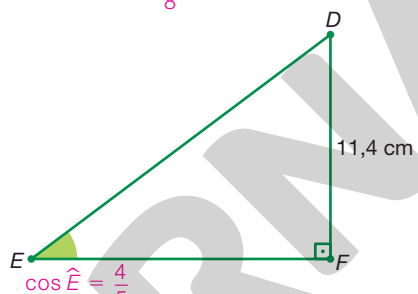
Note que $\cos\beta = \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}}$.

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta} = \frac{1}{\text{sen}\,\beta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}} = \frac{1}{\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}} = \frac{1}{\text{tg}\,\beta}$

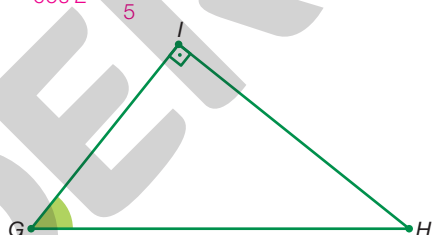
17 Calcule o cosseno dos ângulos $\hat{C}$, $\hat{E}$ e $\hat{G}$, sabendo que seus senos são respectivamente $\frac{\sqrt{15}}{8}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{5\sqrt{41}}{41}$.



$\cos\hat{C} = \frac{7}{8}$



$\cos\hat{E} = \frac{4}{5}$

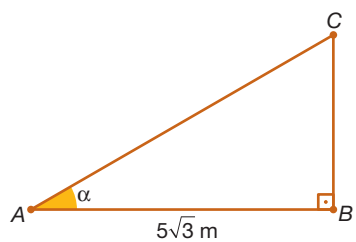


$\cos\hat{G} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

18 Considere o triângulo retângulo *ABC*.

RONALDO INÁCIO



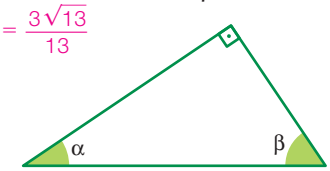
Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$, calcule:

a) cos α. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) tg α. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) o comprimento da hipotenusa. 10 m
d) o comprimento do cateto oposto a α. 5 m

19 Desafio

Em um triângulo retângulo de ângulos agudos α e β, a tangente de α é igual a $\frac{2}{3}$. Determine o seno de β.

$\text{sen}\,\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

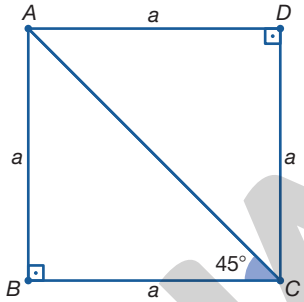
MODERNA

Ângulos notáveis

Com a finalidade de auxiliar no estudo da Trigonometria, veremos agora como obter o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Esses ângulos são denominados ângulos notáveis, pois costumam aparecer com frequência no estudo da Trigonometria.

Para determinar o seno, o cosseno e a tangente de 45°, considere o quadrado *ABCD*.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = 2a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$$

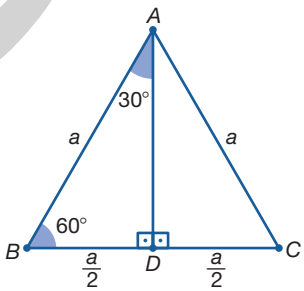
Note que $AC = a\sqrt{2}$, pois $a > 0$ e $AC > 0$.

Considerando o triângulo retângulo *ABC*, temos:

- $\text{sen } 45° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } 45° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}} \Rightarrow \text{tg } 45° = 1$

Agora, considere o triângulo equilátero *ABC*.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:



$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = (AD)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AD)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AD)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Lembre-se de que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°.

Considerando o triângulo retângulo *ABD*, temos:

- $\text{sen } 30° = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{\cancel{a}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{a}} \Rightarrow \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{a}} \Rightarrow \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 30° = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{a}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Sugira aos alunos que, no caderno, organizem os resultados obtidos em um quadro conforme apresentado.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Com base em relações estudadas, temos:

- $\text{sen } 60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30° \Rightarrow \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \text{sen}(90° - 60°) = \text{sen } 30° \Rightarrow \cos 60° = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 60° = \dfrac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \Rightarrow \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
MODERNA

Tabela trigonométrica

A tabela a seguir apresenta valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos, cujas medidas são inteiras e variam de 1° a 89°. Esses valores são úteis para a resolução de alguns problemas que envolvem triângulos retângulos.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017	1,000	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
26°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,469	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,747
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,331
78°	0,978	0,208	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	1,000	0,017	57,290

Note que os valores da tabela para as razões trigonométricas estão aproximadas aos milésimos. Contudo, é possível obter uma aproximação com um número maior de casas decimais, utilizando, por exemplo, uma calculadora científica ou uma planilha eletrônica. Explique aos alunos que a maior parte dos valores apresentados na tabela corresponde a aproximações de números irracionais. Peça-lhes, por exemplo, que comparem o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos notáveis obtidos anteriormente e os apresentados na tabela.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Construção de tabela trigonométrica

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Além disso, elas possibilitam a organização de dados e possuem recursos para realizar cálculos, esboçar gráficos, restringir dados, fazer preenchimentos automáticos, entre outras funcionalidades. Algo importante a destacar é que uma planilha se divide em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (indicada por um número) com uma coluna (indicada por uma letra). As planilhas eletrônicas são úteis para abordar diversos assuntos, como aqueles relacionados à Trigonometria.

Nessa seção, vamos construir uma tabela trigonométrica em que podemos aumentar ou diminuir a quantidade de casas decimais das aproximações. Para isso, vamos utilizar o Calc, que é uma das planilhas eletrônicas disponíveis. No Suplemento para o professor há mais informações sobre a planilha eletrônica Calc.

A Digite os textos na planilha como na figura a seguir.

	A	B	C	D	E
1	Ângulo				
2	em graus	em radianos	Seno	Cosseno	Tangente
3					

Selecione as células **A1** e **B1** e clique na função **Mesclar e Centralizar**. Caso abra uma janela para confirmar, clique no botão **Sim**.

B Na célula **A3**, digite 1, que corresponde a 1° e, em **B3**, digite $=\text{radianos}(A3)$ e pressione a tecla **Enter** para converter a unidade graus em radianos, já que, em geral, as planilhas utilizam radianos para o cálculo das razões trigonométricas.

O radiano é uma unidade de medida de arco. Essa unidade de medida será estudada no **tema 4** deste volume.

C Na célula **C3**, digite $=\text{sen}(B3)$ e pressione a tecla **Enter**. O valor do seno do ângulo indicado na célula **B3** será calculado.

D Na célula **D3**, digite $=\cos(B3)$ e pressione a tecla **Enter**. O valor do cosseno do ângulo indicado na célula **B3** será calculado.

E Na célula **E3**, digite $=\tan(B3)$ e pressione a tecla **Enter**. O valor da tangente do ângulo indicado na célula **B3** será calculado.

	A	B	C	D	E
1	Ângulo				
2	em graus	em radianos	Seno	Cosseno	Tangente
3	1	0,017453293	0,017452406	0,999847695	0,017455065
4					

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

F Para aumentar ou diminuir a quantidade de casas decimais, selecione o intervalo desejado e utilize as funções **Aumentar Casas Decimais** e **Diminuir Casas Decimais**, respectivamente. Por fim, complete a tabela trigonométrica. Para isso, selecione o intervalo **A3:E3**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste até a linha desejada.

A cada clique realizado nessas funções é aumentada ou diminuída uma casa decimal nos valores do seno, cosseno e tangente.

Agora é com você!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 Construa uma tabela trigonométrica com o seno, o cosseno e a tangente de ângulos de 1° a 89°, com aproximação à sexta casa decimal.

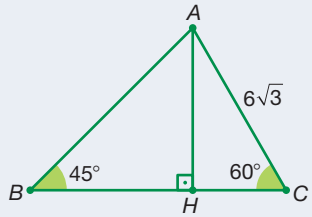
Utilize as opções de formatação do programa utilizado para melhorar a aparência da tabela da maneira que desejar.

2 Calcule.

a) $\text{sen}(30{,}5°)$ b) $\cos(42{,}25°)$ c) $\text{tg}(25{,}71°)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R6 Considere o triângulo *ABC*. Determine *AH*, *HC* e *BC*.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Inicialmente, obtemos *AH* e *HC* calculando, respectivamente, o seno e o cosseno de 60° no triângulo retângulo *AHC*.

- $\operatorname{sen} 60° = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{6\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9$
- $\cos 60° = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{HC}{6\sqrt{3}} \Rightarrow HC = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Em seguida, obtemos *BH*, calculando a tangente de 45° no triângulo retângulo *ABH*.

- $\operatorname{tg} 45° = \frac{AH}{BH} \Rightarrow 1 = \frac{9}{BH} \Rightarrow BH = 9$

Calculando *BC*, temos:

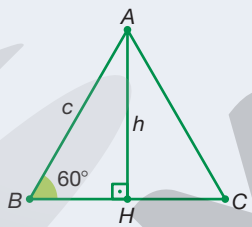
$$BC = BH + HC \Rightarrow BC = 9 + 3\sqrt{3}$$

Portanto, $AH = 9$, $HC = 3\sqrt{3}$ e $BC = 9 + 3\sqrt{3}$.

R7 Mostre que o comprimento da altura *h* de um triângulo equilátero, com comprimento do lado igual a *c*, é dado por $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Resolução

Na página **34** mostramos essa relação utilizando o Teorema de Pitágoras e, agora, vamos utilizar a razão seno. Para isso, considere o triângulo equilátero *ABC*, de lado *c* e altura *h*.



RONALDO INÁCIO

A fim de simplificar a escrita, vamos dizer, em alguns contextos, "segmento *m*" quando, na realidade, queremos nos referir à medida do comprimento desse segmento, que nesse caso é *m*. Por exemplo, em vez de dizer "raio cuja medida do comprimento é *r*", diremos "raio *r*".

Calculando o seno do ângulo $A\hat{B}C$, temos:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{c} \Rightarrow 2h = c\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, o comprimento da altura de um triângulo equilátero de lado *c* é dado por $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

R8 Mostre que em um triângulo retângulo que possui um ângulo interno de 30°, o comprimento do cateto oposto a esse ângulo é igual à metade do comprimento da hipotenusa.

Resolução

Sejam $\overline{AB}$ o cateto oposto ao ângulo de 30° e $\overline{BC}$ a hipotenusa. Calculando sen 30°, verificamos que o comprimento do cateto oposto ao ângulo de 30° é igual à metade da hipotenusa.

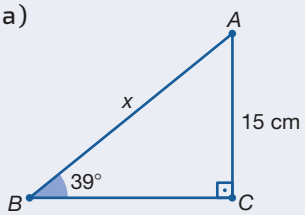
$$\operatorname{sen} 30° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

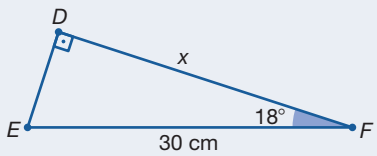
MODERNA

R9 Consulte a tabela trigonométrica da página **35** e determine o valor aproximado de x em cada triângulo.

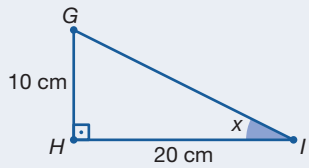
a)



b)



c)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Resolução

a) Obtemos x calculando o seno de 39°.

$$\operatorname{sen} 39° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow 0{,}629 = \frac{15}{x} \Rightarrow 0{,}629x = 15 \Rightarrow x = 23{,}847$$

Portanto, $x \simeq 23{,}847$ cm.

b) Obtemos x calculando o cosseno de 18°.

$$\cos 18° = \frac{DF}{EF} \Rightarrow 0{,}951 = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 28{,}53$$

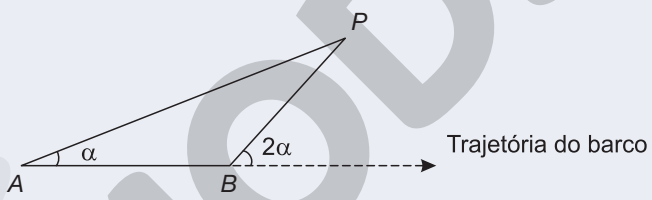
Portanto, $x \simeq 28{,}53$ cm.

c) Calculando a tangente de x, temos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{GH}{HI} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

Consultando a tabela, verificamos que $x \simeq 27°$.

R10 (Enem, 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação.

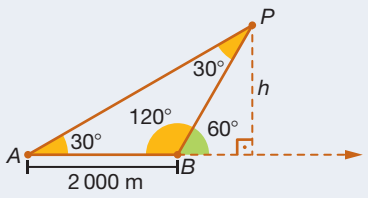


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2\,000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) 1 000 m b) $1\,000\sqrt{3}$ m c) $2\,000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m d) 2 000 m e) $2\,000\sqrt{3}$ m

Resolução

A menor distância do barco até o ponto P corresponde à altura h do triângulo ABP relativa ao lado $\overline{AB}$, como indicado na figura.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Observe que $A\hat{B}P = 120°$, pois $A\hat{B}P$ é suplementar ao ângulo $2\alpha = 60°$, e $A\hat{P}B = 30°$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Como $B\hat{A}P = A\hat{P}B$, o triângulo ABP é isósceles. Então $BP = AB = 2\,000$ m. Segue que:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{h}{2\,000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2\,000} \Rightarrow h = 1\,000\sqrt{3}\text{ m}$$

Logo, a menor distância do barco até o ponto fixo P é $1\,000\sqrt{3}$ m.

Portanto, a alternativa correta é a **b**.

MODERNA

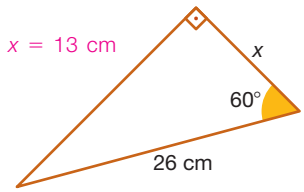
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

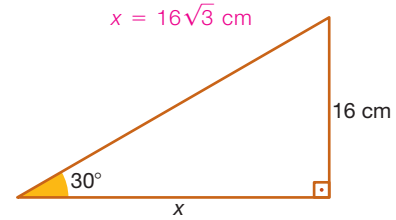
Anote as respostas no caderno.

20 Em cada item, determine a medida x indicada.

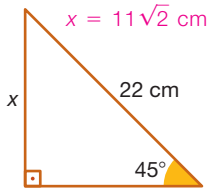
a)



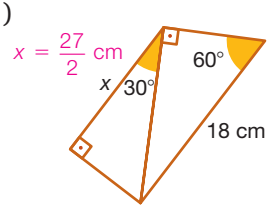
b)



c)



d)

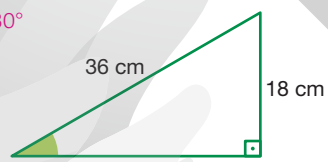


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

21 Antônio desenhou um triângulo ABC, retângulo em A, em seu caderno. Sabendo que esse triângulo tem dois ângulos congruentes e que $AB = 5\sqrt{2}$ cm, determine o comprimento de $\overline{BC}$. 10 cm

22 De acordo com os comprimentos dos lados de cada triângulo, determine as medidas dos ângulos destacados em verde.

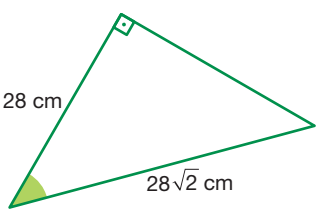
a) 30°



b) 60°

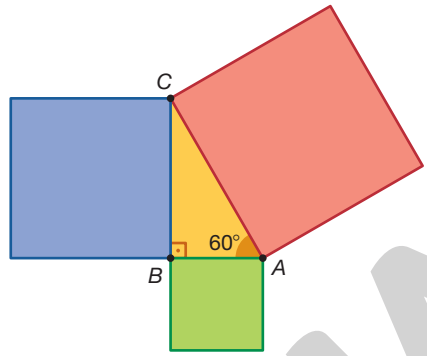


c) 45°



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

23 A imagem apresentada a seguir é formada por um triângulo retângulo e três quadrados.

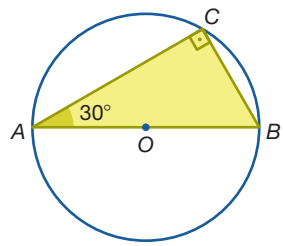


SERGIO L. FILHO

Se $AB = 4{,}5$ cm, então a soma das áreas dos três quadrados é: alternativa **a**

a) 162 cm^2.
b) 53,9 cm^2.
c) 90 cm^2.
d) 21,3 cm^2.
e) 202,5 cm^2.

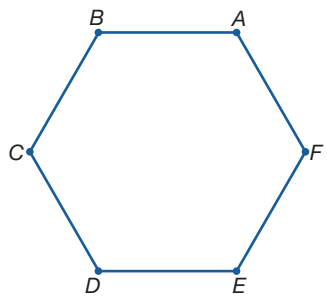
24 Em uma aula de educação física, o professor desenhou uma circunferência de centro O e raio 5 m. Sobre essa circunferência, ele posicionou três cones que, no esquema a seguir, estão indicados pelos pontos A, B e C.



SERGIO L. FILHO

a) Qual é a distância entre os cones A e B? 10 m
b) Determine a distância entre os cones A e C. $5\sqrt{3}$ m

25 Determine o comprimento das diagonais $\overline{CE}$ e $\overline{AD}$ do hexágono regular, sabendo que ele possui 6 cm de perímetro. $CE = \sqrt{3}$ cm e $AD = 2$ cm



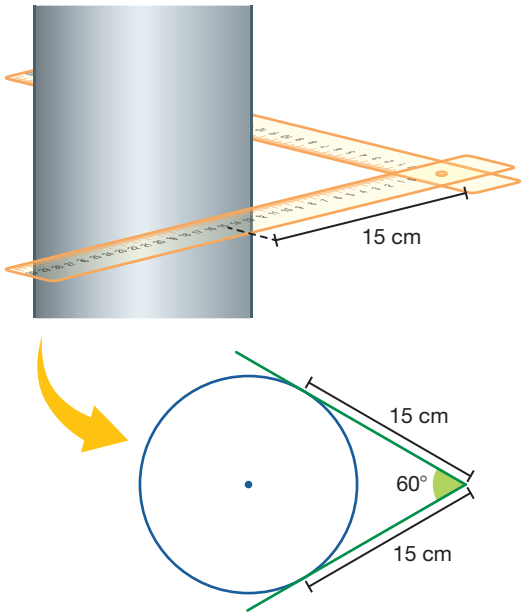
RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

26 Desafio

Na medição do diâmetro de um tubo de aço cujas extremidades estão inacessíveis, um operário utilizou um instrumento em forma de "V", com hastes graduadas, como ilustrado a seguir.

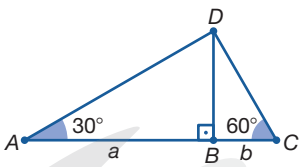


RONALDO INÁCIO

Esquema matemático.

De acordo com as informações, calcule aproximadamente o diâmetro do tubo. 17,3 cm

27 A partir da figura a seguir, determine:



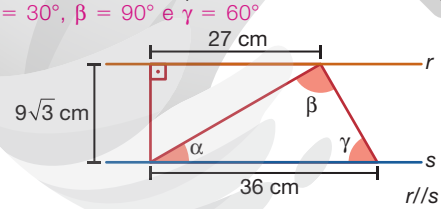
RONALDO INÁCIO

a) o valor de $\frac{a}{b}$. 3

b) o seno de $B\hat{D}C$. $\frac{1}{2}$

c) a tangente de $A\hat{D}B$. $\sqrt{3}$

28 Determine a medida dos ângulos α, β e γ na figura abaixo, sabendo que as retas r e s são paralelas. $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$ e $\gamma = 60°$



RONALDO INÁCIO

29 Utilizando a tabela trigonométrica da página 35, determine o seno, o cosseno e a tangente de:

a) 78° b) 5° c) 52°

Respostas no final do livro.

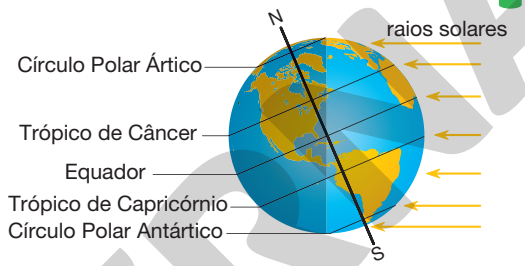
30 Determine a medida aproximada do ângulo agudo:

a) cujo seno é 0,21. 12°

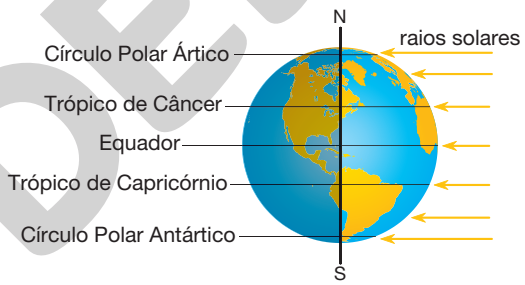
b) cujo cosseno é 0,239. 76°

c) cuja tangente é 0,858. 41°

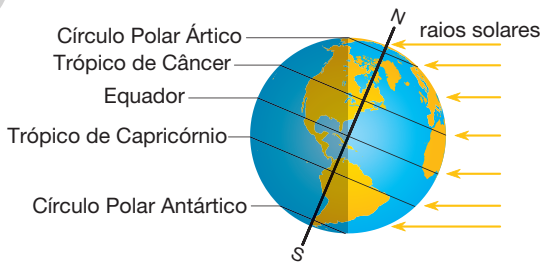
31 Em virtude da inclinação do eixo de rotação da Terra em relação ao plano da órbita, ora um hemisfério está voltado para o Sol, ora o outro hemisfério. Em consequência disso, ocorrem os solstícios, que são os dois instantes do ano em que o Sol mais se afasta do equador terrestre, marcando o início do verão em um hemisfério e do inverno no outro. Entre os solstícios, ocorrem os equinócios, que são os dois momentos do ano em que os hemisférios estão simetricamente dispostos em relação ao Sol, e os raios solares são paralelos ao equador, marcando o início da primavera em um dos hemisférios e do outono no outro. Nos equinócios, o dia e a noite têm a mesma duração.



Solstício de verão no hemisfério Sul e de inverno no hemisfério Norte.



Equinócios.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Solstício de verão no hemisfério Norte e de inverno no hemisfério Sul.

Durante um equinócio, estão localizadas sobre o mesmo meridiano uma torre, a 30° de latitude, projetando uma sombra de 33 m, e uma pessoa, a 60° de latitude, projetando uma sombra de 3 m. Sabendo que nesse mesmo instante, no encontro desse meridiano com a linha do Equador, os raios solares incidem na Terra perpendicularmente, determine a altura aproximada da torre e da pessoa. Torre: 57 m; pessoa: 1,73 m

Latitude: distância angular (em relação ao centro da Terra) entre um ponto localizado na superfície terrestre e a linha do Equador.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

32 A acessibilidade busca garantir o uso, com segurança e autonomia, dos espaços e serviços que a cidade oferece independentemente da necessidade de cada um, sendo ela permanente ou temporária, fornecendo a maior independência possível.

Para garantir a melhoria da qualidade de vida das pessoas com algum tipo de necessidade especial atitudes podem ser adotadas, como:

- legendas ou intérpretes de libras em programas de televisão, para deficientes auditivos;
- livros escritos em braile e *softwares* especiais para navegação na internet, para deficientes visuais;
- espaços físicos planejados, em locais públicos e privados, para o deslocamento de deficientes físicos ou pessoas com mobilidade reduzida.

Algumas dessas melhorias são regulamentadas por leis e normas, uma delas é a que estabelece a inclinação máxima que uma rampa de acesso deve ter, informando que a razão entre a altura a que se deseja acessar e o comprimento horizontal c da rampa deve ser no máximo 0,0833.

a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é para evitar rampas muito íngremes, o que dificultaria o deslocamento sobre elas. $\frac{a}{c} \leqslant 0{,}0833$

Assim, por exemplo, para acessar uma altura de 1 m, é necessário que o comprimento horizontal da rampa não seja inferior a 12 m, pois $\frac{1}{12} \simeq 0{,}0833$.

Fonte de pesquisa: <http://www.ibdd.org.br/arquivos/acessibilidade.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2020.

a) Em sua opinião, por que foi estabelecida essa razão máxima?

b) Para acessar uma altura de 50 cm, qual deve ser, aproximadamente, o comprimento horizontal mínimo da rampa? 600 cm ou 6 m

c) Entre quais medidas inteiras de ângulo, em graus, deve ser a inclinação máxima de uma rampa em relação à horizontal? Entre 4° e 5°*

*Caso os alunos tenham dificuldade em resolver esse item, sugira que realizem o desenho de um esquema para representar a rampa, indicando o ângulo de inclinação sugerido. Depois, consultem a tabela trigonométrica.

Ser consciente

> Realize uma pesquisa para determinar algumas atitudes, além das apresentadas no texto, que podem auxiliar pessoas com alguma necessidade especial. Algumas possíveis respostas: banheiros adaptados para cadeirantes e piso tátil para deficientes visuais.

33 Elabore um problema envolvendo as relações métricas em um triângulo retângulo. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas. *

*Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

34 Para o cálculo do seno ou do cosseno de um ângulo agudo, além da tabela trigonométrica, podemos utilizar uma calculadora científica. Veja o procedimento utilizado para o cálculo do seno e do cosseno de 55°.

Calculadora

Inicialmente pressionamos a tecla seno: sin

Oriente os alunos sobre como verificar se a calculadora está operando com a unidade de medida de ângulos em graus.



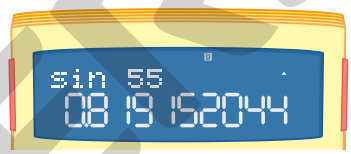
Em seguida, inserimos o número 55, correspondente a 55°: 5 → 5

Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a tarefa ou, então, veja a possibilidade de trazer algumas calculadoras para a sala de aula.



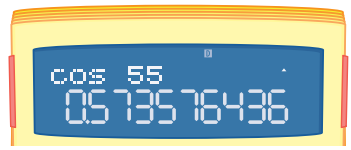
Por fim, pressionamos = para obter o valor de sen 55°.

Peça aos alunos que comparem os resultados obtidos na calculadora científica com aqueles da tabela trigonométrica apresentada no início desta seção.



Para calcular cos 55°, procedemos de maneira semelhante, utilizando desta vez a tecla cosseno.

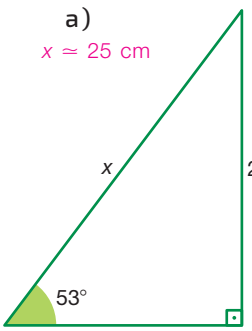
cos → 5 → 5 → =



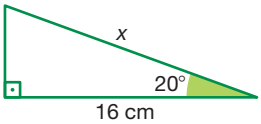
ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Utilize uma calculadora científica para determinar o valor aproximado de x em cada figura.

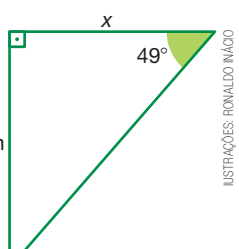
a) $x \simeq 25$ cm



b) $x \simeq 17$ cm



c) $x \simeq 13$ cm



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

*A tarefa **33** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Sin e *cos* são abreviações das palavras inglesas *sine* e *cosine*, que correspondem a seno e cosseno, respectivamente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

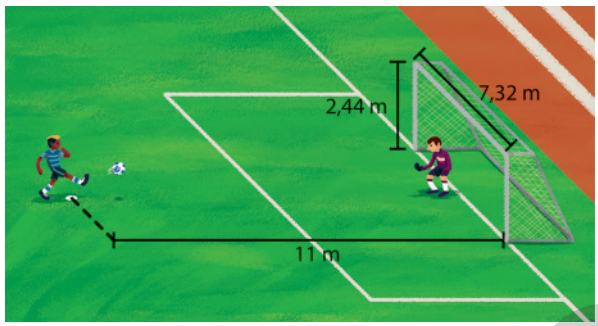
35 Elabore um problema envolvendo as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Por fim, troque com um colega para que ele o resolva. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas.

> Se achar necessário, construa um triângulo retângulo, indique algumas de suas medidas e elabore o problema a partir dessa construção.

36 Desafio

Um dos esportes mais populares do mundo é o futebol. Como em muitos outros esportes, há várias regras que regem sua prática, dentre elas algumas referentes às medidas e às marcações do campo de jogo.

Veja no esquema a seguir algumas das medidas de um campo de futebol, considerando as dimensões internas do gol.



LEO GIBRAN

35. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

De acordo com as medidas indicadas no esquema, e supondo que a bola siga uma trajetória retilínea após um chute da marca do pênalti, responda.

a) Em relação ao centro do gol, qual é o ângulo em que um jogador deve chutar a bola para que ela atinja o canto inferior esquerdo? aproximadamente 18°

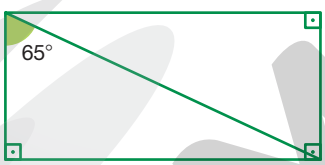
b) Em relação ao plano do chão, qual é o ângulo em que deve ser chutada a bola para que ela atinja o centro do gol, na parte superior? aproximadamente 12°

c) Se um jogador chutar a bola num ângulo maior do que 30° em relação ao centro do gol, ela atingirá a área interna às traves? Por quê? Não, pois o maior ângulo possível para acertar o gol é de aproximadamente 22°, atingido quando a bola é chutada em direção ao canto superior esquerdo ou direito.

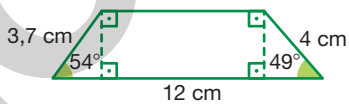
37 Calculadora

Com o auxílio de uma calculadora, determine o perímetro aproximado de cada figura.

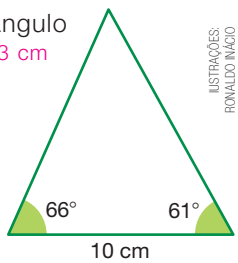
a) retângulo
41 cm



b) trapézio
27 cm



c) triângulo
32,3 cm



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

38 A tirolesa é uma técnica utilizada para o transporte de carga de um ponto a outro. Nessa técnica, a carga é presa a uma roldana que desliza por um cabo, cujas extremidades geralmente estão em alturas diferentes. A tirolesa também é utilizada como prática esportiva, sendo considerada um esporte radical. Em geral, ela é praticada em meio a paisagens naturais com outros esportes, como o rapel.

Em certo parque, a estrutura para a prática da tirolesa foi montada de maneira que a diferença entre as alturas das extremidades do cabo por onde os participantes deslizam é de cerca de 60 m, e o ângulo de descida formado com a vertical é de 80°.

Nessas condições, e considerando o cabo esticado, é correto afirmar que: alternativa b

a) a distância horizontal percorrida ao fim do percurso é 10% menor do que o comprimento do cabo.

b) um praticante que desliza ao longo do cabo com uma velocidade constante de 12 m/s completa o percurso em aproximadamente 29 s. Explique aos alunos que m/s é a indicação de medida de velocidade em metros por segundo.

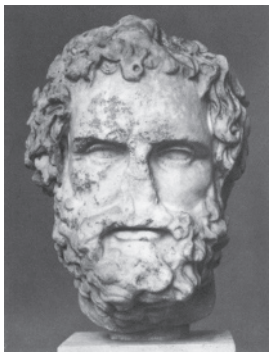
c) um praticante que se deslocou ao longo do cabo a uma velocidade média vertical de 5 m/s completou o percurso em 20 s.

d) a distância do percurso é de 500 m.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

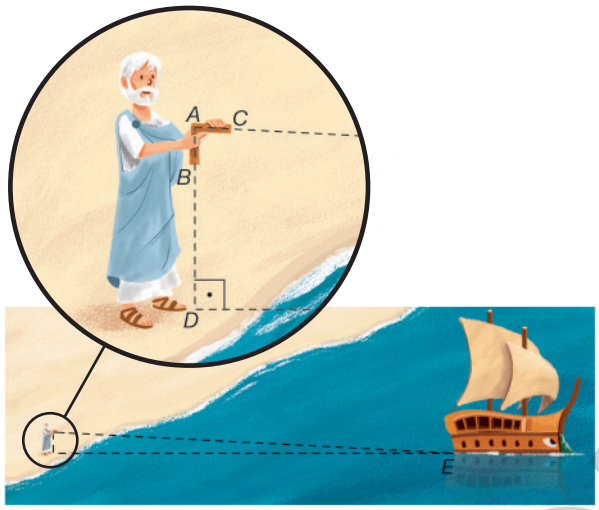
MODERNA

39 Há relatos de que Tales de Mileto (c. 600 a.C.), em certa ocasião, utilizou a congruência de triângulos para calcular a distância de um navio à praia. Segundo dizem, de posse de um instrumento formado por duas hastes articuladas, ele manteve uma delas $(\overline{AB})$ apontada verticalmente para o chão, no ponto D, e a outra $(\overline{AC})$ apontada para o navio, no ponto E, de acordo com o esquema.



GRANGER/FOTOARENA – MUSEU NACIONAL ROMANO, ROMA

Antiga escultura grega de Tales de Mileto.



Em seguida, sem mudar a abertura das hastes, girou o instrumento projetando um ponto P na praia.



ILUSTRAÇÕES: LEO GIBRAN

Pelo fato de o triângulo ADP ter um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado iguais aos lados do triângulo ADE, eles são congruentes. Em consequência, $DE = DP$, sendo assim suficiente medir DP.

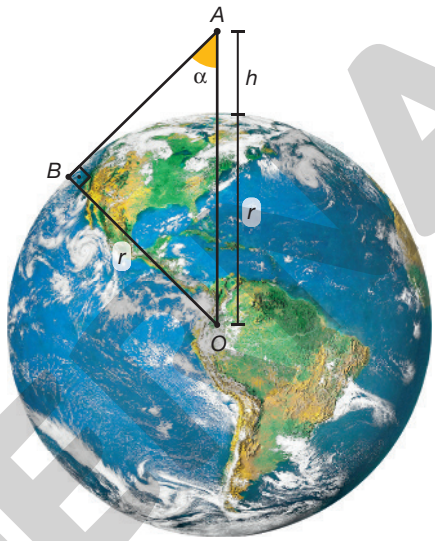
Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Outra maneira que poderia ter sido utilizada é medir o ângulo formado entre as hastes e a distância entre o vértice do instrumento e o chão. Dessa maneira, se supusermos que $B\hat{A}C = 87°$ e que $AD = 1{,}7$ m, qual seria a distância do navio à praia? aproximadamente 32 m

40 A seguir, é apresentada uma das maneiras que podemos utilizar atualmente para determinar o raio aproximado da Terra.

A bordo de uma aeronave, a uma altura h do solo, mede-se o ângulo α, formado entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AO}$, em que:

- A representa a posição da aeronave;
- B é um ponto avistado no horizonte, a partir de A;
- O é o centro da Terra.



FOTOMONTAGEM DE RONALDO INÁCIO.
FOTO: ROBERT_S/SHUTTERSTOCK

Considerando o planeta como uma esfera, o triângulo ABO é retângulo em B, pois é o ponto de tangência da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a Terra.

Se r for o raio da Terra, de acordo com a figura acima, teremos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{r+h} \Rightarrow (r+h)\cdot\operatorname{sen}\alpha = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\cdot\operatorname{sen}\alpha + h\cdot\operatorname{sen}\alpha = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\cdot\operatorname{sen}\alpha = r - r\cdot\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\cdot\operatorname{sen}\alpha = r(1-\operatorname{sen}\alpha)$$

Dessa maneira, podemos concluir que:

$$r = \frac{h\cdot\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$$

Como h e α são conhecidos, podemos determinar o raio r da Terra.

40. a) 5 989 km

a) Supondo que uma aeronave que esteja a 11 000 m de altitude encontre $\alpha = 86{,}53°$, determine, com o auxílio de uma calculadora, o comprimento aproximado do raio da Terra.

b) O raio da Terra é, aproximadamente, 6 380 km. Qual a diferença, em quilômetros, entre o resultado obtido no item **a** e o comprimento do raio apresentado neste item? 391 km

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

3 Trigonometria em um triângulo qualquer

Triangulação

O metro é a unidade de medida de comprimento do Sistema Internacional de Unidades (SI). Mas você já parou para pensar como essa unidade de medida foi criada?

A falta de um sistema de medidas único atrapalhava o comércio e o desenvolvimento da economia na Europa. Tal imprecisão fez com que, a pedido do governo, a Academia de Ciências da França criasse o Sistema Métrico Decimal. Nesse cenário, teve início a história da criação do metro.

Em 1971, cientistas chegaram ao consenso de que o metro deveria estar vinculado a alguma medida da natureza. Decidiu-se, então, que essa medida seria a décima milionésima parte do quadrante de meridiano terrestre.

Decorrente da evolução da ciência e objetivando melhor precisão, no ano de 1983, a 17ª Conferência de Pesos e Medidas redefiniu o metro como a distância percorrida pela luz, no vácuo, em determinado intervalo de tempo.



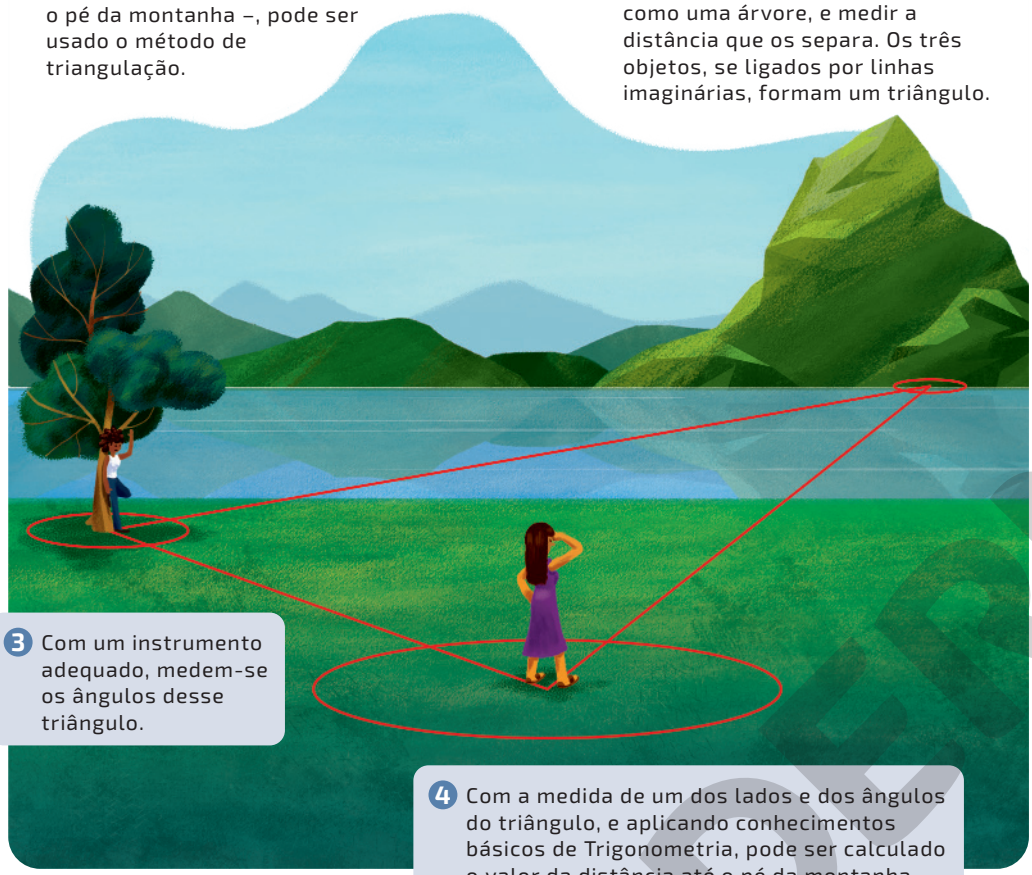
FOTOMONTAGEM DE MAURICIO PLANEL. FOTOS: 1.ARTPRITSADEE/SHUTTERSTOCK; 2.MORIESARCH/SHUTTERSTOCK; 3.ARKA38/SHUTTERSTOCK; 4.JOHAN SWANEPOEL/SHUTTERSTOCK; 5.PHONLAMAI PHOTO/SHUTTERSTOCK; 6.MAXX-STUDIO/SHUTTERSTOCK; 7.SIRTRAVELALOT/SHUTTERSTOCK; 8.UNIYOK/SHUTTERSTOCK; 9.RYZHKOV SERGEY/SHUTTERSTOCK; 10.MIHALEC/SHUTTERSTOCK; 11.KRAKENIMAGES.COM/SHUTTERSTOCK; 12.GALUSHKO SERGEY/SHUTTERSTOCK; 13.BLUEFISH_DS/SHUTTERSTOCK; 14.JAMES.PINTAR/SHUTTERSTOCK; 15.VIK V/SHUTTERSTOCK

O método de triangulação

BNCC
• EM13MAT308

1 Para medir a distância até um local inacessível – nesse caso, o pé da montanha –, pode ser usado o método de triangulação.

2 É preciso identificar um segundo local, de fácil acesso e visualização, como uma árvore, e medir a distância que os separa. Os três objetos, se ligados por linhas imaginárias, formam um triângulo.



3 Com um instrumento adequado, medem-se os ângulos desse triângulo.

4 Com a medida de um dos lados e dos ângulos do triângulo, e aplicando conhecimentos básicos de Trigonometria, pode ser calculado o valor da distância até o pé da montanha.

LEO GIBRAN

A distância entre o Polo Norte e a linha do Equador corresponde a um quadrante de meridiano terrestre.

Delambre e Méchain, dois astrônomos da época, iniciaram, então, uma expedição, que durou de 1792 a 1799, com o objetivo de medir o arco de meridiano compreendido entre Dunquerque, na França, e Barcelona, na Espanha. O conhecimento dessa distância seria usado para calcular, proporcionalmente, a distância entre o Polo Norte e a linha do Equador.

No trajeto, para realizar as medições, os astrônomos utilizaram o Método de triangulação, fundamentado em elementos da Trigonometria, além de seus conhecimentos sobre Astronomia. Méchain percebeu um erro em seus cálculos, de 0,229 mm, mas como já os havia enviado para Paris, não fez a alteração. Assim, a primeira medida do metro teve 0,229 mm a menos do que a atual.

A distância entre o Polo Norte e a linha do Equador, medida por meio de fotografias de satélite, é de 10 002 290 m, e não 10 000 000 m, o que corresponde ao erro de Méchain.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Um dos instrumentos utilizados pelos astrônomos Delambre e Méchain era o Círculo Repetidor de Borda. Esse equipamento possuía duas lunetas com movimentos independentes para visualizar dois pontos distintos e medir o ângulo entre eles. Era possível medir ângulos com grande precisão a partir de distantes pontos de referência.



AGE FOTOSTOCK/EASYPIX

Círculo repetidor de borda.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A De que maneira os astrônomos Delambre e Méchain realizaram suas medições?

B Faça uma pesquisa para determinar outras situações em que a Trigonometria é utilizada. Em seguida, converse sobre essas aplicações com os colegas e o professor. Algumas possíveis respostas: na construção civil, na Astronomia, na navegação, na agrimensura e na topografia.

Note que, no esquema, o triângulo formado não é retângulo. Nesse caso, para determinar as distâncias desejadas, devemos aprimorar nossos estudos de Trigonometria para um triângulo qualquer. Nas próximas páginas, a fim de alcançar esse objetivo, estudaremos a **lei dos senos** e a **lei dos cossenos**.

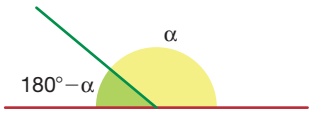
A) Eles utilizaram o método de triangulação, fundamentado em elementos da Trigonometria e também em seus conhecimentos sobre Astronomia.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando trigonometria em um triângulo qualquer

Estudamos anteriormente as razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Contudo, o seno e o cosseno podem ser utilizados para determinar medidas em triângulos quaisquer. Para tanto, inicialmente estudaremos os valores dessas razões trigonométricas para ângulos suplementares.

Dado um ângulo obtuso α, com $90° < \alpha < 180°$, temos, por definição:



RONALDO INÁCIO

Dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares se $\hat{A} + \hat{B} = 180°$.

- $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha)$.

  O seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplementar.
- $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$.

  O cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplementar.

No caso particular de um ângulo de 90°, temos $\operatorname{sen} 90° = 1$ e $\cos 90° = 0$.

Posteriormente, essas igualdades serão estudadas com mais detalhes.

As igualdades apresentadas são trabalhadas com mais detalhes no Tema 4, quando as razões seno e cosseno são tratadas na circunferência trigonométrica.

Exemplos

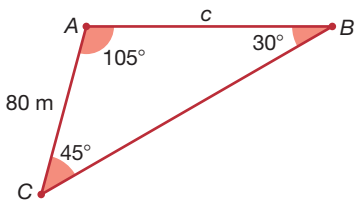
- $\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen}(180° - 150°) = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{sen} 106° = \operatorname{sen}(180° - 106°) = \operatorname{sen} 74° = 0{,}961$
- $\cos 106° = -\cos(180° - 106°) = -\cos 74° = -0{,}276$

Os valores de sen 74° e cos 74° podem ser consultados na tabela trigonométrica.

Lei dos senos

Para determinar o comprimento de uma ponte que será construída sobre certo vale, um topógrafo marcou os pontos *A* e *B*, que serão as extremidades da ponte, e um ponto *C* na mesma margem de *A*. Em seguida, mediu *AC* e os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$, conforme o esquema.



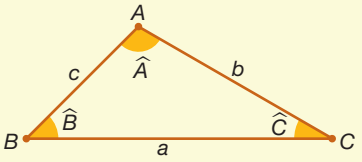


LEO GIBRAN

Para determinar o comprimento da ponte, podemos utilizar a lei dos senos, em que:

Dado um triângulo *ABC* qualquer, o comprimento dos lados é proporcional ao seno dos ângulos opostos correspondentes.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$



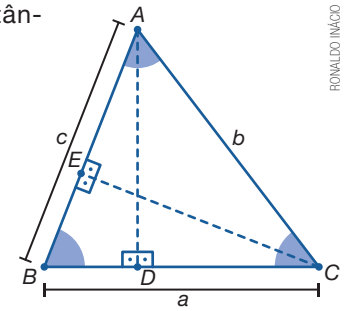
RONALDO INÁCIO

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para demonstrar a lei dos senos para triângulos acutângulos, consideramos o triângulo *ABC*.

> Triângulo acutângulo é aquele em que cada ângulo interno é agudo, ou seja, tem menos de 90°.



RONALDO INÁCIO

Nos triângulos retângulos obtidos ao traçarmos as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, temos:

Se necessário, explique aos alunos o uso do símbolo Δ para indicar um triângulo.

- ΔBCE: $\operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{CE}{a} \Rightarrow CE = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$
- ΔACE: $\operatorname{sen}\hat{A} = \dfrac{CE}{b} \Rightarrow CE = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$

$$\Rightarrow \underbrace{a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}_{CE} = \underbrace{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}_{CE} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \quad (I)$$

- ΔACD: $\operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{AD}{b} \Rightarrow AD = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$
- ΔABD: $\operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$

$$\Rightarrow \underbrace{b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}_{AD} = \underbrace{c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}_{AD} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad (II)$$

Portanto, de **I** e **II** segue que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

A demonstração da lei dos senos para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos é realizada de maneira semelhante à apresentada.

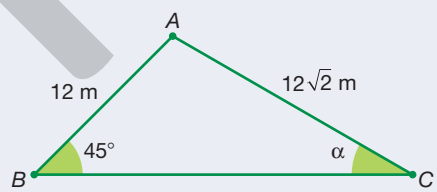
Para resolvermos o problema apresentado no início do tópico, no qual é necessário medir o comprimento que terá a ponte, aplicamos a lei dos senos.

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \frac{80}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{c}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow \frac{80}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow c = 80\sqrt{2} \simeq 113{,}14$$

Portanto, a ponte terá, aproximadamente, 113,14 m de comprimento.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Determine a medida α no triângulo *ABC*.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Utilizando a lei dos senos, temos:

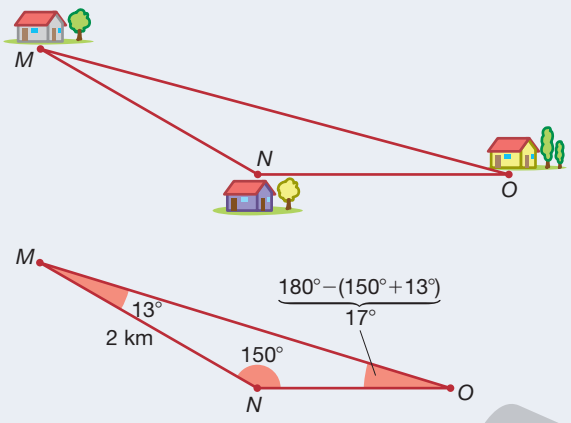
$$\frac{AC}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow 12\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 Na figura ao lado, os pontos M, N e O representam a casa de Marcos, Natália e Osvaldo, respectivamente. Sabendo que a distância em linha reta entre a casa de Marcos e a de Natália é 2 km e que $N\hat{M}O = 13°$ e $M\hat{N}O = 150°$, determine a distância entre a casa de Marcos e a de Osvaldo.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Resolução

Podemos representar essa situação por meio do triângulo MNO.

Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{MN}{\underbrace{\operatorname{sen} 17°}_{0{,}292}} = \frac{MO}{\underbrace{\operatorname{sen} 150°}_{\operatorname{sen} 30°}} \Rightarrow \frac{2}{0{,}292} = \frac{MO}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 0{,}292 \cdot MO = 1 \Rightarrow MO \simeq 3{,}42$$

Portanto, a distância entre a casa de Marcos e a de Osvaldo é de, aproximadamente, 3,42 km.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

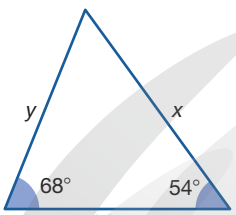
1 Determine o valor do seno e do cosseno de cada ângulo. Respostas no final do livro.

a) 95° c) 125° e) 174°

b) 110° d) 168°

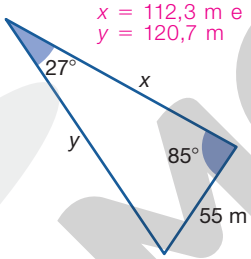
2 Determine os valores de x e y em cada triângulo.

a)



$x = 105$ m e $y = 91{,}6$ m

b)



$x = 112{,}3$ m e $y = 120{,}7$ m

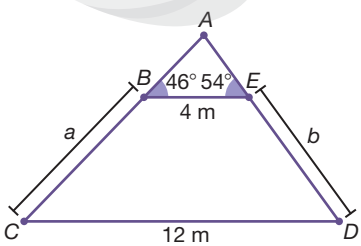
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

3 Considere um triângulo isósceles cujo comprimento da base é 50 cm e os ângulos internos adjacentes a ela têm 43°. Calcule o comprimento aproximado de cada um de seus lados e o seno do ângulo oposto à base.

50 cm, 34,2 cm e 34,2 cm; $\operatorname{sen} 94° = 0{,}998$

4 Determine os valores aproximados de a e b.

$a = 6{,}6$ m e $b = 5{,}8$ m



$\overline{BE} \parallel \overline{CD}$

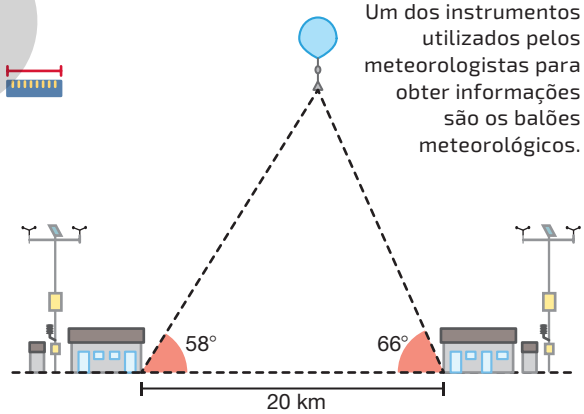
RONALDO INÁCIO

5 A partir de informações como umidade, temperatura e pressão atmosférica, os meteorologistas realizam previsões, com certa confiabilidade, das condições climáticas em determinada região, por certo período.



METTE F.AARGREVE/SHUTTERSTOCK

Um dos instrumentos utilizados pelos meteorologistas para obter informações são os balões meteorológicos.



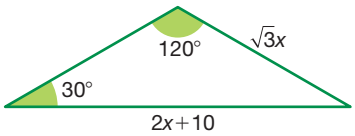
RONALDO INÁCIO

Suponha que em certa região estejam localizadas duas estações meteorológicas, a 20 km uma da outra. De uma delas é possível avistar, em determinado instante, um balão meteorológico sob um ângulo de 58° em relação ao plano horizontal, e da outra pode-se avistar o balão, nesse mesmo instante, sob um ângulo de 66°, conforme a figura. Qual é a altura do balão em relação ao plano horizontal no instante dessas observações? aproximadamente 18,7 km

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6 No triângulo estão indicados os comprimentos de dois de seus lados e as de dois ângulos internos. Calcule o valor de x. $x = 10$



RONALDO INÁCIO

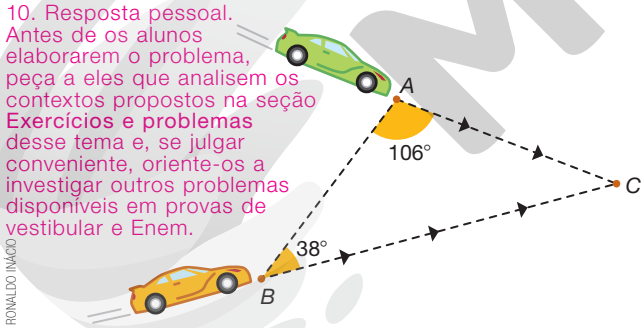
7 Em geral os dublês são contratados para substituir atores em cenas perigosas ou que requerem habilidades especiais. Isso é feito para evitar que os atores se machuquem. A profissão de dublê é perigosa e requer que o profissional seja altamente treinado para evitar acidentes.



AP PHOTO/SANDRA STARGARDTER/GLOW IMAGES

Dublê de Daniel Craig em cena do filme **007 Contra Spectre** no *set* de filmagem, na Cidade do México, no México, em 2015. Nesse filme o ator Daniel Craig interpreta James Bond.

Na gravação da cena de um filme, dois dublês pilotam os carros A e B. De acordo com o roteiro, o carro A deve se locomover a 18 m/s e o B, a uma velocidade suficiente para que haja a colisão com o carro A no ponto C.



RONALDO INÁCIO

Considerando os ângulos indicados no esquema e sabendo que a distância inicial entre os carros é de 400 m, calcule, aproximadamente:

a) a distância entre cada carro e o ponto C.

b) a velocidade do carro B para chocar-se com A em C. 28 m/s

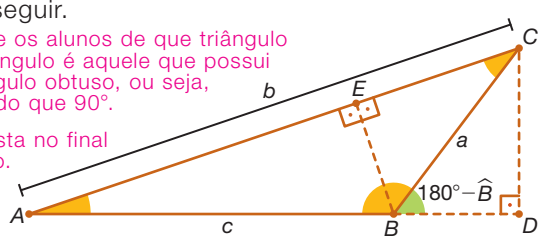
c) o tempo de percurso entre a posição inicial e o momento da colisão. 23 s

7. a) A: 419 m; B: 654 m

8 Demonstre a validade da lei dos senos para triângulos obtusângulos com o auxílio da figura a seguir.

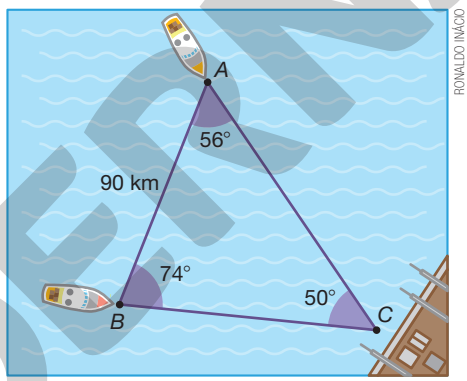
Lembre os alunos de que triângulo obtusângulo é aquele que possui um ângulo obtuso, ou seja, maior do que 90°.

Resposta no final do livro.



RONALDO INÁCIO

9 Dois navios, A e B, localizados em pontos distintos, navegam em linha reta em direção ao porto C. Seus respectivos comandantes, utilizando instrumentos de localização e comunicando-se por rádio, verificam que $B\hat{A}C = 56°$, $A\hat{B}C = 74°$ e a distância entre as embarcações é de 90 km. O navio A dirige-se ao porto a uma velocidade constante de 37 km/h, e o B, a 32 km/h.



RONALDO INÁCIO

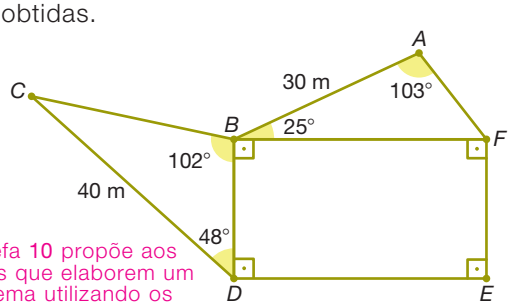
a) Qual navio está mais próximo do porto? navio B

b) Se os navios mantiverem a velocidade constante, em aproximadamente quanto tempo cada um irá chegar ao porto? navio A: 3 h; navio B: 3 h

c) Instantes depois que os comandantes conferiram suas posições, receberam uma mensagem por rádio dizendo que o navio B deveria atracar primeiro, e que o A deveria reduzir sua velocidade e mantê-la, para chegar ao porto meia hora após o B. A que velocidade constante, aproximadamente, o navio A deverá navegar para cumprir o planejado? 32 km/h

10 Elaborando

De acordo com a figura, elabore um problema e troque-o com um colega. Em seguida, resolva o que lhe foi entregue e confiram as resoluções obtidas.



RONALDO INÁCIO

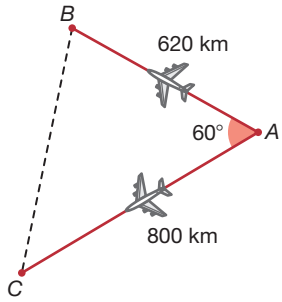
A tarefa **10** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

10. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

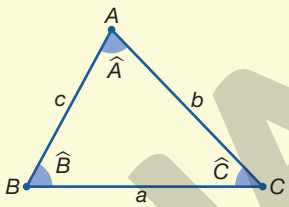
Lei dos cossenos



Uma companhia aérea realiza voos diretos entre as cidades *A* e *B* e entre *A* e *C*. Porém, essa companhia pretende criar uma nova linha na qual realizará voos partindo de *A* com destino a *C*, fazendo conexão em *B*.

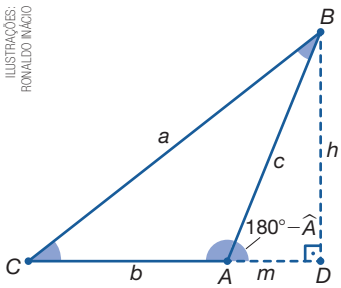
Para calcularmos a distância em linha reta entre *B* e *C*, podemos utilizar a lei dos cossenos, que é enunciada da seguinte maneira:

Para todo triângulo *ABC*, o quadrado do comprimento de um lado qualquer é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados, subtraída do dobro do produto do comprimento desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO



Para demonstrar a lei dos cossenos para triângulos obtusângulos, consideramos o triângulo *ABC* ao lado.

No triângulo retângulo obtido ao traçarmos a altura relativa ao lado $\overline{AC}$, temos:

- ΔBCD: $a^2 = (b + m)^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + m^2 + 2 \cdot b \cdot m + h^2$ (I)
- ΔABD:

$$c^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \text{ (II)}$$

$$\underbrace{\cos(180° - \hat{A})}_{-\cos\hat{A}} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = -c \cdot \cos\hat{A} \text{ (III)}$$

Substituindo **II** em **I**, temos:

$$a^2 = b^2 + m^2 + 2 \cdot b \cdot m + \underbrace{c^2 - m^2}_{h^2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot m \text{ (IV)}$$

Substituindo **III** em **IV**, segue que:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot \underbrace{(-c \cdot \cos\hat{A})}_{m} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$$

- Mostre que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$.
  Resposta no Suplemento para o professor.

Para triângulos acutângulos e triângulos retângulos, também podemos demonstrar a lei dos cossenos. Porém, não apresentaremos essas demonstrações.

Aplicando a lei dos cossenos no problema apresentado no início do tópico, podemos determinar a distância entre as cidades *B* e *C*.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 800^2 + 620^2 - 2 \cdot 800 \cdot 620 \cdot \cos 60° = 640\,000 + 384\,400 - 992\,000 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

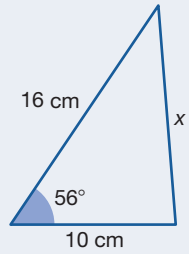
$\Rightarrow a^2 = 1\,024\,400 - 496\,000 = 528\,400 \Rightarrow a = \sqrt{528\,400} \simeq 726{,}9$

Portanto, a distância entre as cidades *B* e *C* é, aproximadamente, 726,9 km.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R3 No triângulo ao lado, determine o valor de x.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Utilizando a lei dos cossenos, temos:

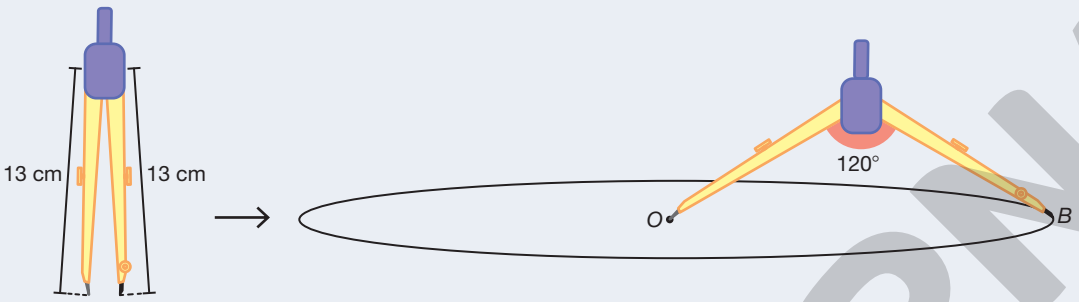
$x^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 56° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 256 + 100 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 0{,}559 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 356 - 178{,}88 = 177{,}12 \Rightarrow x \simeq 13{,}31$

Portanto, $x \simeq 13{,}31$ cm.

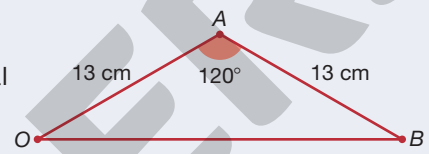
R4 Determine o comprimento do raio da circunferência construída pelo compasso indicado a seguir, com abertura de 120°.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

Resolução

O comprimento do raio da circunferência é igual a $\overline{OB}$ no triângulo AOB.



Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$(OB)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 120° \Rightarrow (OB)^2 = 169 + 169 - 2 \cdot 169 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

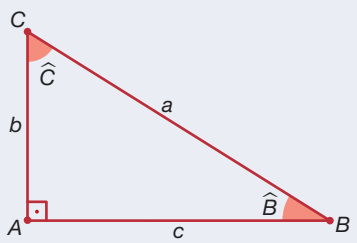
$$\Rightarrow (OB)^2 = 338 + 169 \Rightarrow (OB)^2 = 507 \Rightarrow OB = 13\sqrt{3}$$

Portanto, o comprimento do raio da circunferência é de $13\sqrt{3}$ cm.

Podemos resolver esse problema utilizando a lei dos senos.
Como o triângulo AOB é isósceles, $A\hat{O}B = A\hat{B}O = 30°$, logo:

$$\frac{13}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{OB}{\underbrace{\operatorname{sen} 120°}_{\operatorname{sen} 60°}} \Rightarrow OB \cdot \frac{1}{2} = 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OB = 13\sqrt{3}$$

R5 Com o auxílio do triângulo ABC, mostre que o Teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos no triângulo retângulo.



RONALDO INÁCIO

Resolução

De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Substituindo 0 no 2º membro da equação ela continua verdadeira. Assim:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 0$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \underbrace{\cos \hat{A}}_{0}$$

Note que $\cos A = 90° = 0$.
Assim, $2bc \cdot \cos A = 0$.

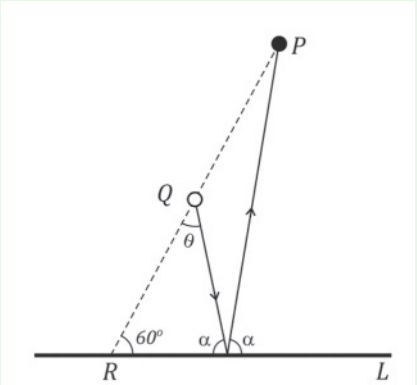
Portanto, o Teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos, ou seja, quando o ângulo em questão é 90°.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

(Fuvest-SP) Uma bola branca está posicionada no ponto Q de uma mesa de bilhar retangular e uma bola vermelha, no ponto P, conforme a figura ao lado. A reta determinada por P e Q intersecta o lado L da mesa no ponto R. Além disso, Q é o ponto médio do segmento $\overline{PR}$, e o ângulo agudo formado por $\overline{PR}$ e L mede 60°. A bola branca atinge a vermelha, após ser refletida pelo lado L. Sua trajetória, ao partir de Q, forma um ângulo agudo θ com o segmento $\overline{PR}$ e o mesmo ângulo agudo α com o lado L antes e depois da reflexão. Determine a tangente de α e o seno de θ.



REPRODUÇÃO

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

A tangente de α e o seno de θ.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

As posições iniciais das bolas branca e vermelha; a informação de que Q é o ponto médio de $\overline{PR}$ e a medida do ângulo agudo formado entre o segmento $\overline{PR}$ e o lado L. Além disso, é dito que os ângulos formados pela trajetória da bola branca com o lado L são iguais.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, traçamos a reta r perpendicular a L, que contém Q, e a reta s perpendicular a L, que contém P. Em seguida, nomeamos a interseção entre r e L por M e entre s e L por N. Na sequência, determinamos, em função de QR, o comprimento dos segmentos $\overline{QM}$, $\overline{RM}$, $\overline{PN}$ e $\overline{RN}$. Além disso, determinamos, também em função de QR, a distância entre o ponto em que a bola branca atinge o lado L e os pontos M, N, Q e R, respectivamente. Por fim, calculamos $\operatorname{tg}\alpha$ e, utilizando a lei dos senos, $\operatorname{sen}\theta$.

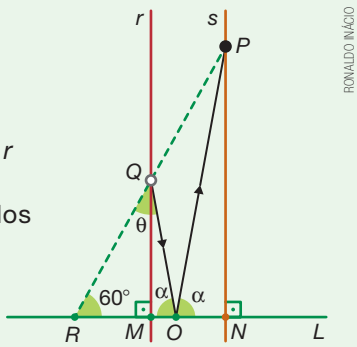
√ Escolhendo as notações.

- r: reta perpendicular a L, que contém Q.
- s: reta perpendicular a L, que contém P.
- O: ponto em que a bola branca atinge o lado L.
- M: ponto de interseção entre o lado L e a reta r.
- N: ponto de interseção entre o lado L e a reta s.

C Executando o plano

Passo 1

Ao traçar as retas r e s, obtemos os triângulos retângulos RMQ e RNP.



RONALDO NÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 2

No triângulo RMQ, temos:

- $\operatorname{sen} 60° = \frac{QM}{QR} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{QM}{QR} \Rightarrow$
  $\Rightarrow QM = \frac{QR \cdot \sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \frac{RM}{QR} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{RM}{QR} \Rightarrow$
  $\Rightarrow RM = \frac{QR}{2}$

Como Q é ponto médio de $\overline{PR}$, temos $PR = 2 \cdot QR$. Desse modo, no triângulo RNP, segue que:

- $\operatorname{sen} 60° = \frac{PN}{2 \cdot QR} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PN}{2 \cdot QR} \Rightarrow$
  $\Rightarrow PN = QR \cdot \sqrt{3}$
- $\cos 60° = \frac{RN}{2 \cdot QR} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{RN}{2 \cdot QR} \Rightarrow$
  $\Rightarrow RN = QR$

Passo 3

Pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos OMQ e ONP são semelhantes. Desse modo:

$$\frac{QM}{PN} = \frac{MO}{ON} \Rightarrow \frac{\left(\frac{QR \cdot \sqrt{3}}{2}\right)}{QR \cdot \sqrt{3}} = \frac{MO}{ON} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{MO}{ON} \Rightarrow ON = 2 \cdot MO$$

Como $RN = QR$ e $RM = \frac{QR}{2}$, segue que $MN = \frac{QR}{2}$. Além disso, $MN = MO + ON = 3 \cdot MO$ e, consequentemente:

$$3 \cdot MO = \frac{QR}{2} \Rightarrow MO = \frac{QR}{6}$$

Sendo assim, $ON = \frac{QR}{3}$, pois $ON = 2 \cdot MO$.

Finalmente, considerando o triângulo ONP e aplicando a definição de tangente, obtemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PN}{NO} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{QR \cdot \sqrt{3}}{\left(\frac{QR}{3}\right)} = 3\sqrt{3}$$

Passo 4

Considerando o triângulo MOQ e aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos o comprimento de $\overline{QO}$.

$$(QO)^2 = (QM)^2 + (MO)^2 \Rightarrow (QO)^2 = \left(\frac{QR \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{QR}{6}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (QO)^2 = \frac{28 \cdot (QR)^2}{36} \Rightarrow QO = \sqrt{\frac{7 \cdot (QR)^2}{9}} = \frac{QR \cdot \sqrt{7}}{3}$$

Note que $QO = \frac{QR \cdot \sqrt{7}}{3}$, pois $QO > 0$ e $QR > 0$.

Note ainda que $RO = RM + MO = \frac{QR}{2} + \frac{QR}{6} = \frac{4 \cdot QR}{6}$. Finalmente, considerando o triângulo ROQ e aplicando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{QO}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{RO}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \frac{\left(\frac{QR \cdot \sqrt{7}}{3}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{4 \cdot QR}{6}\right)}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Portanto, $\operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{3}$ e $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

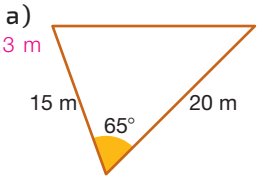
MODERNA

Exercícios e problemas

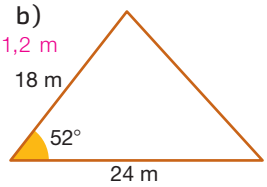
Anote as respostas no caderno.

11 Calcule o perímetro aproximado de cada triângulo.

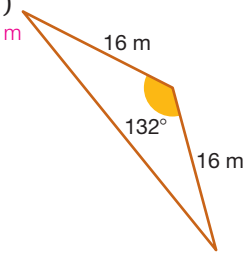
a) 54,3 m



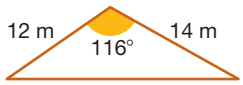
b) 61,2 m



c) 61,2 m



d) 48,1 m



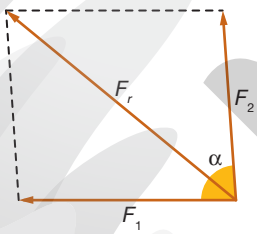
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

12 Calcule o comprimento das diagonais do paralelogramo $ABCD$ sabendo que $AB = 80$ cm, $BC = 120$ cm e $\widehat{C} = 132°$.

aproximadamente 183,4 cm e 89,2 cm

13 Força é um agente físico capaz de alterar o estado de repouso ou de movimento de um corpo. Uma maneira de representá-la graficamente é por meio de um vetor, cujo comprimento é proporcional à intensidade da força aplicada. Além da intensidade, o vetor também indica a direção e o sentido de atuação da força.

Se tivermos duas forças, F_1 e F_2, formando um ângulo α entre si, podemos representá-las por uma única, que denominamos força resultante (F_r). Graficamente, essa força corresponderá à diagonal do paralelogramo cujos lados são F_1 e F_2, como indicado no esquema.



RONALDO INÁCIO

Supondo que $F_1 = 16$ N, $F_2 = 14$ N e $\alpha = 86°$, determine a intensidade da força resultante.

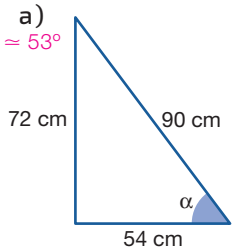
$F_r \simeq 22$ N

Newton (N) é uma unidade de medida de força que provoca uma aceleração de 1 m/s² em um corpo com 1 kg de massa.

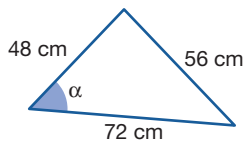
14 Se, em um relógio, 25 cm e 40 cm são, respectivamente, os comprimentos dos ponteiros das horas e dos minutos, calcule a distância aproximada entre as extremidades desses ponteiros quando o relógio marcar 4 h. 56,8 cm

15 Determine a medida do ângulo α em cada triângulo.

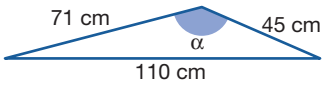
a) $\alpha \simeq 53°$



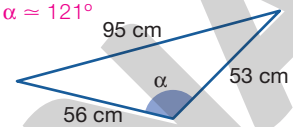
b) $\alpha \simeq 51°$



c) $\alpha \simeq 142°$



d) $\alpha \simeq 121°$

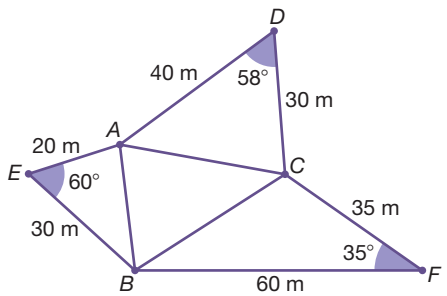


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

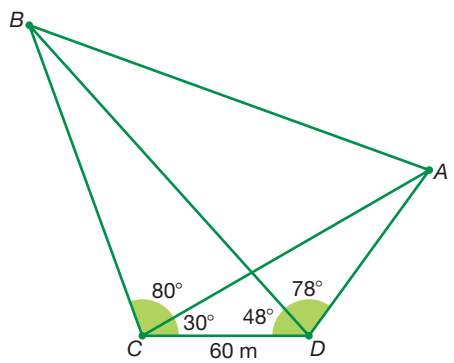
16 Em um triângulo ABC, $AB = 10$ cm, $BC = \sqrt{76}$ cm e $\widehat{A} = 60°$. Todos os triângulos que podem ser construídos a partir dessas medidas são congruentes? Em caso positivo, escreva o comprimento dos lados desse triângulo. Em caso negativo, escreva o comprimento dos lados de dois triângulos não congruentes que possuem essas características. não; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 6 cm; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 4 cm

17 De acordo com as medidas indicadas nas figuras, calcule:

a) o perímetro do triângulo ABC. aproximadamente 98,7 m



b) o comprimento de $\overline{AB}$. aproximadamente 153,1 m

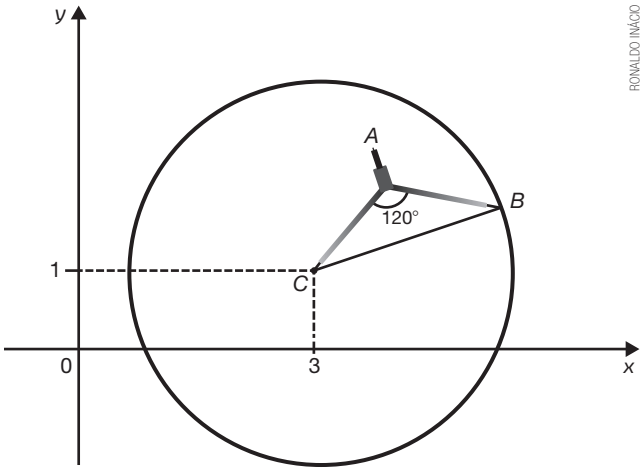


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

18 (Enem, 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse 120°. A ponta-seca está representada pelo ponto *C*, a ponta do grafite está representada pelo ponto *B* e a cabeça do compasso, pelo ponto *A*, conforme a figura.



RONALDO INÁCIO

Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores de raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será: alternativa **d**

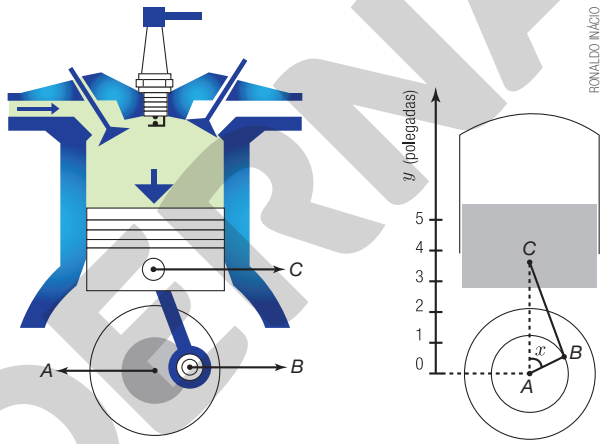
a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

21. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas e contextos disponíveis em provas de vestibular e Enem.

19 Um *drone*, veículo aéreo não tripulado, é utilizado por uma empresa para realizar algumas pequenas entregas de mercadorias. Em uma delas, a aeronave deveria partir do ponto *A* e pousar com a mercadoria em um ponto *B*, fazendo um desvio na rota a fim de evitar alguns edifícios. Inicialmente, o *drone* percorreu 500 m em trajetória retilínea na direção norte. Em seguida, virou 75° para oeste e percorreu, em linha reta, mais 1 000 m, até atingir o ponto *B* e pousar.

Quantos metros o *drone* teria percorrido a menos nessa entrega caso pudesse ter se deslocado em linha reta entre os pontos *A* e *B*?
aproximadamente 504,42 m

20 (UERJ, 2010) Observe abaixo a ilustração de um pistão e seu esquema no plano.



RONALDO INÁCIO

O pistão é ligado, por meio da haste *BC*, a um disco que gira em torno do centro *A*.

Considere que:

- o raio *AB* e a haste *BC* medem, respectivamente, 1 polegada e 4 polegadas;
- à medida que o disco gira, o pistão move-se verticalmente para cima ou para baixo, variando a distância *AC* e o ângulo $B\hat{A}C$.

Se a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é dada por *x* radianos, a distância entre *A* e *C*, em polegadas, pode ser obtida pela seguinte equação: alternativa **d**

a) $y = 4 + \operatorname{sen}(x)$
b) $y = 4 + \cos(x)$
c) $y = \operatorname{sen}(x) + \sqrt{16 - \cos^2(x)}$
d) $y = \cos(x) + \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2(x)}$

Na tarefa **20**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do raio", por exemplo, aparece a palavra "medem" para se referir aos comprimentos do raio e da haste.

21 Elaborando

Junte-se a um colega e façam uma pesquisa a respeito de situações em que é possível aplicar a lei dos cossenos. Em seguida, com as informações obtidas, elaborem um problema e troquem com outros colegas para que eles o resolvam. Depois, verifiquem se a resposta está correta.

A tarefa **21** propõe aos alunos que elaborem um problema/questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 Trigonometria na circunferência

As misteriosas circunferências de pedras

Tão antigo quanto as pirâmides, Stonehenge é um conjunto de circunferências concêntricas de enormes pedras, localizado no condado de Wiltshire, na Inglaterra. Nesse conjunto, o eixo nordeste se alinhava com a posição do Sol nascente no solstício de verão, sugerindo que foi desenvolvida alguma forma de calendário.

Durante os anos, foram sugeridas várias teorias para explicar sua finalidade. Alguns acreditam que servia como um observatório científico e outros, como local sagrado. Entretanto, uma teoria não necessariamente anula a outra, já que de Stonehenge foi feito em múltiplas fases, com um intervalo de quase 1 000 anos entre o começo e o fim de sua construção.

Fonte de pesquisa: ROONEY, Anne. *A História da Matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

Circunferências concêntricas são circunferências que possuem o mesmo centro.

BNCC
- EM13MAT315
- EM13MAT405

Fases de construção

Estima-se que Stonehenge começou a ser construído por volta de 3000 a.C., por homens do período Neolítico, mas após 500 anos de uso esse local foi abandonado. Acredita-se que por volta de 2100 a.C. seres humanos que trabalhavam com o bronze voltaram a utilizar Stonehenge, alterando drasticamente seu *design* original. Foi durante esse segundo momento, dividido em duas fases (segunda e terceira fases), que as grandes pedras, pelas quais Stonehenge é conhecido, foram incorporadas ao monumento. Existem provas de que os blocos mais pesados de pedra viajaram cerca de 30 km, enquanto os mais leves, cerca de 400 km.

Primeira fase

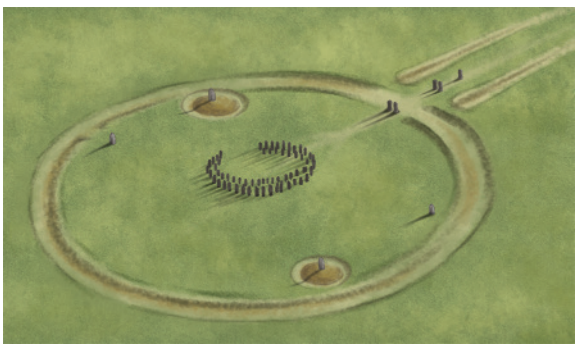
Inicialmente, Stonehenge era composto de uma circunferência com aproximadamente 86,6 m de diâmetro. Contava com duas entradas, uma principal ao nordeste e uma secundária ao sul, e dois menires. Acredita-se que o monumento era utilizado para cerimônias religiosas.

Menires: monumentos pré-históricos de pedra, cravados verticalmente no solo.



Segunda fase

Começou por volta de 2100 a.C., em que foram adicionadas ao centro de Stonehenge, aproximadamente, oitenta pedras, cada uma pesando em torno de 4 toneladas. Essas pedras foram dispostas de maneira a formar uma circunferência concêntrica à externa, mas que não foi finalizada. A entrada principal, conhecida como *The Avenue* (em português, A Avenida), foi remodelada e sua extensão chegou a ter 3 km.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Ilustrações com base em: <http://abyss.uoregon.edu/~js/glossary/stonehenge.html>. Acesso em: 15 jun. 2020.



FOTOMONTAGEM DE GUSTAVO PEDROSA. FOTOS: 1.CHITTAKORN59/SHUTTERSTOCK; 2.DENCG/SHUTTERSTOCK; 3.BOROMVIT TATASAI/SHUTTERSTOCK; 4.ASTOR57/SHUTTERSTOCK; 5.ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK; 6.BARDOCZ PETER/SHUTTERSTOCK; 7.ANDREW ROLAND/SHUTTERSTOCK; 8.VALENTINA RAZUMOVA/SHUTTERSTOCK; 9.BEST PIXELS/SHUTTERSTOCK; 10.KATE_123/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Terceira fase

Em 2000 a.C., a terceira e última fase da construção de Stonehenge começou. Nesse período, foi adicionada uma circunferência de pedras e, no interior dela, cinco *trilithons* (peças formadas por dois enormes pilares de pedra sustentando uma viga de pedra), dispostos em formato de ferradura. Há indícios de que havia a intenção de construir mais duas circunferências envolvendo as duas estruturas de pedras já erguidas, algo que nunca foi concretizado.

HELOÍSA PINTARELLI

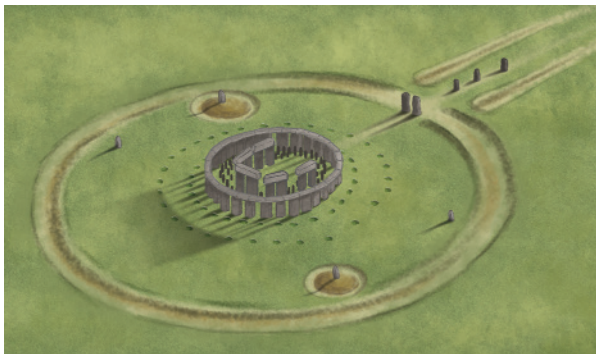


Ilustração com base em: <http://abyss.uoregon.edu/~js/glossary/stonehenge.html>. Acesso em: 15 jun. 2020.

Estado atual

Infelizmente, Stonehenge sofreu com a passagem dos anos, e muitas das pedras já não se encontram no local de origem. Apesar disso, é um dos monumentos mais famosos do mundo, chegando a atrair 1 milhão de visitantes por ano.



4KCLIPS/SHUTTERSTOCK

Stonehenge na Inglaterra em 2019.

A circunferência de pedra adicionada na terceira fase era concêntrica à que compunha Stonehenge na primeira fase.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Faça uma pesquisa a respeito de outras hipóteses, além das apresentadas no texto, sobre a finalidade de Stonehenge. Depois, converse com os colegas e o professor a respeito dos resultados obtidos. Resposta pessoal.

B Você conhece outro monumento histórico, que, como Stonehenge, demonstra que civilizações antigas eram capazes de grandes obras de engenharia?
Resposta pessoal: Algumas possíveis respostas são: as pirâmides de Gizé, as cidades de Troia e Machu Picchu.

As pedras de apoio, com vergas por cima, que identificamos em Stonehenge, demonstram um entendimento dos **arcos de uma circunferência** e **habilidades para calcular e medir suas distâncias**, assunto que estudaremos nas próximas páginas. Quando tudo estivesse montado, as vergas de pedra teriam formado uma verdadeira circunferência, e não uma série de pedras retas.

Verga: viga de madeira ou de pedra que se apoia transversalmente em duas peças dispostas verticalmente em portas e janelas.



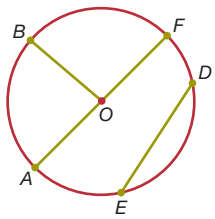
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando trigonometria na circunferência

Estudamos em temas anteriores as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente associadas a ângulos internos de triângulos. Nesse contexto, essas razões têm por objetivo determinar medidas de ângulos e comprimentos de lados de triângulos.

Neste tema iremos ampliar o estudo da Trigonometria, tratando as razões seno, cosseno e tangente em uma circunferência.

Antes, porém, vamos retomar os elementos da circunferência:



O: centro

$\overline{OB}$: raio (r)

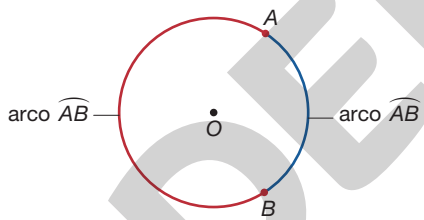
$\overline{AF}$: diâmetro ($d = 2r$)

$\overline{DE}$: corda

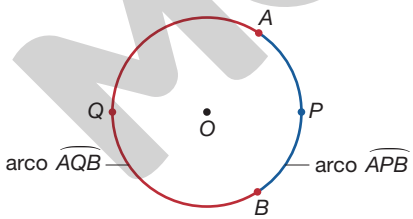
Comprimento de uma circunferência de raio r: $C = 2\pi r$

Arcos da circunferência

Observe a circunferência de centro O. Nela, destacamos os pontos A e B, que a dividem em duas partes, denominadas arcos de circunferência.

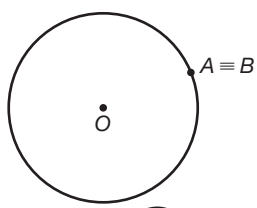


Note que A e B determinam dois arcos, que indicaremos por $\overset{\frown}{AB}$. Nos casos em que não esteja evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos marcar um ponto entre as extremidades do arco e utilizar a seguinte notação:

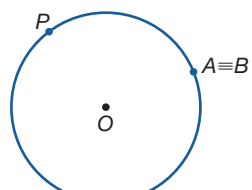


Usaremos $\overset{\frown}{AB}$ ora para indicar **o arco** de extremidades em A e B, ora para indicar a **medida** desse arco.

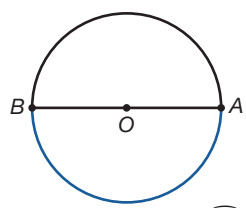
Quando as extremidades de um arco são coincidentes, esse arco é **nulo** ou corresponde a **uma volta completa**. Já quando as extremidades de um arco correspondem às extremidades de um diâmetro, dizemos que esse arco é uma **semicircunferência**.



arco nulo $\overset{\frown}{AB}$



arco de uma volta $\overset{\frown}{APB}$



semicircunferência $\overset{\frown}{AB}$

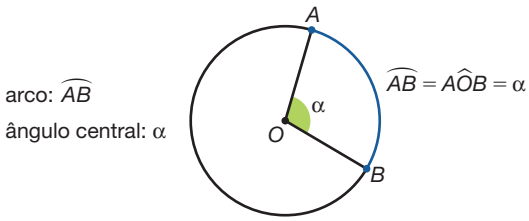
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Medida de um arco de circunferência

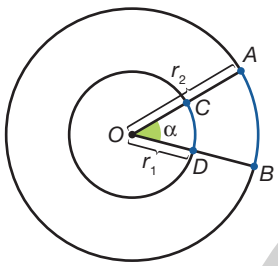
Por definição, a **medida** (ou medida angular) de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente a esse arco.



Em geral, utilizamos o **grau** e o **radiano** como unidades de medida de arco.

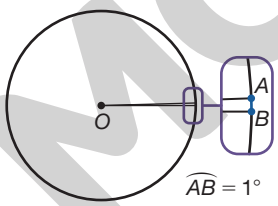
É importante compreender que a medida de um arco não é o mesmo que o comprimento de um arco. Enquanto a medida depende exclusivamente do ângulo central correspondente, o comprimento de um arco equivale a sua medida linear, dependendo do comprimento do raio da circunferência.

As circunferências abaixo são concêntricas. Nelas, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ têm a mesma medida, pois correspondem ao mesmo ângulo central α. Porém, esses arcos têm comprimentos diferentes, pois os comprimentos dos raios são diferentes $(r_1 \neq r_2)$.



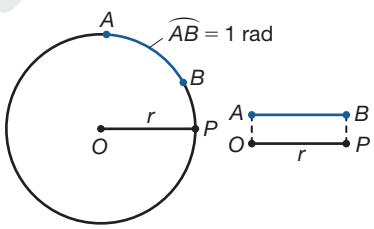
- Grau (°)

  Considere uma circunferência dividida em 360 arcos congruentes. Define-se um grau $(1°)$ como a medida de cada um desses arcos. Uma volta completa equivale, portanto, a um arco de 360°.



- Radiano (rad)

  Um arco que mede um radiano (1 rad) tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência que o contém, ou seja, ao considerarmos, em uma circunferência de raio *r*, um arco de comprimento *r*, esse arco também mede 1 rad.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

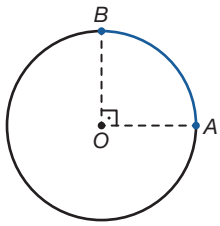
Como o comprimento *C* de uma circunferência de raio *r* é $C = 2\pi r$, um arco de uma volta completa equivale a 2π rad.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

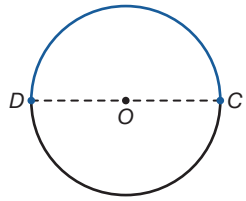
Observe alguns arcos com medidas em graus e em radianos.

- $\frac{1}{4}$ de volta



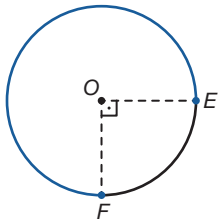
$\overset{\frown}{AB} = 90°$ ou $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{2}$ rad

- $\frac{1}{2}$ de volta



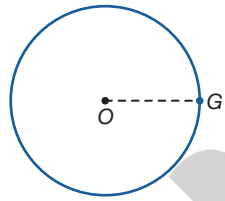
$\overset{\frown}{CD} = 180°$ ou $\overset{\frown}{CD} = \pi$ rad

- $\frac{3}{4}$ de volta



$\overset{\frown}{EF} = 270°$ ou $\overset{\frown}{EF} = \frac{3\pi}{2}$ rad

- uma volta



$\overset{\frown}{GH} = 360°$ ou $\overset{\frown}{GH} = 2\pi$ rad

Para converter a medida de um arco, dada em graus, em radianos, ou vice-versa, podemos estabelecer uma relação entre essas unidades e utilizar a **regra de três**.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Escreva 36,75° em radianos.

Resolução

Para realizar essa conversão, utilizaremos a regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
36,75	x

$$\frac{180}{36,75} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 36,75 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{36,75\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{49\pi}{240}$$

Portanto, 36,75° equivale a $\frac{49\pi}{240}$ rad.

R2 Expresse $\frac{151\pi}{360}$ rad em graus.

Resolução

Para realizar essa conversão utilizaremos a regra de três simples.

Medida em graus	Medida em radianos
180	π
x	$\frac{151\pi}{360}$

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{151\pi}{360}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{360}{151} \Rightarrow 360x = 27\,180 \Rightarrow x = \frac{27\,180}{360} = 75,5$$

Portanto, $\frac{151\pi}{360}$ rad equivale a 75,5°.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

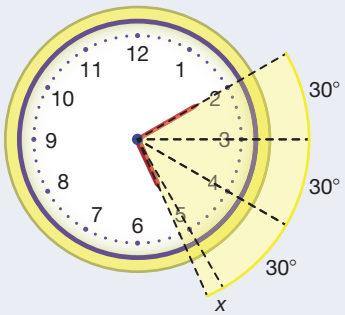
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R3 Qual é a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio que marca 5 h 10 min?

Resolução

A medida do ângulo entre horas consecutivas é $\frac{360°}{12} = 30°$. Às 5 h 10 min, o ponteiro dos minutos está indicando o número 2, e o ponteiro das horas está entre os números 5 e 6, conforme a figura.



SERGIO L. FILHO

Como a cada 60 min o ponteiro das horas desloca-se 30°, calculamos a medida indicada na figura, utilizando a regra de três simples.

Tempo (min)	Ângulo (graus)
60	30
10	x

$$60x = 30 \cdot 10 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, a medida do menor ângulo formado é $30° + 30° + 30° + 5° = 95°$.

- Escreva um algoritmo que possibilite transformar a medida de um arco em graus em radianos. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

Resposta no Suplemento para o professor.

Exercícios e problemas

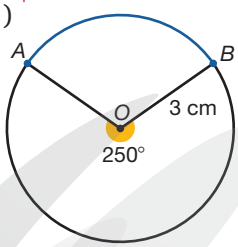
Anote as respostas no caderno.

Quando necessário, na resolução dos exercícios e problemas deste tema, considere $\pi = 3{,}14$.

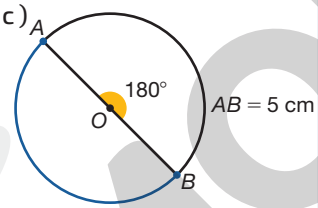
1 Em cada circunferência determine o comprimento e a medida, em graus, do arco $\overset{\frown}{AB}$ em azul.

Respostas no final do livro

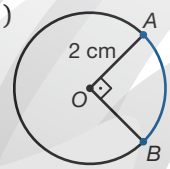
a)



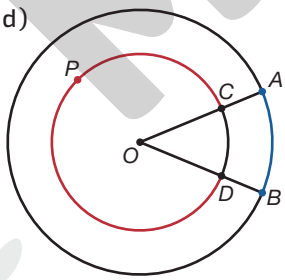
c)



b)



d)



$\overset{\frown}{CPD} = 315°$ $BO = 3{,}5$ cm

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

2 Expresse em radianos a medida de cada arco $\overset{\frown}{AB}$ em azul do exercício anterior.

Respostas no final do livro

3 Expresse, em graus, a medida de cada arco.

a) $\overset{\frown}{AB} = \frac{5\pi}{18}$ rad

b) $\overset{\frown}{CD} = \frac{7\pi}{9}$ rad

c) $\overset{\frown}{EF} = \frac{13\pi}{9}$ rad

d) $\overset{\frown}{GH} = \frac{16\pi}{9}$ rad

Respostas no final do livro.

4 Em uma competição de ciclismo, cada atleta deve percorrer, em no máximo 2 h 30 min, 78,5 km em uma pista circular cujo raio mede 500 m.

a) Quantas voltas na pista serão necessárias, no mínimo, para que um ciclista percorra os 78,5 km? 25 voltas

b) Qual é o tempo médio máximo em que um atleta deve realizar cada volta para cumprir a prova? 6 min

5 Localizada em Singapura, a Singapore Flyer, com 150 m de diâmetro, é uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Cada uma das 28 cabines da Singapore Flyer comporta até 28 pessoas; assim, em apenas uma volta, ela pode levar até 784 pessoas.

Fonte de pesquisa: <https://escola.britannica.com.br/artigo/roda-gigante/483521>. Acesso em: 10 abr. 2021.

Qual é a distância, aproximada, percorrida por uma das cabines após realizar uma volta completa?

471 m



NAVYBLANK/SHUTTERSTOCK

Singapore Flyer, Singapura, em 2019.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6 Considere as circunferências concêntricas de raios r_1 e r_2, com $r_1 > r_2$, e centro O. Dados os pontos C e D pertencentes à circunferência de raio r_1, traçaram-se os segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$, de maneira que o ângulo formado entre eles fosse igual a $\frac{2\pi}{3}$ rad. Sobre $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ foram marcados os pontos A e B, respectivamente, de modo que A e B pertencessem à circunferência r_2. Sabendo que a distância entre A e C é igual a 3 cm, resolva o que se pede.

a) Dado que o comprimento do menor arco de $\overset{\frown}{AB}$ é igual a 25,12 cm, determine a medida de r_1 e de r_2. $r_1 \simeq 15$ cm; $r_2 \simeq 12$ cm

b) Qual é o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{CD}$?

c) Podemos afirmar que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$? Justifique sua resposta.

6. b) aproximadamente 31,4 cm

7 Passadas 2 h 45 min, quantos graus o ponteiro das horas de um relógio girou? 82,5° ou 82°30'

6. c) Sim, pois esses arcos são determinados pelo mesmo ângulo; no caso dos arcos menores, pelo ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad.

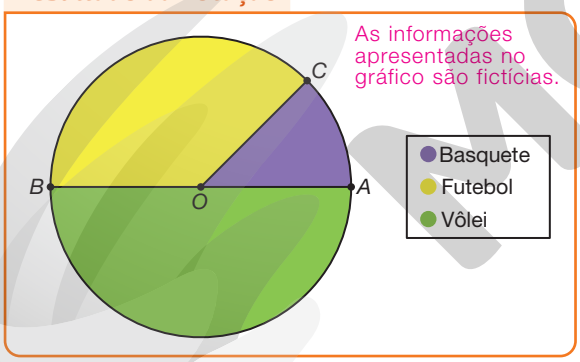
No contexto

8 Nas páginas 56 e 57, vimos que em sua primeira fase, o Stonehenge era constituído de uma circunferência com comprimento de, aproximadamente, 86,6 m de diâmetro. Imagine que você pudesse realizar uma volta completa sobre essa circunferência. Quantos metros você percorreria? aproximadamente 272 m

Desafio

9 O gráfico representa a votação dos alunos de uma turma na escolha do esporte que gostariam de praticar.

Resultado da votação



RONALDO INÁCIO

As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Fonte da pesquisa: Secretaria da escola, em 2020.

O segmento $\overline{AB}$, que representa o diâmetro do gráfico de setores, mede 12 cm, e o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AC}$ é $\frac{3\pi}{2}$ cm.

Sabendo que o esporte basquete recebeu 4 votos, responda às questões.

a) Qual foi o esporte mais votado? Quantos alunos optaram por esse esporte? Vôlei; 16 alunos

b) Quantos alunos participaram da votação? 32 alunos

c) Quantos alunos votaram em futebol? 12 alunos

10 O retângulo áureo recebe este nome porque a proporção de seus lados é uma aproximação do "número de ouro".

Os retângulos áureos circunscrevem uma espiral chamada de "espiral de ouro". Essa espiral de ouro ocorre na natureza com frequência, aparecendo, por exemplo, em conchas, chifres, girassóis e até mesmo em galáxias espirais.

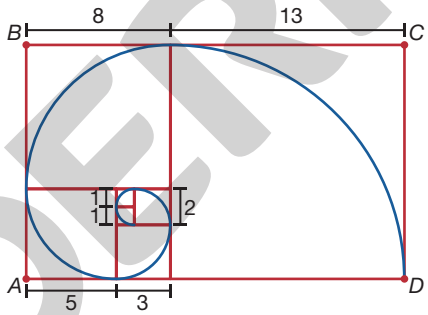


STEVE CUKROW/SHUTTERSTOCK

Molusco cuja concha apresenta a espiral de ouro.

O retângulo áureo pode ser formado considerando a união de quadrados cujo comprimento dos lados seguem a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Observe, na figura, retângulos áureos circunscritos por uma espiral formada por uma sequência de arcos de circunferência. Essa espiral se assemelha a uma espiral de ouro.

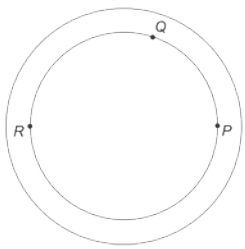


RONALDO INÁCIO

Calcule o comprimento da espiral destacada na figura em azul. aproximadamente 51,81 unidades de comprimento

11 (Enem, 2019) Uma pista circular delimitada por duas circunferências concêntricas foi construída. Na circunferência interna dessa pista, de raio 0,3 km, serão colocados aparelhos de ginástica localizados nos pontos P, Q e R, conforme a figura.

Se julgar necessário, lembre os alunos de que a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.



REPRODUÇÃO

O segmento $\overline{RP}$ é um diâmetro dessa circunferência interna, e o ângulo $P\hat{R}Q$ tem medida igual a $\frac{\pi}{5}$ radianos. Para uma pessoa ir do ponto P ao ponto Q andando pela circunferência interna no sentido anti-horário, ela percorrerá uma distância, em quilômetro, igual a alternativa d

a) $0{,}009\pi$ c) $0{,}06\pi$ e) $0{,}18\pi$

b) $0{,}03\pi$ d) $0{,}12\pi$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

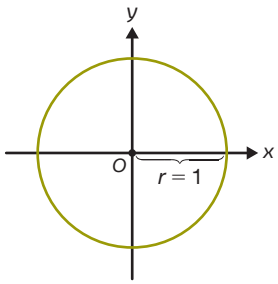
MODERNA

Circunferência trigonométrica

Agora, vamos ampliar o conceito de arcos de circunferência com o objetivo de estudar a **circunferência trigonométrica**, em que podemos considerar, por exemplo, arcos com medidas maiores do que 360° ou arcos com medidas negativas.

Para definir uma circunferência trigonométrica (ou ciclo trigonométrico), consideramos uma circunferência de centro O e raio unitário, fixando nessa circunferência um sistema de eixos cartesianos, de maneira que O coincida com a origem desse sistema.

Nela, os arcos têm origem no ponto $A(1,0)$, tendo como sentido positivo o anti-horário, e negativo, o horário. O sistema de eixos cartesianos divide a circunferência trigonométrica em quatro partes, chamadas **quadrantes**. Além disso, podemos associar a cada ponto P um arco correspondente $\overset{\frown}{AP}$, denominado **arco trigonométrico**.

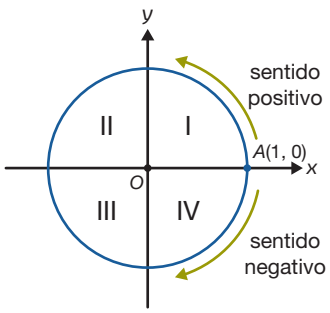


circunferência trigonométrica

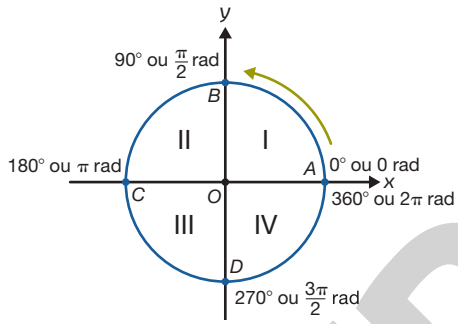
Raio unitário: eixo cujo comprimento é 1.

Explique aos alunos que, na circunferência trigonométrica, a adoção do raio unitário tem efeito simplificador ao estudarmos nela as razões trigonométricas, o que será realizado posteriormente neste tema.

Como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, o comprimento e a medida de um arco, dada em radianos, são numericamente iguais. Para simplificar a notação, denotaremos a partir daqui a medida do arco em radianos sem a indicação "rad". Um arco de medida $\frac{5\pi}{4}$ rad, por exemplo, será denotado por $\frac{5\pi}{4}$.

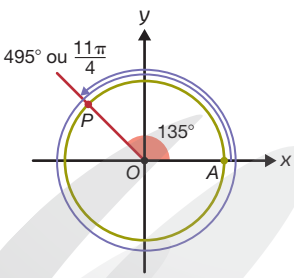


I, **II**, **III** e **IV** indicam os quadrantes da circunferência trigonométrica.



A, *B*, *C* e *D* indicam as extremidades dos quadrantes.

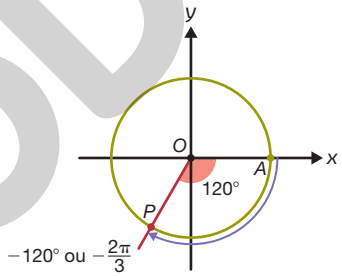
Em uma circunferência trigonométrica temos também arcos maiores do que uma volta ou arcos com medidas negativas. Observe os exemplos.



$495° = 135° + 360°$

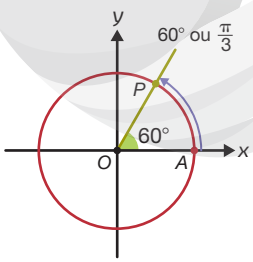
ou

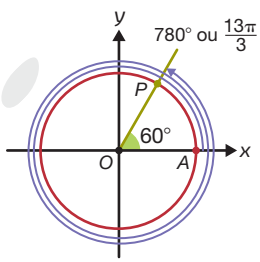
$\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$

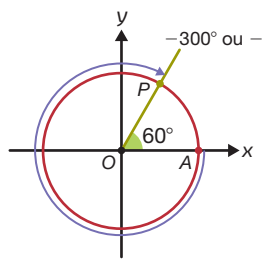


Arcos côngruos

Em uma circunferência trigonométrica, um mesmo ponto P está associado a infinitos arcos. Observe.







ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Note que, nas circunferências trigonométricas acima, os arcos de 60° ou $\frac{\pi}{3}$, 780° ou $\frac{13\pi}{3}$ e $-300°$ ou $-\frac{5\pi}{3}$ têm a mesma extremidade P. Nesse caso, dizemos que esses são **arcos côngruos**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Em uma circunferência trigonométrica, quando dois ou mais arcos têm a mesma origem e a mesma extremidade, dizemos que eles são côngruos entre si.
Seja um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $0° \leq \alpha < 360°$ ou $0 \leq \alpha < 2\pi$, as medidas dos arcos côngruos a $\overset{\frown}{AP}$ podem ser escritas como:

$$\alpha + k \cdot 360° \text{ ou } \alpha + k \cdot 2\pi, \text{ sendo } k \text{ um número inteiro}$$

O arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α é a **1ª determinação positiva** dos arcos côngruos a ele.

Nas circunferências trigonométricas apresentadas anteriormente, a 1ª determinação positiva $\left(\overset{\frown}{AP}\right)$ é 60° ou $\frac{\pi}{3}$. Os dois arcos côngruos a ele que foram apresentados podem ser escritos da seguinte maneira:

- $780° = 60° + 2 \cdot 360°$
  ou $\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$
- $-300° = 60° - 360°$
  ou $-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2\pi$

Acessando tecnologias

Condições no VisualG

Em diversas situações cotidianas, formulamos proposições do tipo: **se** Luiz obtiver uma nota superior a 7,5, **então** ele será aprovado na disciplina; **se** eu receber meu salário hoje, **então** irei ao cinema, **senão** lerei um livro. Essa estrutura, além de estar presente em nosso cotidiano, é útil e, muitas vezes, necessária em programação. Ela indica para o sistema se o programa deve ou não executar certa sequência de instruções, dependendo se a condição atribuída é verdadeira ou falsa. Para isso, no VisualG, podemos utilizar as seguintes instruções.

```
se(condição)entao
sequência de instruções
fimse
```

```
se(condição)entao
sequência de instruções 1
senao
sequência de instruções 2
fimse
```

Note que, para indicar o fim da sequência de instruções com condição, deve-se adicionar a instrução **fimse**.

A instrução **se()entao** tem por finalidade tomar uma decisão e executar determinada sequência de instruções caso a condição, descrita entre os parênteses, seja verdadeira. Se a condição for falsa, a sequência de instruções deve ser desprezada. Assim como a instrução **se()entao**, a instrução **se()entao...senao** tem por finalidade tomar decisão e realizar um desvio no processamento. Se a condição, descrita entre os parênteses, for verdadeira, a sequência de instruções 1 será executada e a sequência de instruções 2, desprezada. Caso a condição seja falsa, a sequência de instruções 1 será desprezada e a sequência de instruções 2, executada.

Para as condições, são utilizados os seguintes operadores relacionais para testar a relação entre dois ou mais termos.

Comando	=	>	>=	<	<=	<>
Significado	igual	maior do que	maior ou igual	menor do que	menor ou igual	diferente

Além disso, é possível utilizar dois ou mais operadores relacionais em uma mesma condição por meio de operadores lógicos, como **e**, **ou** e **não**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo de um programa em VisualG – 1ª determinação positiva de um arco

Utilizando os conceitos de programação estudados, vamos resolver o problema a seguir.

Escrever um programa que defina a 1ª determinação positiva de um arco, dada a medida do arco em graus.

Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo que o resolva. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1 Leia o número *a* que expressa a medida, em graus, do arco.

2 O número *a* é maior ou igual a zero?
Se sim, a 1ª determinação positiva é igual ao resto da divisão de *a* por 360.
Caso contrário, a 1ª determinação positiva é igual a 360 mais o resto da divisão de *a* por 360.

Fim

A instrução **int**(expressão) retorna à parte inteira do valor representado por *expressão*. Na linha **9**, por exemplo, será atribuída à variável *k* a parte inteira da divisão de *arc* por 360.

Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "primeira_determinacao
   _positiva"
2  Var
3  arc, pdp: real
4  k: inteiro
5  Inicio
6  escreva("Digite o número que expressa
   a medida do arco em graus: ")
7  leia(arc)
8  se(arc >= 0) entao
9  k <- int(arc/360)
10 pdp <- arc-k*360
11 escreva("A primeira determinação posi-
   tiva de ",arc,"° é ",pdp,"°")
12 senao
13 k <- int(arc/360)-1
14 pdp <- arc-k*360
15 escreva("A primeira determinação posi-
   tiva de ",arc,"° é ",pdp,"°")
16 fimse
17 Fimalgoritmo
```

Agora é com você!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 Qual condição deve ser satisfeita para que a instrução da linha **13** seja executada?

2 No problema 5 da página **61**, determinamos a distância aproximada percorrida por uma das cabines após a Singapore Flyer realizar uma volta completa. Agora, escreva um programa que determine se a distância percorrida por uma cabine após uma roda-gigante qualquer realizar uma volta completa, dado o comprimento do diâmetro dessa roda-gigante, é maior ou menor do que a percorrida por uma cabine na roda-gigante Singapore Flyer.



HELOÍSA PINTARELLI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas resolvidos

R4 Obtenha a 1ª determinação positiva e o número de voltas completas na circunferência trigonométrica do arco que mede:

a) 1 140° b) $-\frac{11\pi}{4}$

Resolva o item **a** utilizando o programa em VisualG apresentado na seção **Acessando tecnologias**.

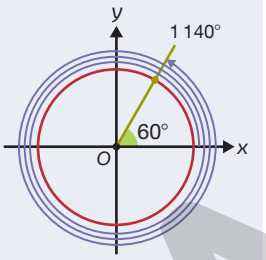
Resolução

a) O resto da divisão de 1 140° por 360° é a 1ª determinação positiva (α) do arco, e o quociente é o número de voltas completas (k) na circunferência.

$$\begin{array}{r|l} 1\,140 & 360 \\ \underbrace{60}_{\alpha} & \underbrace{3}_{k} \end{array}$$

Ou seja, $1\,140° = 60° + 3 \cdot 360°$.

Portanto, a 1ª determinação é 60°, e o número de voltas completas é 3, no sentido anti-horário (sentido positivo).



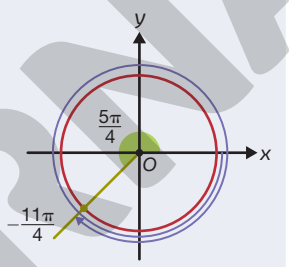
b) Temos:

$$-\frac{11\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} - \underbrace{1}_{k} \cdot 2\pi$$

Segue que a 1ª determinação positiva é:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \underbrace{\frac{5\pi}{4}}_{\alpha}$$

Portanto, a 1ª determinação positiva é $\frac{5\pi}{4}$, e o número de voltas completas é 1, no sentido horário (sentido negativo).



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas

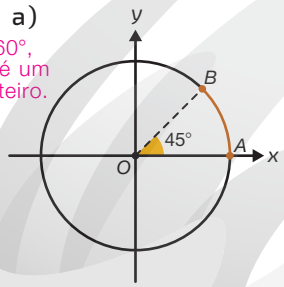
Anote as respostas no caderno.

12 Escreva a 1ª determinação positiva de um arco de:

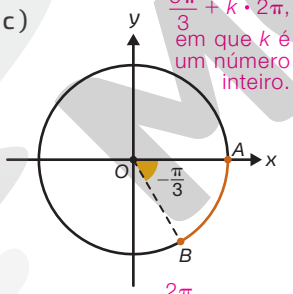
a) 1 460° 20° b) −900° 180° c) $\frac{27\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$

13 Para cada item, escreva uma expressão que determine os arcos côngruos a $\overset{\frown}{AB}$.

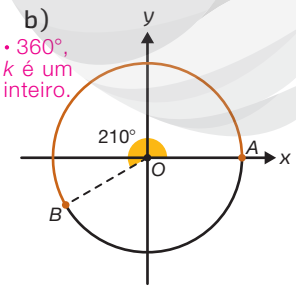
a) $45° + k \cdot 360°$, em que k é um número inteiro.



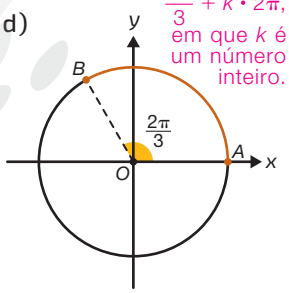
c) $\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, em que k é um número inteiro.



b) $210° + k \cdot 360°$, em que k é um número inteiro.



d) $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, em que k é um número inteiro.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

14 Em uma circunferência unitária, represente as extremidades dos arcos dados pela expressão: $20° + k \cdot 90°$, em que k é um número inteiro.

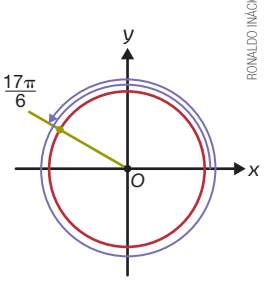
Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

15 O eneágono regular (polígono de nove lados congruentes) *ABCDEFGHI* está inscrito em uma circunferência trigonométrica, de modo que o vértice *A* está na origem dos arcos, e os outros vértices estão dispostos no sentido anti-horário.

a) Qual é a medida do arco de origem em *A* e extremidade no vértice *C*? 80° ou $\frac{4\pi}{9}$

b) Escreva a expressão geral dos arcos de origem em *A* e extremidades em cada vértice do eneágono. $k \cdot 40°$ ou $\frac{k \cdot 2\pi}{9}$, em que k é um número inteiro.

16 Em uma aula de Matemática, a professora de Rafael pediu a ele que desenhasse uma circunferência trigonométrica e nela representasse um arco côngruo ao arco de $\frac{3\pi}{4}$. Rafael apresentou como solução a figura abaixo.



RONALDO INÁCIO

a) A solução apresentada por Rafael está correta? Justifique sua resposta. Resposta no final do livro.

b) Represente em uma circunferência trigonométrica um arco côngruo ao arco de $\frac{3\pi}{4}$.

Resposta do item **b** na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

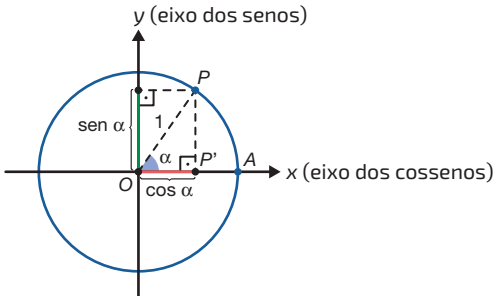
MODERNA

Seno, cosseno e tangente de um arco

Estudamos anteriormente as razões seno, cosseno e tangente em triângulos. Agora vamos estender esses conceitos para a circunferência trigonométrica.

- Seno e cosseno de um arco

Dado um arco de medida α e extremidade P na circunferência trigonométrica, observamos que o seno de α ($\operatorname{sen}\alpha$) é a ordenada de P, e o cosseno de α ($\cos\alpha$), a abscissa de P. Dizemos que o eixo y é o **eixo dos senos**, e o eixo x é o **eixo dos cossenos**.



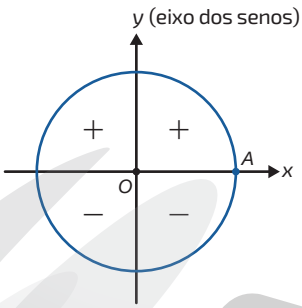
Em particular, com base no estudo das razões seno e cosseno no triângulo retângulo POP', temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{PP'}{PO} = \frac{PP'}{1} = PP' \qquad \cos\alpha = \frac{OP'}{PO} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

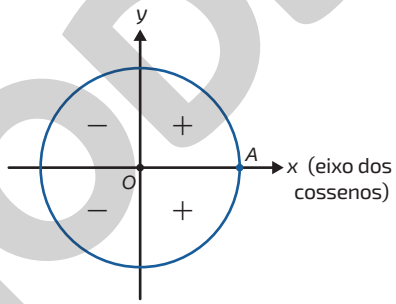
Observe os sinais do seno e do cosseno para um arco de medida α com extremidade em cada quadrante.

- 1º quadrante: $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$
- 2º quadrante: $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$
- 3º quadrante: $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha < 0$
- 4º quadrante: $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha < 0$

Sinais do seno



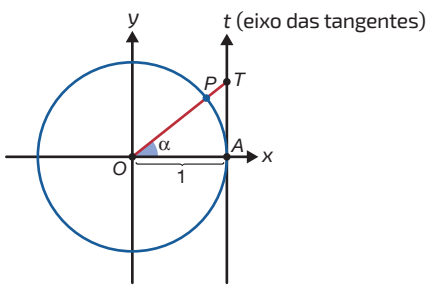
Sinais do cosseno



- Tangente de um arco

Considere uma circunferência trigonométrica, uma reta t tangente a ela no ponto A com a mesma orientação do eixo y e um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, em que k é um número inteiro.

A tangente de α $(\operatorname{tg}\alpha)$ é a medida algébrica de $\overline{AT}$, sendo T o ponto obtido na interseção da reta tangente t e $\overleftrightarrow{OP}$. Nesse caso, dizemos que a reta t é o **eixo das tangentes**.



Em particular, no triângulo retângulo TOA, temos: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$.

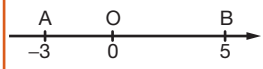
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Lembre-se de que, em um triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre os comprimentos do cateto oposto e da hipotenusa. Já o cosseno é a razão entre os comprimentos do cateto adjacente e da hipotenusa.

Lembre aos alunos que o comprimento do raio da circunferência trigonométrica é igual a 1, o que simplifica o estudo das razões trigonométricas na circunferência trigonométrica.

Lembre-se de que, em um triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre os comprimentos do cateto oposto e do cateto adjacente.

A medida algébrica de um segmento de reta orientado pode ser positiva, negativa ou nula. Observe.



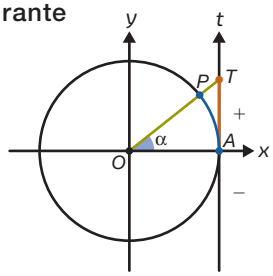
Na reta orientada acima, a medida algébrica de $\overline{OA}$ é -3, e a medida algébrica de $\overline{OB}$ é 5.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

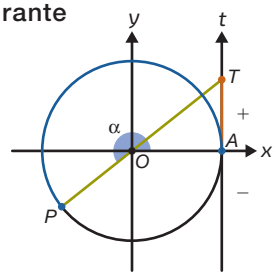
MODERNA

Vamos representar os arcos de extremidade P em cada um dos quadrantes.

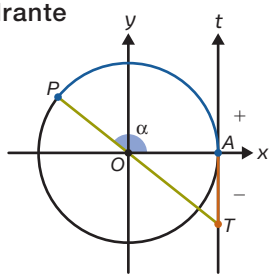
1º quadrante



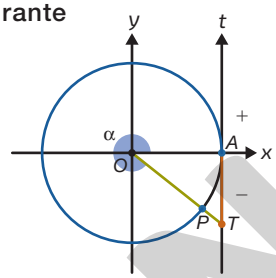
3º quadrante



2º quadrante



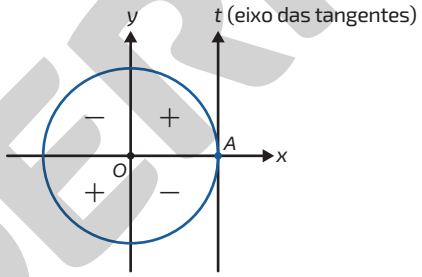
4º quadrante



Observe os sinais da tangente para um arco de medida α com extremidade em cada quadrante:

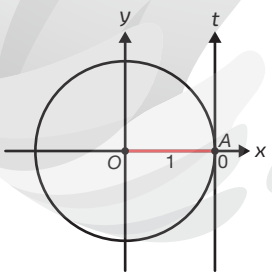
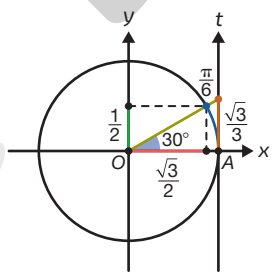
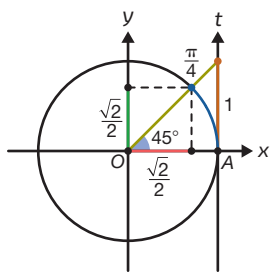
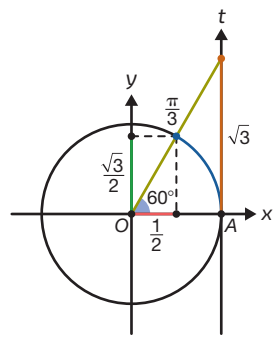
- 1º quadrante: $\operatorname{tg}\alpha > 0$
- 2º quadrante: $\operatorname{tg}\alpha < 0$
- 3º quadrante: $\operatorname{tg}\alpha > 0$
- 4º quadrante: $\operatorname{tg}\alpha < 0$

Sinais da tangente



É importante observar que quando um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α tem extremidade sobre o eixo y, $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Assim, para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ em que k é um número inteiro, $\operatorname{tg}\alpha$ não está definida.

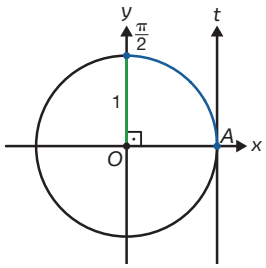
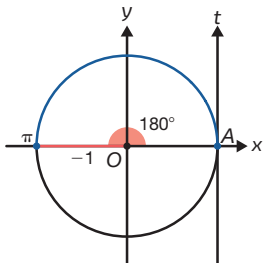
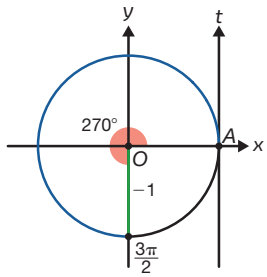
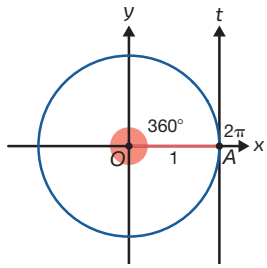
Observe alguns valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente.

0 ou 0°	$\frac{\pi}{6}$ ou 30°	$\frac{\pi}{4}$ ou 45°	$\frac{\pi}{3}$ ou 60°
			
$\operatorname{sen} 0 = 0$ $\cos 0 = 1$ $\operatorname{tg} 0 = 0$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$	$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

$\frac{\pi}{2}$ ou 90°	π ou 180°	$\frac{3\pi}{2}$ ou 270°	2π ou 360°
			
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ não está definida	$\operatorname{sen}\pi = 0$ $\cos\pi = -1$ $\operatorname{tg}\pi = 0$	$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ não está definida	$\operatorname{sen} 2\pi = 0$ $\cos 2\pi = 1$ $\operatorname{tg} 2\pi = 0$

Organizando esses valores, temos:

α	0 ou 0°	$\frac{\pi}{6}$ ou 30°	$\frac{\pi}{4}$ ou 45°	$\frac{\pi}{3}$ ou 60°	$\frac{\pi}{2}$ ou 90°	π ou 180°	$\frac{3\pi}{2}$ ou 270°	2π ou 360°
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

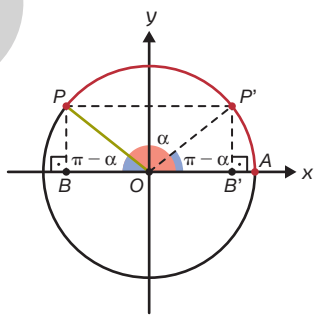
É possível demonstrar que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ para todo $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, em que k é um número inteiro. Porém, não apresentaremos tal demonstração nesta coleção.

Redução ao 1º quadrante

Neste tópico, iremos calcular o seno, o cosseno e a tangente em qualquer quadrante, relacionando-os a seus respectivos valores no 1º quadrante.

- Redução do 2º para o 1º quadrante.

Seja um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Escolhendo o ponto P' no 1º quadrante simétrico a P em relação ao eixo y, temos $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $P'(-\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.



Considere agora os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{P'B'}$ perpendiculares ao eixo x. Como os pontos P e P' são simétricos em relação ao eixo y, os pontos B e B' também o são. Assim, pelo caso de congruência **LLL**, os triângulos OPB e $OP'B'$ são congruentes.

Desse modo, $P'(\cos(\pi - \alpha), \operatorname{sen}(\pi - \alpha))$ e, consequentemente:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$$

Diante dessas igualdades, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{-\cos(\pi - \alpha)} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$$

Se julgar necessário, lembre os alunos de que, em um sistema cartesiano, dado um ponto $P(a, b)$ com $a > 0$ e $b > 0$, o ponto $P'(-a, b)$ é simétrico a P em relação ao eixo y; o ponto $P''(-a, -b)$ é simétrico a P em relação à origem; e o ponto $P'''(a, -b)$ é simétrico a P em relação ao eixo x.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

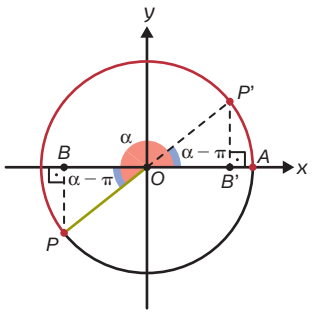
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- Redução do 3º para o 1º quadrante.

Seja um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Escolhendo o ponto P' no 1º quadrante simétrico a P em relação à origem, temos $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $P'(-\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$.

Como os ângulos $P\hat{O}B$ e $P'\hat{O}B'$ são opostos pelo vértice, então $P\hat{O}B = P'\hat{O}B' = \alpha - \pi$. Desse modo, $P'\big(\cos(\alpha - \pi), \operatorname{sen}(\alpha - \pi)\big)$ e, consequentemente:



$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - \pi) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$$

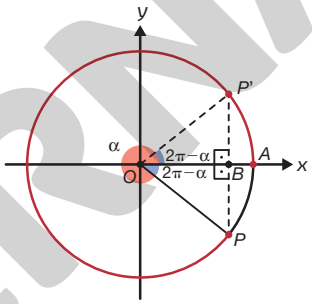
Diante dessas igualdades, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-\operatorname{sen}(\alpha - \pi)}{-\cos(\alpha - \pi)} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi)$$

- Redução do 4º para o 1º quadrante.

Seja um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Escolhendo o ponto P' no 1º quadrante simétrico a P em relação ao eixo x, temos $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $P'(\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$.

Pelo caso de congruência **LLL**, os triângulos OPB e $OP'B$ são congruentes. Desse modo, $P'\big(\cos(2\pi - \alpha), \operatorname{sen}(2\pi - \alpha)\big)$ e, consequentemente:



$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$$

Diante dessas igualdades, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas resolvidos

R5 Calcule.

a) $\operatorname{sen} 840°$ b) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$

Resolução

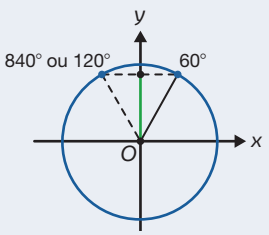
a) Nesse caso, devemos obter a 1ª determinação positiva do arco de 840°.

$$\begin{array}{r|l} 840 & 360 \\ \underbrace{120}_{\text{1ª determinação positiva}} & \underbrace{2}_{\text{número de voltas}} \end{array}$$

Como a extremidade do arco de 120° é no 2º quadrante $(90° < 120° < 180°)$ temos:

$$\operatorname{sen} 840° = \operatorname{sen} 120° = \operatorname{sen}(180° - 120°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\operatorname{sen} 840° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

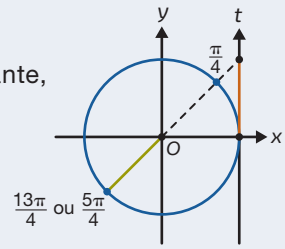
MODERNA

b) Obtendo a 1ª determinação positiva do arco de $\frac{13\pi}{4}$, temos:

$$\frac{13\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi$$

Como a extremidade do arco de $\frac{5\pi}{4}$ é no 3º quadrante, segue que:

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$



RONALDO INÁCIO

Portanto, $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4} = 1$.

R6 Calcule o valor da expressão $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{3}}$.

Resolução

Inicialmente, reduzimos cada arco da expressão ao 1º quadrante e calculamos o valor da razão trigonométrica correspondente.

- $\frac{7\pi}{6}$ está no 3º quadrante, logo:

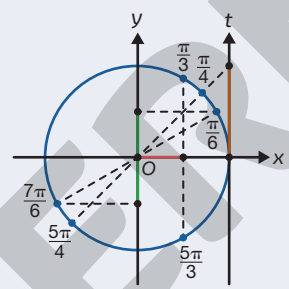
$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

- $\frac{5\pi}{4}$ está no 3º quadrante, logo:

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

- $\frac{5\pi}{3}$ está no 4º quadrante, logo:

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$



RONALDO INÁCIO

Em seguida, substituímos os valores na expressão:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2}} = 1$$

Portanto, o valor da expressão é 1.

R7 Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, determine $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$.

Resolução

Da relação fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Como α pertence ao 2º quadrante, então $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Utilizando a relação $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, segue que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{\cancel{5}}}{-\frac{4}{\cancel{5}}} = -\frac{3}{4}$$

Portanto, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ e $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

É possível demonstrar que a relação $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ é válida para qualquer medida de arco α. Porém, não apresentaremos essa demonstração nesta coleção.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

17 Em cada item, determine a quais quadrantes a extremidade de α pode pertencer.

a) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ 2º ou 3º

b) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{5}$ 1º ou 2º

c) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ 1º ou 3º

d) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{7}$ 3º ou 4º

e) $\operatorname{tg}\alpha = -5$ 2º ou 4º

f) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ 1º ou 4º

18 Determine se é positivo ou negativo o seno do arco da medida:

a) $2\,120°$ negativo

b) $-\frac{39\pi}{5}$ positivo

c) $-1\,605°$ negativo

d) $\frac{43\pi}{9}$ positivo

19 Em qual quadrante os valores de α satisfazem simultaneamente:

a) $\operatorname{tg}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$? 2º

b) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$? 2º

c) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$? 1º

d) $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha < 0$? 4º

e) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$? 3º

20 Escreva as igualdades utilizando apenas arcos do 1º quadrante e determine o sinal de A em cada uma delas.

a) $A = \operatorname{sen}500° \cdot \cos 3\,200°$ $A = \operatorname{sen}40° \cdot \cos 40°$; $A > 0$

b) $A = \cos\frac{22\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $A = -\cos\frac{\pi}{3} \cdot \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$; $A > 0$

c) $A = \operatorname{tg}1\,345° \cdot \operatorname{sen}(-1\,975°)$ $A = \operatorname{tg}85° \cdot (-\operatorname{sen}5°)$; $A < 0$

d) $A = \cos\frac{27\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}(-2\,780°)$ $A = -\cos\frac{2\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}80°$; $A < 0$

21 Para abrir certo cofre, além das chaves de segurança, é necessário saber um segredo, que consiste em uma combinação de movimentos do botão.



LEO GIBRAN

O segredo para abrir o cofre é a seguinte sequência de giros, partindo da posição A.

1º) Giro no sentido horário até F;
2º) Giro no sentido anti-horário até D;
3º) Giro no sentido anti-horário até H;
4º) Giro no sentido horário até C.

a) Qual é o ângulo correspondente a cada um desses giros? 1º: $-225°$; 2º: $90°$; 3º: $180°$; 4º: $-135°$

b) Qual é a diferença em graus, medida no sentido anti-horário entre a posição inicial e a posição final do botão de combinação, nessa ordem? $270°$

c) Calcule o seno e o cosseno do ângulo obtido no item **b**. $\operatorname{sen}270° = -1$ e $\cos270° = 0$

25. a) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$

25. b) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$

22 Em 40 minutos, um ciclista percorreu $\frac{25}{8}$ de volta em uma pista circular de raio r e, em seguida, parou para descansar.

a) Qual é o ângulo do arco que representa todo o trajeto percorrido pelo ciclista? $1\,125°$

b) Qual é o ângulo menor do arco de extremidades no ponto de partida e no ponto em que o ciclista parou? $45°$

c) Calcule o seno e o cosseno do ângulo obtido no item **b**. $\operatorname{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Quantas voltas a mais ele deve percorrer nesta pista para que o arco descrito em todo o percurso seja igual a $2\,565°$? 4 voltas

23 Para rosquear totalmente certo parafuso, é necessário girá-lo em $5\,500°$.

a) Qual é, em graus, a medida do menor ângulo correspondente à diferença entre a posição inicial da chave e sua posição ao terminar de rosquear o parafuso? $150°$

b) Calcule o seno e o cosseno do ângulo obtido no item **a**. $\operatorname{sen}150° = \frac{1}{2}$ e $\cos150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

24 Calcule.

a) $\operatorname{sen}1\,110° \; \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg}765° \; 1$

c) $\cos\frac{25\pi}{3} \; \frac{1}{2}$

d) $\operatorname{sen}\frac{29\pi}{3} \; -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos(-2\,310°) \; -\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos1\,770° \; \frac{\sqrt{3}}{2}$

25 Determine os valores de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$, dado que:

a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

b) $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, com $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

26 Escreva um valor para α de maneira que $\operatorname{sen}\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Compare sua resposta com a dos colegas. As possíveis respostas deste exercício correspondem aos arcos cuja primeira determinação positiva é do segundo quadrante.

27 O professor de Lucas propôs o seguinte desafio à turma:

Desafio

Para quais valores de k, em que k é um número inteiro, a igualdade a seguir é verdadeira?

$$\frac{\operatorname{sen}(150° + 2k\pi) + \cos(300° + 2k\pi)}{\operatorname{tg}(225° + 2k\pi)} = 1$$

Após alguns cálculos e discussões em grupo, a turma apresentou a conclusão de que para todo valor de k a igualdade é verdadeira.

A conclusão apresentada pelos alunos está correta? Justifique sua resposta. Resposta no final do livro.

MODERNA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica

Nesta seção, vamos construir uma circunferência trigonométrica com os valores do seno, do cosseno e da tangente de alguns ângulos. Para isso, vamos utilizar o GeoGebra, que é um dos *softwares* de Geometria dinâmica disponíveis.

No Suplemento para o professor há mais informações sobre o *software* GeoGebra.

A Marque os pontos $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$. Para isso, digite as coordenadas de cada um desses pontos no campo **Entrada**.

B Construa uma circunferência de raio unitário. Para isso, selecione a opção **Círculo dados Centro e Um de seus pontos**, e clique sobre os pontos *A* e *B*, nessa ordem.

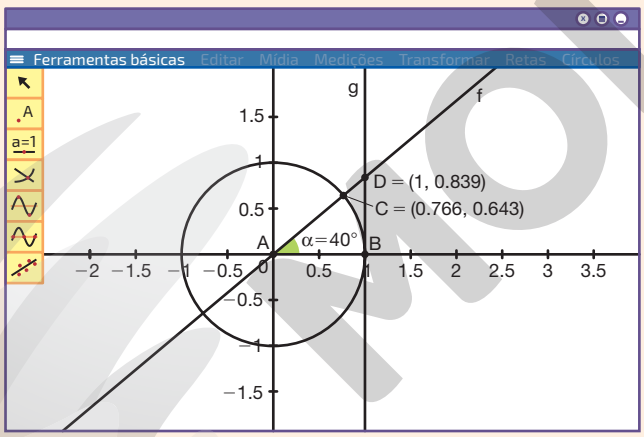
C Marque um ponto *C* pertencente à circunferência. Em seguida, trace uma reta *f* passando por *A* e por *C*. Para isso, selecionando a opção **Reta**, clique sobre os pontos *A* e *C*.

D Indique o ângulo $B\hat{A}C$, selecionando a opção **Ângulo** e clicando sobre os pontos *B*, *A* e *C*, nessa ordem.

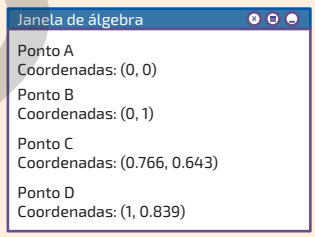
E Na sequência, construa o eixo *g* das tangentes. Para isso, selecione a opção **Reta Paralela**, clique sobre o eixo *y* e sobre o ponto *B*.

F Marque o ponto *D*, que é a interseção entre as retas *f* e *g*. Para isso, selecione a opção **Interseção de Dois Objetos** e clique sobre as retas *f* e *g*.

Para ajustar a quantidade de casas decimais dos valores, acesse o menu **Opções** e, no item **Arredondamento**, selecione a opção com a quantidade de casas decimais desejada.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO



Na **Janela de álgebra** são apresentadas as coordenadas dos pontos. A ordenada de *C* é o seno de $B\hat{A}C$ e a abscissa, o cosseno de $B\hat{A}C$. Já a ordenada de *D* é a tangente de $B\hat{A}C$.

Agora é com você!

Respostas no Suplemento para o professor.

Utilizando a circunferência trigonométrica construída, responda às questões.

1 Em qual quadrante os valores do seno e do cosseno são positivos? E em qual ambos são negativos?

2 Se $\operatorname{sen}\alpha = -0{,}4$, quais são os possíveis valores de $\cos\alpha$?

3 Para quais valores de α, com $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, tem-se $\operatorname{tg}\alpha = 1$? E $\operatorname{tg}\alpha = -1$?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5 Funções trigonométricas

Variação das marés

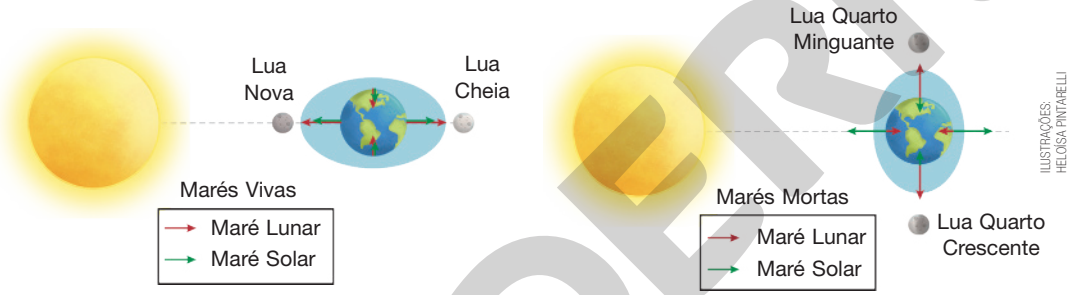
As marés são variações cíclicas do nível do mar, causadas pela atração gravitacional do Sol e da Lua, podendo apresentar amplitudes variadas para cada ponto da superfície terrestre, dependendo do alinhamento desses astros.

Uma maneira de identificar o comportamento das marés é por meio das fases da Lua. Por exemplo:

- nas luas nova e cheia é quando acontecem as maiores preamar, pois a Lua e o Sol estão alinhados, somando seus efeitos gravitacionais; o período dessas fases da Lua é conhecido como marés vivas.
- nas luas crescente e minguante é quando ocorrem as menores baixa-mares, pois as forças gravitacionais, lunar e solar são mínimas; o período dessas fases da Lua é conhecido como marés mortas.

BNCC
- EM13MAT306
- EM13MAT308

Preamar: nível máximo da maré.
Baixa-mares: estado de parada em que fica a maré, depois de seu último período de vazante, até começar a encher.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Ilustrações elaboradas com base em: <http://www.if.ufrgs.br/~fatima/fis2010/Aula8-132.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2020.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A ação desses corpos celestes gera uma força de maré, que causa a preamar tanto no lado da Terra mais próximo como no lado do planeta mais afastado da Lua. Se você passar um dia observando a maré, poderá notar que aproximadamente a cada 6 horas haverá uma mudança em sua altura, de preamar para baixa-mares, e vice-versa. Essa oscilação periódica das marés se deve à rotação da Terra.

ERIC L TOLLSTAM/SHUTTERSTOCK



PNEMS/ALAMY/FOTOARENA

Baía Fundy, na maré baixa e na maré alta, respectivamente, no Canadá, em 2018.

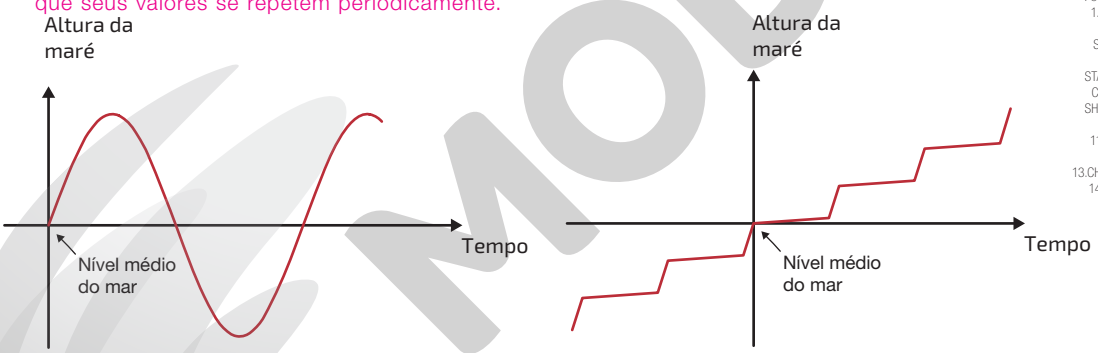
Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A O que são as marés? Uma possível resposta: as marés são variações periódicas do nível do mar em razão da atração gravitacional do Sol e da Lua.

B Por que as maiores marés acontecem na lua nova?
Uma possível resposta: porque a Lua e o Sol estão alinhados somando os seus efeitos.

C De acordo com as informações apresentadas, qual dos gráficos abaixo melhor representa a variação das marés? Por quê? Gráfico I; uma possível resposta: como as marés são variações periódicas, o gráfico I é o que melhor representa essa variação, uma vez que seus valores se repetem periodicamente.

ILUSTRAÇÕES: CARLOS BORIN



FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.REVERS/SHUTTERSTOCK; 2.MR DOOMITS/SHUTTERSTOCK; 3.OLIVER HOFFMANN/SHUTTERSTOCK; 4.KLETR/SHUTTERSTOCK; 5.DIMEDROL68/SHUTTERSTOCK; 6.ALEX STAROSELTSEV/SHUTTERSTOCK; 7. CRISTIAN CESTARO/SHUTTERSTOCK; 8.SONJA FILITZ/SHUTTERSTOCK; 9.S_OLEG/SHUTTERSTOCK; 10.MARZOLINO/SHUTTERSTOCK; 11.VERESHCHAGIN DMITRY/SHUTTERSTOCK; 12.MARZOLINO/SHUTTERSTOCK; 13.CHONLASUB WORAVICHAN/SHUTTERSTOCK; 14.EIVANOVA/SHUTTERSTOCK; 15.CHRISTOS GEORGHIOU/SHUTTERSTOCK

O comportamento das marés pode ser modelado e estudado por meio de **funções trigonométricas**, assunto que será abordado nas próximas páginas. Além disso, essas funções são utilizadas para representar diversos fenômenos periódicos, como as fases da lua, o movimento dos planetas, as estações do ano, entre outros.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Funções

Em diversas situações do dia a dia, é possível perceber grandezas que, de certa maneira, estão relacionadas. Muitas dessas relações podem ser descritas por um conceito matemático denominado **função**, assunto que provavelmente você já estudou. Tal conceito é relativamente novo, visto que a maior parte de seu desenvolvimento ocorreu nos séculos XVIII e XIX, com contribuições de matemáticos como Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1642-1727), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Fourier (1768-1830).

Antes de apresentarmos o conceito de função, vamos estudar a **noção de conjuntos**, os **conjuntos numéricos** e o **valor absoluto de um número real**.

Noção de conjuntos

Ao obter coleções quaisquer de objetos distintos, estamos formando **conjuntos**. Cada objeto de um conjunto é denominado **elemento** do conjunto.

Exemplos

- Conjunto das vogais de nosso alfabeto. Nesse caso, cada uma das vogais é um elemento do conjunto.
- Conjunto dos números pares positivos menores do que 100. Nesse caso, cada um dos números pares positivos menores do que 100 é um elemento do conjunto.

Denotaremos conjuntos usando letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas. Por exemplo, o conjunto M cujos elementos são a, b e c será representado por:

$$M = \{a, b, c\}$$

Note que os elementos do conjunto são apresentados entre chaves e separados por vírgula. Quando os elementos de um conjunto forem números decimais, usaremos ponto e vírgula para não confundir com a vírgula que separa as casas decimais de cada número.

Exemplos

- Conjunto das vogais de nosso alfabeto: $V = \{a, e, i, o, u\}$
- Conjunto das Regiões do Brasil:
  $C = \{\text{Sul, Sudeste, Centro-Oeste, Norte, Nordeste}\}$
- Conjunto dos números pares positivos menores do que 100:
  $M = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 96, 98\}$
- Conjunto dos números primos: $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

No conjunto M, as reticências indicam que, entre os elementos 10 e 96, há outros elementos. Já em P, as reticências indicam que há no conjunto outros elementos maiores do que 11.

Entre os exemplos apresentados, V, C e M são **conjuntos finitos**, pois podemos contar seus elementos, ou seja, associá-los aos números naturais de 1 até certo número n. Já P é um **conjunto infinito**, pois não é finito.

Os elementos de um conjunto também podem ser apresentados pela condição que os definem, denominada **lei de formação** do conjunto.

Exemplo

- $I = \{x \mid x \text{ é um número ímpar maior do que 6 e menor do que 17}\}$

  ($\mid$: lê-se: tal que)

Quando um objeto a pertence ao conjunto A, escrevemos $a \in A$. Caso contrário, escrevemos $a \notin A$ para indicar que o objeto a não é elemento de A.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

Considerando o conjunto $M = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 96, 98\}$, temos:

- $8 \in M$, pois 8 é um número par positivo menor do que 100.
  ↑ lê-se: pertence
- $13 \notin M$, pois 13 não é um número par.
  ↑ lê-se: não pertence

Indicamos a quantidade de elementos de um conjunto A por $n(A)$. No caso do conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$, temos $n(V) = 5$.

Todo conjunto que possui um único elemento é chamado **conjunto unitário**. Já o conjunto que não possui elementos é chamado **conjunto vazio**. Indicaremos o conjunto vazio por $\varnothing$ ou $\{\ \}$.

Subconjunto

Considere os conjuntos A e B. Se todo elemento do conjunto A é também elemento do conjunto B, dizemos que A é **subconjunto** de B, ou A é **parte** de B, ou que A **está contido** em B, e indicamos esse fato por:

$A \subset B$ (lê-se: está contido) ou $B \supset A$ (lê-se: contém)

Quando existe pelo menos um elemento de A que não é elemento de B, dizemos que A **não é um subconjunto** de B, ou A **não é parte** de B, ou A **não está contido** em B, e indicamos esse fato por:

$A \not\subset B$ (lê-se: não está contido) ou $B \not\supset A$ (lê-se: não contém)

Se a é um elemento de A, tem-se a relação $a \in A$, que também pode ser escrita na forma $\{a\} \subset A$. Porém, não é correto escrever $a \subset A$.

Exemplos

- Considere os conjuntos $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Nesse caso, $A \subset B$, pois todo elemento de A é, também, elemento de B. Porém, note que $B \not\subset A$, pois $3 \in B$, mas $3 \notin A$.

Exercícios e problemas

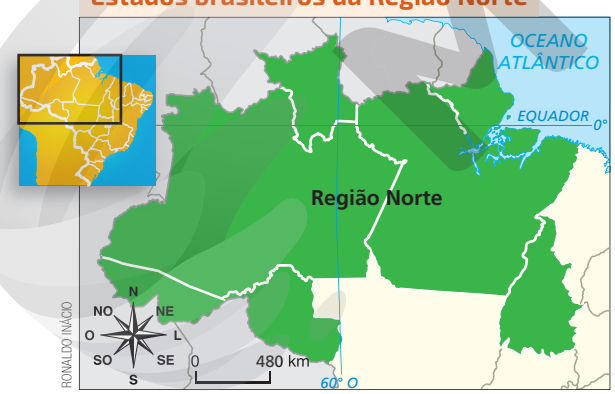
Anote as respostas no caderno.

1 Apresente os elementos de cada conjunto entre chaves e separados por vírgulas. Em seguida, classifique-os em finito ou infinito.

a) Divisores positivos de 30. {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}; finito

b) Estados brasileiros da Região Norte. {Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins}; finito

Estados brasileiros da Região Norte



Fonte de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018.

c) Múltiplos positivos de 4. {4, 8, 12, 16, ...}; infinito

d) Letras que compõem a palavra conjunto. {c, j, n, o, t, u}; finito

2 Considere o conjunto D dos números quadrados perfeitos ímpares e menores do que 150. Quantos elementos tem D? 6 elementos

3 Utilize os símbolos $\in$ e $\notin$ para relacionar cada elemento aos conjuntos A e B.

- $A = \{x \mid x \text{ é par e divisor de } 20\}$
- $B = \{y \mid \sqrt{y} \text{ é um número inteiro}\}$

a) 4 — $4 \in A$; $4 \in B$

b) 6 — $6 \notin A$; $6 \notin B$

c) 10 — $10 \in A$; $10 \notin B$

d) 16 — $16 \notin A$; $16 \in B$

e) 25 — $25 \notin A$; $25 \in B$

f) 50 — $50 \notin A$; $50 \notin B$

4 Considere o número inteiro $5X2Y$, em que X e Y representam os algarismos das centenas e das unidades, respectivamente. Quantos elementos tem o conjunto A dos pares ordenados (X, Y) que tornam o número dado divisível por 15? 7 elementos

Lembre-se de que um número é divisível por 15 quando, simultaneamente, é divisível por 3 e 5.

5 Seja o conjunto $A = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Identifique as afirmativas corretas. afirmativas a, b, c e e

a) $1 \in A$

b) $9 \in A$

c) $2 \notin A$

d) $4 \subset A$

e) $\{5\} \subset A$

f) $\{1, 2\} \subset A$

6 Determine todos os subconjuntos de $X = \{a, b, c, d\}$ que possuem exatamente:

a) 1 elemento. $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

b) 2 elementos. $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

c) 3 elementos. $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

d) 4 elementos. $\{a, b, c, d\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Conjuntos numéricos

Agora, vamos apresentar alguns dos chamados **conjuntos numéricos**, que são frequentemente encontrados na Matemática. Esses conjuntos são particularmente importantes e serão utilizados em nossos estudos posteriores.

Conjunto dos números naturais e dos números inteiros

Por mais que atualmente nos pareça simples a prática de contar elementos de uma coleção, isso nem sempre foi assim na história da humanidade. Nossos antepassados, quando deixaram de ser nômades e passaram a criar animais e organizar pequenas comunidades, por exemplo, utilizavam-se de associações "um a um" para quantificar os rebanhos e os membros da tribo.

Podemos dizer que dessa necessidade de contar surgiram os números que, posteriormente, acrescidos do zero, formaram o **conjunto dos números naturais** $(\mathbb{N})$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Podemos destacar um subconjunto de $\mathbb{N}$ formado por todos os números naturais, com exceção do zero, o qual indicamos por: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Porém, os números naturais não foram capazes de suprir as necessidades que o ser humano teve de expressar $a - b$, quando $a < b$. Desse tipo de necessidade, surgiram os números inteiros negativos, que, com os números naturais, formam o **conjunto dos números inteiros** $(\mathbb{Z})$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

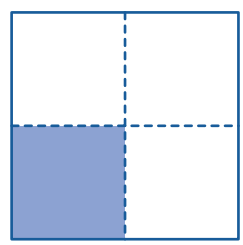
Como todos os números naturais também são números inteiros, então $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Podemos destacar outros subconjuntos de $\mathbb{Z}$.

- Conjuntos dos números inteiros não nulos.
$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$$
- Conjunto dos números inteiros não negativos.
$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$$
- Conjunto dos números inteiros positivos.
$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
- Conjunto dos números inteiros não positivos.
$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$$
- Conjunto dos números inteiros negativos.
$$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -3, -2, -1\}$$

Conjunto dos números racionais

Ao realizarmos uma medição de massa, comprimento, temperatura, área etc., estamos comparando a quantidade a ser medida a uma unidade tomada como padrão. Se considerarmos, por exemplo, a área da região delimitada pelo quadrado maior ao lado como uma unidade de área (1 u. a.), então a parte destacada em azul corresponde a $\frac{1}{4}$ u. a.


RONALDO INÁCIO

Para expressarmos medidas como essa, utilizamos os números racionais, ou seja, aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Esses números formam o **conjunto dos números racionais** $(\mathbb{Q})$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Os números naturais e os números inteiros também são racionais, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Podemos destacar outros subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

- Conjuntos dos números racionais não nulos: $\mathbb{Q}^*$
- Conjunto dos números racionais não negativos: $\mathbb{Q}_+$
- Conjunto dos números racionais positivos: $\mathbb{Q}_+^*$
- Conjunto dos números racionais não positivos: $\mathbb{Q}_-$
- Conjunto dos números racionais negativos: $\mathbb{Q}_-^*$

Exemplos

- $-\frac{3}{7}$
- -8
- 33
- $0{,}25$
- $-1{,}3333\ldots$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Para expressar um número racional na forma de fração por meio de um número decimal, podemos dividir o numerador da fração pelo denominador. O resultado dessa divisão será um número com representação decimal finita ou uma dízima periódica.

Exemplos

- $\frac{7}{4} = 1{,}75$
- $\frac{10}{2} = 5$
- $\frac{5}{3} = 1{,}6666\ldots = 1{,}\overline{6}$

Nas dízimas periódicas, indicamos com um traço o algarismo ou o grupo de algarismos que se repetem infinitamente, chamado **período**. Já a fração que gera a dízima periódica é chamada **fração geratriz**. Em relação à dízima periódica $1{,}\overline{6}$, o período é 6 e a fração geratriz é $\frac{5}{3}$.

O período de uma dízima periódica pode ser formado por mais de um algarismo. A dízima periódica cuja fração geratriz é $\frac{3}{11}$, por exemplo, tem período 27 e pode ser indicada por $0{,}\overline{27}$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Escreva cada um dos números na forma fracionária.

a) 1,725 b) $5{,}3\overline{27}$

Resolução

a) Seja $x = 1{,}725$. Logo:

$$1\,000 \cdot x = 1{,}725 \cdot 1\,000$$
$$1\,000x = 1\,725$$
$$x = \frac{1\,725}{1\,000} = \frac{69}{40}$$

Portanto, $1{,}725 = \frac{69}{40}$.

b) Seja $x = 5{,}3\overline{27}$. Logo:

$$10 \cdot x = 5{,}3\overline{27} \cdot 10$$
$$10x = 53{,}\overline{27} \quad (\text{I})$$
$$100 \cdot 10x = 53{,}\overline{27} \cdot 100$$
$$1\,000x = 5\,327{,}\overline{27} \quad (\text{II})$$

Subtraindo **I** de **II**, temos:

$$1\,000x - 10x = 5\,327{,}\overline{27} - 53{,}\overline{27}$$
$$990x = 5\,274$$
$$x = \frac{5\,274}{990} = \frac{293}{55}$$

Portanto, $5{,}3\overline{27} = \frac{293}{55}$.

Conjunto dos números irracionais

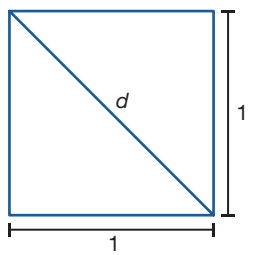
Como estudamos anteriormente, os números racionais estão diretamente relacionados à necessidade humana de realizar medições. É verdade que até certo momento da história acreditava-se que esses números eram suficientes para expressar qualquer medida, contudo os pitagóricos mostraram em seus estudos que nem toda medida pode ser expressa por um número na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Em particular, esses estudiosos provaram que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser expresso por um número racional.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

Note que $d = \sqrt{2}$, pois $d > 0$.



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Como $\sqrt{2}$ não é um número racional, sua representação decimal possui infinitas casas decimais não periódicas. Além disso, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Utilizando um computador, podemos obter, por exemplo, uma aproximação para $\sqrt{2}$ com 29 casas decimais.

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}41421356237309504880168872420$$

Os números que não podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, formam o **conjunto dos números irracionais** $(\mathbb{I})$.

Exemplos

- $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$
- $-\sqrt{8} = -2{,}8284271\ldots$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071067\ldots$
- $\frac{4}{\sqrt{7}} = 1{,}5118578\ldots$

Conjunto dos números reais

O **conjunto dos números reais** $(\mathbb{R})$ é o conjunto cujos elementos são todos os números racionais e todos os números irracionais. Dessa maneira, todo número natural, inteiro, racional e irracional é um número real.

Podemos destacar outros subconjuntos de $\mathbb{R}$.

- Conjuntos dos números reais não nulos: $\mathbb{R}^*$
- Conjunto dos números reais não negativos: $\mathbb{R}_+$
- Conjunto dos números reais positivos: $\mathbb{R}_+^*$
- Conjunto dos números reais não positivos: $\mathbb{R}_-$
- Conjunto dos números reais negativos: $\mathbb{R}_-^*$

Intervalos reais

Além dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ apresentados, outros de grande importância na Matemática são aqueles definidos por desigualdades, chamados **intervalos reais**. Para observarmos os diferentes intervalos reais, consideramos os números reais a e b, tal que $a < b$.

- Intervalo fechado: $[a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.
- Intervalo aberto: $]a, b[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita: $[a, b[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.
- Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita: $]a, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$.

Existem também os intervalos reais ilimitados. De maneira geral, utilizamos os símbolos $-\infty$ (lê-se: "menos infinito") e $+\infty$ (lê-se: "mais infinito") para indicar intervalos ilimitados.

- Intervalo ilimitado à esquerda e fechado à direita: $]-\infty, a]$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$.
- Intervalo ilimitado à esquerda e aberto à direita: $]-\infty, a[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.
- Intervalo fechado à esquerda e ilimitado à direita: $[a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$.
- Intervalo aberto à esquerda e ilimitado à direita: $]a, +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Valor absoluto de um número real

Em várias situações, medimos grandezas cujo resultado pode ser expresso por números positivos ou negativos, como a temperatura. Para medir essas grandezas, é tomado um valor como referência zero. Na temperatura medida em graus Celsius, por exemplo, esse valor de referência é 0 °C.

Em algumas cidades brasileiras, como em São Joaquim (SC), são registradas temperaturas abaixo de zero. Podemos observar no termômetro apresentado na foto que a temperatura registrada foi de -2 °C, ou seja, de "2 °C abaixo de zero".

Nessa expressão, a temperatura negativa foi indicada a partir de seu valor absoluto, acompanhado do referencial "abaixo de zero".



WAGNER URBANO ONJACK/FUTURA PRESS

Termômetro na cidade de São Joaquim (SC), em 2017.

O **valor absoluto** ou módulo de um número real a, indicado por $|a|$, é definido como o próprio número a, se $a \geqslant 0$, ou como $-a$, se $a < 0$. Em resumo:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Exemplos

- $|8| = 8$
- $|x - 2| = x - 2$, se $x \geqslant 2$ e $|x - 2| = 2 - x$, quando $x < 2$.
- $|-5| = -(-5) = 5$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

7 Represente cada conjunto escrevendo seus elementos entre chaves e separados por vírgula.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leqslant 12\}$ $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid -8 \leqslant x \leqslant 1\}$ $B = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1\}$

c) $C = \{x \mid x = 5 \cdot k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$ $C = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Q}_-^* \mid x \cdot (2x - 7) = 0\}$ $D = \varnothing$

8 Calcule.

a) $|-5| + |2|$ 7

b) $|-3 \cdot 2|$ 6

c) $|-2| \cdot |7|$ 14

d) $|-5 + 3| + |2 - 8|$ 8

9 Qual é o maior número natural A que torna verdadeira a desigualdade $-\frac{16}{7} < -\frac{A}{11}$?

$A = 25$

10 Escreva na forma de fração os seguintes números racionais.

a) $36{,}8$ $\frac{184}{5}$

b) $1{,}\overline{65}$ $\frac{164}{99}$

c) $0{,}9375$ $\frac{15}{16}$

d) $0{,}\overline{843}$ $\frac{281}{333}$

e) $7{,}58\overline{1}$ $\frac{417}{55}$

f) $12{,}3\overline{2}$ $\frac{1\,109}{90}$

11 Calculadora

Herão de Alexandria, que viveu em algum período entre 150 a.C. e 250 d.C., propôs, em sua obra *A métrica*, um método para calcular a raiz quadrada aproximada de um número natural n não quadrado perfeito. Nesse método, se $n = a \cdot b$, então $\sqrt{n} = \frac{a + b}{2}$, considerando que, quanto mais próximos forem a e b, melhor será a aproximação da raiz quadrada. Como $20 = 4 \cdot 5$, por exemplo, pelo método de Herão, temos: $\sqrt{20} \simeq \frac{4 + 5}{2} = 4{,}5$.

Utilizando o método de Herão, determine uma aproximação para cada raiz quadrada. Em seguida, com uma calculadora, obtenha uma aproximação com quatro casas decimais e compare os resultados.

a) $\sqrt{8}$ 3; 2,8284

b) $\sqrt{6}$ 2,5; 2,4495

c) $\sqrt{12}$ 3,5; 3,4641

d) $\sqrt{24}$ 5; 4,8990

12 Classifique cada sentença em **verdadeira** ou **falsa**.

a) $-\frac{18}{4} \in [4, 5]$ falsa

b) $\frac{25}{3} \notin [-1, 8[$ verdadeira

c) $\sqrt{5} \in]0, 2\sqrt{5}[$ verdadeira

d) $]-\infty, -4[\subset \mathbb{Z}$ falsa

e) $[2, 5[\subset]3, 5[$ falsa

f) $]-8, 2[\subset]-7, 4]$ falsa

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Conceito de função

Acredita-se que o termo **função** tenha sido introduzido na Matemática por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) para, inicialmente, expressar a associação entre quantidades e curvas. Já a noção que temos de função deve-se às considerações feitas posteriormente por Leonhard Euler (1707-1783).

Sejam os conjuntos A e B não vazios. Uma função de A em B é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$. Indicaremos essa função por:

$$f: A \to B \text{ (lê-se: função de } A \text{ em } B)$$

O conjunto A chama-se **domínio** $\left(D(f)\right)$ e o B, **contradomínio** $\left(CD(f)\right)$ da função f. Para cada elemento $x \in A$, o elemento $y \in B$ é chamado **imagem** de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in A$. O conjunto formado por todas as imagens é um subconjunto de B, denominado **imagem** da função f $\left(\text{Im}(f)\right)$.

Exemplos

Uma função f de A em B, com $A = \{-2, 0, 1, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 9, 10\}$, que associa cada elemento x de A a seu quadrado y em B, pode ser definida pela fórmula (**lei de formação**) $f(x) = x^2$.

Utilizando a lei de formação da função f, podemos determinar a imagem $y \in B$ de cada elemento $x \in A$.

- $f(-2) = (-2)^2 = 4$; a imagem de -2 é 4
- $f(0) = 0^2 = 0$; a imagem de 0 é 0
- $f(1) = 1^2 = 1$; a imagem de 1 é 1
- $f(3) = 3^2 = 9$; a imagem de 3 é 9

Exercícios e problemas resolvidos

R2 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = x + 3$. Determine o elemento de $\mathbb{R}$ cuja imagem da função f é 2.

Resolução

Para determinar qual é o elemento de $\mathbb{R}$ cuja imagem é 2, devemos calcular $f(x) = 2$. Assim:

$$f(x) = 2 \Rightarrow x + 3 = 2 \Rightarrow x = 2 - 3 = -1$$

Portanto, -1 é o elemento de $\mathbb{R}$ cuja imagem pela função f é 2.

R3 Um supermercado vende produtos no atacado e no varejo, sendo as vendas consideradas de atacado se o cliente comprar mais de 11 unidades de um mesmo produto. Sabendo que o preço de uma barra de cereal no varejo é R$ 1,99 e no atacado é R$ 1,65, escreva uma função definida por duas sentenças que represente o preço total y em função da quantidade x dessa barra de cereal. Em seguida, verifique se o preço total é menor ao comprar 10 ou 12 unidades.

Resolução

A lei de formação da função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que representa o preço total das barras de cereal em função da quantidade x, é:

$$f(x) = \begin{cases} 1{,}99x, \text{ se } x \leqslant 11 \\ 1{,}65x, \text{ se } x > 11 \end{cases}$$

Calculando os preços de 10 e 12 unidades, temos:

- $f(10) = 1{,}99 \cdot 10 = 19{,}90$
- $f(12) = 1{,}65 \cdot 12 = 19{,}80$

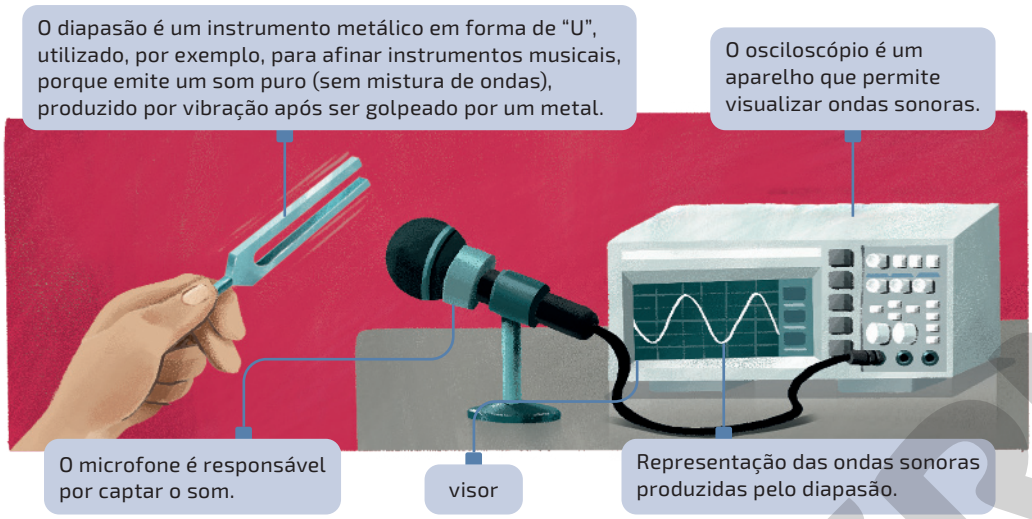
Portanto, o preço total de 12 unidades é menor do que o de 10 unidades.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Funções trigonométricas

São diversas as aplicações da Trigonometria em diferentes campos do conhecimento, como na realização de cálculos de distâncias inacessíveis (Trigonometria nos triângulos) e o estudo de fenômenos periódicos. Esses fenômenos possuem oscilações que se repetem sistematicamente e podem ser observados na Música, por exemplo.



Estudaremos agora as funções trigonométricas, exemplos de funções periódicas e algumas de suas aplicações.

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **periódica** quando existe um número $b \neq 0$, tal que $f(x + b) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se isso ocorre, então $f(x + kb) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $b > 0$ tal que $f(x + kb) = f(x)$ é chamado **período** da função.

Função seno

Podemos associar a um número real x qualquer o seno do arco que mede x radianos, ou seja, associar x a sen x. Para $x = \frac{\pi}{2}$, por exemplo, associamos o número 1, pois $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

Definimos como **função seno** a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que cada número real x associa o seno de um arco de x radianos, ou seja, $f(x) = \operatorname{sen} x$.

O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y), com $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

Agora, vamos esboçar o gráfico da função seno.

Para construir esse esboço, atribuímos valores a x e calculamos valores correspondentes de $f(x) = y$.

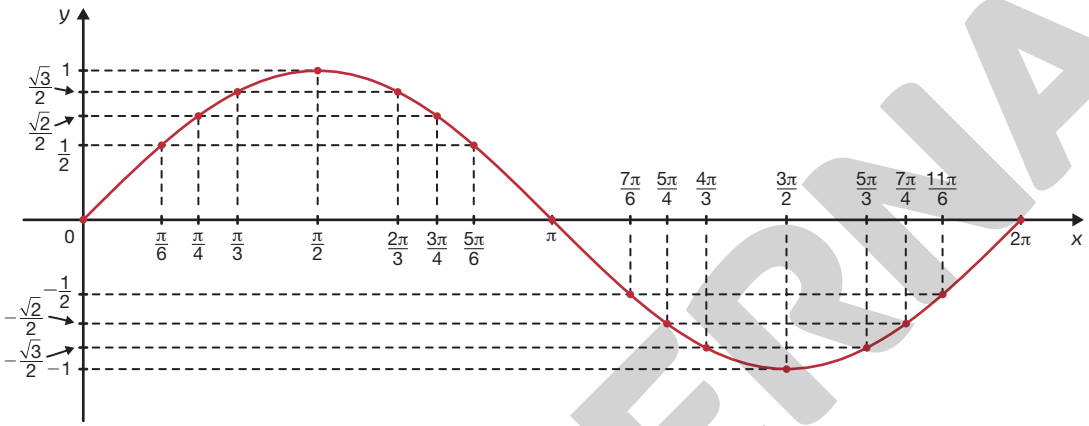
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
(x, y)	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$	$(\pi, 0)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

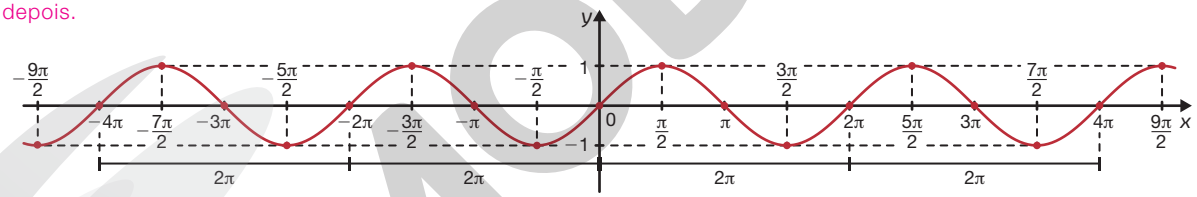
x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \operatorname{sen} x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$	$(2\pi, 0)$

Como há infinitos valores para x entre aqueles indicados, há infinitos pontos no gráfico f entre aqueles cujas coordenadas foram obtidas. Esboçando o gráfico de f inicialmente para $x \in [0,2\pi]$, temos:



Verifique se os alunos vão perceber que o primeiro gráfico apresentado nesta página é uma parte ampliada do gráfico que será apresentado depois.

Como $D(f) = \mathbb{R}$, há valores de x menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, é dado por:



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

O gráfico da função seno é uma curva denominada **senoide**.

Observe que os valores assumidos pela função seno se repetem periodicamente a cada intervalo de comprimento 2π. Nesse caso, dizemos que a função seno é **periódica** de **período** 2π e, consequentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi) = \operatorname{sen} x, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Além disso, a função seno possui outras características. Veja algumas delas.

- Pela definição, o domínio da função seno é o conjunto dos números reais.
- A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$.
- A função seno é **ímpar**, isto é, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

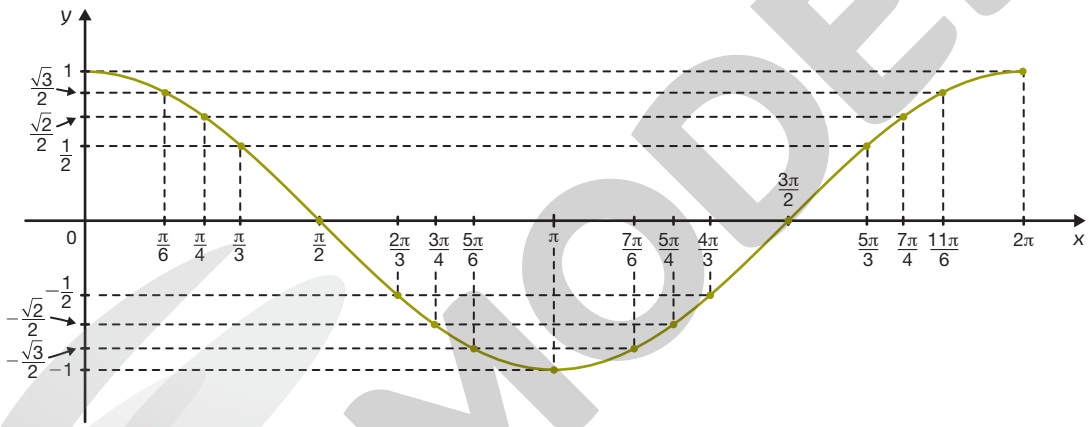
Função cosseno

Definimos como **função cosseno** a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o cosseno de um arco de x radianos, ou seja, $f(x) = \cos x$.

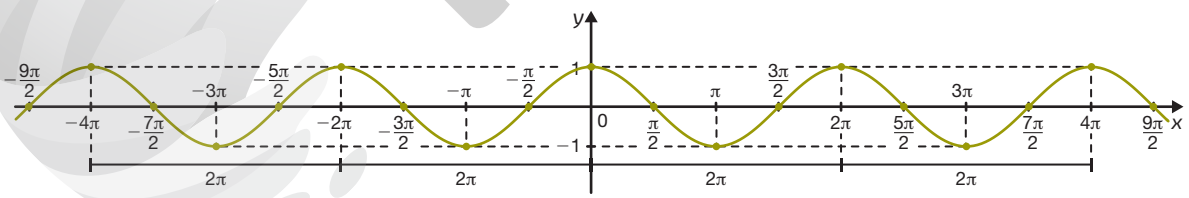
Inicialmente, vamos esboçar o gráfico da função cosseno para $x \in [0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
(x, y)	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(\pi, -1)$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
(x, y)	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(2\pi, 1)$



Esboçando o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$, temos:



Observe que os valores assumidos pela função cosseno se repetem periodicamente a cada intervalo de comprimento 2π. Nesse caso, dizemos que a função cosseno é **periódica** de **período** 2π e, consequentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Além disso, a função cosseno possui outras características. Veja algumas delas.

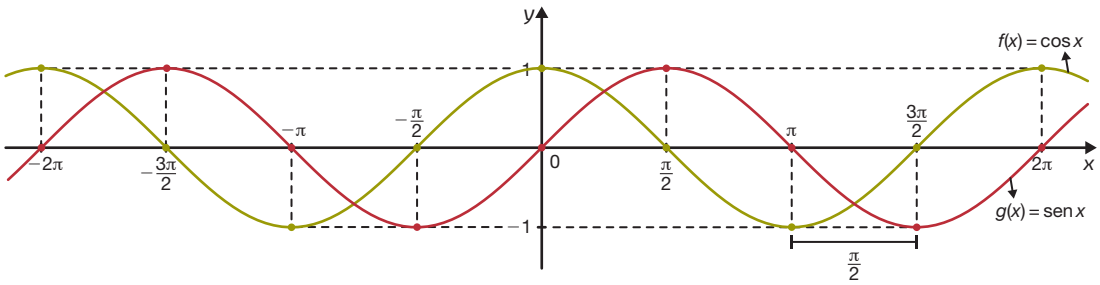
- Pela definição, o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais.
- A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

MODERNA

• O gráfico da função cosseno é congruente ao da função seno transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.



SERGIO L. FILHO

• A função cosseno é par, isto é, $\cos x = \cos(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercícios e problemas resolvidos

R4 Para quais valores reais de m a equação $\operatorname{sen} x = 2m + 5$ tem solução?

Resolução

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Então, $Im(f) = [-1,1]$, ou seja, $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$. Assim segue que:

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant 2m + 5 \leqslant 1 \Rightarrow -6 \leqslant 2m \leqslant -4 \Rightarrow -3 \leqslant m \leqslant -2$$

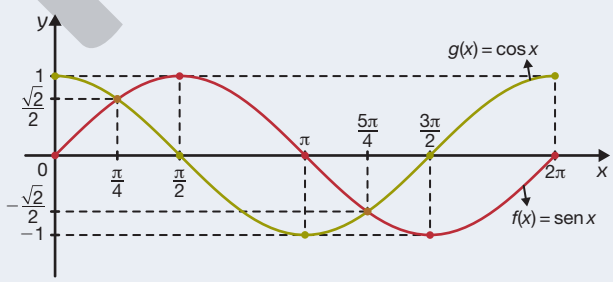
Portanto, a equação tem solução para $m \in \mathbb{R}$ tal que $-3 \leqslant m \leqslant -2$.

R5 Resolva graficamente a inequação $\operatorname{sen} x - \cos x \geqslant 0$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Resolução

• $\operatorname{sen} x - \cos x \geqslant 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \geqslant \cos x$

Vamos esboçar num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções seno e cosseno no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e verificar no eixo das abscissas os valores de x que satisfazem a inequação $\operatorname{sen} x \geqslant \cos x$.



SERGIO L. FILHO

Note que a curva da função seno está "acima" da curva da função cosseno ou a intersecta no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}\right\}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

13 Em cada item, determine os valores de x, sabendo que:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{9\pi}{4}$

b) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$, com $2\pi < x < \frac{7\pi}{2}$ $x = \frac{19\pi}{6}$

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, com $90° < x < 540°$ $x = 150°$ ou $x = 210°$ ou $x = 510°$

d) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $\frac{11\pi}{4} < x < \frac{9\pi}{2}$ $x = \frac{17\pi}{4}$

e) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, com $360° < x < 720°$ $x = 600°$ ou $x = 660°$

f) $\cos x = \frac{1}{2}$, com $390° < x < 630°$ $x = 420°$

14 Para cada item, calcule os valores de m para os quais a igualdade seja possível.

a) $\cos x = 3 - m$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $2 < m < 3$

b) $\operatorname{sen} x = 2m + 1$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ $-1 < m < -\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen} x = \frac{3m - 2}{4}$, com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$

d) $\cos x = -2m + 7$, com $180° < x < 360°$ $3 < m < 4$

15 Desafio

Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$. Considerando a função h, definida por $h(x) = [g(x)]^2 + f(x) - 1$, responda.

a) Para quais valores de x a função h atinge seu valor máximo?

b) Qual é o valor máximo da função h? $\frac{1}{4}$

16 O gráfico da função seno é congruente ao gráfico da função cosseno transladado em a unidades para a esquerda.

a) Qual é o valor de a? $\frac{\pi}{2}$

b) Quais são as coordenadas dos pontos em que o gráfico da função seno cruza o da função cosseno no intervalo $\left[-\pi, \frac{9\pi}{4}\right[$?

c) Esboce os gráficos das funções seno e cosseno no intervalo $\left[-\pi, \frac{9\pi}{4}\right[$. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

15. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ambos com $k \in \mathbb{Z}$

16. b) $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Funções do tipo trigonométricas: $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$

As funções definidas por $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, sendo a, b, c e d números reais com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, são chamadas **funções do tipo trigonométricas**, e muitas delas estão relacionadas a fenômenos periódicos, como variação das marés.

Note que as funções seno e cosseno são casos particulares das funções do tipo trigonométricas, ou seja, quando $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.

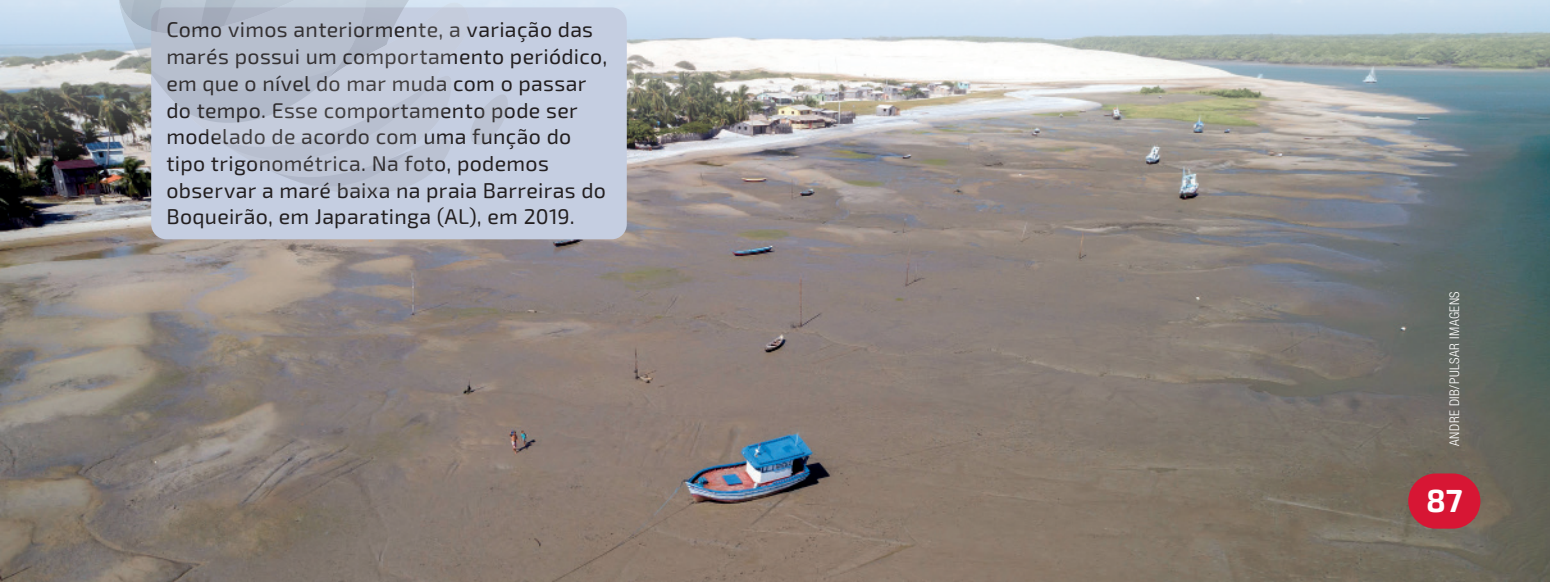
Exemplos

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
- $f(x) = 5 - 3 \cdot \operatorname{sen}(2x + 1)$

Nesse caso, $a = 5$, $b = -3$, $c = 2$ e $d = 1$.

- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
- $g(x) = -1 + \cos 3x$

Nesse caso, $a = -1$, $b = 1$, $c = 3$ e $d = 0$.



Como vimos anteriormente, a variação das marés possui um comportamento periódico, em que o nível do mar muda com o passar do tempo. Esse comportamento pode ser modelado de acordo com uma função do tipo trigonométrica. Na foto, podemos observar a maré baixa na praia Barreiras do Boqueirão, em Japaratinga (AL), em 2019.

ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

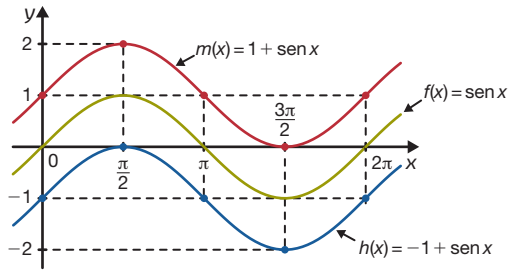
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Os gráficos das funções do tipo trigonométricas definidas por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ podem ser obtidos por meio de translações ou alterações na amplitude (ampliar ou comprimir), vertical ou horizontalmente, dos gráficos das funções seno e cosseno, respectivamente. Nessas condições:

- a constante a **translada** o gráfico da função em $|a|$ unidades para cima se $a > 0$, ou para baixo se $a < 0$.

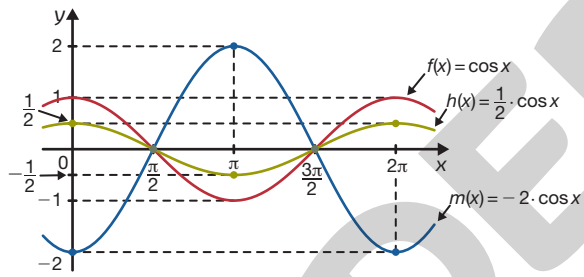
Exemplo



A constante a altera a imagem da função.

- a constante b **amplia verticalmente** o gráfico da função se $|b| > 1$ e **comprime verticalmente** se $|b| < 1$.

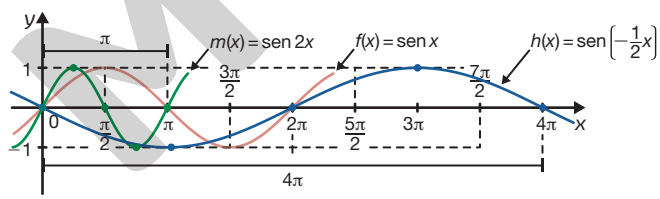
Exemplo



A constante b altera a imagem da função.

- a constante c **amplia** o período da função se $|c| < 1$ e comprime se $|c| > 1$, com o novo período $p = \dfrac{p_t}{|c|}$, sendo p_t o período da função trigonométrica correspondente.

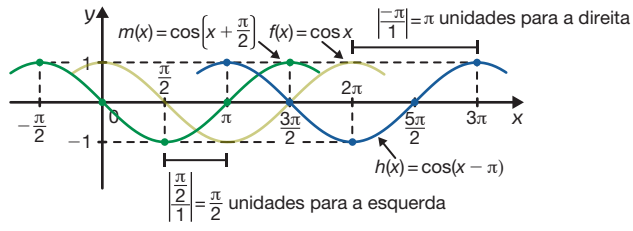
Exemplo



O período de uma função do tipo trigonométrica é $p = \dfrac{2\pi}{|c|}$.

- a constante d **translada** o gráfico da função em $\left|\dfrac{d}{c}\right|$ unidades para a esquerda se $\dfrac{d}{c} > 0$, ou para direita se $\dfrac{d}{c} < 0$.

Exemplo



MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Acessando tecnologias

Gráfico de funções do tipo trigonométricas

Nesta seção, vamos esboçar gráficos de funções do tipo trigonométricas. Para isso, vamos utilizar o *software* de Geometria dinâmica GeoGebra.

No Suplemento para o professor há mais informações sobre o *software* GeoGebra.

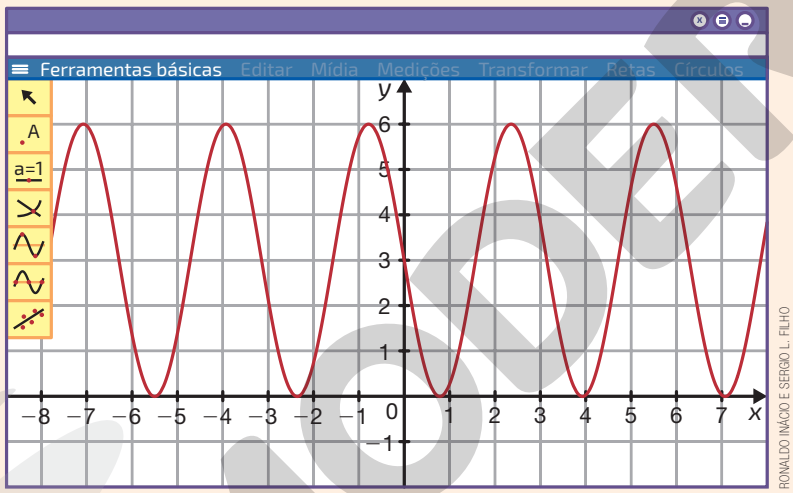
A No campo **Entrada**, digite $a = 0$ e pressione a tecla **Enter**. Repita o procedimento para $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.

B Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$. Para isso, digite $f(x) = a + b*\text{sen}(c*x + d)$ no campo **Entrada** e pressione a tecla **Enter**.

C Altere os valores de a, b, c e d. Para isso, selecione cada um deles na **Janela de Álgebra** e digite o valor desejado. Pode-se também alterar esses valores utilizando o **Controle Deslizante** correspondente a cada um.

> É possível que o programa altere os valores de a, b, c e d automaticamente. Para isso, na **Janela de Álgebra**, clique com o botão direito do *mouse* sobre cada um desses valores e, em seguida, ative a opção **Animar**.

A seguir, é apresentado o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$, em que $a = 3$, $b = 3$, $c = -2$ e $d = 0$.



> Para esboçar o gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, no passo **B**, digite no campo **Entrada** $g(x) = a + b*\cos(c*x + d)$. Depois, altere os valores de a, b, c e d como desejar.

Agora é com você!

Resposta no Suplemento para o professor.

1 Utilizando os procedimentos apresentados, como você faria para obter o gráfico da função cosseno?

2 A seguir, é apresentada a lei de formação das funções do tipo trigonométrica f, g e h.

- $f(x) = 3 - \text{sen}(-x + 2)$
- $g(x) = \text{sen}(0{,}5x - 1)$
- $h(x) = -1 + 5 \cdot \cos(x)$

Analisando o gráfico de cada uma dessas funções, determine qual possui o maior período.

3 Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$. Para quais valores de a, b, c e d tem-se $f(x) = 1$?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R6 Esboce o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período da função:

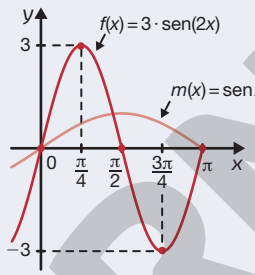
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}(2x)$.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução

a) Para esboçar o gráfico de f, é conveniente atribuirmos ao argumento $(2x)$ os arcos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π. Para isso, atribuímos a x metade dos valores desses arcos.

x	$y = f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}(2x)$	(x, y)
0	$y = 3 \cdot \operatorname{sen}(\underbrace{2 \cdot 0}_{0}) = 3 \cdot 0 = 0$	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{4}$	$y = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\underbrace{2 \cdot \frac{\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}}\right) = 3 \cdot 1 = 3$	$\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$y = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\underbrace{2 \cdot \frac{\pi}{2}}_{\pi}\right) = 3 \cdot 0 = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$y = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\underbrace{2 \cdot \frac{3\pi}{4}}_{\frac{3\pi}{2}}\right) = 3 \cdot (-1) = -3$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -3\right)$
π	$y = 3 \cdot \operatorname{sen}(\underbrace{2 \cdot \pi}_{2\pi}) = 3 \cdot 0 = 0$	$(\pi, 0)$

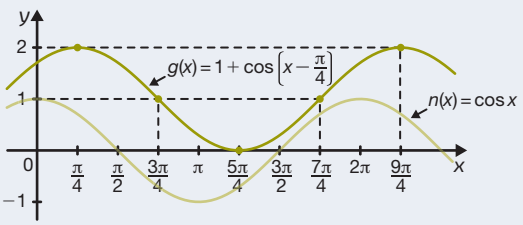


$D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-3, 3]$ e $p = \pi$.

Comparando o gráfico da função f com o gráfico da função seno, observamos que ele foi ampliado verticalmente e o período foi comprimido pela metade.

b) Para esboçar o gráfico de g, atribuímos para x a soma de $\frac{\pi}{4}$ aos valores dos arcos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

x	$y = g(x) = 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	(x, y)
$\frac{\pi}{4}$	$y = 1 + \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}_{0}\right) = 1 + 1 = 2$	$\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$y = 1 + \cos\left(\underbrace{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}}\right) = 1 + 0 = 1$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$
$\frac{5\pi}{4}$	$y = 1 + \cos\left(\underbrace{\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}_{\pi}\right) = 1 - 1 = 0$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$
$\frac{7\pi}{4}$	$y = 1 + \cos\left(\underbrace{\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}_{\frac{3\pi}{2}}\right) = 1 + 0 = 1$	$\left(\frac{7\pi}{4}, 1\right)$
$\frac{9\pi}{4}$	$y = 1 + \cos\left(\underbrace{\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}_{2\pi}\right) = 1 + 1 = 2$	$\left(\frac{9\pi}{4}, 2\right)$



$D(g) = \mathbb{R}$, $Im(g) = [0, 2]$ e $p = 2\pi$.

Comparando o gráfico da função g com o gráfico da função cosseno, observamos que ele foi transladado em 1 unidade para cima e $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

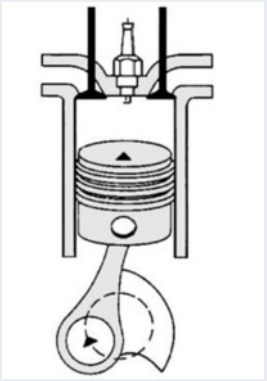
MODERNA

R7 (UFPR, 2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura. Suponha que em um instante t, em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão:

$$h(t) = 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right) + 4$$

a) Determine as alturas máxima e mínima que o pistão atinge.

b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?



REPRODUÇÃO

Resolução

a) Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$, e a constante que multiplica $\operatorname{sen} x$ é positiva, a altura máxima H_M ocorrerá quando $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right) = 1$ e a altura mínima h_M, quando $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right) = -1$.

Assim:

$$H_M = 4 \cdot 1 + 4 = 8 \qquad h_M = 4 \cdot (-1) + 4 = 0$$

Portanto, a altura máxima atingida pelo pistão é 8 cm e a mínima, 0 cm.

b) O período da função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right) + 4$ é:

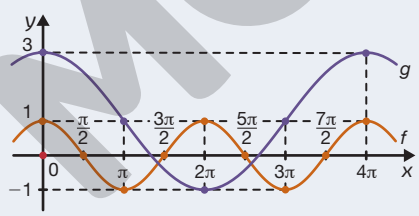
$$\frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{0{,}05}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{0{,}05}} = 0{,}05$$

Desse modo, a cada 0,05 s o pistão completa um ciclo. Consequentemente, para determinarmos quantos ciclos completos esse pistão realiza em 1 min, efetuamos:

$$\frac{1 \text{ min}}{0{,}05 \text{ s}} = \frac{60 \text{ s}}{0{,}05 \text{ s}} = 1\,200$$

Portanto, funcionando durante 1 min, esse pistão realiza 1 200 ciclos completos.

R8 No plano cartesiano abaixo estão representados os gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \cos x$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$. Determine o valor das constantes a, b, c, e d e escreva a lei de formação da função g.



SERGIO L. FILHO

Resolução

De acordo com os gráficos apresentados:

- o período da função g é igual a 4π. Assim:

$$4\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{2}$$

Para $c = -\frac{1}{2}$, temos $\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}$, pois a função cosseno é par.

- $Im(g) = [-1, 3]$. Como $-1 \leqslant \cos(cx + d) \leqslant 1$, segue que:

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 1$ e $b = 2$.

- em relação ao gráfico de f, o gráfico de g não foi transladado horizontalmente. Logo, $d = 0$.

Portanto, $g(x) = 1 + 2 \cdot \cos\frac{x}{2}$

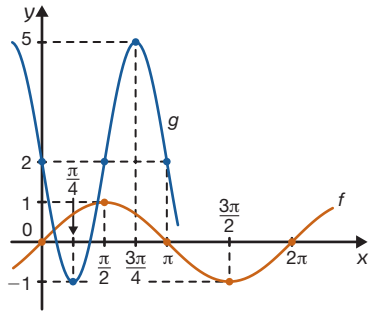
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

17 Observe os gráficos que representam as funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$.



SERGIO L. FILHO

a) Determine a imagem de cada uma das funções. Quais são as constantes que determinam a variação na imagem da função g em relação a f? Resposta no final do livro.

b) Determine o valor das constantes a, b, c e d. Em seguida, escreva a lei de formação da função g. Uma possível resposta: $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = \pi$; $g(x) = 2 + 3\operatorname{sen}(2x + \pi)$.

18 Calcule a diferença entre os valores máximo e mínimo da função:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 - 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. 4

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -1 + \frac{1}{4} \cdot \cos(3x)$. $\frac{1}{2}$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 3 - \operatorname{sen}(2x + \pi)$. 2

d) $n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $n(x) = 1 + 4 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. 8

19 Para vencer certo torneio de golfe, um jogador precisa acertar em uma tacada um buraco que se encontra a 43 m da bola. Ao realizar a tacada, ele impulsiona a bola com uma velocidade de 20 m/s. De acordo com leis da mecânica, a distância R percorrida pela bola após ser lançada pelo jogador é dada por $R = \frac{V_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2\phi_0$ em que V_0 é a velocidade, ϕ_0 é o ângulo em que a bola é impulsionada e g é a aceleração da gravidade.

Sabendo que nessa tacada a bola percorreu 40 m, responda.

Considere a aceleração da gravidade igual a $10\ m/s^2$.

a) Qual foi o ângulo da tacada realizada pelo jogador? 45°

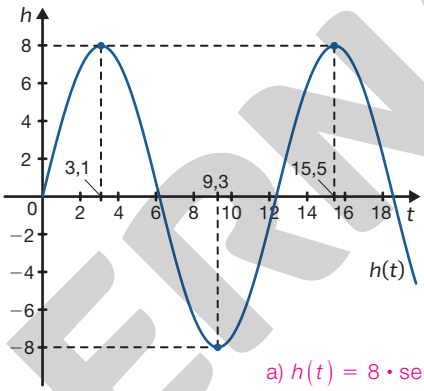
b) Para a velocidade com que o jogador impulsionou a bola, seria possível variar o ângulo de modo a atingir uma distância maior com a tacada? Justifique sua resposta. Resposta no final do livro.

No contexto

20 Estudamos anteriormente que as marés são fenômenos periódicos, em que o nível do mar muda com o passar do tempo. Esse comportamento pode ser modelado por uma função $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por:

$$h(t) = b \cdot \operatorname{sen}(ct)$$

O gráfico a seguir representa a altura $h = h(t)$, em metros, da maré na bacia Fundy, em relação ao nível médio do mar em um instante t (em horas), no caso de extrema variação.



RONALDO INÁCIO

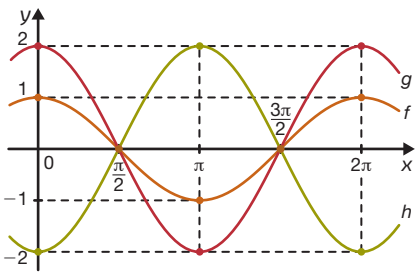
a) $h(t) = 8 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$

a) Considerando que a altura da maré se repete a cada 12,4 horas, determine a lei de formação da função que modela o comportamento da maré nessa bacia.

Utilizando um *software* de geometria dinâmica, verifique se a lei de formação que você escreveu no item **a** está correta.

b) Quais são as alturas máxima e mínima da maré nessa bacia? 8 m; −8 m

21 Observe os gráficos das funções f, g e h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2 \cdot \cos x$ e $h(x) = -2 \cdot \cos x$.



SERGIO L. FILHO

a) Quais dessas funções têm os gráficos simétricos em relação ao eixo x? Por que isso ocorre? Resposta no final do livro.

b) Qual é a imagem de cada uma dessas funções?

c) Determine para quais valores de x temos $f(x) = g(x) = h(x)$. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

21. b) $\operatorname{Im}(f) = [-1,1]$, $\operatorname{Im}(g) = [-2,2]$ e $\operatorname{Im}(h) = [-2,2]$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

22 Em uma farmácia que fica aberta 24 horas, o número médio de clientes varia de acordo com a função $C:]0,24] \to \mathbb{R}$ definida por $C(h) = 20 - 15\cos\left(\frac{h\pi}{12}\right)$, em que h é a hora do dia e C é a quantidade aproximada de clientes na farmácia na hora h.

a) Qual é a quantidade de clientes nessa farmácia às 18 horas? 20 clientes

b) Em qual horário do dia a quantidade média de clientes na farmácia é maior? Qual é a quantidade de clientes nessa hora? 12 horas; 35 clientes

c) Em qual horário do dia a quantidade média de clientes é menor? Qual é essa quantidade? 24 horas; 5 clientes

23 (Unesp, 2010) Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.

Sabendo que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 ℓ/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é: alternativa d

a) $V(t) = \frac{2\pi}{5} \cdot \text{sen}\left(\frac{3}{5}t\right)$.

b) $V(t) = \frac{3}{5} \cdot \text{sen}\left(\frac{5}{2\pi}t\right)$.

c) $V(t) = 0{,}6 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

d) $V(t) = 0{,}6 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

e) $V(t) = \frac{5}{2\pi} \cdot \cos(0{,}6t)$.



RONALDO INÁCIO

A tarefa **26** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados e os resultados obtidos em uma pesquisa, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

24 O pêndulo cônico consiste em um corpo de massa m que gira em um círculo horizontal com velocidade v constante na ponta de uma corda de comprimento C, em metros. À medida que o corpo gira, o movimento da corda descreve a superfície de um cone imaginário, daí o nome "pêndulo cônico". O tempo T que o corpo demora para dar uma revolução completa, chamado de período, é dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{C \cdot \cos\theta}{g}}$, em que θ é o ângulo que a corda faz com a vertical, e g é a aceleração da gravidade. Suponha o movimento de um pêndulo cônico de 2,5 m de comprimento, e considere a aceleração da gravidade igual a $10\,m/s^2$.

a) Escreva a lei de formação da função que expressa o período T do movimento em função do ângulo θ em que o movimento é realizado. $T(\theta) = \pi\sqrt{\cos\theta}$

b) Qual é o domínio da função cuja lei de formação você escreveu no item **a**? $D(T) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

25 Movimento Harmônico Simples (MHS) é o movimento periódico oscilatório em que um sistema vibra com uma certa amplitude em torno de um ponto de equilíbrio. Um determinado MHS representado pela função $m: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dado por $m(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$, em que t é o tempo, em segundos, e m é o deslocamento medido em centímetros, em relação à posição de equilíbrio no tempo t. Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

a) Qual é o deslocamento máximo desse MHS? Para quais tempos isso acontece?

b) Para quais valores de t esse MHS está em posição de equilíbrio, ou seja, o deslocamento é nulo?

c) Esboce o gráfico da função m.

26 Junte-se a um colega e façam uma pesquisa sobre fenômenos periódicos. Em seguida, elaborem um problema envolvendo um desses fenômenos e as funções seno e cosseno. Por fim, troquem com outros colegas para que eles resolvam o problema elaborado. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas.

26. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas e contextos disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6 Função do tipo trigonométrica: um modelo matemático

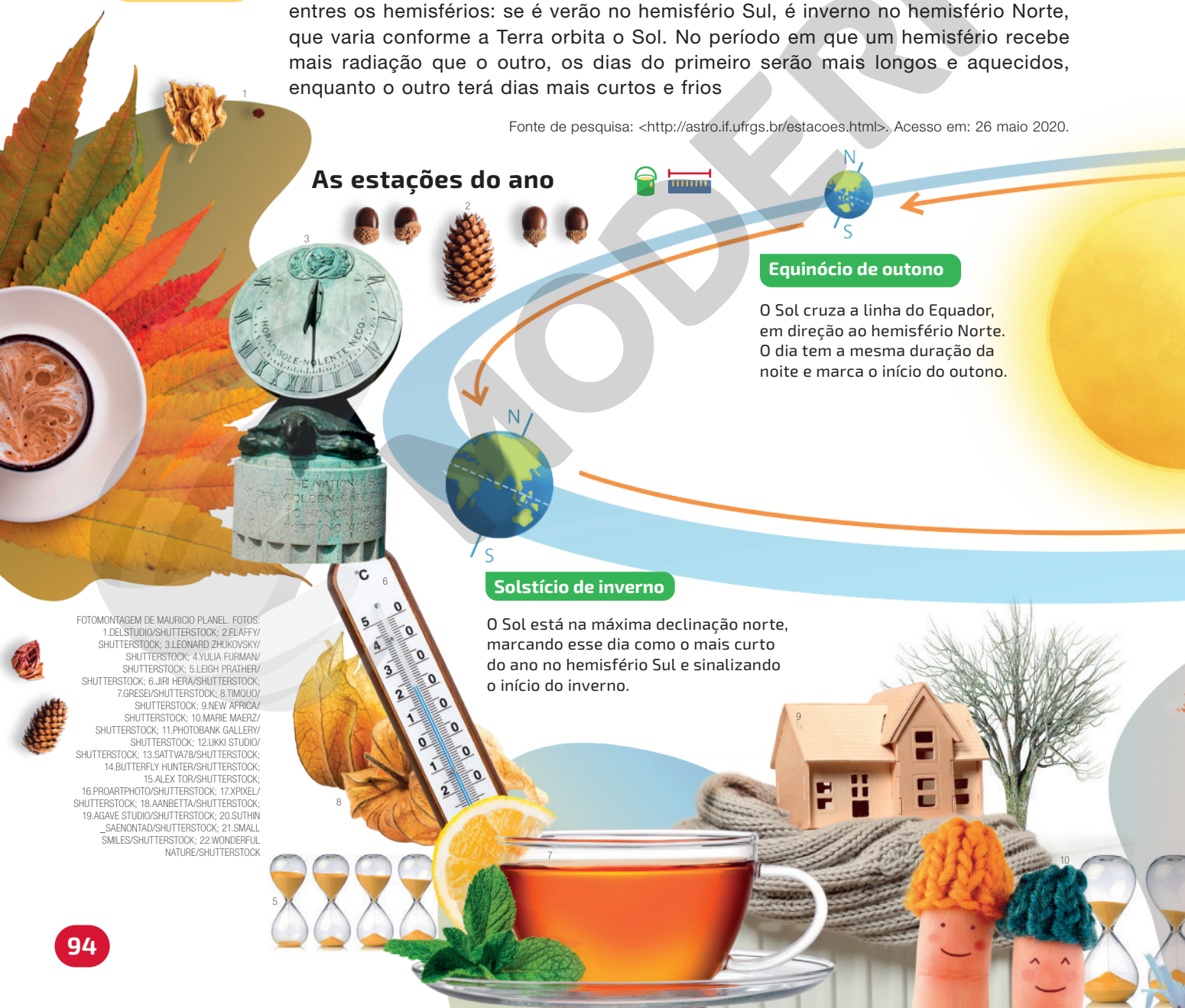
BNCC
- EM13MAT306
- CE2CNT

Duração do dia

O movimento de rotação da Terra dá origem aos períodos de insolação (dia) e sem iluminação solar direta (noite), sendo a mudança entre o dia e a noite uma das primeiras formas de os humanos medirem a passagem do tempo. A duração do dia é alterada durante as várias estações do ano, em razão da inclinação do eixo da Terra e seu movimento de translação, o que causava problemas para civilizações que usavam o relógio de sol, como os babilônios e os egípcios, já que as horas eram mais longas durante o verão e mais curtas durante o inverno.

A variação da duração dos dias está relacionada à inclinação do eixo de rotação da Terra em relação a sua órbita, cujo ângulo, chamado obliquidade da eclíptica, mede 23,45°. Essa inclinação interfere na quantidade de radiação solar incidente sobre os hemisférios, sendo esse o motivo de as estações do ano serem opostas entres os hemisférios: se é verão no hemisfério Sul, é inverno no hemisfério Norte, que varia conforme a Terra orbita o Sol. No período em que um hemisfério recebe mais radiação que o outro, os dias do primeiro serão mais longos e aquecidos, enquanto o outro terá dias mais curtos e frios

Fonte de pesquisa: <http://astro.if.ufrgs.br/estacoes.html>. Acesso em: 26 maio 2020.



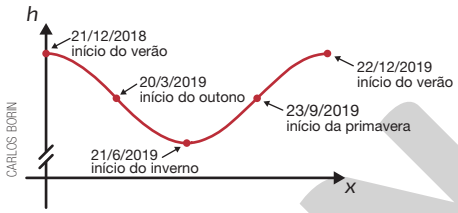
FOTOMONTAGEM DE MAURICIO PLANEL. FOTOS: 1.DELSTUDIO/SHUTTERSTOCK; 2.FLAFFY/SHUTTERSTOCK; 3.LEONARD ZHUKOVSKY/SHUTTERSTOCK; 4.YULIA FURMAN/SHUTTERSTOCK; 5.LEIGH PRATHER/SHUTTERSTOCK; 6.JIRI HERA/SHUTTERSTOCK; 7.GRESEI/SHUTTERSTOCK; 8.TIMQUO/SHUTTERSTOCK; 9.NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK; 10.MARIE MAERZ/SHUTTERSTOCK; 11.PHOTOBANK GALLERY/SHUTTERSTOCK; 12.UKKI STUDIO/SHUTTERSTOCK; 13.SATTVA78/SHUTTERSTOCK; 14.BUTTERFLY HUNTER/SHUTTERSTOCK; 15.ALEX TOR/SHUTTERSTOCK; 16.PROARTPHOTO/SHUTTERSTOCK; 17.XPIXEL/SHUTTERSTOCK; 18.AANBETTA/SHUTTERSTOCK; 19.AGAVE STUDIO/SHUTTERSTOCK; 20.SUTHIN_SAENONTAD/SHUTTERSTOCK; 21.SMALL SMILES/SHUTTERSTOCK; 22.WONDERFUL NATURE/SHUTTERSTOCK

MODELO

Em duas ocasiões do ano, o dia e a noite têm a mesma duração. Essas ocasiões ocorrem na transição do inverno para a primavera e na transição do verão para o outono e denominam-se, respectivamente, equinócio de primavera e equinócio de outono. Já no início do verão ocorre o dia do ano mais longo, o solstício de verão, e no início do inverno ocorre a noite mais longa do ano, o solstício de inverno.

Apesar de já ser utilizado na Grécia Antiga em cálculos teóricos, foi apenas com o desenvolvimento de relógios mecânicos que o conceito de dia com 24 horas iguais se tornou um elemento comum da sociedade. Até então, a maioria das pessoas ainda media a passagem do tempo com a mudança do dia para a noite e com o passar das estações.

A duração do dia no município de São Paulo (SP), por exemplo, pode ser descrita por uma função h, definida por $h(x) = A + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{365}\right)$, em que h expressa a duração aproximada do dia, medida em horas, em função do número x de dias passados desde 22 de dezembro de 2019. As constantes A e B dependem da duração do dia nos solstícios de verão e de inverno, que naquela localidade correspondem a 13,58 horas e 10,68 horas, respectivamente.



A) No equinócio de outono e no equinócio de primavera. Isso ocorre porque, nesses episódios, o dia e a noite têm a mesma duração: 12 horas cada.

Solstício de verão

Marca o dia mais longo do hemisfério Sul e sinaliza o início do verão.

Equinócio de primavera

O Sol cruza pela segunda e última vez do ano a linha do Equador, seguindo em direção ao hemisfério Sul. Nessa data, o dia e a noite têm a mesma duração, iniciando a primavera.



Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Em quais dias do ano uma hora do relógio de sol é igual a uma hora de um relógio moderno? Justifique sua resposta.

B De acordo com o gráfico, em qual data ocorreu a menor duração do dia, no município de São Paulo, em 2019? 21/06/2019

C Qual é o período da função h? No contexto apresentado, o que significa o valor do período dessa função?
Resposta no Suplemento para o professor.

D Determine o valor das constantes A e B e, em seguida, escreva a lei de formação da função h que descreve a quantidade de horas de duração do dia no município de São Paulo.
Resposta no Suplemento para o professor.

MODERNA

7 Fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas

Como está sua pressão arterial?

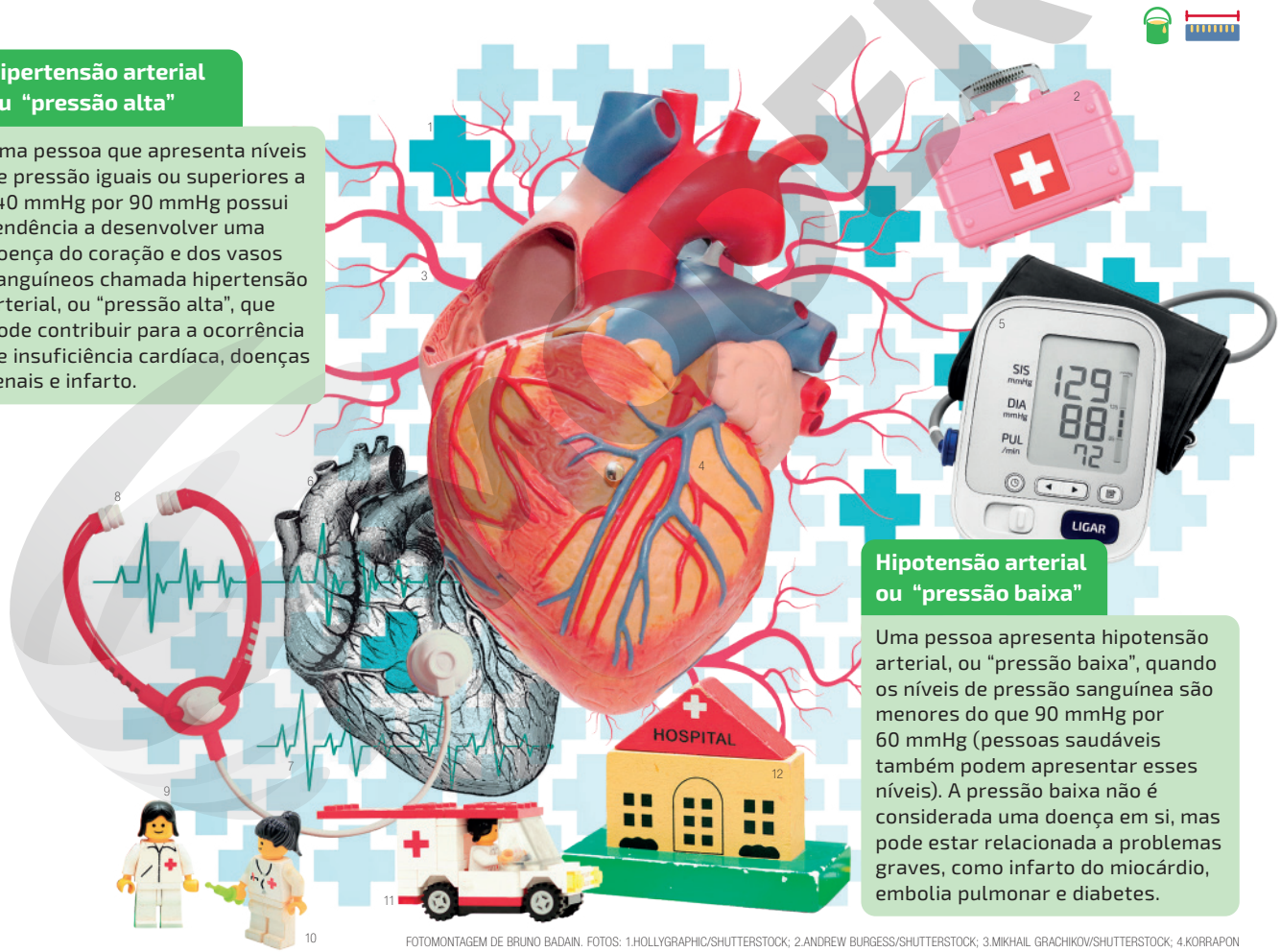
O ciclo cardíaco é um fenômeno periódico, que consiste em uma sequência de eventos ocorridos durante um batimento do coração. Nesse fenômeno, os ventrículos contraem-se, ocorrendo a **sístole ventricular**. Logo em seguida, eles relaxam, ocorrendo a **diástole ventricular**. No momento da sístole, o sangue é empurrado contra as paredes arteriais, e a força com que ele é ejetado exerce uma pressão nas artérias, que, no pico da contração, é chamada **pressão sistólica**. Já a menor pressão sanguínea nas artérias, que ocorre quando acontece o relaxamento do ventrículo, ou seja, na diástole, é conhecida como **pressão diastólica**.

BNCC
• EM13MAT306

As pressões sistólica e diastólica correspondem àquelas que o médico informa ao paciente em uma consulta. Quando ele diz, por exemplo, que a pressão está 12 por 8, significa que a pressão sistólica aproximada é 120 mmHg (milímetros de mercúrio) e a diastólica, cerca de 80 mmHg. Essas medidas fornecem informações importantes a respeito da saúde do paciente.

Hipertensão arterial ou "pressão alta"

Uma pessoa que apresenta níveis de pressão iguais ou superiores a 140 mmHg por 90 mmHg possui tendência a desenvolver uma doença do coração e dos vasos sanguíneos chamada hipertensão arterial, ou "pressão alta", que pode contribuir para a ocorrência de insuficiência cardíaca, doenças renais e infarto.



Hipotensão arterial ou "pressão baixa"

Uma pessoa apresenta hipotensão arterial, ou "pressão baixa", quando os níveis de pressão sanguínea são menores do que 90 mmHg por 60 mmHg (pessoas saudáveis também podem apresentar esses níveis). A pressão baixa não é considerada uma doença em si, mas pode estar relacionada a problemas graves, como infarto do miocárdio, embolia pulmonar e diabetes.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.HOLLYGRAPHIC/SHUTTERSTOCK; 2.ANDREW BURGESS/SHUTTERSTOCK; 3.MIKHAIL GRACHIKOV/SHUTTERSTOCK; 4.KORRAPON KARAPAN/SHUTTERSTOCK; 5.IHORL/SHUTTERSTOCK; 6.P U P S I K L A N D/SHUTTERSTOCK; 7.HEIN NOUWENS/SHUTTERSTOCK; 8.TOMERTU/SHUTTERSTOCK; 9.MESKPHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 10.LEWIS TSE PUI LUNG/SHUTTERSTOCK; 11.MESKPHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 12.EAKSTOCKER/SHUTTERSTOCK

Milímetros de mercúrio: unidade de medida de pressão

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

> Uma pressão sanguínea de 80 mmHg por 50 mmHg pode ser considerada alta, baixa ou adequada? baixa

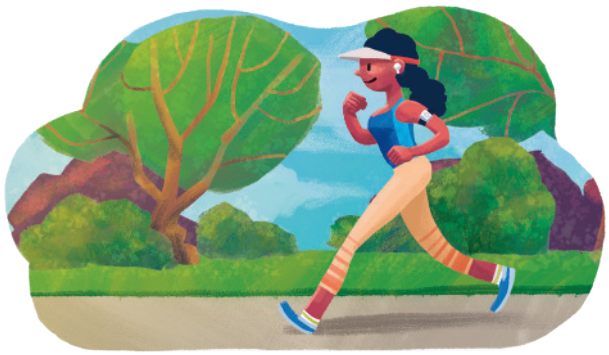
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Hipertensão: fique atento!

De acordo com as informações do Sistema de Vigilância de Fatores de Risco e Proteção para Doenças Crônicas por Inquérito Telefônico (Vigitel), em 2017, cerca de 61% dos idosos com idade acima de 65 anos tinham hipertensão. Apesar de não ter cura, essa doença precisa ser tratada e controlada para evitar futuras complicações.

Como prevenir?

- Praticar atividades físicas regularmente, evitar o consumo de bebidas alcoólicas e abolir o tabaco são algumas das várias atitudes que auxiliam na prevenção da hipertensão.



- Outro fator de grande importância na prevenção da hipertensão é alimentar-se de maneira saudável, dando preferência a frutas, legumes, verduras, carnes magras e alimentos com pouca concentração de sal.



Como perceber?

Os principais sintomas que podem ser relacionados à hipertensão são dores de cabeça, dores no peito, vômito, falta de ar, tontura, sangramento nasal, entre outros. Na idade adulta, é importante medir a pressão arterial de maneira regular, no mínimo uma vez ao ano. Caso haja ocorrência de pessoas com pressão alta na família, deve-se realizar essa medição, no mínimo, duas vezes ao ano.



Como agir?

Em caso de suspeita de hipertensão, é necessário procurar a ajuda de um médico especialista. Assim, será possível tomar as devidas precauções, bem como iniciar o tratamento adequado o mais rápido possível.



ILUSTRAÇÕES: LEO CUBRAN

O ciclo cardíaco, como outros eventos que se repetem periodicamente, pode ser representado por meio de uma função do tipo trigonométrica. Para auxiliar na análise desse fenômeno, a partir dessa função, vamos estudar, nas próximas páginas, **transformações**, **relações** e **equações trigonométricas**.

Fonte de pesquisa: Ministério da Saúde. *Hipertensão (pressão alta):* o que é, causas, sintomas, diagnóstico, tratamento e prevenção. Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z-1/h/hipertensao-pressao-alta>. Acesso em: 10 abr. 2021.

Ser consciente Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Você conhece alguma pessoa que tenha "pressão alta"? Se sim, que cuidados essa pessoa tem em relação à doença? Resposta pessoal.

B Uma das maneiras de controlar os níveis de pressão sanguínea é mantendo uma dieta equilibrada associada à prática de atividades físicas. Você se alimenta de maneira adequada? Pratica atividades físicas regularmente? Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Fórmulas de transformação

Podemos obter os valores de $\text{sen}(a + b)$ e $\text{sen}(a - b)$ tomando como base os valores de sen a, sen b, cos a e cos b, sendo a e b arcos da circunferência trigonométrica.

Conhecendo os valores de sen 30°, cos 30°, sen 45° e cos 45°, por exemplo, podemos obter, em função deles, os valores de sen 75° e sen 15°, isto é:

- $\text{sen}\underbrace{75°}_{45° + 30°} = \text{sen}(45° + 30°)$
- $\text{sen}\underbrace{15°}_{45° - 30°} = \text{sen}(45° - 30°)$

Para determinar esses valores, podemos utilizar as fórmulas de adição de arcos. Tais fórmulas podem ser demonstradas e estão indicadas a seguir:

- Seno da soma e da diferença:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a \qquad \text{sen}(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$$

As demonstrações dessas fórmulas são expostas no **Suplemento para o professor**. Se julgar conveniente, apresente-as para os alunos.

- Cosseno da soma e da diferença:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \qquad \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$$

- Tangente da soma e da diferença:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b} \qquad \text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

Válida para todo $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $(a + b) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Válida para todo $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $(a - b) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Ao compararmos as relações $\cos(60° + 30°)$ e $\cos 60° + \cos 30°$, percebemos que:

$$\cos(60° + 30°) = \cos 90° = 0 \qquad \cos 60° + \cos 30° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

Note que $\cos(60° + 30°) \neq \cos 60° + \cos 30°$. Na maioria dos casos, temos:

$$\cos(a + b) \neq \cos a + \cos b \qquad \cos(a - b) \neq \cos a - \cos b$$
$$\text{sen}(a + b) \neq \text{sen}\,a + \text{sen}\,b \qquad \text{sen}(a - b) \neq \text{sen}\,a - \text{sen}\,b$$
$$\text{tg}(a + b) \neq \text{tg}\,a + \text{tg}\,b \qquad \text{tg}(a - b) \neq \text{tg}\,a - \text{tg}\,b$$

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Calcule.

a) sen 75° b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ c) $\text{tg}\,\frac{7\pi}{12}$

Resolução

a) $\text{sen}\,75° = \text{sen}\,(45° + 30°) = \text{sen}\,45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\,30° \cdot \cos 45° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos x + \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} \cdot \text{sen}\,x = 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \text{sen}\,x = -\text{sen}\,x$

c) $\text{tg}\,\frac{7\pi}{12} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{tg}\,\frac{\pi}{3} + \text{tg}\,\frac{\pi}{4}}{1 - \text{tg}\,\frac{\pi}{3} \cdot \text{tg}\,\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} =$

$$= \frac{\sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 3} = \frac{2\sqrt{3} + 4}{-2} = -\sqrt{3} - 2$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R2 Mostre que:

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$.

b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

c) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, com $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

Resolução

a) $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

Portanto, $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$.

b) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Portanto, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$.

c) $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

Portanto, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, com $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

Essas igualdades são conhecidas como **fórmulas do arco duplo** e também são utilizadas para calcular senos, cossenos e tangentes do arco metade. Se 2α é o arco duplo de α, então α é o arco metade de 2α.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 A partir dos ângulos notáveis, calcule:

a) $\operatorname{sen} 15° \quad \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\cos 15° \quad \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

c) $\operatorname{sen} 255° \quad -\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

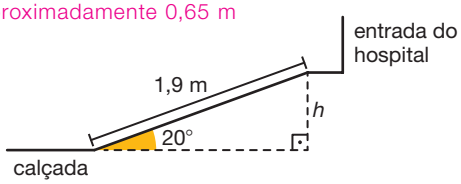
d) $\operatorname{tg} 75° \quad 2 + \sqrt{3}$

2 Para instalar os vidros em uma janela, um vidraceiro apoiou uma escada com 8 m de comprimento de maneira que esta formou com a parede um ângulo de 50°. Sabendo que o topo dessa escada deveria alcançar 7 m de altura, determine se o vidraceiro a posicionou corretamente. Justifique sua resposta. (Considere $\operatorname{sen} 20° = 0{,}342$, $\cos 20° = 0{,}9397$ e $\sqrt{3} = 1{,}732$.) Resposta no final do livro.

3 A expressão $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ é equivalente a: alternativa b

a) $\operatorname{sen} x$ b) $\cos x$ c) $\operatorname{tg} x$ d) $\operatorname{sen} 2x$ e) $\cos 2x$

4 Uma rampa que dá acesso à entrada de um hospital tem 1,9 m de comprimento e uma inclinação de 20° em relação à horizontal. Qual é a altura da entrada em relação ao nível da calçada? (Considere $\operatorname{sen} 10° \cdot \cos 10° = 0{,}171$.) aproximadamente 0,65 m



RONALDO INÁCIO

5 Calcule o valor da expressão $\cos\dfrac{5\pi}{12} + \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}$. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

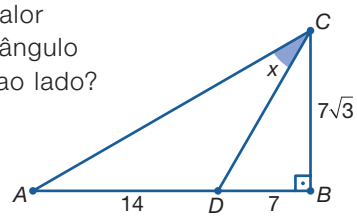
6 Para desviar de uma ilha, certo navio, que estava localizado no ponto A, mudou a sua rota, deslocando-se 12,2 km para leste e, após um giro de 105°, seguiu na direção noroeste até um porto. Quantos quilômetros o navio percorreu do ponto A até o porto? (Utilize $\sqrt{2} = 1{,}4$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.) aproximadamente 62 km



HELOÍSA PINTARELLI

7 Dados $\operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ e $\cos y = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$, calcule o valor de $\operatorname{sen} 2y$. $\dfrac{\sqrt{39}}{8}$

8 Qual é o valor de x no triângulo retângulo ao lado? $x = 30°$



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Relações trigonométricas

Até o momento, vimos duas relações trigonométricas fundamentais envolvendo o seno, o cosseno e a tangente.

- $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$, para todo $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

As cinco relações trigonométricas apresentadas são denominadas fundamentais por serem independentes umas das outras. A partir dessas, outras relações podem ser obtidas.

Além dessas, existem outras relações que são obtidas a partir de três outras funções trigonométricas, chamadas **cossecante (cossec)**, **secante (sec)** e **cotangente (cotg)**. Essas relações fundamentais são:

- $\operatorname{cotg} a = \dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$, para todo $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$, para todo $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{cossec} a = \dfrac{1}{\operatorname{sen} a}$, para todo $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Da relação $\operatorname{cotg} a = \dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$, temos:

$\operatorname{cotg} a = \dfrac{1}{\operatorname{tg} a}$, para todo $a \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Além dessas relações, podemos obter outras.

Dividindo os dois membros da igualdade $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ por $\cos^2 a$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 a + 1 = \sec^2 a, \text{ com } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ em que } k \in \mathbb{Z}$$

Dividindo os dois membros da igualdade $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ por $\operatorname{sen}^2 a$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a} \Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cossec}^2 a, \text{ com } a \neq k\pi, \text{ em que } k \in \mathbb{Z}$$

Veja a seguir, por meio de exercícios e problemas resolvidos, como essas relações podem ser aplicadas.

Exercícios e problemas resolvidos

R3 Sendo $\cos \alpha = \dfrac{1}{4}$, com $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, determine $\sec \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$.

Resolução

Temos:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Da relação $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$, segue:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 4^2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 15 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm\sqrt{15}$$

Como α está no 1º quadrante, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$.

Portanto, $\sec \alpha = 4$ e $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$.

R4 Sabendo que $\dfrac{\operatorname{cossec}^2 \alpha \cdot \sec \alpha}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = 2$, determine o valor de α, com $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Resolução

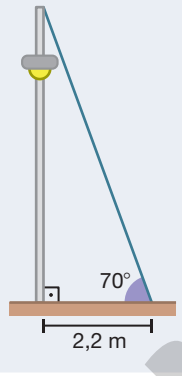
$$\frac{\operatorname{cossec}^2 \alpha \cdot \sec \alpha}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cancel{\cos \alpha}}}{\frac{1}{\cancel{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \cancel{\cos \alpha}}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = 2 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$$

Como α pertence ao 2º quadrante, então $\alpha = 150°$ ou $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R5 Para a instalação de certo poste, é necessário fixar um único cabo de aço que conecte o topo do poste ao chão, de modo que o cabo fique totalmente esticado. Sabendo que o ponto em que o cabo de aço toca o chão deve ficar a uma distância de 2,2 m da base do poste e que o ângulo formado entre o chão e o cabo deve ser igual a 70°, determine a altura aproximada do poste. (Utilize $\operatorname{sen} 70° = 0{,}9397$.)



RONALDO INÁCIO

Resolução

Indicando por x a altura, em metros, do poste, temos:

$$\operatorname{tg} 70° = \frac{x}{2{,}2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} 70°}{\cos 70°} = \frac{x}{2{,}2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} 70°}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 70°}} = \frac{x}{2{,}2}$$

Agora, considerando $\operatorname{sen} 70° = 0{,}9397$, segue que:

$$\frac{\operatorname{sen} 70°}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 70°}} = \frac{x}{2{,}2} \Rightarrow \frac{0{,}9397}{\sqrt{1 - 0{,}9397^2}} = \frac{x}{2{,}2} \Rightarrow x \simeq 6{,}0$$

Portanto, a altura do poste é, aproximadamente, 6,0 m.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

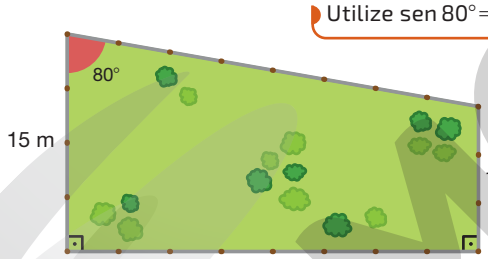
9 Sendo $3\pi < \alpha < \frac{7\pi}{2}$ e $|\cos \alpha| = \frac{3}{5}$, qual é o valor do $\operatorname{sen} \alpha$? $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$

10 Sabendo que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ e $\operatorname{sen} \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, calcule:

a) $\cos \theta$ $-\frac{1}{3}$ b) $\operatorname{cossec} \theta$ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ c) $\operatorname{cotg} \theta$ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

11 Determine o perímetro aproximado do terreno representado a seguir. 82,5 m

Utilize $\operatorname{sen} 80° = 0{,}985$.



RONALDO INÁCIO

12 Determine o valor da expressão $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2$ para $\alpha = \frac{13\pi}{12}$. $\frac{3}{2}$

13 Calcule:

a) $\operatorname{cossec} 3\frac{\pi}{4}$ $\sqrt{2}$ b) $\sec 195°$ c) $\operatorname{cotg} 5\frac{\pi}{3}$

13. b) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

14 A expressão $\left(\operatorname{cotg}^2 x + 1\right)\left(1 - \cos^2 x\right)$ é igual a: alternativa a

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $-\frac{1}{2}$ e) -1

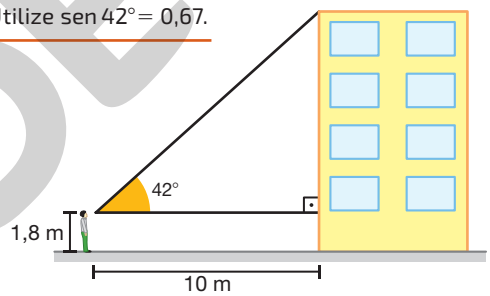
15 Mostre que $\cos^4 \beta - \operatorname{sen}^4 \beta = \cos 2\beta$. Resposta no final do livro.

16 Dado um arco x, tal que $\sec x = -2$, o valor de $\operatorname{cotg}^2 x$ é: alternativa b

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$ e) $\sqrt{3}$

17 Um observador de 1,8 m de altura, localizado a 10 m de um prédio, olha o topo desse prédio sob um ângulo de 42° em relação à horizontal. Determine a altura desse prédio. 10,8 m

Utilize $\operatorname{sen} 42° = 0{,}67$.

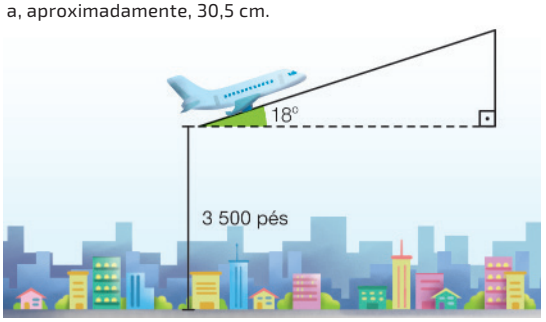


RONALDO INÁCIO

18 Após atingir a altura de 3 500 pés, certo avião sobe com uma inclinação de 18° em relação à horizontal, conforme mostra o esquema.

Utilize $\operatorname{cossec} 18° = 3{,}236$.

Pé: unidade de medida equivalente a, aproximadamente, 30,5 cm.



HELOISA PINTARELLI

a) Qual é a altura aproximada do avião, em pés, depois de percorrer 8 200 m nessa direção? 11 808 pés

b) Quantos metros o avião deve percorrer nessa direção até atingir a altura de 13 100 pés? aproximadamente 9 476 m

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Equações trigonométricas

Ao estudarmos as funções trigonométricas, resolvemos algumas equações do tipo $\operatorname{sen} x = a$, $\cos x = a$ e $\operatorname{tg} x = a$.

- $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Agora, vamos estudar, por meio de exercícios e problemas resolvidos, outros tipos de equações trigonométricas.

Resolvendo por etapas

A Lua, à medida que viaja ao redor da Terra, passa por um ciclo de fases cuja duração aproximada é de 29,5 dias. Apenas quatro fases desse ciclo da Lua recebem nomes – **Nova**, **Crescente**, **Cheia** e **Minguante** –, porém a fase da Lua varia diariamente.

Podemos estudar por meio das funções trigonométricas a ocorrência de cada uma dessas fases associando-as à porcentagem visível da Lua em cada dia. Por exemplo, a ocorrência da Lua Nova pode ser associada ao dia em que a porcentagem visível da Lua é 0%, e a Lua Cheia, ao dia em que a Lua está 100% visível.

Suponha que em dado mês com 30 dias, contado a partir do 1º dia, a porcentagem de visualização da Lua (em representação decimal) descrita em função do tempo t, medido em dias, pode ser aproximada pela função v, definida por:

$$v(t) = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}\left(0{,}21 \cdot t - 0{,}32\right)$$

Considere $\pi = 3{,}14$.

Em qual dia desse mês ocorreu a Lua Nova?

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

O dia em que ocorreu a Lua Nova no mês considerado.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

A porcentagem de visualização da Lua quando ocorre Lua Nova e Lua Cheia e a lei de formação da função que descreve a porcentagem de visualização da Lua nos dias de certo mês.

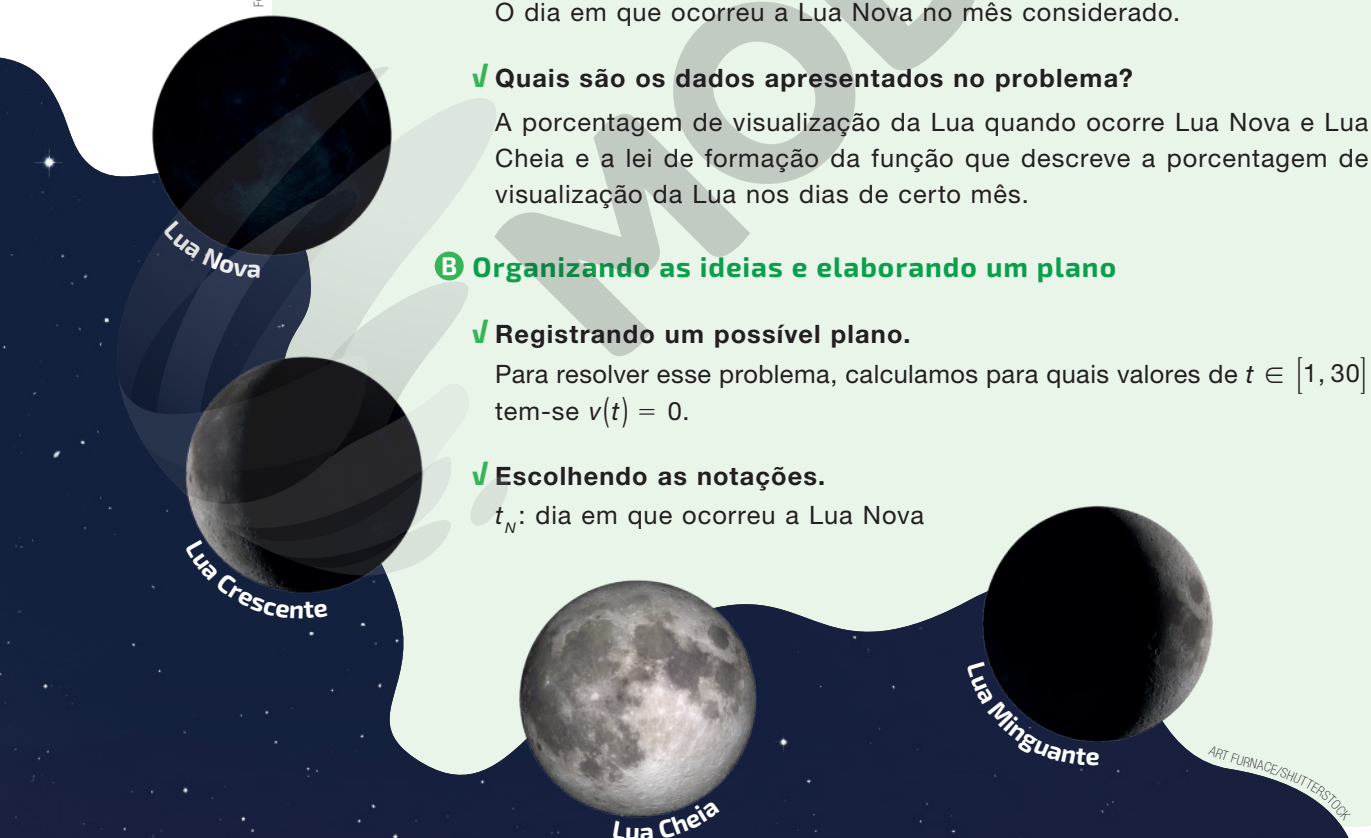
B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Para resolver esse problema, calculamos para quais valores de $t \in [1, 30]$ tem-se $v(t) = 0$.

√ Escolhendo as notações.

t_N: dia em que ocorreu a Lua Nova



FOTOS: NASA

ART FURNACE/SHUTTERSTOCK

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

C Executando o plano

Passo 1

Sabemos que a Lua Nova ocorre no dia em que a porcentagem visível da Lua é 0%, ou, na forma decimal, 0. Assim:

$$\begin{aligned} v(t_N) &= 0 \\ 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(0{,}21t_N - 0{,}32) &= 0 \\ -0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(0{,}21t_N - 0{,}32) &= -0{,}5 \\ \operatorname{sen}(0{,}21t_N - 0{,}32) &= 1 \end{aligned}$$

Passo 2

Na primeira volta positiva, temos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

$$0{,}21t_N - 0{,}32 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t_N = 9 + \frac{2}{0{,}21}k \cdot 3{,}14$$

Como $t_N \in [1, 30]$, então $t_N = 9$.

Portanto, a Lua Nova ocorreu no 9º dia desse mês.

D Verificando a solução obtida

Vamos verificar se de fato a Lua Nova ocorreu no 9º dia do mês. Para isso, substituímos $t = 9$ em $v(t)$. Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} v(9) &= 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(0{,}21 \cdot 9 - 0{,}32) \\ v(9) &= 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(1{,}89 - 0{,}32) \\ v(9) &= 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(1{,}57) \end{aligned}$$

Como $1{,}57 = \frac{3{,}14}{2} = \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, segue que:

$$v(9) = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$$

Portanto, como a porcentagem de visualização da Lua é 0, ou seja 0%, então, a Lua Nova ocorreu no 9º dia desse mês.

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas**.

Agora é você quem resolve! Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema**

A quantidade de turistas que frequenta uma cidade litorânea ao longo dos meses de um ano pode ser representada pela função q, definida por $q(t) = 2{,}1 + 1{,}5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, onde q representa a quantidade de turistas, em milhares de pessoas, e t, os meses ($t = 1$ representa janeiro, $t = 2$ representa fevereiro, e assim sucessivamente). No período de janeiro a julho, em quais meses essa cidade recebeu 3,6 milhares de turistas?

2 **É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta desse problema?**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R6 Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

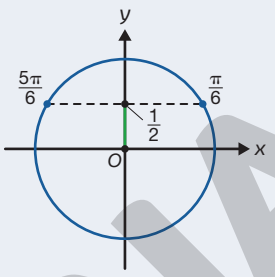
c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

d) $2 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \cos x - 2 = 0$

Resolução

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$

Na 1ª volta positiva, temos $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.



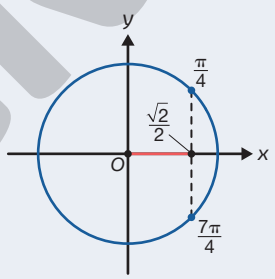
Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

- $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi$
- $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Na 1ª volta positiva, temos $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

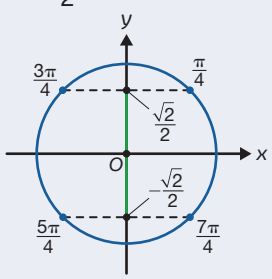
- $x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{\pi}{20} + 2k\pi$
- $x + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{31\pi}{20} + 2k\pi$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{20} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{31\pi}{20} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Na 1ª volta positiva, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Note que:

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Assim, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

19. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{5\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \text{com } k \in \mathbb{R}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

d) $2 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \cos x - 2 = 0$

Fazendo $y = \cos x$, temos $2y^2 - 3y - 2 = 0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$ $\qquad y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = 2 \end{cases}$

Como $y = \cos x$ e $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, então $y = -\frac{1}{2}$, isto é, $\cos x = -\frac{1}{2}$.

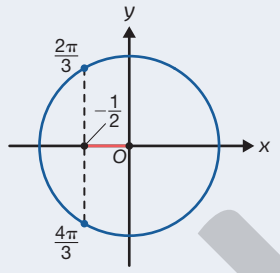
Na 1ª volta positiva, temos $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ e $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Assim, para $k \in \mathbb{Z}$ a solução da equação é:

- $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
- $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.



RONALDO INÁCIO

20. c) Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

O item **c** da tarefa **20** propõe aos alunos que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

19 Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $\cos\left(x - \frac{7\pi}{6}\right) = 0$

b) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}^2 2x = \frac{1}{4}$

d) $\cos x - \text{sen}^2 x = 1$

20 A altura $h(t)$, em metros, da maré de certa laguna em função do tempo t, em horas, pode ser aproximada por meio da função h: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $h(t) = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$.

a) Qual é a altura da maré às 2 h? E às 16 h? aproximadamente 2,55 m; aproximadamente 2,90 m

b) Qual é o menor valor de t, em horas e minutos, em que a maré está com 1,5 m de altura? aproximadamente 1 h 2 min

c) Elabore uma questão que envolva equações trigonométricas e a função h que representa a altura aproximada da maré em determinada laguna. Em seguida, peça a um colega que a resolva.

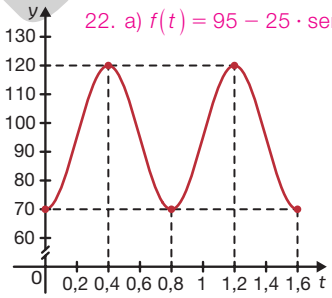
21 A distância horizontal percorrida por uma bola de futebol depende, entre outros fatores, da velocidade inicial e do ângulo formado pela trajetória da bola com relação à horizontal. Representando a velocidade inicial por v e o ângulo por α, podemos determinar essa distância d pela equação $d = \frac{v^2}{10} \cdot \text{sen}\, 2\alpha$.

Sabendo que em certo chute uma bola percorreu 16,2 m com velocidade inicial de 18 m/s, determine a medida do ângulo α formado com relação à horizontal. $\alpha = 15°$

No contexto

22 A pressão sanguínea de um indivíduo adulto, a partir de certo instante inicial $t = 0$, está representada no gráfico.

22. a) $f(t) = 95 - 25 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$



RONALDO INÁCIO

a) Qual é a lei de formação da função cujo gráfico mais se aproxima dessa curva?

- $f(t) = 95 - 25 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$
- $f(t) = 95 - 25 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$
- $f(t) = 95 - 25 \cdot \text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

b) Qual é a pressão sanguínea desse indivíduo no instante inicial $t = 0$? 70 mmHg

c) Após quantos segundos, a partir do instante inicial, a pressão sanguínea desse indivíduo será igual a 120 mmHg? 0,4 s

23 Represente na 1ª volta positiva do ciclo trigonométrico as soluções da equação $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

8 Ladrilhamento

BNCC
• EM13MAT505

A escadaria de Selarón

Considerado uma arte milenar, o ladrilhamento é utilizado desde a Antiguidade e esteve presente em várias civilizações desse período, como a dos assírios, babilônios, egípcios, gregos e romanos. O Estandarte de Ur, por exemplo, é considerado um dos ladrilhamentos mais antigos da humanidade. Produzido há cerca de 5 000 anos em Ur, uma das cidades-estados da Mesopotâmia, é formado por conchas, lápis-lazúli e pedras calcárias vermelhas.

No Brasil, são vários os artistas que trabalharam com arte em ladrilhamento. Entre eles, podemos citar: Berl Marx, criador dos padrões do calçadão de Copacabana, no Rio de Janeiro (RJ); Paulo Werner, criador do ladrilhamento da Igreja de São Francisco de Assis, em Belo Horizonte (MG); e Candido Portinari, um dos maiores pintores brasileiros. O painel Bandeirantes, instalado no hotel Comodoro, no centro de São Paulo, foi o terceiro e último trabalho de Portinari nesse estilo.

Contudo, não foram apenas os artistas brasileiros que fizeram história com ladrilhamento em território nacional. O artista plástico chileno Jorge Selarón criou uma das obras mais populares do Rio de Janeiro, a Escadaria Selarón, que liga a Lapa à parte do bairro de Santa Teresa.



Escadaria Selarón, no Rio de Janeiro (RJ), em 2017.

Selarón começou a trabalhar na escadaria, que ficava em frente de sua casa, em 1990, como uma homenagem ao povo brasileiro. A escadaria possui 215 degraus cobertos por mais de dois mil azulejos, em sua maioria verdes, amarelos, azuis e brancos, remetendo à bandeira nacional brasileira, e vermelhos, cor favorita do artista plástico. Para garantir a preservação, o local foi tombado pela cidade do Rio de Janeiro em 2005.

Fonte de pesquisa: <https://www.bbc.co.uk/programmes/b00qb5xv>. Acesso em: 31 mar. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Você já visitou alguma construção em que há obras com arte em ladrilhamento? Se sim, conte sua experiência aos colegas e ao professor. Resposta pessoal.

B Junte-se a um colega e façam uma pesquisa a respeito de outras obras com arte em **ladrilhamento**, além das apresentadas no texto. Em seguida, apresentem-nas aos colegas e ao professor. Resposta pessoal. Uma possível resposta: os ladrilhamentos de Antoni Gaudí em Barcelona, na Espanha.

Nesta página, foram apresentadas algumas informações sobre a arte em ladrilhamento. Porém, como nosso objetivo é realizar um estudo matemático, nas próximas páginas apresentaremos algumas definições e analisaremos possibilidades de **ladrilhamento** do plano.

FOTOMONTAGEM DE MAURICIO PLANEL. FOTOS: 1.DIEGOGUJOP/SHUTTERSTOCK; 2.RPBAIAO/SHUTTERSTOCK; 3.SHAWN EASTMAN PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 4.KRAKENIMAGES.COM/SHUTTERSTOCK; 5.JOHN COPLAND/SHUTTERSTOCK; 6.ESB PROFESSIONAL/SHUTTERSTOCK; 7.SUTHIN_SAENONTAD/SHUTTERSTOCK; 8.REATIVIKA GRAPHICS/SHUTTERSTOCK; 9.BRUNO MARTINS IMAGENS/SHUTTERSTOCK; 10.LAZYLLAMA/SHUTTERSTOCK; 11.MIKOLAJN/SHUTTERSTOCK; 12.MIKOLAJN/SHUTTERSTOCK; 13.BRUNO MARTINS IMAGENS/SHUTTERSTOCK

Lápis-lazúli: pedra preciosa de cor azul.

Alguns conceitos necessários

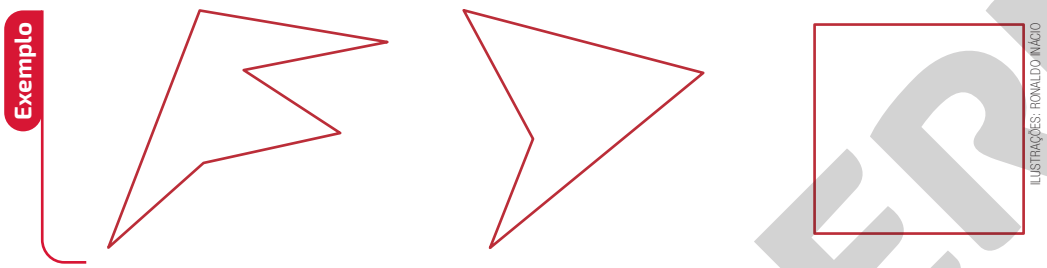
Antes de estudarmos os ladrilhamentos do plano, vamos relembrar o conceito de **polígono** e definir os conjuntos **interior** e **exterior** dessa figura.

Polígonos

Uma **poligonal** é uma figura formada por uma sequência de pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ e pelos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$. Os pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ são os vértices da poligonal, e os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_{n-1}A_n}$, os lados.

Um **polígono** é uma poligonal que satisfaz as seguintes condições: $A_n = A_1$; os lados da poligonal se intersectam somente em suas extremidades; cada vértice é extremidade de dois lados; e dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Exemplo



ILUSTRAÇÕES: RONALDO NÁCIO

Se julgar conveniente, apresente aos alunos algumas poligonais que não são polígonos.

Um polígono separa o plano em três conjuntos de pontos do plano: uma região interior, uma região exterior e o próprio polígono.

Um conjunto do plano é dito **interior** se, e somente se, para qualquer ponto da região, toda semirreta de origem no ponto que não passa em vértices do polígono tem uma quantidade ímpar de pontos em comum com o polígono. Já o conjunto de pontos que não pertencem ao interior ou ao polígono é dito **exterior**.

Ao reunirmos um polígono e seu conjunto interior, obtemos uma figura denominada **região poligonal**, a qual, a fim de simplificar a escrita, chamaremos simplesmente de polígono.

Ladrilhamento do plano

As formas das peças dos ladrilhamentos podem ser infinitamente variadas. Porém, vamos explorar os ladrilhamentos formados por regiões poligonais.

Um ladrilhamento do plano (ou simplesmente ladrilhamento) é a união das regiões poligonais (peças) de um conjunto $\{P_1, P_2, ...\}$, de modo que os conjuntos interiores dessas regiões não possuam pontos em comum e não existam lacunas entre elas.

Os ladrilhamentos devem sempre ser imaginados de forma a preencher todo um plano, ilimitado em todas as direções.

Além disso, três condições serão impostas aos ladrilhamentos estudados nesta coleção.

I. As peças devem ser polígonos regulares, de um ou vários tipos.

II. A interseção de duas peças, se existir, é sempre um lado ou um vértice.

III. A distribuição de peças ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento é sempre a mesma.

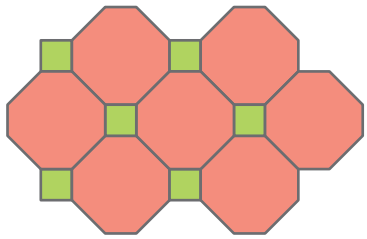
Os ladrilhamentos que obedecem às condições apresentadas são chamados **bem-comportados**.

Lembre-se de que **polígonos regulares** são aqueles que possuem todos os seus lados congruentes e também todos os seus ângulos internos congruentes.

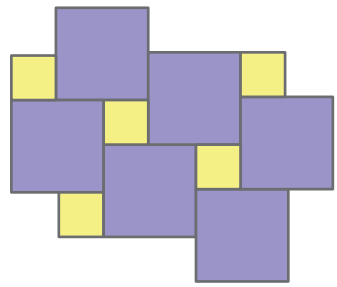
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Com essas condições, eliminamos de nossos estudos os ladrilhamentos como os apresentados.



A condição I) não é satisfeita.

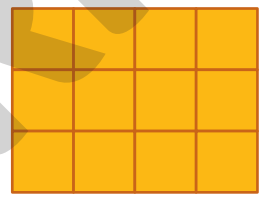


As condições II) e III) não são satisfeitas.

Ladrilhamento regular

Um ladrilhamento é dito **regular** quando for bem-comportado e formado por cópias congruentes de um único tipo de polígono regular.

Ao posicionarmos quadrados congruentes lado a lado (justaposição), em torno de um vértice comum, obtemos um ladrilhamento regular do plano.



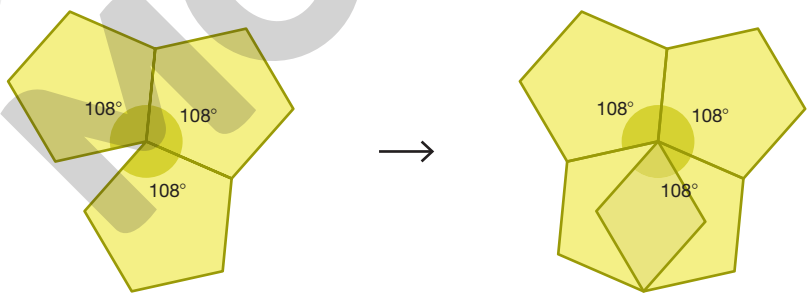
Ladrilhamento regular formado por quadrados.

A Junte-se a três colegas e construam peças com formato de polígonos regulares congruentes dos seguintes tipos: triângulos, pentágonos e hexágonos. Em seguida, tentem obter um ladrilhamento regular utilizando:

- triângulos equiláteros. Espera-se que os alunos consigam ladrilhar o plano utilizando triângulos equiláteros congruentes.
- pentágonos regulares. Espera-se que os alunos não consigam ladrilhar o plano utilizando pentágonos regulares congruentes.
- hexágonos regulares. Espera-se que os alunos consigam ladrilhar o plano utilizando hexágonos regulares congruentes.

B O que há de comum entre os ladrilhamentos que você conseguiu construir e o ladrilhamento regular formado por quadrados? Espera-se que os alunos respondam que a soma dos ângulos internos dos polígonos em torno de um vértice é igual a 360°.

Vamos analisar, por exemplo, o que acontece quando posicionamos lado a lado, em torno de um vértice comum, pentágonos regulares congruentes.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Se posicionarmos três pentágonos, teremos uma lacuna (soma das medidas dos ângulos internos menor do que 360°). Porém, se acrescentarmos mais um, haverá remonte, ou seja, os conjuntos interiores dessas regiões possuirão pontos em comum (soma das medidas dos ângulos internos maior do que 360°).

Portanto, não é possível ladrilhar o plano utilizando exclusivamente pentágonos regulares congruentes.

C Junte-se a três colegas e, em seguida, construam peças com formatos de polígonos regulares congruentes dos seguintes tipos: heptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos, undecágonos (11 lados) e dodecágonos (12 lados). Na sequência, verifique se utilizando algum desses polígonos é possível obter um ladrilhamento regular do plano.

Ao realizar as questões A e C, se possível, entregue moldes aos alunos para a construção das peças. É de suma importância que todos os tipos de polígono construídos possuam os lados congruentes, pois eles serão utilizados em investigações propostas no tópico **Ladrilhamento semirregular**.

Para resolver a questão A, se julgar conveniente, encarregue cada grupo de produzir determinado tipo de peça. São necessários, para cada grupo, no mínimo, 12 triângulos equiláteros, 4 pentágonos regulares e 6 hexágonos regulares.

Se julgar necessário, ao desenvolver a questão A, oriente os alunos a posicionar os polígonos lado a lado em torno de um vértice comum.

Não é possível obter ladrilhamentos regulares com esses polígonos.

Para resolver a questão C, se julgar conveniente, encarregue cada grupo de produzir determinado tipo de peça. São necessárias, para cada grupo, no mínimo, 3 peças de cada tipo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

Ao posicionarmos polígonos **regulares congruentes** de um único tipo ao redor de um vértice comum, temos duas possibilidades: (a) eles rodeiam completamente o vértice; (b) eles não rodeiam completamente o vértice e, se outro polígono for acrescentado, os conjuntos interiores dessas figuras apresentarão pontos em comum.

Com quais tipos de polígonos é possível obter um ladrilhamento regular do plano?

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

Identificar com quais tipos de polígonos é possível obter ladrilhamentos regulares do plano.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

Que, ao posicionarmos polígonos regulares congruentes de um único tipo ao redor de um vértice comum, temos duas possibilidades: (a) eles rodeiam completamente o vértice; (b) eles não rodeiam completamente o vértice e, se outro polígono for acrescentado, os conjuntos interiores dessas figuras apresentarão pontos em comum.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, determinamos a medida do ângulo interno de um n-ágono regular (polígono de n lados). Em seguida, determinamos para quais polígonos o número que expressa a medida do ângulo interno é um divisor de 360°.

√ Escolhendo as notações.

- n: quantidade de lados do polígono regular.
- m: quantidade de polígonos posicionados ao redor de um vértice.
- α: medida do ângulo interno de um n-ágono regular.

C Executando o plano

Passo 1

Se posicionarmos polígonos regulares congruentes de um único tipo ao redor de um vértice e eles rodearem completamente o vértice, então α é divisor de 360°. Caso contrário, α não é um divisor de 360°. Desse modo, precisamos, inicialmente, determinar α. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um n-ágono regular é $(n-2)\cdot 180°$. Assim:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Passo 2

Como queremos que α seja divisor de 360°, temos $m \cdot \alpha = 360°$, consequentemente:

$$m \cdot \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 360° \Rightarrow m = \frac{2n}{n-2}$$

Passo 3

Ao redor de um vértice, são posicionados ao menos três polígonos, então $m \geqslant 3$ e, consequentemente, $\frac{2n}{n-2} \geqslant 3$. Simplificando essa expressão, obtemos:

$$\frac{2n}{n-2} \geqslant 3 \Rightarrow 2n \geqslant 3(n-2) \Rightarrow 2n \geqslant 3n - 6 \Rightarrow n \leqslant 6$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Como $n \geqslant 3$, as únicas soluções inteiras e positivas são $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$.

- Para $n = 3$, temos $m = \frac{2 \cdot 3}{3 - 2} = 6$.

  Assim, podemos posicionar ao redor de um vértice 6 triângulos equiláteros.
- Para $n = 4$, temos $m = \frac{2 \cdot 4}{4 - 2} = 4$.

  Desse modo, podemos posicionar ao redor de um vértice 4 quadrados.
- Para $n = 5$, temos $m = \frac{2 \cdot 5}{5 - 2} = 3{,}333\ldots$.

  Como m deve ser um número inteiro, o pentágono regular não pavimenta o plano (como já havíamos verificado anteriormente).
- Para $n = 6$, temos $m = \frac{2 \cdot 6}{6 - 2} = 3$.

  Assim, podemos posicionar ao redor de um vértice 3 hexágonos regulares.

Portanto, é possível obter ladrilhamentos regulares utilizando exclusivamente triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares. Esses ladrilhamentos do plano são indicados por: $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4, 4)$ e $(6, 6, 6)$.

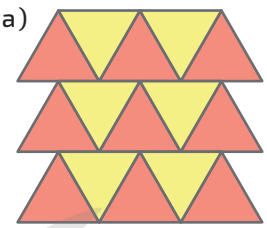
Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns exercícios ou problemas semelhantes propostos nas seções **Exercícios e problemas** desse tema.

Exercícios e problemas

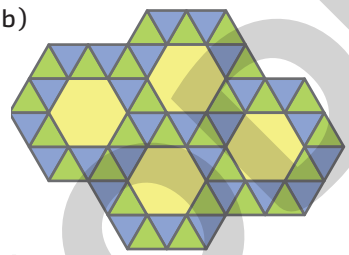
Anote as respostas no caderno.

1 Qual dos ladrilhamentos é bem-comportado? ladrilhamento b

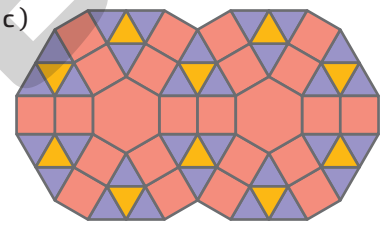
a)



b)



c)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

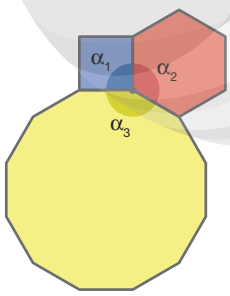
2 Com o auxílio de régua e compasso, construa um ladrilhamento regular formado por:

a) triângulos equiláteros. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

b) hexágonos regulares. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

Ladrilhamento semirregular

Um ladrilhamento é dito **semirregular** quando for bem-comportado e formado por cópias congruentes de dois ou mais tipos de polígonos regulares.



RONALDO INÁCIO

Agora, vamos analisar algumas combinações de polígonos regulares posicionados ao redor de um vértice comum.

Por exemplo, é possível posicionar um quadrado, um hexágono regular e um dodecágono regular de lados congruentes ao redor de um vértice comum de maneira que eles rodeiem completamente o vértice. Nesse caso:

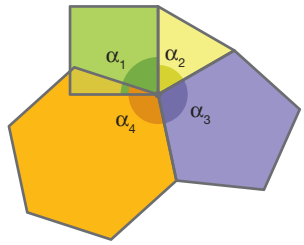
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360°$$

A Mostre que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360°$. Resposta no Suplemento para o professor.

Note que não é necessário que os polígonos regulares tenham a mesma quantidade de lados, porém, por esses ladrilhamentos serem bem-comportados, as condições impostas exigem que os lados de todos os polígonos que compõem o ladrilhamento tenham o mesmo comprimento.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Contudo, não é possível posicionar um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular de lados congruentes ao redor de um vértice comum sem que os conjuntos interiores dessas figuras tenham pontos em comum. Nesse caso:



$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 90° + 60° + 108° + 120° = 378° > 360°$$

B) Seja m a quantidade de polígonos ao redor de um vértice comum, tem-se, evidentemente, $m \geqslant 3$. Como a menor medida do ângulo interno de um polígono regular é 60°, segue que $3 \leqslant m \leqslant 6$, pois $\frac{360°}{60°} = 6$.

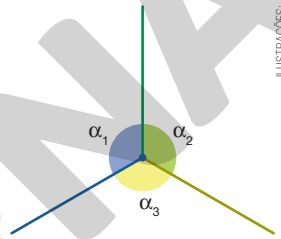
B Junte-se a um colega e determinem se, em um ladrilhamento semirregular, há uma quantidade máxima e mínima de polígonos que podem ser posicionados ao redor de um vértice comum.

C Junte-se a três colegas e posicionem três polígonos regulares de dois ou mais tipos de lados congruentes ao redor de um vértice comum, de maneira que eles rodeiem completamente o vértice. São nove as possíveis soluções. Determine-as e apresente-as para seus colegas e professor.

Para resolver a questão **C**, construa quadrados congruentes e utilize as peças construídas anteriormente.

$(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(3, 12, 12)$, $(4, 5, 20)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$ e $(5, 5, 10)$

Vamos determinar quais são as possíveis combinações de três polígonos regulares com lados congruentes que ladrilham o plano.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO NÁCIO

Considere três polígonos regulares de, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 lados. Suponha que seja possível ladrilhar o plano utilizando esses polígonos. Assim:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360°$$

Consequentemente:

$$\frac{(n_1 - 2)\cdot 180°}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)\cdot 180°}{n_2} + \frac{(n_3 - 2)\cdot 180°}{n_3} = 360°$$

Simplificando essa equação, obtemos:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

No **Suplemento para o professor** são apresentados os cálculos realizados nessa simplificação.

Suponha que $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$, assim:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{n_1} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow n_1 \leqslant 6$$

Como $3 \leqslant n_1 \leqslant 6$, devemos analisar os seguintes casos:

- $n_1 = 3$ (um dos polígonos é um triângulo equilátero).

  Nesse caso, temos:

  $$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{n_2 - 6}{6n_2}$$

  Assim, $n_2 \geqslant 7$. Além disso:

  $$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \geqslant \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{n_2} \geqslant \frac{1}{6} \Rightarrow n_2 \leqslant 12$$

  Desse modo, $7 \leqslant n_2 \leqslant 12$. Substituindo os possíveis valores de n_2 em $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6}$, obtemos os possíveis valores de n_3, que, nesse caso, são: $n_3 = 42$ (para $n_2 = 7$), $n_3 = 24$ (para $n_2 = 8$), $n_3 = 18$ (para $n_2 = 9$), $n_3 = 15$ (para $n_2 = 10$) e $n_3 = 12$ (para $n_2 = 12$). Portanto, as ternas (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15) e (3, 12, 12) são soluções.

- $n_1 = 4$ (um dos polígonos é um quadrado).

  Temos $5 \leqslant n_2 \leqslant 8$ e, consequentemente, as ternas (4, 5, 20), (4, 6, 12) e (4, 8, 8) são soluções.

- $n_1 = 5$ (um dos polígonos é um pentágono regular).

  Temos $5 \leqslant n_2 \leqslant 6$ e, consequentemente, a terna (5, 5, 10) é a única solução.

- $n_1 = 6$ (um dos polígonos é um hexágono regular).

  Temos $n_2 = 6$ e, consequentemente, a terna (6, 6, 6) é a única solução.

De maneira semelhante à apresentada para o caso em que $n_1 = 3$, verifique se as soluções obtidas para os casos em que $n_1 = 4$, $n_1 = 5$ e $n_1 = 6$ estão corretas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No quadro a seguir, estão apresentadas todas as soluções inteiras e positivas da equação $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$.

n_1	3	3	3	3	3	4	4	4	5	6
n_2	7	8	9	10	12	5	6	8	5	6
n_3	42	24	18	15	12	20	12	8	10	6

Vimos que existem dez combinações de três polígonos regulares de lados congruentes que podem ser posicionados ao redor de um vértice comum de modo que não haja lacunas e que os conjuntos interiores dessas regiões não possuam pontos em comum. Porém, o objetivo, agora, é determinar quais delas possibilitam ladrilhar o plano.

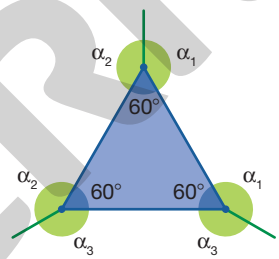
Para resolver a questão **D**, utilize as peças construídas anteriormente.

D Tente ladrilhar o plano posicionando, ao redor de um vértice comum, um triângulo equilátero e outros dois polígonos regulares. Em quais casos esse ladrilhamento foi possível? Uma combinação de três polígonos envolvendo um triângulo equilátero ladrilha o plano apenas se os outros dois polígonos forem congruentes.

Vamos analisar, por exemplo, uma combinação envolvendo um triângulo equilátero e outros dois polígonos regulares.

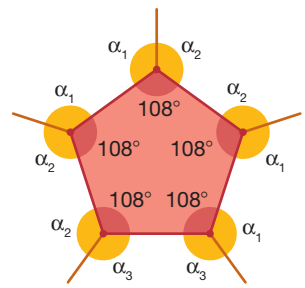
Observe que:

- $\alpha_1 + \alpha_3 + 60° = 360°$
- $\alpha_1 + \alpha_2 + 60° = 360°$
- $\alpha_2 + \alpha_3 + 60° = 360°$



Desse modo, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ e, consequentemente, uma combinação envolvendo um triângulo equilátero ladrilha o plano apenas se os outros dois polígonos forem congruentes. Logo, as combinações (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18) e (3, 10, 15) não ladrilham o plano.

De maneira análoga, em uma combinação envolvendo um pentágono regular é necessário que os outros dois polígonos sejam congruentes.

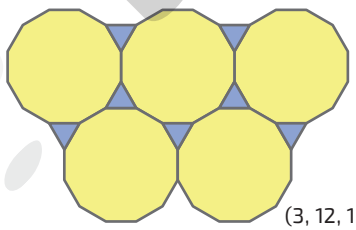


Nesse caso, as combinações (4, 5, 20) e (5, 5, 10) não ladrilham o plano.

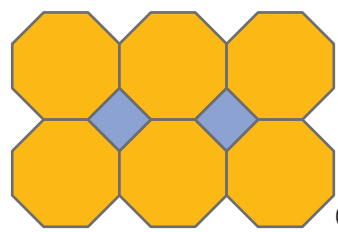
Lembre-se de que (6, 6, 6) é um ladrilhamento regular.

Portanto, as combinações de três polígonos regulares que ladrilham o plano são (3, 12, 12), (4, 6, 12), (4, 8, 8) e (6, 6, 6).

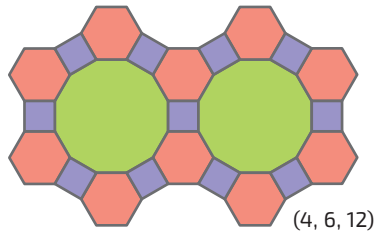
Os ladrilhamentos semirregulares formados por três polígonos regulares ao redor de cada vértice estão desenhados abaixo.



(3, 12, 12)



(4, 8, 8)



(4, 6, 12)

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

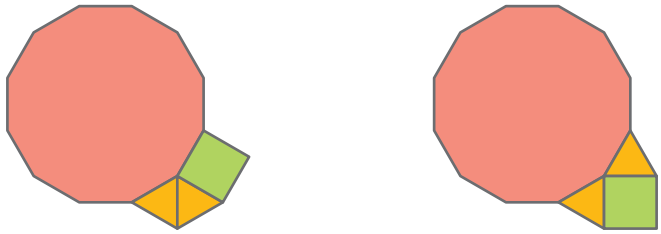
MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Para resolver as tarefas desta página, utilize, se necessário, as peças construídas anteriormente.

3 Ao combinarmos, ao redor de um vértice, quatro polígonos regulares de dois ou mais tipos com lados congruentes, de maneira que eles rodeiem completamente o vértice, podemos obter configurações como as apresentadas a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Note que, nas combinações (3, 3, 4, 12) e (3, 4, 3, 12), os mesmos polígonos regulares são posicionados ao redor de um vértice comum. Porém, enquanto a combinação (3, 3, 4, 12) não admite eixo de simetria, a combinação (3, 3, 4, 12) admite um eixo. Nesse caso, consideraremos as combinações (3, 3, 4, 12) e (3, 4, 3, 12) como distintas.

a) Junte-se a três colegas e posicionem quatro polígonos regulares de dois ou mais tipos de lados congruentes ao redor de um vértice comum de maneira que eles rodeiem completamente o vértice. São seis as possíveis soluções, das quais duas já estão apresentadas. Determine as outras quatro soluções e apresente-as para seus colegas e professor.
(3, 3, 6, 6), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4) e (3, 4, 4, 6)

b) Quais são os ladrilhamentos semirregulares com quatro polígonos regulares em cada vértice?
(3, 6, 3, 6) e (3, 4, 6, 4)

4 Eleonor tem de construir um ladrilhamento que seja bem-comportado. Para isso, ela pode optar por um dos seguintes polígonos.



quadrado

octógono regular

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

De acordo com as informações, classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa.

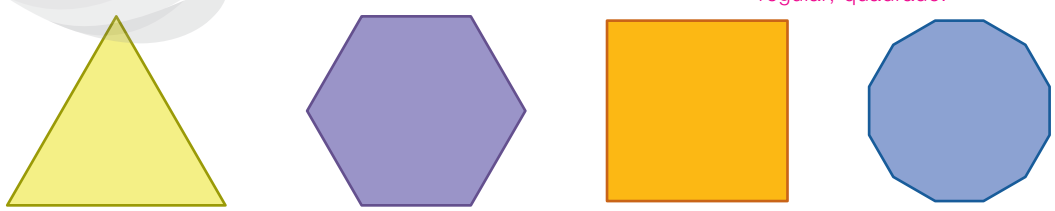
a) Esse ladrilhamento pode ser construído apenas com octógonos regulares. falsa

b) Esse ladrilhamento pode ser construído posicionando ao redor de cada vértice um octógono regular e três quadrados. falsa

c) Esse ladrilhamento pode ser construído posicionando ao redor de cada vértice dois octógonos regulares e um quadrado. verdadeira

5 Em grupo

Com quais dos tipos de polígono regular apresentados a seguir é possível obter ladrilhamentos semirregulares com cinco polígonos em cada vértice? Triângulo equilátero; hexágono regular; quadrado.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

6 Demonstre que existem 11 ladrilhamentos bem-comportados do plano. Em seguida, construa cada uma delas. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

9 Área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango

Floresta em perigo

A Floresta Amazônica, também chamada Amazônia, é reconhecida mundialmente por suas riquezas naturais. Além de abrigar a maior biodiversidade do planeta, ela ajuda na manutenção do clima mundial, contribuindo para o controle do aquecimento global. Seu território distribui-se em nove países, sendo que aproximadamente 60% de sua área está localizada em território brasileiro.

Em 1953, a Amazônia Brasileira passou a ser chamada Amazônia Legal. Atualmente, essa região é composta dos estados do Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins e Mato Grosso, bem como alguns municípios do estado do Maranhão.

Amazônia Legal



KEITHY MOSTACHI

Fonte de pesquisa: <http://geoftp.ibge.gov.br/cartas_e_mapas/mapas_regionais/sociedade_e_economia/integrado_zee_amazonia_legal/amazonia_administrativo.pdf>. Acesso em: 26 maio 2020.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADARIN. FOTOS: 1.ANNALISA E MARINA DURANTE/SHUTTERSTOCK; 2.W85/SHUTTERSTOCK; 3.LILLIAN_GZ/SHUTTERSTOCK; 4.EDINALDO MACIEL/SHUTTERSTOCK; 5.WARUT PINAMKA/SHUTTERSTOCK; 6.DEWIN ID/SHUTTERSTOCK; 7.LINA KEIL/SHUTTERSTOCK; 8.BRAKVAND.DK/SHUTTERSTOCK; 9.DONOT6_STUDIO/SHUTTERSTOCK; 10.NATALIMA/SHUTTERSTOCK; 11.ALAN JEFFERY/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

O órgão responsável pelo monitoramento do desmatamento na Amazônia Legal é o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe). Para esse trabalho, o Inpe desenvolve diversos programas, entre eles: o **Prodes**, o **Deter** e o **Terraclass**.

Prodes

Monitora, utilizando imagens de satélite, a área desmatada da Amazônia Legal e produz relatórios anuais de desmatamento, usados pelo governo como dados oficiais para o estabelecimento de políticas ambientais.

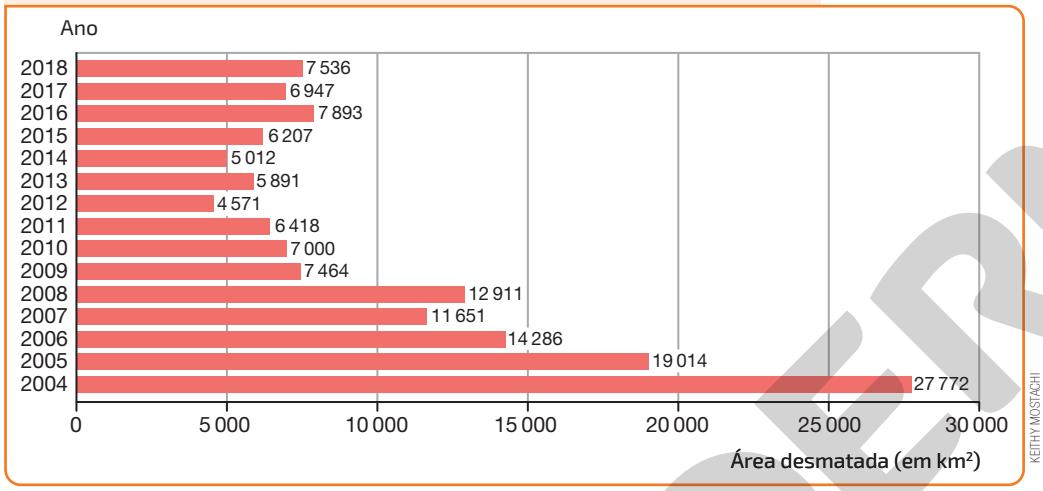
Deter

Identifica, utilizando imagens de satélite, variações nas áreas observadas, emitindo alertas de desmatamento em tempo quase real para as entidades responsáveis pela fiscalização.

TerraClass

Qualifica o desmatamento apontado pelo Prodes, indicando as características das áreas desmatadas e investigando possíveis causas e motivos. Além disso, são gerados dados sobre o reflorestamento da Amazônia.

Área da Amazônia Legal desmatada anualmente, de 2004 a 2018



KEITH MOSTACHI

Fonte de pesquisa: <http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes>. Acesso em: 8 nov. 2019.

BNCC

- EM13MAT307
- EM13MAT315
- CE1CNT
- CE2CNT

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Cite algumas possíveis consequências do desmatamento da Amazônia.

B Para determinar quantos por cento da área da Amazônia Legal foram desmatados de 2004 até o final de 2018, é necessário conhecer a área total dessa região. Junte-se a um colega e conversem sobre estratégias para calcular a área aproximada da Amazônia Legal. Em seguida, apresentem-nas aos colegas e professor.

A) Algumas possíveis respostas: perda da biodiversidade, alterações nos recursos hídricos da região, mudanças climáticas.

B) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam, por exemplo, que aproximariam a área dessa região à de um polígono cuja área eles saibam calcular.

Nas próximas páginas estudaremos o conceito de **área** e estabeleceremos as fórmulas para o cálculo da área de algumas figuras geométricas. Além disso, vamos estimar áreas de estados e regiões, como a área da Amazônia Legal e do estado em que você mora.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

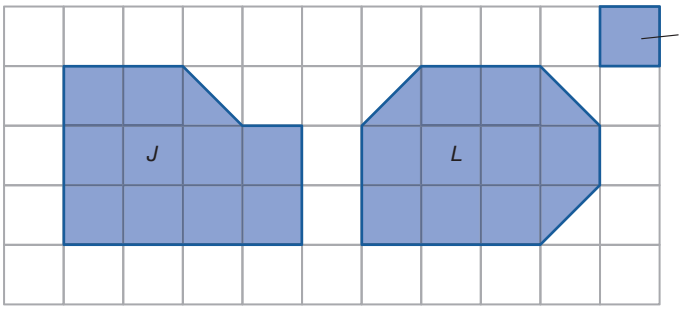


Estudando área de figuras planas

A fim de simplificar a escrita, vamos dizer "a área do polígono" quando, na realidade, queremos nos referir à área da região delimitada por esse polígono. Por exemplo, em vez de dizer "a área da região quadrada", diremos simplesmente "a área do quadrado".

Para medir a área de uma figura plana devemos compará-la com uma unidade de área, que chamaremos de U. O resultado dessa comparação é um número que expressa quantas vezes a unidade de área "cabe" na figura *F*.

Considere, por exemplo, as figuras *J* e *L* na malha quadriculada.



Para medir a área das figuras *J* e *L*, utilizamos U como unidade de área. Como a quantidade de unidades U que "cabe" em cada uma dessas figuras é igual, dizemos que elas têm áreas iguais.

Observe que a unidade de área "cabe" 10,5 vezes em cada uma dessas figuras. Dessa maneira, dizemos que a área de *J* e de *L* é 10,5 U, isto é:

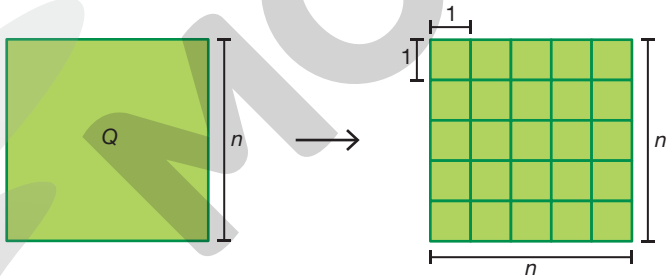
$$\text{área de } J = \text{área de } L = 10{,}5 \text{ U}$$

Área do quadrado

Por definição, um quadrado unitário, ou seja, cujo comprimento do lado é 1, tem área igual a 1.

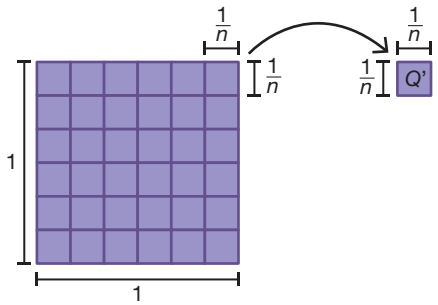
Considere um quadrado *Q*, de lado *n*, com $n \in \mathbb{N}$. Podemos decompor esse quadrado em n^2 quadrados unitários. Assim, a área do quadrado *Q* é $n^2 \cdot 1 = n^2$.

Quadrado é todo quadrilátero que possui os quatro ângulos internos retos e os quatro lados com o mesmo comprimento.



Na figura, é apresentado o caso em que *n* é igual a 5.

Por outro lado, se considerarmos um quadrado unitário decomposto em n^2 quadrados *Q'* de lado $\frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, teremos que a área de cada quadrado *Q'* é igual a $\frac{1}{n^2}$.



Na figura, é apresentado o caso em que *n* é igual a 6.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Diante dessas conclusões, vamos mostrar que a área de um quadrado Q'', de lado $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}^*$, é igual a $\left(\frac{m}{n}\right)^2$. De fato, o quadrado Q'' pode ser decomposto em m^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$. Assim, a área do quadrado Q'' é:

$$m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Mostramos que se o comprimento de um quadrado é expresso por um número racional a, então a área desse quadrado é a^2. Porém, pode-se demonstrar que, se o comprimento do lado de um quadrado é expresso por um número irracional i, tem-se ainda que a área desse quadrado é i^2.

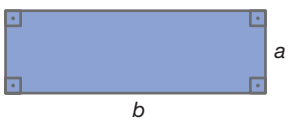
A área de um quadrado de lado a é igual a a^2.

A Determine a expressão que possibilita calcular a área de um quadrado, dado o comprimento de sua diagonal.

B Escreva um algoritmo que possibilite determinar a área de um quadrado, dado o comprimento de sua diagonal. Em seguida, organize-o em um fluxograma. Resposta no Suplemento para o professor.

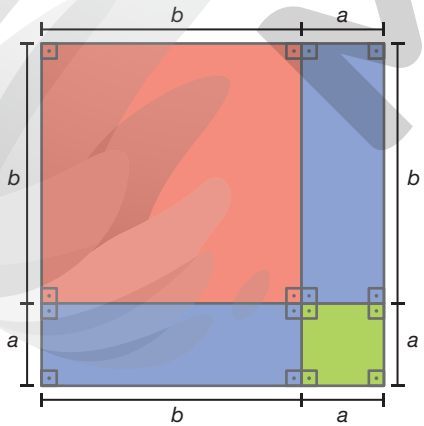
Área do retângulo

Considere um retângulo R, de lados a e b, com $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.



Retângulo é todo quadrilátero que possui os quatro ângulos internos retos.

Em seguida, construa um quadrado de lado $a + b$, formado por duas cópias de R, um quadrado de lado a e um quadrado de lado b. Indicando por A a área do retângulo R, temos:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= A + A + a^2 + b^2\\ 2A &= (a+b)^2 - a^2 - b^2\\ 2A &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2\\ 2A &= 2ab\\ A &= ab\end{aligned}$$

Portanto, a área do retângulo R é igual a ab.

A área de um retângulo de lados a e b é igual a ab.

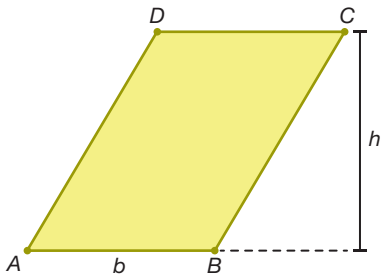
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Área do paralelogramo

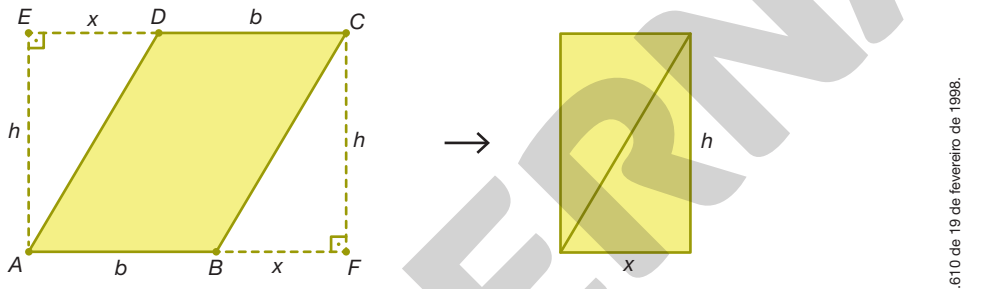
No paralelogramo $ABCD$, b é o comprimento da base e h, a altura do paralelogramo, com $b, h \in \mathbb{R}_+^*$.

Antes de propor aos alunos o trabalho com a área do paralelogramo, questione-os sobre as propriedades desse quadrilátero. Se julgar necessário, apresente na lousa essas propriedades.



Paralelogramo é todo quadrilátero que possui dois pares de lados paralelos.

Se traçarmos os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$, perpendiculares a $\overline{AB}$, obtemos o retângulo $AECF$, composto do paralelogramo $ABCD$ e dos triângulos retângulos congruentes ADE e BCF.



Note que os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso **LAL**, pois:

- $AE = CF = h$;
- $E\hat{A}D = B\hat{C}F$, pois $D\hat{A}B = B\hat{C}D$ (ângulos opostos de um paralelogramo), $E\hat{A}D = 90° - D\hat{A}B$ e $B\hat{C}F = 90° - B\hat{C}D$;
- $AD = BC$ (lados opostos de um paralelogramo).

Como os triângulos ADE e BCF são congruentes, juntos eles formam um retângulo cuja área é xh. Desse modo, a área do retângulo $AECF$ é igual à área do paralelogramo $ABCD$, que indicaremos por A, mais a área do retângulo formado pelos triângulos ADE e BCF. Assim:

$$(x + b) \cdot h = A + xh$$
$$xh + bh = A + xh$$
$$A = bh$$

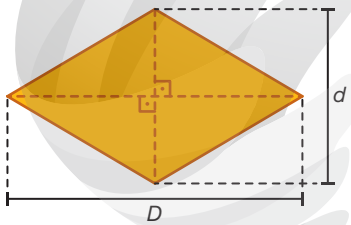
Portanto, a área do paralelogramo $ABCD$ é igual a bh.

A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual a bh.

Área do losango

Antes de propor aos alunos o trabalho com a área do losango, questione-os sobre as propriedades desse quadrilátero. Se julgar necessário, apresente na lousa essas propriedades.

Considere o losango ao lado, em que D é o comprimento da diagonal maior e d, o comprimento da diagonal menor, com D e d representando números reais positivos.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Losango é todo paralelogramo com os quatro lados de mesmo comprimento.

A área de um losango, cujo comprimento da diagonal maior é D e da diagonal menor é d, é igual a:

$$\frac{D \cdot d}{2}$$

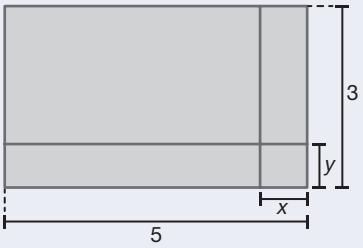
C Mostre que a afirmação apresentada é verdadeira, ou seja, que a área A de um losango, cujo comprimento da diagonal maior é D e da diagonal menor é d, é igual a $A = \frac{D \cdot d}{2}$, em que D e d são números reais positivos.

Resposta no Suplemento para o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R1 (Enem, 2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura ao lado mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.



RONALDO INÁCIO

Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) $2xy$ b) $15 - 3x$ c) $15 - 5y$ d) $-5y - 3x$ e) $5y + 3x - xy$

Resolução

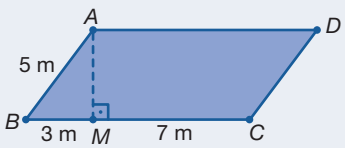
Para obter a expressão que representa a área perdida do forro, calculamos a diferença entre as áreas dos retângulos de lados 5 e 3 e de lados $(5 - x)$ e $(3 - y)$.

$$(5 \cdot 3) - \left[(5 - x)(3 - y)\right] = 15 - (15 - 5y - 3x + xy) =$$
$$= 15 - 15 + 5y + 3x - xy = 5y + 3x - xy$$

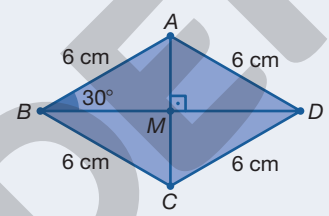
Portanto, a alternativa correta é a **e**.

R2 Calcule a área do:

a) paralelogramo.



b) losango.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Resolução

a) Inicialmente, calculamos, em metros, a altura AM do paralelogramo utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$(AB)^2 = (BM)^2 + (AM)^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + (AM)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AM)^2 = 25 - 9 \Rightarrow AM = \sqrt{16} = 4$$

Note que $AM = 4$, pois, $AM > 0$.

Agora, calculamos a área S do paralelogramo:

$$S = BC \cdot AM = \underbrace{10}_{7+3} \cdot 4 = 40$$

Portanto, a área do paralelogramo é $40\,m^2$.

b) Calculando, em centímetros, o comprimento das diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ do losango, temos:

- $\cos 30° = \dfrac{BM}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\frac{BD}{2}}{6} \Rightarrow BD = 6\sqrt{3}$
- $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{AC}{2}}{6} \Rightarrow AC = 6$

Agora, calculamos a área S do losango:

$$S = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 18\sqrt{3}$$

Portanto, a área do losango é $18\sqrt{3}\,cm^2$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

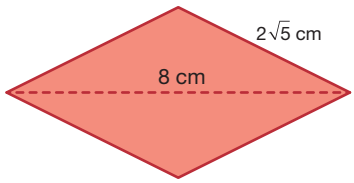
MODERNA

Exercícios e problemas

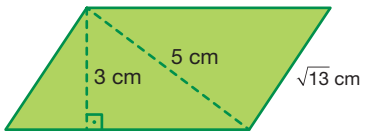
Anote as respostas no caderno.

1 Calcule a área do:

a) losango. 16 cm²

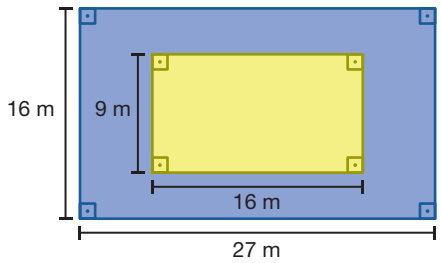


b) paralelogramo. 18 cm²



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

2 Para oferecer boas condições de uso e de segurança em uma quadra poliesportiva, um grupo de voluntários pretende revitalizá-la. Na primeira etapa desse trabalho, o piso da quadra será pintado como indicado na imagem.



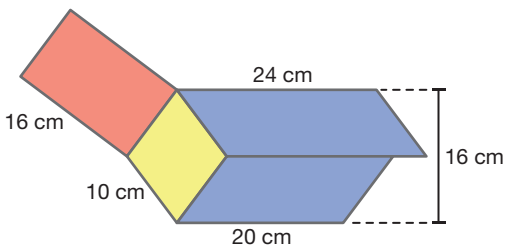
RONALDO INÁCIO

2. a) tinta azul: 16 ℓ; tinta amarela: 9 ℓ

a) Sabendo que é possível pintar 18 m² com 1 ℓ de tinta azul e 16 m² com 1 ℓ de tinta amarela, quantos litros de cada tinta, no mínimo, serão necessários para pintar essa quadra?

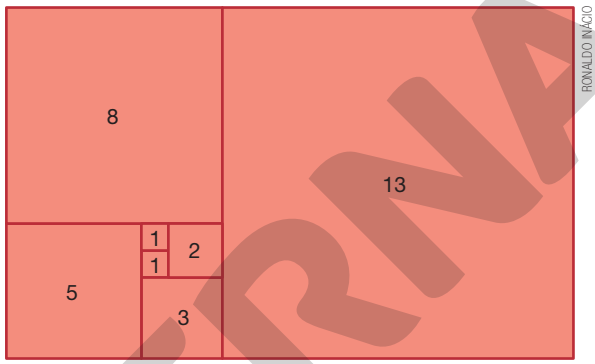
b) Para realizar esse trabalho, serão compradas latas de tinta com capacidade de 3,6 ℓ. Sabendo que o preço de cada lata de tinta é R$ 29,50, determine quantos reais, no mínimo, serão gastos com a compra das tintas nessa etapa. R$ 236,00

3 De acordo com as medidas indicadas, calcule a área total da figura, sabendo que os polígonos em vermelho, em azul e em amarelo são, respectivamente, retângulo, paralelogramo e losango.
608 cm²



RONALDO INÁCIO

4 Um dos fenômenos que podem ser observados na natureza é a presença da chamada sequência de Fibonacci, como o padrão de crescimento de algumas plantas e de outros seres vivos. Nela, o 1º e o 2º termos são iguais a 1, e cada termo seguinte é obtido por meio da adição dos dois antecedentes $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$. Uma das maneiras de obter a sequência de Fibonacci é por meio da justaposição de quadrados seguindo o padrão proposto.



RONALDO INÁCIO

Na figura, o comprimento do lado de cada quadrado está indicado em seu interior.

Dessa maneira, obtemos a sequência de Fibonacci, que, nesse caso, está escrita em função do comprimento do lado de cada quadrado. Considerando que o comprimento dos lados de cada quadrado apresentado na figura acima está em metros, calcule a área total da figura obtida ao justapor o quadrado que corresponde, na sequência de Fibonacci, ao:

a) 8º termo 714 m²

b) 9º termo 1 870 m²

No contexto

5 Na página **115**, foi apresentada a área desmatada anualmente da Amazônia Legal de 2004 a 2018.

a) Ao todo, quantos quilômetros quadrados da Amazônia Legal foram desmatados nesse período? 150 573 km²

b) O desmatamento realizado nesse período corresponde à área de, aproximadamente, quantos campos de futebol com 68 m de largura e 105 m de comprimento?
21 088 655 campos de futebol

6 Qual é a área de um paralelogramo cujos ângulos internos são retos e a medida do comprimento de cada lado é 12 cm? 144 cm²

7 Considere o retângulo $ABCD$ com $AB = 2 \cdot BC$ e $AC = 6\sqrt{5}$ cm. Qual é a área do losango cujos vértices são os pontos médios dos lados do retângulo $ABCD$? 36 cm²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

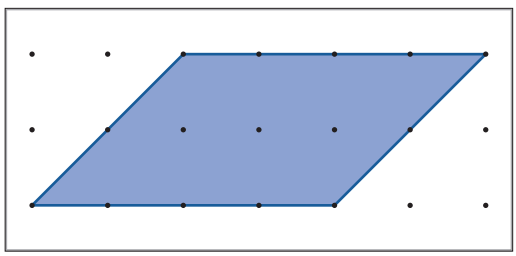
8 Em 1899, o matemático Georg Alexander Pick publicou uma fórmula válida para a área de uma região determinada por um polígono cujos vértices são pontos de uma rede no plano (conjunto de pontos dispostos de maneira regular vertical e horizontalmente, tal que a menor distância entre dois pontos é igual a 1 u).

A fórmula é dada pela expressão:

$$A = 0{,}5 \cdot B + C - 1$$

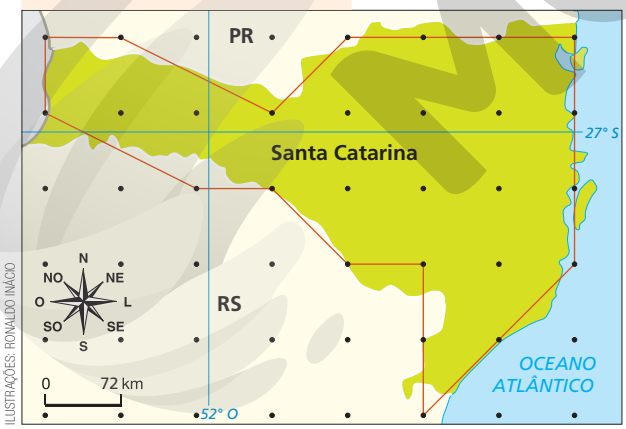
Em que A indica a área da região, B, a quantidade de pontos da rede situados sobre o polígono que determina a região e C, a quantidade de pontos da rede situados na região interior do polígono.

a) Calcule, por meio da fórmula de Pick, a área da figura abaixo. 8 u



b) Uma curiosa aplicação da fórmula está no cálculo aproximado de áreas utilizando mapas geográficos. Por exemplo, para estimar a área de Santa Catarina, pela fórmula de Pick, basta construir uma rede de pontos sobre o mapa, cuja menor distância entre dois pontos seja 1 cm, e traçar um polígono com vértices na rede que mais se assemelhe ao estado.

Estado de Santa Catarina

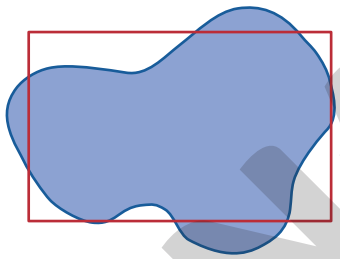


Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro, 2016. p. 176.

Por meio da fórmula de Pick e com auxílio do mapa acima, calcule a área aproximada de Santa Catarina. Compare sua resposta com a área de Santa Catarina estimada pelo IBGE: 95 346,181 km^2. 88 128 km^2; Resposta pessoal.

9 Para obter a área aproximada da região R, pode-se construir uma rede de pontos sobre ela, cuja menor distância entre dois pontos seja 1 cm, e traçar um polígono com vértices na rede que mais se assemelhe à região. Em seguida, aplica-se a fórmula de Pick.

Outra maneira de obter essa aproximação é construir, sobre a região, um retângulo cuja área seja aproximadamente igual à área de R, medir o comprimento dos lados do retângulo construído e calcular sua área.



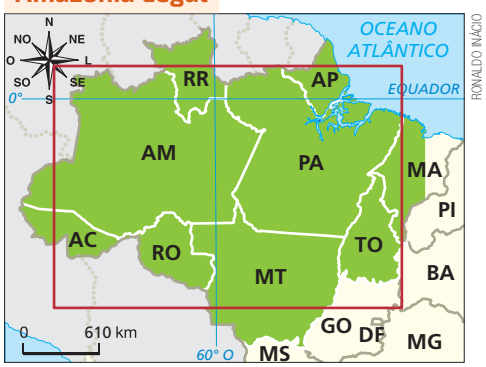
Note que as regiões que ficam fora do retângulo compensam, mais ou menos, os espaços vazios do interior.

Com o auxílio de uma régua, meça o comprimento dos lados do retângulo e determine a área aproximada da região R. 10 cm^2

No contexto

10 Para determinar a área aproximada da Amazônia Legal, Aroldo utilizou o método apresentado no problema anterior.

Amazônia Legal



Fonte de pesquisa: <http://geoftp.ibge.gov.br/cartas_e_mapas/mapas_regionais/sociedade_e_economia/integrado_zee_amazonia_legal/amazonia_administrativo.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2020.

a) Meça os lados do retângulo construído por Aroldo e determine a área aproximada da Amazônia Legal. 5 299 200 km^2

b) No problema 5 da página anterior, você determinou a área total desmatada da Amazônia Legal de 2004 até o fim de 2018. Aproximadamente, quantos por cento da área da Amazônia Legal foram desmatados nesse período? aproximadamente 2,84%

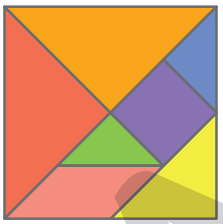
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

10 Área do triângulo e de polígonos regulares

O mundo dos quebra-cabeças

O principal objetivo ao montar um quebra-cabeça é combinar as partes fragmentadas de modo que componham um todo preestabelecido, usando para isso diversas estratégias. Entre os inúmeros tipos de quebra-cabeça, um dos mais famosos, e talvez o mais antigo, é o tangram, que surgiu na China há mais de 4 mil anos. A união de suas sete peças forma um quadrado.



MARYANE YOTO SILVA

Tangram.

Leia o texto a seguir, que apresenta uma das várias lendas sobre o surgimento desse quebra-cabeça.

BNCC

- EM13MAT307
- EM13MAT315
- EM13MAT405

Conta a lenda que um jovem chinês despedia-se de seu mestre para fazer uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou a ele um espelho de forma quadrada e disse:

– Com esse espelho você registrará tudo o que vir durante a viagem para me mostrar na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

– Mas mestre, como, com um simples espelho, poderei mostrar-lhe tudo o que encontrar durante a viagem?

No momento em que fazia esta pergunta, o espelho caiu de suas mãos e quebrou-se em sete peças [...]

Então o mestre disse:

– Agora você poderá, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. *Matemática de 0 a 6*: figuras e formas. Porto Alegre: Artmed, 2003. p. 104.



Reconfigurar as peças do tangram significa mudá-las de posição para obter figuras com outros formatos.

FOTOMONTAGEM DE GUSTAVO PEDROSA. FOTOS: 1.MISTLETOE/SHUTTERSTOCK; 2.KOTOFFEI/SHUTTERSTOCK; 3.JOHN LOCK/SHUTTERSTOCK; 4.BANKRX/SHUTTERSTOCK; 5.SARUNYU_FOTO/SHUTTERSTOCK; 6.ELINA LI/SHUTTERSTOCK; 7.BANKRX/SHUTTERSTOCK; 8.DAIQUIRI/SHUTTERSTOCK; 9.MRIMAN/SHUTTERSTOCK; 10.BANKRX/SHUTTERSTOCK; 11.ELINA LI/SHUTTERSTOCK; 12.PRACHAYA ROEKDEETHAWEESAB/SHUTTERSTOCK; 13.SYLFIDA/SHUTTERSTOCK

Assim como o discípulo da lenda, podemos obter muitas figuras a partir de reconfigurações das peças do tangram.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

> Ao reconfigurar as sete peças do tangram, obtemos outras figuras. Essas figuras têm a mesma área do quadrado formado pela união das sete peças desse quebra-cabeça? Justifique sua resposta.

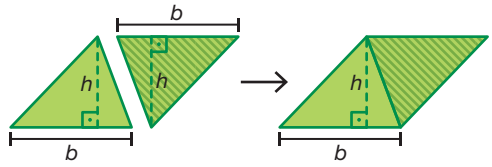
Sim. Espera-se que os alunos respondam que as figuras têm a mesma área porque, para obtê-las, as sete peças do tangram foram reconfiguradas.

Em algumas situações, ao reconfigurarmos uma figura, fica mais fácil calcular sua área. Nas próximas páginas, estabeleceremos as fórmulas para o cálculo da área de algumas figuras geométricas e determinaremos a área de outras figuras utilizando o método da reconfiguração.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área do triângulo

Considere o triângulo de base b e altura h, em que b e h são números reais positivos. Com outro triângulo congruente a esse, podemos compor um paralelogramo de altura h e base b.



A área A_p do paralelogramo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_p = b \cdot h$.

Como a área A do triângulo é igual à metade da área do paralelogramo, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

A área de um triângulo de base b e altura h é igual a $\frac{b \cdot h}{2}$.

Triângulo é todo polígono de três lados e três ângulos internos. Aquele em que um dos ângulos internos é reto, chamamos **triângulo retângulo**; o que possui todos os lados com comprimentos iguais, chamamos **triângulo equilátero**.

Também podemos calcular a área de um triângulo conhecendo apenas os comprimentos de seus três lados.

Diga aos alunos que o semiperímetro corresponde à metade da soma dos comprimentos de todos os lados de um polígono.

No triângulo ao lado, a, b e c são os comprimentos dos lados.



Utilizando o semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$, podemos demonstrar que a área A desse triângulo pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

A fórmula $A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ para o cálculo da área de um triângulo é conhecida como fórmula de Herão, em homenagem ao matemático Herão de Alexandria, que viveu em algum período entre 150 a.C. e 250 d.C. Em sua obra **A métrica**, são tratadas as áreas de várias figuras planas e encontra-se a dedução dessa fórmula.

No caso do triângulo equilátero, podemos ainda calcular a área por meio de outra fórmula.

Calculamos a altura h e a área A de um triângulo equilátero em função do comprimento a do lado utilizando, respectivamente, as fórmulas $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

A Prove que a afirmação apresentada é verdadeira, ou seja, que a altura h e a área A de um triângulo equilátero, em função do comprimento a do lado, podem ser expressas, respectivamente, por $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

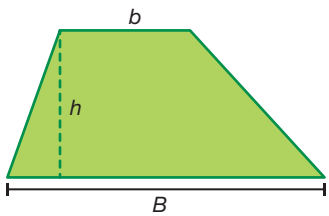
Resposta no Suplemento para o professor.

B Escreva um algoritmo que possibilite calcular a área de um triângulo equilátero, dado o comprimento de sua altura. Em seguida, organize-o em um fluxograma. Resposta no Suplemento para o professor.

Área do trapézio

O processo de cálculo da área de um polígono qualquer é facilitado quando fazemos decomposições em polígonos como triângulos, retângulos, paralelogramos ou qualquer outro polígono cuja área é conhecida.

Considere o trapézio de base maior B, base menor b e altura h, em que B, b e h são números reais positivos.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

C Prove que a afirmação apresentada é verdadeira, ou seja, que a área A de um trapézio de base maior B, base menor b e altura h é igual a $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$.

Resposta no Suplemento para o professor.

Trapézio é todo quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos.

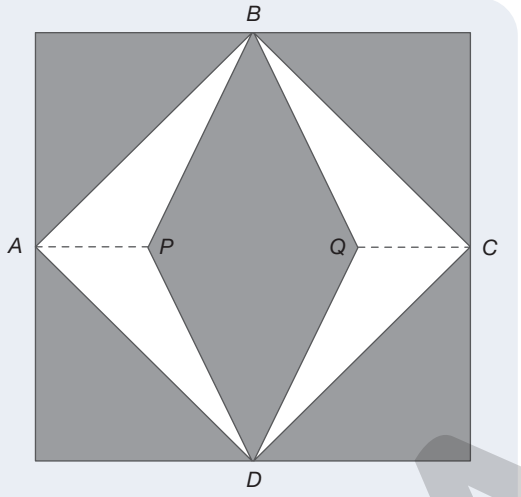
A área de um trapézio de base maior B, base menor b e altura h é igual a:

$$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R1 (Enem, 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura ao lado.



RONALDO INÁCIO

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50 b) R$ 35,00 c) R$ 40,00 d) R$ 42,50 e) R$ 45,00

Resolução

No problema R1, por se tratar de uma questão do Enem, embora estejamos usando "comprimento do lado", por exemplo, aparece a palavra "medindo" para se referir ao comprimento do lado dos quadrados que compõem o vitral. Ao utilizar o termo "mede" nesse problema, essa medida refere-se ao comprimento do segmento.

- Área da parte mais clara.

Essa parte pode ser decomposta em 4 triângulos congruentes cujo comprimento da base é AP, ou seja, $\frac{1}{4}$ m, e o comprimento da altura é igual à metade do comprimento do lado do quadrado, ou seja, $\frac{1}{2}$ m. Logo, sua área, em metros quadrados, é:

$$A_1 = 4 \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

- Área da parte sombreada.

A área, em metros quadrados, dessa parte corresponde à diferença da área do quadrado, em metros quadrados, e a área da parte mais clara, em metros quadrados, ou seja:

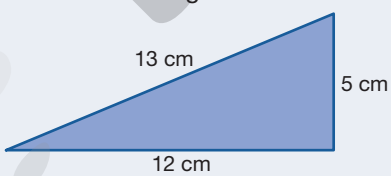
$$A_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Segue que os custos dos materiais são:

$$A_1 \cdot 50 + A_2 \cdot 30 = \frac{1}{4} \cdot 50 + \frac{3}{4} \cdot 30 = 35$$

Desse modo, o custo dos materiais usados na confecção de um vitral é R$ 35,00. Portanto, a alternativa correta é a **b**.

R2 Calcule a área do triângulo.



RONALDO INÁCIO

Se julgar necessário, lembre os alunos de que a recíproca do Teorema de Pitágoras também é válida.

Note que o triângulo é retângulo $\left(13^2 = 12^2 + 5^2\right)$, com 12 cm de base e 5 cm de altura. Logo, outra maneira de calcular sua área é:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Resolução

Utilizando a fórmula do semiperímetro para $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, temos:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{5 + 12 + 13}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} =$$

$$= \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{900} = 30$$

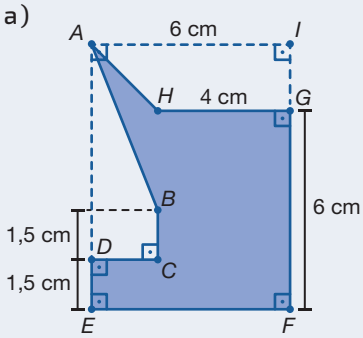
Portanto, a área do triângulo é 30 cm^2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

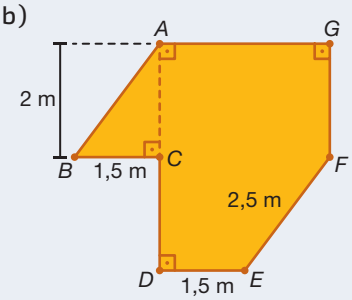
MODERNA

R3 Calcule a área de cada polígono a seguir.

a)

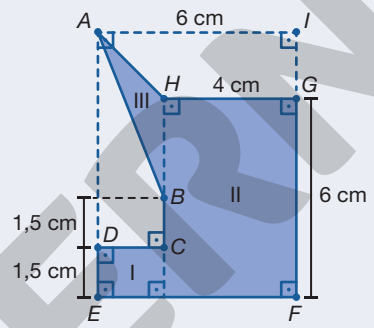


b)



Resolução

a) Inicialmente, vamos decompor o polígono *ABCDEFGH* em outros cuja expressão de cálculo de área conhecemos. Nesse caso, obtemos o retângulo I, o retângulo II e o triângulo III.



Deste modo, a área do polígono *ABCDEFGH*, a qual indicaremos por *A*, é igual a:

$$A = A_I + A_{II} + A_{III}$$

em que A_I, A_{II} e A_{III} indicam, respectivamente, a área do retângulo I, do retângulo II e do triângulo III. Assim:

$$A = (6 - 4) \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 6 + \frac{(6 - 1{,}5 - 1{,}5) \cdot (6 - 4)}{2}$$

$$A = 3 + 24 + 3$$

$$A = 30$$

Portanto, a área do polígono *ABCDEFGH* é igual a 30 cm².

b) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos:

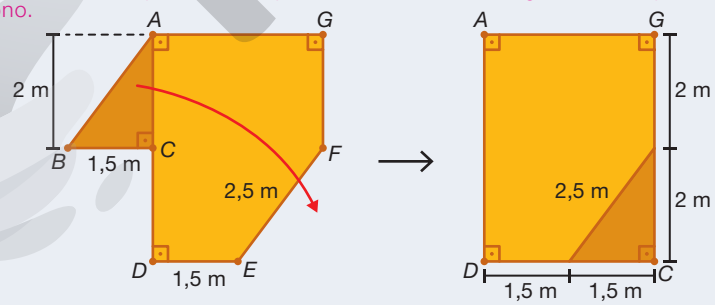
$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 1{,}5^2 + 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)^2 = 2{,}25 + 4 \Rightarrow AB = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$$

Note que $AB = 2{,}5$, pois $AB > 0$.

Como $AB = 2{,}5$ cm, podemos reconfigurar o polígono *ABCDEFG*, transladando o triângulo *ABC*, de maneira que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ coincidam. Desse modo, obtemos o retângulo *ADCG*, cuja área, a qual indicaremos por A_r, sabemos calcular.

Se achar necessário, ao trabalhar o item **b**, lembre com os alunos algumas transformações geométricas, a fim de que eles compreendam de maneira significativa o processo de reconfiguração do polígono.



Assim:

$$A_r = (1{,}5 + 1{,}5) \cdot (2 + 2) = 3 \cdot 4 = 12$$

Portanto, a área do retângulo *ADCG* é igual a 12 m² e, consequentemente, a área do polígono *ABCDEFG* é igual a 12 m².

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

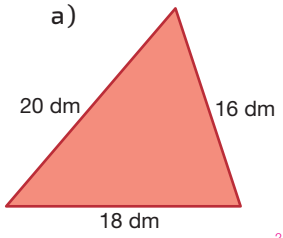
MODERNA

Exercícios e problemas

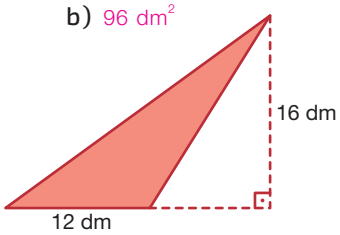
Anote as respostas no caderno.

1 Calcule a área de cada triângulo.

a)

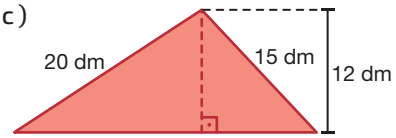


b) 96 dm²



aproximadamente 136,8 dm²

c)



150 dm²

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

2 Utilizando a fórmula de Herão, calcule a área de um triângulo de lados:

a) 5 m, 7 m e 4 m $4\sqrt{6}$ m²

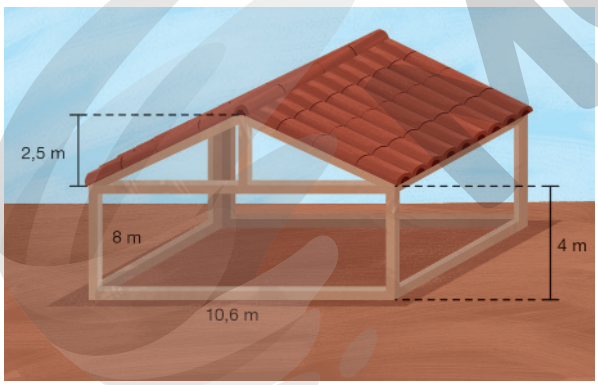
b) 12 dm, 15 dm e 9 dm 54 dm²

c) 2 km, 3 km e 4 km $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ km²

d) 14 cm, 16 cm e 10 cm $40\sqrt{3}$ cm²

3 Em um triângulo retângulo, o comprimento de um dos catetos é $\sqrt{3}$ cm e o da hipotenusa, $2\sqrt{2}$ cm. Determine o comprimento do outro cateto e a área desse triângulo. $\sqrt{5}$ cm; $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm²

4 Em certo sítio, o proprietário construiu uma estrutura de madeira, como ilustrada abaixo, que será utilizada como armazém. Este ocupará uma superfície retangular e suas paredes, portas e janelas serão construídas com tábuas de madeira.

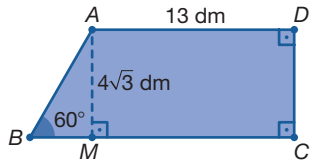


LEO GIBRAN

a) Qual será a área da superfície ocupada por esse armazém? 84,8 m²

b) Sabendo que as portas e janelas ocuparão 8 m² e que as vigas verticais, utilizadas na estrutura, são perpendiculares às vigas horizontais, determine quantos metros quadrados de madeira, no mínimo, serão necessários para construir as paredes desse armazém. 167,3 m²

5 Calcule a área do trapézio a seguir. $60\sqrt{3}$ dm²

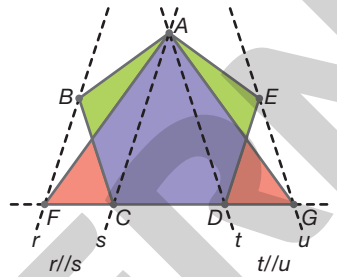


RONALDO INÁCIO

6 Classifique a afirmativa a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, justifique sua resposta.

Resposta no final do livro.

"Na figura, as áreas do pentágono *ABCDE* e do triângulo *AFG* são iguais."

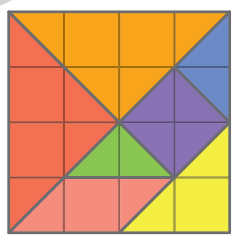


RONALDO INÁCIO

7 Qual é o comprimento da altura de um triângulo equilátero cuja área é $9\sqrt{3}$ cm²? $3\sqrt{3}$ cm

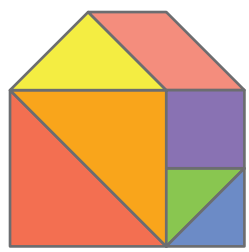
No contexto

8 Observe o tangram.



Tangram em uma malha quadriculada.

Vimos anteriormente que com as 7 peças do tangram podemos formar várias figuras, como o hexágono abaixo.



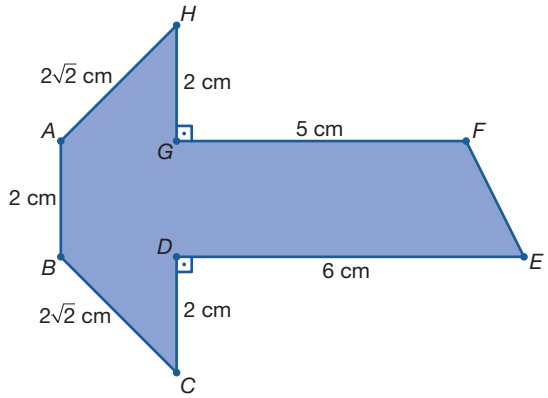
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Determine a área desse hexágono, sabendo que a peça em forma de paralelogramo (peça não quadrada) possui 10 cm² de área. 80 cm²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODENA

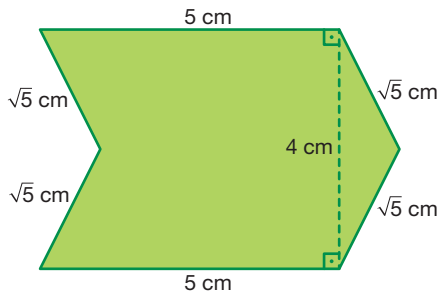
9 Sabendo que $\overline{DE} // \overline{GF}$ e que os pontos *A*, *G* e *F* são colineares, assim como os pontos *B*, *D* e *E*, determine a área do polígono *ABCDEFGH*.
19 cm²



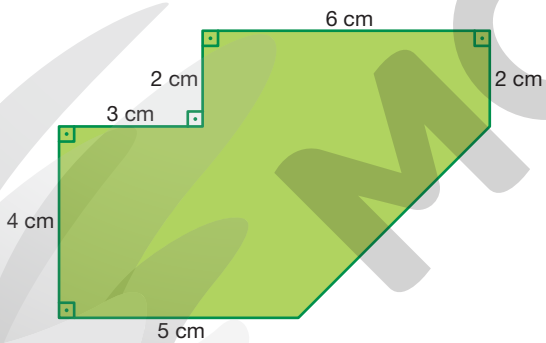
RONALDO INÁCIO

10 Em cada item, determine a área do polígono.

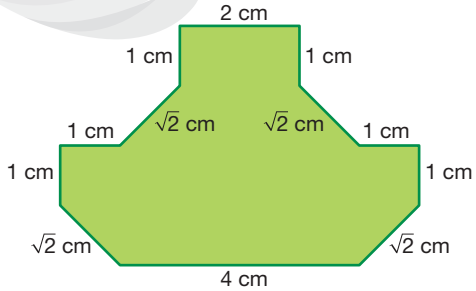
a) 20 cm²



b) 40 cm²

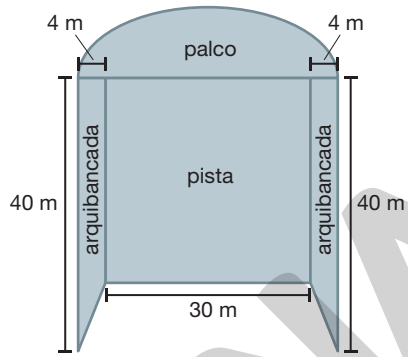


c) 16 cm²



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

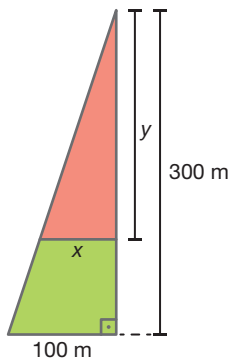
11 Para comemorar o aniversário de certa cidade, haverá um *show* musical. Os espaços destinados ao público, nesse evento, têm formato de trapézio retângulo (arquibancadas) e de quadrado (pista). Veja a seguir o esquema que representa o local onde esse evento será realizado.



RONALDO INÁCIO

Para uma melhor movimentação do público, foi estipulado que haja, no máximo, 6 pessoas por metro quadrado. Diante dessas informações, determine o público máximo que esse evento poderá receber. 7 080 pessoas

12 Certo agricultor, que cultiva tomates e alfaces, possui um terreno triangular. Ele dividiu esse terreno em duas partes: uma em formato de triângulo retângulo e outra em formato de trapézio, como representado na imagem.



RONALDO INÁCIO

Sabendo que, nessa divisão, ambas as partes têm áreas iguais, determine os valores de *x* e *y*.
$x = 50\sqrt{2}$ m e $y = 150\sqrt{2}$ m

13 Considere o quadrado *ABCD*, cuja área é 9 cm², e os pontos *F* e *G* pertencentes, respectivamente, às diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ desse quadrado, de maneira que $\overline{FG}$ seja paralelo ao lado $\overline{AB}$. Sabendo que *E* é o ponto de interseção dessas diagonais e que $EF = \frac{1}{3} AB$, determine a área do triângulo *EFG*. 0,5 cm²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



SANDER VAN DER WERF/ SHUTTERSTOCK

Diversos métodos e instrumentos são empregados na tarefa de medição de áreas, como a utilização de aparelhos GPS, medidores a *laser* e fotos aéreas e por satélites, produzindo resultados precisos e ágeis.

14 O surgimento das medições de área está relacionado à necessidade, no decorrer da história da humanidade, que as civilizações tiveram de demarcar territórios, sobretudo nas regiões destinadas ao plantio.

No Egito Antigo, por exemplo, às margens do rio Nilo, onde essa civilização se desenvolveu, as terras que estavam demarcadas e repartidas entre os camponeses tinham, anualmente, parte de sua extensão inundada pelo rio, que, ao voltar ao nível normal, deixava o solo fértil e propício ao plantio, mas também carregava consigo as demarcações dos lotes. Para repartir novamente essas terras, agrimensores realizavam medições de área, devolvendo aos camponeses a parte correspondente que estava submersa. Esses agrimensores utilizavam cordas com unidades de comprimento preestabelecidas na realização do trabalho e, por consequência, ficaram conhecidos como "esticadores de cordas".

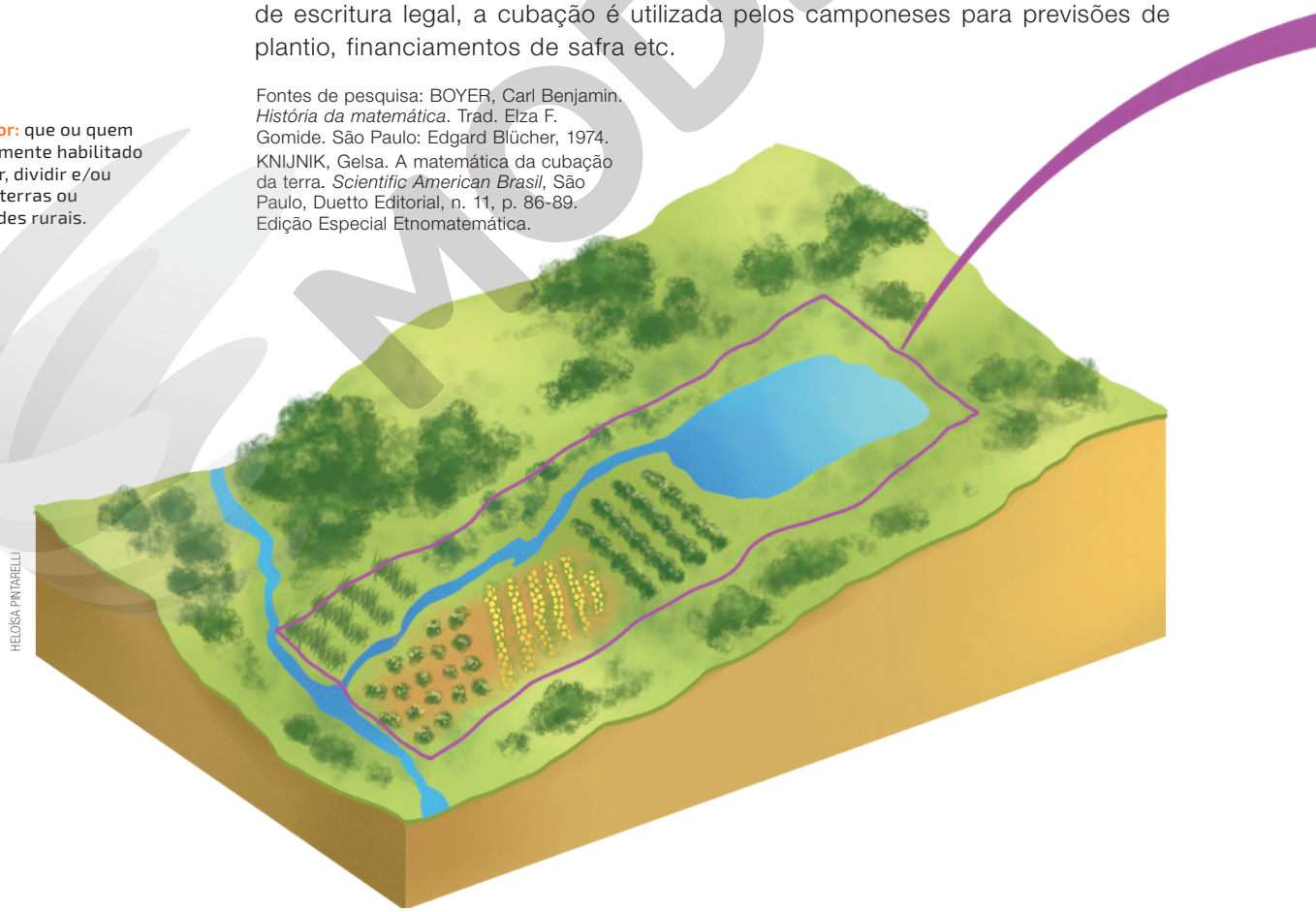
Atualmente há, ainda, principalmente em algumas populações camponesas, o hábito de realizar medições de terras utilizando métodos de aproximação. Um desses métodos, chamado cubação, é utilizado em diversas regiões do Brasil.

Em registros antigos, como no Papiro de Rhind, há diversos relatos e problemas envolvendo áreas de polígonos, círculos, entre outros. Esses registros evidenciam o quanto já se dava importância a medições de área. O problema da quadratura do círculo, em que se pedia a construção de um quadrado com a mesma área de um círculo dado, é um dos mais emblemáticos nesse sentido, principalmente porque sua resolução não é possível; apenas uma aproximação, utilizando régua e compasso.

A cubação consiste em medir o contorno do terreno cuja área será calculada, considerando seus acidentes de relevo (inclinações, ondulações, entre outros), geralmente com o auxílio de cordas, assim como os antigos egípcios faziam. A área obtida nesse sistema costuma ser denominada efetiva ou desenvolvida. Embora esse método divirja da medição topográfica, na qual é realizada a projeção do contorno do terreno sobre um plano horizontal, servindo para fins de escritura legal, a cubação é utilizada pelos camponeses para previsões de plantio, financiamentos de safra etc.

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
KNIJNIK, Gelsa. A matemática da cubação da terra. *Scientific American Brasil*, São Paulo, Duetto Editorial, n. 11, p. 86-89. Edição Especial Etnomatemática.

Agrimensor: que ou quem está legalmente habilitado para medir, dividir e/ou demarcar terras ou propriedades rurais.

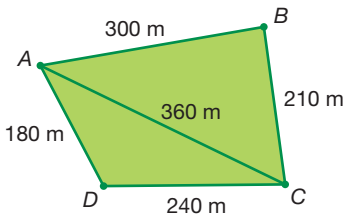


HELOÍSA PINTARELLI

MODERNA

No método da cubação, faz-se uso de um procedimento já utilizado no Egito Antigo, que consiste em aproximar figuras para facilitar o cálculo da área aproximada do terreno. No exemplo a seguir, a região indicada pelo quadrilátero *ABCD* é aproximada por um retângulo *A'B'C'D'*.

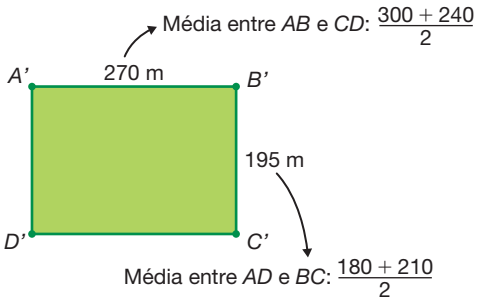
Região real



$A_1 = \sqrt{435 \cdot 135 \cdot 225 \cdot 75} + \sqrt{390 \cdot 210 \cdot 30 \cdot 150} = 50\,677{,}56$

Área real: 50 677,56 m²

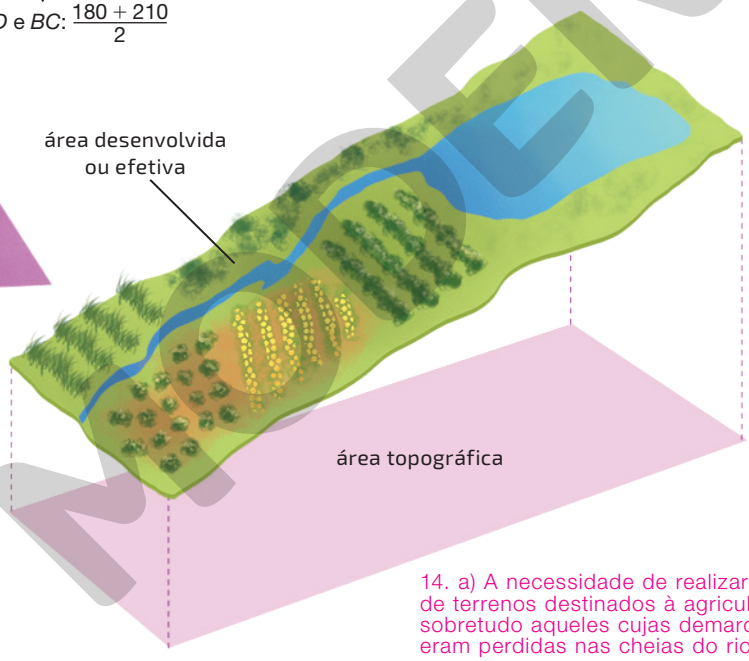
Região aproximada



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

$A_2 = 270 \cdot 195 = 52\,650$

Área aproximada: 52 650 m²



14. b) O quadrilátero *ABCD* foi decomposto em dois triângulos: *ABC* e *ADC*. O cálculo da área desses triângulos foi obtido por meio da fórmula de Herão $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que *a*, *b* e *c* são os comprimentos dos lados, e $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

14. a) A necessidade de realizar medições de terrenos destinados à agricultura, sobretudo aqueles cujas demarcações eram perdidas nas cheias do rio Nilo.

De acordo com as informações apresentadas, responda às questões.

a) Que fato levou o Egito Antigo a obter grande desenvolvimento no cálculo de áreas?

b) Qual processo foi utilizado para o cálculo da área real da região a partir do quadrilátero *ABCD* no esquema apresentado?

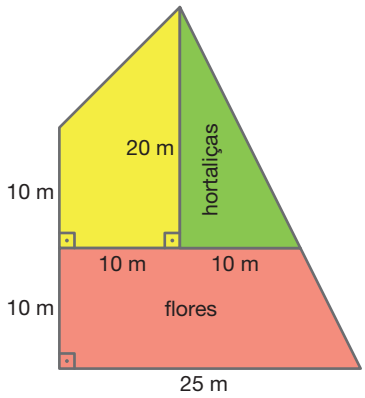
c) No esquema apresentado, em relação à área real da região, o erro da área aproximada foi por volta de quantos por cento? aproximadamente 3,9%

d) Suponha que um terreno tenha a forma de um trapézio isósceles com os lados medindo 500 m, 200 m, 500 m e 800 m. Qual é a área aproximada desse terreno, pelo método da cubação? 250 000 m²

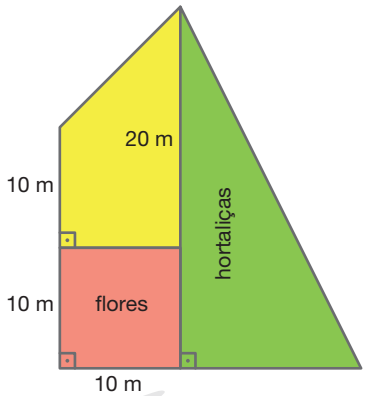
e) Construa um quadrilátero que não seja um paralelogramo ou um trapézio e indique as medidas de seus lados. Depois, troque com um colega para que cada um determine a área aproximada, pelo método da cubação, do quadrilátero construído pelo outro. Resposta pessoal.

MODERNA

15 Na casa de Eunice, há uma região destinada ao plantio de flores e outra, ao plantio de hortaliças.



Devido à alta exposição de suas flores ao sol, Eunice vai remanejar as regiões de plantio. Veja no esquema como será a nova distribuição.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

De acordo com as informações apresentadas, após o remanejamento, a região destinada ao plantio: alternativa e

a) de flores diminuirá em 125%.

b) de flores diminuirá em 10% e a de hortaliças aumentará em 50%.

c) de hortaliças diminuirá em 50% e o de flores aumentará em, aproximadamente, 55,56%.

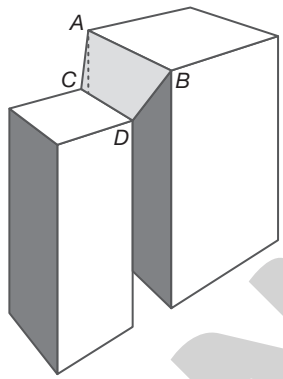
d) de hortaliças diminuirá em 20%.

e) de flores diminuirá em, aproximadamente, 55,56% e o de hortaliças aumentará em 125%.

16 Considere o losango de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, inscrito em uma circunferência de centro O e raio 2 cm. Determine a área do triângulo OEF, em que E é ponto médio de $\overline{AB}$ e F, de $\overline{BC}$.
1 cm²

17 Escreva um algoritmo que determine a área de um triângulo equilátero, dado seu perímetro. Em seguida, organize-o em um fluxograma.
Resposta no final do livro.

18 (Fuvest-SP, 2019) Uma empresa estuda cobrir um vão entre dois prédios (com formato de paralelepípedos reto-retângulos) que têm paredes laterais paralelas, instalando uma lona na forma de um quadrilátero, com pontas presas nos pontos A, B, C e D, conforme indicação da figura.



RONALDO INÁCIO

Sabendo que a lateral de um prédio tem 80 m de altura e 28 m de largura, que a lateral do outro prédio tem 60 m de altura e 20 m de largura e que essas duas paredes laterais distam 15 m uma da outra, a área total dessa lona seria de: alternativa c

a) 300 m²

b) 360 m²

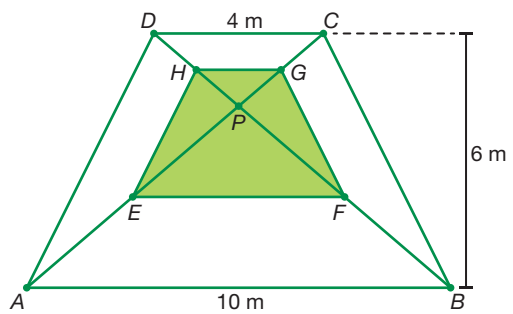
c) 600 m²

d) 720 m²

e) 1 200 m²

19 Desafio

Luiz deseja reduzir a área de seu jardim. Para se planejar, ele construiu o seguinte esquema, em que o jardim atual está representado pelo trapézio isósceles $ABCD$.



RONALDO INÁCIO

Sabendo que o novo jardim de Luiz está representado pelo trapézio $EFGH$ e que E, F, G e H são pontos médios de $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ e $\overline{DP}$, determine sua área. 10,5 m²

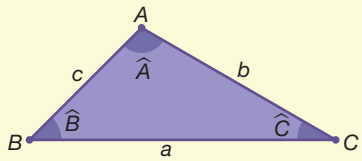
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Cálculo da área de um triângulo utilizando trigonometria

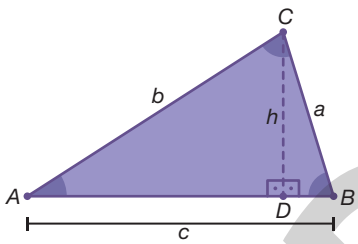
Nas páginas anteriores, vimos que a área S de um triângulo pode ser calculada por meio da fórmula $S = \frac{b \cdot h}{2}$, em que b indica o comprimento de um dos lados e h, o comprimento da altura relativa a esse lado. Estudaremos, agora, como calcular a área de um triângulo conhecendo os comprimentos de dois de seus lados e a medida do ângulo formado por eles.

Para todo triângulo ABC, sua área é dada pelo semiproduto dos comprimentos de dois lados quaisquer pelo seno do ângulo por eles formado.



$$S = \frac{bc \cdot \operatorname{sen} \hat{A}}{2} \qquad S = \frac{ac \cdot \operatorname{sen} \hat{B}}{2} \qquad S = \frac{ab \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{2}$$

Para demonstrar essas fórmulas, consideraremos o triângulo acutângulo ABC.



Do triângulo retângulo ACD, temos:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen} \hat{A}$$

Como a área S do triângulo ABC é dada por $S = \frac{c \cdot h}{2}$, segue que:

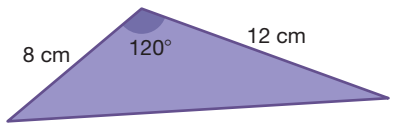
$$S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c \cdot \overbrace{b \cdot \operatorname{sen} \hat{A}}^{h}}{2} \Rightarrow S = \frac{bc \cdot \operatorname{sen} \hat{A}}{2}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar as fórmulas $S = \frac{ac \cdot \operatorname{sen} \hat{B}}{2}$ e $S = \frac{ab \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{2}$.

Para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos, podemos demonstrar as fórmulas de maneira semelhante à apresentada.

Exemplo

Vamos calcular a área S do triângulo a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

$$S = \frac{8 \cdot 12 \cdot \operatorname{sen} 120^\circ}{2} = \frac{8 \cdot 12 \cdot \overbrace{\operatorname{sen} 60^\circ}^{\operatorname{sen}(180^\circ - 120^\circ)}}{2} = \frac{8 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$$

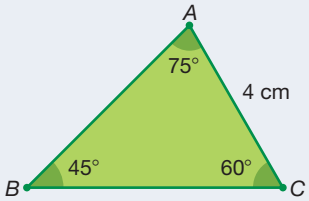
$$= 24\sqrt{3} \simeq 41{,}57 \Rightarrow S \simeq 41{,}57 \text{ cm}^2$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas resolvidos

R4 Determine a área do triângulo ao lado.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Inicialmente, calculamos o comprimento do lado $\overline{AB}$ utilizando a lei dos senos.

$$\frac{AB}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{AC}{\operatorname{sen} 45^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AB = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}\ \text{cm}$$

Em seguida, aplicamos a fórmula da área de um triângulo qualquer.

$$S = \frac{4 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \operatorname{sen} 75^\circ}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 0{,}966}{2} \simeq 9{,}46$$

Portanto, a área do triângulo é aproximadamente 9,46 cm².

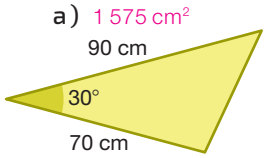
O valor de sen 75° pode ser consultado na tabela trigonométrica ou obtido em uma calculadora científica.

Exercícios e problemas

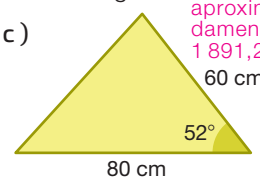
Anote as respostas no caderno.

20 Determine a área de cada triângulo.

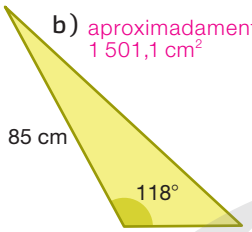
a) 1 575 cm²



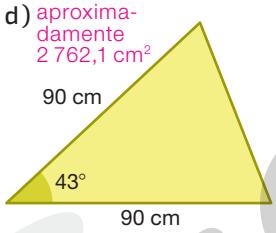
c) aproximadamente 1 891,2 cm²



b) aproximadamente 1 501,1 cm²



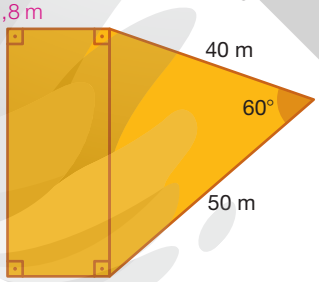
d) aproximadamente 2 762,1 cm²



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

21 Dois terrenos vizinhos, um retangular e outro triangular, possuem áreas iguais. De acordo com as medidas indicadas, determine as dimensões aproximadas do terreno retangular.

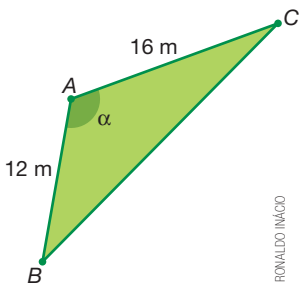
18,9 m e 45,8 m



RONALDO INÁCIO

22 A área do triângulo *ABC* é 83,1 m², e o ângulo α, formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, é obtuso. De acordo com as medidas indicadas na figura, calcule a medida de α.

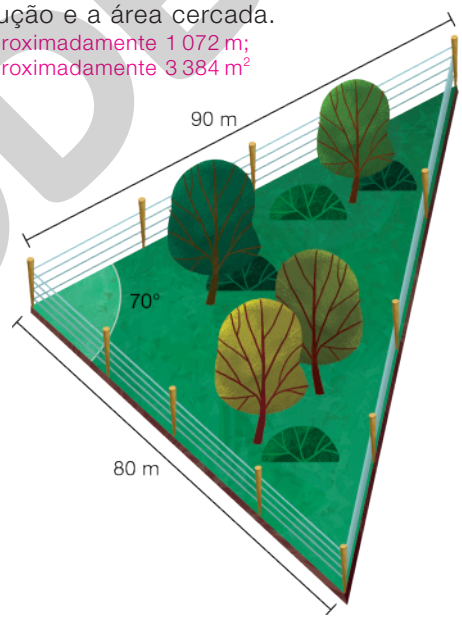
aproximadamente 120°



RONALDO INÁCIO

23 Uma cerca foi construída em volta de um terreno triangular em que dois dos lados têm 90 m e 80 m de comprimento e o ângulo formado entre eles mede 70°. Sabendo que a cerca possui 4 fios de arame em cada trecho, calcule o comprimento total de arame utilizado em sua construção e a área cercada.

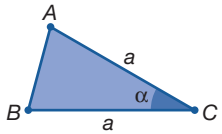
aproximadamente 1 072 m; aproximadamente 3 384 m²

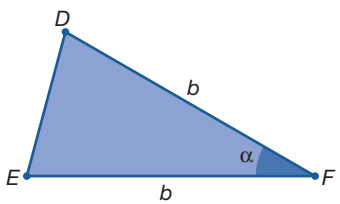


LEO GIBRAN

24 Sejam S_1 e S_2 as áreas dos triângulos *ABC* e *DEF*, respectivamente. Sabendo que $S_2 = 3 \cdot S_1$, calcule a razão $\frac{b}{a}$.

$\frac{b}{a} = \sqrt{3}$





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

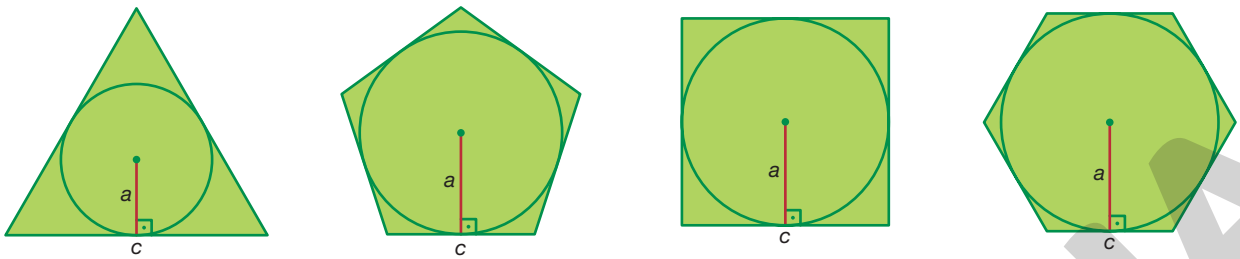
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

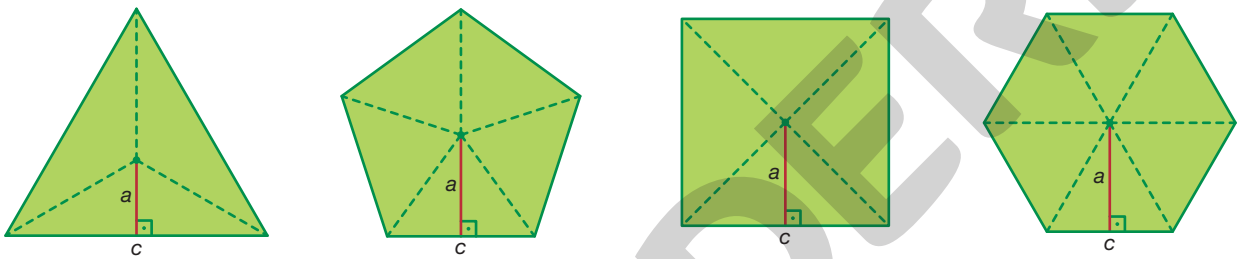
Área de polígonos regulares

Vimos que os polígonos regulares são aqueles que possuem todos os lados congruentes e também todos os ângulos internos congruentes.

Em todo polígono regular pode ser inscrita uma circunferência. O raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular é o **apótema** do polígono. Nos exemplos abaixo, *a* é o comprimento do apótema dos polígonos regulares.



Os polígonos regulares abaixo foram decompostos em triângulos isósceles congruentes.



Note que cada polígono de *n* lados foi decomposto em *n* triângulos congruentes. Podemos obter a área de cada um desses polígonos calculando a área de um triângulo e multiplicando o resultado pelo número de lados correspondentes.

Estudamos que, para calcular a área *A* de um triângulo, podemos multiplicar o comprimento da base *b* pelo da altura *h* e dividir o resultado por 2, isto é, utilizar a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. No caso dos triângulos em que os polígonos regulares foram decompostos, a base é um dos lados do polígono e a altura é o apótema.

Assim, podemos indicar a área *A* de um polígono regular de *n* lados com comprimento *c* da seguinte maneira:

$$A = n \cdot \frac{c \cdot a}{2}$$

Podemos escrever essa fórmula de outra maneira, ou seja:

$$A = \underbrace{\frac{n \cdot c}{2}}_{p} \cdot a \Rightarrow A = p \cdot a$$

em que *p* é o semiperímetro do polígono regular e *a* é o comprimento do apótema.

Na fórmula, $\frac{n \cdot c}{2}$ corresponde ao semiperímetro de um polígono regular, pois:

$$\frac{n \cdot c}{2} = \frac{\overbrace{c + c + c + \ldots + c}^{n \text{ fatores } c}}{2} = p$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

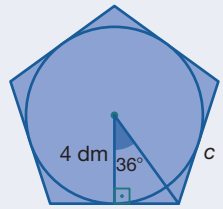
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

R5 Determine a área de um pentágono regular circunscrito a uma circunferência de raio 4 dm.

(Considere: $\text{tg}\,36° = 0{,}73$).

Resolução



O raio da circunferência determina o comprimento a do apótema do pentágono de lado c.

Note que, na figura, temos um triângulo retângulo de catetos medindo a e $\frac{c}{2}$. O ângulo central da circunferência, que corresponde a um dos ângulos do triângulo, mede $\frac{360°}{10} = 36°$. Assim, segue que:

$$\text{tg}\,36° = \frac{\frac{c}{2}}{4} \Rightarrow 0{,}73 = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 5{,}84$$

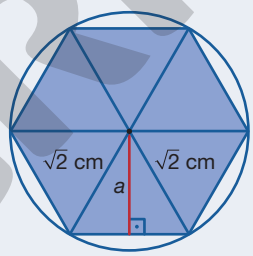
Dessa maneira, $c = 5{,}84$ dm e, consequentemente, a área do pentágono é:

$$A = n \cdot \frac{c \cdot a}{2} = 5 \cdot \frac{5{,}84 \cdot 4}{2} = 58{,}4$$

Portanto, a área do pentágono é aproximadamente $58{,}4\ \text{dm}^2$.

R6 Qual é a área de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ cm?

Resolução



O hexágono pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros de lado $\sqrt{2}$ cm, conforme a figura ao lado.

Podemos calcular a área do hexágono de duas maneiras.

1ª maneira

Inicialmente, obtemos o comprimento, em centímetros, do apótema do hexágono, utilizando a fórmula do comprimento da altura do triângulo equilátero.

$$h = a = \frac{c\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Em seguida, substituímos na fórmula $A = n \cdot \frac{c \cdot a}{2}$:

$$A = 6 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \cdot \sqrt{12}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Portanto, a área do hexágono é $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

2ª maneira

Calculamos a área de seis triângulos equiláteros de lado $\sqrt{2}$ cm.

$$A = 6 \cdot \underbrace{\frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}_{\substack{\text{área do} \\ \text{triângulo} \\ \text{equilátero}}} = 6 \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Portanto, a área do hexágono é $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Um triângulo equilátero possui três lados com comprimentos iguais, ou seja, é um caso particular de triângulo isósceles.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
MODERNA

Área de polígonos regulares com auxílio de *software* de geometria dinâmica

Nesta seção, calcularemos a área de polígonos regulares com o auxílio do *software* de Geometria dinâmica GeoGebra. Vamos, por exemplo, calcular a área de um hexágono regular de lados 5 cm. No Suplemento para o professor há mais informações sobre o *software* GeoGebra.

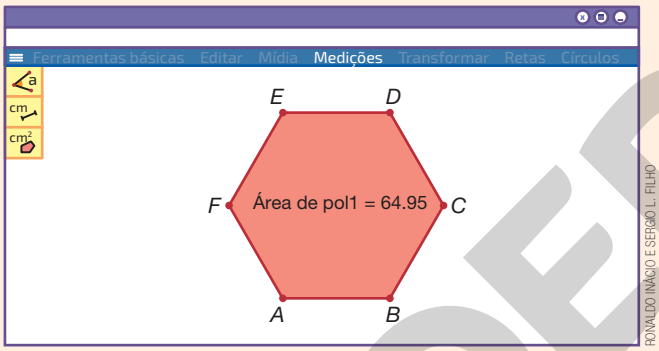
A Construa um segmento de reta $\overline{AB}$, tal que $AB = 5$ cm. Para isso, selecione a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo** e marque o ponto A.

B Na janela **Segmento com Comprimento Fixo**, digite o comprimento de $\overline{AB}$, nesse caso, 5.

C Utilizando a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos A e B.

D Na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de vértices do polígono, nesse caso, 6.

E Com a ferramenta **Área**, clique no hexágono construído.



Portanto, a área do hexágono regular de lados 5 cm é aproximadamente 64,95 cm^2.

A área obtida neste exemplo é uma aproximação com duas casas decimais. Para que seja apresentada uma aproximação com mais casas decimais, clique na aba **Global**, em **Configurações**, e selecione no item **Arredondamento** a quantidade de casas decimas desejadas.

Agora é com você!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 Calcule a área de um:

- triângulo equilátero de lados 6 cm.
- pentágono regular de lados 7 dm.
- hexágono regular de lados 2 m.
- dodecágono regular de lados 1 mm.

2 Junte-se a dois colegas e, utilizando um *software* de Geometria Dinâmica, determinem a área de um triângulo equilátero e de um pentágono regular cujo comprimento do apótema é, respectivamente, 7 cm e 3 dm.

3 Escreva um algoritmo que possibilite calcular a área de um polígono regular qualquer, dado o comprimento do apótema, a quantidade de lados e o comprimento de cada um deles. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

4 Escreva um programa em VisualG que resolva o problema proposto a seguir.

Determinar a área de um polígono regular qualquer, dado o comprimento de seu apótema, a quantidade de lados e o comprimento de cada um deles.

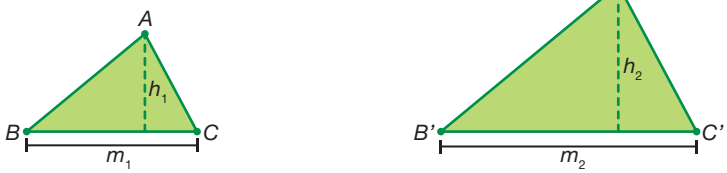
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Razão entre área de figuras planas

Você já estudou que quando dois polígonos são semelhantes, a razão entre o comprimento de seus lados correspondentes é igual. Vamos considerar os seguintes triângulos semelhantes.

Lembre-se de que a área de um triângulo pode ser calculada por meio da fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Como os triângulos são semelhantes, temos: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{h_1}{h_2} = k$ (razão de proporcionalidade)

Agora, vamos calcular a razão entre a área dos triângulos ABC e $A'B'C'$:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}} = \frac{\frac{m_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{m_2 \cdot h_2}{2}} = \frac{m_1 \cdot h_1}{m_2 \cdot h_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2$$

Note que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de proporcionalidade. Essa propriedade ocorre não somente para os triângulos, mas também para quaisquer duas regiões semelhantes.

Exemplo

As áreas de dois triângulos semelhantes são, respectivamente, 5 cm² e 45 cm². Sabendo que o comprimento do maior lado do 1º triângulo é 5 cm, podemos obter o comprimento do maior lado do 2º triângulo da seguinte maneira.

$$k^2 = \frac{45}{5} \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$$

Assim:

$$k = \frac{x}{5} \Rightarrow 3 = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 15$$

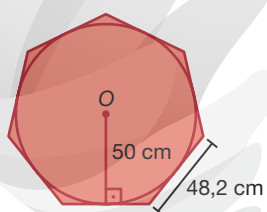
Portanto, o comprimento do maior lado do 2º triângulo é 15 cm.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

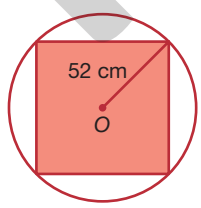
25 Em cada item, calcule a área do polígono regular.

a)



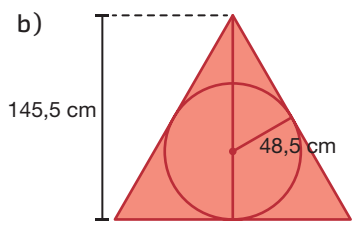
8 435 cm²

c)



5 408 cm²

b)

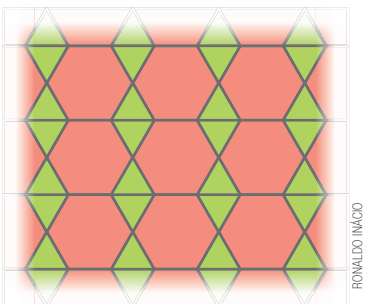


aproximadamente 12 222,6 cm²

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

26 **Desafio**

Em determinada praça de 3 000 m² de área, serão assentadas lajotas de dois formatos, hexágonos regulares e triângulos equiláteros, seguindo o padrão proposto.



RONALDO INÁCIO

De acordo com as informações e desconsiderando o desperdícios e o espaço do rejunte, calcule quantos metros quadrados de cada tipo de lajota serão utilizados para cobrir toda a área da praça.

Hexágonos regulares: 2 250 m²; triângulos equiláteros: 750 m².

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

27 Estudamos neste tema a fórmula para a área de um triângulo qualquer deduzida por Herão em sua obra *A métrica*. Ocorre que essa fórmula é válida pelo fato de que qualquer triângulo pode ser inscrito em uma circunferência, o que não ocorre, por exemplo, para todos os quadriláteros.

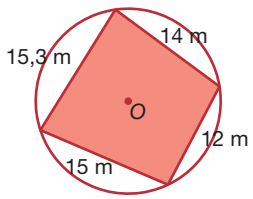
Em trabalhos posteriores, creditados a matemáticos hindus, foi deduzida uma extensão da fórmula de Herão, válida para quadriláteros que podem ser inscritos em uma circunferência. Essa fórmula pode ser escrita como:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

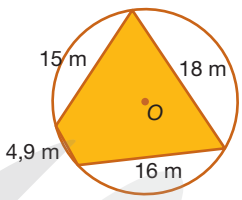
Em que a, b, c, d são os comprimentos dos lados do quadrilátero, p é o semiperímetro e A é a área.

Utilizando a fórmula acima, calcule a área aproximada de cada quadrilátero inscrito na circunferência de centro O.

a) 196,5 m²



b) 160,7 m²



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

28 (Enem, 2013) A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: <http://www.arq.ufsc.br/>. Acesso em: 3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em:

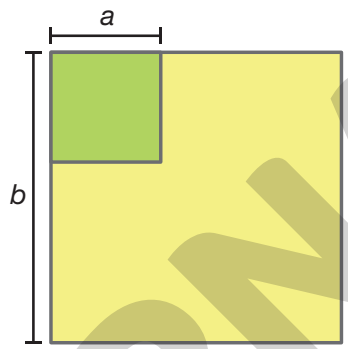
alternativa c

a) 4% c) 36% e) 96%

b) 20% d) 64%

29 Calcule a razão entre as áreas de dois decágonos regulares, sendo que os comprimentos de seus lados são, respectivamente, 9 cm e 3 cm. 9

30 Na figura estão ilustrados dois quadrados. Sabe-se que a razão entre a área da região em amarelo e a área da região em verde é 6. Com base nessas informações, determine a razão de proporcionalidade entre o quadrado maior e o menor e a razão entre suas áreas. Razão de proporcionalidade: $\sqrt{7}$; razão entre as áreas: 7.



RONALDO INÁCIO

31 A imagem representada abaixo, produzida pelo artista brasileiro Erico Santos, que ficou conhecido por suas obras com mulheres estilizadas com saias coloridas, tornando-se motivo de inspiração para outros artistas, tem dimensões 40 cm por 50 cm. Utilizando uma régua, meça as dimensões da reprodução e determine a razão R entre a área da imagem original e a da reprodução. $R \simeq 30{,}86$



ACERVO DO ARTISTA – COLEÇÃO PARTICULAR

SANTOS, Erico. *Colheita de Marcela*. 1992. Óleo sobre tela, 40 cm × 50 cm.

Na tarefa **28**, por se tratar de uma questão do Enem, embora estejamos usando "comprimento do lado", por exemplo, aparece a palavra "mediam" para se referir ao comprimento do lado da base retangular. Ao utilizar o termo "mede" nesse problema, essa medida refere-se ao comprimento do segmento.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

11 Área e as vagas de estacionamento destinadas aos idosos

Menos crianças, mais idosos

Em 1950, a quantidade de pessoas com 60 anos de idade ou mais no Brasil correspondia a cerca de 5% da população. Já em 2010, esse percentual era de aproximadamente 10%, e projeções sugerem que, em 2050, chegue aos 29%.

O envelhecimento da população brasileira está associado, entre outros fatores, ao aumento da esperança de vida ao nascer, que saltou de cerca de 69,8 anos em 2000 para, aproximadamente, 76,3 anos em 2018, e à redução da taxa de fecundidade. As projeções também mostram uma tendência à redução da população economicamente ativa (de 16 anos ou mais de idade), o que pode trazer escassez de trabalhadores, lentidão no crescimento econômico e desequilíbrio no sistema previdenciário.

Em uma perspectiva mais otimista, devemos enxergar o aumento da esperança de vida como algo positivo, uma vez que é consequência de avanços em saúde pública, educação e desenvolvimento econômico. Com planejamento adequado e adotando estratégias como alterações nas regras de aposentadoria, treinamento e oportunidades para trabalhadores mais idosos, os impactos citados podem ser minimizados.

BNCC
• EM13MAT307

Respeito ao idoso

O Estatuto do Idoso é destinado a regular diversos direitos dessa população no Brasil, direitos esses que devem ser respeitados. Independentemente disso, é necessário adotar atitudes no dia a dia que contribuam para uma vida melhor dos idosos.

FOTOMONTAGEM DE MAURÍCIO PLANEL. FOTOS: 1.LJUPCO SMOKOVSKI/SHUTTERSTOCK; 2.WORLD DAY/SHUTTERSTOCK; 3.KLETR/SHUTTERSTOCK; 4.ODUA IMAGES/SHUTTERSTOCK; 5.KLEBER CORDEIRO/SHUTTERSTOCK; 6.KAMIRA/SHUTTERSTOCK; 7.PAULO VILELA/SHUTTERSTOCK; 8.JUST2SHUTTER/SHUTTERSTOCK; 9.STOCKIMAGEFACTORY.COM/SHUTTERSTOCK; 10.STEFANOLUNARDI/SHUTTERSTOCK; 11.HAKAN AKDEMIR/SHUTTERSTOCK; 12.VINICIUS BACARIN/SHUTTERSTOCK; 13.MIA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 14.KONSTANTINOS69/SHUTTERSTOCK; 15.DACE KUNDRATE/SHUTTERSTOCK; 16.CARLA NICHIATA/SHUTTERSTOCK; 17.TUIPHOTOENGINEER/SHUTTERSTOCK; 18.LESIK VITALIY/SHUTTERSTOCK; 19.LIGHTFIELD STUDIOS/SHUTTERSTOCK; 20.ARTFULLY PHOTOGRAPHER/SHUTTERSTOCK; 21.LJUPCO SMOKOVSKI/SHUTTERSTOCK; 22.A.PAES/SHUTTERSTOCK



MODERNA

Vagas de estacionamento destinadas aos idosos

A Lei Federal nº 10.741, de 1º de outubro de 2003, que dispõe sobre o Estatuto do Idoso, em seu artigo 41, prescreve que:



DANIEL CYMBALISTA/PULSAR IMAGENS

Sinalização de solo de vaga exclusiva para idoso.

> Art. 41. É assegurada a reserva, para os idosos, nos termos da lei local, de 5% (cinco por cento) das vagas nos estacionamentos públicos e privados, as quais deverão ser posicionadas de forma a garantir a melhor comodidade ao idoso.
>
> BRASIL. Ministério da Justiça. Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003. Dispõe sobre o Estatuto do Idoso e dá outras providências. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 3 out. 2003. p. 3. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.741.htm>. Acesso em: 19 ago. 2020.

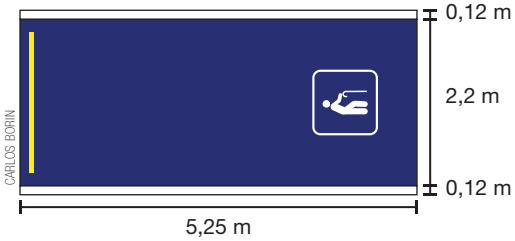
Para estacionar nas vagas destinadas a idosos, é obrigatório o uso da credencial de estacionamento específica. Qualquer cidadão com mais de 60 anos de idade pode emitir essa credencial.

A sinalização dessas vagas é vertical, com uma placa de sinalização, e horizontal, ou seja, por meio de um símbolo ou legenda de idoso, com numeração e marca delimitadora da vaga de estacionamento regular.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Em certo estacionamento há 500 vagas. Quantas dessas vagas, no mínimo, devem ser destinadas a idosos? 25 vagas

B Veja a seguir as dimensões das vagas destinadas a idosos em um estacionamento.



CARLOS BORIN

Para pintar essas vagas, o gerente do estacionamento contratou um profissional que cobra R$ 25,00 o metro quadrado. Quantos reais esse profissional cobrou para pintar uma dessas vagas? R$ 320,25

Para resolver esse problema, desconsidere a barra de proteção em amarelo.



Disponibilize seu assento para um idoso caso não haja outros disponíveis.

Ser consciente

A Você já presenciou alguma situação em que um idoso não teve seus direitos respeitados? Converse sobre isso com os colegas e o professor.
Resposta pessoal.

B Cite atitudes que podem contribuir para melhorar a qualidade de vida dos idosos.
Algumas possíveis respostas: ceder lugar em assentos ou em filas; auxiliar na travessia de ruas; visitar casas de repouso para idosos.

MODERNA

12 Área do círculo

Discos de vinil

Na era da alta tecnologia, quando, por exemplo, conseguimos armazenar milhares de músicas em um pequeno dispositivo, há quem ainda goste dos antigos discos de vinil, chamados “bolachões”. E se você acha que isso é coisa de colecionador, está enganado. Os discos de vinil vêm ocupando espaço nos mercados nacional e internacional. Os Estados Unidos, país que oferece quase todos os lançamentos em vinil, venderam, em 2018, cerca de 16,7 milhões de unidades.

Afinal, muitos ainda se encantam com o chiado do som, com a beleza e a criatividade dos encartes, bem como pelo fato de ter que reservar um tempo especial para ouvir um bom disco, uma vez que os toca-discos estão longe de ter a mesma portabilidade dos aparelhos de MP3.

Fonte de pesquisa: <https://www.riaa.com/u-s-sales-database/>. Acesso em: 3 jun. 2020.

BNCC
- EM13MAT307
- EM13MAT315

Um pouco de história



Entre os formatos mais populares do disco de vinil, que recebiam esse nome devido ao material com que eram fabricados - policloreto de vinila (PVC) - estava o LP, que continha o álbum do artista e o ***single (single play)***, geralmente utilizado para divulgar a música de trabalho de um álbum a ser lançado.

1887

O alemão naturalizado norte-americano Emile Berliner inventa o gramofone, que traz consigo o surgimento do disco. Os primeiros discos eram feitos de goma-laca (uma substância retirada de certas plantas), operavam em 78 rpm (rotações por minuto) e tinham baixa capacidade (de até quatro ou cinco minutos em cada lado).

1934

Os toca-discos tornam-se populares em bares e restaurantes. Colocando uma moeda, era possível escolher uma música entre 10 títulos de discos de goma-laca. O toca-discos mais vendido no século XX foi o Wurlitzer 1015, lançado em 1949. Foram vendidas 56 mil unidades em 18 meses.

1948

Chega ao mercado um formato de disco de vinil denominado LP, abreviatura do inglês ***Long-Play***. Esse disco tinha 31 cm de diâmetro e era tocado a 33,33 rpm. Sua capacidade era de cerca de 20 minutos por lado. Esse formato tornou-se popular por ser utilizado para comercialização de álbuns completos.

Reprodução de um disco de vinil

Para reproduzir o som de um disco de vinil, a agulha do toca-discos desliza entre sulcos muito pequenos, desenhados em forma de espiral. O vinil gira e a agulha se desloca da borda para o centro. A vibração da agulha é transformada em um som, perceptível aos nossos ouvidos.

Os discos de vinil, geralmente, são compostos de dois lados com algumas faixas. Se, por exemplo, o ouvinte não quiser esperar uma música gravada no meio do disco, ele precisa levantar a agulha do aparelho e movê-la até a faixa desejada. É possível ter uma ideia do tempo das músicas observando as faixas: quanto maior o tempo da música, maior será a área da faixa da gravação.



HELOÍSA PINTARELLI

1951

Foi lançado o primeiro LP brasileiro, Carnaval em ***Long-Playing***, com sambas e marchas feitos para o Carnaval daquele ano, que contava com a participação de artistas como Heleninha Costa, Geraldo Pereira, Os Cariocas, entre outros nomes de projeção nacional.

1983

Com o lançamento comercial do CD (***Compact Disc***), um sistema de áudio digital, a produção de discos de vinil começa a diminuir. O álbum musical ***52nd Street***, de Billy Joel, foi o primeiro em formato de CD.

O ***single*** White Christmas, composto por Irving Berlin, é considerado o mais vendido do mundo. Estima-se que tenham sido comercializadas mais de 50 milhões de cópias desse disco.



FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.DERYADRAWS/SHUTTERSTOCK; 2.VAHE 3D/SHUTTERSTOCK; 3.EIVANOVA/SHUTTERSTOCK; 4.MOHAMMAD VAKEEL SHAIKH/SHUTTERSTOCK; 5.LARINA MARINA/SHUTTERSTOCK; 6.STEPAN BORMOTOV/SHUTTERSTOCK; 7.FABRYCS/SHUTTERSTOCK; 8.MIDORI PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 9.MURATART/SHUTTERSTOCK; 10.FRANK OPPERMANN/ SHUTTERSTOCK; 11.EVERETT COLLECTION/ SHUTTERSTOCK; 12.ANOTHERPERFECTDAY/ SHUTTERSTOCK; 13.DASHA D/SHUTTERSTOCK; 14.TANYA SYRYTSYNA/SHUTTERSTOCK; 15.KONSTANTIN EGORYCHEV/SHUTTERSTOCK; 16.CHEEVATHUN46/SHUTTERSTOCK; 17.IAROSLAV NELIUBOV/SHUTTERSTOCK; 18.MIKHAIL STARODUBOV/SHUTTERSTOCK; 19.SANIT FUANGNAKHON/SHUTTERSTOCK; 20.BRASTOCK/SHUTTERSTOCK; 21.ART_OF_SUN/SHUTTERSTOCK; 22.PHOTO WIN1/ SHUTTERSTOCK; 23.DIOGOPPR/SHUTTERSTOCK; 24.TOMERTU/SHUTTERSTOCK; 25.TOMERTU/ SHUTTERSTOCK; 26.IULIIA TIMOFEEVA/SHUTTERSTOCK; 27.PETER VANCO/SHUTTERSTOCK; 28.AANBETTA/ SHUTTERSTOCK; 29.NERTHUZ/SHUTTERSTOCK; 30.ALEXEY FILATOV/SHUTTERSTOCK; 31.MEGA PIXEL/SHUTTERSTOCK; 32.LE PANDA/SHUTTERSTOCK.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A De acordo com o texto, por que algumas pessoas ainda se encantam com discos de vinil? Resposta esperada: pelo chiado do som, a beleza e criatividade dos encartes, bem como pelo fato de ter que reservar um tempo especial para ouvir um bom disco.

B Quais aparelhos você utiliza para ouvir músicas e em quais momentos você faz isso? Resposta pessoal.

C No disco de vinil, como é possível saber se uma gravação tem mais tempo que outra? Uma possível resposta: observando as áreas das faixas, quanto maior o tempo de duração da música, maior será sua área.

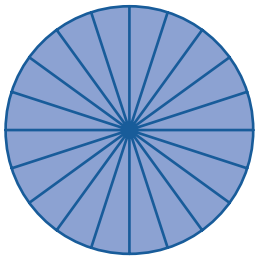
Para determinar qual música tem o maior tempo de duração, é necessário calcular a área da faixa de gravação. Nas próximas páginas, vamos calcular a área de **círculos**, de **setores circulares** e de **coroas circulares**. Esta última vai possibilitar que seja determinada qual música tem mais tempo de duração.

COPERNA

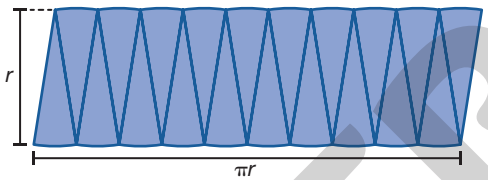
Explique aos alunos que uma dedução da fórmula da área do círculo envolve o conceito de limite.

Estudando a área do círculo

Podemos calcular a área A de um círculo por meio da fórmula $A = \pi r^2$, cuja dedução envolve conceitos que não serão estudados. Contudo, veja a seguir uma maneira que auxilia na compreensão dessa fórmula. Inicialmente, dividimos um círculo em 20 partes iguais.



Depois, organizamos cada uma dessas partes e obtemos uma figura que lembra um paralelogramo, cuja altura é aproximadamente o comprimento do raio do círculo e o comprimento da base é cerca da metade do comprimento da circunferência, isto é, $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$.



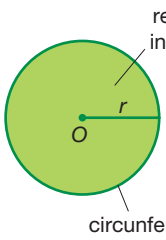
A área A de um paralelogramo é dada pelo produto entre o comprimento de sua base b e sua altura h.

$$A_p = b \cdot h \Rightarrow \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Como a figura que lembra o paralelogramo foi obtida com as partes do círculo, então a área A do círculo é dada por $A = \pi r^2$.

A área de um círculo de raio r é igual a πr^2.

Ao reunirmos a circunferência e todos os seus pontos internos, obtemos uma figura denominada **círculo**. Em um círculo, podemos destacar os seguintes elementos:



O: centro

r: comprimento do raio

Exemplo

Vamos calcular a área aproximada de um círculo de raio 7 cm.

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 7^2 = 3{,}14 \cdot 49 \simeq 154$$

Portanto, a área aproximada do círculo é 154 cm^2.

Note que, no exemplo, considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Antes de a área exata de um círculo ser conhecida, muitos estudiosos obtiveram aproximações com uma precisão impressionante, levando em consideração os recursos disponíveis na época. Entre os inúmeros problemas citados no Papiro de Rhind, documento egípcio que data de cerca de 1650 a.C., está uma aproximação para a área do círculo, que é assumida como igual à área de um quadrado cujo comprimento do lado é igual a $\frac{8}{9}$ do comprimento do diâmetro do círculo dado.

Por exemplo, um círculo de diâmetro 1 cm tem área aproximada à de um quadrado de lado $\frac{8}{9}$ cm.

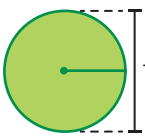
Quadrado



$$A_q = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

$$A_q \simeq 0{,}790 \text{ cm}^2$$

Círculo



$$A_c = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$A_c \simeq 0{,}785 \text{ cm}^2$$

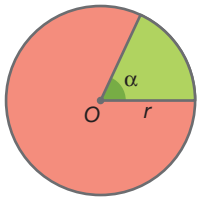
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Área do setor circular

A parte indicada em verde no círculo de raio r corresponde a um setor circular que é determinado por um ângulo central α (em graus).



Ao dobrarmos a medida do ângulo central, a área do setor dobra; ao triplicarmos a medida do ângulo central, a área do setor triplica; e assim por diante. Nesse caso, a área do setor circular e o ângulo central que o determina são grandezas diretamente proporcionais. Assim, utilizando regra de três simples, podemos calcular a área A_s desse setor circular.

Ângulo (em graus)	Área
360	πr^2
α	A_s

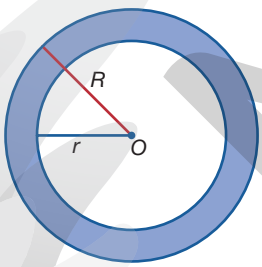
$$\frac{360}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{A_s} \Rightarrow A_s \cdot 360 = \alpha \cdot \pi r^2 \Rightarrow A_s = \frac{\alpha}{360}\pi r^2$$

A área A_s de um setor circular, de uma circunferência de raio r determinado por um ângulo central α, é dada por:

$$A_s = \frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2$$

Área da coroa circular

A região indicada em azul corresponde a uma coroa circular.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Duas circunferências são **concêntricas** quando possuem o mesmo centro. A região compreendida entre essas duas circunferências é denominada **coroa circular**.

Os alunos devem perceber que é possível resolver problemas relacionados à área do setor circular e da coroa circular sem o uso de fórmulas específicas, utilizando, para tanto, a fórmula da área do círculo.

Calculamos a área A_c da coroa circular determinada pelas circunferências concêntricas de raios R e r, com $R > r$, utilizando a fórmula $A_c = \pi\left(R^2 - r^2\right)$.

A Prove que a afirmação apresentada é verdadeira, ou seja, que a área da coroa circular determinada pelas circunferências concêntricas de raios R e r, com $R > r$, é dada por $A_c = \pi\left(R^2 - r^2\right)$.

A área da coroa circular pode ser obtida calculando-se a diferença entre a área do círculo de raio R e a área do círculo de raio r, isto é: $A_c = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_c = \pi\left(R^2 - r^2\right)$.

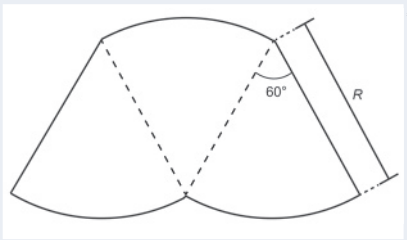
B Escreva um algoritmo que possibilite determinar a área da coroa circular, dado o comprimento dos raios das circunferências que a determinam. Em seguida, organize esse algoritmo em um fluxograma.

Resposta no Suplemento para o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R1 (Enem, 2015) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.



REPRODUÇÃO

O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m x 24 m. O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente. Considere 3,0 como aproximação para π. O maior valor possível para R, em metros, deverá ser:

a) 16 b) 28 c) 29 d) 31 e) 49

Resolução

Inicialmente calculamos a área em metros quadrados ocupada pela:

- piscina retangular.

$$A_r = 50 \cdot 24 = 1200$$

- piscina com setores circulares.

$$A_s = 3 \cdot \left(\frac{60}{360} \cdot 3 \cdot R^2\right) = \frac{3}{2}R^2$$

Do enunciado, devemos ter $A_s < A_r$. Assim:

$$\frac{3}{2}R^2 < 1200 \Rightarrow R^2 < 800$$

Como $\underbrace{28^2}_{784} < 800 < \underbrace{29^2}_{841}$ e R tem de ser o maior número natural possível, segue que $R = 28$ m.

Portanto, a alternativa correta é a **b**.

R2 A partir de 2002, passou a circular no Brasil um novo modelo de moeda de 1 real. Ela possui um núcleo prateado composto de aço inoxidável e um anel externo dourado, que lembra uma coroa circular, composto de aço revestido de bronze.



BANCO CENTRAL DO BRASIL

Nessa moeda, entre outras características, estão presentes grafias encontradas em cerâmicas de origem indígena, fazendo referência às raízes étnicas brasileiras. Essas características da moeda de 1 real são importantes elementos de segurança para evitar fraudes. Calcule a área aproximada da coroa circular dourada da moeda de 1 real (Considere $\pi = 3{,}14$).

Fonte de pesquisa: <https://www.bcb.gov.br/dinheirobrasileiro/pdf/FolderMoedas.pdf>. Acesso em: 26 maio 2020.

Resolução

A área da coroa circular é dada por:

$$A_c = \pi\left(R^2 - r^2\right) = 3{,}14\left(\underbrace{13{,}5^2}_{\frac{27}{2}} - \underbrace{9^2}_{\frac{18}{2}}\right) = 3{,}14 \cdot 101{,}25 = 317{,}925$$

Portanto, a área da coroa dourada da moeda de 1 real é aproximadamente 317,925 mm^2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

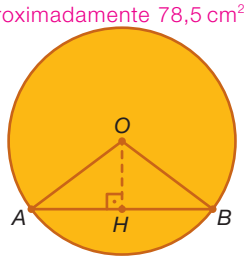
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

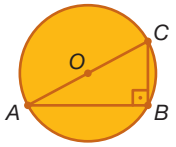
Nas tarefas dessa seção, sempre que necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

1 Em cada item, determine a área do círculo de centro O.

a) $AB = 8$ cm e $OH = 3$ cm.
aproximadamente 78,5 cm²



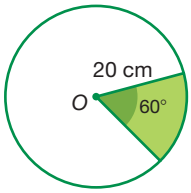
b) $AB = 2\sqrt{7}$ cm e $BC = 2\sqrt{2}$ cm
aproximadamente 28,26 cm²



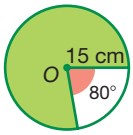
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

2 Calcule a área de cada setor em verde.

a)
$\frac{200\pi}{3}$ cm²



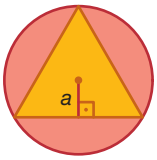
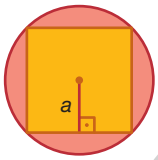
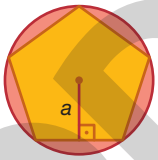
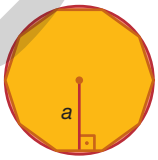
b)
175π cm²



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Escreva as áreas dos setores em função de π.

3 Observe a sequência de figuras, em que estão ilustrados polígonos regulares de n lados inscritos em círculos de raio 100 cm. b) $n = 3$, 12 990 cm²; $n = 4$, 20 006,04 cm²; $n = 5$, 23 777 cm²; $n = 10$, 29 405 cm²

n	3	4	5	...	10	...
Figura				...		...
a	50 cm	70,7 cm	80,9 cm	⋮	95,1 cm	⋮

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

a) Qual é a área aproximada de cada círculo? 31 400 cm²

b) Calcule a área aproximada dos polígonos ilustrados na sequência.

c) O que é possível notar em relação às áreas do polígono e do círculo à medida que n aumenta?
Espera-se que os alunos respondam que a área do polígono inscrito se aproxima da área do círculo circunscrito.

4 Um grande marco para a agricultura irrigada foi a utilização do sistema de irrigação de pivô central. Esse sistema é composto de uma gigantesca haste, que gira em torno de seu próprio eixo, na qual estão fixas as tubulações, os aspersores e outros componentes. O pivô central tem várias vantagens em relação a outros sistemas: uma delas é que, ao completar um ciclo de irrigação, o equipamento chega ao mesmo lugar em que estava inicialmente, pronto para iniciar outro ciclo. Sabendo que em certa propriedade há uma área circular de 7 850 m² irrigada por um único pivô central, calcule, aproximadamente, o comprimento da haste desse pivô. 50 m

Plantação de café irrigada por pivô central em Cristalina, Goiás, em 2018.

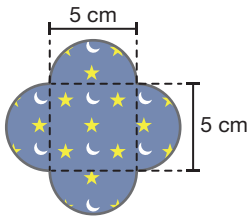


ADRIANO KIRIHARA/ PULSAR IMAGENS

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5 Na confecção de um tapete de retalhos, uma costureira utilizou 20 pedaços de tecido, como o ilustrado a seguir.



RONALDO INÁCIO

Considerando que o pedaço de tecido pode ser dividido em um quadrado e quatro semicírculos iguais, determine, de acordo com as medidas indicadas, quantos centímetros quadrados de tecido foram utilizados na confecção do tapete. 1 285 cm²

6 (Enem, 2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento.

O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40$ cm que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60$ cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.



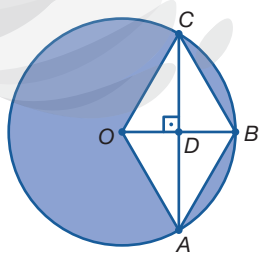
REPRODUÇÃO

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas? alternativa b

a) 16 628
b) 22 280
c) 28 560
d) 41 120
e) 66 240

7 Na figura, O é o centro do círculo e $OABC$ é um losango.

Calculadora

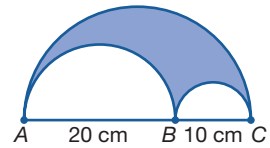


RONALDO INÁCIO

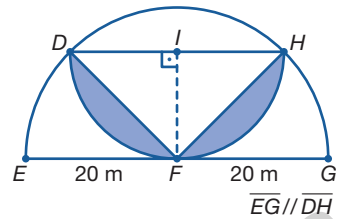
Sabendo que $OD = 1$ cm, determine, com o auxílio de uma calculadora, a área da região em azul. aproximadamente 9,10 cm²

8 As figuras a seguir foram construídas a partir de semicírculos. Em cada item, determine a área da região em azul.

a) 50π cm²

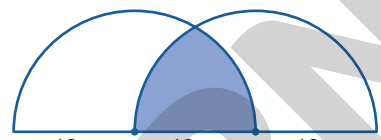


b) $100(\pi - 2)$ m²



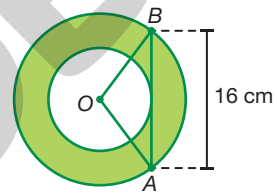
$\overline{EG} // \overline{DH}$

c) $\frac{64}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$ m²



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

9 Na figura, os círculos são concêntricos de centro O e o lado $\overline{AB}$ do triângulo OAB é tangente ao círculo de menor raio.

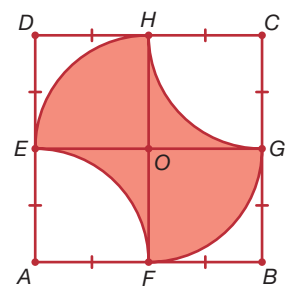


RONALDO INÁCIO

Sabendo que a área do círculo de maior raio é 100π cm² e que a área da região delimitada pelo triângulo é 48 cm², determine a área da coroa circular em verde. 64π cm²

10 Na figura apresentada a seguir:

- o comprimento do lado do quadrado $ABCD$ é 10 cm;
- $\overset{\frown}{EF}$ é um arco de circunferência de centro A;
- $\overset{\frown}{EH}$ e $\overset{\frown}{FG}$ são arcos de circunferência de centro O;
- $\overset{\frown}{GH}$ é um arco de circunferência de centro C.



RONALDO INÁCIO

Qual é a área da região em vermelho? 50 cm²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

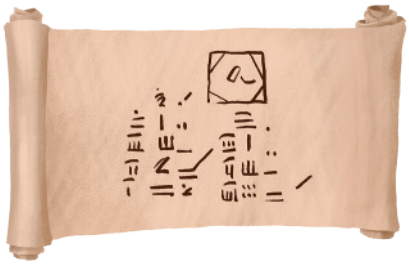
MODERNA

11 É provável que por volta de 1650 a.C. o escriba Ahmes tenha copiado o Papiro de Rhind, uma das principais fontes de informações referentes à Matemática egípcia antiga, de um documento ainda mais antigo.

Muitos dos problemas do Papiro de Rhind decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras. Os problemas 48 e 50 desse papiro podem dar uma pista de como os egípcios obtiveram a fórmula para calcular a área do círculo.

Problema 48: "Compare a área do círculo com a do quadrado circunscrito".

Este é o único problema em que sua solução é geométrica.



LEO GIBRAN

Problema 50: "Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a sua área?"

Um escriba apresentou a seguinte solução a este problema:

Remova $\frac{1}{9}$ do diâmetro, o restante é 8. Faça a multiplicação de 8 por 8. Portanto, a área é 64.

Em linguagem atual, temos:

"Para calcular a área do círculo, subtraia do diâmetro sua nona parte, e o restante eleve ao quadrado".

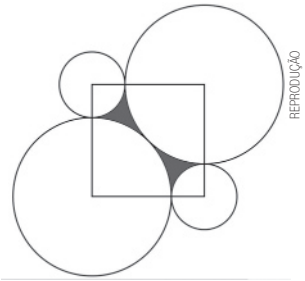
Fontes de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 9, 13. GASPAR, Maria Terezinha; MAURO, Suzeli. *Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática*. <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf>. Acesso em: 5 fev. 2020.

a) Por meio do problema 50, é possível obter o valor para π que era utilizado pelos egípcios. Qual era essa aproximação? $\pi \simeq \frac{256}{81} \simeq 3{,}1605$

b) A quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado é um dos mais famosos problemas na história da Matemática. A importância desse problema reside no fato de que ele não pode ser resolvido com compasso e régua não graduada. Considerando um círculo de diâmetro d e a maneira pela qual os egípcios calculavam sua área, escreva uma relação entre o lado a do quadrado e o diâmetro de um círculo de mesma área. $a = \frac{8}{9}d$

12 Desafio

(UFRGS-RS, 2017) Considere um quadrado de lado 1. Foram construídos dois círculos de raio R com centros em dois vértices opostos do quadrado e tangentes entre si; dois outros círculos de raio r com centros nos outros dois vértices do quadrado e tangentes aos círculos de raio R, como ilustra a figura ao lado.



REPRODUÇÃO

A área da região sombreada é: alternativa e

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\pi$.

b) $\left(\sqrt{2} - 1\right)\pi$.

c) $1 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\pi$.

d) $1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)\pi$.

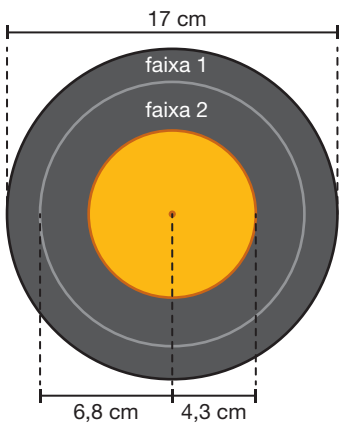
e) $1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\pi$.

No contexto

13. a) faixa 1: 81,6714 cm²; faixa 2: 87,135 cm²

13 Anteriormente, foram apresentadas algumas informações sobre os discos de vinil. Por exemplo, vimos que o tempo das músicas está relacionado à área das faixas do disco.

Existem diferentes tipos de disco de vinil, como os EP (abreviatura do termo inglês *extented play*), que são discos com 17 cm de diâmetro e capacidade para aproximadamente 8 minutos de música em cada lado. Observe o EP a seguir e duas de suas faixas em um dos lados.



RONALDO INÁCIO

a) Calcule a área aproximada de cada faixa.

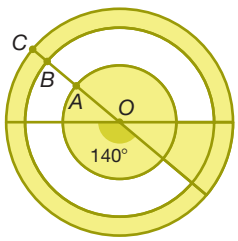
b) Qual das faixas apresentadas tem maior duração? Justifique sua resposta.

Faixa 2, pois sua área é maior que a da faixa 1.

14 Na figura, as circunferências são concêntricas de centro em O.

Sabendo que $AO = 6$ cm, $AB = 4$ cm e $BC = 2$ cm, determine a área da região em amarelo.

aproximadamente 273,5 cm²



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ampliando seus conhecimentos

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de livros, *sites* e *podcasts* que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula, envolvendo conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

Para ler

- **A Matemática das coisas**

  CRATO, Nuno. *A Matemática das coisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro apresenta diversos exemplos da importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

- **A Matemática nas profissões**

  BARELLA, Elaine S.; MARTINS, Laura M. R. (Org.). *A Matemática nas profissões*. São Paulo: Portal Editora, 2010.

  Resultado de pesquisas e entrevistas, o livro apresenta o relato de profissionais de diversas áreas sobre a relação deles com a Matemática em suas rotinas de trabalho.

- **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**

  GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro é um relato de quatro milênios da história da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

- **A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos**

  SZPIRO, George. *A vida secreta dos números*: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. Trad. J. R. Souza. Rio de Janeiro: Difel, 2008.

  Por meio de histórias, anedotas e outros tipos de textos, este livro nos mostra como a Matemática está presente em quase todos os aspectos do cotidiano. O livro aborda curiosidades históricas pouco conhecidas e apresenta grandiosos praticantes da Matemática ao longo dos tempos.

- **O instinto matemático**

  DEVLIN, Keith. *O instinto matemático*. Trad. Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

  O autor defende a ideia de haver dois "tipos" de Matemática: a simbólica, que é exclusiva do ser humano; e a natural, que pertence a qualquer animal e corresponde a habilidades matemáticas relacionadas à sobrevivência, senso de direção e captura de presas.

- **O livro dos números: uma história ilustrada da Matemática**

  BENTLEY, Peter. *O livro dos números*: uma história ilustrada da Matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

  O autor busca revelar segredos e mistérios da Matemática e mostrar sua presença no cotidiano, desde a ciência até as artes. Ilustrado com fotografias, gravuras, pinturas, entre outros, o livro é organizado de maneira a facilitar a compreensão de situações em que a Matemática está envolvida.

- **O universo e a xícara de chá**

  COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá*. Trad. Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

  O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como enxergar a lógica presente nessas situações, cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

MODERNA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para navegar

- **Domínio Público**

  Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* consiste em uma biblioteca digital, na qual é possível pesquisar textos, imagens, sons e vídeos de domínio público (acesso livre e gratuito) referentes a diversas áreas.

- **Edumatec**

  Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

- **Enem**

  Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível fazer a inscrição para o Enem e acessar os resultados, os simulados e as provas aplicadas em anos anteriores, assim como a matriz de referência dos conhecimentos avaliados no exame.

- **IBGE**

  Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/pt/inicio.html>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível obter informações estatísticas sobre o Brasil, como contagem da população e índices da economia, além de dados referentes a estados e municípios.

- **Matemática essencial**

  Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* apresenta definições e conceitos matemáticos de diversos níveis de ensino, exemplos resolvidos e exercícios que possuem respostas, e, em alguns casos, as respostas estão justificadas e as resoluções, detalhadas.

- **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**

  Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível obter diversas informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, como efetuar a inscrição, verificar a data das provas e acessar as provas aplicadas em anos anteriores.

Para ouvir

- **Número imaginário**

  Disponível em: <https://numeroimaginario.wordpress.com/2017/06/14/podcasts/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Uma série de *podcasts* abordando diversos tópicos relacionados à área de Matemática são disponibilizados neste *site*, tratando de assuntos que vão desde a discussão sobre 0 pertencer ou não ao conjunto dos números naturais até o infinito de Cantor.

- **Pravaler**

  Disponível em: <https://soundcloud.com/canal-pravaler/guia-fies-2020-saiba-tudo-sobre-essa-edicao-1>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Vai começar a graduação ou pensa em fazer uma segunda faculdade, mas não tem renda o suficiente para pagar um curso em uma instituição privada? O Pravaler preparou um guia completo sobre o Fies 2020, com tudo o que você precisa saber.

- **Resumov**

  Disponível em: <https://www.resumov.com.br/podcast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Criado por Susane Ribeiro, o Resumov é um *podcast* que dá dicas de estudos para quem deseja ter uma boa nota no Enem ou passar nos vestibulares mais difíceis do país.

- **Scicast**

  Disponível em: <https://www.deviante.com.br/podcasts/scicast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Esse *podcast* é voltado para aquele que precisa dar um gás nos estudos da área de Ciências exatas e naturais. Nele, o apresentador utiliza de situações do dia a dia para explicar Matemática, Química e Física de uma maneira mais didática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 O Teorema de Tales e a semelhança de triângulos

1 **a)** $x = 3$
b) $x = 6$

2 45 cm

3 **a)** 300 m
b) 240 m

4 50 m

6 Paralela, pois a razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes é a mesma, ou seja, em um triângulo ABC, se D e E são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente, temos: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1$.

7 **b)** 6 cm

8 $x = 7$

9 Supondo que a semelhança entre os triângulos ABC e FGH seja estabelecida pela correspondência entre A e F, B e G, C e H e que a razão de proporcionalidade entre elas seja k, podemos escrever:

$$\frac{AB}{FG} = \frac{AC}{FH} = \frac{BC}{GH} = k$$

Consequentemente:

$AB = k \cdot FG$, $AC = k \cdot FH$ e $BC = k \cdot GH$

Agora, vamos calcular a razão entre o perímetro do triângulo ABC e o perímetro do triângulo FGH.

$$\frac{AB + AC + BC}{FG + FH + GH} =$$

$$= \frac{k \cdot FG + k \cdot FH + k \cdot GH}{FG + FH + GH} = k$$

10 130 cm

11 48 cm

12 $\frac{256}{13}$ cm

13 92 cm

14 Não, pois os lados correspondentes não são proporcionais.

15 **a)** Sim. O caso que garante a semelhança é o **LLL**, pois os três lados correspondentes são proporcionais, isto é:

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{GF} = \frac{BC}{EF}$$

b) 94°

16 4 m

17 alternativa **c**

2 As relações métricas e a trigonometria no triângulo retângulo

1 $x = 12$

2 Projeção do cateto AB: 5,4 cm; projeção do cateto AC: 9,6 cm.

3 60 m; 64 m

4 **a)** aproximadamente 4,21 cm

5 **a)** $x = 5$
b) $x = 12$
c) $x = 6$

6 $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$; $4\sqrt{3}$ cm

7 35 cm

8 **a)** 8 cúbitos
b) 5 e 12 cúbitos

9 alternativa **a**

10 28 tubos

11 **a)** • 25,3'' por 14,2''
• 27,9'' por 15,7''
• 36,6'' por 20,6''
b) 50''

12 **a)** Porque $1^2 = 0{,}6^2 + 0{,}8^2$ e, se em um triângulo qualquer o quadrado do comprimento do lado maior for igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros lados, então o triângulo é retângulo.
b) Os triângulos ABC e MNO.
c) 21 m

13 $\operatorname{sen}\beta = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos\beta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$;

$\operatorname{tg}\beta = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

14 **a)** $\operatorname{sen}\alpha = \frac{9}{9\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\cos\alpha = \frac{27}{9\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) $\operatorname{sen}\beta = \frac{27}{9\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

e) $\cos\beta = \frac{9}{9\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

f) $\operatorname{tg}\beta = \frac{27}{9} = 3$

15 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{9}$

16 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} =$

$= \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$

17 $\cos\hat{C} = \frac{7}{8}$; $\cos\hat{E} = \frac{4}{5}$; $\cos\hat{G} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$

18 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) 10 m

d) 5 m

19 $\operatorname{sen}\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

20 a) $x = 13$ cm

b) $x = 16\sqrt{3}$ cm

c) $x = 11\sqrt{2}$ cm

d) $x = \frac{27}{2}$ cm

21 10 cm

22 a) 30°

b) 60°

c) 45°

23 alternativa a

24 a) 10 m

b) $5\sqrt{3}$

25 $CE = \sqrt{3}$ cm e $AD = 2$ cm

26 17,3 cm

27 a) 3

b) $\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{3}$

28 $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$ e $\gamma = 60°$

29 a) sen 78° = 0,978; cos 78° = 0,208; tg 78° = 4,705

b) sen 5° = 0,087; cos 5° = 0,996; tg 5° = 0,087

c) sen 52° = 0,788; cos 52° = 0,616; tg 52° = 1,280

30 a) 12°

b) 76°

c) 41°

31 Torre: 57 m; pessoa: 1,73 m

32 b) 600 cm ou 6 m

c) Entre 4° e 5°

34 a) $x \simeq 25$ cm

b) $x \simeq 17$ cm

c) $x \simeq 13$ cm

36 a) aproximadamente 18°

b) aproximadamente 12°

c) Não, pois o maior ângulo possível para acertar o gol é de aproximadamente 22°, atingido quando a bola é chutada em direção ao canto superior esquerdo ou direito.

37 a) 41 cm

b) 27 cm

c) 32,3 cm

38 alternativa b

39 aproximadamente 32 m

40 a) 5 989 km

b) 391 km

3 Trigonometria em um triângulo qualquer

1 a) sen 95° = 0,996; cos 95° = −0,087

b) sen 110° = 0,940; cos 110° = −0,342

c) sen 125° = 0,819; cos 125° = −0,574

d) sen 168° = 0,208; cos 168° = −0,978

e) sen 174° = 0,105; cos 174° = −0,995

2 a) $x = 105$ m e $y = 91{,}6$ m

b) $x = 112{,}3$ m e $y = 120{,}7$ m

3 50 cm, 34,2 cm e 34,2 cm; sen 94° = 0,998

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 $a = 6{,}6\text{ m}$ e $b = 5{,}8\text{ m}$

5 aproximadamente 18,7 km

6 $x = 10$

7 **a)** A: 419 m; B: 654 m
b) 28 m/s
c) 23 s

8 No $\triangle BCD$, temos:

$$\operatorname{sen}\left(180° - \hat{B}\right) = \frac{CD}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = a \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(180° - \hat{B}\right)}_{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B} \quad (\text{I})$$

No $\triangle ACD$, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) segue que:

$$a \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \quad (\text{III})$$

No $\triangle BCE$, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow BE = a \cdot \operatorname{sen}\hat{C} \quad (\text{IV})$$

No $\triangle ABE$, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BE = c \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \quad (\text{V})$$

De (IV) e (V) segue que:

$$a \cdot \operatorname{sen}\hat{C} = c \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad (\text{VI})$$

Portanto, de (III) e (VI), obtemos a lei dos senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

9 **a)** navio B
b) navio A: 3 h; navio B: 3 h
c) 32 km/h

11 **a)** 54,3 m
b) 61,2 m
c) 61,2 m
d) 48,1 m

12 aproximadamente 183,4 cm e 89,2 cm

13 $f_r \simeq 22\text{ N}$

14 56,8 cm

15 **a)** $\alpha \simeq 53°$
b) $\alpha \simeq 51°$
c) $\alpha \simeq 142°$
d) $\alpha \simeq 121°$

16 não; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 6 cm; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 4 cm

17 **a)** aproximadamente 98,7 m
b) aproximadamente 153,1 m

18 alternativa **d**

19 aproximadamente 504,42 m

20 alternativa **d**

4 Trigonometria na circunferência

1 **a)** aproximadamente 5,76 cm, 110°
b) aproximadamente 3,14 cm; 90°
c) aproximadamente 7,85 cm; 180°
d) aproximadamente 2,75 cm; 45°

2 **a)** $\frac{11\pi}{18}$ rad
b) $\frac{\pi}{2}$ rad
c) π rad
d) $\frac{\pi}{4}$ rad

3 **a)** 50°
b) 140°
c) 260°
d) 320°

4 **a)** 25 voltas
b) 6 minutos

5 471 m

6 **a)** $r_1 \simeq 15\text{ cm}$; $r_2 \simeq 12\text{ cm}$
b) aproximadamente 31,4 cm
c) Sim, pois esses arcos são determinados pelo mesmo ângulo; no caso dos arcos menores, pelo ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad.

7 82,5° ou 82°30'

8 aproximadamente 272 m

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

9 a) Vôlei; 16 alunos
b) 32 alunos
c) 12 alunos

10 aproximadamente 51,81 unidades de comprimento

11 alternativa d

12 a) 20°
b) 180°
c) $\frac{3\pi}{4}$

13 a) $45° + k \cdot 360°$, em que k é um número inteiro
b) $210° + k \cdot 360°$, em que k é um número inteiro
c) $\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, em que k é um número inteiro
d) $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, em que k é um número inteiro

15 a) 80° ou $\frac{4\pi}{9}$
b) $k \cdot 40°$ ou $\frac{k \cdot 2\pi}{9}$ sendo k um número inteiro

16 a) Não, pois o arco representado por ele é côngruo ao arco de $\frac{5\pi}{6}$ e não ao arco de $\frac{3\pi}{4}$.

17 a) 2º ou 3º
b) 1º ou 2º
c) 1º ou 3º
d) 3º ou 4º
e) 2º ou 4º
f) 1º ou 4º

18 a) negativo
b) positivo
c) negativo
d) positivo

19 a) 2º b) 2º c) 1º d) 4º e) 3º

20 a) $A = \operatorname{sen} 40° \cdot \cos 40°$; $A > 0$
b) $A = -\cos \frac{\pi}{3} \cdot \left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right)$; $A > 0$
c) $A = \operatorname{tg} 85° \cdot (-\operatorname{sen} 5°)$; $A < 0$
d) $A = -\cos \frac{2\pi}{5} \cdot \operatorname{sen} 80°$; $A < 0$

21 a) 1°: $-225°$; 2°: 90°; 3°: 180°; 4°: $-135°$
b) 270°
c) $\operatorname{sen} 270° = -1$ e $\cos 270° = 0$

22 a) 1 125°
b) 45°
c) $\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
d) 4 voltas

23 a) 150°
b) $\operatorname{sen} 150° = \frac{1}{2}$ e $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

24 a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{1}{2}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

25 a) $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$
b) $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{8}{17}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$

27 Sim, pois para qualquer valor de k os arcos serão 150°, 300° e 225° ou arcos côngruos a eles.

5 Funções trigonométricas

1 a) $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; conjunto finito
b) {Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins}; conjunto finito
c) $\{4, 8, 12, 16, \ldots\}$; conjunto infinito
d) {c, j, n, o, t, u}; conjunto finito

2 6 elementos

3 a) $4 \in A$; $4 \in B$
b) $6 \notin A$; $6 \notin B$
c) $10 \in A$; $10 \notin B$
d) $16 \notin A$; $16 \in B$
e) $25 \notin A$; $25 \in B$
f) $50 \notin A$; $50 \notin B$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 7 elementos

5 afirmativa **a**; afirmativa **b**; afirmativa **c** e afirmativa **e**

6 **a)** $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

b) $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

c) $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$

d) $\{a, b, c, d\}$

7 **a)** $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $B = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1\}$

c) $C = \{..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, ...\}$

d) $D = \varnothing$

8 **a)** 7

b) 6

c) 14

d) 8

9 $A = 25$

10 **a)** $\frac{184}{5}$

b) $\frac{164}{99}$

c) $\frac{15}{16}$

d) $\frac{281}{333}$

e) $\frac{417}{55}$

f) $\frac{1\,109}{90}$

11 **a)** 3; 2,8284

b) 2,5; 2,4495

c) 3,5; 3,4641

d) 5; 4,8990

12 **a)** falsa

b) verdadeira

c) verdadeira

d) falsa

e) falsa

f) falsa

13 **a)** $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{9\pi}{4}$

b) $x = \frac{19\pi}{6}$

c) $x = 150°$ ou $x = 210°$ ou $x = 510°$

d) $x = \frac{17\pi}{4}$

e) $x = 600°$ ou $x = 660°$

f) $x = 420°$

14 **a)** $2 < m < 3$

b) $-1 < m < -\frac{1}{2}$

c) $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$

d) $3 < m < 4$

15 **a)** $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ambos $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{1}{4}$

16 **a)** $\frac{\pi}{2}$

b) $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

17 **a)** $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ e $\text{Im}(g) = [-1, 5]$; A constante a desloca o gráfico 2 unidades para cima, e a constante b amplia o gráfico verticalmente.

b) Uma possível resposta: $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$ e $d = \pi$; $g(x) = 2 + 3\text{sen}(2x + \pi)$.

18 **a)** 4

b) $\frac{1}{2}$

c) 2

d) 8

19 **a)** 45°

b) Não, pois a distância percorrida é diretamente proporcional a $\text{sen } 2\varphi_0$ e a tacada já foi realizada com $\varphi = 45°$.

20 **a)** $h(t) = 8 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$

b) 8m; -8 m

21 **a)** As funções g e h.

b) $\text{Im}(f) = [-1, 1]$, $\text{Im}(g) = [-2, 2]$, $\text{Im}(h) = [-2, 2]$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

22 **a)** 20 clientes.

b) 12 horas; 35 clientes.

c) 24 horas; 5 clientes.

23 alternativa **d**

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

24 a) $T(\theta) = \pi\sqrt{\cos\theta}$

b) $D(T) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

7 Fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas

1 a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

d) $2 + \sqrt{3}$

2 Uma possível resposta: não, pois a escada chega aproximadamente à altura de 5,14 m.

3 alternativa b

4 aproximadamente 0,65 m

5 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

6 aproximadamente 62 km

7 $\frac{\sqrt{39}}{8}$

8 $x = 30°$

9 $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$

10 a) $-\frac{1}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

11 82,5 m

12 $\frac{3}{2}$

13 a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

14 alternativa a

15 $\cos^4\beta - \operatorname{sen}^4\beta =$

$= \underbrace{\left(\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta\right)}_{1} \underbrace{\left(\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta\right)}_{\cos 2\beta} =$

$= \cos 2\beta$

16 alternativa b

17 10,8 m

18 a) 11 808 pés

b) aproximadamente 9 476 m

19 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

20 a) aproximadamente 2,55 m; aproximadamente 2,90 m

b) aproximadamente 1 h 2 min

21 $\alpha = 15°$

22 a) $f(t) = 95 - 25 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

b) 70 mmHg.

c) 0,4 s

8 Ladrilhamento

1 O ladrilhamento b

3 a) (3, 3, 6, 6), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4) e (3, 4, 4, 6)

b) (3, 6, 3, 6) e (3, 4, 6, 4)

4 a) falsa

b) falsa

c) verdadeira

5 Triângulo equilátero; hexágono regular; quadrado.

9 Área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango

1 a) 16 cm² b) 18 cm²

2 a) tinta azul: 16 ℓ; tinta amarela: 9 ℓ

b) R$ 236,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 608 cm^2

4 **a)** 714 m^2 **b)** 1 870 m^2

5 **a)** 150 573 km^2
b) 21 088 655 campos de futebol

6 144 cm^2

7 36 cm^2

8 **a)** 8 u
b) 88 128 km^2

9 10 cm^2

10 **a)** 5 299 200 km^2
b) aproximadamente 2,84%

10 Área do triângulo e de polígonos regulares

1 **a)** aproximadamente 136,8 dm^2
b) 96 dm^2
c) 150 dm^2

2 **a)** $4\sqrt{6}\ m^2$
b) 54 dm^2
c) $\frac{3\sqrt{15}}{4}\ km^2$
d) $40\sqrt{3}\ cm^2$

3 $\sqrt{5}$ cm; $\frac{\sqrt{15}}{2}\ cm^2$

4 **a)** 84,8 m^2
b) 167,3 m^2

5 $60\sqrt{3}\ dm^2$

6 Verdadeira. Possível resposta: os triângulos *ABC* e *AFC* possuem a mesma área, pois têm base $\overline{AC}$ comum e altura com mesmo comprimento. O mesmo ocorre com os triângulos *AED* e *AGD*. Já o triângulo *ACD* é comum ao triângulo *AFG* e ao pentágono *ABCDE*. Dessa maneira, como o triângulo *AFG* e o pentágono *ABCDE* são formados por triângulos com áreas equivalentes, eles possuem a mesma área.

7 $3\sqrt{3}$ cm

8 80 cm^2

9 19 cm^2

10 **a)** 20 cm^2 **b)** 40 cm^2 **c)** 16 cm^2

11 7 080 pessoas

12 $x = 50\sqrt{2}$ m e $y = 150\sqrt{2}$ m

13 0,5 cm^2

14 **a)** A necessidade de realizar medições de terrenos destinados à agricultura, sobretudo aqueles cujas demarcações eram perdidas nas cheias do rio Nilo.
b) O quadrilátero *ABCD* foi decomposto em dois triângulos: *ABC* e *ADC*. O cálculo da área desses triângulos foi obtido por meio da fórmula de Herão $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que **a**, **b** e **c** são os comprimentos dos lados, e $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.
c) aproximadamente 3,9%
d) 250 000 m^2

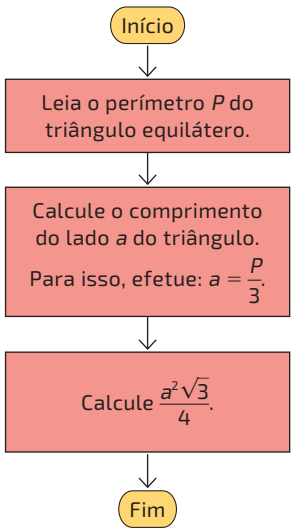
15 alternativa **e**

16 1 cm^2

17 Algoritmo:

Início
1. Leia o perímetro *P* do triângulo equilátero.
2. Calcule o comprimento do lado *a* do triângulo. Para isso, efetue: $a = \frac{P}{3}$.
3. Calcule $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Fim



MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

18 alternativa **c**

19 10,5 m^2

20 **a)** 1 575 cm^2

b) aproximadamente 1 501,1 cm^2

c) aproximadamente 1 891,2 cm^2

d) aproximadamente 2 762,1 cm^2

21 18,9 m e 45,8 m

22 aproximadamente 120°

23 aproximadamente 1 072 m; aproximadamente 3 384 m^2

24 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$

25 **a)** 8 435 cm^2

b) aproximadamente 12 222,6 cm^2

c) 5 408 cm^2

26 hexágonos regulares: 2 250 m^2; triângulos equiláteros: 750 m^2

27 **a)** 196,5 m^2

b) 160,7 m^2

28 alternativa **c**

29 9

30 Razão de proporcionalidade $\sqrt{7}$; razão entre as áreas: 7.

31 $R \simeq 30{,}86$

12 Área do círculo

1 **a)** aproximadamente 78,5 cm^2

b) aproximadamente 28,26 cm^2

2 **a)** $\frac{200\pi}{3}$ cm^2 **b)** 175π cm^2

3 **a)** 31 400 cm^2

b) $n = 3$, 12 990 cm^2; $n = 4$, 20 006,04 cm^2; $n = 5$, 23 777 cm^2; $n = 10$, 29 405 cm^2

c) A área do polígono inscrito se aproxima da área do círculo circunscrito.

4 50 m **5** 1 285 cm^2 **6** alternativa **b**

7 aproximadamente 9,10 cm^2

8 **a)** 50π m^2

b) $100(\pi - 2)$ m^2

c) $\frac{64}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$ m^2

9 64π cm^2 **10** 50 cm^2

11 **a)** $\pi \simeq \frac{256}{81} \simeq 3{,}1605$

b) $a = \frac{8}{9}d$

12 alternativa **e**

13 **a)** faixa 1: 81,6714 cm^2; faixa 2: 87,135 cm^2

b) Faixa 2, pois sua área é maior do que a da faixa 1.

14 aproximadamente 273,5 cm^2

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

- BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Este livro dá ao professor uma visão ampliada do que ele ensina em sala de aula, mostrando a Geometria euclidiana plana de um ponto de vista que vai além dos tópicos do Ensino Básico.

- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). *Educação matemática*: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

  Nesta obra, os autores buscam tratar a respeito da ambiguidade gerada no processo de pesquisa. Muitas vezes, embora os textos de diferentes autores expressem diferentes perspectivas, no geral, convergem para o mesmo significado.

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em educação matemática).

  Este livro trata da informática educativa, abordando aspectos que vão desde as políticas governamentais até as questões epistemológicas e pedagógicas. São apresentados exemplos do uso da informática com alunos e professores, bem como questões referentes ao uso de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  A História da Matemática é abordada neste livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, e finalmente chegando aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  O objetivo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente. A qualidade da escola é condição essencial de inclusão e democratização das oportunidades no Brasil, e o desafio de oferecer uma educação básica de qualidade para a inserção do aluno, o desenvolvimento do país e a consolidação da cidadania é tarefa de todos.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, [s.d.]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  Este documento pretende discutir a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de modo a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a Educação Básica.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional.

- Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro.

  A coleção é destinada à formação de professores de Matemática, a alunos de licenciatura ou cursos de aperfeiçoamento de professores. Organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), esta coleção está disposta em 20 volumes que tratam desde conteúdos relacionados à Matemática até temas sobre ensino e história da Matemática.

- Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual, 2013.

  A coleção aborda uma grande variedade de conteúdos e conceitos dispostos em dez volumes direcionados a alunos do Ensino Médio e Superior.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

  Nesta obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações a respeito de aspectos relacionados à cognição, à natureza da Matemática e às questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*, 9: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

  Este volume é composto de teorias e exercícios de aplicação sobre geometria plana, contendo testes de vestibular, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

  O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para a sua resolução.

- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

  Esta obra é destinada a professores e pesquisadores em Educação Matemática, pois orienta esses profissionais sobre como iniciar uma pesquisa nessa área. O livro traz orientações a respeito do processo de investigação na área, além do surgimento e do desenvolvimento desse componente curricular no Brasil.

- GUEDJ, D. *O teorema do papagaio*. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

  Em meio a uma rede de intrigas envolvendo a máfia, sequestros e enigmas intelectuais, esse romance desafia o leitor a compreender e organizar a história do pensamento matemático desde a antiguidade até os nossos dias.

- IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar*, 3: trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

  Este volume é composto de teorias e exercícios de aplicação sobre trigonometria, contendo testes de vestibular, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2. v.

  No volume 1, a história dos algarismos é apresentada considerando a origem da representação simbólica dos números em diversas civilizações, como a dos gregos, dos romanos e dos maias. Já no volume 2, é explicado por que a civilização indiana é considerada o berço da numeração moderna, e são refeitos os caminhos que levaram o homem a inventar o computador.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- KNIJNIK, Gelsa *et al*. *Etnomatemática em movimento*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro apresenta textos, discussões e reflexões acerca da trajetória e dos rumos dos estudos e pesquisas no âmbito da Etnomatemática, tendo como principal referência o professor Ubiratan D'Ambrósio.

- LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  O conteúdo desse livro é uma coleção de crônicas e comentários em torno de um tema comum: a Matemática estudada nos últimos três anos que antecedem a universidade.

- LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

  Este livro pode servir de referência aos professores no sentido de propor uma reflexão sobre a avaliação da aprendizagem escolar em termos sociais, políticos e pedagógicos.

- MENDES, Iran Abreu. *Investigação histórica no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

  O livro trata do uso de projetos de investigação histórica como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática. As experiências de tarefas investigativas apresentadas no livro evidenciam a relevância dessa abordagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

  Neste livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

- SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. *Matemática de 0 a 6*: figuras e formas. Porto Alegre: Artmed, 2003. p. 104.

  Este livro apresenta ideias para organizar ações em sala de aula utilizando diferentes materiais e recursos, a fim de que os alunos sejam capazes de desenvolver a percepção espacial por meio da interação com figuras, exercícios e problemas desafiadores.

- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. adap. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

  Neste livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

- WAGNER, Eduardo. *Construções geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

  O livro visa mostrar que as construções geométricas constituem um importante instrumento no ensino da Geometria e da Álgebra. O texto explora as propriedades geométricas das figuras e a construção a partir da solução algébrica.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Lista de siglas

ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio

FUVEST-SP: Fundação Universitária para o Vestibular

UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UNESP: Universidade Estadual Paulista

UNICAMP: Universidade Estadual de Campinas

MODERNA

ISBN 978-65-5779-073-1

MODERNA