ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITORA RESPONSÁVEL:
Lilian Aparecida Teixeira

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.

Código da coleção: 0197P21202
Código da obra: 0197P21202135

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA ESPACIAL

Área do conhecimento:
Matemática
e suas Tecnologias

MODERNA

MODERNA

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA ESPACIAL

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37387 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

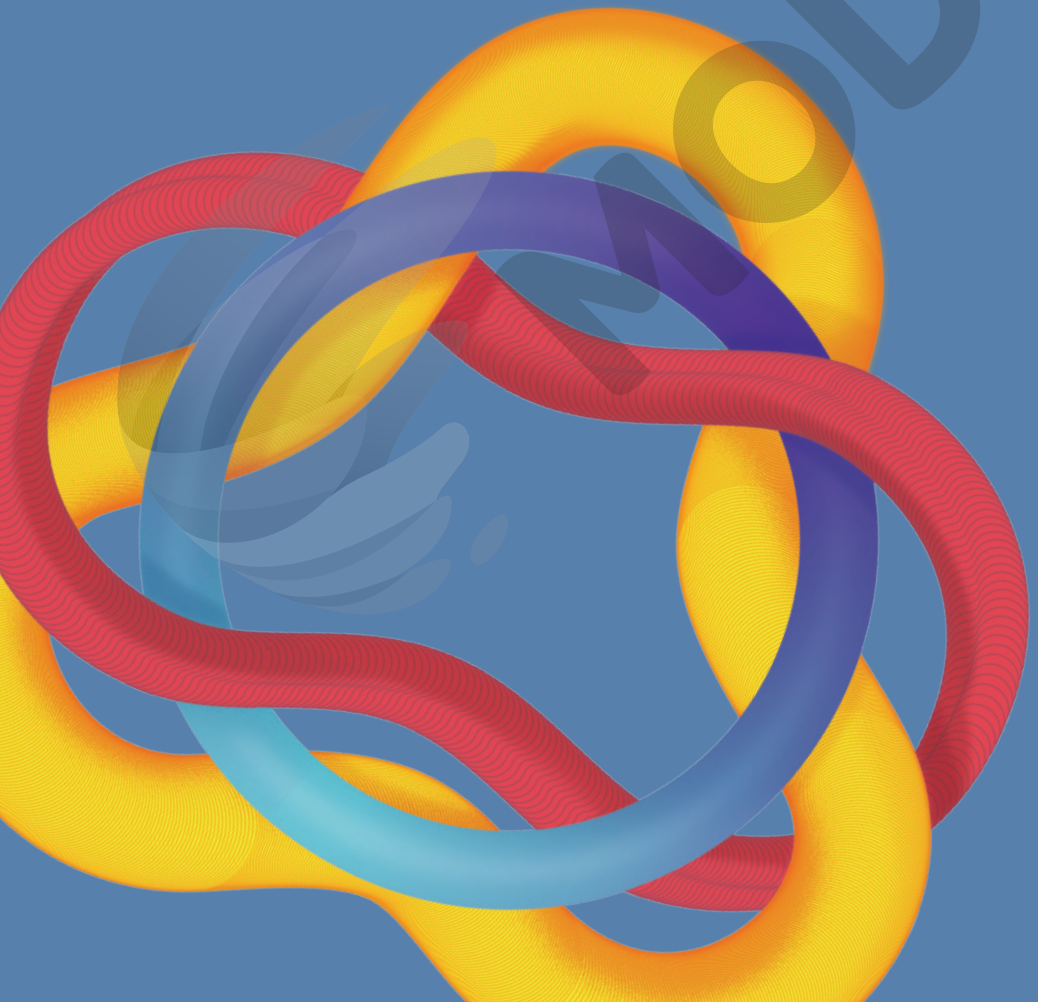
Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Suplemento para o professor



MODERNA

Apresentação

Um meio de inclusão e democratização de oportunidades é a educação. O Ensino Médio representa um momento decisivo na vida de qualquer indivíduo. Assim, cabe ao livro didático auxiliar professores e alunos nessa fase, oferecendo-lhes ferramentas úteis no processo de ensino e aprendizagem. Pensando nisso, esta coleção procurou tratar a Matemática e suas Tecnologias como parte integrante do cotidiano dos alunos, além de estabelecer associação com outros componentes curriculares e com outras áreas do conhecimento.

Tomando diversos documentos oficiais como diretrizes, esta coleção contempla os conteúdos essenciais para esse nível de ensino, apresentando-os de maneira contextualizada e empregando uma linguagem clara e objetiva, em uma sequência que favorece a aprendizagem.

O objetivo é possibilitar aos alunos o desenvolvimento das competências gerais, competências específicas e habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referentes ao Ensino Médio. Porém, é importante que o professor tenha autonomia e consciência de que pode selecionar os conteúdos que serão abordados em sala de aula adotando uma ordem diferente da sugerida no livro do aluno, de acordo com a proposta didático-pedagógica da escola.

Este **Suplemento para o professor** busca oferecer aos docentes subsídios teórico-metodológicos, de maneira a auxiliar seu trabalho na utilização desta coleção em sala de aula e em suas demais atribuições.

MODERNA

Sumário

A estrutura da coleção VI

Livro do aluno VI

Suplemento para o professor X

O Ensino Médio XII

O aluno do Ensino Médio XII

O professor XIII

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos XIV

O convívio social em sala de aula XV

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio XVI

As áreas do conhecimento XVII

Temas contemporâneos transversais XVIII

Orientações didáticas e metodológicas XIX

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção XIX

O computador e o ensino da Matemática XXII

O pensamento computacional XXIII

O aluno no centro do processo de aprendizagem XXIV

Estratégias XXV

Avaliação XXVII

A BNCC e a coleção XXIX

Sugestão de cronograma XXIX

Objetivos, comentários e sugestões XXXII

Tema 1 Geometria espacial de posição XXXII

Tema 2 Projeções ortogonais no plano e distância no espaço XXXVIII

Tema 3 Poliedros XL

Tema 4 Prismas XLIV

Tema 5 Prismas na natureza XLIX

Tema 6 Pirâmides LI

Tema 7 O volume da Grande Pirâmide de Gizé LVII

Tema 8 Cilindro LVIII

Tema 9 Volume interno de um motor LXV

Tema 10 Cone LXVI

Tema 11 Esfera LXX

Tema 12 Uma aplicação de volume: adulteração de combustíveis LXXV

Tema 13 Projeções cartográficas LXXVI

Resoluções dos exercícios e problemas LXXXIX

Sugestões ao professor CXVII

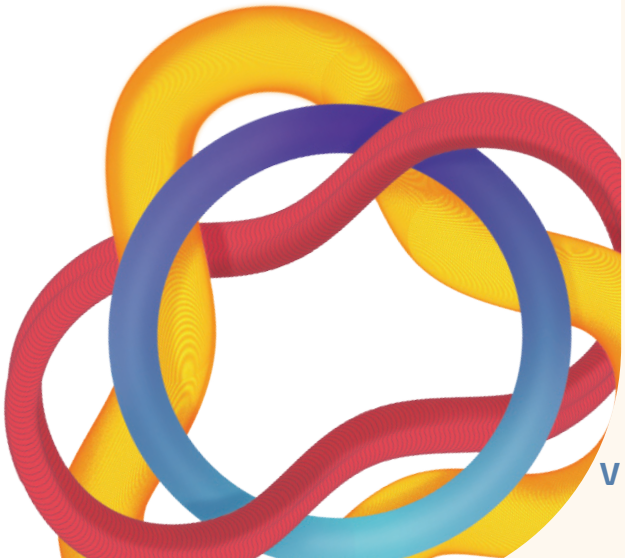
Leituras sobre o ensino de Matemática CXVII

Leituras sobre a História da Matemática CXIX

Leituras sobre os conteúdos deste volume CXX

Sugestões de *sites* para o professor CXXI

Referências bibliográficas ... CXXIII



MODERNA

A estrutura da coleção

Esta coleção de Matemática e suas Tecnologias, destinada ao Ensino Médio, é composta de seis volumes, cujos conteúdos estão organizados por temas. Esses temas, por sua vez, foram elaborados com base nas competências gerais, competências específicas e habilidades elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como nos temas contemporâneos transversais.

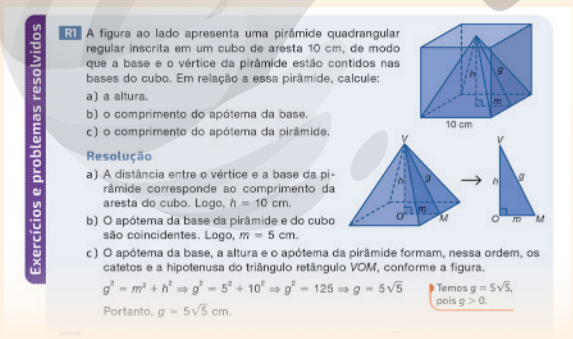
A seguir, são apresentadas as características das seções e de outros elementos que compõem esta coleção.

Livro do aluno

Páginas de abertura do tema

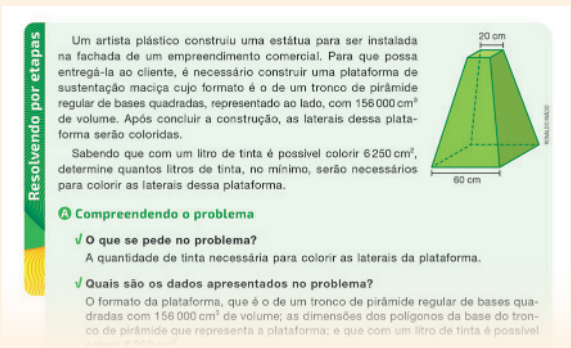
As páginas de abertura apresentam uma temática cujas características permitem estabelecer relações com os conteúdos que serão trabalhados naquele tema. Nessas páginas, há informações que se referem a outras áreas do conhecimento ou à própria Matemática, apresentadas por meio de diferentes recursos, como textos, fotografias, gráficos, infográficos e esquemas. Esses recursos são acompanhados por questões que buscam levantar os conhecimentos prévios dos alunos com relação a diversas situações de âmbito geral, bem como estabelecer intuitivamente relações entre o assunto abordado e alguns conteúdos matemáticos. Essas questões propiciam um momento de interação e troca de ideias entre os alunos, auxiliando no desenvolvimento de sua capacidade argumentativa, além de proporcionar momentos nos quais eles devem ouvir e lidar com pensamentos que possam ser divergentes dos seus. Neste **Suplemento para o professor**, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, são apresentadas informações complementares sobre as páginas de abertura referentes a cada tema, além de sugestões para trabalhá-las em sala de aula, dicas de avaliação dos alunos e outros assuntos que podem ser propostos como ideia para a realização de pesquisas extraclasse. Também são sugeridos outros questionamentos, a fim de atingir os objetivos daquele tema específico.

Exercícios e problemas resolvidos



O objetivo dessa seção é complementar a teoria abordada e os exemplos apresentados com o auxílio de tarefas cujas resoluções são apresentadas aos alunos de maneira detalhada, facilitando-lhes compreender a aplicação prática do conteúdo em questão. Essa seção também tem por finalidade auxiliar os alunos a exercitar suas habilidades e estratégias na resolução de tarefas que serão propostas em outras seções, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

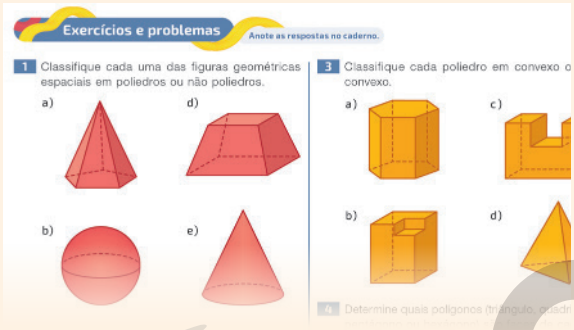
Resolvendo por etapas



MODELO

A seção **Resolvendo por etapas** apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Tais problemas, além de contar com o auxílio do recurso textual, também podem apresentar imagens, gráficos, tabelas, esquemas e outros recursos necessários à compreensão dos alunos. O processo de resolução dos problemas é feito em quatro etapas, denominadas **Compreendendo o problema**, **Organizando as ideias e elaborando um plano**, **Executando o plano** e **Verificando a solução obtida**. Em cada uma dessas etapas, os alunos são orientados a analisar as informações fornecidas no enunciado do problema, separar e organizar os dados apresentados, elaborar e executar um plano que resolva o problema e, por fim, verificar se os procedimentos efetuados estão de acordo com o que foi solicitado. No boxe **Agora é você quem resolve!**, outro problema é apresentado aos alunos. Com isso, eles são levados a analisar se a resolução desse novo problema pode ser obtida seguindo os mesmos procedimentos utilizados na resolução do problema anterior.

Exercícios e problemas


Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Classifique cada uma das figuras geométricas espaciais em poliedros ou não poliedros.

a) d) b) e)

3 Classifique cada poliedro em convexo o convexo.

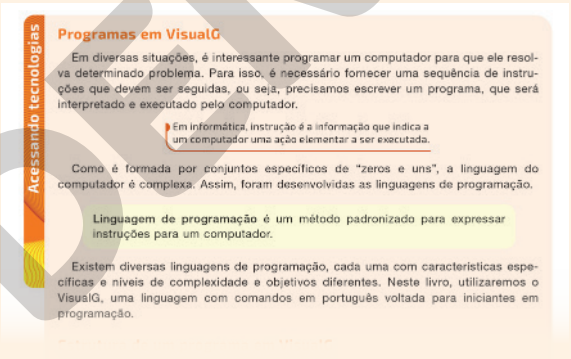
a) c) b) d)

Essa seção traz tarefas relacionadas ao conteúdo estudado em um ou mais tópicos do tema. Dispostas em nível gradual de complexidade, elas podem ser exploradas, em sua maioria, em sala de aula. Aquelas cuja resolução for indicada para ser realizada fora do ambiente escolar devem ser corrigidas, se possível, em aula imediatamente posterior, a fim de promover uma discussão acerca das diferentes maneiras de resolução que vierem a ser apresentadas pelos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, estão indicadas sugestões de condução para algumas das tarefas apresentadas no livro do aluno, que são propostas por meio de questionamentos adicionais, pesquisas complementares e trabalhos interdisciplinares e transdisciplinares a serem desenvolvidos com base no conteúdo ou na temática tratada, visando desenvolver a autonomia e o pensamento crítico dos alunos.

Nos exercícios, a tarefa solicitada está explícita, ou seja, os alunos deverão aplicar de imediato um conceito ou procedimento-padrão estabelecido anteriormente. Já nos problemas, é esperado que os alunos mobilizem conhecimentos, competências e habilidades a fim de conceber estratégias para resolvê-los.

Acessando tecnologias

A seção **Acessando tecnologias** apresenta propostas de tarefas cujos contextos permitem desenvolver os conceitos estudados com o auxílio de recursos tecnológicos, oferecendo, assim, uma estratégia complementar àquela apresentada no livro do aluno. Tais recursos tratam-se, principalmente, de *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, uso de linguagem de programação, indicações de *sites*, entre outras ferramentas tecnológicas que permitem aprofundar os conteúdos matemáticos trabalhados até então. Essa abordagem contribui para que os alunos visualizem e verifiquem, por meio dessas ferramentas, as propriedades estudadas, auxiliando-os, posteriormente, na resolução de problemas. O principal objetivo dessa seção é estimular o aluno a utilizar ferramentas tecnológicas computacionais com o intuito de agilizar diversas atividades práticas de seu dia a dia. É importante enfatizar que os recursos sugeridos nessa seção são disponibilizados gratuitamente na internet, estando, portanto, ao alcance de todos.


Acessando tecnologias

Programas em VisualG

Em diversas situações, é interessante programar um computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Em informática, instrução é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

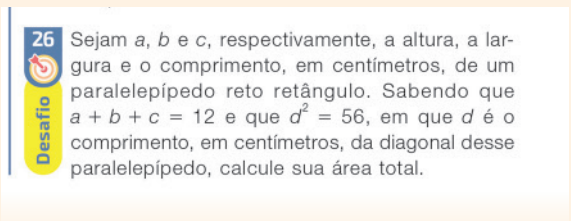
Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Neste livro, utilizaremos o VisualG, uma linguagem com comandos em português voltada para iniciantes em programação.

Algumas tarefas, por apresentarem certas características, recebem destaques diferentes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Desafio

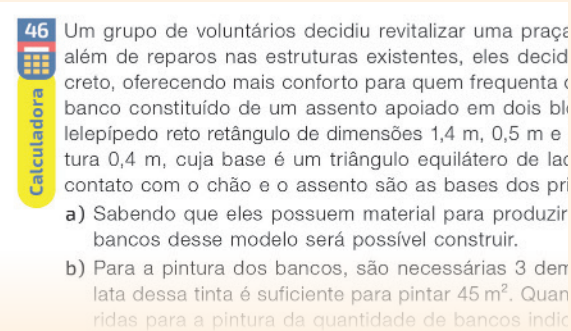
O destaque **Desafio** indica tarefas que apresentam maior nível de dificuldade e cuja resolução vai além da aplicação imediata do conteúdo trabalhado. De modo geral, o aluno é levado a desenvolver as próprias estratégias de resolução e a aprimorar seu raciocínio lógico.


Desafio

26 Sejam a, b e c, respectivamente, a altura, a largura e o comprimento, em centímetros, de um paralelepípedo reto retângulo. Sabendo que $a + b + c = 12$ e que $d^2 = 56$, em que d é o comprimento, em centímetros, da diagonal desse paralelepípedo, calcule sua área total.

Calculadora

O destaque **Calculadora** é utilizado em tarefas cuja execução dos cálculos deve ser realizada com o auxílio de calculadoras, comuns ou científicas. Em alguns casos, esse instrumento possibilitará ao aluno criar as próprias estratégias de resolução, verificando resultados e regularidades.


46 Calculadora

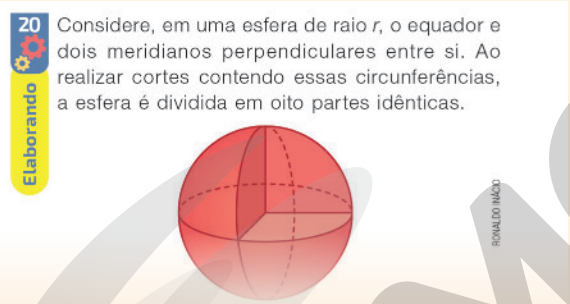
Um grupo de voluntários decidiu revitalizar uma praça além de reparos nas estruturas existentes, eles decid creto, oferecendo mais conforto para quem frequenta banco constituído de um assento apoiado em dois bl lelepípedo reto retângulo de dimensões 1,4 m, 0,5 m e tura 0,4 m, cuja base é um triângulo equilátero de la contato com o chão e o assento são as bases dos pri

a) Sabendo que eles possuem material para produzir bancos desse modelo será possível construir.

b) Para a pintura dos bancos, são necessárias 3 dem lata dessa tinta é suficiente para pintar 45 m². Quan ridas para a pintura da quantidade de bancos indic

Elaborando

O destaque **Elaborando** indica tarefas que exploram o desenvolvimento da escrita, nas quais os alunos são levados a elaborar problemas, relatórios ou outros tipos de textos tomando como base imagens ou informações previamente apresentadas.

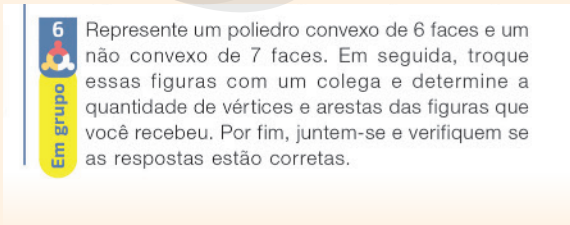

20 Elaborando

Considere, em uma esfera de raio *r*, o equador e dois meridianos perpendiculares entre si. Ao realizar cortes contendo essas circunferências, a esfera é dividida em oito partes idênticas.

RONALDO NAZO

Em grupo

O destaque **Em grupo** é aplicado às tarefas cuja resolução será mais proveitosa aos alunos caso tenham o auxílio de um ou mais colegas, promovendo, assim, um momento de interação e permitindo que eles investiguem, expliquem e justifiquem os problemas resolvidos.


6 Em grupo

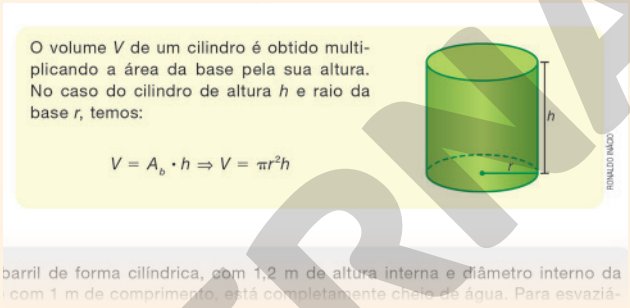
Represente um poliedro convexo de 6 faces e um não convexo de 7 faces. Em seguida, troque essas figuras com um colega e determine a quantidade de vértices e arestas das figuras que você recebeu. Por fim, juntem-se e verifiquem se as respostas estão corretas.

Elementos das teorias e das seções especiais

No decorrer do livro do aluno, alguns elementos, por possuírem certas características, serão apresentados com algum destaque. Os elementos visuais que caracterizam esses destaques estão descritos logo a seguir.

Quadro-teoria

Localizado junto à parte teórica, o **Quadro-teoria** tem o objetivo de formalizar alguns conceitos, apresentando propriedades, definições e relações importantes acerca do conteúdo estudado.


O volume *V* de um cilindro é obtido multiplicando a área da base pela sua altura. No caso do cilindro de altura *h* e raio da base *r*, temos:

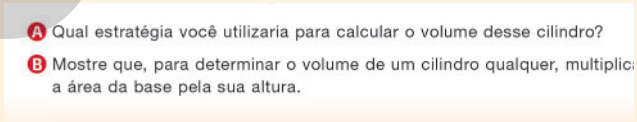
$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 h$$

RONALDO NAZO

barril de forma cilíndrica, com 1,2 m de altura interna e diâmetro interno da com 1 m de comprimento, está completamente cheio de água. Para esvaziá-

Questão intervenção

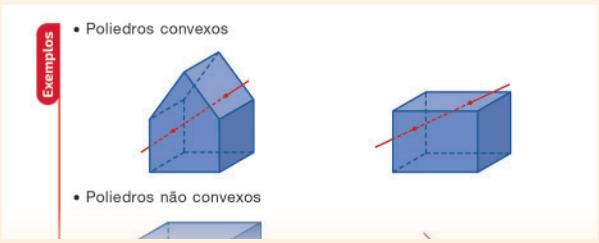
Localizada junto à parte teórica, a **Questão intervenção**, que pode apresentar cunho matemático ou de caráter pessoal, leva os alunos a refletir a respeito das aplicações práticas que envolvem o conteúdo apresentado.


A Qual estratégia você utilizaria para calcular o volume desse cilindro?

B Mostre que, para determinar o volume de um cilindro qualquer, multiplica a área da base pela sua altura.

Exemplo

O destaque **Exemplo** tem o objetivo de apresentar aos alunos alguns exemplos práticos que retratam a teoria abordada.


Exemplos

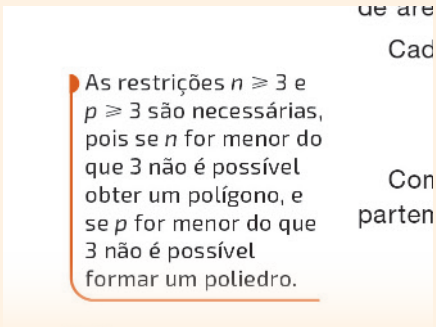
• Poliedros convexos

• Poliedros não convexos

MODERNA

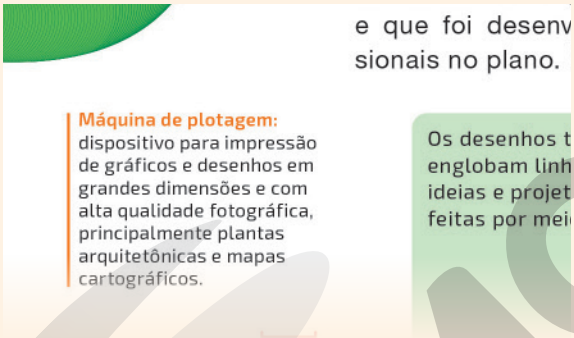
Boxe info

O destaque **Boxe info** apresenta lembretes, dicas ou informações complementares, cujo objetivo é fornecer subsídios que auxiliem os alunos na resolução de algumas tarefas ou na compreensão de determinadas teorias.



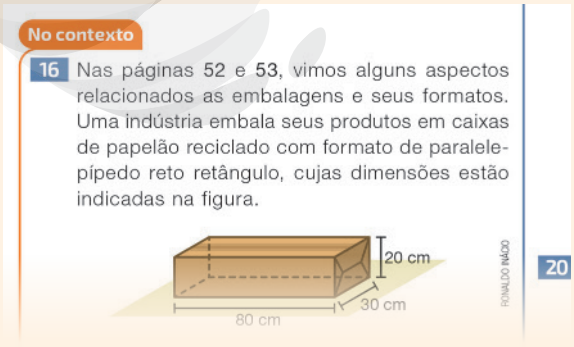
Vocabulário

O quadro **Vocabulário** traz o significado de algumas palavras em destaque no texto, geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos alunos, a fim de auxiliar na compreensão das informações apresentadas.



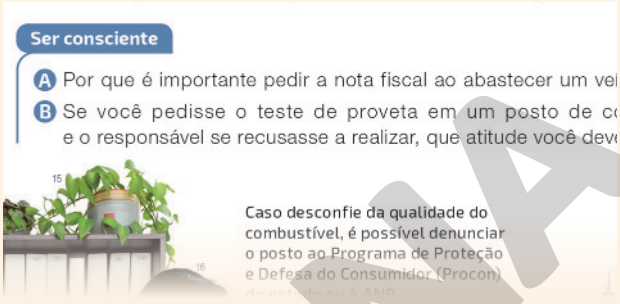
No contexto

O destaque **No contexto** indica tarefas que estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.



Ser consciente

O destaque **Ser consciente** tem o objetivo de abordar assuntos que podem, inclusive, ser relacionados aos temas contemporâneos transversais descritos na BNCC. Geralmente, os contextos que apresentam esse destaque procuram levar os alunos a refletir a respeito de questões que impactam diretamente em alguns aspectos da nossa sociedade, com o intuito de envolvê-los em uma avaliação cidadã e social da situação proposta.



Ícones

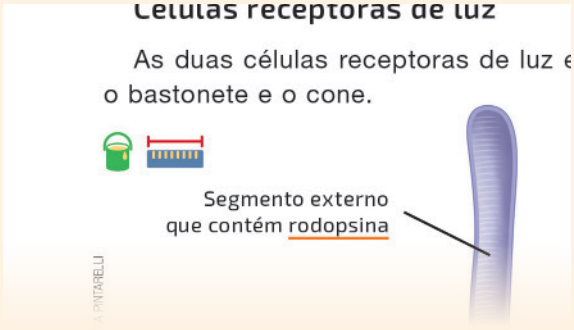
Em certos momentos desta coleção, alguns ícones serão utilizados para indicar informações importantes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Proporcionalidade

Indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

Cor

Indica que as cores dos objetos retratados não correspondem à realidade.



Ampliando seus conhecimentos

Encontrada no fim de cada volume, essa seção traz sugestões de livros, *sites* e *podcasts* para complementar o estudo dos conteúdos trabalhados nos temas. É essencial que os alunos sejam incentivados a consultar essas fontes de informação.

MODERNA

Suplemento para o professor

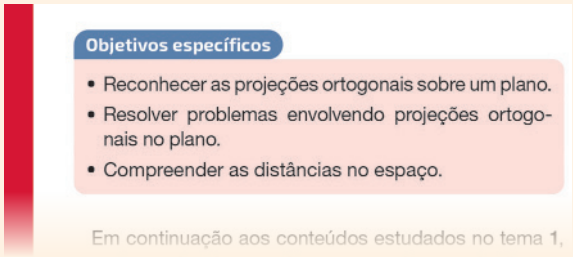
O livro do professor impresso é composto do livro do aluno, com comentários e respostas das tarefas apresentadas, e do **Suplemento para o professor**, constituído de parte geral, parte específica, resoluções dos exercícios e problemas e sugestões de leitura e de *sites*. A parte geral é composta dos pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam esta coleção, da descrição e das orientações acerca das seções e da estrutura de conteúdos, bem como de suas relações com a BNCC e do quadro de distribuição dos conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Já a parte específica, desenvolvida no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, apresenta ao professor orientações específicas dos conteúdos apresentados página a página.

Além do livro impresso, também é disponibilizado um videotutorial de caráter complementar, que tem o objetivo de destacar elementos-chave da obra em linguagem audiovisual atrativa e simplificada para o professor.

Conheça, a seguir, as características da parte específica deste **Suplemento para o professor**.

Objetivos específicos

No início de cada tema são apresentados os principais objetivos que se almejam atingir no trabalho com aqueles conteúdos.



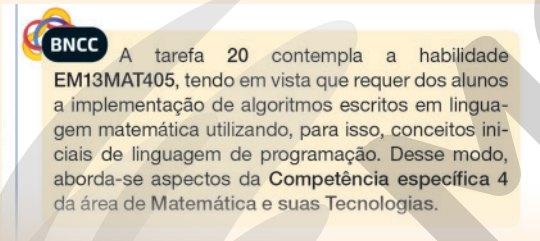
Objetivos específicos

- Reconhecer as projeções ortogonais sobre um plano.
- Resolver problemas envolvendo projeções ortogonais no plano.
- Compreender as distâncias no espaço.

Em continuação aos conteúdos estudados no tema 1,

BNCC

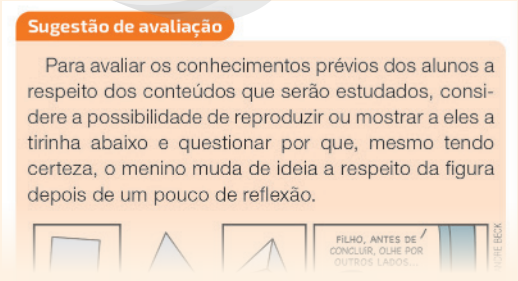
No decorrer dos temas são destacadas e comentadas algumas relações entre o que está sendo abordado no livro do aluno e o que é proposto na BNCC.



BNCC A tarefa 20 contempla a habilidade **EM13MAT405**, tendo em vista que requer dos alunos a implementação de algoritmos escritos em linguagem matemática utilizando, para isso, conceitos iniciais de linguagem de programação. Desse modo, aborda-se aspectos da **Competência específica 4** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Sugestão de avaliação

Apresenta sugestões e estratégias de avaliação para que o professor verifique a aprendizagem dos alunos em momentos oportunos.

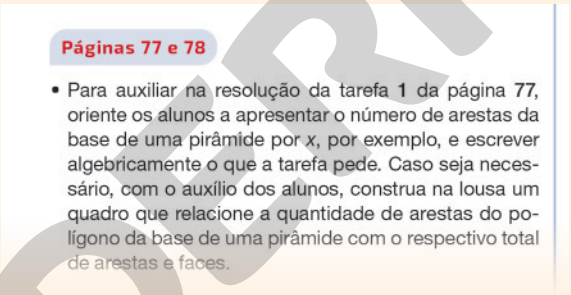


Sugestão de avaliação

Para avaliar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito dos conteúdos que serão estudados, considere a possibilidade de reproduzir ou mostrar a eles a tirinha abaixo e questionar por que, mesmo tendo certeza, o menino muda de ideia a respeito da figura depois de um pouco de reflexão.

Orientações página a página

As orientações e informações complementares importantes para o desenvolvimento dos conteúdos, das tarefas e das seções especiais encontram-se indicadas em tópicos, separadas de acordo com as páginas do livro do aluno.



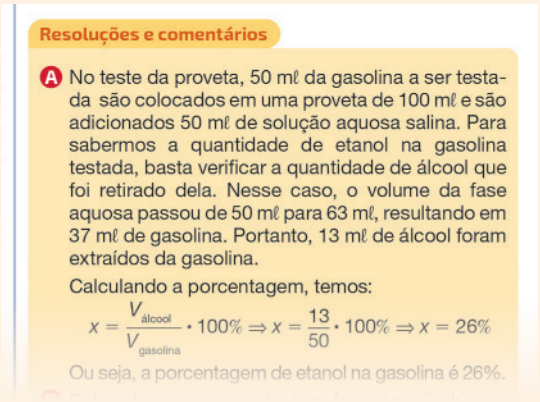
Páginas 77 e 78

- Para auxiliar na resolução da tarefa **1** da página **77**, oriente os alunos a apresentar o número de arestas da base de uma pirâmide por x, por exemplo, e escrever algebricamente o que a tarefa pede. Caso seja necessário, com o auxílio dos alunos, construa na lousa um quadro que relacione a quantidade de arestas do polígono da base de uma pirâmide com o respectivo total de arestas e faces.

Resolução e comentários

As resoluções das questões das páginas de abertura, das questões intervenção e de algumas tarefas específicas encontram-se em boxes como esse.

No decorrer do desenvolvimento dos temas, sempre que for oportuno, são apresentadas citações que enriquecem e fundamentam o trabalho com o conteúdo proposto.



Resoluções e comentários

A No teste da proveta, 50 mℓ da gasolina a ser testada são colocados em uma proveta de 100 mℓ e são adicionados 50 mℓ de solução aquosa salina. Para sabermos a quantidade de etanol na gasolina testada, basta verificar a quantidade de álcool que foi retirado dela. Nesse caso, o volume da fase aquosa passou de 50 mℓ para 63 mℓ, resultando em 37 mℓ de gasolina. Portanto, 13 mℓ de álcool foram extraídos da gasolina.

Calculando a porcentagem, temos:

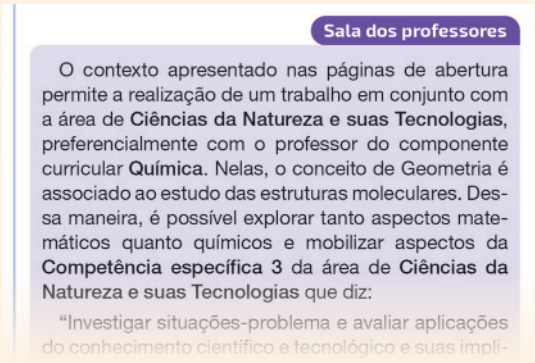
$$x = \frac{V_{\text{álcool}}}{V_{\text{gasolina}}} \cdot 100\% \Rightarrow x = \frac{13}{50} \cdot 100\% \Rightarrow x = 26\%$$

Ou seja, a porcentagem de etanol na gasolina é 26%.

MODERNA

Sala dos professores

Esse boxe estará presente em abordagens e tarefas que permitam relacionar o conteúdo com outras áreas do conhecimento, apresentando sugestões e subsídios para a construção de aulas em conjunto com professores de outros componentes curriculares.



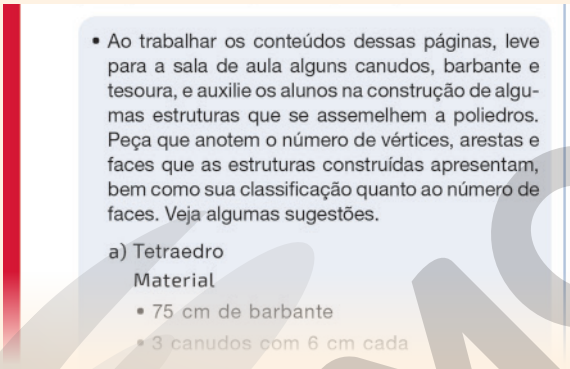
Sala dos professores

O contexto apresentado nas páginas de abertura permite a realização de um trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Química**. Nelas, o conceito de Geometria é associado ao estudo das estruturas moleculares. Dessa maneira, é possível explorar tanto aspectos matemáticos quanto químicos e mobilizar aspectos da **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas impli-

Tarefas extras

Apresenta sugestões de tarefas extras com o objetivo de complementar o trabalho com o conteúdo do respectivo tema.



- Ao trabalhar os conteúdos dessas páginas, leve para a sala de aula alguns canudos, barbante e tesoura, e auxilie os alunos na construção de algumas estruturas que se assemelhem a poliedros. Peça que anotem o número de vértices, arestas e faces que as estruturas construídas apresentam, bem como sua classificação quanto ao número de faces. Veja algumas sugestões.

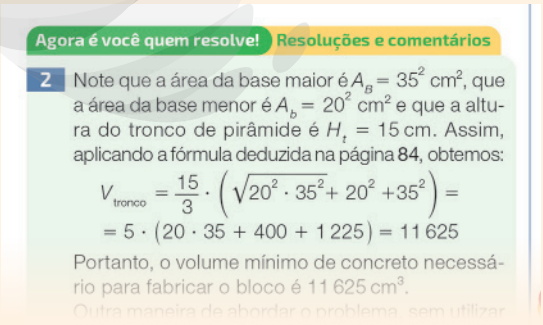
a) Tetraedro

Material

- 75 cm de barbante
- 3 canudos com 6 cm cada

Agora é você quem resolve! Resolução

Apresenta as respostas da seção **Resolvendo por etapas**.



Agora é você quem resolve! Resoluções e comentários

2 Note que a área da base maior é $A_B = 35^2$ cm², que a área da base menor é $A_b = 20^2$ cm² e que a altura do tronco de pirâmide é $H_t = 15$ cm. Assim, aplicando a fórmula deduzida na página 84, obtemos:

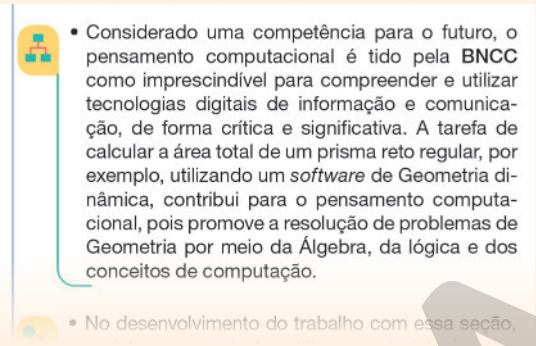
$$V_{tronco} = \frac{15}{3} \cdot \left(\sqrt{20^2 \cdot 35^2} + 20^2 + 35^2\right) =$$
$$= 5 \cdot (20 \cdot 35 + 400 + 1\,225) = 11\,625$$

Portanto, o volume mínimo de concreto necessário para fabricar o bloco é 11 625 cm³.

Outra maneira de abordar o problema, sem utilizar

Pensamento computacional

Selo utilizado para indicar que o texto apresenta informações a respeito do pensamento computacional.

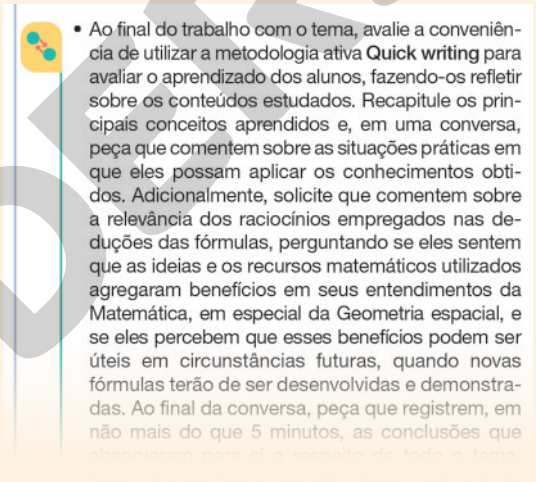


- Considerado uma competência para o futuro, o pensamento computacional é tido pela **BNCC** como imprescindível para compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação, de forma crítica e significativa. A tarefa de calcular a área total de um prisma reto regular, por exemplo, utilizando um *software* de Geometria dinâmica, contribui para o pensamento computacional, pois promove a resolução de problemas de Geometria por meio da Álgebra, da lógica e dos conceitos de computação.

- No desenvolvimento do trabalho com essa seção,

Metodologia ativa

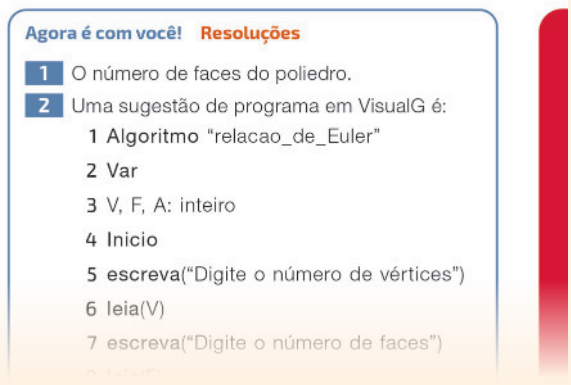
Selo utilizado para sinalizar que o texto apresenta indicações quanto ao uso das metodologias ativas.



- Ao final do trabalho com o tema, avalie a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule os principais conceitos aprendidos e, em uma conversa, peça que comentem sobre as situações práticas em que eles possam aplicar os conhecimentos obtidos. Adicionalmente, solicite que comentem sobre a relevância dos raciocínios empregados nas deduções das fórmulas, perguntando se eles sentem que as ideias e os recursos matemáticos utilizados agregaram benefícios em seus entendimentos da Matemática, em especial da Geometria espacial, e se eles percebem que esses benefícios podem ser úteis em circunstâncias futuras, quando novas fórmulas terão de ser desenvolvidas e demonstradas. Ao final da conversa, peça que registrem, em não mais do que 5 minutos, as conclusões que

Agora é com você! Resolução

Apresenta as respostas da seção **Acessando tecnologias**.



Agora é com você! Resoluções

1 O número de faces do poliedro.

2 Uma sugestão de programa em VisualG é:

```
1 Algoritmo "relacao_de_Euler"
2 Var
3 V, F, A: inteiro
4 Inicio
5 escreva("Digite o número de vértices")
6 leia(V)
7 escreva("Digite o número de faces")
```

MODERNA

O Ensino Médio

Nos últimos anos, o Ensino Médio no Brasil passou por uma reforma que instituiu novos parâmetros e diretrizes para esse segmento. O objetivo dessas mudanças foi combater índices de evasão escolar, promovendo um ensino que atendesse às expectativas dos jovens em relação ao seu projeto de vida pessoal e profissional e que estivesse alinhado com as necessidades e os anseios desse público. Além disso, almejava-se também ampliar o engajamento desses alunos, para que pudessem desenvolver maneiras autônomas de lidar com os desafios do mundo contemporâneo.

Com base nessas novas perspectivas educacionais, é necessário compreender o Ensino Médio como uma etapa de grande importância política e social, aspecto que supera o conceito de apenas ser uma fase passageira na vida dos jovens. Na verdade, o Ensino Médio constitui-se um momento fundamental de protagonismo e de desenvolvimento pessoal. É nessa fase que os alunos ampliam suas perspectivas culturais, convivendo em um espaço de ampla diversidade de ideias e de opiniões. Também desenvolvem suas capacidades de tomada de decisão, cujo maior desafio é aprender a fazer escolhas coerentes e alinhadas com seu projeto de vida.

Assim, é fundamental que a escola do Ensino Médio desenvolva uma atitude acolhedora das juventudes, estando preparada para os desafios que essa fase exige, principalmente no que se refere à formação profissional e à construção da cidadania dos jovens. Isso requer condutas que priorizem a construção da autonomia dos alunos, que em breve estarão atuando na vida pública sem o acompanhamento de adultos. Desse modo, como podemos preparar os jovens para participar da sociedade de forma responsável?

> A experiência participativa representa uma das formas de os jovens vivenciarem processos de construção de pautas, projetos e ações coletivas. Além disso, a experiência participativa também é importante por permitir a vivência de valores, como os da solidariedade e da democracia, e o aprendizado da alteridade. O que significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças. O exercício da participação pode ser, então, uma experiência decisiva para a vida dos jovens um efetivo contraponto – em uma sociedade que, ao se individualizar, enfraquece ideias, valores e práticas relacionadas à dimensão coletiva da vida social.
>
> BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 46.

É no Ensino Médio também que ocorre a preparação mais intensa e aprofundada dos alunos para os vestibulares e os exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Algumas instituições, inclusive, aceitam alunos que não tenham completado o Ensino Médio como uma espécie de "treineiros", para testar suas habilidades e seus conhecimentos antes da prova efetiva ao final desse ciclo. Esses exames têm como objetivo verificar o desempenho e avaliar o preparo dos jovens para os desafios da vida adulta, seja no âmbito profissional, seja no social. Além disso, as avaliações em larga escala contribuem para monitorar as redes de ensino de modo a oferecer soluções educacionais viáveis por meio de políticas públicas.

Esta coleção apresenta diversos subsídios para auxiliar os alunos na preparação para esses exames, entre eles o Enem. Nas seções **Exercícios e problemas resolvidos** e **Exercícios e problemas**, por exemplo, sempre que possível, apresentamos questões extraídas diretamente do Enem e de vestibulares atuais para que os alunos possam se familiarizar com o formato das provas fornecidas por essas instituições. Além disso, há propostas de elaboração de problemas e articulações interdisciplinares e transdisciplinares, com abordagens que podem contribuir para o desempenho dos alunos em futuras avaliações.

O aluno do Ensino Médio

Existem diversas maneiras de conceituar a fase da juventude. Época de incertezas e de definição identitária, por muito tempo a juventude foi compreendida como um período de passagem, uma etapa prévia da vida adulta, marcada por uma faixa etária delimitada. Porém, de acordo com o estudioso Juarez Dayrell (2016), as pesquisas mais atuais têm demonstrado que a juventude deve ser compreendida como uma categoria socialmente construída na qual os jovens se assumem como verdadeiros sujeitos, ou seja, possuem determinada origem familiar, estão inseridos em relações sociais, apresentam uma historicidade específica, movem-se por desejos e se constituem como seres ativos e produtores de conhecimento.

> A juventude constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social, no qual o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe, por exemplo), a diversidade cultural (a cor da pele, as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero e

MODELO

> de orientação afetiva e até mesmo as diferenças territoriais se articulam para a constituição das diferentes modalidades de se vivenciar a juventude.
>
> DAYRELL, Juarez. (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016, p. 27.

Para que as relações possam ser fecundas e mutuamente respeitosas no ambiente escolar, uma opção interessante é investir no trabalho com as diversas manifestações culturais juvenis, ou seja, fazer da escola um território de produção cultural da juventude e não apenas um local de aprendizado de uma cultura externa ou "adulta". Nesse contexto, o jovem deve se identificar com as produções culturais com as quais convive, deve se sentir incluído e, principalmente, valorizado.

> Os jovens sujeitos do Ensino Médio nos trazem cotidianamente desafios para o aprimoramento de nosso ofício de educar. Entre esses desafios, encontra-se a difícil tarefa de compreensão dos sentidos os quais os jovens elaboram no agir coletivo, em seus grupos de estilo e identidades culturais e territoriais que, em grande medida, nos são apenas "estranhos" (no sentido de estrangeiros) e diferem de muitas de nossas concepções (adultas) de educação (escolar ou não), de autoridade, de respeito, de sociabilidade "adequada" e produção de valores e conhecimentos.
>
> BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I - caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 20.

Realizar esse trabalho de aproximação e de valorização das culturas juvenis exige muito mais do professor. A primeira etapa é passar a compreender o jovem como um sujeito de interlocução, com o qual podemos aprender e expandir nossos horizontes culturais. Essa aproximação requer uma flexibilidade por parte dos professores, que muitas vezes terão de superar visões estereotipadas e superficiais sobre a juventude atual. Assim, deve-se considerar que os jovens não estão inseridos em uma cultura única. A juventude se constitui como categoria socialmente construída, que deve ser analisada com base no contexto de cada comunidade. Existem jovens, por exemplo, que já estão inseridos no mercado de trabalho e que vivenciam a juventude de um modo muito diferente daqueles que têm mais tempo de lazer ou de estudo.

Compreender essas múltiplas culturas juvenis que permeiam o contexto escolar faz parte do processo de inovação que tem marcado o curso educativo nos últimos anos. Em vez de "transmitirmos os saberes" aos jovens, por que não trocarmos e compartilharmos conhecimento, abrindo espaços e criando condições para que as culturas juvenis se expressem no ambiente escolar? Essas novas práticas compõem um caminho de construção coletiva do conhecimento. Sob esse ponto de vista, a aprendizagem passa a ser encarada como uma via de mão dupla, como uma troca e, assim, tende a criar um clima mais saudável e menos impositivo, sendo menos propício ao desenvolvimento de problemas indisciplinares e de relações conflituosas.

O professor

Diante desses novos desafios educacionais, que envolvem inclusive o trabalho com metodologias ativas e tecnologias, o professor assume cada vez mais o papel de mediador das relações entre os alunos e o conhecimento, orientando o caminho a ser adotado no processo de ensino e aprendizagem. Essa mediação ocorre de acordo com um planejamento bem definido das aulas, no qual são explicitadas as estratégias de engajamento e protagonismo dos alunos. Supera-se a postura de um profissional meramente transmissor de informações e almeja-se uma conduta mais interativa, que toma como base a colaboração.

> O papel do professor é mais o de curador e de orientador. Curador, que escolhe o que é relevante entre tanta informação disponível e ajuda a que os alunos encontrem sentido no mosaico de materiais e atividades disponíveis. Curador, no sentido também de cuidador: ele cuida de cada um, dá apoio, acolhe, estimula, valoriza, orienta e inspira. Orienta a classe, os grupos e cada aluno.
>
> MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Orgs.). Coleção Mídias Contemporâneas. *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. v. II. Ponta Grossa: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. p. 24.

Sabe-se que no Brasil as turmas de Ensino Médio são diversificadas e são formadas por grupos de alunos que possuem diferenças nos modos de aprender. O processo de ensino e aprendizagem é complexo e envolve diversas dimensões da vida dos sujeitos. Knud Illeris (2013), por exemplo, descreve a aprendizagem em três dimensões: a de conteúdo, a de incentivo e a de interação. A dimensão de **conteúdo** envolve a aprendizagem cognitiva, relacionada aos conhecimentos que são internalizados. Já a dimensão de **incentivo** se relaciona às sensibilidades, ao equilíbrio mental e às motivações que instigam as pessoas no aprendizado. Por fim, a dimensão de **interação** é aquela que está ligada à sociabilidade e à comunicação do indivíduo.

Desse modo, uma maneira de o professor lidar com a diversidade em sala de aula é identificar em qual dimensão de aprendizagem estão as defasagens dos alunos. Com esse diagnóstico, pode-se, então, desenvolver estratégias adequadas ao tipo de dificuldade específica apresentada por eles. Por exemplo, em casos de defasa-

EM MODERNIZAÇÃO

gem na dimensão de interação, o professor poderá desenvolver estratégias de trabalho em grupo e dinâmicas que exijam a troca de ideias. Quando o problema for em relação à dimensão de incentivo, o professor poderá repensar as maneiras pelas quais aquele conteúdo instiga os alunos e se relaciona com o cotidiano deles.

Nesse sentido, sabe-se que não é fácil a adequação aos novos parâmetros que têm sido delimitados na educação no século XXI. Muitos professores vão precisar de um período de adaptação para renovar e implementar suas práticas. Para contribuir com esse processo, sugerimos a seguir algumas condutas que podem ser utilizadas durante o planejamento e durante as aulas com turmas do Ensino Médio.

- Observar os alunos de modo personalizado, adequando os desafios e as propostas às características de cada um e procurando colocar a diferença como um agregador e um ponto positivo em relação ao coletivo.
- Organizar planejamentos coletivos e individuais para lidar com as turmas como um todo e também de modo personalizado.
- Relacionar os temas e conteúdos à realidade próxima dos alunos, problematizando as experiências vivenciadas e alinhando os conteúdos aos interesses da turma.
- Dar importância à significação dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula.
- Propor constantemente diferentes maneiras de autoavaliação, permitindo aos alunos um momento de reflexão a respeito de suas atividades e seu aprendizado e, também, permitindo ao professor avaliar suas práticas em sala de aula.
- Desenvolver flexibilidade para improvisar, quando necessário, e para adequar as propostas metodológicas à realidade de cada turma.
- Acompanhar a evolução de cada grupo ou aluno, avaliando-a sob uma perspectiva processual.
- Evitar propostas que abordem capacidades meramente interpretativas e que não desafiem os alunos a desenvolver sua criatividade e seu pensamento crítico.
- Inserir opiniões e sugestões dos alunos no planejamento das tarefas, considerando suas dificuldades e preferências.
- Capacitar os alunos em determinadas atividades com as quais eles possam não estar acostumados, como a realização de uma pesquisa bem fundamentada ou a produção de um texto-síntese.
- Gerir o tempo de modo personalizado, observando os ritmos de aprendizagem específicos das turmas.
- Aderir a dinâmicas que alterem o posicionamento tradicional das carteiras em sala de aula, promovendo atividades em grupo e explorando os diversos ambientes da escola.
- Propor trabalhos em grupos, para que os alunos desenvolvam suas capacidades de expressão e de socialização.

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a adolescência é o período de 10 a 19 anos de idade (BRASIL, 2018d). Nessa etapa da vida, o indivíduo ainda se encontra em desenvolvimento e vários fatores podem interferir em seu comportamento e em sua saúde mental. Trata-se de um período de mudanças e descobertas, no qual o jovem constrói e reconstrói sua identidade. Fatores emocionais associados à realidade social, econômica, histórica e cultural tornam essa parcela da população muito vulnerável mental e emocionalmente.

Entre os problemas relacionados à saúde mental que mais afetam os jovens, de acordo com entidades internacionais, está a violência familiar, o *bullying*, a depressão, a ansiedade e a dependência química.

Os casos de *bullying*, por exemplo, envolvem relações de poder e dominação que provocam violência psicológica e, muitas vezes, física, sem motivos aparentes. Em alguns casos, os indivíduos agressores recebem punição, mas é necessário promover um trabalho de conscientização para que esses jovens possam refletir sobre suas ações e analisar os impactos emocionais que elas acarretam para as vítimas. Os jovens que praticam *bullying* geralmente são atraídos por um imaginário preestabelecido de padrões de beleza, comportamento, consumo e configurações sociais. Por isso, as ações de combate a essa prática devem contribuir para a desconstrução desses padrões e para o respeito à diversidade.

Além disso, é preciso analisar o contexto familiar desses jovens, que, muitas vezes, vivem em ambientes onde há violência e/ou negligência. Por essas razões, é imprescindível o papel da escola no cuidado com a saúde mental dos alunos, combatendo ativamente todos os modos de discriminação e violência.

Para isso, são necessários programas para prevenir o *bullying* e qualquer outro tipo de violência, além do abuso de substâncias nocivas. Esses programas devem ter a participação da escola, dos familiares, da comunidade e de profissionais, como psicólogos e psicopedagogos. Tal união pode contribuir para detectar os sinais de problemas envolvendo a saúde mental dos alunos e para

MODERNA

tomar as medidas necessárias antes que esse tipo de comportamento resulte em alguma consequência grave.

Como a escola pode contribuir na promoção da saúde mental dos alunos?

A escola deve ser um espaço de disseminação do respeito e da proteção social dos jovens, atuando com a participação ativa das famílias. Nela, os alunos podem ser organizados em grupos a fim de possibilitar a troca de experiências em debates mediados por um psicólogo. Assim, os jovens tendem a se sentir mais à vontade para discutir e relatar sua realidade, compartilhando suas emoções e descobrindo os gatilhos que os fazem reagir com violência, ansiedade ou tristeza, por exemplo. Trata-se de uma oportunidade para trabalhar o autoconceito, a autoimagem e a autoestima dos jovens.

Averigue a possibilidade de a escola oferecer espaços em horários alternativos para que os alunos desenvolvam atividades extracurriculares, como esportes, oficinas de teatro, atividades de cuidado com a escola e com os colegas, oficinas de dança, gincanas, competições e simulados. Nesses momentos, é importante incluir alunos de diferentes perfis. A convivência é essencial para o desenvolvimento do respeito mútuo e da empatia, colaborando com a saúde mental deles.

Atividades envolvendo atitudes solidárias podem contribuir para que os alunos se coloquem no lugar de outras pessoas, desenvolvendo a empatia. Uma sugestão é promover campanhas de coleta de produtos com o intuito de disponibilizá-los às pessoas vulneráveis e em situação de necessidade assistidas por instituições sociais do município.

Outras atividades podem envolver o futuro dos alunos, identificando os potenciais de cada um a fim de construir um projeto de vida. Mostrar que suas atitudes hoje influenciam o futuro incentiva-os a refletir sobre suas escolhas e opções. A escola, então, tem o papel de ajudá-los a ultrapassar as barreiras com atividades que envolvam a autoestima, o autoconhecimento e o autocuidado.

O professor deve ficar atento aos sinais que denotem mudança de comportamento dos alunos e que demandem o encaminhamento para avaliação da equipe formada pelos profissionais que cuidam da saúde mental, ações que contribuem para prevenir transtornos. Para isso, é muito importante que o professor converse com a administração da escola sobre a possibilidade de promover eventos de formação continuada relacionada à saúde mental.

O convívio social em sala de aula

A convivência social é um aspecto importante na vida de qualquer indivíduo. Vivemos constantemente em interação com outras pessoas e dependemos delas em muitas atividades do dia a dia. Por isso, é necessário ter harmonia no convívio social, com proveito mútuo e respeito constante. Não ter preconceitos, compreender as necessidades do outro, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para criar um ambiente propício para o crescimento em conjunto exige, além de boa vontade, ações de inclusão e integração comunitária.

Na socialização humana, em especial no ambiente escolar, lidamos com indivíduos de diferentes perfis, com diversas crenças e opiniões. Respeitar essas diferenças é dever de cada um e a palavra-chave, em todos os casos, é empatia.

Comumente, a escola é um dos primeiros lugares onde boa parte dos jovens tem contato com outras pessoas. Assim, entre as tarefas do professor, está a necessidade de orientar e instruir os alunos a ser empáticos, desenvolvendo a tolerância, a sensibilidade e, principalmente, o respeito para com os demais. Por meio de práticas saudáveis e bons exemplos, é possível que o professor consiga influenciar seus alunos em um sentido positivo de comportamento socialmente responsável, o qual poderá vir a ter impactos benéficos na sociedade como um todo.

Ações que podem facilitar a construção de um ambiente com essas características incluem, por exemplo, conversas amistosas nas quais, um a um, os alunos possam expressar suas opiniões e compartilhar suas emoções sobre os mais variados assuntos. Tal prática pode ser incrementada com atividades complementares, como a solicitação de pesquisas extraclasse, para posterior debate construtivo, a respeito de temas como as relações familiares, a importância dos vínculos de amizade, a aceitação de ideias contrárias às nossas e o respectivo respeito, o pluralismo cultural na escola e no ambiente de trabalho, a promoção da paz na comunidade escolar, entre outros.

A Matemática, nesse contexto, pode ser uma ferramenta para analisar dados acerca da distribuição de renda ou das discriminações em razão de etnia, sexo ou crença, investigando e interpretando as porcentagens de cada grupo sociocultural em diferentes estudos estatísticos. Com base em análises quantitativas, é possível discutir os desafios que a sociedade enfrenta rumo à efetividade da justiça social, que pode ser um ponto de partida para a troca de ideias e o autoconhecimento por parte dos alunos, inclusive com o envolvimento do professor. Para isso, noções de proporcionalidade, de causas e consequências lógicas e até mesmo da objetividade dos números na descrição dos fenômenos naturais, incluindo os socioeconômicos, são fatores importantes para a compreensão da realidade e, também, para aumentar a consciência dos jovens de modo a auxiliá-los no embasamento de argumentos.

Ademais, sempre que julgar conveniente, o professor pode conversar com os alunos, dispondo-se a ouvi-los e incentivando-os a expressar suas ideias. Atitudes desse tipo favorecem o respeito e a admiração mútuos, contribuindo para o engajamento saudável e natural em sala de aula.

MODERNA

Além disso, é importante conversar com os alunos sobre traçar planos em busca de sonhos e alcançar os meios necessários para consolidá-los pelo próprio esforço. Justamente por essa razão, também estão entre seus maiores desafios.

Nesse processo dinâmico, muitas vezes sem fim, a educação assume um papel importantíssimo, em especial nas peculiares etapas de transição entre a infância e a vida adulta. Ao lado da família, da sociedade e da autodeterminação do próprio sujeito, a escola é o fator mais importante na produção desse despertar de consciência e de responsabilidade no jovem, instruindo-o, tanto quanto possível, na estruturação gradativa e na viabilização sensata de um projeto de vida tão necessário. Tal projeto, constituindo o alicerce em que o futuro do jovem será edificado, deve levar em consideração os múltiplos âmbitos interconectados em que a vida se manifesta: pessoal, educacional, profissional, social, político, moral, intelectual e emocional.

O anseio por objetivos de vida maiores e mais realistas do que aqueles dos primeiros sonhos da infância costumam despontar com ímpeto durante a juventude, e normalmente o fazem de maneira desordenada, cheia de agitação, ingenuidades, inseguranças e receios. Assim, a escola deve se preocupar com a formação integral dos alunos e assumir o compromisso de lidar adequadamente com essas questões, elegendo a construção da autonomia como o eixo central em torno do qual organizar suas atividades.

Sendo a última etapa da Educação Básica, no Ensino Médio tais questões devem ser trabalhadas pelo professor com maior atenção e de maneira mais explícita, ora no contexto das tarefas do componente curricular, ora em conversas com a turma, mas sempre por meio de exemplos e de aconselhamentos que fomentem o delineamento de planos de vida e o recrudescimento do caráter.

Nesse sentido, a trajetória escolar deve ser capaz de dialogar com os jovens, desenvolvendo neles habilidades e conhecimentos que incentivem atitudes efetivas para lidar com os desafios da sociedade, promovendo a maturação de valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida. Além de prepará-los para o mercado de trabalho, fornecer orientação vocacional e capacitá-los para eventuais estudos mais complexos no ensino superior ou para aperfeiçoamento técnico em cursos profissionalizantes, conforme as circunstâncias de cada caso.

O estabelecimento do projeto de vida, como já frisado, é um processo dinâmico que conta com diálogos entre jovens, família, amigos, escola e sociedade. Contudo, a liberdade e o protagonismo são exclusivos do indivíduo: é ele que escolherá sua profissão, decidirá constituir família ou não, e vai direcionar sua atenção e seus esforços para a área de seu interesse. Desse modo, o projeto de vida que os alunos almejam, projetam e redefinem para si ao longo de suas trajetórias, praticamente coincidindo com o desenvolvimento da própria identidade, é apenas motivado e instruído pela escola, nunca imposto forçosamente por ela. As escolhas devem ocorrer naturalmente em uma multiplicidade de influências, experiências e aprendizagens que enriquecem à medida que se tornam plurais, de tal modo que os alunos de diferentes perfis aprendem uns com os outros por interação mútua e convívio constante, mediados – e não determinados – pela família, pelo professor, pela escola como um todo e, ainda mais amplamente, pelas conjunturas socioculturais nas quais o jovem está inserido.

É, enfim, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de modo controlado, as interações com o outro e com o mundo, vislumbrando, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e futuro. É nessa riqueza de motivação que o jovem deve traçar o próprio caminho, explorando seus talentos e potencialidades, assumindo deveres e responsabilidades, aprendendo a fruir e a conter desejos, a dosar razão com emoção, a harmonizar lazer com labor, a mesclar estudos com diversão, disciplina com curiosidade. Com isso, ele estará apto a constituir-se um ser humano íntegro, seguro de si, cônscio de quem é, dos próprios méritos e limitações, atento ao seu papel no mundo e ativo quanto às necessidades de seu tempo e de sua comunidade.

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Com o intuito de substituir o currículo do Ensino Médio isolado em componentes curriculares, a BNCC apresenta, para essa etapa, as aprendizagens essenciais distribuídas por áreas do conhecimento. Assim, para cada área são definidas competências específicas que se relacionam diretamente com as habilidades da área. Essa estrutura constitui a formação geral básica que, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), "[...] é composta por competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e articuladas como um todo indissociável, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social [...]" (BRASIL, 2018b).

Além de estabelecer que os conteúdos sejam apresentados por área (formação geral básica), a BNCC prevê, tendo como documento orientador as DCNEM, os itinerários formativos, em que os alunos poderão escolher, por exemplo, a formação técnica como maneira de complementar sua formação escolar. Veja o esquema a seguir.

PROVISÓRIA

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 469. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Com essa estruturação, a BNCC do Ensino Médio articula-se às habilidades e competências do Ensino Fundamental, com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral dos alunos, possibilitando, assim, a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

As áreas do conhecimento

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área e supõe um trabalho interdisciplinar e transdisciplinar. Isso requer um currículo que integre não só os conteúdos dos componentes de determinada área (interdisciplinaridade), mas também os componentes de outras áreas, estabelecendo relações transdisciplinares. As áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares são divididos na BNCC conforme apresenta o quadro a seguir.

ÁREAS DO CONHECIMENTO	COMPONENTES CURRICULARES
Linguagens e suas Tecnologias	- Arte - Educação Física - Língua Inglesa - Língua Portuguesa
Matemática e suas Tecnologias	- Matemática
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	- Biologia - Física - Química
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	- Filosofia - Geografia - História - Sociologia

As dez competências gerais da Educação Básica, previstas na BNCC, têm como principal objetivo formar cidadãos conscientes do seu papel na sociedade e que saibam agir de maneira justa. Essas competências se desdobram na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes.

1 – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 – Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 – Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 – Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

MODERNA

5 – Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 – Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 – Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 – Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 – Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para que os alunos desenvolvam as competências gerais é preciso, primeiramente, adquirirem as aprendizagens essenciais de cada área, por meio das habilidades, desenvolvendo, também, os princípios das competências específicas.

Esta coleção foi organizada de maneira a contemplar as habilidades e as competências específicas relacionadas à área do conhecimento **Matemática e suas Tecnologias**, bem como contemplar as competências gerais propostas na BNCC. Essas relações estão presentes nas abordagens dos conteúdos, nas teorias, nas seções especiais e nas tarefas apresentadas. O livro do aluno aborda as relações entre as habilidades e/ou competências, de maneira que os conteúdos de Matemática estão destacados, permitindo que tanto os alunos quanto o professor confiram como esses elementos são desenvolvidos. Já o **Suplemento para o professor** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências e os conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**, assim como as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, auxiliando o professor a verificar como esses itens podem ser desenvolvidos, a fim de contribuir com a formação integral dos alunos.

As diferentes maneiras de trabalhar com esses elementos serão explicitadas no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**. Além disso, no tópico **A BNCC e a coleção** há um mapeamento em que são apresentados os elementos da BNCC desenvolvidos em cada tema deste volume.

Temas contemporâneos transversais

Os temas contemporâneos transversais não são novidade nos documentos oficiais para a Educação Básica. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997, eram chamados **temas transversais** e pressupunha-se que fossem incluídos nos currículos das escolas. Contudo, como os PCNs não tinham caráter obrigatório e os seis temas listados não eram pautados em nenhuma legislação ou norma específica, nem sempre essa inclusão acontecia no contexto escolar.

Com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) de 2013, os Temas transversais receberam o nome de **eixos temáticos** ou **eixos norteadores**, e pressupunham que os professores e os alunos escolhessem temas/assuntos afeitos ao componente curricular que desejassem estudar, contextualizando-os com outros. O trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, por meio de eixos temáticos, tornou-se obrigatório a fim de conduzir os alunos na reflexão sobre a vida em sociedade.

Com a homologação da BNCC, em 2018, eles passaram a ser chamados **temas contemporâneos** e tornaram-se uma referência obrigatória para a elaboração dos currículos. Em 2019, com a publicação do documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC*, passaram a ser chamados **temas contemporâneos transversais** (TCTs). Essa mudança de nomenclatura é pautada na BNCC, que afirma: "[...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma **transversal** e integradora." (BRASIL, 2018a, grifo nosso).

Na BNCC, os TCTs foram distribuídos em seis áreas temáticas, conforme apresentado no quadro a seguir.

MODERNA

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS					
CIÊNCIA E TECNOLOGIA • Ciência e tecnologia	**MEIO AMBIENTE** • Educação ambiental • Educação para o consumo	**ECONOMIA** • Trabalho • Educação financeira • Educação fiscal	**MULTICULTURALISMO** • Diversidade cultural • Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	**CIDADANIA E CIVISMO** • Vida familiar e social • Educação para o trânsito • Educação em direitos humanos • Direitos da criança e do adolescente • Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso	**SAÚDE** • Saúde • Educação alimentar e nutricional

Os TCTs não pertencem a nenhuma área específica do conhecimento e devem ser abordados por todas elas de maneira integrada e complementar, possibilitando aos alunos a melhor compreensão da sociedade em que vivem. Seguindo essa premissa, e com o objetivo de orientar o professor no trabalho com os TCTs, esta coleção aborda esses temas por meio de recursos e tarefas, tanto no livro do aluno quanto neste **Suplemento para o professor**. Essas abordagens percorrem as áreas do conhecimento e proporcionam aos alunos a reflexão sobre seu papel na sociedade, contribuindo para sua formação cidadã.

Orientações didáticas e metodológicas

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção

Esta coleção propõe a contextualização sociocultural do aluno, tornando-o protagonista de seu processo de aprendizagem. Embora a Matemática seja, "[...] por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados [...]" (BRASIL, 2018, p. 265), o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática tem importância considerável e deve fazer parte, sempre que possível, das tarefas discentes, a fim de produzir questionamentos saudáveis, levantar conjecturas e buscar contra-exemplos, entre outras situações. Nesse sentido, em diversos momentos desta coleção a condução dos conceitos busca ferramentas da tendência socioetnocultural, amparada na Etnomatemática, que propõe troca de conhecimento entre professor e aluno, incentivando sua autonomia crítica, criativa e transformadora na aprendizagem de um saber prático e dinâmico. Além disso, a realidade do aluno é, muitas vezes, problematizada e tomada como contexto para explorar novos conceitos e ampliar os conhecimentos prévios deles.

O ponto de partida da tendência socioetnocultural está pautado nos "problemas oriundos do meio cultural, das práticas cotidianas. Professor e alunos trocariam seus conhecimentos [...]. Isso se evidencia pelo trabalho pedagógico a partir da abordagem de temas envolvendo o conhecimento cotidiano dos alunos." (ZIMER, 2008, p. 86-87).

Dessa maneira, a Matemática é uma ciência prática e dinâmica, produzida histórica e culturalmente em diversos contextos sociais, em que sua história desmitifica a realidade e estabelece estratégias que incentivam e facilitam as ações dos alunos, contribuindo para a construção de uma consciência cidadã e democrática. Além disso, as trocas de conhecimentos entre o professor e os alunos por meio de metodologias ativas objetivam a formação crítica, pessoal e social.

Ademais, os recursos tecnológicos são ferramentas potenciais de ensino ao apoiar a autoprodução de conhecimentos por parte dos alunos.

Sabe-se que os resultados matemáticos são obtidos por meio de deduções pautadas em axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados ou proposições. Grande parte do ensino atual está relacionada à mera reprodução de algoritmos. No entanto, não podemos reduzir a Matemática à simples aplicação de fórmulas e à resolução de exercícios, pois são procedimentos mecânicos, que não possibilitam o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno. Com o objetivo de mudar essa abordagem em sala de aula, algumas concepções no ensino de Matemática podem ser adotadas, visando tornar o aluno protagonista do próprio processo de aprendizagem. Entre elas, temos a Etnomatemática, a História da Matemática, a Investigação matemática, a Resolução de problemas e a Modelagem matemática.

No Brasil, o precursor da Etnomatemática é o professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio. Etimologicamente, Etnomatemática significa a maneira, a técnica ou a arte (*tica*) de explicar, conhecer e entender (*mathema*) a realidade natural e sociocultural em que o indivíduo está inserido (*etno*). Nesse sentido, o autor a concebe como "o reconhecimento que as ideias matemáticas, substanciadas nos processos de comparar, classificar, quantificar, medir, organizar e de inferir e de concluir, são próprias da natureza humana. Em todo ser humano, cérebro e mente se organizam para execução desses processos" (D'AMBROSIO, 2008, p. 164). Para D'Ambrosio, a Matemática é espontânea e individual, motivada e desenvolvida de acordo com o ambiente social e cultural em que o indivíduo se encontra. Ao sugerir um vínculo entre a Etnomatemática e a sala de aula, D'Ambrosio argumenta que "a proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. E através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos

CONTEMPORÂNEA

nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural" (D'AMBROSIO, 2015, p. 46-47).

Nesta coleção, a Etnomatemática é trabalhada em alguns contextos e tarefas que apresentam o conhecimento matemático atrelado a diversas culturas, oportunizando momentos de reflexão quanto ao papel social que a Matemática representa nas relações humanas. Por meio dessa abordagem, é esperado que os alunos descubram métodos úteis para resolver, de maneira eficaz, problemas em contextos não tão comuns à própria realidade. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, são apresentadas diversas situações que permitem ao professor promover, junto aos alunos, um debate acerca da importância da Etnomatemática.

A História da Matemática, como uma tendência de ensino, excede a descrição de fatos históricos ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. Esse ramo envolve a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático, favorecendo a contextualização dos objetos de conhecimento. Segundo Lopes e Ferreira (2013), uma dinâmica interessante para introduzir um novo conteúdo em sala de aula é proporcionar aos alunos o contato com o desenvolvimento histórico desse conceito, apontando, sempre que possível, quais eram as condições sociais, econômicas e políticas que, possivelmente, levaram ao surgimento daquela ideia. Para Miguel e Miorim (2011), o professor pode buscar na História da Matemática o apoio de que necessita para atingir os objetivos pedagógicos que levem os alunos a perceber:

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.
>
> MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. p. 53.

Nesta coleção, a História da Matemática é abordada, sempre que oportuno, por meio de situações motivadoras, que propiciam o trabalho com os aspectos históricos dos conceitos envolvidos. Tais situações podem ser encontradas tanto no decorrer das teorias quanto nos enunciados das tarefas propostas.

A Investigação matemática, por sua vez, consiste no trabalho com situações abertas, isto é, situações em que a questão principal não está bem definida. Visto que os alunos podem tomar diferentes pontos de partida, é provável que os resultados obtidos também sejam diferentes ao final do processo de investigação. Para Ponte, Brocado e Oliveira (2016), a Investigação matemática pode ser concebida como uma atividade de ensino e aprendizagem que favorece "o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016, p. 23). O desenvolvimento de atividades de investigação envolve quatro momentos distintos: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016). Em um primeiro momento, os alunos devem reconhecer e explorar a situação-problema proposta, além de formular questões que serão investigadas no decorrer desse processo. Em um segundo momento, eles são levados a organizar os dados coletados e propor conjecturas com base nas informações obtidas até então. Depois, eles devem testar tais conjecturas, verificando sua validade e reformulando-as, caso necessário. Por fim, devem justificar essas conjecturas, avaliando o raciocínio desenvolvido e os resultados obtidos.

Nesta coleção, a Investigação matemática é trabalhada em contextos nos quais os alunos são levados a: investigar algoritmos e representá-los por meio de um fluxograma; elaborar enunciados de problemas, nos quais eles devem investigar problemas parecidos que envolvam os conceitos estudados, tomando-os como base para criar uma nova situação; investigar propriedades matemáticas e estabelecer relações entre diferentes conceitos, de modo a formular conjecturas e validá-las sempre que necessário; entre outros casos.

Outra tendência no ensino de Matemática é a Resolução de problemas, que consiste em trabalhar com situações cujos procedimentos que permitem sua resolução não estão predefinidos. Em primeiro lugar, é preciso definir o conceito de problema. Para Onuchic (1999), problemas são situações nas quais não se sabe o que fazer, mas há interesse em solucioná-las. Em outras palavras, são situações que levam o aluno a pensar em algum procedimento de resolução que ainda não está bem definido. A autora ainda destaca que, na abordagem da Resolução de problemas, o aluno, por um lado, aprende Matemática para resolver problemas e, por outro, aprende Matemática resolvendo problemas. Polya (1999), ao tratar da Resolução de problemas no ensino de Matemática, propõe uma heurística de resolução, isto é, resolver um problema consiste em seguir determinadas etapas. O primeiro passo é compreender o problema interpretando o enunciado. Em seguida, elabora-se um plano de resolução, no qual é possível identificar procedimentos mate-

COPEIA

máticos que podem ser úteis. Definido o plano, deve-se colocá-lo em execução, encontrando uma solução para o problema. Por fim, a última etapa consiste na comparação dos resultados obtidos com o enunciado do problema, verificando todos os procedimentos utilizados e analisando se a solução é consistente com o que foi solicitado.

De acordo com a BNCC:

> [...]
>
> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.
>
> No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.
>
> Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 535. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Nesta coleção, a Resolução de problemas é abordada na seção **Resolvendo por etapas**, em que são apresentadas situações que complementam os conteúdos trabalhados no livro do aluno. Por meio de orientações específicas detalhadas em algumas etapas, os alunos são levados a determinar a resposta do problema proposto. Dependendo do que o professor julgar conveniente, o trabalho com essa seção poderá ser desenvolvido individualmente ou em grupos.

As atividades de cunho predominantemente investigativo, que não possuem procedimentos de resolução previamente determinados, não se restringem apenas à Resolução de problemas ou à Investigação matemática. A Modelagem matemática, enquanto tendência de ensino, também tem como base as atividades investigativas. Porém, o que a diferencia das outras tendências é o fato de que as atividades abordam situações do mundo real, em contextos próximos à realidade dos alunos. A Modelagem matemática pode ser considerada uma alternativa pedagógica, que aborda situações não matemáticas, isto é, reais, por meio da Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nesse sentido, ao trabalhar com uma atividade na perspectiva da Modelagem matemática, os alunos têm como ponto de partida uma situação-problema cujo contexto está relacionado ao mundo real e cujos dados só serão conhecidos por meio da coleta de informações. Essa etapa leva os alunos a elaborar problemas que serão investigados por meio da Matemática, resultando em um modelo formado por um sistema conceitual expresso em linguagem matemática. A construção desse modelo matemático requer que os alunos criem estratégias que os auxiliem na resolução do problema, mesmo que tais estratégias não sejam determinadas *a priori*. Por fim, é necessário que eles determinem a resolução do problema por meio do modelo matemático elaborado, cuja resposta será confrontada com o enunciado, buscando possíveis divergências de valores. Essa interpretação do resultado pode resultar em uma solução que satisfaça o problema ou, então, em uma solução que não seja condizente com as informações previamente apresentadas. Nesse último caso, é necessário orientar o aluno para que retome os procedimentos a fim de encontrar o erro cometido e, assim, executar novamente os procedimentos com o intuito de encontrar a solução correta. Esse tipo de atividade, além de proporcionar uma aprendizagem significativa, pode causar motivação nos alunos, visto que são estudadas situações de seu cotidiano. O desenvolvimento de atividades sob a luz da Modelagem matemática exige que o professor desempenhe o papel de orientador, tornando o aluno o próprio protagonista de seu processo de aprendizagem.

Apesar das diferentes características entre as tendências citadas, todas elas destacam o papel do professor distinto do modelo usual de ensino. Quando inserido em atividades com as características descritas, ele deve se tornar um mediador do ensino, no sentido de fazer com que os alunos utilizem suas habilidades e técnicas na resolução dos problemas e/ou situações que surgirem. Nesse sentido, há dois caminhos que podem ser percorridos: primeiro, o professor encaminha os alunos na resolução do problema por meio de dicas e orientações que, na verdade, não os auxiliam no desenvolvimento do raciocínio crítico; segundo, o professor, por meio de questionamentos, auxilia os alunos na resolução da situação proposta sem revelar a solução do problema inicial. Em qualquer caso, cabe ao professor utilizar todo o conhecimento relacionado à sua prática pedagógica para refletir acerca do caminho mais adequado para aquela situação, de acordo com o trabalho que estiver sendo desenvolvido.

MODERNA

O computador e o ensino da Matemática

O advento da tecnologia beneficiou diversos setores importantes da nossa sociedade, um deles foi a educação. Os computadores, celulares, *tablets* e outros dispositivos eletrônicos estão presentes em qualquer ambiente, inclusive na sala de aula. Assim, é de se esperar que tais equipamentos passem a fazer parte do cotidiano escolar dos alunos, contrariando grande parte da população que considera instrumentos escolares apenas a lousa, o giz e o livro didático.

Apesar da constante presença em diversos setores e do comprovado auxílio de um computador a um ambiente escolar, muitos professores ainda apresentam certa resistência à sua implementação na sala de aula. Enquanto alguns encaram os equipamentos tecnológicos como eficazes transmissores de conhecimento (informática na educação), outros ainda acreditam que deveria ser criado um componente curricular específico no currículo escolar dos alunos com o intuito de auxiliá-los a manipular tais equipamentos (educação informática). Mas qual seria a diferença entre esses dois conceitos?

De maneira geral, o objetivo da educação informática é preparar o indivíduo para o mercado de trabalho, ensinando-lhe alguns conceitos computacionais, os fundamentos sobre como um computador funciona e a utilização de alguns *softwares* para trabalhos específicos. Contudo, esse tipo de serviço ainda é ofertado pelas escolas de informática em algumas localidades. Já em relação à informática na educação, o computador assume outro papel: sua inserção na rotina escolar tem participação no processo de ensino e aprendizagem. Nesse caso, é possível obter e trocar informações, desenvolver conceitos, entre outras possibilidades.

Focando no segundo conceito, informática na educação, podem surgir algumas perguntas que merecem reflexão.

- De quais maneiras é possível inserir o computador no ambiente escolar?
- Que tipo de contribuição esse instrumento pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem?
- Quais são os *softwares* mais adequados para o trabalho em sala de aula?
- Que cuidados devemos ter para que o computador seja uma ferramenta efetiva utilizada para fins educativos?

As respostas para essas e outras perguntas devem surgir de acordo com o planejamento do projeto pedagógico da escola, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

O uso de um computador como recurso didático requer muito mais do que a simples instalação desse equipamento e de como os professores farão uso dele. É necessário que eles sejam capazes de extrair todo o potencial desse equipamento no ambiente escolar. Com o objetivo de alcançar resultados cada vez mais satisfatórios, ao trabalhar com o auxílio da tecnologia, o professor deve explorá-la como uma ferramenta pedagógica capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. É importante enfatizar que, diante de todas essas transformações, o professor em sala de aula deixa de ser apenas um transmissor de informações para ser mediador do processo de ensino e aprendizagem.

> Os recursos computacionais em si mesmos, quando amplamente dominados pelo professor, não são suficientes para garantir uma ação educacional diferenciada, se não estiverem claras e fundamentadas as teorias. Assim, além da necessidade de saber lidar com o computador, o professor deve entregar-se ao processo de construir para si mesmo um novo conhecimento, incorporando não somente os princípios que estão sendo atualmente desenvolvidos sobre informática e educação, mas acima de tudo, passando pelas considerações teóricas sobre a aprendizagem que melhor explicam a aquisição do conhecimento e o desenvolvimento cognitivo. Trata-se de dominar o conhecimento científico de uma maneira ampla e necessária para o seu próprio aprimoramento intelectual.

OLIVEIRA, 2007, p. 59, apud FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Ponta Grossa. *Anais* [...]. Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1023.

Em certos momentos, especificamente nas aulas de Matemática, a utilização de alguns *softwares* pode facilitar algumas dinâmicas em sala de aula ou propiciar a exploração de algo que seria inviável sem esses recursos. Os *softwares* contribuem de maneira significativa no processo de ensino e aprendizagem, pois são interativos, promovem maior abertura para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, estimulam a pesquisa e auxiliam na construção de um saber coletivo. Portanto, quanto maior a gama de *softwares* distintos conhecidos pelo professor, mais rica, dinâmica e produtiva será a aula ministrada.

> [...] Inovações didáticas resultantes da utilização do computador podem ser ilustradas por *softwares* destinados ao ensino da geometria, incorporando o recurso do movimento e da simulação na representação de conceitos. Essa é uma novidade, uma vez que o movimento é um recurso mais próximo da flexibilidade da representação por imagens mentais, restritas ao cérebro humano.
>
> [...]

PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 40-41.

MODERNA

Nesta coleção, alguns temas relacionados ao uso do computador em sala de aula são abordados em diversos momentos. Por exemplo, na seção **Acessando tecnologias** são apresentados *softwares* e outros recursos tecnológicos que complementam o ensino dos conteúdos abordados no livro do aluno. O trabalho com essa seção poderá ser realizado no laboratório de informática da escola ou, ainda, proposto como atividade extraclasse.

O pensamento computacional

Vivemos em uma sociedade na qual a presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) provoca importantes transformações em diversos setores, como na economia, na cultura e na educação. Diante disso, pesquisadores de campos relacionados às políticas educacionais enfatizam a importância da implantação da programação e de conceitos oriundos da ciência da computação no currículo escolar, uma vez que o trabalho realizado no âmbito dessa ciência desenvolve capacidades relacionadas ao pensamento computacional, que, junto à leitura, à escrita e à aritmética, deveria ser uma das habilidades analíticas inerentes a cada indivíduo (RAABE, 2017).

Mas o que é o pensamento computacional?

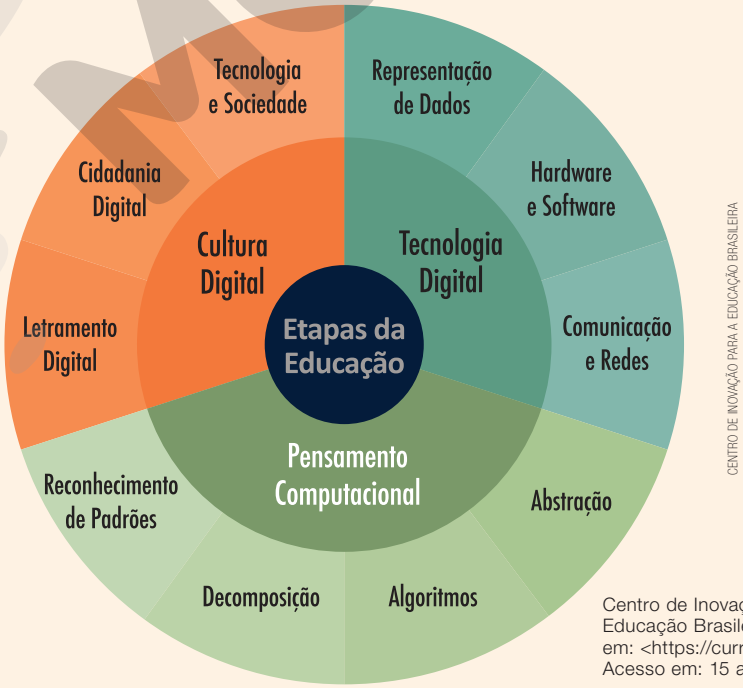
> [...]
>
> Pensamento computacional é uma forma para seres humanos resolverem problemas; não é tentar fazer com que seres humanos pensem como computadores. Computadores são tediosos e enfadonhos; humanos são espertos e imaginativos. Nós humanos tornamos a computação empolgante. Equipados com aparelhos computacionais, usamos nossa inteligência para resolver problemas que não ousaríamos sequer tentar antes da era da computação e construir sistemas com funcionalidades limitadas apenas pela nossa imaginação.
>
> [...]

WING, Jeannette. *Computational Thinking*. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, n. 3, p. 4, 2006. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Um dos eixos do currículo de referência em tecnologia e computação, do Centro de Inovação para a Educação Brasileira, é o pensamento computacional, o qual dissera sobre a resolução de problemas que envolvem tecnologias digitais considerando quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo (CIEB, 2018; BRACKMANN, 2017).

- **Decomposição:** decompor o problema em problemas menores, conhecidos como subproblemas, mais fáceis de serem resolvidos.
- **Reconhecimento de padrões:** analisar os subproblemas individualmente, com o objetivo de reconhecer padrões e identificar características comuns que ajudam na sua resolução.
- **Abstração:** filtrar, classificar e organizar as informações relevantes ao considerar apenas os dados essenciais para a resolução do problema e ignorar as informações irrelevantes, atingindo uma generalização dos padrões identificados.
- **Algoritmo:** construção de estratégias ou instruções claras e ordenadas que auxiliam a resolução dos subproblemas e, consequentemente, a obter a solução do problema principal.

Para mais informações a respeito do currículo de referência em tecnologia e computação, acesse o *site* do CIEB. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.



Centro de Inovação para a Educação Brasileira. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

MODELO

Como estratégia didática para o desenvolvimento do pensamento computacional, os conceitos relacionados à linguagem de programação, quando o contexto assim solicitar, podem ser utilizados de modo contextualizado a fim de que os alunos exercitem sua aprendizagem e autonomia para estabelecer relações com situações de seu cotidiano. O uso de simulações, *softwares* ou equipamentos específicos, por exemplo, pode levar os alunos a estudar determinados fenômenos reais que dificilmente seriam possíveis sem o auxílio desses recursos.

No Ensino Médio, ao trabalhar com abordagens que desenvolvem o pensamento computacional, deve-se planejar a maneira como as atividades propostas serão efetuadas, considerando diferentes perfis de alunos, bem como as características de cada turma, além de fazer uso dos recursos disponíveis no ambiente escolar e de perseguir os objetivos a serem alcançados.

Sabe-se que as escolas públicas brasileiras, muitas vezes, não possuem o aparato tecnológico e computacional necessário para o desenvolvimento de atividades com essas tecnologias. Nesses casos, o professor deve recorrer ao trabalho com o pensamento computacional sem o auxílio de recursos tecnológicos, conhecido como pensamento computacional desplugado, ou *unplugged*. Segundo Brackmann (2017), essa alternativa, por ser de fácil aplicação em diferentes realidades, foi pensada justamente com o intuito de atender às escolas públicas que não possuem condições socioeconômicas de ter acesso a computadores ou outras tecnologias. Desse modo, o professor pode aplicar abordagens lúdicas, como truques de mágica e competições entre os alunos ou, ainda, usar objetos manipuláveis, como jogos (de tabuleiro, de cartas, de peças), livros, fichas, figuras e, até mesmo, o próprio material escolar dos alunos.

Além disso, de acordo com a BNCC (2018, p. 474), o pensamento computacional "envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, nesta coleção, o pensamento computacional é incentivado eventualmente: em tarefas que envolvem a organização do pensamento; no registro e na análise de resultados e dados por meio de planilhas e gráficos; no uso de *softwares* de geometria dinâmica; nas construções de algoritmos e fluxogramas; por meio de linguagem de programação usando o *software* VisualG – programa que possibilita a criação, edição, interpretação e execução de algoritmos, bastante utilizado para o ensino da lógica de programação por ser de fácil manipulação.

No trabalho com o VisualG, os alunos são levados a interpretar as informações do problema proposto e organizá-las em uma sequência de instruções que devem ser transformadas em um algoritmo. Então, essas instruções são transcritas no *software*, realizando a codificação do problema, apresentado em linguagem materna, para uma linguagem de programação. Com isso, os alunos desenvolvem os quatro pilares do pensamento computacional. O VisualG é livre e seu *download* pode ser feito por meio do *site* disponível em: <https://visualg3.com.br/>. Acesso em: 14 maio 2020.

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 271. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para auxiliar nas práticas que propiciam o desenvolvimento do pensamento computacional em sala de aula, veja algumas referências no tópico **Sugestões ao professor** deste **Suplemento para o professor.**

O aluno no centro do processo de aprendizagem

Metodologias ativas

Nas últimas décadas, o advento da tecnologia e as discussões envolvendo novos métodos de ensino têm gerado grandes desafios aos professores e às escolas. Estruturas de ensino tradicionais, nas quais professores transmitem conhecimentos aos alunos, têm sido cada vez mais questionadas quanto ao seu papel efetivo no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, as metodologias ativas são uma maneira de transformar essa realidade, engajando o aluno e tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo. As estratégias de metodologias ativas são um processo de ensino e aprendizagem em que o aluno é o protagonista da construção do conhecimento, tendo o professor como mediador para atingir um objetivo de aprendizagem de modo interativo, dinâmico, reflexivo e colaborativo.

Nesse tipo de abordagem, o professor deixa de ser o transmissor do conhecimento, passando a ser um mediador ao planejar as aulas com foco em orientar e incentivar os alunos.

> As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as eta-

MODERNA

pas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor [...].

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, L; MORAN, J. (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 02-25.

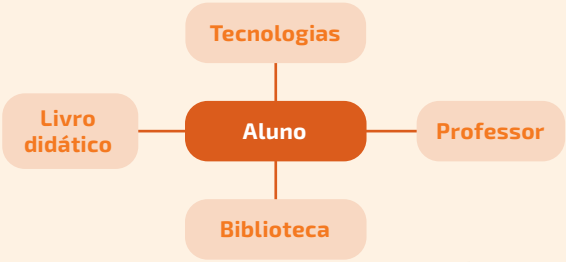
As dez competências gerais propostas pela BNCC estão alinhadas às situações de aprendizagem que podem ser conduzidas por meio da aplicação de estratégias de metodologias ativas, incentivando o protagonismo do aluno.

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 14. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

As competências gerais da BNCC centralizam no aluno o processo de ensino e aprendizagem, colocando-o como produtor efetivo de conhecimento. Assim, as competências visam à mobilização de conhecimentos com o intuito de atender às demandas cotidianas e também aos problemas sociais mais complexos, sempre conferindo ao aluno um papel central e ativo nesse processo.

Ao empregar estratégias de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, os alunos são incentivados a construir o conhecimento de modo integrado às necessidades de seu cotidiano. Nesse processo, é possível agregar o uso de recursos diversos, como o livro didático usado em sala de aula, os livros disponíveis na biblioteca e os recursos provenientes da tecnologia, como o computador, o celular, a internet e as plataformas digitais.



Considerando esse contexto, esta coleção busca explorar diferentes estratégias de metodologias ativas por meio de tarefas que incentivam o protagonismo dos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, encontra-se o destaque **Metodologia ativa,** que explica, de maneira geral, como algumas estratégias podem ser aplicadas em determinados momentos, orientando o professor, sempre que conveniente, sobre a metodologia ativa mais adequada para ser adotada naquele contexto específico.

Estratégias

Design thinking (Pensamento de *design*)

Design thinking (DT) é uma estratégia baseada em empatia, colaboração, criatividade e otimismo, que busca soluções para determinada necessidade por meio de um processo estruturado.

Inspirado na maneira como os *designers* resolvem problemas, o processo do Design thinking parte da compreensão de um problema para um *brainstorming* e, por fim, segue para a criação de soluções inovadoras. Veja a seguir as principais etapas do DT.

EMPATIZAR

Conhecer e compreender a realidade do problema. Podem ocorrer por meio de pesquisas em diversas fontes ou de diálogos com as pessoas envolvidas.

DEFINIR

O grupo deve se unir para compartilhar o que percebeu na etapa da empatia e analisar todos os dados coletados para definir sobre qual aspecto do problema vai se debruçar. Recomenda-se expressar esse desafio por meio de uma pergunta iniciada com "Como podemos...?".

Exemplo: Como podemos conscientizar os moradores do bairro sobre o problema da dengue?

IDEAR

Momento de *brainstorming*. Todos devem se sentir à vontade para sugerir. Após esse processo, o grupo deve refinar as opções, escolhendo as que podem ser aplicadas. Em seguida, devem antecipar as dificuldades de cada uma, até chegar à que será executada. Nessa etapa, o *feedback* do público envolvido é importante.

PROTOTIPAR

Fazer um protótipo é tornar uma ideia tangível, como a primeira versão de algo. Um protótipo pode ser um produto, um processo ou uma experiência. É a proposta do grupo para a solução do problema.

TESTAR

O teste é a parte da implementação e execução da proposta feita pelo grupo. É necessário um plano de ação para aplicá-la. É importante que o grupo acompanhe e esteja atento a possíveis necessidades de modificações no protótipo.

Fonte de pesquisa: ROCHA, Julciane. Design thinking na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Orgs.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

MODELO

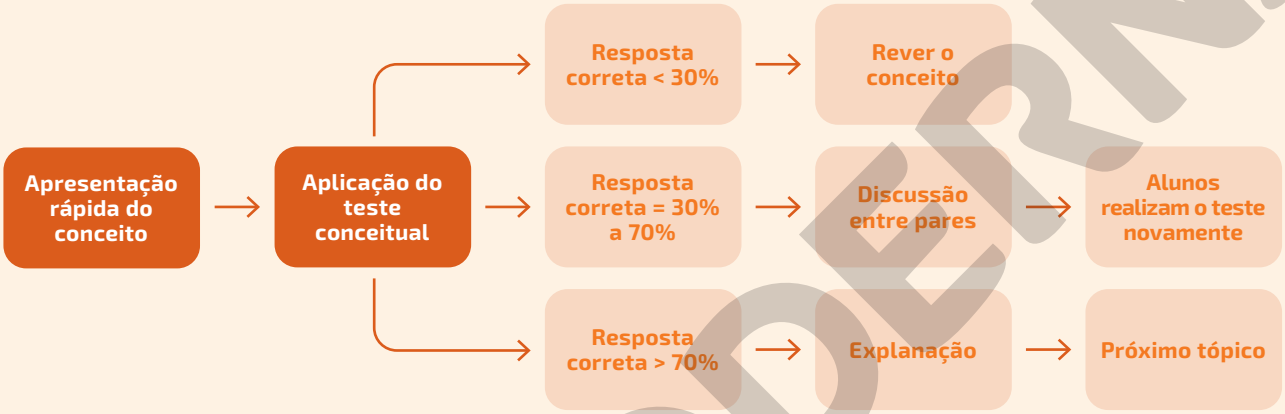
Na educação, a estratégia DT pode ser aplicada tanto em atividades que levem horas para serem resolvidas, como as problematizações de conteúdos em aulas expositivas, quanto em atividades que podem levar semanas ou meses, como as campanhas na escola. Essa metodologia ativa contribui para o desenvolvimento da empatia, da criatividade e da colaboração entre os alunos.

Peer instruction (Abordagem por pares)

A estratégia Peer instruction ou abordagem por pares consiste em uma dinâmica na qual a aprendizagem dos alunos não se baseia somente no estudo individual e na explicação do professor, mas também em auxiliar e ser auxiliado pelos colegas para compreender conceitos.

A estratégia é organizada da seguinte maneira.

- O aluno estuda os conteúdos antes da aula.
- Em sala de aula, o professor faz uma breve exposição do assunto e aplica um teste, preferencialmente oral e com respostas de múltipla escolha.
- Ao fazer a primeira pergunta, o professor deve avaliar as respostas da turma: se mais de 70% dos alunos acertarem a resposta, o professor faz uma breve explanação da resposta correta e dos motivos pelos quais as outras estão erradas e prossegue com o teste. Se menos de 30% dos alunos responderem corretamente, é necessário voltar aos conteúdos e revisá-los de maneira aprofundada. Se a porcentagem de acertos ficar entre 30% e 70%, o professor deve pedir aos alunos que se reúnam em duplas ou grupos para conversar sobre a questão, explicando ao colega o que foi entendido e chegando a um consenso. Ao terminarem a conversa, o professor faz a pergunta novamente, e segue nesse ciclo.



Fonte de pesquisa: FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa*. São Paulo: Saraiva Educação, 2018. p. 46.

Há diversas maneiras de aplicar o teste para os alunos: pode-se indicar alternativas e pedir que levantem as mãos; distribuir cartões coloridos e pedir que os levantem conforme a resposta; registrar em papel ou utilizar aplicativos.

Essa estratégia é válida, por exemplo, para iniciar os estudos sobre o tema e para revisar os conteúdos estudados. A abordagem por pares contribui com a interação, a colaboração e o diálogo entre os alunos.

Gallery walk (Caminhada na galeria)

Gallery walk é uma estratégia que desenvolve a habilidade de síntese e estimula a interação, o trabalho em equipe e a socialização do conhecimento. Nela, os alunos exibem seus trabalhos em cartazes que devem ser afixados em paredes, como obras de arte em uma galeria. Em seguida, a turma circula pela sala, observando os cartazes afixados, debatendo e refletindo sobre o tema proposto.

Há diversas possibilidades de condução dessa estratégia: trabalhos individuais apresentados enquanto a turma percorre a "galeria" em conjunto; circulação livre dos alunos pela "galeria", colando notas adesivas nos cartazes com dúvidas ou sugestões; entre outras.

Essa dinâmica pode ser aplicada na apresentação, revisão ou mesmo na avaliação de conteúdos. Cabe ao professor definir os objetivos e o tema a serem trabalhados, orientando a turma em relação à atividade. Durante o processo, o docente assume o papel de observador, permitindo que os alunos se organizem e intervindo somente se for necessário. Ao final, é importante promover um debate geral com a turma ou fazer uma breve explanação sobre os trabalhos e o processo da Gallery walk.

Sorting strips (Tiras de classificação)

Na estratégia Sorting strips, trechos de informações ou conteúdos são separados em tiras de papel para serem organizados em sequência ou classificados em categorias.

Essa dinâmica auxilia a sistematização da aprendizagem de modo colaborativo, incentivando a troca de ideias entre os alunos e possibilitando a discussão de ideias opostas, complementares ou sequenciais ao conteúdo das tiras.

A estratégia pode ser aplicada para explorar a compreensão de processos, o encadeamento de ideias e o exercício de classificações.

MODERNA

Think-pair-share (Pensar-conversar-compartilhar)

Think-pair-share é uma estratégia de aprendizagem cooperativa que consiste em pensar, individualmente, sobre uma questão ou um problema levantado pelo professor, compartilhar o raciocínio individual com um colega e, em seguida, socializar com um grupo maior os pensamentos e as conclusões aos quais a dupla chegou.

Essa estratégia favorece os alunos que não se sentem à vontade em compartilhar suas opiniões ou seus conhecimentos com a turma ou com um grupo, mas são capazes de conversar com um colega sobre determinada situação antes de se posicionar diante de um grupo maior.

Think

O professor expõe o problema e o aluno reflete individualmente sobre a situação.

Pair

O aluno reúne-se com um colega para trocar percepções sobre a situação.

É interessante que as duplas sejam definidas antes de a questão ser exposta, a fim de que as reflexões dos alunos não sejam interrompidas para que eles encontrem um par.

Share

As duplas se unem em grupos maiores para compartilhar as conclusões a que chegaram após a discussão conjunta. O grupo discute todas as percepções e chega a uma nova síntese das ideias com base na discussão coletiva.

Em outro modelo de socialização, o professor pode pedir a algumas duplas que compartilhem suas conclusões com toda a turma.

ILUSTRAÇÕES: LAÍS GARBELINI

Essa estratégia desenvolve habilidades de oralidade e argumentação, além de incentivar os alunos a ouvir e respeitar diferentes opiniões.

Quick writing (Escrita rápida)

Quick writing é uma estratégia que consiste em escrever uma resposta relacionada a um conteúdo em, no máximo, cinco minutos.

Essa dinâmica desenvolve a fluência na escrita e a capacidade de síntese. A pergunta é feita pelo professor e pode se relacionar tanto aos assuntos estudados quanto à vivência dos alunos. É possível aplicar essa estratégia baseando-se em abordagens como: explicação de conceitos ou vocabulários de um texto; formulação de hipóteses; ou inferências e explanação de conhecimentos prévios.

Avaliação

A etapa escolar do Ensino Médio busca o desenvolvimento **integral** dos jovens alunos. Os objetivos pedagógicos, portanto, de acordo com as orientações da BNCC, devem propiciar o desenvolvimento de **competências** nesses jovens, não apenas no sentido de **saber**, mas principalmente de **saber fazer**. Desse modo, nesta coleção, os alunos são envolvidos em situações de estudo que perpassam suas necessidades e seus interesses, ampliam seus conhecimentos e permitem a mobilização desses conhecimentos visando atender às demandas do mundo onde vivem.

Portanto, a **avaliação das aprendizagens** desses alunos, como parte indissociável do processo de ensino e aprendizagem, deve estar alinhada a esses objetivos na atividade escolar.

A prática avaliativa tem sido cada vez mais reconhecida por sua importância, pois auxilia o trabalho do professor, e por seu caráter legítimo na validação da condução didático-pedagógica. Desse modo, faz-se necessário compreender a essência de algumas modalidades de avaliação e implementá-las de acordo com os objetivos definidos para cada momento do processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação diagnóstica

Toda avaliação tem caráter diagnóstico, pois tende a obter informações sobre a aprendizagem dos alunos. Essa é uma prática muito importante ao iniciar um conteúdo, pois, por meio dela, é possível identificar os conhecimentos prévios de cada um. Desse modo, é possível tomar decisões sobre seu planejamento de ensino, caso seja necessário complementá-lo ou resumi-lo.

Avaliação somativa

Em geral, é aplicada ao final do estudo de um conteúdo e pode valer-se de diferentes tipos de instrumentos. Fornece dados ou informações que sintetizam os avanços das aprendizagens dos alunos em relação a tal conteúdo. Busca, de maneira pontual e conclusiva, sintetizar e registrar os resultados verificados, com finalidade informativa ou classificatória.

Avaliação formativa

É parte integrante de todo o processo de ensino e aprendizagem, pois busca melhorias na atividade em curso. Oferece subsídios que respaldam a interferência no processo de atuação do professor e de aprendizagem dos alunos, com vistas ao seu aprimoramento. Desse modo, permite a retomada e a revisão de conceitos e temas, além do ajuste da prática pedagógica.

A avaliação e o trabalho do professor

Alguns fatores são fundamentais para que a prática avaliativa possa contribuir de modo efetivo com o professor em seu trabalho diário.

A avaliação e a prática pedagógica

É possível observar casos de práticas avaliativas que se limitam, na maioria das vezes, a uma verificação resumida de notas, seguida de progressão e certificação. Essas práticas, em geral, estão relacionadas a encaminha-

MOD PNA

mentos pedagógicos em que o professor é um transmissor de conhecimento e os alunos, meros receptores. Por outro lado, em algumas metodologias, nas quais o aluno assume parte importante no processo de construção e ampliação de seu conhecimento, a avaliação preocupa-se mais com "como" o aluno aprende e menos com "o que" ele aprende. Portanto, o acompanhamento das aprendizagens dos alunos está intrinsicamente relacionado à **opção teórico-metodológica** escolhida, ou seja, o modo como se avalia diz muito sobre o modo como se ensina, e vice-versa.

Uma prática constante

A avaliação não deve ser estanque ou limitada a determinados momentos. Uma prova ao final do estudo de um conteúdo não é suficiente para obter todas as informações necessárias sobre a aprendizagem de cada aluno. Desse modo, a **diversificação** de dinâmicas e instrumentos de avaliação, assim como o registro das informações que elas fornecem sobre o processo de aprendizagem, devem ser analisados e confrontados constantemente, a fim de embasar o prosseguimento do trabalho do professor.

Há diferentes maneiras de **registrar** a trajetória dos alunos em relação à sua aprendizagem. Muitos professores fazem relatórios de observação diária, constroem um portfólio ou anotam comentários em um diário de aulas. Esses registros podem conter descrições ou conceitos que indiquem o progresso ou as dificuldades dos alunos de maneira individual, em pequenos grupos ou de toda a turma. Com base neles, é possível decidir sobre a retomada de explicações, sugestões de leituras ou atividades paralelas, que auxiliem o acompanhamento dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Esse **aspecto qualitativo** da prática avaliativa exige do professor uma postura ativa, reflexiva e reguladora em relação ao processo de ensino e aprendizagem. E, portanto, é inevitável que a avaliação seja **constante**, estando inserida em diversos momentos desse processo.

A seguir, apresentamos um modelo de **relatório** que pode auxiliar no acompanhamento da aprendizagem dos alunos. O modelo traz itens de acompanhamento diferentes em cada linha a fim de exemplificar a variação a ser aplicada nesse documento. É possível considerar os objetivos de aprendizagem do estudo de cada tema ou outros objetivos propostos em seus planejamentos. Também é possível acompanhar o desempenho dos alunos em relação às habilidades a serem desenvolvidas. Outra alternativa é registrar os indicadores de aprendizagem dos alunos obtidos por meio de uma determinada tarefa que pode ser desenvolvida individualmente ou em grupos. O campo de observações é muito importante para que comentários e lembretes de detalhes sejam registrados, auxiliando nas futuras tomadas de decisões com base nesses relatórios.

Lembramos que esse relatório figura como modelo que pode (e deve) ser adaptado de acordo com as necessidades e realidade de trabalho de cada turma ou escola.

Modelo de relatório de acompanhamento da aprendizagem

MODELO

NOME DO ALUNO					
Componente curricular		Ano		Turma	
Objetivos/habilidades ou atividades propostas	Período letivo do registro			Apresentou progressos durante o período letivo indicado?	
	NÃO consegue executar	Executa com DIFICULDADE	Executa com FACILIDADE	SIM	NÃO
Reconhecer algumas unidades de medida de base do Sistema Internacional de Unidades (SI).					
(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.					
Síntese conclusiva da utilização de diferentes unidades de medida de base pertencentes ou não ao Sistema Internacional de Unidades (SI).					
Observações					

Instrumentos de avaliação diversificados

Independentemente do instrumento de avaliação que o professor decida utilizar, é fundamental que os objetivos a serem atingidos estejam bem definidos. Obter **indicadores** da aprendizagem dos alunos deve ser a essência de cada instrumento de avaliação elaborado pelo professor. Portanto, provas objetivas ou discursivas, seminários, produções de textos, sínteses de pesquisas, debates, dramatizações, produção de esquemas ou desenhos e trabalhos em grupo ou individuais estão entre as variações possíveis.

Quanto ao professor, é preciso esclarecer os **objetivos** de ensino a serem investigados em relação à aprendizagem dos alunos. Já os alunos devem receber, por parte do professor, toda e qualquer **orientação** possível sobre a dinâmica proposta, de modo que estejam conscientes a respeito de como e quando serão avaliados.

Mas, por que a avaliação deve ter essa **diversificação**? Porque os alunos são diferentes, aprendem de maneiras distintas e expressam-se também de modos diversos. Alguns têm mais facilidade em aprender ouvindo explicações, enquanto outros precisam ler textos, resumos ou esquemas. Há aqueles que demonstram o que sabem por meio de conversas ou debates, mas apresentam dificuldade para se expressar por meio da escrita. Enquanto alguns têm facilidade em compreender raciocínios lógico-matemáticos, outros têm destreza na produção de textos.

A variedade de estratégias, como dinâmicas em grupo ou individuais, ou de participação anônima, por exemplo, também são recursos que auxiliam no trabalho com grupos de **diferentes perfis**. O incentivo à socialização e à junção de grupos heterogêneos, a relevância dos temas de estudos e o envolvimento dos jovens também são fatores que podem tornar eficaz o trabalho de professores e alunos no processo de ensinar, aprender e avaliar.

A avaliação nesta coleção

Nesta coleção, a opção por um trabalho que destaque o protagonismo dos alunos do Ensino Médio apresenta **oportunidades constantes** de avaliação do processo de ensino e aprendizagem, privilegiando **dinâmicas diversificadas**, em especial aquelas fundamentadas em **metodologias ativas**. Para tanto, no trabalho com as diferentes unidades temáticas, são propostas dinâmicas e atividades variadas, com a exploração de diversos recursos (textuais e imagéticos), ocasiões que permitem o acompanhamento do professor em relação à aprendizagem dos alunos.

Também são disponibilizadas, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, diversas orientações com dicas pontuais, alinhadas aos objetivos de ensino e a uma avaliação formativa. Destacamos o boxe **Sugestão de avaliação**, que apresenta, em geral, orientações específicas para os momentos de avaliação, com sugestões de como obter informações a respeito da aprendizagem dos alunos, e as possibilidades de escolher o melhor procedimento a ser tomado.

A **autoavaliação** também é uma ferramenta que colabora coerentemente com o propósito de que os alunos assumam o protagonismo no processo de formação do seu conhecimento. Essa proposta de reflexão a respeito de sua aprendizagem, participação, limitações e potencialidades deve ser mediada pelo professor como um processo construtivo e positivo, para que não se encaminhe de modo depreciativo e interfira na autoestima dos alunos. Ao contrário, deve ser encarada e assimilada como um procedimento de verificação dos caminhos possíveis para superar os diferentes desafios que a vida lhes colocará.

Em se tratando de desafios, esta coleção também se preocupa em preparar os alunos para os **exames de larga escala**. Para isso, a condução dos estudos é norteada pelo objetivo de desenvolver **habilidades** e **competências** que permitam o embasamento em conhecimentos científicos, o exercício da criatividade, a resolução de problemas com base em saberes interdisciplinares e transdisciplinares, a valorização da cultura em suas diversas expressões, expressar-se e argumentar por meio de diferentes linguagens, inclusive a tecnológica e a digital, agindo com respeito a si mesmo e aos outros, sempre com responsabilidade.

A BNCC e a coleção

Cada volume desta coleção foi organizado e desenvolvido de maneira a contemplar as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais elencados na BNCC, estabelecendo, sempre que possível, conexões com outras áreas do conhecimento. É possível perceber tais relações na maneira como os temas foram estruturados e abordados, nas questões-teoria ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, nas seções especiais e nas tarefas propostas no decorrer do livro do aluno. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor** há o aporte para o desenvolvimento do trabalho com esses objetos.

Sugestão de cronograma

Apresentamos, a seguir, uma proposta de cronograma para elaborar o planejamento deste volume. No entanto, cabe ao professor a decisão de como utilizar o livro didático como apoio pedagógico, seguindo critérios de seleção dos temas e levando em consideração diversos fatores, como o projeto pedagógico da escola, as condições da turma, a carga horária e a grade

MODERNA

curricular. Da maneira como está estruturada, esta coleção permite que o professor tenha autonomia pedagógica para decidir sobre quais temas abordar ou deixar de abordar, no todo ou em partes; sobre seguir a ordem apresentada ou reagrupar os temas de acordo com os critérios organizacionais escolhidos e, com isso, estabelecer as conexões entre os temas dentro desses critérios.

No caso de um cronograma bimestral, considerando que a duração do curso seja de 12 bimestres, este volume pode ser trabalhado, em sua totalidade, em 2 bimestres, ou seja, aproximadamente 16 semanas.

Sugestão de cronograma bimestral			
1º bimestre		**2º bimestre**	
1ª semana	Tema 1	9ª semana	Temas 6 e 7
2ª semana		10ª semana	
3ª semana		11ª semana	Temas 8 e 9
4ª semana	Tema 2	12ª semana	
5ª semana	Tema 3	13ª semana	Tema 10
6ª semana		14ª semana	
7ª semana	Temas 4 e 5	15ª semana	Temas 11 e 12
8ª semana		16ª semana	Tema 13

O quadro a seguir apresenta os principais conceitos, as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais trabalhados neste volume, organizados de acordo com cada tema, especificando, também, as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, quando essas forem abordadas.

Neste quadro, por exemplo:
CG1 indica a **Competência geral 1**.
CE2MAT indica a **Competência específica 2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.
CE3CNT indica a **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Tema	Principais conceitos	Habilidades	Competências gerais; competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Temas contemporâneos transversais
1	• Ponto, reta e plano • Noção de conjuntos • União e interseção de conjuntos • Geometria de posição • Propriedades de paralelismo e perpendicularismo		• CG3	• Diversidade cultural
2	• Projeções ortogonais sobre um plano • Distâncias no espaço		• CG2 • CE3MAT • CE4MAT	

3	• Poliedros • Poliedros convexos e poliedros não convexos • Relação de Euler • Poliedros de Platão • Poliedros regulares	• EM13MAT405	• CE4MAT • CE3CNT	
4	• Prismas • Área da superfície de um prisma • Volume do paralelepípedo reto retângulo • Princípio de Cavalieri • Volume de um prisma qualquer	• EM13MAT309 • EM13MAT315 • EM13MAT504	• CG10 • CE2MAT • CE3MAT • CE5MAT • CE2CNT	• Educação ambiental • Vida familiar e social
5	• Prismas na natureza		• CE3MAT • CE2CNT	
6	• Pirâmides • Área da superfície e volume de uma pirâmide • Tronco de pirâmide • Área da superfície e volume de um tronco de pirâmide	• EM13MAT309 • EM13MAT504	• CG1 • CG3 • CE3MAT • CE5MAT	• Diversidade cultural • Educação ambiental • Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
7	• O volume da Grande Pirâmide de Gizé		• CG1 • CG2	
8	• Corpos redondos • Cilindro • Área da superfície e volume de um cilindro	• EM13MAT309 • EM13MAT405 • EM13MAT504	• CG2 • CE1MAT • CE2MAT • CE3MAT • CE4MAT • CE5MAT • CE2CNT	• Educação ambiental • Saúde
9	• Volume interno de um motor		• CE3MAT • CE3CNT	
10	• Cone • Área da superfície e volume de um cone • Tronco de cone reto • Área da superfície e volume de um tronco de cone reto	• EM13MAT309 • EM13MAT315 • EM13MAT504	• CG1 • CG4 • CE3MAT • CE4MAT • CE5MAT • CE2CNT	• Trabalho
11	• Esfera • Volume e área da superfície da esfera	• EM13MAT309	• CG5 • CE3MAT • CE2CNT • CE3CNT	• Ciência e tecnologia
12	• Aplicação de volume: adulteração de combustíveis		• CE3MAT • CE1CNT	• Educação fiscal
13	• Cartografia • O formato do planeta Terra • Estudando projeções cartográficas	• EM13MAT509	• CG1 • CG5 • CG9 • CE5MAT	• Trabalho

MODERNA

Objetivos, comentários e sugestões

Nesta seção do **Suplemento para o professor**, para cada tema que compõe o livro do aluno, são apresentados objetivos, comentários e sugestões, oferecendo ao professor subsídios para seu trabalho em sala de aula. Nos comentários de cada tema, são abordados, inicialmente, os objetivos específicos e questões relativas à organização do conteúdo. Há sugestões de condução e tarefas para a abordagem inicial, resgatando os conhecimentos prévios dos alunos. Essas sugestões estão relacionadas às páginas iniciais do tema, complementando a situação nelas tratada. No entanto, existem casos em que é sugerida outra abordagem inicial para o conteúdo, oferecendo a você, professor, novos elementos, de modo que possa escolher essas situações e adaptá-las segundo sua realidade.

Na sequência, encontram-se comentários e sugestões a respeito de algumas seções e tarefas que envolvem o tema. Por exemplo, há comentários adicionais sobre as páginas de abertura, sugestões de condução, tarefas que podem ser desenvolvidas em sala de aula e informações complementares às apresentadas no livro do aluno. Também são apresentadas demonstrações, sugestões de condução para a resolução de algumas tarefas, comentários e informações, entre outros recursos.

1 Geometria espacial de posição

Objetivos específicos

- Compreender princípios básicos da Teoria dos Conjuntos, conhecendo a relação de inclusão e as operações de união e interseção, a fim de embasar a aprendizagem de Geometria espacial.
- Compreender as posições relativas entre duas retas, entre reta e plano e entre dois planos.
- Identificar figuras planas e figuras espaciais.
- Compreender os axiomas ou postulados para validar resultados por meio de demonstrações matemáticas.
- Reconhecer as propriedades de paralelismo e perpendicularismo no espaço.

Esse tema aborda conceitos fundamentais para compreender Geometria espacial de posição. Em caráter preliminar, estudam-se noções básicas de Teoria dos Conjuntos, como a relação de inclusão e as operações de união e interseção, a fim de possibilitar a construção da teoria geométrica de modo consistente, bem como para viabilizar a utilização de notações indispensáveis, como o símbolo de pertinência ("$\in$") e o de união ("$\cup$"). Adotando esses conhecimentos como pré-requisitos, passa-se ao estudo dos conceitos de ponto, reta e plano, os quais baseiam o trabalho com estruturas e propriedades geométricas mais complexas, como o conceito de posição relativa, o de paralelismo e o de perpendicularismo.

Na teoria, apresenta-se, ainda, uma das ideias mais essenciais em toda a Matemática, que é o conceito de axioma (também chamado "postulado"). Os postulados, sendo afirmações iniciais aceitas sem prova, são os alicerces a partir dos quais todos os resultados matemáticos são obtidos por meio de procedimentos lógicos rigorosos que lhes garantem total veracidade. Com essa abordagem, todas as proposições, propriedades e teoremas trabalhados no tema podem ser demonstrados de modo formal, não recorrendo apenas à experiência física do espaço, mas fundamentando-se, sobretudo, na dedução racional.

Os conteúdos devem ser explorados por meio dos mais diversos recursos, de modo a atingir um desenvolvimento satisfatório em todos os alunos, levando-se em conta as aptidões e dificuldades de cada um. Considerando isso, é importante ter em mente que os assuntos abordados nesse tema exigem uma capacidade de visualização tridimensional que nem sempre foi suficientemente motivada nos alunos. Por isso, é importante que se exercite, sempre que possível, a percepção espacial dos alunos, seja por meio de materiais lúdicos que permitam a construção física de prismas, como canudos, palitos, bastonetes de plástico e peças de metal, seja por meio de recursos digitais, como *softwares* de Geometria dinâmica e vídeos ilustrativos.

Além disso, os conteúdos desse tema fornecem subsídios para uma melhor compreensão da realidade física, consequentemente aprimorando habilidades necessárias em atividades tanto artísticas quanto profissionais e de pesquisa, como na Física, na Química, na Arquitetura, nas engenharias, na carpintaria e em ofícios artísticos que necessitem de conhecimentos sobre perspectiva e tridimensionalidade, desde as esculturas e artes plásticas até as manifestações contemporâneas de produção de animações e jogos digitais.

Sugestão de avaliação

Na introdução desse tema, procure identificar os conhecimentos prévios dos alunos acerca dos conceitos que serão estudados. Para isso, proponha uma dinâmica de analisar geometricamente alguns objetos presentes na sala de aula, como cadeiras e livros. Se possível, apresente imagens que contenham visões de mais de uma perspectiva de um mesmo objeto, revelando-o em vários pontos de vista.

Utilizando imagens com projeções ortogonais de uma cadeira, oriente os alunos a observar as imagens e a identificar as vistas frontal, lateral e superior do objeto. Depois, leve-os a perceber que na figura relacionada à vista frontal da cadeira, podemos ver representada uma região plana e dois segmentos de reta paralelos; na vista lateral, segmentos de reta paralelos e concorrentes; e, na vista superior, apenas uma região plana.

MODERNA

Conclua a tarefa dizendo que nesse tema serão estudados os conceitos de Geometria de posição envolvendo posições relativas entre os elementos do espaço: ponto, reta e plano.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação** da parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 10 e 11 Ilusão de ótica de Escher

- Na abertura do tema, as ideias da Geometria espacial de posição são apresentadas como recursos utilizados pelo artista plástico holandês Maurits Cornelis Escher.

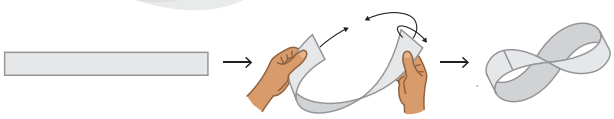
  Uma sugestão é estabelecer um período de tempo de aproximadamente 15 minutos para que os alunos leiam o texto, analisem as imagens e respondam às questões propostas. Em seguida, promova um debate com toda a turma e colete informações acerca da compreensão dos alunos em relação ao tema abordado.

  Comente que Escher explorava a perspectiva, representando graficamente figuras aparentemente tridimensionais, mas impossíveis de serem construídas na prática.

  É importante verificar se os alunos são capazes de perceber que, na escada retratada na litografia, pode-se tanto subir como descer, mas que, paradoxalmente, não se chega nem em cima nem embaixo. Para auxiliá-los nessa percepção, peça-lhes que acompanhem o trajeto de uma pessoa que possa estar se locomovendo pela escada, observando que ela sempre sobe um degrau, mas que, depois de uma volta, retorna de novo ao mesmo ponto de partida.

  Pode ser interessante para os alunos relacionar esse efeito paradoxal com a imagem de uma Faixa de Moebius, que é uma figura tridimensional de apenas uma face na qual se pode percorrer toda sua extensão e retornar ao mesmo ponto sem realizar "saltos" ou mudar de direção. Se houver tempo hábil, promova a construção de uma Faixa de Moebius na sala de aula. Solicite aos alunos que destaquem uma tira fina e comprida de papel e, com os dedos, sem colar, unam suas extremidades formando um círculo. Em seguida, eles devem girar 180° uma das extremidades e, nesse momento, fixá-las com cola. Feito isso, a faixa estará pronta. Na sequência, peça aos alunos que percorram a superfície da faixa com um dedo e percebam que, sem tirar o dedo do papel, é possível fazer uma trajetória completa em toda sua extensão, retornando ao ponto de origem.

RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO



  Explique as diferenças entre as imagens paradoxais de Escher com a Faixa de Moebius. Embora em ambas as construções se tenha um movimento de eterno retorno, a Faixa de Moebius é uma construção tridimensional possível, ao passo que os desenhos de Escher são construções imaginárias que, por meio de ilusões de óptica bidimensionais convincentes, representam formas impossíveis no espaço, pois causam a contradição de movimentos que sobem e retornam a mesma origem sem uma descida.

  Avalie a possibilidade de apresentar aos alunos outras construções artísticas que se valem de recursos semelhantes, explorando paradoxos por intermédio de ilusões de óptica, como René Magritte, Salvador Dalí, Vladimir Kush e Rob Gonsalves. Este último tem como marca estilística pintar imagens em que os planos mais abaixo (como chão e lagos) se mesclam harmonicamente com planos que deveriam estar em cima da paisagem (como o teto ou o céu), causando certo desnorteamento vertiginoso em quem as contempla. Um exemplo clássico é o quadro Autumn Cycling, em que um jovem andando de bicicleta sobre folhas secas espalhadas pelo chão subitamente se encontra pedalando sobre as árvores.

  Para aguçar a curiosidade dos alunos, comente que o trabalho de Escher, que até os dias atuais influencia teses tanto nos estudos da Arte quanto nos da Matemática, serviram de inspiração para os cenários dos filmes Labirinto – A magia do tempo (Labyrinth, 1986) e A origem (Inception, 2010), ambos contendo personagens caminhando em escadas e corredores de formatos impossíveis.

  No mundo dos *games*, alguns jogos com influências de Escher são Monument Valley e Fragments of Euclid, nos quais é possível controlar personagens em ambiências similares às dos quadros do artista plástico para resolver *puzzles* cada vez mais desafiadores.

  Para explorar ainda mais o universo do artista, proponha aos alunos que façam análises geométricas das obras Relatividade, Subindo e descendo, Queda d'água, Três mundos, Côncavo e convexo, Galeria de gravuras e Natureza-morta e rua. Cada uma utiliza um princípio diferente para causar ilusões de óptica envolvendo representações de formas geométricas espaciais. Disponível em: <https://mcescher.com>. Acesso em: 15 jun. 2020.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares** pedindo previamente aos alunos que façam pesquisas sobre Escher e outros artistas marcantes pelo trabalho com ilusões de óptica e jogos de perspectiva. No dia seguinte, reúna-os em grupos para que discutam sobre as características das imagens coletadas e sobre os recursos geométricos aplicados, para que depois apresentem as conclusões e as curiosidades para toda a sala.

  Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

Sala dos professores

Para complementar o trabalho com essas páginas, avalie a conveniência de promover uma aula com um professor da área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente do componente curricular **Arte**. Uma possibilidade é apresentar curiosidades sobre a vida e a obra de Escher, fazendo uso de imagens e explicando as sutilezas na composição de perspectivas e paradoxos pelo artista. Em seguida, oriente os alunos a utilizar a criatividade para, inspirados por Escher, produzir desenhos com construções espacialmente impossíveis.

BNCC

A abertura desse tema promove o desenvolvimento da **Competência geral 3** da BNCC. Além disso, permite trabalhar o tema contemporâneo transversal **Diversidade cultural**, pois ao abordar a obra de um artista de estilo icônico e concepções originais, promove-se a valorização de manifestações artísticas e culturais diversas, inserindo os alunos nas ricas tradições da cultura mundial. Mais ainda, nota-se que incentivar a associação entre Matemática e produções artísticas acarreta benefícios na apreensão de ambas as áreas, além de incrementar o senso estético de beleza e harmonia, possibilitando aos alunos que percebam camadas mais profundas e sutis na apreciação artística. Assim, poderá fruir a cultura de modo mais pleno e, eventualmente, vir a se expressar em nível artístico com maior amplitude de consciência.

Página 12

- No texto dessa página, apresentam-se informações históricas quanto ao desenvolvimento da Geometria, em especial, e da Matemática, em geral. Conhecer as origens das ideias matemáticas que até os dias atuais aplicamos na construção do conhecimento humano é de grande importância para que os alunos possam compreender a evolução dos conceitos, interpretar os contextos intelectuais de diferentes épocas e avaliar de modo crítico e consciente a conjuntura atual nos estudos e na transmissão e produção de saberes.
- Ao trabalhar o conteúdo dessa página, apresente aos alunos o texto a seguir, que traz mais informações sobre Tales de Mileto.

A Jônia e os pitagóricos

[...]

O que se sabe de fato sobre a vida e obra de Tales é realmente muito pouco. Seu nascimento e sua morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585 a.C. provavelmente ocorreu quando estava em plena maturidade, digamos 40 anos, e diz-se que ele tinha 78 quando morreu. No entanto, as sérias dúvidas sobre a autenticidade da história do eclipse tornam tais extrapolações arriscadas, e abalam nossa confiança quanto às descobertas cuja paternidade é atribuída a Tales. A opinião antiga é unânime em considerar Tales como um homem de rara inteligência e como o primeiro filósofo – por acordo geral o primeiro dos Sete Sábios. Era considerado um "discípulo dos egípcios e caldeus", hipótese que parece plausível. A proposição agora conhecida como Teorema de Tales – que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto – pode ter sido aprendida por Tales durante suas viagens à Babilônia. No entanto, a tradição vai mais longe e lhe atribui uma espécie de demonstração do teorema. Por isso Tales foi frequentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro – originador da organização dedutiva da Geometria. [...]

Outras lendas ainda descrevem Tales como mercador de sal, defensor do celibato ou estadista de visão. Tais referências, no entanto, não trazem mais provas relativas à importante questão de saber se Tales arranjou de fato, ou não, certo número de teoremas geométricos numa sequência dedutiva. A estória de que calculou a distância de um navio no mar por proporcionalidade de lados de triângulos semelhantes é inconclusiva, pois os princípios que regem tal cálculo eram conhecidos há tempos no Egito e na Mesopotâmia. Tais estórias não provam a conjetura ousada de ter Tales criado a Geometria demonstrativa; mas de qualquer forma Tales é o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas. [...]

BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. p. 34-35.

- O grande avanço conquistado pelos pensadores da época de Tales foi notar que, por meio de abstrações matemáticas partindo de alguns pressupostos básicos, seria possível construir demonstrações que garantissem a veracidade de certas proposições gerais. As primeiras demonstrações, capazes de provar enunciados dotados de grande generalidade (os chamados "teoremas") estavam no contexto da Geometria. Assumindo como verdadeiros alguns poucos fatos (chamados "axiomas" ou "postulados"), uma sucessão de raciocínios lógicos leva a conclusões acerca das figuras geométricas, garantindo relações que, com total certeza, são válidas sempre e em qualquer lugar.

  Desde então, a ideia de demonstração é essencial na Matemática. Simon Singh explica que:

MODERNA

Em Matemática, o conceito de prova é muito mais rigoroso e poderoso do que o que usamos em nosso dia a dia e até mesmo mais preciso do que o conceito de prova como entendido pelos físicos e químicos. A diferença entre prova científica e prova matemática é ao mesmo tempo sutil e profunda. Ela é crucial para que possamos entender o trabalho de cada matemático, desde Pitágoras.

A ideia de demonstração matemática clássica começa com uma série de axiomas, declarações que julgamos ser verdadeiras ou que são verdades evidentes. Então, através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o teorema.

Os teoremas matemáticos dependem deste processo lógico, e uma vez demonstrados eles serão considerados verdade até o final dos tempos. A prova matemática é absoluta.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 21. ed. Rio de Janeiro: Record, 2014. p. 41.

Descobrir a existência desses métodos de dedução lógica, percebendo que para validar uma proposição matemática é necessário prová-la de forma que se torne verdadeira em todos os casos, foi uma das maiores conquistas da humanidade rumo ao progresso científico e tecnológico.

- Outro ponto a ser destacado é o fato de Euclides ter sido um organizador de todo o conhecimento geométrico acessível em seu tempo, reunindo em uma só obra, de forma sistematizada em uma ordem lógica impecável, todos os teoremas e proposições mais essenciais da Geometria, tudo isso decorrendo do menor número possível de axiomas aceitos como autoevidentes. Milênios antes da sistematização da Matemática em bases lógicas sólidas, Euclides já havia percebido a necessidade de um tratamento axiomático da Geometria. Sua obra Os elementos, até os dias atuais usada como base de materiais didáticos, é a obra científica mais divulgada e duradoura de todo o mundo.
- Curiosamente, nas décadas finais do século XIX, havia certa pressão de alguns pedagogos na substituição do método de Euclides para o ensino da Geometria. Esses pedagogos defendiam que havia métodos mais modernos que supostamente seriam mais eficientes. O escritor e matemático Charles Lutwidge Dodgson, mais conhecido pelo pseudônimo Lewis Carroll, com o qual assinou a autoria de Alice no País das Maravilhas, seu livro mais famoso, redigiu um livro em forma de peça de teatro para convencer as pessoas de que a melhor maneira de ensinar Geometria permanecia sendo pela abordagem euclidiana. Assim escreveu o autor no prefácio de Euclides e seus rivais modernos:

O objetivo deste pequeno livro é o de provar, primeiro, que é essencial para o ensino ou para exames de Geometria Elementar utilizar apenas um livro-texto; segundo, que há fortes razões *a priori* para manter, em todas as duas características principais e, especialmente, sua sequência e ordenação de proposições e seu tratamento das paralelas, o manual de Euclides; e terceiro, que não foram ainda apresentadas razões suficientes para abandoná-lo em favor de nenhum dos manuais modernos que têm sido propostos como substitutos.

DODGSON, Charles Lutwidge (Lewis Carroll). *Euclides e seus rivais modernos*. São Paulo: Livraria da Física, 2014. p. 49.

O livro, com muito bom humor, conta a história de um professor de Matemática que é visitado pelo fantasma do próprio Euclides. Após o choque inicial, as personagens travam um debate sobre os méritos dos métodos modernos face aos do método de Euclides para o ensino da Geometria. Nesse debate, são analisadas uma a uma as principais proposições de Os elementos, comprovando a perfeita adequação do tratamento.

Páginas 13 e 14

- A noção de **Conjuntos**, apresentada para fundamentar os estudos da Geometria espacial, é, na verdade, essencial na estruturação lógica de toda a Matemática, e não apenas da Geometria. Embora a enunciação moderna da Teoria dos Conjuntos seja historicamente recente, tendo despontado suas raízes em meados do século XIX, é ela, estritamente considerada, a fundamentação lógica de praticamente todos os ramos da Matemática.
- O estudo dos elementos básicos de **Conjuntos** pode ser um tanto maçante para alunos com maior aptidão matemática, pois eles podem considerar simples demais trabalhar com conceitos como união e interseção. Por outro lado, outros alunos podem ter dificuldade em apreender o assunto por sentirem demasiadamente abstrato, não encontrando motivação prática para estudar relações entre conjuntos e elementos de forma geral, o que pode levá-los a perder o interesse e acabar não aprendendo a matéria, que é essencial para estudos posteriores.
- Para evitar esse tipo de desinteresse e para equilibrar as expectativas dos alunos com diferentes aptidões, procure, sempre que possível, fazer referência a possíveis aplicações dos conceitos gerais apresentados. Mencione, quando oportuno, que as ideias de pertinência, inclusão, união e interseção, embora estudadas partindo-se de exemplos de conjuntos numéricos e alfabéticos, aplicam-se a quaisquer conjuntos imagináveis, de forma que serão utilizadas para alcançar resultados mais fortes e úteis em outros contextos, principalmente no estudo da Geometria demonstrativa.
- Explique para os alunos que os elementos de um conjunto podem ser dados de maneira explícita ou por

EDITORIA

meio de uma lei geral que caracterize quais objetos fazem e quais não fazem parte do conjunto.

Assim, por exemplo, os elementos do conjunto $A = \{a, b, c\}$ são dados explicitamente, ao passo que o conjunto B de todas as vogais do alfabeto é um conjunto cujos elementos são determinados por meio de uma "lei" (ser ou não uma vogal).

Proponha uma conversa entre os alunos para que eles percebam que apenas os elementos de conjuntos finitos podem ser dados explicitamente, já que só faz sentido considerar uma infinidade de elementos se tivermos alguma característica distintiva para defini-los, não sendo possível registrá-los todos de modo explícito.

- Chame a atenção dos alunos para a importância de perceber que a notação $\{\varnothing\}$ não indica um conjunto vazio, e sim um conjunto unitário composto pelo elemento que, coincidentemente, é o conjunto vazio. Pensar sobre esse caso atípico é útil para compreender melhor os conceitos trabalhados e as notações empregadas.

Páginas 15 a 17

- Na tarefa **2** da página **15**, conduza os alunos a perceber que $A \cup \varnothing = A$ e $A \cap \varnothing = \varnothing$ para todo conjunto A. Aproveite a oportunidade para incentivá-los a descobrir outras propriedades gerais envolvendo relações entre conjuntos.
- Na tarefa **4** da página **15**, explique aos alunos o que são palavras paroxítonas. Por definição, palavras paroxítonas são aquelas cuja sílaba tônica (ou seja, a sílaba "mais forte", de maior intensidade sonora) é a penúltima. Assim, por exemplo, "chuva" e "calculadora" são palavras paroxítonas, pois a sílaba tônica da primeira é "chu" e a da segunda é "do". Por outro lado, "maçã" e "pétala" não são paroxítonas, pois a sílaba tônica da primeira é a última ("çã") e a da segunda é a antepenúltima ("pé"). Dizemos que "maçã" é oxítona (a sílaba tônica é a última) e que "pétala" é proparoxítona (antepenúltima sílaba é tônica).

  Além disso, explique que o til ("~") não é um acento, e sim um sinal gráfico que indica nasalação. Por isso, nem sempre ele ocorre nas sílabas fortes, como é o caso das palavras "órfão" e "órgão", que são paroxítonas, e não oxítonas.
- Na demonstração do **Teorema 1** da página **16**, mostre para os alunos como um teorema, provado com base em axiomas, é uma afirmação geral que funciona para todos os casos em que suas hipóteses sejam satisfeitas, e não apenas em um ou outro caso particular.

Páginas 18 a 20

- Ao abordar o **Postulado 7**, conhecido como "postulado das paralelas", diga aos alunos que, por muitos anos, diversos matemáticos tentaram provar que esse postulado poderia ser derivado dos demais, constituindo-se, portanto, um teorema, e não uma verdade que deva ser aceita sem prova. Contudo, durante vários séculos, mesmo os maiores matemáticos não foram capazes de realizar esse feito de obter o postulado das paralelas por meio de um encadeamento lógico fundado nos outros postulados. Já no século XIX, constatou-se, por meio de uma prova conclusiva, que de fato isso é impossível. Tal constatação deu origem a outras geometrias, mais complexas e abstratas, denominadas de "geometrias não euclidianas". Essas geometrias partem dos mesmos postulados que a Geometria euclidiana clássica, exceto no que diz respeito ao postulado das paralelas. Na Geometria elíptica, por exemplo, não há nenhuma reta que seja paralela à reta inicial, ao passo que na Geometria hiperbólica, postula-se que por um ponto fora de uma reta dada passam infinitas retas que lhe sejam paralelas.

  Explique que as geometrias não euclidianas não descrevem diretamente o espaço material que experimentamos no dia a dia. Contudo, elas têm grande utilidade na descrição de fenômenos físicos mais complexos, sendo essenciais, por exemplo, na Teoria da Relatividade e no funcionamento de tecnologias, como satélites e GPS.
- Observe se os alunos compreendem a diferença entre retas perpendiculares e retas ortogonais. Diga que, embora nos dois casos a inclinação relativa entre as duas retas seja de 90°, as retas perpendiculares são um caso particular de retas concorrentes, pertencendo ao mesmo plano, enquanto as retas ortogonais são um caso particular de retas reversas, pertencendo a planos diferentes.

- Ao trabalhar com a tarefa **10** da página **20**, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Think-pair-share**. Peça aos alunos que pensem na questão individualmente e, depois, reúna-os em grupos para que elaborem argumentos a fim de embasar suas respostas. Ao final, peça que exponham as conclusões para toda a turma.

  Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.
- Peça aos alunos que construam as retas na resolução das tarefas **11** e **12**, pois esse procedimento pode auxiliá-los na busca da solução.

Página 22

- Na tarefa **13**, chame a atenção dos alunos para a importância de manter uma escrita clara e rigorosa, sem ambiguidades, na hora de reescrever as frases que estejam incorretas. Muitas vezes, temos uma ideia correta, mas nos equivocamos no momento de registrá-la verbalmente no papel. É necessário, no registro de proposições matemáticas, utilizar palavras unívocas em uma frase bem construída.

EM MODERNA

- Para resolver a tarefa **14**, proponha a construção do prisma indicado. Complemente a tarefa fazendo as mesmas perguntas a respeito de um prisma oblíquo. Providencie os moldes de um prisma reto de base hexagonal e de um prisma oblíquo de base hexagonal e leve para a sala de aula.
- Na tarefa **15**, sugira aos alunos que façam desenhos ou utilizem os próprios lápis e canetas como representantes físicos das retas, a fim de que avaliem as possibilidades com mais facilidade.

Páginas 25 e 26

- Para complementar o trabalho com essas páginas, proponha aos alunos a seguinte tarefa.

- A fim de fixar os conceitos de paralelismo e perpendicularidade no espaço, promova a construção de cubos, paralelepípedos e outros poliedros por meio de materiais manipuláveis, como cartolinas para representar planos e canudos para representar retas. Para tanto, peça aos alunos que pesquisem moldes na internet ou tentem desenvolver eles mesmos planificações a serem utilizadas na construção dos sólidos geométricos.

  Feitas as figuras tridimensionais, promova a análise das retas que sejam paralelas e perpendiculares entre si, incentivando os alunos a observarem, na prática, as propriedades estudadas.

  É mais produtivo se os alunos forem divididos em grupos e cada grupo construir uma figura diferente, a fim de que as análises não sejam todas iguais. Para exemplificar o que deve ser feito, o professor pode construir para si um cubo, e nele indicar pares de retas paralelas e pares de retas perpendiculares.

Páginas 27 e 28 Resolvendo por etapas

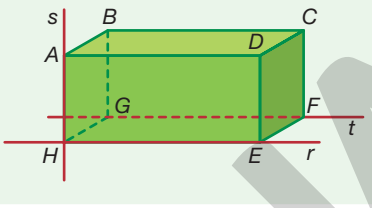
- Ao trabalhar com a seção **Resolvendo por etapas**, avalie a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Design thinking**. Para isso, proponha o problema apresentado no início da seção, antes de abordar os demais conteúdos. Alternativamente, procure apresentar um problema similar para que os alunos resolvam construindo as etapas da metodologia desta seção.

  Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é você quem resolve! Resoluções

1 A afirmação escrita por Aroldo é verdadeira. Como *r* e *s* são perpendiculares, existe um plano α que as contém. Se tomarmos um plano *β* que seja perpendicular a α e contenha *r* e se a reta *t*, paralela a *r*, pertencer a β, então *s* e *t* serão ortogonais, pois elas não vão se tocar, mas a posição de uma em relação à outra terá um ângulo de 90°.

2 É possível, sim, resolver o problema utilizando o plano apresentado na seção. Para isso, basta construir um paralelepípedo reto retângulo e traçar as retas *r*, *s* e *t* da maneira representada na figura abaixo, de onde se pode concluir que $r \perp s$, $r // t$ e que *s* e *t* são ortogonais entre si. Isso comprova que a afirmação de Aroldo é verdadeira.



RONALDO INÁCIO

Página 29

- Ao trabalhar com a tarefa **26**, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Think-pair-share**. Solicite aos alunos que pensem na questão individualmente e, em seguida, reúna-os em grupos para que discutam seus pontos de vista a fim de fundamentar suas respostas. Ao final, peça que exponham as conclusões para toda a turma.

  Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.
- Para responder à questão da tarefa **27**, diga aos alunos que apoiem um livro sobre a mesa, para que tenham a visão tridimensional da situação.

- Ao final do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, peça que comentem sobre a importância dos processos lógico-dedutivos na Matemática, em especial na Geometria. Solicite que comentem sobre as dificuldades que tiveram em visualizar ou em compreender as posições relativas entre retas e planos, ou, ainda, se tiveram problemas em aplicar na Geometria os conceitos estudados de Teoria dos Conjuntos.

  Ao final da conversa, peça que registrem, em não mais do que 5 minutos, as conclusões que absorveram para si a respeito de todo o tema.

  Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

2 Projeções ortogonais no plano e distância no espaço

Objetivos específicos

- Reconhecer as projeções ortogonais sobre um plano.
- Resolver problemas envolvendo projeções ortogonais no plano.
- Compreender as distâncias no espaço.

Em continuação aos conteúdos estudados no tema **1**, esse tema aborda conceitos que envolvem projeções ortogonais no plano e distâncias no espaço. Esses conteúdos são fundamentais para compreender aspectos da Geometria espacial de posição, pois questões relacionadas a projeções ou distâncias no espaço podem criar condições para construção e/ou utilização de um modelo matemático capaz de auxiliar na compreensão de como vemos, comunicamos e interagimos com o mundo. Isso contribui tanto para a formação para o trabalho quanto para a formação de sujeitos capazes de interpretar situações corriqueiras do dia a dia, como interpretar uma sinalização de alerta, representar objetos em 3D ou 2D, projetar a planta de uma casa, explorar diferentes perspectivas de um objeto etc.

Sugestão de avaliação

Para avaliar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito dos conteúdos que serão estudados, considere a possibilidade de reproduzir ou mostrar a eles a tirinha abaixo e questionar por que, mesmo tendo certeza, o menino muda de ideia a respeito da figura depois de um pouco de reflexão.

BECK, Alexandre. *Armandinho Sete*. Florianópolis: A.C. Beck, 2015. p. 80.

Resolução dos comentários

Porque cada face do objeto tem um formato diferente.

Esta tarefa, além de propiciar discussões iniciais sobre projeções ortogonais, possibilita reflexão dos alunos a respeito de atitudes e valores que remetem ao desenvolvimento de empatia.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 30 e 31 **Desenho técnico**

- Na abertura desse tema, são apresentadas ideias de projeções ortogonais, tomando como exemplo a produção de desenhos técnicos. Para complementar e enriquecer as discussões, converse com os alunos sobre algumas informações a respeito do desenho técnico na Engenharia e na Arquitetura e sobre as normas que regem essa prática.

  Comente com eles que a necessidade que os profissionais de Engenharia e Arquitetura têm de representar com precisão objetos, como peças, ferramentas, máquinas, construções e edificações de projetos, foi um dos pontos de partida para a criação do que conhecemos atualmente por desenho técnico. De modo geral, o desenho técnico tem como finalidade representar com precisão, no plano, as formas do mundo material, ao mesmo tempo em que possibilita a reconstituição espacial dessas formas. Embora o desenho técnico seja considerado, em muitos casos, como a linguagem gráfica universal da Engenharia e da Arquitetura, foi necessária a universalização dos procedimentos com o objetivo de padronizá-lo. Essa padronização é feita por meio de normas que consistem em códigos técnicos de regulamentação de relações entre produtores e consumidores, engenheiros, empreiteiros e clientes. As normas vigentes no Brasil são aprovadas e editadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT, fundada em 1940. Quando se trata de intercâmbio de serviços, em nível internacional, o órgão responsável pelas normatizações é a ISO (International Organization for Standardization), fundada em 1947, com sede em Londres. Ainda, no âmbito nacional, existem várias normas, conhecidas como NBRs, que estão de acordo com a ISO e regem a linguagem do desenho técnico em seus mais diversos parâmetros, desde *layouts* e dimensões.
- Leia para os alunos o texto a seguir a respeito da importância das normas do desenho técnico.

> [...]
>
> O desenho técnico é considerado como a linguagem gráfica universal da Engenharia e Arquitetura. Da mesma forma que a linguagem verbal escrita exige alfabetização, é necessário que haja treinamento específico para a execução e a interpretação da linguagem gráfica dos desenhos técnicos, uma vez que são utilizadas figuras planas (bidimensionais) para representar formas espaciais.
>
> No seu contexto mais geral, o Desenho Técnico engloba um conjunto de metodologias e procedimentos necessários ao desenvolvimento e comunicação de projetos, conceitos e ideias. Para isso, faz-se necessária a utilização

MODERNA

de um conjunto constituído por linhas, números, símbolos e indicações escritas normalizadas internacionalmente.

[...]

FERREIRA, Regis de Castro; FALEIRO, Heloisa Teresinha; SOUZA, Renata Fonseca. *Desenho técnico*. Apostila de circulação interna da Escola de Agronomia e Engenharia de Alimentos. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2008. p. 2.

- Para o trabalho com essas páginas, se julgar conveniente, utilize a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O assunto abordado nas páginas de abertura incentiva a mobilização de procedimentos matemáticos para construir modelos, abordando aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias** da BNCC. Além disso, ao promover o uso de diferentes registros de representação matemática, evidencia características da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias** da **BNCC**.

Sala dos professores

Avalie a possibilidade de desenvolver uma aula em conjunto com o professor da área de **Linguagem e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Arte**. Uma sugestão é, com a ajuda do professor desse componente curricular, elaborar um desenho técnico, para representar objetos 3D, projetando ortogonalmente sobre três planos. Alguns moldes podem ser encontrados na apostila de desenho técnico no *site* a seguir. Disponível em: <http://docente.ifrn.edu.br/gildamenezes/disciplinas/desenho-tecnico/2015/apostilas/apostila-catapan>. Acesso em: 16 jun. 2020.

Páginas 32 a 34

- Em alguns momentos no decorrer da seção de exercícios, devemos trabalhar com a metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Para trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, oriente os alunos a recorrer aos conceitos apresentados na página **32** de modo a interpretar as tarefas e resolvê-las adequadamente.
- Na tarefa **1**, oriente os alunos a comentar sobre termos e símbolos matemáticos que ainda causam dúvidas ou dos quais eles não lembrem o significado e anote as dúvidas na lousa para conversar, esclarecer ou relembrar definições que sejam necessárias.
- A tarefa **5**, proposta na página **34**, apresenta uma aplicação matemática na área da tecnologia, principalmente relacionada ao desenvolvimento de expressões gráficas. Nela, o conceito de Geometria espacial de posição, utilizando planos, pontos, retas e projeção ortogonal, é associado às vistas de um objeto. Verifique a possibilidade de pedir a um profissional que trabalhe com expressão gráfica para apresentar informações aos alunos, ou pesquise vídeos sobre o assunto na internet e reproduza-os na sala de aula. Esse tipo de tarefa permite aos alunos perceber a importância da Matemática nas profissões. Após a resolução da tarefa, para avaliar os alunos quanto à compreensão do conteúdo estudado, peça a eles que desenhem as diferentes vistas de um objeto. Para isso, organize a turma em grupos de quatro ou cinco integrantes e peça-lhes que escolham algum objeto, um material escolar, por exemplo. No desenvolvimento do trabalho, é importante cada aluno dos grupos escolher e desenhar uma vista diferente do objeto. Por fim, organize os objetos sobre uma mesa e peça à turma que os identifiquem com base nos desenhos de cada grupo.

Páginas 36 e 37

- Em alguns momentos no decorrer da seção **Exercícios e problemas**, recomenda-se trabalhar com a metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC A tarefa **8** aborda aspectos da **Competência geral 2**, pois é necessário imaginação e criatividade para compreender aspectos matemáticos contextualizados a elementos artísticos. Além disso, essa tarefa leva os alunos a realizar investigação e análise crítica para resolver uma situação advinda de outra área do conhecimento.

- Para que os alunos reflitam sobre os conteúdos estudados, proponha uma tarefa de resumo e revisão com base na metodologia ativa **Quick writing**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

PROPRIA

3 Poliedros

Objetivos específicos

- Distinguir figuras geométricas espaciais entre poliedros e não poliedros.
- Diferenciar poliedros convexos de poliedros não convexos.
- Reconhecer os Poliedros de Platão.
- Representar geometricamente situações por meio de figuras e estruturas geométricas.
- Resolver situações-problema relacionadas a figuras geométricas espaciais.
- Associar objetos sólidos às suas diferentes formas de representação no plano bidimensional, como planificações.
- Utilizar a Relação de Euler em problemas envolvendo poliedros.

Esse tema trata das formas planas e tridimensionais representadas em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. Nele, procura-se propiciar a consolidação de alguns conteúdos já estudados no Ensino Fundamental, como conceitos de polígonos e soma de seus ângulos internos e classificação de poliedros quanto ao número de faces. Os principais conteúdos estudados são poliedros convexos e poliedros não convexos, Relação de Euler, Poliedros de Platão, poliedros regulares, não poliedros.

Sugestão de avaliação

Para introduzir esse tema e avaliar os conhecimentos prévios dos alunos, leve à sala de aula alguns objetos que possuam formato semelhante ao de poliedros. Peça que observem e listem algumas semelhanças e diferenças. Proponha que escolham um desses objetos e escrevam suas características em uma folha de papel, trocando-a depois com um colega. Em seguida, peça-lhes que indiquem o objeto escolhido pelo colega, analisando apenas a descrição feita por ele. Tais características podem ser registradas com base na resposta a algumas perguntas. Veja algumas delas.

- O objeto apresenta faces triangulares?
- O objeto possui faces paralelas?
- As faces que compõem o objeto são semelhantes entre si?

Essa tarefa permite auxiliar a observação de regularidades, o que será feito ao longo do tema para identificar relações entre plano e espacial, entre número de vértices, arestas e faces.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 38 e 39 Estruturas moleculares

- Essas páginas trazem uma abordagem do conceito de Geometria associado ao estudo das estruturas moleculares. Nessa abordagem, de maneira intuitiva, pode-se perceber que as estruturas moleculares apresentadas lembram o formato de poliedros.
- Estabeleça um tempo para que os alunos leiam o texto e respondam às questões propostas. Após terminarem, promova um debate, atuando como mediador, a fim de coletar informações sobre a compreensão do texto por parte dos alunos.
- Verifique se eles são capazes de estabelecer diferenças entre as representações das figuras geométricas espaciais apresentadas por meio das estruturas moleculares e se estão familiarizados com conceitos geométricos, como vértices, faces e arestas, que serão utilizados no estudo das figuras geométricas espaciais nesse tema.

- Utilize a metodologia ativa **Abordagem por pares** para desenvolver o trabalho com essas páginas iniciais. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

O contexto apresentado nas páginas de abertura permite a realização de um trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Química**. Nelas, o conceito de Geometria é associado ao estudo das estruturas moleculares. Dessa maneira, é possível explorar tanto aspectos matemáticos quanto químicos e mobilizar aspectos da **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

- Para avaliar a compreensão dos alunos em relação ao trabalho com essas páginas, proponha outros questionamentos envolvendo Geometria, como: Quais polígonos podemos observar nas estruturas moleculares apresentadas? Esses polígonos são regulares?
- Para complementar as discussões, apresente outras informações acerca da Geometria molecular, tais como o texto e as imagens a seguir.

REPRODUÇÃO PROIBIDA

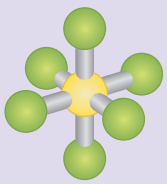
[...]

A geometria molecular está associada ao formato espacial que as moléculas assumem devido ao arranjo espacial dos átomos ligados e dos pares eletrônicos isolados. O tipo de geometria apresentado em cada molécula é resultante da natureza das ligações e dos constituintes. [...]

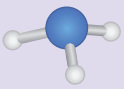
SILVA, Ana Paula Medeiros. *Geometria molecular*: elaboração, aplicação e avaliação de uma sequência didática envolvendo o lúdico. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências da Natureza) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2016. p. 15. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/5030/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Ana%20Paula%20Medeiros.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2020.

- Veja a seguir alguns exemplos.

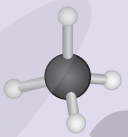
O hexafluoreto de enxofre é um gás útil em equipamentos elétricos. É uma molécula com sete átomos chamada octaédrica.



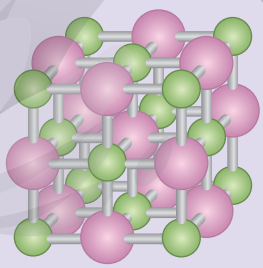
A amônia é utilizada na fabricação de fertilizantes agrícolas e produtos de limpeza, e a geometria da molécula é piramidal (ou pirâmide trigonal).



O metano é uma molécula com cinco átomos: tetraédrica.



O cloreto de sódio é o principal componente do sal de cozinha.



ILUSTRAÇÕES: CYNTHIA SENKOUCHI

- Verifique a possibilidade de o professor de **Química** desenvolver tarefas que abordem a representação de estruturas químicas de alguns elementos. Para validar as respostas da tarefa, caso seja viável, acompanhe os alunos, com o professor de **Química**, ao laboratório de informática.

Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos. Verifique se os computadores têm instalado o programa ChemSketch. Caso não tenham, há uma versão dele que pode ser baixada gratuitamente pelo *site* a seguir. Disponível em: <https://www.acdlabs.com/resources/freeware/chemsketch/>. Acesso em: 16 jun. 2020. Esse programa consiste em um pacote de desenhos que permite desenhar, bidimensional e tridimensionalmente, estruturas químicas, incluindo estruturas orgânicas, organometálicas, polímeros e Markush.

Páginas 40 e 41

- Para complementar o trabalho com essas páginas, proponha aos alunos que, reunidos em grupos, façam uma pesquisa sobre outros exemplos de obras arquitetônicas que se assemelhem a poliedros. Sugira algumas, como o Museu do Louvre, na França, a Sede da TV Central da China.

JEAN LUCICHARD/SHUTTERSTOCK

Museu do Louvre, na França, em 2019.

AVADA/ALAMY/FOTOARENA

Sede da TV Central da China, em 2019.

- Fique atento para que cada grupo escolha uma obra diferente e elaborem uma releitura dela, seja por meio de desenho, seja por meio de maquete. Peça aos alunos que, junto com essa releitura, apresentem questões históricas e a explicação ou significado do formato da obra.

MODERNA

Oriente-os a apresentar o trabalho realizado para todos da turma. Verifique se os alunos reconhecem a relação entre as obras selecionadas e o conceito de poliedro.

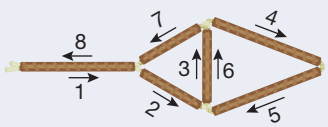
- Além disso, como essa tarefa será feita em grupo, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Ao trabalhar os conteúdos dessas páginas, leve para a sala de aula alguns canudos, barbante e tesoura, e auxilie os alunos na construção de algumas estruturas que se assemelhem a poliedros. Peça que anotem o número de vértices, arestas e faces que as estruturas construídas apresentam, bem como sua classificação quanto ao número de faces. Veja algumas sugestões.

a) Tetraedro

Material

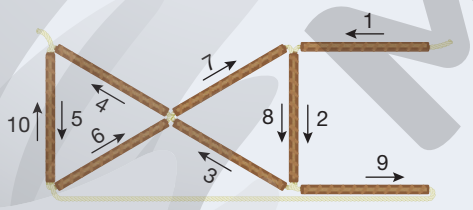
- 75 cm de barbante
- 3 canudos com 6 cm cada
- 3 canudos com 10 cm cada



b) Pentaedro

Material

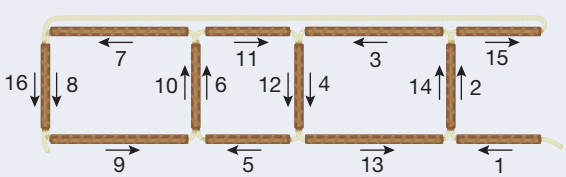
- 1,2 m de barbante
- 8 canudos com 10 cm cada



c) Hexaedro

Material

- 1,25 m de barbante
- 8 canudos com 6 cm cada
- 4 canudos com 10 cm cada



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Resoluções

a) Número de vértices: 4; número de arestas: 6; número de faces: 4.

b) Número de vértices: 5; número de arestas: 8; número de faces: 5.

c) Número de vértices: 8; número de arestas: 12; número de faces: 6.

- Para complementar o estudo dessas páginas, apresente aos alunos o texto a seguir, que traz mais informações sobre os poliedros.

Os poliedros

Os primeiros povos a se dedicarem à Matemática por si próprios foram os gregos, que, entre outros assuntos, estudaram várias figuras geométricas espaciais. Algumas dessas formas, como também suas propriedades, foram tratadas inicialmente por eles, sendo esse o motivo pelo qual essas formas receberam nomes que derivam da língua grega.

Um dos matemáticos que bastante contribuiu para o estudo dos poliedros foi o alemão Johannes Kepler (1571-1630). Em sua obra Mysterium cosmographicum, de 1596, para descrever o Sistema Solar, Kepler idealizou que as órbitas planetárias estariam contidas em esferas separadas por poliedros.

Página 42

- Para a tarefa **1**, além de apresentar a classificação de cada sólido, peça aos alunos que justifiquem suas respostas, com base nas definições apresentadas nas páginas anteriores. Além disso, oriente-os a organizar as respostas dos itens da tarefa **2** em um quadro e, por meio de questionamentos, verifique, de maneira informal, a Relação de Euler, que será estudada na próxima página.
- Na tarefa **5**, sugira aos alunos que esbocem o cubo e simulem um desenho do corte descrito no problema.

Página 43

- Como sugestão para fomentar o pensamento matemático e o raciocínio lógico, contextualizando ao conteúdo apresentado na página **43**, proponha aos alunos um desafio de investigar e representar, por meio de desenho, um poliedro não convexo que atenda à Relação de Euler.
- Oriente os alunos a realizar uma pesquisa sobre poliedros não convexos, aos quais a Relação de Euler não se aplica. Sugira que escolham, no mínimo, cinco figuras geométricas espaciais com essa característica. Para esses poliedros, eles deverão investigar e registrar a quantidade de lados, vértices e faces, organizando-as em um quadro. Depois, proponha que comparem os dados desse

MODERNA

quadro com as informações da tarefa **2**, apresentada na página **42**.

- Além disso, como essa tarefa será feita em grupos, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 44 e 45 Acessando tecnologias

- O trabalho com a seção **Acessando tecnologias** pode ser realizado no laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se de que todos os computadores possuam o *software* VisualG instalado, por meio do qual a tarefa será realizada. O *download* pode ser feito gratuitamente no *site* a seguir. Disponível em: <http://visualg3.com.br/>. Acesso em: 16 jun. 2020.

> A fim de que os alunos trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitá-lo no *software* e atribuir valores às variáveis definidas.

- Esse tipo de tarefa possibilita aos alunos entrarem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- É possível desenvolver o trabalho com a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Nesta seção, os alunos são desafiados a decompor problemas, reconhecer padrões, filtrar, classificar e organizar informações relevantes e construir algoritmos, desenvolvendo, assim, o pensamento computacional. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O desenvolvimento da tarefa proposta na seção **Acessando tecnologias** contempla a habilidade **EM13MAT405** da **BNCC**, tendo em vista que promove o uso de conceitos básicos de linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem matemática.

Agora é com você! Resoluções

1 O número de faces do poliedro.

2 Uma sugestão de programa em VisualG é:

```
1  Algoritmo "relacao_de_Euler"
2  Var
3  V, F, A: inteiro
4  Inicio
5  escreva("Digite o número de vértices")
6  leia(V)
7  escreva("Digite o número de faces")
8  leia(F)
9  A <- V + F – 2
10 escreva("A quantidade de arestas é",A)
11 Fimalgoritmo
```

Página 51

BNCC A tarefa **20** contempla a habilidade **EM13MAT405**, tendo em vista que requer dos alunos a implementação de algoritmos escritos em linguagem matemática utilizando, para isso, conceitos iniciais de linguagem de programação. Desse modo, aborda-se aspectos da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

- O contexto apresentado na tarefa **21** permite abordar um pouco a respeito do futebol. Como sugestão, inicie lendo para os alunos o texto a seguir e promova uma roda de conversa sobre aspectos relevantes acerca do tema.

> [...]
>
> Devemos lembrar que o futebol não é popular apenas no Brasil. Ele é o esporte mais popular do mundo. Talvez não signifique para muitos países o que significa para nós, mas em alguns – como a Argentina, a Inglaterra, entre outros – ele também é um importante elemento cultural e de identidade nacional. Por isso, a história do futebol é também um pedaço da história do mundo, especialmente no tão complicado século XX.
>
> [...]
>
> O primeiro lugar de nosso país a conhecer o futebol como um esporte moderno foi São Paulo, que logo passou a tê-lo como parte do seu

cotidiano. O futebol também acompanhou o desenvolvimento da cidade e tornou-se parte da cultura e da identidade do grande centro industrial e econômico que emergia no final do século XIX e início da República. Assim, podemos considerar que a história do futebol no Brasil acompanha a própria história de São Paulo e também a da República Brasileira. [...] o futebol reflete os diversos momentos pelo qual passou nosso país, ganhando espaço e se consolidando como "esporte nacional" ao mesmo tempo em que a nossa própria identidade brasileira é construída. E, claro, passa também a ser um elemento fundamental dessa identidade e de nossa cultura.

[...]

MAGALHÃES, Lívia Gonçalves. *Histórias do futebol*. São Paulo: Arquivo Público do Estado, 2010. p. 10-11 (Coleção Ensino & Memória).

- Para que os alunos reflitam sobre os conteúdos abordados nesse tema, uma sugestão é a elaboração de um mapa conceitual. A metodologia ativa **Quick writing** pode servir como base para outros encaminhamentos dessa natureza. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

4 Prismas

Objetivos específicos

- Reconhecer as propriedades de um prisma.
- Identificar os elementos de um prisma.
- Calcular a área de superfície de um prisma.
- Calcular o volume de um prisma.
- Compreender o Princípio da Cavalieri para obter volume de prismas.

Esse tema trata do estudo dos prismas. Os principais conteúdos estudados são elementos e características de um prisma, área da superfície de um prisma, volume do paralelepípedo reto retângulo e o Princípio de Cavalieri. Alguns alunos podem apresentar dificuldade para interpretar as figuras e imaginá-las como espaciais. Nesse caso, avalie a possibilidade de levar para a sala de aula alguns modelos que representam prismas para que os alunos possam visualizar e manusear. Esse tipo de abordagem possibilita-lhes compreender propriedades geométricas em mais de duas dimensões e utilizar conteúdos matemáticos como uma ferramenta auxiliar na interpretação e na ação sobre diversas situações da realidade.

Sugestão de avaliação

Antes de iniciar o trabalho com o tema, realize um breve diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos acerca dos conteúdos que serão estudados. Se possível, leve para a sala de aula no mínimo duas caixas de *pizza* e duas de sapato. Caso deseje obter uma caixa mais alta, sobreponha caixas de mesma forma e mesmo tamanho e encape-as.

Comente com os alunos que esses são exemplos de prismas utilizados em situações cotidianas. Peça que listem diferenças entre eles e identifiquem o formato das faces.

Para complementar a avaliação dos alunos quanto à compreensão dessas informações, pergunte se eles se recordam ou reconhecem alguma dessas formas na natureza, em objetos, construções ou outras coisas do dia a dia. Nesse momento, peça que justifiquem suas respostas, promovendo uma conversa com toda a turma.

Mais informações sobre **avaliações** diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 52 e 53 O formato das embalagens e sua função

- O assunto abordado nas páginas de abertura trata do formato de embalagens associado ao estudo dos prismas. Disponibilize um tempo (aproximadamente 15 minutos) para que os alunos leiam o texto informativo, destaquem os aspectos que mais lhes chamam a atenção e respondam às questões propostas. A seguir, promova uma conversa para explorar os conhecimentos e as considerações acerca do assunto tratado no texto. No decorrer da conversa, verifique se os alunos compreenderam as informações contidas no texto e se conseguem estabelecer relações entre as formas das embalagens com características e elementos de prismas. Para auxiliá-los em sua argumentação, sugira que usem a representação esboçada por eles, conforme pede a questão **B** proposta. Para complementar, peça-lhes que formulem uma terceira questão sobre o tema. Em seguida, avise que a questão elaborada por eles deve ser pesquisada e respondida por eles próprios como tarefa para casa a fim de serem apresentadas na próxima aula. Lembre-se de iniciar a próxima aula com a apresentação das questões.

MODERNA

- Para o desenvolvimento dessa conversa, avalie a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O assunto abordado na abertura proporciona ações de investigação e de tomada de decisões acerca de um tema contemporâneo e ao mesmo tempo um problema social, que é o descarte adequado de embalagens plásticas, buscando soluções sustentáveis com base em conhecimentos integrados à Matemática, abordando, assim, aspectos da **Competência específica 2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Além disso, permite trabalhar o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental** ao comentar a respeito da reciclagem.

Aproveite o momento para discutir aspectos de conscientização ambiental quanto ao uso das embalagens. Uma sugestão é apresentar os dados a respeito da produção e do descarte de plástico no meio ambiente

Criado a partir da segunda metade do século XX, o plástico passou a ser uma solução prática para a vida cotidiana. Entretanto, ultimamente, ele vem se destacando em razão da poluição que acarreta, uma vez que o material, feito principalmente a partir de petróleo e gás, com aditivos químicos, demora aproximadamente 400 anos para se decompor na natureza.

Segundo dados do Banco Mundial, o Brasil é o 4º maior produtor de lixo plástico no mundo, com 11,3 milhões de toneladas, ficando atrás apenas dos Estados Unidos, China e Índia. Desse total, mais de 10,3 milhões de toneladas foram coletadas (91%), mas apenas 145 mil toneladas (1,28%) são efetivamente recicladas, ou seja, reprocessadas na cadeia de produção como produto secundário. Esse é um dos menores índices da pesquisa e bem abaixo da média global de reciclagem plástica, que é 9%.

Isso representa uma ameaça ambiental e social, já que a poluição pelo plástico afeta a qualidade do ar, do solo e sistemas de fornecimento de água. Quando o destino é a queima ou incineração, o plástico pode liberar na atmosfera gases tóxicos, alógenos e dióxido de nitrogênio e dióxido de enxofre, prejudiciais à saúde humana. O descarte ao ar livre também polui aquíferos, corpos d'água e reservatórios, provocando o aumento de problemas respiratórios, doenças cardíacas e danos ao sistema nervoso das pessoas expostas. Além disso, o descarte é inadequado e o lixo que acumula nas ruas, por exemplo, pode comprometer galerias, causar o transtorno das enchentes e chegar a rios e oceanos, impactando a vida de muitos animais e contaminando diversos ecossistemas. Estima-se que, desde 1950, mais de 160 milhões de toneladas de plástico foram depositados nos oceanos de todo o mundo e que esse número pode ser quatro vezes maior no ecossistema terrestre.

Fonte de pesquisa: WWF. *Brasil é o 4º país do mundo que mais gera lixo plástico*. Disponível em: <https://www.wwf.org.br/?70222/Brasil-e-o-4-pais-do-mundo-que-mais-gera-lixo-plastico>. Acesso em: 14 maio 2020.

Existem diversas iniciativas para incentivar a redução e a reciclagem do plástico, dentre elas a busca por abolir sacolas plásticas do meio ambiente. O Rio de Janeiro, por exemplo, foi o primeiro estado do país a proibir os supermercados de realizar a distribuição ou mesmo a venda de sacolas plásticas. A ideia é incentivar a substituição do plástico por bolsas biodegradáveis ou reutilizáveis, também conhecidas como *ecobags*. A partir de janeiro de 2020, os estabelecimentos fluminenses que continuarem oferecendo sacolas plásticas brancas aos clientes podem levar multas que variam de R$ 355,50 a R$ 35 550,00. Medidas como essa também já haviam sido adotadas na cidade de Belo Horizonte, em 2011, e na capital de São Paulo, em 2015.

A seguir, conduza discussões direcionando questionamentos aos alunos, por exemplo, se eles ou seus responsáveis fazem uso das sacolas retornáveis. Pergunte se eles conhecem outras iniciativas que proporcionem a redução do plástico no meio ambiente. Dentre as respostas, eles podem citar a proibição do uso de canudinhos descartáveis, programas que trocam material reciclável por alimentos, confecção de peças de artesanato com base na reutilização de materiais etc.

Esse tema também permite a articulação de conceitos matemáticos a aspectos da **Competência geral 10**, tendo em vista que promove reflexões acerca da importância e do impacto que ações pessoais têm sobre a coletividade. Destaca ainda a responsabilidade social e a tomada de decisões com base em princípios ambientalmente sustentáveis baseando-se em interpretações e argumentações científicas, que parece ser característica da **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz

"Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

PROIBIDA

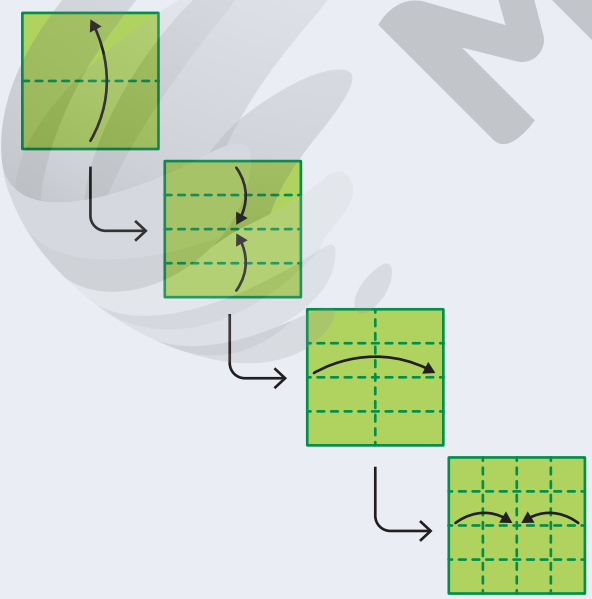
Páginas 54 e 55

- Ao trabalhar os conteúdos dessas páginas, comente com os alunos sobre o porquê de os prismas serem um caso especial de poliedros, recordando o conceito e diferenciando-os, se necessário, de outros exemplos de poliedros.
- Após apresentar a definição de prismas, explique aos alunos que a região do espaço limitada pelo prisma é formada por todos os pontos dos segmentos nos quais cada extremo está contido em uma das bases.
- Após trabalhar os conteúdos dessas páginas, reproduza para os alunos os moldes dos prismas das páginas para reprodução neste **Suplemento para o professor** e peça que se organizem em grupos para montar os moldes.

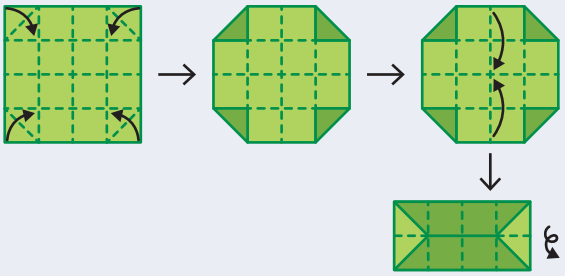
- Além disso, como sugestão, proponha aos alunos uma construção de modelos para representar prismas regulares pela técnica de dobraduras. Forneça folhas coloridas ou A4 e tesouras para os alunos.
- Se essa tarefa for feita em grupos, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social** em sala de aula na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Modo 1 – Para montar as faces laterais, formada por quatro retângulos.

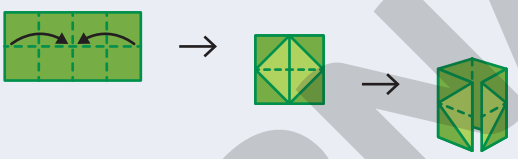
a) Use uma folha no formato de um quadrado e marque-a com 16 quadrados de mesmo tamanho.



b) Dobre os vértices do quadrado e, em seguida, dobre novamente passando pelos vincos formados anteriormente. Depois vire o retângulo.

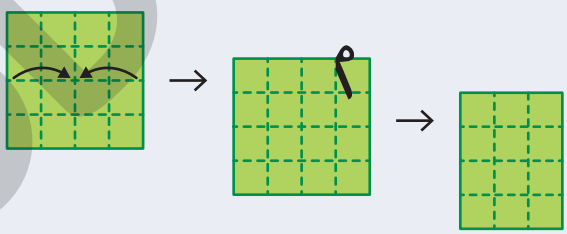


c) Leve os dois lados do retângulo ao centro e reforce os vincos formando uma peça composta por quatro retângulos.

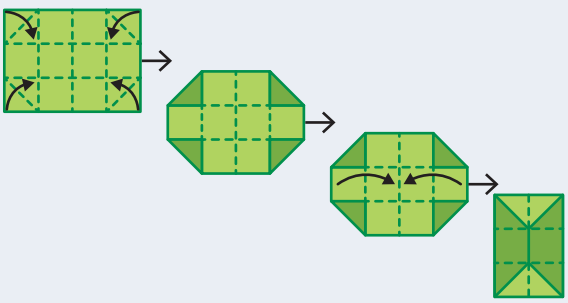


Modo 2 – Para montar as faces laterais, formada por três retângulos.

a) Repita o passo a do modo anterior, obtendo um quadrado com marcações de 16 quadrados menores. Para isso, é importante que a folha utilizada seja do mesmo tamanho. Em seguida, recorte a figura deixando as marcações de apenas 12 quadrados menores.



b) Dobre os quatro vértices do retângulo obtido. Depois, dobre os lados do retângulo até o vinco central.



c) Reforce os vincos para formar a unidade com três retângulos.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

Para construir um prisma de base triangular, basta apenas uma peça do **Modo 1**, encaixando-a em si mesma.

Para construir um prisma de base quadrada, serão necessárias duas peças do **Modo 2**, encaixando-as uma à outra.

Caso deseje fechar o prisma, a sugestão é desenhar a base, recortá-la e colar na peça obtida.

Proponha aos alunos que investiguem quais e quantas peças serão necessárias para construir prismas de base pentagonal e hexagonal, por exemplo. Depois, sugira a construção de um quadro, como o exemplo a seguir, para verificar se existe algum padrão relacionando o formato da base e o número de peças de cada montagem utilizada.

Quantidade (x) de peças usadas da montagem 1	1
Quantidade (y) de peças usadas da montagem 2	0
Encaixe das faces (z)	1
Cálculo $4x + 3y - z$	$4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 1 = 3$
Prisma formado	Prisma de base triangular

Esse tipo de tarefa pode servir, para além de trabalhar conceitos matemáticos, exercitar a coordenação motora, a criatividade e a investigação.

Fonte de pesquisa: LUCAS, E. S. C. *Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami*. 2013. 82 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais.

Página 56

- Para auxiliar na resolução das tarefas, oriente os alunos a fazer anotações, destacar os dados relevantes em cada problema e representar os desenhos nos problemas sem imagens.
- Na tarefa **2**, verifique se os alunos conseguem associar os lados $\overline{BE}$ e $\overline{BL}$, do triângulo proposto, a diagonais do hexágono da base e do prisma, respectivamente. É importante esclarecer esses conceitos, pois eles serão necessários para resolver as tarefas posteriores.
- A tarefa **5** pode servir para retomar métodos para simplificar ou calcular raízes quadradas não exatas. Em seguida, promova uma conversa sobre as resoluções das tarefas, com o objetivo de esclarecer dúvidas e verificar se os alunos responderam corretamente à questão.

- Para melhor aproveitamento das atividades dessa página, avalie a possibilidade de recorrer à metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 58 e 59 Acessando tecnologias

- É possível desenvolver o trabalho com essa seção utilizando o *software* GeoGebra, que é um *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de Geometria e Álgebra.

  Utilizado em escolas e universidades de diversos países, o *software* pode ser obtido gratuitamente e está disponível em vários idiomas, inclusive em Português. O *download* pode ser feito no *site* a seguir. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 13 maio 2020. Caso essa seção seja realizada no laboratório de informática da escola, certifique-se de que todos os computadores tenham o *software* instalado. Uma alternativa é utilizar a versão *on-line* do GeoGebra, disponível no mesmo *site*.
- Caso não haja computadores para todos os alunos, organize-os em grupos, certificando-se de que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.
- Esse tipo de tarefa possibilita aos alunos entrarem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Considerado uma competência para o futuro, o pensamento computacional é tido pela **BNCC** como imprescindível para compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação, de forma crítica e significativa. A tarefa de calcular a área total de um prisma reto regular, por exemplo, utilizando um *software* de Geometria dinâmica, contribui para o pensamento computacional, pois promove a resolução de problemas de Geometria por meio da Álgebra, da lógica e dos conceitos de computação.

- No desenvolvimento do trabalho com essa seção, se julgar conveniente, utilize a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! Resoluções

1 Como o prisma é regular, suas bases são congruentes e suas faces laterais são retângulos congruentes. Nesse caso, para determinar a área total do prisma, é suficiente determinar a área de sua base e de uma de suas faces laterais.

2 Aproximadamente 1 286,2 unidades de área.

Páginas 60 a 64

- Oriente os alunos a destacar os dados relevantes em cada problema e representar os desenhos nos problemas sem imagens para facilitar as resoluções.
- Como sugestão, a cada três tarefas, promova uma conversa sobre as resoluções, com o objetivo de esclarecer dúvidas e verificar se os alunos estão desenvolvendo corretamente as respostas para as questões.

- Avalie a possibilidade de trabalhar com os conteúdos dessas páginas a partir da metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Se achar conveniente, explique aos alunos que, segundo a normativa ISO 5807, em um fluxograma podem ser utilizados vários outros símbolos cujos significados podem ser consultados no *site* disponível em: <http://www.cantareira.br/thesis2/ed_1/1_navarro.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2020.

BNCC O item **a** da tarefa **25**, apresentada na página **62**, assim como a questão-teoria **A**, apresentada na página **64**, contemplam a habilidade **EM13MAT315** da **BNCC**, pois exigem a investigação e o registro, por meio de um fluxograma, de um algoritmo que responde aos problemas dados.

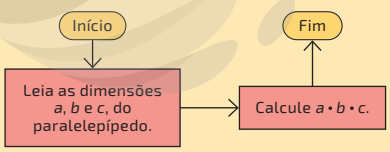
O item **b** da tarefa **25** requer a elaboração de um problema, e consequente resolução, envolvendo área total do prisma, ou seja, aborda a habilidade **EM13MAT309** da **BNCC**.

Resolução e comentários

A Algoritmo que possibilita calcular o volume total de um paralelepípedo, dadas suas dimensões.

Início
1. Leia as dimensões a, b e c, do paralelepípedo.
2. Calcule $a \cdot b \cdot c$.
Fim

Organizando o algoritmo em um fluxograma, temos:



Página 65

- Caso os alunos tenham dificuldade em assimilar o conceito de volume e o Princípio de Cavalieri, disponibilize o material dourado para eles manusearem e associarem a situações análogas. Oriente-os a reorganizar as peças de diversas maneiras e questione-os o que acontece com o volume. Essa tarefa pode ajudar os alunos a responder à questão-teoria **B**.

BNCC A investigação de processos de cálculos da medida do volume de prismas, a partir de uma reorganização das formas, encaminha as discussões do tópico **Princípio de Cavalieri** abordado nessa página e contempla a habilidade **EM13MAT504** da **BNCC**. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Resolução e comentários

E O volume do prisma, de altura $h = 4$ cm de base hexagonal de lado $a = 5$ cm, é dado por $V = A_b \cdot h$, como a base é um hexágono, a área da base é dada por $A_b = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (em que a é o comprimento do lado do hexágono), procedendo com os cálculos, temos: $A_b = 6 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{150\sqrt{3}}{4}$, logo, o volume é igual a $V = \frac{150\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \Rightarrow V = 150\sqrt{3}$. Assim, o volume do prisma é $150\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

Páginas 66 a 69

- Na página **67**, a tarefa **29** apresenta o problema do pote de sorvete. Convide os alunos a refletir sobre o fato de que o sorvete, assim como o leite ou suco, é vendido em litros, entretanto, muitas vezes vem em embalagens em formato de prismas. Questione-os sobre como pode ser calculada a capacidade da embalagem para conter o produto. Se possível, leve para a sala de aula embalagens de leite, suco, sorvete que tenham o formato de prismas e promova grupos de investigação acerca do volume e da capacidade desses recipientes. Motive-os a conversar ou pesquisar sobre assuntos relacionados à transformação de unidades de medida, como de ℓ em m^3.

- O trabalho com essas páginas pode ser orientado pela metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O contexto abordado na tarefa **40** da página **68** permite estabelecer relação com o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**, uma vez

MODERNA

que possibilita articular o problema matemático com questões relacionadas ao descarte correto de resíduos de construção.

- A tarefa **46** da página **69** motiva a ação pessoal e coletiva em prol de decisões fundamentadas em princípios de responsabilidade social e atitudes sustentáveis, que estão relacionados à **Competência geral 10**. Além disso, ao propor trazer desafios do mundo contemporâneo para investigação e resolução matemática de maneira articulada à análise de problemas sociais, evidencia características da **Competência específica 2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. A tarefa também problematiza a revitalização de uma praça em determinado bairro, o que envolve o conteúdo matemático que fornece resposta a um problema prático, contemplando o tema contemporâneo transversal **Vida familiar e social**. Apresente exemplos de praças que foram revitalizadas por trabalho voluntário, ocorrendo por iniciativa de pessoas da comunidade, projetos escolares ou de parcerias público-privadas. De modo geral, esse tipo de trabalho visa revitalizar áreas comuns destinadas a toda a população de certa localidade, tarefas que vão desde incluir novos bancos, mesas e lixeiras, até a instalação de bicicletários, limpeza ou pintura do piso e meio-fio, plantio de grama e reparação da parte elétrica. Ao mobilizar pessoas em prol de uma causa comum, uma vez que é direito de todos usufruir do espaço revitalizado, é importante também desenvolver a conscientização de que o cuidado com o bem público é dever de todos.
- Na página **69**, a tarefa **51** contempla a habilidade **EM13MAT309** da **BNCC**, tendo em vista que propõe aos alunos que elaborem um problema, com base nos conteúdos estudados no tema, e, a partir dele, resolvam utilizando cálculo de áreas totais e/ou volumes de prismas.

Realize uma síntese dos conceitos abordados nesse tema, por meio da metodologia ativa **Quick writing**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

5 Prismas na natureza

Objetivo específico

- Resolver problemas envolvendo prismas na natureza.

Páginas 70 e 71 **Calçada dos Gigantes**

- O assunto abordado nessas páginas apresenta uma relação entre a formação rochosa conhecida como Calçada dos Gigantes e o conteúdo de prismas. Nessa abordagem, de maneira intuitiva, pode-se perceber que o conjunto de colunas de basalto, quando encaixadas, constitui uma espécie de calçada e tem o formato de prismas regulares. Estabeleça um tempo (por exemplo, 15 minutos) para que os alunos leiam o texto e respondam às questões propostas. Ao término da tarefa, promova um debate a fim de coletar informações sobre a compreensão do texto e das informações matemáticas por parte dos alunos.
- No desenvolvimento da pesquisa proposta no item **C**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Essa tarefa possibilita um trabalho transdisciplinar, podendo ser realizado com os professores dos componentes curriculares **Matemática**, **Geografia**, **Química** e **Física**. Nela, o estudo dos prismas é associado a elementos que compõem uma formação rochosa, nesse caso, a Calçada dos Gigantes, formada por colunas de basalto na Irlanda do Norte. Proponha ao professor do componente curricular **Geografia** um trabalho para abordar a localização geográfica da Irlanda do Norte e apontar as formações rochosas específicas dessa região. Sugira ao professor de **Física** tratar das descrições físicas desse minério, como a densidade, a resistência e a dilatação térmica. O professor de **Química** pode elucidar as composições químicas desse tipo de rocha, como a questão das tipologias, da saturação e a classificação do basalto. Diga aos alunos que as propriedades físico-químicas do basalto tornaram esse material muito usado no setor da construção civil, com aplicações na construção de calçadas, fundações, pilares e vigas, por exemplo.

Caso considere viável, desenvolva um trabalho em conjunto com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Arte**. Recomende uma tarefa que apresente aos alunos outros locais que também tenham lendas e histórias associadas à sua formação, como as estátuas presentes na Ilha de Páscoa, no Chile; as Chaminés de

MODERNA

Fadas, na Turquia; o Parque Vila Velha, no Brasil; a estrutura rochosa de Stonehenge, no Reino Unido. Para abordar esses assuntos, o professor de **Arte** pode pedir aos alunos que, reunidos em grupos, retratem essas lendas por meio de história em quadrinhos.

BNCC

Ao fazer uso de conceitos matemáticos para auxiliar na interpretação de fenômenos naturais, contempla-se aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Converse com os alunos sobre o que caracteriza um Patrimônio Cultural da Unesco e a importância de lugares como esse para a cultura e o turismo no país, aproveitando para levantar argumentos matemáticos sobre esse tema.

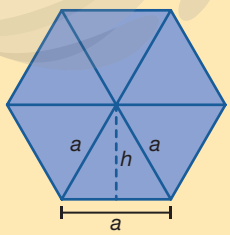
- A abordagem do tema **Calçada dos Gigantes** possibilita a análise de fenômenos naturais e retrata aspectos relacionados à origem da formação rochosa resultante de constantes transformações da natureza e evolução da Terra, como sugere a **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

  "Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

Resoluções e comentários

A Comprimento da aresta da base: $a = 28$ cm; altura do prisma: $H = 12$ m $= 1\,200$ cm; densidade do material: $d = \frac{m}{V}$; volume: $V = ?$

Como se trata de um prisma de base hexagonal, aproveite o contexto para explorar a fórmula da área da base de um hexágono, tendo-se a fórmula da altura do triângulo:



RONALDO INÁCIO

Sabe-se que a área do hexágono regular é igual a seis vezes a área do triângulo de lado a. Logo:

$$A_b = 6 \cdot A_{triângulo} \Rightarrow A_b = 6 \cdot \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_b = 3 \cdot a \cdot \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow A_b = \frac{3 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Calcula-se o volume do prisma:

$$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{3 \cdot 28^2\sqrt{3}}{2} \cdot 1\,200 \Rightarrow V \simeq 2\,444\,270{,}1$$

Portanto, o volume da coluna é aproximadamente $2\,444\,270{,}1$ cm^3.

Se a densidade é a razão entre a massa e o seu volume $\left(d = \frac{m}{V}\right)$, então a massa dessa coluna é calculada por:

$$m = d \cdot V \Rightarrow m = 3 \cdot 2\,444\,270{,}1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 7\,332\,810{,}299 \text{ g} \Rightarrow m \simeq 7\,332{,}81 \text{ kg}$$

Portanto, a massa aproximada da coluna em forma de prisma é 7 332,81 kg.

B Comprimento da aresta da base: $a = 28$ cm; altura do triângulo equilátero $h = ?$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{28\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 14\sqrt{3}$$

Sabendo que o comprimento do hexágono corresponde ao comprimento de duas alturas do triângulo, tem-se:

$$h = 2 \cdot 14\sqrt{3} \Rightarrow h = 28\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \simeq 48{,}44 \text{ cm} \Rightarrow h \simeq 0{,}4844 \text{ m}$$

Considerando que a distância da Irlanda do Norte até a Escócia é 19 km (19 000 m), a quantidade de prismas necessários é dada por:

$$n = \frac{\text{Distância}}{\text{Comprimento do hexágono}} = \frac{19\,000}{0{,}4844} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 39\,224$$

Portanto, seriam necessárias 39 224 colunas enfileiradas para construir o caminho.

- Ao final do trabalho com esse tema, verifique a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** com o objetivo de verificar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite aos alunos que falem sobre a presença de prismas na natureza. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

6 Pirâmides

Objetivos específicos

- Reconhecer pirâmides e seus elementos, tais como vértices, arestas, base, faces laterais, altura e apótema.
- Compreender as classificações das pirâmides e identificar essas classificações.
- Reconhecer troncos de pirâmides e seus elementos, relacionando-os com os da pirâmide.
- Calcular áreas de regiões pertencentes à pirâmide e ao tronco de pirâmide.
- Calcular volume de pirâmides e de tronco de pirâmides, inclusive deduzindo fórmulas e as relacionando com as de volumes de outros poliedros.
- Compreender a proporcionalidade entre pirâmides e troncos de pirâmides.

Este tema trata das pirâmides e dos troncos de pirâmides. Nele, estudam-se os elementos desses poliedros, analisando relações entre quantidades de vértices, arestas e faces, bem como classificando as pirâmides conforme o formato da base (quadrangulares, pentagonais etc.). Além disso, no tema, verificam-se as fórmulas por meio de demonstrações lógicas e comparação com outros poliedros, áreas de regiões pertencentes à pirâmide e ao tronco de pirâmide e os volumes respectivos. Assim, são deduzidos e aplicados métodos para calcular área de bases de pirâmides, área da superfície lateral e da superfície total, volume de pirâmides e volume de troncos de pirâmides.

O tema contribui para o refinamento da percepção geométrica dos alunos, aumentando a abrangência de suas capacidades de lidar matematicamente com sólidos geométricos. Assim, desenvolve-se ainda mais a capacidade dos alunos de inter-relacionar seus conhecimentos matemáticos, exercitando a habilidade de identificar formas geométricas no espaço, abstraí-las, generalizá-las e sobre elas deduzir relações e fórmulas de utilidade prática.

A respeito dessa utilidade prática, a aplicabilidade dos conhecimentos da Geometria desenvolvidos neste tema é exemplificada por meio de vários exercícios e problemas que, em contextos factuais, exigem interpretação adequada e reconhecimento das relações estudadas, bem como criatividade nas resoluções. Nesses contextos, áreas da superfície e volume de pirâmides e troncos de pirâmides são necessários em problemas envolvendo recipientes, construções arquitetônicas e objetos diversos de formatos que são piramidais ou podem ser decompostos em partes piramidais.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca de pirâmides, proponha tarefas simples que trabalhem com a percepção dos elementos que constituem as pirâmides, ou exercícios que, em grau progressivo de dificuldade, exijam que se calcule área da superfície e volume de sólidos piramidais.

Uma alternativa é trabalhar com os alunos a construção de uma pirâmide de bases triangular, quadrada e pentagonal. Para isso, organize os alunos em duplas e reproduza e entregue a eles os moldes da pirâmide que se encontram nas páginas para reprodução deste **Suplemento para o professor**.

No desenvolvimento dessa tarefa, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar. Mais informações sobre o assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**. Além disso, mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 72 e 73 **El Castillo de Chichén Itzá**

- As páginas de abertura tratam do monumento El Castillo, ou Templo de Kukulcán, da antiga cidade maia de Chichén Itzá, a qual foi declarada patrimônio da humanidade pela Unesco. O templo, embora a rigor não seja uma pirâmide geometricamente perfeita, tem formato nitidamente piramidal. Apesar disso, é comum que, em linguagem corrente, usemos o termo "pirâmide" para designar não só El Castillo, mas todos os templos maias de formato similar.

  Analisando a arquitetura de El Castillo, é possível perceber marcas significativas da cultura maia e do espantoso progresso que essa civilização obteve em certas áreas, como agricultura (que constituía sua principal base econômica), Astronomia e Matemática. Um exemplo notável é o fato de que o templo possui 365 degraus, indicando que os maias já haviam percebido que o planeta Terra faz 365 voltas ao redor do próprio eixo durante o período de uma revolução completa em torno do Sol (ou seja, que a Terra completa 365 rotações durante uma translação completa, ou, em outras palavras, que o ano tem 365 dias no calendário solar). Além disso, as faces laterais do templo são direcionadas para os pontos cardeais, demonstrando um nível de desenvolvimento da Astronomia que estava acima da média dos outros povos do mundo na mesma época.

  Outros detalhes da arquitetura de El Castillo demonstram conhecimentos aprofundados sobre acústica, Geometria e o comportamento das estações do ano. Somando-se a isso, uma arte própria com simbologias e

REPRODUÇÃO

numerologias peculiares e uma religião voltada à adoração do deus Kukulcán enriquecem os portentos do templo.

Em razão de seus avançados conhecimentos de Astronomia, os povos maias ficaram famosos na história por terem conseguido desenvolver calendários muito precisos. Curiosamente, um de seus calendários mais importantes faz a contagem dos dias por um período de tempo que se encerra na data equivalente ao ano 2012, pelos registros modernos. Esse fato deu origem, na cultura popular, às supostas profecias segundo as quais o fim do mundo estava previsto para o ano de 2012.

Quanto à Matemática desenvolvida pelos maias, destaca-se o fato de que eles já dominavam o conceito de zero no século III d.C., o qual só foi absorvido e utilizado pelos europeus 700 anos mais tarde. Apesar de, atualmente, parecer algo trivial, a utilização do conceito de um algarismo que não represente uma quantidade propriamente dita, mas sim a ideia de nulidade, é de alta abstração e de grande utilidade na facilitação de registros numéricos e de cálculos aritméticos.

Mais informações sobre os maias podem ser encontradas no *site* a seguir. Disponível em: <http://expurgacao.art.br/maya-chichen-itza-kukulcan-solsticios-equinocios-calendarios/>. Acesso em: 17 jun. 2020.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Peça aos alunos que pesquisem as dimensões do El Castillo e, de posse das medidas, pensem em maneiras criativas de determinar a área ocupada pelo monumento, bem como seu volume total aproximado. Em seguida, reúna-os em duplas para que conversem sobre os métodos que pensaram ser viáveis para obter essas aproximações, para que depois apresentem as conclusões para toda a turma e discutam em conjunto quais são os valores mais corretos.

  Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Avalie a conveniência de preparar uma aula em conjunto com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do componente curricular **História**, buscando promover um trabalho que enfatize características da civilização maia, destacando seus costumes, crenças, modo de vida e outros fatores relevantes, sobretudo evidenciando como sua cultura e sua organização social favoreceram o desenvolvimento da Matemática e da Astronomia. Esse tipo de aula em conjunto é relevante para promover a transdisciplinaridade, interligando ideias de mais de uma área de estudo.

BNCC O trabalho com essas páginas propicia a mobilização da **Competência geral 1** da BNCC. Ao estudar características de uma civilização ancestral de grande importância histórica no desenvolvimento da Astronomia e da Matemática, valoriza-se a compreensão da importância da diversidade cultural e dos avanços historicamente construídos da ciência e da tecnologia em um mundo plural, bem como promove a utilização de conhecimentos sobre o mundo social e cultural para entender e explicar a realidade.

Páginas 74 a 76

- Após apresentar a definição de pirâmides, explique aos alunos que a região do espaço limitada pela pirâmide é formada por todos os pontos dos segmentos nos quais cada extremo está contido em uma das bases.
  Se julgar conveniente, mencione que, conforme aumenta a quantidade de lados do polígono que compõe a base piramidal, mais e mais a pirâmide vai se assemelhando a um cone, sendo o cone o caso limite em que o polígono da base é substituído por um círculo (que, em certo sentido intuitivo, mas pouco rigoroso, pode ser pensado como um polígono de infinitos lados).

  Enfatize, também, o fato de que, independentemente da quantidade de lados do polígono da base, as faces laterais de uma pirâmide sempre são triangulares.
- Ao trabalhar o conceito de altura, reforce a compreensão de que a distância entre o vértice da pirâmide e o plano que contém a base é o comprimento do segmento de reta que liga o vértice ao referido plano em um ângulo reto (90°), e não necessariamente do segmento de reta que liga o vértice ao centro do polígono da base, como é muito comum que alguns alunos pensem, antes de adquirir certa experiência.
  Outro ponto a ser destacado, quanto à altura, é que o segmento de reta que liga o vértice da pirâmide ao plano que contém a base pode tocar esse plano em um ponto que não pertence à base. Isso ocorre em algumas pirâmides oblíquas, pois, nelas, é possível que a projeção do vértice no plano do polígono esteja fora do polígono.
  Ao apresentar o conceito de apótema, é importante que os alunos não o confundam com a altura da pirâmide. O apótema da pirâmide é a altura do triângulo que compõe a face, estando no mesmo plano que ela, ao passo que a altura da pirâmide é perpendicular ao plano da base e, quase sempre, não coincide com o plano de nenhum dos lados.
- Ao definir a área da superfície da pirâmide, comente que não se trata do volume da pirâmide, esclarecendo isso na análise da sua planificação. Pode ser conveniente, em momento oportuno, salientar que as unidades de medida de área são diferentes das unidades de medida de volume. Para a área, usa-se a unidade

MODELO

de medida de comprimento ao quadrado (m^2, por exemplo), enquanto para o volume, a unidade ao cubo (m^3, por exemplo).

Para complementar o trabalho dessas páginas, converse com os alunos a respeito de mais informações sobre as pirâmides do Egito. Diga a eles que as pirâmides do Egito foram construídas há milhares de anos para abrigar tumbas de faraós. No Egito, são conhecidas cerca de 100 pirâmides, sendo as mais famosas as de Gizé, um complexo formado por três pirâmides: Quéops, Quéfren e Miquerinos.

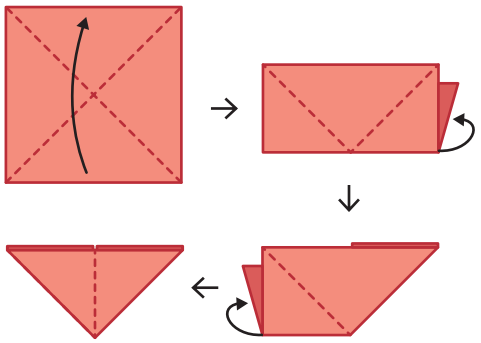
Páginas 77 e 78

- Para auxiliar na resolução da tarefa **1** da página **77**, oriente os alunos a apresentar o número de arestas da base de uma pirâmide por *x*, por exemplo, e escrever algebricamente o que a tarefa pede. Caso seja necessário, com o auxílio dos alunos, construa na lousa um quadro que relacione a quantidade de arestas do polígono da base de uma pirâmide com o respectivo total de arestas e faces.

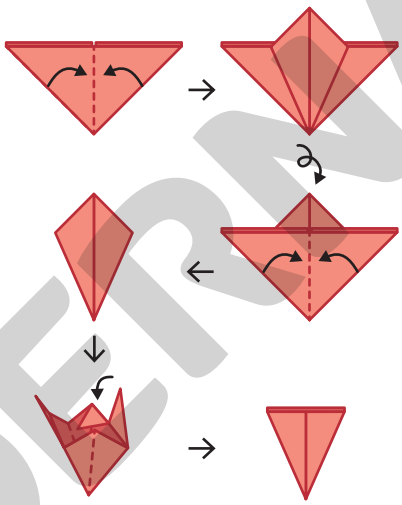
Quantidade de arestas do polígono da base da pirâmide	Quantidade total de arestas	Quantidade de faces
3	6	4
4	8	5
5	10	6
6	12	7

- Na tarefa **4** da página **77**, se julgar necessário, explique aos alunos os conceitos de circunferência inscrita e de circunferência circunscrita em um polígono. Em termos simples, a circunferência inscrita é a que fica dentro do polígono, e a circunscrita é a que fica na parte de fora.
- A tarefa **5** da página **77** aborda aspectos da cultura jovem ao tratar dos jogos de RPG em tabuleiro. Pergunte se algum aluno gosta desse tipo de jogo e se já utilizou um dado parecido com o da tarefa.

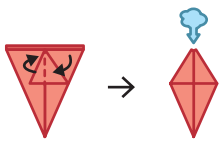
  Como a maior parte das pessoas conhece apenas os dados tradicionais, de formato cúbico, verifique a possibilidade de levar para a sala de aula um dado em forma de tetraedro, explicando como ele funciona, e que apresente, se possível, outras possibilidades menos usuais de dados com outros formatos.
- Na tarefa **8** da página **77**, diga aos alunos que o origami é originário da Ásia e que se acredita que esteja relacionado a costumes religiosos do passado. Veja a possibilidade de construir, com os alunos, um balão de origami.
  - › Dobre uma folha quadrada de papel para marcar suas diagonais. Em seguida, dobre a folha ao meio, formando um retângulo. Dobre as partes triangulares laterais para dentro do retângulo, internamente à figura triangular maior, obtendo, assim, o formato de um triângulo retângulo. Depois, marque a altura relativa à hipotenusa do triângulo, conforme indica a figura.



  - › Leve cada um dos lados do triângulo à marca da altura relativa à hipotenusa, dobrando-os. Vire a dobradura e repita o processo. Em seguida, dobre as pontas para dentro, internamente à dobradura. Veja a figura.



  - › Depois, realize as dobras indicadas na figura abaixo. Observe que as pontas que ultrapassam a fenda devem ser dobradas para dentro. Para inflar o balão, basta soprar o orifício formado na dobradura.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

BNCC O contexto da tarefa **8**, da página **77**, pode ser relacionado ao tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**. Apesar de a soltura de balões ser uma tradição nacional nas festas juninas, muitos incêndios são causados em decorrência dessa prática, o que acarretou em sua proibição. Atualmente, por imposição do art. 42 da Lei nº 9.605/1998, é crime ambiental "fabricar, vender, transportar ou soltar balões que possam provocar incêndios nas florestas e demais formas de vegetação, em áreas urbanas ou qualquer tipo de assentamento humano". A pena prevista é de detenção de um a três anos ou multa, ou ambas cumulativamente.

Importante enfatizar que, além dos impactos ambientais, balões e outras práticas recorrentes em festividades, como bombas e queima de fogos, podem

MODERNA

causar acidentes, provocando queimaduras, amputações e até o falecimento de pessoas.

A tarefa **8** também estabelece conexões com o tema contemporâneo transversal **Diversidade cultural** e com a **Competência geral 3** da BNCC. Ao tratar das festas juninas e dos origamis, a tarefa destaca as inúmeras manifestações temáticas que caracterizam a diversidade cultural brasileira, explorando a miscelânea de influências de variadas origens que compõem a cultura nacional.

- Ao abordar a tarefa **11** da página **78**, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Think-pair-share**. Peça aos alunos que pensem sobre o problema individualmente e, em seguida, que se reúnam aos pares para discutir as soluções propostas. Na sequência, solicite aos grupos que apresentem a resolução para toda a turma, observando se houve mais de uma maneira de encontrar a resposta correta.

  Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

No trabalho com a tarefa **13** da página **78**, verifique a conveniência de preparar uma dinâmica para a sala em conjunto com um professor da área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente do componente curricular **Arte**. Utilize o texto apresentado na tarefa para realizar uma tarefa na qual os alunos devam construir na prática uma oca similar à descrita no texto, utilizando materiais de fácil acesso, de preferência recicláveis.

Outra possibilidade é realizar um trabalho estabelecendo vínculo com a área de **Ciência Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Sociologia**, a fim de tratar de mais assuntos relacionados à cultura indígena brasileira. É possível apresentar para a sala textos e documentários que abordem a luta indígena pelo reconhecimento de seus direitos básicos, as injustiças históricas de que foram vítimas, a dizimação de muitas tribos nativas e as medidas atuais existentes para realizar a inclusão social da população indígena, garantindo-lhes direito à educação, à saúde, ao voto, à liberdade de expressão, entre outros direitos fundamentais.

BNCC

A tarefa **13** da página **78** também proporciona o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, desenvolvendo, ainda, aspectos da **Competência geral 3** da BNCC. O conhecimento das culturas nativas do Brasil, revelando a riqueza de suas manifestações artísticas e as tradições de seus modos de vida, evidencia a importância do respeito às mais diversas formas de organização sociocultural, bem como os benefícios do multiculturalismo que marca a população brasileira. Também inspira a conscientização acerca das origens históricas das injustiças e desigualdades até os dias atuais perpetradas contra a população indígena.

Páginas 79 e 80

BNCC

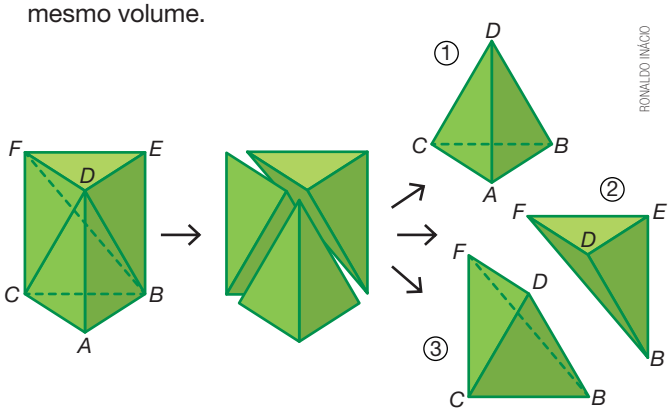
A teoria apresentada nessas páginas contempla aspectos da habilidade **EM13MAT504** da BNCC. As deduções obtidas nessas páginas, assim como as demonstrações das fórmulas apresentadas passo a passo de uma maneira tanto rigorosa quanto intuitiva, valem-se de relações de semelhança e proporcionalidade entre formas geométricas, amparadas pelo Princípio de Cavalieri, na construção lógica de formulações para o cálculo da medida de volume de pirâmides quaisquer. Assim, aborda-se a **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Resoluções e comentários

D Sabemos que o volume da pirâmide triangular é um terço do volume do prisma. Além disso, sabemos que o volume do prisma é o produto da área da base pela medida da altura. Assim, temos:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{prisma}} \Rightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

- Para que os alunos consigam enxergar o fato de que três pirâmides triangulares idênticas podem ser encaixadas de modo a formar um prisma de base triangular, construa na lousa as figuras abaixo e, em seguida, analise em conjunto com os alunos. Nelas, indique claramente quais são as bases e quais são as alturas de cada pirâmide, provando que as medidas são congruentes e que, portanto, as pirâmides **1**, **2** e **3** têm o mesmo volume.



PROIBIDA

Página 82

- Ao trabalhar com a tarefa **23**, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Think-pair-share**. Peça aos alunos que tentem resolver sozinhos a tarefa e, depois, reúna-os em duplas para que discutam os procedimentos empregados na resolução. Em seguida, solicite que apresentem as conclusões para toda a turma.
  Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.
- Ao longo da tarefa **20**, mencione que a situação apresentada tem relação com a história da descoberta de Arquimedes para a qual, segundo a lenda, ele teria proferido seu famoso grito de "Eureka!".
  Na história, Arquimedes, grande sábio grego, foi contratado pelo rei da Siracusa para descobrir se a coroa que ele havia recebido de presente era realmente feita de ouro puro. Arquimedes teria pensado sobre como determinar se a coroa era de ouro maciço ou não durante várias semanas, sem obter sucesso, até que, certo dia, ao entrar na banheira para tomar banho e notar a água transbordando conforme seu corpo submergia, teve uma ideia genial que supostamente o fez sair, ainda sem roupa, gritando "Eureka! Eureka!" (que, em grego antigo, significa "Descobri! Descobri!"). A ideia foi a seguinte: se ele submergisse a coroa em um balde completamente cheio de água e coletasse a água que transbordasse, ele teria o volume exato da coroa. Na sequência, poderia obter pepitas de ouro que, em conjunto, tivessem o mesmo peso da coroa, de modo que também deveriam ter o mesmo volume. Submergindo essas pepitas em outro balde totalmente cheio de água, obteria o volume equivalente àquele peso em ouro puro. Se o volume fosse igual ao da coroa, significava que ela era feita apenas de ouro; caso contrário, haveria outros materiais em sua composição. Conta a lenda que a segunda alternativa foi a que se verificou, o que levou o rei a mandar decepar os que o haviam enganado no presente.

BNCC A tarefa **23** contempla a habilidade **EM13MAT309** da BNCC. Nela, a participação ativa dos alunos na elaboração de um problema envolvendo áreas totais e volumes de pirâmides incentiva uma melhor compreensão do tema, pois insere os alunos na posição de pensar criativamente em situações práticas nas quais os conteúdos estudados podem ser úteis ou necessários. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

- Na tarefa **23**, caso os alunos não tenham espontaneamente ideias para desenvolver a questão, estimule-os a pensar em situações nas quais alguém tenha de pintar superfícies piramidais, levando em consideração o custo da tinta utilizada ou de outro material para revestir a área da superfície total ou parcial.
- Na tarefa **24**, desafie os alunos a descobrir o volume de outros sólidos regulares cujas faces estejam inscritas em circunferências do mesmo tamanho e verifique se eles conseguem obter alguma conclusão ou generalização.

Página 84

- Após introduzir o tópico **Volume de um tronco de pirâmide**, faça na lousa, com os alunos, a dedução da fórmula do volume do tronco de pirâmide, conforme segue abaixo. Esse tipo de tarefa permite aos alunos que verifiquem a equivalência de diferentes expressões por meio da articulação de conhecimentos e propriedades matemáticas, além de aprimorar a escrita e a leitura da linguagem matemática.

  O volume do tronco de uma pirâmide pode ser obtido pelo seguinte cálculo:

$$V_{tronco} = \frac{A_B \cdot H - A_b \cdot h}{3}$$

Como, $h = H - H_t$, temos:

$$V_{tronco} = \frac{A_B \cdot H - A_b\left(H - H_t\right)}{3} =$$

$$= \frac{A_B \cdot H - A_b \cdot H + A_b \cdot H_t}{3} = \frac{H\left(A_B - A_b\right) + A_b \cdot H_t}{3} \quad \text{(I)}$$

Para obter o valor de H em função de H_t, A_B e A_b, utilizamos a razão de semelhança entre as áreas das bases e entre as alturas das pirâmides.

$$\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} = \frac{H}{H - H_t} \Rightarrow H\sqrt{A_B} - H_t\sqrt{A_B} = H\sqrt{A_b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H\sqrt{A_B} - H\sqrt{A_b} = H_t\sqrt{A_B} \Rightarrow H\left(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}\right) = H_t\sqrt{A_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{H_t\sqrt{A_B}}{\left(\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}\right)}{\left(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{H_t\left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)}{A_B - A_b} \quad \text{(II)}$$

Substituindo II em I, temos:

$$V_{tronco} = \frac{H\left(A_B - A_b\right) + A_b \cdot H_t}{3} =$$

$$= \frac{\frac{H_t\left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)}{\cancel{A_B - A_b}} \cdot \cancel{\left(A_B - A_b\right)} + A_b \cdot H_t}{3} =$$

$$= \frac{H_t\left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right) + A_b \cdot H_t}{3} = \frac{H_t\left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right)}{3}$$

Assim, o volume do tronco de pirâmide é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{H_t}{3}\left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right)$$

MODERNA

Páginas 86 e 87 Resolvendo por etapas

- No trabalho com essas páginas, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Design thinking**. Para tanto, apresente o problema da seção **Resolvendo por etapas** como um desafio antes do início do capítulo e proponha uma tarefa similar ou o problema do quadro **Agora é você quem resolve!** para que os alunos resolvam seguindo os passos da metodologia utilizada nessa seção. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

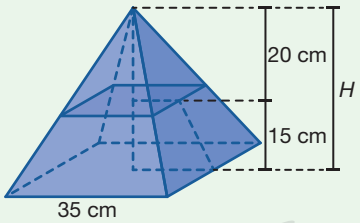
Agora é você quem resolve! Resoluções e comentários

2 Note que a área da base maior é $A_B = 35^2$ cm², que a área da base menor é $A_b = 20^2$ cm² e que a altura do tronco de pirâmide é $H_t = 15$ cm. Assim, aplicando a fórmula deduzida na página **84**, obtemos:

$$V_{tronco} = \frac{15}{3} \cdot \left(\sqrt{20^2 \cdot 35^2} + 20^2 + 35^2\right) =$$
$$= 5 \cdot (20 \cdot 35 + 400 + 1\,225) = 11\,625$$

Portanto, o volume mínimo de concreto necessário para fabricar o bloco é 11 625 cm³.

Outra maneira de abordar o problema, sem utilizar a fórmula de imediato, é construindo a pirâmide inteira da qual o tronco faz parte. Assim, a altura H da pirâmide poderá ser encontrada por meio de semelhança de triângulos.



RONALDO INÁCIO

$$\frac{H}{H - H_t} = \frac{35}{20} \Rightarrow \frac{H}{H - 15} = \frac{35}{20} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20H = 35H - 15 \cdot 35 \Rightarrow 15H = 525 \Rightarrow H = 35$$

Assim, a altura da pirâmide é 35 cm.

Dessa maneira, o volume total da pirâmide é

$$V_{\text{pirâmide maior}} = \frac{A_B \cdot H}{3} = \frac{35^2 \cdot 35}{3} = \frac{35^3}{3}.$$

Logo, o volume da pirâmide maior é $\frac{35^3}{3}$ cm³.

Por outro lado, o volume da pirâmide menor, na parte em cima do tronco, é:

$$V_{\text{pirâmide menor}} = \frac{A_b \cdot (H - H_t)}{3} =$$
$$= \frac{20^2 \cdot (35 - 15)}{3} = \frac{20^3}{3}$$

Portanto, o volume da pirâmide menor é $\frac{20^3}{3}$ cm³.

Assim, o volume do tronco é:

$$V_{\text{pirâmide maior}} - V_{\text{pirâmide menor}} = \frac{35^3}{3} - \frac{20^3}{3} =$$
$$= \frac{42\,875 - 8\,000}{3} = 11\,625$$

Portanto, o volume do tronco é 11 625 cm³.

Página 89

- No desenvolvimento da pesquisa proposta no item **c** da tarefa **34**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Na tarefa **34**, verifique a possibilidade de realizar um trabalho em conjunto com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do componente curricular **História**, a fim de trazer mais informações para os alunos e propor a eles uma pesquisa sobre a Revolução Constitucionalista e suas consequências para o país.

BNCC A tarefa **34** aborda aspectos da **Competência geral 1** da BNCC. Nela, valorizam-se conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo social e cultural por meio da leitura de um texto que trata de um importante evento na história do país (a Revolução Constitucionalista), explicando, ainda mais, a origem e o significado do famoso Monumento ao Soldado Constitucionalista, na cidade de São Paulo.

- Ao final do trabalho com o tema, avalie a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule os principais conceitos aprendidos e, em uma conversa, peça que comentem sobre as situações práticas em que eles possam aplicar os conhecimentos obtidos. Adicionalmente, solicite que comentem sobre a relevância dos raciocínios empregados nas deduções das fórmulas, perguntando se eles sentem que as ideias e os recursos matemáticos utilizados agregaram benefícios em seus entendimentos da Matemática, em especial da Geometria espacial, e se eles percebem que esses benefícios podem ser úteis em circunstâncias futuras, quando novas fórmulas terão de ser desenvolvidas e demonstradas. Ao final da conversa, peça que registrem, em não mais do que 5 minutos, as conclusões que absorveram para si a respeito de todo o tema. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MOLDURA

7 O volume da Grande Pirâmide de Gizé

Objetivo específico

- Reconhecer a importância de construções egípcias e suas contribuições para a Matemática e outras ciências.

Páginas 90 e 91 A mais antiga maravilha é a única que ainda está de pé

Esse tema aborda informações relevantes sobre a grande pirâmide de Gizé, buscando chamar a atenção quanto ao volume, altura, construção e fatos históricos. Explique aos alunos que, de todas as maravilhas da Antiguidade, a grande pirâmide de Gizé é a única que ainda pode ser contemplada pelos turistas da atualidade. Explique, também, que até a construção da torre Eiffel, no século XIX, a pirâmide deteve o posto de mais alta construção do mundo.

Diga aos alunos que, para a construção de grandes pirâmides, os egípcios da época utilizavam muitos conceitos matemáticos importantes, como o do ângulo reto, das relações de razão e proporção e o do segmento áureo. Destaque que a Matemática egípcia foi um dos pilares da Matemática grega, tornando-se a base para a Matemática moderna, isso em Geometria, Trigonometria e Astronomia. Foi por meio dessas construções que temos atualmente formulações e conceitos tão importantes para a Matemática e para a ciência.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirar das linhas gerais do conteúdo proposto e pesquisar problemas envolvendo a grande pirâmide de Gizé, registrando suas possíveis dúvidas. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O contexto abordado nessas páginas possibilita o desenvolvimento das **Competências gerais 1 e 2**. Ao trabalhar com esse tema, os alunos exercitam sua curiosidade intelectual com relação a conhecimentos historicamente construídos referentes à abordagem própria da ciência a fim de investigar, refletir e resolver problemas com base em conhecimento das diferentes áreas.

Sala dos professores

Essas páginas permitem um trabalho em conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**. Nelas, conceitos matemáticos, como área e volume, são associados ao estudo da grande pirâmide de Gizé, articulando os componentes curriculares **Matemática** e **História.** Estimule os alunos a pesquisar sobre o estilo de vida do Egito Antigo, em especial dos faraós, e as teorias que buscam explicar, para além dos já apresentados, os supostos métodos para o transporte dos enormes blocos de pedra que constituem esse monumento. Posteriormente, organize uma conversa para que eles exponham suas pesquisas e opiniões sobre o assunto.

Resoluções e comentários

E A área da pirâmide de base quadrada a ser revestida com pedra calcária polida consiste em sua área lateral.

Para calcular a área lateral de uma pirâmide regular de base quadrada, basta calcular a área de uma face lateral e multiplicar esse resultado por 4 (número de faces laterais). Para isso, precisamos calcular o apótema dessa pirâmide, utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$g^2 = \left(\frac{227}{2}\right)^2 + (147)^2$$

$$g^2 = 12\,882{,}25 + 21\,609 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \sqrt{34\,491{,}25} \Rightarrow g \simeq 186$$

O apótema da pirâmide regular é a altura de suas faces laterais. A área de uma face lateral é a área do triângulo cuja altura (apótema) mede 186 m e cuja base mede 227 m:

$$Af_1 = \frac{186 \cdot 227}{2} \Rightarrow Af_1 = \frac{42\,222}{2} = 21\,111$$

Logo, a área de uma face lateral é 21 111 m^2.
A área lateral da pirâmide é igual a quatro vezes a área de uma face lateral, pois a pirâmide é regular.

$$AF = 4Af_1 \Rightarrow AF = 4 \cdot 21\,111 = 84\,444$$

Assim, a área total das faces laterais é 84 444 m^2.
Logo, a grande pirâmide de Gizé precisaria de aproximadamente 84 444 metros quadrados de pedra calcária polida para ser revestida com esse material, considerando que esse revestimento seja feito apenas em suas faces laterais.

F O volume da pirâmide corresponde a um terço do volume de um prisma de mesma altura e base. Utilizando como lado da base 227 metros e altura 147 metros, temos:

$$V = \frac{(227)^2 \cdot 147}{3} = \frac{7\,574\,763}{3}$$

$$V = 2\,524\,921$$

Portanto, o volume da grande pirâmide de Gizé, se fosse maciça, seria 2 524 921 m^3.

EDITORIA

8 Cilindro

Objetivos específicos

- Reconhecer cilindros e seus elementos.
- Identificar as classificações dos cilindros.
- Calcular áreas de regiões pertencentes ao cilindro reto.
- Reconhecer métodos práticos para determinar aproximações do volume de objetos de aspecto cilíndrico e calcular o volume exato de cilindros retos, inclusive deduzindo fórmulas.

Esse tema trabalha a respeito dos cilindros, de seus elementos, classificações e propriedades. Nele, estudam-se os conceitos de base, geratriz, eixo, altura, superfície lateral, superfície total, raio da base e seção meridiana, bem como a distinção entre cilindros retos e cilindros oblíquos. Além disso, trabalham-se as fórmulas para obtenção da área de superfícies pertencentes ao cilindro reto e para a obtenção do volume do cilindro reto. Todas essas fórmulas são apresentadas em detalhes, tanto por meio de construções que as tornem o mais intuitivas possível quanto por meio das necessárias demonstrações lógicas que garantam suas validades. Para reforçar a compreensão, além dos exercícios de fixação do conteúdo, as fórmulas e interpretações das propriedades dos cilindros são comparadas, sempre que possível, com as de outras figuras geométricas. Assim, por exemplo, os alunos podem perceber que o cilindro reto pode ser obtido por meio da revolução de um retângulo e associar a fórmula do volume do cilindro com a fórmula geral do volume dos prismas, percebendo a íntima relação entre as duas.

BNCC O trabalho com esse tema reforça a percepção espacial dos alunos e trabalha com a imaginação e a abstração matemática no trato com figuras geométricas espaciais que podem ser associadas a objetos usuais do mundo real. O trabalho com os cilindros traz um refinamento a mais na sensibilidade geométrica deles, pois desenvolve o entendimento de que o cilindro pode ser comparado a um prisma no caso limite em que o número de lados do polígono da base cresce indeterminadamente, aproximando-se da circunferência. Além disso, os elementos do cilindro fazem com que os alunos tenham de revisitar, de modo mais prático e com enriquecedoras inter-relações com outros conhecimentos, assuntos como área e perímetro do círculo e até mesmo o Princípio de Cavalieri. Desse modo, contempla-se a habilidade **EM-13MAT309** ao levar os alunos a resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de cilindros em situações reais com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Ademais, o tema exemplifica e exercita a aplicabilidade prática dos conhecimentos nele construídos, desafiando os alunos a resolver problemas em contextos cotidianos diversos que envolvam áreas de superfície e volume de formas cilíndricas. Nesses problemas, além daqueles que são puramente geométricos, os cilindros são trabalhados no formato de troncos de árvores, rolos compressores, caixas-d'água, tanques de combustível, encanamentos e objetos, como copos, extintores, recipientes, entre outros.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca de cilindros, proponha tarefas simples que trabalhem com a percepção de formas cilíndricas. Uma possibilidade é, em um primeiro momento, pedir aos alunos que indiquem objetos ou construções que eles observem ter formatos cilíndricos, como velas, corrimões, canudos, palmitos, tambores e tubos de *spray*. Na sequência, pensando nesses objetos, peça que proponham maneiras criativas de obter aproximações para a área da superfície e para o volume desses objetos.

Incentive-os a usar a engenhosidade prática e a criatividade geométrica abstrata e verifique se eles conseguem apresentar soluções, como: envolver a superfície dos objetos com plástico retangular para, depois, encontrar a área do retângulo correspondente; preencher os objetos com água (quando isso for possível) e, em seguida, despejar toda essa água em um recipiente graduado; construir prismas de bases regulares, cada vez com uma quantidade maior de lados, a fim de se aproximar cada vez mais do formato de um cilindro. Na conversa para chegar a essas ideias, incentive os alunos a pensar em conhecimentos já consolidados e habilidades com que eles já estejam familiarizados, como as desenvolvidas durante o Ensino Fundamental.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 92 e 93 Inventário florestal

- As páginas de abertura tratam do inventário florestal e do manejo florestal sustentável, assuntos de relevância para a preservação ambiental e até mesmo para a economia do país. O inventário florestal tem por objetivo mapear, com base em estudos e estimativas técnicas, variáveis que influenciam no trabalho a ser desenvolvido na área ambiental em análise, bem como os impactos que essas ações podem causar na região e nas populações que nela vivem. O inventário florestal é fundamental para o planejamento da utilização dos recursos florestais, pois é por meio dele que se obtém conhecimento quantitativo e qualitativo das espécies que compõem a área analisada.

Avalie a possibilidade de ler para os alunos o texto a seguir sobre como as tecnologias digitais podem auxiliar na realização eficiente do inventário florestal.

[...]

Tecnologias no inventário florestal

Felizmente existem tecnologias hoje que permitem que os inventários florestais sejam realizados de forma mais ágil e eficiente. Abaixo listamos 5 tecnologias já disponíveis no mercado que podem contribuir, e muito, na execução desse processo.

- **Uso de *tablets* para a coleta de dados em campo**: em pesquisas realizadas com diversas empresas florestais, constatou-se que um terço delas já utiliza esses equipamentos a fim de eliminar a tradicional prancheta. Atualmente existem no mercado *tablets* militarizados e robustos como é caso do *Tab Active* 2 da Samsung. Tais equipamentos possuem maior durabilidade em campo, baterias com mais capacidade e resistência às intempéries, como quedas e impactos acidentais, exposição ao Sol, chuva, lama e poeira. Essas características tornam a utilização desses tipos de aparelho muito mais adequada para as atividades florestais pois os custos de manutenção e/ou substituição de aparelhos tradicionais quebrados tornaria inviável esse tipo de operação.
- **Aplicativos para coleta de dados**: esses aplicativos de coleta ajudam a prevenir erros nesse processo, pois são otimizados para interpretar os dados que são inseridos pelos operadores. São considerados os valores das medições anteriores, por exemplo, para que não seja possível a inserção acidental de medidas absurdas, como uma árvore de 200 m de altura, se o operador acidentalmente inserir um zero a mais em um valor que originalmente era de 20 m. Desta forma, o sistema aprende baseado nas informações da população qual o range de dados esperado, evitando ainda no campo, que dados errados sejam coletados.
- **Inteligência artificial**: usando um banco de dados digital da floresta como base para cálculo, algoritmos de aprendizado de máquina combinam diversas operações matemáticas e estatísticas para obter estimativas de características da floresta, como calcular o volume ou a taxa de mortalidade ao longo de um período de tempo. Esses mecanismos evoluem conforme vão sendo usados e a base de dados florestal cresce, criando um poderoso aliado no planejamento e na análise da floresta.
- **Sensores**: parte da tendência tecnológica conhecida como Internet das Coisas, consiste na utilização de sensores de diversos tipos, colocados no campo e conectados com a internet. Também usa-se drones e até dados de satélites para obter informações da floresta. Em geral, essas tecnologias funcionam de maneira autônoma, ou podem ser controladas remotamente, e ainda possuem taxas de atualização da informação muito maiores, com dados semanais, diários e, em certos casos, diversas vezes no mesmo dia.
- **Sistemas de Monitoramento *On-line***: integram diversas ferramentas, como as citadas acima, numa plataforma para acompanhamento *on-line* do ativo. Esses sistemas podem combinar dados dessas ferramentas de maneira a criar uma visão geral do ativo florestal para que o gestor possa monitorar o andamento das equipes que estão em campo, o desenvolvimento das árvores, gerar relatórios técnicos, planejar intervenções, entre outras atividades, através da internet, sem a necessidade de se locomover até a floresta.

  Observando as ferramentas citadas acima como um todo, tem-se um cenário em que um sistema *on-line* para monitoramento do ativo florestal, que permite gerar ordens de serviço, e conta ainda com o uso de *tablets* robustecidos, beneficia tanto a um gestor quanto um operário em campo, que tem acesso a uma ferramenta digital para agilizar seu trabalho.

  Além de oferecer recursos como esses mecanismos de auditoria dos dados no aplicativo de coleta – substituindo o uso de pranchetas e papel – esses sistemas também contabilizam características como o reduzido número de cliques e ações (métricas do desempenho) dos operadores no aplicativo, ou o trajeto que fazem para chegar ao ponto de medição, ou ainda, se seguiram a rota sugerida pelo sistema.

  Munido com esse arsenal tecnológico, o gestor pode tomar decisões muito mais preparado e seguro das informações que tem em mãos sobre a floresta que administra.

[...]

Instituto Brasileiro de Florestas. *O Inventário Florestal na Era Digital*. Disponível em: <https://www.ibflorestas.org.br/conteudo/o-inventario-florestal-na-era-digital>. Acesso em: 20 jun. 2020.

- Com base em inventários florestais adequadamente confeccionados, é facilitado o manejo florestal sustentável, que nada mais é do que a extração das riquezas das florestas de uma maneira consciente, racional e atenta aos limites daquele meio. É, portanto, a administração lúcida da floresta para a obtenção de benefícios econômicos e sociais, mas com respeito às peculiaridades daquela região florestal e dos impactos a que

MODERNA

ela está sujeita, buscando sempre modos ambientalmente sustentáveis de exploração que não coloquem em risco o ecossistema.

A preservação ambiental é importante não só pelo objetivo imediato de não destruir a biodiversidade local das regiões preservadas. Embora esse objetivo, por si só, já seja relevante, a preservação ambiental, muito mais do que isso, é indispensável para o bem-estar dos próprios seres humanos e para a preservação da vida na Terra. Isso porque a destruição de um ecossistema gera uma reação em cadeia de efeitos devastadores em larga escala, ocasionando aquecimento global, desaparecimento de riquezas naturais, escassez de água, empobrecimento do solo para cultivo de gêneros alimentícios, proliferação de pragas e doenças e afetações negativas em certas atividades econômicas, entre uma infinidade de consequências nocivas que nos afetam de modo drástico.

Para tratar do assunto com mais profundidade com os alunos, apresente-lhes o *site* institucional do Ministério do Meio Ambiente fazendo-os conhecer os órgãos governamentais responsáveis pelo cuidado com o meio ambiente, além das medidas políticas, econômicas e legais que vêm sendo adotadas em prol da preservação ambiental. Disponível em: <https://www.mma.gov.br/institucional.html>. Acesso em: 22 maio 2020. Explore, ainda, informações sobre organizações não governamentais que atuem na área, como o WWF-Brasil e o Greenpeace.

Não é demais enfatizar que o direito a um meio ambiente equilibrado é um direito constitucionalmente assegurado a todo cidadão, havendo, ainda, o dever correlato de defendê-lo e preservá-lo, conforme prevê o art. 225 da Constituição Federal: "Art. 225. Todos têm direito ao meio ambiente ecologicamente equilibrado, bem de uso comum do povo e essencial à sadia qualidade de vida, impondo-se ao poder público e à coletividade o dever de defendê-lo e preservá-lo para as presentes e futuras gerações". Além das disposições constitucionais, leis como o Código Florestal (lei nº 12.651/2012), a Política Nacional do Meio Ambiente (lei nº 6.838/1981) e a Lei de Crimes Ambientais (lei nº 9.605/1998) apresentam diretrizes para a preservação ecológica em nosso país e determinam sanções para seus descumprimentos.

Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Solicite previamente aos alunos que, antes da aula, coletem medidas de troncos de árvores próximo às suas residências ou à própria escola e, no dia seguinte, que apliquem o método Francon para determinar o volume aproximado desses troncos. Caso a coleta da medida seja dificultosa ou inviável, estimativas razoáveis podem ser feitas em substituição aos valores exatos. Em seguida, reúna os alunos em grupos para que discutam sobre os valores obtidos e os cálculos efetuados, para que, depois, apresentem as conclusões para toda a sala. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Para complementar o trabalho com essas páginas, promova trabalhos em conjunto com algum professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do componente curricular **Geografia**. Uma possibilidade é que o professor desse componente faça com os alunos uma análise crítica sobre as práticas efetivas do manejo florestal em nosso país, inclusive disponibilizando, se possível, textos e dados que favoreçam um conhecimento mais aprofundado do assunto. Promova, além disso, a discussão quanto à importância de preservação ambiental e sobre o papel desempenhado pelos inventários florestais na viabilização de uma exploração de riquezas florestais que se dê de forma correta e sustentável, pondo em discussão os motivos pelos quais até os dias atuais foi realizado apenas um inventário florestal de âmbito nacional.

Analise também a viabilidade de promover trabalhos em conjunto com algum professor da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente do componente curricular **Biologia**, a fim de trabalhar sobre as diferenças entre troncos de espécies vegetais e, principalmente, sobre o crescimento de certas árvores. Nesse trabalho interdisciplinar, pode-se, por exemplo, associar conhecimentos quanto à quantidade de anéis no interior dos troncos (que indicam a idade da árvore) com o volume desses troncos.

BNCC

O contexto trabalhado nessas páginas de abertura permite estabelecer relação com o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**. Incentivar a conscientização quanto à importância do meio ambiente e à necessidade de preservá-lo, promovendo a compreensão da possibilidade do uso sustentável dos recursos naturais a fim de favorecer a manutenção da vida na Terra, é um traço importante na educação dos alunos, e convém que seja relacionado aos mecanismos matemáticos que auxiliam na descrição, no entendimento e na interpretação dos fenômenos relacionados.

Ao usar conhecimentos matemáticos para a quantificação do volume de madeira com o objetivo de estabelecer planos para o manejo florestal sustentável, contempla-se aspectos da **Competência geral 2** e a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Esse enfoque inspira a aborda-

REPRODUÇÃO

gem científica, com amparo da criatividade e do rigor matemático, na resolução de problemas e na criação de soluções que integrem diferentes áreas do saber.

A **Competência específica 2** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e a **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** – que diz: "Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis." –, também são trabalhadas ao utilizar os resultados obtidos no inventário florestal para propor ações que promovam a consciência ambiental, com posicionamento ético em relação ao meio ambiente. Ainda mais, incentivam os alunos a avaliar criticamente modelos e estratégias para a realização das mais diversas ações, verificando plausibilidade de procedimentos e propondo ideias originais por meio da articulação das linguagens próprias da Matemática.

Resolução e comentários

C Pelo método Francon, a tora será aproximada por um paralelepípedo reto retângulo de lado com comprimento $\frac{c}{4} = \frac{1}{4}$ m e 3 m de altura. De acordo com os dados, temos $c = 1$ m e $h = 3$ m. Substituindo esses valores na fórmula dada, temos:

$$V = \left(\frac{c}{4}\right)^2 h = \left(\frac{1}{4}\right)^2 3 = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

Portanto, o volume da tora aproximado pelo método Francon é $0{,}1875\ m^3$.

- Na abordagem proposta pelo método Francon, são utilizados cálculos de volume de prismas para determinar aproximações de volume de toras.

  Para avaliar a compreensão dos alunos e complementar a tarefa, pergunte a eles se o método Francon para o cálculo do volume de uma tora de madeira é mais conveniente para o vendedor ou para o comprador da tora de madeira. Nesse momento, peça que justifiquem suas respostas, promovendo uma conversa com toda a turma.

Páginas 94 a 96

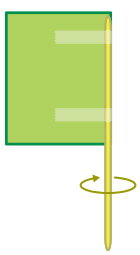
- Após apresentar a definição, explique aos alunos que a região do espaço limitada pelo cilindro é formada por todos os pontos dos segmentos nos quais cada extremo está contido em uma das bases.
- Na página **95**, enfatize aos alunos a diferença entre altura, eixo e geratriz de um cilindro.

  A altura é a distância do plano da base ao plano da outra base. Essa distância pode ser medida por qualquer segmento de reta que seja perpendicular aos planos das bases.

  O eixo e a geratriz, por outro lado, não são distâncias, e sim segmentos de reta. O eixo é o segmento de reta que liga o centro da circunferência de uma das bases ao centro da circunferência da outra base. As geratrizes, por sua vez, são segmentos de reta paralelos ao eixo e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases. Por isso, estão contidas na superfície lateral do cilindro.

  Explique aos alunos que, no caso dos cilindros retos, a altura, a medida do eixo e a medida das geratrizes coincidem umas com as outras, pois, nesse caso, todos esses segmentos de reta são perpendiculares aos planos das bases e têm o mesmo comprimento, podendo perfeitamente servir para a medição da altura. No caso dos cilindros oblíquos, contudo, observa-se que o eixo e as geratrizes têm medida maior do que a altura, uma vez que existe uma inclinação que faz com que esses segmentos de reta não sejam a menor distância entre os planos das bases.

  É válido observar, por fim, que, seja qual for o caso, a medida do eixo é a mesma da medida das geratrizes, pois a inclinação a que esses segmentos estão submetidos é a mesma, já que uns são paralelos aos outros.
- Para complementar o trabalho com a página **96**, explique aos alunos que é possível obter um cilindro a partir da revolução de um retângulo. Para isso, distribua a cada aluno um palito de sorvete (ou vareta) para realizar uma tarefa prática. Peça a eles que desenhem e recortem uma figura retangular de cartolina ou papel com as medidas que desejarem e, em seguida, que a fixem no palito, conforme a figura abaixo.



RONALDO INÁCIO

  Ao girar o palito com certa velocidade, é possível observar a imagem de um cilindro. Essa tarefa também pode ser desenvolvida para a construção de outras figuras geométricas, como o cone, obtido a partir da revolução de um triângulo retângulo, e a esfera, obtida a partir da revolução de um semicírculo.
- Oriente os alunos a notar que o retângulo obtido na planificação do cilindro tem dimensões h e $2\pi r$ porque um de seus lados corresponde à altura do cilindro e o outro é equivalente ao comprimento do perímetro do círculo da base. Por meio dessa percepção, todas as fórmulas relativas às áreas de superfícies pertencentes ao cilindro podem ser deduzidas.

Páginas 98 e 99

- Na tarefa **6** da página **98**, antes de realizar as contas, pergunte aos alunos se eles acham que a área da

MODERNA

superfície do cilindro muda ou não dependendo do eixo em torno do qual se realize a revolução do retângulo.

Nessa tarefa, é importante que os alunos consigam visualizar o que está sendo pedido, sendo capazes de associar a descrição cartesiana do retângulo com sua representação geométrica. É conveniente, portanto, desenhar na lousa o plano cartesiano, identificar os pontos indicados em conjunto com os alunos e traçar o retângulo por eles determinado. Ao final, peça que utilizem cartolina ou papel para construir os dois cilindros descritos na tarefa, partindo de dois retângulos recortados que sejam idênticos um ao outro.

Proponha, ainda, aos alunos que refaçam os exercícios com novos valores por eles mesmos escolhidos, investigando se essa diferença entre as áreas sempre se verifica ou não.

Página 100

BNCC As questões **A** e **B** da teoria dessa página mobilizam a habilidade **EM13MAT504** da BNCC levando os alunos a investigar processos de obtenção da medida do volume de cilindros para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessa figura. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Sugestão de avaliação

Para avaliar como os alunos estão lidando com os conteúdos estudados até o momento, complemente o problema **R4** fazendo aos alunos outras perguntas, tais como:

a) Se a vazão da água diminuir para 5 ℓ por minuto, qual será o tempo necessário, em horas, minutos e segundos, para esvaziar o barril completamente?

b) Mantendo o diâmetro do recipiente, quantos centímetros, no mínimo, deve-se aumentar na altura, para que ele contenha toda a água do barril?

Resolução

a) 3 h 8 min 24 s **b)** 11,3 cm

Páginas 102 e 103 Resolvendo por etapas

- Ao trabalhar a tarefa da seção **Resolvendo por etapas**, comente com os alunos sobre o papel dos estudos envolvendo volume de cilindros em aplicações nas engenharias em geral. Explique que a tarefa proposta já dá uma boa ideia da recorrência de cilindros em questões práticas de grande complexidade que surgem em construções com encanamentos, oleodutos, sistemas de irrigação e em diversas outras situações de engenharias em geral. Válvulas, pistões, vasos comunicantes e grande parte da mecânica dos fluidos, que os alunos certamente estudarão no componente curricular **Física**, têm cilindros como componentes fundamentais de seus funcionamentos.

- No trabalho com essas páginas, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Design thinking**. Para tanto, apresente o problema da seção como um desafio antes do início do tema, proponha o problema do quadro **Agora é você quem resolve!** ou outra tarefa similar, para que os alunos resolvam seguindo os passos da metodologia utilizada nessa seção.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é você quem resolve! Resolução e comentários

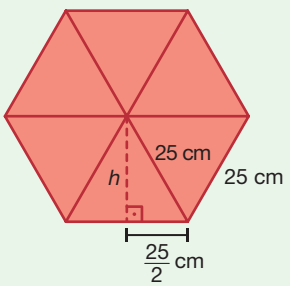
2 Inicialmente, calculamos o volume de cada um dos recipientes que foram inteiramente preenchidos com água.

O volume V_1, em centímetros cúbicos, do recipiente cúbico é:

$$V_1 = 60^3 \Rightarrow V_1 = 216\,000$$

Em seguida, calculamos o volume do recipiente em formato de prisma regular hexagonal. Para isso, inicialmente, determinaremos a área da base desse recipiente.

Como a base tem formato de hexágono regular, podemos decompô-la em 6 triângulos equiláteros. Utilizando o Teorema de Pitágoras, calculamos o comprimento de sua altura h em centímetros.



RONALDO INÁCIO

$$\left(\frac{25}{2}\right)^2 + h^2 = 25^2 \Rightarrow h = \sqrt{25^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{4 \cdot 25^2 - 25^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Assim, a área A_t, em centímetros quadrados, de cada triângulo equilátero é:

$$A_t = \frac{25 \cdot \left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \Rightarrow A_t = \frac{25^2\sqrt{3}}{4}$$

MODERNA

Consequentemente, a área A, em centímetros quadrados, do hexágono é:

$$A = 6 \cdot \frac{25^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{3 \cdot 25^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \simeq 1\,621{,}9$$

Portanto, o volume V_2, em centímetros cúbicos, do prisma é:

$$V_2 \simeq 1\,621{,}9 \cdot 40 \Rightarrow V_2 \simeq 64\,876$$

Agora, adicionamos V_1 e V_2.

$$216\,000\ cm^3 + 64\,876\ cm^3 = 280\,876\ cm^3$$

Por fim, determinamos a altura h_c do cilindro de raio 1 m $(100\ cm)$ e volume $280\,876\ cm^3$. Para isso, fazemos:

$$\pi \cdot 100^2 \cdot h_c = 280\,876 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h_c = \frac{280\,876}{10\,000 \cdot \pi} \Rightarrow h_c \simeq 8{,}95$$

Portanto, a altura do nível da água no recipiente cilíndrico é aproximadamente 8,95 cm.

Páginas 105 e 106

- Verifique a possibilidade de realizar uma tarefa semelhante à tarefa **23** na prática. Para isso, leve à sala de aula um recipiente cilíndrico transparente, com graduação de 1 cm, e diversos objetos maciços.

BNCC As tarefas **25** e **33** abordam a **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Nelas, os conceitos de volume de cilindros são utilizados na compreensão do funcionamento e da utilidade de pluviômetros, despertando estratégias e procedimentos matemáticos para a interpretação de tecnologias e de fenômenos das áreas de **Ciências da Natureza** e **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, proporcionando o desenvolvimento de uma formação cidadã ampla.

Essas tarefas também contemplam a **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, citada anteriormente. Os métodos matemáticos nelas abordados despertam a capacidade de analisar, avaliar e mensurar fenômenos naturais da vida na Terra, capacitando os alunos a fundamentar e defender interpretações bem embasadas na compreensão e na previsão do funcionamento da natureza.

A tarefa **34** permite o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Saúde**. Nela, comenta-se a respeito dos benefícios que a ingestão de palmito pode trazer à saúde. Aproveite a oportunidade e incentive os alunos a consumir produtos de origem natural, evitando, sempre que possível, produtos industrializados. A manutenção de uma alimentação saudável deve fazer parte da rotina das pessoas, prezando sempre pela qualidade de vida.

Página 107

- Aproveite o contexto da tarefa **37** para enfatizar que uma aplicação muito importante do estudo de áreas e volumes está na diminuição de gastos e na maximização de lucros na indústria, a qual, em geral, busca construir seus produtos com a menor quantidade de material possível mas manter uma capacidade volumétrica máxima.
- Para despertar a atenção dos alunos, ao trabalhar com a tarefa **39**, mencione alguns fatos a respeito de taças dadas em premiações, em especial a da Copa do Mundo. Comente, por exemplo, que duas versões da taça já foram utilizadas nas premiações: a Taça Jules Rimet, em vigor no período de 1930 a 1970, e o Troféu Copa do Mundo, de 1974 até os dias atuais.

  Curiosamente, a Taça Jules Rimet foi furtada não apenas uma, mas duas vezes. A primeira delas foi em 1966, quando estava em exposição em Londres, quatro meses antes da Copa na Inglaterra. Ela estava em posse do Brasil, que havia sido campeão na Copa anterior, de 1962. Na época, alguém que se identificou como Jackson emitiu um comunicado ameaçando derreter a taça se 15 mil libras não lhe fossem pagas como resgate. Posteriormente, um policial à paisana, com uma maleta preenchida com jornais cobertos com notas de baixo valor, foi ao encontro do suposto Jackson e conseguiu detê-lo. Descobriu-se, posteriormente, que Jackson era o ex-soldado Edward Betchley, à época com 46 anos. Com o auxílio de um cão, a taça foi encontrada embrulhada em jornais no jardim de uma casa nos subúrbios de Londres.

  O segundo furto da taça ocorreu no Rio de Janeiro em 1983, novamente sob a tutela do Brasil após a conquista do troféu na Copa de 1970.

  Atualmente, os campeões são premiados com réplicas banhadas a ouro.

Páginas 108 e 109 Acessando tecnologias

- O trabalho com a seção **Acessando tecnologias** pode ser realizado no laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se de que todos os computadores possuam o *software* VisualG instalado, por meio do qual a tarefa será realizada. O *download* pode ser feito gratuitamente no *site* a seguir. Disponível em: <http://visualg3.com.br>. Acesso em: 16 jun. 2020.

  A fim de que os alunos trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitá-lo no *software* e atribuir valores às variáveis definidas.

BNCC O trabalho com a seção dessas páginas contempla a habilidade **EM13MAT405**, tendo em vista que requer dos alunos a implementação de algoritmos escritos em linguagem matemática utilizando, para isso, conceitos iniciais de linguagem de programação. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

EM ABERTA

- Esse tipo de tarefa possibilita aos alunos entrarem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Ao trabalhar na construção de um algoritmo e na utilização do VisualG para criar o programa indicado, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Organize os alunos em grupos e lhes apresente o passo a passo, em instruções embaralhadas, para que eles as reorganizem e consigam concluir a tarefa.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Saber manipular linguagens próprias da informática, entendendo o funcionamento lógico de computadores e *softwares*, é uma habilidade cada vez mais necessária no mundo contemporâneo. As tarefas da seção **Acessando tecnologias** propiciam o exercício dessa habilidade. Nelas, a construção de algoritmos de funcionalidade prática e, posteriormente, a programação em VisualG desses algoritmos utilizando a organização devida e os conectivos lógicos necessários, bem como o uso correto dos operadores condicionais "se", "então" e "senão", incentivam nos alunos o raciocínio lógico e a capacidade de abordar um mesmo problema por mais de uma perspectiva, enxergando soluções múltiplas, e não excludentes, de apresentar soluções válidas. O pensamento computacional é incrementado ao torná-los aptos a traduzir uma situação dada em outras linguagens, avaliando as mais convenientes para cada caso. No exemplo, a construção de um programa que indique de imediato se um dado cilindro é capaz de comportar ou não a quantidade indicada de água apresenta, em sua essência, os rudimentos fundamentais do pensamento computacional que podem vir a ser aplicados em situações muito mais complexas e impactantes no futuro.

Agora é com você! **Resoluções**

1 Para que a instrução da linha 15 seja executada, a condição da linha 12 não pode se verificar, ou seja, o volume do recipiente, em litros, tem de ser maior ou igual ao volume de água em litros.

2 Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo que o resolva. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1. Leia o volume V de água, em litros, a ser armazenada no recipiente.
2. Leia o comprimento, em metros, do diâmetro interno d da base do recipiente.
3. Leia a altura interna h, em metros, do recipiente.
4. Calcule $V_r = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h \cdot 1\,000$.
5. Se V_r for menor do que V, não é possível armazenar o volume de água no recipiente. Caso contrário, é possível armazenar o volume de água no recipiente.

Fim

Programa em VisualG

```
1 Algoritmo "recipiente_cilindrico"
2 Var
3 diametro, altura, volume_recipiente, litros: real
4 Inicio
5 escreva("Digite o volume de água, em litros, a ser armazenado no recipiente: ")
6 leia(litros)
7 escreva("Digite o comprimento do diâmetro interno, em m, da base do recipiente: ")
8 leia(diametro)
9 escreva("Digite a altura interna, em m, do recipiente: ")
10 leia(altura)
11 volume_recipiente <- (diametro/2)*(diametro/2)*pi*altura
12 se(volume_recipiente*1000 < litros)então
13 escreva("Não é possível armazenar o volume de água no recipiente!")
14 senao
15 escreva("É possível armazenar o volume de água no recipiente!")
16 fimse
17 Fimalgoritmo
```

- Ao final do trabalho com o tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule sucintamente as fórmulas e conceitos aprendidos, bem como as ideias mais interessantes aplicadas em uma demonstração ou em um exercício, e, em debate, peça aos alunos que comentem sobre situações práticas em que eles visualizem oportunidade de utilizar as ferramentas matemáticas desenvolvidas no tema. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

SEM OBRA

9 Volume interno de um motor

Objetivo específico

- Resolver problemas envolvendo o volume do motor de um carro.

Páginas 110 e 111 **Como funciona o motor de um carro?**

- Esse tema aborda o funcionamento do motor de um carro trabalhando a compreensão de alguns elementos envolvidos no processo de obtenção do volume interno de um motor.

  Uma sugestão de condução para o trabalho com essas páginas é estabelecer um tempo para que os alunos leiam o texto e respondam às questões propostas. Na sequência, organize uma conversa a fim de que eles exponham suas opiniões e argumentos às respostas dadas. Se julgar conveniente, organize os alunos em duplas e solicite que realizem previamente uma pesquisa sobre o assunto da revista em outras fontes e comparem as informações.
- Oriente os alunos a pesquisar na internet algum vídeo sobre o funcionamento de um motor de combustão interna para que eles possam ver de forma dinâmica o conteúdo apresentado nessas páginas. Para isso, oriente-os a pesquisar em um *site* de buscas e selecionar na aba de vídeos algum que seja de fonte confiável.
- Na pesquisa proposta no item **F**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Proponha um trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Física**, com o intuito de apresentar aos alunos aspectos relacionados a processos físicos básicos que envolvem o funcionamento do motor de um carro.

Uma sugestão de trabalho interdisciplinar é abordar os quatro tempos (ou quatro fases) de funcionamento do motor. Peça ao professor de **Física** que explique cada um dos tempos e a função de cada componente do motor nesses tempos.

BNCC

O trabalho com essas páginas proporciona o uso de conceitos e estratégias matemáticas para interpretar informações e resolver problemas advindos de um contexto real, bem como analisar se os resultados obtidos são coerentes, abordando, assim, aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Ao desenvolver o trabalho com o item **F**, os alunos são levados a analisar questões socioambientais relativas à dependência do mundo atual em relação aos recursos não renováveis. Aproveite esse contexto e promova uma discussão a respeito das novas tecnologias que podem ser encaradas como alternativa aos motores a combustão, contemplando, assim, a **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

Resoluções e comentários

D Observe que os cilindros possuem a mesma capacidade. Desse modo:

$$1{,}6 : 4 = 0{,}4$$

Portanto, cada câmara de combustível tem capacidade de 0,4 ℓ.

E Para resolver esse problema, os alunos devem observar que o curso do cilindro corresponde à sua altura e, como o motor tem capacidade para 3 litros, temos:

$$3 : 6 = 0{,}5$$

Ou seja, cada um desses pistões tem capacidade de 0,5 ℓ ou 500 mℓ.

$$V = \overbrace{\pi r^2}^{A_b} \cdot h \Rightarrow 500 = \pi r^2 \cdot 8{,}8 \Rightarrow r \simeq 4{,}25$$

Portanto, o diâmetro de cada um dos pistões é, aproximadamente, $\underbrace{8{,}5}_{2 \cdot 4{,}25}$ cm.

F Calculando a capacidade de cada cilindro, segue que:

$$V = \overbrace{\pi r^2}^{A_b} \cdot h \Rightarrow V = \pi \left(\frac{9{,}7}{2} \right)^2 \cdot 8{,}8 \Rightarrow V \simeq 650$$

Ou seja, cada cilindro tem capacidade aproximada de 650 mℓ.

Portanto, como o motor tem oito cilindros, sua cilindrada é aproximadamente $\underbrace{5\,200}_{8 \cdot 650}$ cc.

PROIBIDA

10 Cone

Objetivos específicos

- Reconhecer cone e figuras com formato cônico.
- Identificar elementos de um cone.
- Calcular a área da superfície de cone e de tronco de cone reto.
- Resolver situações-problema relacionadas ao volume de cone e de tronco de cone reto.

Esse tema aborda conteúdos relativos à figura geométrica espacial cone. O objetivo é propiciar aos alunos uma compreensão significativa da área de superfície e volume de cone e tronco de cone reto. Para isso, são abordados conceitos com base em exemplos e de maneira contextualizada de situações reais, bem como são apresentadas demonstrações matemáticas de fórmulas e expressões utilizadas.

Os conteúdos abordados nesse tema podem propiciar a retomada de alguns conteúdos já estudados no Ensino Fundamental, como Teorema de Pitágoras, razão e proporção, regra de três, comprimento de circunferência e área de círculo. Assim, antes de iniciar o desenvolvimento do conteúdo proposto nesse tema, busque avaliar o conhecimento prévio dos alunos. Para isso, uma sugestão é propor que resolvam o problema a seguir.

Sugestão de avaliação

(Enem) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

Qual deverá ser a forma do adesivo?

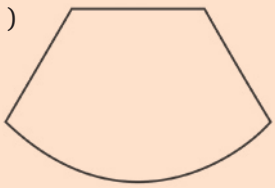
a)

d)

b)

e)

c)



REPRODUÇÃO

Resolução e comentários

alternativa **e**

Essa questão pode desencadear uma conversa com os alunos e levá-los a refletir e expressar como eles percebem esses elementos e conceitos.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 112 e 113 — Colorindo imagens com o poder do cérebro

- O assunto abordado nas páginas de abertura nos permite refletir sobre o modo como vemos as cores. Converse com os alunos explicando que se acreditou, por muito tempo, que todas as pessoas percebem as cores da mesma maneira. Entretanto, estudos a respeito da percepção humana das cores têm se intensificado.

  Existem, aproximadamente, 6 milhões de cones em cada olho humano concentrados na região chamada fóvea. Esses cones são responsáveis pela percepção das cores e, por isso, quando existe uma anomalia ou um defeito em um dos cones, ocorre o daltonismo, que é uma condição em que o sujeito tem dificuldade de distinguir algumas cores, como verde e vermelho. Já no tetracromatismo, as pessoas afetadas enxergam mais cores do que outras. Avalie a possibilidade de promover uma conversa com os alunos verificando se na turma há alguém tetracromata. Para isso, mostre a eles o fôlder abaixo acessando o *site* da UNA-SUS, disponível em: <https://www.unasus.gov.br/noticia/tetracromatismo-saiba-mais-sobre-quem-enxerga-mais-cores>. Acesso em: 11 jul. 2020.

ACERVO DO MINISTÉRIO DA SAÚDE/GOVERNO FEDERAL

BITTERCOURT, Claudia. *Tetracromatismo – Saiba mais sobre quem enxerga mais cores*. UNA-SUS. Ministério da Saúde, 2015. Disponível em: <https://www.unasus.gov.br/noticia/tetracromatismo-saiba-mais-sobre-quem-enxerga-mais-cores>. Acesso em: 11 jul. 2020.

MODELO

Durante a conversa, ressalte a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, entender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas de abertura, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor.**

Sala dos professores

- O assunto exposto nessas páginas viabiliza a realização de uma aula em conjunto com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Arte**. Aproveite que o contexto trabalhado nas páginas de abertura aborda a ilusão de óptica e proponha ao professor do componente curricular **Arte** que desenvolva uma tarefa envolvendo ilusões ópticas por meio da chamada *Op Art* ou Arte Óptica. Esse tipo de Arte consiste em desenhos de formas e padrões geométricos, que podem ser coloridos ou em preto e branco, e que produzem uma espécie de "ilusão", dando a sensação de que os objetos estão em movimento. Com base na *Op Art*, motive os alunos a pensar sobre a Matemática contida nesse tipo de Arte.
- Outra sugestão é estabelecer relação com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Biologia**, tendo em vista que o tema sugere estudar a anatomia do olho humano, que é o órgão capaz de perceber a luz, as cores, as formas, os movimentos e espaços. Uma possibilidade é propor aos alunos a construção de uma maquete do olho humano. Peça ao professor de **Biologia** que oriente as discussões de modo a abordar os principais elementos que constituem a estrutura do olho (estruturas externas, como a pupila, a íris, a córnea, a pálpebra, a esclera, os músculos extrínsecos e o nervo óptico, e as estruturas internas, como o cristalino, o humor vítreo e aquoso, a coroide e a retina, composta por fotorreceptores e células nervosas), como a imagem é formada na retina (de forma invertida e o cérebro converte para sua forma real) e as funções de cada uma dessas partes.
- Se possível, aproveite o contexto para abordar o processo de captação da luz, discorrendo a respeito da transformação dessa energia em impulsos nervosos e sua posterior interpretação pelo cérebro. Com isso, também é possível desenvolver um trabalho em conjunto com o professor do componente curricular **Física**. Proponha ao professor de **Física** que desenvolva algum experimento sobre princípios da óptica geométrica e levante questões, como: Por que não conseguimos enxergar no escuro?
- Caso deseje complementar o trabalho interdisciplinar, acesse o material "Ilusão de ótica: contraste". Disponível em: <http://www1.fisica.org.br/fne/phocadownload/Vol12-Num2/a131.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2020. O *site* apresenta informações sobre o conteúdo e sugestões de tarefas com ilusões de óptica.

- Após apresentar a definição, explique aos alunos que a região do espaço limitada pelo cone é formada por todos os pontos dos segmentos nos quais cada extremo está contido em uma das bases.

Página 118

BNCC Ao citar Eudoxo (408 a.C.-355 a.C.), o texto dessa página traz à tona um importante aspecto histórico envolvendo a fórmula $V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3}$. Se julgar conveniente, pesquise outros fatos relacionados à história da Matemática e leve os alunos a perceber que é possível utilizar conhecimentos historicamente construídos para auxiliar na compreensão de aspectos do mundo atual. Essa abordagem mobiliza aspectos da **Competência geral 1** da BNCC. Além disso, as questões dessa página contemplam a habilidade **EM13MAT504** e a **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, ao levar os alunos a investigar processos de obtenção da medida do volume de cones para a obtenção da fórmula de cálculo da medida do volume dessa figura.

Página 120

- Na realização da tarefa **18**, se possível, leve para a sala de aula uma ampulheta para que os alunos observem seu funcionamento. Essa tarefa pode ser complementada com uma pesquisa sobre os diferentes instrumentos utilizados para medir o tempo, e também pode ser realizada com os alunos organizados em grupos, apresentando os resultados aos colegas.

Página 121

- Se julgar conveniente, o contexto proposto na tarefa **24** pode ser realizado no laboratório de informática da escola. Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e atente-se ao fato de que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o computador.

EDIÇÃO ESPECIAL

- No trabalho com a tarefa **26**, comente com os alunos a respeito de testes de verificação da qualidade da água. Como sugestão, explique que a análise da água pode passar por três tipos de testes: físicos, químicos e microbiológicos. Os testes físicos servem para indicar propriedades detectáveis pelos sentidos. Registram cor, turbidez, sólidos totais, sólidos dissolvidos, sólidos suspensos, odor e sabor. Os testes químicos são realizados com o objetivo de determinar a quantidade de substâncias minerais e orgânicas que afetam a qualidade da água. A análise química da água corresponde ao pH, à dureza, a produtos químicos tóxicos e metais. Além disso, por meio dela, avalia-se a presença de um grupo selecionado de parâmetros químicos. Já os testes microbiológicos servem para indicar a presença de bactérias e outros microrganismos, características da contaminação fecal. Esse tipo de análise permite identificar a presença de microrganismos patogênicos. A presença de bactérias pode mostrar a contaminação fecal, seja por fezes de humanos, seja de animais.

  A realização de análises na água permite detectar possíveis alterações na sua composição que chega até suas casas. Como exemplo, apresente dados sobre o fato de que água do brasileiro está contaminada com substâncias que podem causar doenças graves. Segundo dados do Ministério da Saúde, um em cada quatro municípios do país distribui água com resíduos de agrotóxicos para a população.

  Verifique a possibilidade de pedir aos alunos que, reunidos em grupos, pesquisem dados estatísticos que ilustrem a presença de agrotóxicos na água dos brasileiros e exponham o material encontrado para toda a turma.

  Para finalizar o estudo do tema em contexto (ainda referente à tarefa **26**), agende uma visita guiada à Estação de Tratamento de Água (ETA) mais próximo da escola. Solicite aos alunos que elaborem perguntas sobre o tema e selecione algumas para que façam ao técnico ou guia que estiver acompanhando a turma enquanto conhecem a Estação. Além disso, oriente-os a registrar os dados mais relevantes que forem apresentados durante a visita. Para concluir, peça aos alunos que, reunidos em pequenos grupos, elaborem cartazes com informações e ilustrações que descrevam o que eles aprenderam durante a visita.

Página 122

BNCC Na tarefa **28**, ao abordar o semiárido brasileiro, estabeleça conexão com a **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** – que diz: "Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis." – tendo em vista que requer a tomada de decisões responsáveis acerca de assuntos relacionados à dinâmica da Terra. O uso de cisternas para o armazenamento de águas pluviais, bastante comum em regiões de seca, como o Nordeste brasileiro, é um exemplo de intervenção no ecossistema, necessário para a manutenção da vida em regiões escassas.

A tarefa **29** permite o desenvolvimento do pensamento computacional por parte dos alunos e mobiliza a habilidade **EM13MAT315** da BNCC. A construção de um algoritmo que possibilita determinar se é possível armazenar certa quantidade de água, em litros, em um recipiente com o formato de cone reto faz com que os alunos notem os benefícios que tal linguagem proporciona. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional** na parte geral deste **Suplemento para o professor**. Além disso, nessa tarefa, os alunos são levados a utilizar diferentes linguagens para, com base nelas, se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos, como sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

Página 123

- Após apresentar o conteúdo dessa página, demonstre na lousa como expressar a área lateral do tronco de cone em função de G, R e r. Esse tipo de tarefa permite aos alunos aprimorar a escrita e a leitura da linguagem matemática.

  Utilizando a razão de semelhança entre os raios das bases e as geratrizes dos cones, temos:

$$\frac{g}{g-G} = \frac{R}{r} \Rightarrow rg = Rg - RG \Rightarrow RG = Rg - rg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(R-r) = RG \Rightarrow g = \frac{RG}{R-r}$$

  Substituindo g na expressão da área lateral do tronco de cone, temos:

$$A_t = \pi Rg - \pi r(g-G) =$$

$$= \pi R\left(\frac{RG}{R-r}\right) - \pi r\left(\frac{RG}{R-r} - G\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{R^2G}{R-r} - \frac{rRG}{R-r} + rG\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{R^2G - rRG + rRG - r^2G}{R-r}\right) =$$

$$= \pi G\,\frac{(R+r)\cdot(R-r)}{R-r} = \pi G(R+r)$$

  Assim, a área lateral do tronco de cone é dada por $A_t = \pi G(R+r)$.

BNCC Tarefas envolvendo a obtenção da área lateral do tronco de cone permitem aos alunos aprimorar a escrita e a leitura da linguagem matemática, bem como compreender e utilizar diferentes registros de representação matemáticos enquanto resolvem problemas, contemplando, assim, aspectos da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Página 125

- Após trabalhar o tópico **Volume de um tronco de cone reto**, verifique a possibilidade de demonstrar na lousa como expressar o volume do tronco de cone em função de H_t, R e r, conforme segue.

  Como $h = H - H_t$, temos:

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}\left[R^2 H - r^2\left(H - H_t\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(R^2 H - r^2 H + r^2 H_t\right) = \frac{\pi}{3}\left[H\left(R^2 - r^2\right) + r^2 H_t\right] \qquad \text{(I)}$$

  Para obter o valor de H em função de H_t, R e r, utilizamos a razão de semelhança entre os raios das bases e as alturas dos cones.

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{\underset{H - H_t}{h}} \Rightarrow R\left(H - H_t\right) = rH \Rightarrow RH - rH = RH_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H\left(R - r\right) = RH_t \Rightarrow H = \frac{RH_t}{R - r} \qquad \text{(II)}$$

  Substituindo **II** em **I**, temos:

$$V = \frac{\pi}{3}\left[H\left(R^2 - r^2\right) + r^2 H_t\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[\frac{RH_t}{R - r}\left(R^2 - r^2\right) + r^2 H_t\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(R^2 H_t + RrH_t + r^2 H_t\right) = \frac{\pi H_t}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

  Assim, o volume do tronco de cone é dado por $V = \frac{\pi H_t}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

Páginas 126 a 129

- As tarefas **36** e **38** da página **126**, a tarefa **45** da página **127** e a tarefa **47** da página **128** promovem a aplicação do conteúdo estudado em diferentes campos de trabalho: produção de peças em madeira (marcenaria) e em barro (artesanato), pintura de uma coifa (pintor) e fabricação de bolo (gastronomia/cozinheira). Isso remete à associação dos conceitos matemáticos ao tema contemporâneo transversal **Trabalho**, conforme propõe a BNCC. Aproveite o momento e comente com os alunos o fato de que conhecimentos matemáticos, nesse caso em específico sobre cones, podem ser usados em diversas situações do dia a dia e também por vários setores do mercado de trabalho.

  O conhecimento matemático atrelado a diferentes contextos e culturas é estudado com mais afinco pela Etnomatemática. Para se inteirar mais quanto a esse assunto, leia o excerto a seguir.

> O Programa Etnomatemática é um programa de pesquisa que tem como foco entender como a espécie humana desenvolveu seus meios para sobreviver na sua realidade natural, sociocultural e imaginária, e para transcender, indo além da sobrevivência. Recorre à análise da história das ideias e à origem e evolução do comportamento e do conhecimento da espécie humana, em distintos ambientes naturais e socioculturais. A ideia central é a Etnomatemática, que surge do reconhecimento de que diferentes culturas têm maneiras diferentes de lidar com situações e problemas do cotidiano e de dar explicações sobre fatos e fenômenos naturais e sociais. [...]
>
> D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, v. 32, n. 94, set./dez. 2018. p. 189. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ea/v32n94/0103-4014-ea-32-94-00189.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2020.

- Ao resolver a tarefa **57**, da página **129**, converse com os alunos acerca de prejuízos causados pelo desperdício de água e como isso pode ser evitado com ações simples, como a manutenção de reservatórios. Se possível, proponha que investiguem qual seria o preço local cobrado pelo m^3 da água e, com isso, descubram o valor que esse vazamento poderia ocasionar em um mês.

BNCC A tarefa **52** da página **128** e a tarefa **55** da página **129** requerem a elaboração de um problema e sua posterior resolução, envolvendo volume de tronco de cone, contemplando a habilidade **EM13MAT309** da BNCC. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

- Ao final do trabalho com esse tema, verifique a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em conversa, solicite que discorram sobre o cone, seus elementos, cálculos de áreas e volume, o cone como sólido de revolução e contextos em que eles estão presentes, como o formato das células receptoras de luz e responsáveis por enxergarmos as cores. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MOVERVA

11 Esfera

Objetivos específicos

- Reconhecer a esfera e seus elementos, tais como centro, eixo, raio, diâmetro, polos, equador, paralelos e meridianos.
- Identificar as principais propriedades da esfera, entendendo-a como o lugar geométrico de todos os pontos no espaço que tenham a mesma distância *r* de um ponto fixo *C*.
- Calcular o volume da esfera, deduzindo a fórmula geral por meio da comparação com outros sólidos geométricos e da aplicação do Princípio de Cavalieri.
- Aprender a calcular a área da superfície da esfera, deduzindo a fórmula por meio da associação indutiva da esfera a um poliedro de *n* faces quando *n* cresce além de qualquer medida.

Esse tema trata das esferas, de seus elementos e de suas propriedades. Nele, estudam-se os conceitos de centro, eixo, raio, diâmetro, polos, equador, paralelos e meridianos. São estudadas também as fórmulas para o cálculo do volume da esfera e para a obtenção da área da superfície esférica. Todas essas fórmulas são apresentadas em detalhes, tanto com instruções acerca de como aplicá-las corretamente quanto pela necessária dedução lógica capaz de garantir suas veracidades. Naturalmente, as demonstrações apresentadas para as fórmulas utilizam argumentos geométricos e algébricos com os quais os alunos já estejam familiarizados. Assim, apresentam-se as demonstrações mais elementares possíveis, buscando estimular a percepção geométrica dos alunos e deixando-os confortáveis com as fórmulas a serem aplicadas.

Quanto aos elementos que constituem a esfera, os alunos deverão dar um passo além na compreensão da esfera como apenas uma "bola" ou uma "figura redonda" para passar a entendê-la como o lugar geométrico dos pontos no espaço que sejam equidistantes, com uma distância fixa, de um ponto central, também fixo. Assim, a caracterização dos elementos da esfera, como centro, raio e eixo, ganhará significados mais precisos e de maior utilidade na resolução de problemas práticos. Para tanto, esses elementos serão associados, sempre que possível, aos seus análogos na idealização do formato de esfera que se faz do planeta Terra, comparando, por exemplo, o equador esférico da Geometria com a linha do Equador presente nas representações do nosso planeta.

Para reforçar a compreensão, além dos exercícios de fixação do conteúdo, as fórmulas e interpretações das propriedades das esferas são trabalhadas não apenas em isolado, mas em contextos que envolvam outras formas tridimensionais, como cones e cilindros. Além disso, são feitas observações destinadas a reforçar a percepção espacial dos alunos e a desenvolver ainda mais suas capacidades de abstrair matematicamente e de registrar algebricamente problemas envolvendo figuras geométricas espaciais em geral, principalmente aqueles de formato esférico ou de formato composto por frações bem delimitadas da esfera.

Ademais, o tema exemplifica e exercita a aplicabilidade prática dos conhecimentos nele construídos, desafiando os alunos a utilizar a imaginação geométrica e a lógica matemática para resolver problemas em contextos diversos que envolvam áreas de superfície e volume de formas esféricas. Nesses problemas, além daqueles que são puramente geométricos, esferas são observadas no formato aproximado de planetas, bolas de basquete e objetos redondos em geral. Para complementar, conhecimentos básicos de outras áreas, notadamente a noção de densidade oriunda da **Física**, são utilizados de maneira contextualizada para enriquecer a aprendizagem com a interdisciplinaridade tão condizente com o tema em estudo.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca de esferas, proponha tarefas simples que trabalhem com a percepção visual de esferas, ou exercícios que, em grau progressivo de dificuldade, exijam que se calcule ou estime medidas em esferas (por exemplo, a medida do comprimento do raio, ou mesmo aproximações para o volume, obtidas por meio da criatividade e da engenhosidade de métodos propostos pelos próprios alunos).

Uma possibilidade é propor a dinâmica de construção de um taumatrópio. Apesar do nome estranho (que provém do grego *thauma* – "maravilhoso" – e *tropos* – "giro" ou "roda"), o taumatrópio é um brinquedo bastante popular, e simples de fazer, que consiste na colagem de um círculo de papel, com desenhos nos dois lados, em um barbante. Ao rodar o barbante com as pontas dos dedos a certa velocidade, o círculo descreve um movimento que determina uma esfera. Quem olha para o brinquedo em movimento tem a impressão de que os desenhos dos lados opostos do círculo se mesclam, formando apenas uma imagem.

Para construir o taumatrópio, entregue tiras de barbante aos alunos e peça que recortem dois círculos com cerca de 5 cm de diâmetro em um papel em branco ou em uma cartolina (um compasso ou o fundo de um copo podem ser utilizados para traçar a circunferência a ser recortada). Em seguida, eles devem fazer desenhos criativos em um dos lados de cada um dos círculos, para depois colá-los ao redor do barbante como se fosse um sanduíche sendo montado. O mesmo efeito pode ser obtido substituindo-se o barbante por um palito qualquer. Depois, é só girar o palito ou barbante e ver as figuras se unindo, dando a impressão de formarem apenas um desenho.

Ao longo da tarefa, verifique a percepção dos alunos acerca dos princípios que fazem com que o brinquedo funcione, bem como as propriedades geométricas que

MODERNA

daí podem ser extraídas. Se o papel tiver uma espessura razoável, será possível observar a formação aparente de uma esfera no movimento do círculo, tornando evidente que a esfera pode ser obtida por meio da rotação da circunferência.

Outro ponto que pode ser observado é o fato de que, no caso da esfera, em razão de sua perfeita simetria em todos os eixos, qualquer diâmetro da circunferência pode ser tomado como eixo de rotação, ao contrário do que acontece com os demais sólidos de revolução, como o cone e o cilindro. Para mais informações a respeito do taumatrópio, acesse o *site* a seguir. Disponível em: <https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/2761/35/TaumatropioFinal.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2020.

Outra tarefa que pode ser valiosa na sondagem quanto às habilidades e aos conhecimentos dos alunos com relação ao tema é apresentar uma esfera com raio dado e pedir aos alunos que, com base nos conhecimentos das aulas antecedentes, desenvolvam métodos práticos para estimar o volume da esfera, determinando valores máximos e mínimos para intervalos cada vez menores nos quais esse volume com certeza esteja inserido.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 130 e 131 Base de Alcântara

- As páginas de abertura tratam da Base de Alcântara, próximo a São Luís, no Maranhão, destinada para o lançamento de foguetes ao espaço, sendo essencial para o Programa Espacial Brasileiro. É o mais importante dos dois únicos centros de lançamento aeroespaciais; o outro, destinado apenas para foguetes pequenos, é o Centro de Lançamento da Barreira do Inferno, próximo a Natal, no Rio Grande do Norte.

  Em 2019, o Brasil assinou com os Estados Unidos da América (EUA) o Acordo de Salvaguardas Tecnológicas (AST), o qual, entre outras disposições, permite aos EUA que utilizem a Base de Alcântara para o lançamento de seus foguetes e satélites. Apesar das críticas de que o AST possa importar uma entrega da Base a outro país, afetando a soberania nacional, o acordo estipula benefícios mútuos para ambos os países. Além de a base poder ser explorada para ações espaciais de companhias estadunidenses, o acordo protege interesses nacionais, possibilitando um maior desenvolvimento na área.

  Sem o acordo, a impossibilidade de lançamento na Base de Alcântara de satélites com tecnologias norte-americanas inviabilizaria a quase totalidade das operações na base, uma vez que 80% dos objetos espaciais do mundo possuem componentes oriundos dos EUA. Além disso, a intenção é que a Base não sirva exclusivamente para lançamentos norte-americanos, mas sim que seus serviços de lançamento sejam garantidos em nível global, uma vez que se trata de uma das bases mais bem localizadas de todo o mundo. O uso comercial da Base é estratégico para o Brasil, e esse tipo de acordo de salvaguardas tecnológicas é algo bastante comum entre as nações.

  O assunto dessas páginas introdutórias, a respeito do lançamento de foguetes ao espaço, evidenciando condições favoráveis e desfavoráveis a serem levadas em consideração na determinação dos melhores pontos do globo para esse tipo de tarefa, induz cogitações a respeito da importância de estudos sobre esferas, já que o planeta possui um formato muito similar ao de uma esfera. Assim, desperta-se a curiosidade dos alunos e já se indica uma das muitas aplicações práticas existentes no exame das propriedades geométricas das esferas.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Levando em consideração a informação quanto à velocidade de rotação da Terra no nível da Base de Alcântara e a velocidade no nível do Cabo Canaveral, desafie os alunos a descobrir o comprimento e o raio das circunferências delimitadas pelos paralelos que passam nesses dois pontos. Em seguida, reúna os alunos em grupos para que discutam sobre os valores obtidos e os cálculos efetuados, para que, depois, apresentem as conclusões para toda a sala.

  Resolução e comentários

  No nível da Base de Alcântara, a velocidade é 1 674 km/h, de modo que, ao longo de um dia (24 h), que representa uma rotação completa, a distância percorrida por um dado ponto na superfície é $1\,674 \cdot 24 = 40\,176$. Desse modo, o comprimento da circunferência, no nível da Base de Alcântara, é aproximadamente 40 176 km. Assim, temos:

  $$2\pi r = 40\,176 \text{ km} \Rightarrow r \simeq 6\,397{,}45 \text{ km}$$

  Para determinar o raio r da circunferência, adotou-se a aproximação $\pi \simeq 3{,}14$.

  Por raciocínio análogo, obtêm-se, no nível do Cabo Canaveral, uma circunferência de 35 251,2 km e um raio aproximado de 5 613,25 km.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O conteúdo abordado nas páginas de abertura permite estabelecer conexões com o tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**. Pensar nos

EM MODERNA

potenciais para exploração aeroespacial no nosso país e conhecer os projetos técnicos nesse sentido, bem como o desenvolvimento científico e as conjunturas sociopolíticas que permeiam o tema, desperta um novo senso de compreensão ao lidar com tecnologias e ao avaliar a importância da ciência em seus desenvolvimentos.

O uso da tecnologia atrelada à ciência para a interpretação da dinâmica da vida no Cosmos vai ao encontro da **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

Ademais, ao avaliar os dados obtidos e suas possíveis implicações no mundo, propondo soluções para problemas globais e divulgando esses resultados por meio de diferentes mídias, aborda-se a **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprias das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

Além disso, as tarefas presentes nesse tema contemplam a habilidade **EM13MAT309** ao levar os alunos a resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de esferas em situações reais. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Sala dos professores

O contexto abordado nas páginas de abertura permite o desenvolvimento de um trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Física**. Verifique a viabilidade de ser realizada com os alunos uma dinâmica que envolva o funcionamento de um foguete, abordando aspectos relacionados, por exemplo, à sua constituição (partes que o formam), bem como conceitos físicos por trás de seu lançamento, avaliando, entre outros assuntos, os motivos pelos quais é tão mais interessante promover lançamentos em regiões mais próximo à linha do Equador do que dos polos.

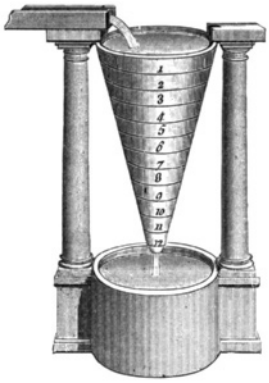
O conteúdo dessas páginas também permite um trabalho em conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Geografia**. Para tanto, pode-se estabelecer uma conversa a respeito das possíveis implicações geopolíticas decorrentes do Acordo de Salvaguardas Tecnológicas assinado entre Brasil e Estados Unidos, permitindo a este último que utilize a Base de Alcântara para o lançamento de foguetes e satélites produzidos por suas companhias. Outra possibilidade é que sejam apresentados textos críticos, notícias e dados que mostrem os avanços recentes da indústria aeroespacial mundial e os impactos que tudo isso importa nas configurações políticas entre as nações.

Página 133

- A imagem da página traz a indicação de que o planeta Terra tem o formato aproximado de uma esfera. Enfatize aos alunos o termo "aproximado", explicando que, em realidade, o formato da Terra (e de praticamente todos os outros planetas) se assemelha mais a uma figura conhecida como "geoide". O geoide tem a forma muito parecida com a da esfera, mas é mais achatada nos polos.

  Essa pode ser uma boa oportunidade para trazer à tona o fato de que as figuras geométricas, em geral, não existem em perfeição na natureza ou sequer em objetos criados pelo ser humano. As figuras geométricas são abstrações e idealizações que, para fins práticos de viabilização do estudo, generalizam certas figuras mais ou menos similares que são recorrentes na realidade. No entanto, não existem objetos físicos totalmente esféricos, por exemplo, pois, por mais perfeitos que certos objetos possam parecer aos olhos e ao tato, sempre existem deformações, saliências ou pequenas ranhuras, ainda que microscópicas, que fazem com que sua forma não seja esférica com uma precisão infinita, como deveria ser em uma esfera geométrica ideal. Essa constatação, aliás, é uma das observações que levaram Platão a desenvolver sua famosa teoria a respeito do Mundo das Ideias que, em síntese, diz que existem objetos abstratos perfeitos dos quais a realidade até pode se aproximar cada vez mais, mas sem nunca conseguir alcançar em totalidade. A admiração de Platão e de outros filósofos gregos pela Geometria e a consciência de sua importância na compreensão da realidade foram celebradas na inscrição do pórtico da Academia Platônica: "Que não entre aqui quem não souber Geometria".
- Ao trabalhar com os sólidos geométricos envolvidos na obtenção da fórmula do volume da esfera pelo procedimento apresentado, comente em momento

oportuno, que, além do cilindro, já conhecido pelos alunos por ter sido abordado em outros temas, eles são tradicionalmente conhecidos como "clepsidra" e "anticlepsidra". A clepsidra, constituída pela junção dos vértices de dois cones de mesmo tamanho, mas em posições opostas, tem esse nome em razão de um antigo instrumento de medição de tempo muito similar a uma ampulheta, mas que funciona à base de água, e não de areia. O nome provém do grego antigo *kleptein* ("ocultar", "roubar") + *hydôr* ("água"): literalmente, "ladrão de água".


BETTMANN/GETTY IMAGES

Clepsidra. Relógio de água.

A anticlepsidra, por sua vez, é obtida pelo sólido que "sobra" de uma clepsidra quando ela é retirada de um cilindro que a contenha e que possua mesma altura e mesmo raio de base que ela. Como demonstrado, a anticlepsidra tem volume equivalente ao da esfera cujo raio seja de mesmo tamanho que a altura de cada um dos cones que formam a clepsidra correspondente.

Páginas 134 e 135 — Resolvendo por etapas

No trabalho com essas páginas, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Design thinking**. Para tanto, apresente o problema da seção **Resolvendo por etapas** como um desafio antes do início do tema e proponha o problema do boxe **Agora é você quem resolve!** ou outra tarefa similar, para que os alunos resolvam seguindo os passos da metodologia utilizada nessa seção. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é você quem resolve! Resoluções e comentários

2 Resposta pessoal. Inicialmente, calculamos o volume total da taça (V_T), a fim de, em seguida, descobrir o volume ainda disponível em seu interior. As dimensões da taça, conforme indicadas no desenho, são: altura $H = 18$ cm, diâmetro do aro $D = 8$ cm e, portanto, raio do aro $R = 4$ cm.

Como o volume de um cone de altura h e raio da base r é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, o volume total da taça é:

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 18 \simeq 301{,}44$$

Portanto, o volume interno total da taça é, aproximadamente 301,44 cm^3, o que equivale a 301,44 mℓ.

Agora, vamos calcular a capacidade disponível na taça antes de serem acrescentadas as pedras de gelo. Como a parte do volume preenchida com suco é 260 mℓ, a capacidade disponível é, aproximadamente:

$$301{,}44 \text{ m}\ell - 260 \text{ m}\ell = 41{,}44 \text{ m}\ell$$

Calculando o volume de cada pedra de gelo (V_G) de diâmetro $d = 2$ cm, ou seja, de raio $r = 1$ cm, temos:

$$V_G = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi 1^3}{3} \simeq 4{,}187$$

Portanto, o volume de cada pedra de gelo é 4,187 cm^3, o que equivale a 4,187 mℓ.

Assim, na capacidade disponível cabem, a princípio, $\frac{41{,}44}{4{,}187} \simeq 9{,}897$ pedras de gelo na taça. Contudo, os gelos não podem ser divididos em pedaços, de modo que a parte decimal não convém.

Observe que, apesar de o número inteiro 10 estar mais próximo do valor 9,897 do que o número 9, o "arredondamento", nesse caso, deve se dar por baixo, e não pela aproximação numericamente mais próxima. Isso porque qualquer quantidade de gelo superior a 9,897 faria com que o suco transbordasse.

Portanto, Amanda poderá acrescentar, no máximo, 9 pedras de gelo sem que o suco transborde da taça.

Páginas 136 e 137

Sala dos professores

Ao trabalhar com a tarefa resolvida **R2**, verifique a conveniência de desenvolver um trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Física**. Nesse trabalho, apresente em mais detalhes o conceito de densidade, explicando sua importância em ramos da Física, da Química e das engenharias em geral. Avalie a viabilidade de, por meio de réguas e balanças (ou estimativas), promover uma dinâmica em que os alunos avaliem a densidade média de diferentes objetos, como cadernos, bolas de bilhar, bolas de isopor etc.

Caso julgue pertinente, diga aos alunos que os objetos mais densos no Universo são as estrelas de nêutrons e os buracos negros. No planeta Terra, a substância mais densa conhecida é o irídio, que é quase duas vezes mais pesado do que uma mesma quantidade em chumbo e mais de 22 vezes mais pesado do que a mesma quantidade em água. Meros 10 mℓ de irídio pesam cerca de 226 g (quase um quarto de quilograma). Um quilograma ocupa menos de 50 mℓ.

MODELO

- Na tarefa **7**, chame a atenção dos alunos para o fato de que propriedades básicas de certas formas geométricas são características essenciais em aplicações práticas na indústria e na engenharia. No caso dos reservatórios, qualquer outro formato que não fosse esférico ocasionaria uma pressão maior do gás em seu interior, o que colocaria em risco o reservatório, ou necessitaria de mais investimento orçamentário no reforço das paredes interiores. Outra propriedade das esferas levadas em consideração em casos como esse é a de que, entre as formas capazes de conter uma mesma capacidade volumétrica, a esfera é a de menor área de superfície, de modo que são gastos menos materiais na sua construção.

Página 139

BNCC A tarefa **15** fornece subsídios para que se trabalhe com o tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**. Os recursos tecnológicos estão presentes em diversos aspectos nas ciências, tanto para seu desenvolvimento quanto para sua divulgação. Entre outras funcionalidades, os planetários são ótimos recursos para mostrar os avanços científicos, contando, muitas vezes, com apresentações abertas à população em geral. Essa utilização da tecnologia para a disseminação do conhecimento científico vai ao encontro do que estabelece a **Competência geral 5** da BNCC, possibilitando a compreensão de tecnologias para a disseminação de informações e conhecimentos de relevância geral.

Sala dos professores

A tarefa **19** permite um trabalho em conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com professores dos componentes curriculares **História** e **Geografia**. Experimente levar para a sala de aula textos e informações sobre a história do Meridiano de Greenwich, incentivando os alunos a pesquisar as razões históricas que levaram aquela faixa a ser escolhida como o "marco zero", e não qualquer outro ponto do globo terrestre. Uma possibilidade é trabalhar com o livro Longitude, da divulgadora científica estadunidense Dava Sobel, no qual se explica em detalhes as dificuldades de determinar meridianos de longitude antes da invenção de relógios de alta precisão ao final do século XVIII e os perigos que isso significava para as embarcações da época, as quais rumavam praticamente às cegas, sujeitas a erros de cálculo, doenças e escassez de mantimentos, pondo em risco vidas humanas e até mesmo nações, visto que a economia de muitos países dependia fortemente dessas navegações.

- A tarefa **19** trata dos meridianos e de suas relações com fusos horários. Leia para eles o seguinte texto, extraído do livro A ordem do tempo, do físico e divulgador científico Carlo Rovelli.

[...]

A função dos relógios é indicarem todos a mesma hora. Mas essa ideia também é mais moderna do que podemos imaginar. Durante séculos, enquanto se viajava a cavalo, a pé ou de carruagem, não havia motivo para sincronizar os relógios de um lugar para o outro. Existia um ótimo motivo para não fazê-lo: meio-dia é, por definição, o momento em que o Sol está mais alto no céu. Cada cidade ou aldeia tinha uma meridiana que marcava o momento em que o Sol estava a meio-dia e permitia regular o relógio do campanário, visível a todos. O Sol não chega ao meio-dia no mesmo momento em Lecce, Veneza, Florença ou Turim, porque vai de leste para oeste. Meio-dia chega primeiro em Veneza e bem mais tarde em Turim, e durante muitos séculos os relógios de Veneza estiveram uma boa meia hora adiantados em relação aos de Turim. Cada cidadezinha tinha sua "hora" peculiar. A estação de Paris mantinha uma hora própria um pouco atrasada em relação ao restante da cidade por cortesia aos viajantes.

No século XIX, chega o telégrafo, os trens se tornam comuns e rápidos, e passa a ser importante sincronizar bem os relógios de uma cidade para outra. É difícil organizar horários ferroviários se cada estação tiver uma hora diferente das outras. Os Estados Unidos são o primeiro país a tentar padronizar a hora. A proposta inicial é estabelecer uma hora universal para todo o mundo. Chamar, por exemplo, de "doze horas" o momento em que é meio-dia em Londres, de modo que o meio-dia corresponda às doze horas em Londres e a aproximadamente dezoito horas em Nova York. A proposta não agrada, porque as pessoas são apegadas às horas locais. O acordo é obtido em 1883, com a ideia de dividir o mundo em fusos "horários" e padronizar a hora só dentro de cada fuso. Desse modo, a discrepância entre as doze horas do relógio e o meio-dia local compreende no máximo em torno de trinta minutos. Aos poucos, a proposta é aceita no restante do mundo, e os relógios começam a ser sincronizados entre cidades diferentes.

[...]

ROVELLI, Carlo. *A ordem do tempo*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2018. p. 56.

- Ao final do trabalho com esse tema, avalie a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

12 Uma aplicação de volume: adulteração de combustíveis

Objetivo específico

- Resolver problemas envolvendo o cálculo do volume de elementos presentes no combustível.

Páginas 140 e 141 **Abasteça sem ser enganado**

- Esse tema apresenta o cálculo do volume de elementos presentes no combustível e explica como é realizado o teste de proveta, que é feito utilizando embalagens com formatos cilíndricos. Nessa abordagem, de maneira intuitiva, são relacionadas ideias de porcentagem, volume, capacidade e densidade.

Sala dos professores

O assunto trabalhado nesse tema possibilita um trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Química**, a fim de abordar o processo de obtenção dos diferentes tipos de combustíveis, preferencialmente o etanol. Verifique a possibilidade de demonstrar aos alunos a realização do "teste de proveta" com o professor de **Química**, para que ele possa explicar o processo químico envolvido no experimento.

BNCC

Ao solicitar aos alunos que utilizem estratégias matemáticas para interpretar problemas no âmbito da adulteração de combustíveis, aborda-se aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Além disso, ao possibilitar um trabalho em conjunto com o professor do componente curricular **Química**, pode-se levar os alunos a construir reflexões e questionamentos a respeito dos processos produtivos de modo a minimizar impactos socioambientais, abordando, assim, aspetos da **Competência específica 1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global."

- O contexto dessas páginas permite estabelecer relação com o tema contemporâneo transversal **Educação fiscal**, possibilitando questionamentos sobre os direitos de um consumidor que se sinta lesado ao adquirir um combustível de baixa qualidade ou adulterado. Entretanto, é importante destacar que, para registrar reclamações sobre eventuais problemas causados no veículo em razão da má qualidade do produto – nesse caso, o combustível – e do serviço adquirido, o Programa de Proteção e Defesa do Consumidor (Procon) orienta o consumidor a pedir e guardar a nota fiscal sempre que abastecer, pois ela é um documento necessário caso haja um pedido judicial de indenização. O Procon orienta também que é importante ter em mãos notas fiscais do conserto do veículo, se for o caso.

Resoluções e comentários

A No teste da proveta, 50 mℓ da gasolina a ser testada são colocados em uma proveta de 100 mℓ e são adicionados 50 mℓ de solução aquosa salina. Para sabermos a quantidade de etanol na gasolina testada, basta verificar a quantidade de álcool que foi retirado dela. Nesse caso, o volume da fase aquosa passou de 50 mℓ para 63 mℓ, resultando em 37 mℓ de gasolina. Portanto, 13 mℓ de álcool foram extraídos da gasolina.

Calculando a porcentagem, temos:

$$x = \frac{V_{\text{álcool}}}{V_{\text{gasolina}}} \cdot 100\% \Rightarrow x = \frac{13}{50} \cdot 100\% \Rightarrow x = 26\%$$

Ou seja, a porcentagem de etanol na gasolina é 26%.

B Sabendo que a proveta tem formato cilíndrico e que o raio tem 15 cm de comprimento, temos:

- Para 50 mℓ:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 50 = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot h \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \frac{50}{7{,}065} \Rightarrow h \simeq 7$$

- Para 100 mℓ:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 100 = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot h \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \frac{100}{7{,}065} \Rightarrow h \simeq 14$$

Portanto, para 50 mℓ, a altura é 7 cm e, para 100 mℓ, 14 cm.

C Considerando que 100 mℓ está a uma altura de 14 cm, a solução aquosa que corresponde a 50% da mistura está a uma altura de 7 cm. No caso analisado, a parte ocupada pela solução aquosa corresponde a 9 cm de altura, e 2 cm de altura na proveta correspondem à quantidade de álcool na gasolina. Utilizando uma regra de três simples, temos:

Altura (cm)	Volume (mℓ)
7 cm	50 mℓ
2 cm	x

$$7x = 2 \cdot 50 \Rightarrow x = \frac{100}{7} \Rightarrow x \simeq 14{,}29$$

$$x = \frac{V_{\text{álcool}}}{V_{\text{gasolina}}} \cdot 100\% \Rightarrow x = \frac{14{,}29}{50} \cdot 100\% \Rightarrow x = 28{,}58$$

Logo, o percentual é de 28,58.

Portanto, não está de acordo com o percentual em vigor que estabelecia o limite de 27%.

EDIÇÃO DOCENTE

13 Projeções cartográficas

Objetivos específicos

- Identificar os diferentes tipos de mapas construídos para representar o globo terrestre.
- Compreender a relação entre a superfície real e a representada em uma superfície plana nas representações cartográficas.
- Identificar semelhanças e diferenças entre os tipos de projeções cartográficas.
- Compreender aspectos matemáticos utilizados na elaboração de projeções cartográficas.

Esse tema aborda o conteúdo de projeções cartográficas, classificação dos diferentes tipos de mapas do globo terrestre quanto à superfície e quanto ao grau de deformação, elementos de localização e comparação de tamanho das áreas dos países. Nele, busca-se proporcionar aos alunos uma ampliação dos saberes relacionados aos diferentes tipos de mapas, evidenciando a importância dos mapas nas navegações, no comércio e para expressar distâncias e localizações.

Explique aos alunos que a Cartografia pode ser descrita como um conjunto de estudos, operações e técnicas artísticas e científicas, elaboradas com base em resultados de observações diretas ou de análises documentais, com a finalidade de criar representações gráficas geográficas em formato de mapas. Destaque que a Matemática constitui a base para o estudo e construção de representação gráfica da superfície terrestre e dos objetos geográficos. Conceitos matemáticos de escala, proporções, coordenadas geográficas, projeções cartográficas, fuso horário e outros são fundamentais para a leitura de mapas, conforme será estudado nesse tema.

Sugestão de avaliação

Procure identificar os conhecimentos prévios dos alunos acerca dos assuntos que serão abordados no tema, visto que muitos aspectos já podem ter sido tratados em outras disciplinas. Algumas sugestões de questionamentos são: O que vocês entendem por Cartografia? Quais são os tipos de mapas que vocês conhecem? Para que serve um mapa? Em sua opinião, qual seria a melhor forma de representar o globo terrestre por meio de um mapa plano? Qual é a relação que vocês enxergam entre a Cartografia e a Matemática?

Verifique a possibilidade de levar para a sala de aula um globo terrestre e um mapa plano. Peça ao alunos que discutam sobre as diferenças entre eles e quais consideram mais adequado. Em seguida, solicite a eles que, em grupos de três ou quatro integrantes, conversem sobre como poderiam reproduzir o desenho do mapa do globo no papel, sem perder a essência.

Além disso, como essa tarefa será feita em grupo, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, entender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 142 e 143 Mapear é impreciso

- Durante muito tempo, os cartógrafos procuravam uma maneira de construir um mapa plano do globo terrestre ou de uma região do globo com a propriedade de que todas as distâncias entre diferentes lugares se mantivessem inalteradas. Mais especificamente, o que se buscava provar era: É possível construir um mapa plano do globo terrestre, ou de uma parte do globo, com uma escala fixa, ou seja, sem distorções? É possível construir um mapa plano para o qual a distância entre quaisquer dois de seus pontos é sempre igual a um múltiplo fixo da distância ao longo dos pontos correspondentes no globo, medida ao longo do círculo máximo por esses pontos?

  A busca por respostas para essas questões durou até 1775, quando o matemático Leonhard Euler (1707-1783) demonstrou a impossibilidade desse intento.

  Explique aos alunos que, no decorrer da história, diversos tipos de mapa-múndi foram elaborados com o intuito de amenizar as distorções causadas pela planificação do globo terrestre. Se possível, apresente imagens de mapas em diferentes épocas e contextos.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a se inteirar das linhas gerais do assunto das páginas de abertura, registrando possíveis dúvidas ou complementando informações. Em seguida, oriente-os a conversar aos pares sobre os conteúdos emergentes para que, depois, apresentem as conclusões para toda a sala. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Ao relacionar o tema dessas páginas à história do matemático Gauss, os alunos são levados a utilizar os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade, indo ao encontro do que diz a **Competência geral 1** da BNCC.

Além disso, ao falar a respeito da profissão de

MODERNA

cartógrafo, eles podem perceber a aplicação da Matemática em diversos setores do mercado de trabalho, permitindo estabelecer conexão com o tema contemporâneo transversal **Trabalho**.

Página 144

- Se julgar conveniente, comente com os alunos que a ciência da Cartografia apresenta alguns ramos, como a Cartografia temática, que tem por objetivo representar as informações geográficas referentes a um ou vários fenômenos físicos ou sociais de todo o planeta ou de uma parte dele. Como exemplo de mapas temáticos, podemos citar os geológicos, de vegetação, climáticos etc.

> A palavra cartografia tem origem na língua portuguesa, tendo sido registrada pela primeira vez em 1839 numa correspondência, indicando a ideia de um traçado de mapas e cartas. Hoje entendemos cartografia como a representação geométrica plana, simplificada e convencional de toda a superfície terrestre ou de parte desta, apresentada através de mapas, cartas ou plantas.
>
> Por meio da cartografia, quaisquer levantamentos (ambientais, socioeconômicos, educacionais, de saúde, etc.) podem ser representados espacialmente, retratando a dimensão territorial, facilitando e tornando mais eficaz a sua compreensão.
>
> [...]
>
> *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 16.

- Em razão dos avanços tecnológicos, as técnicas de coleta de informações para a elaboração e o aperfeiçoamento dos mapas estão cada vez mais aprimoradas. O geoprocessamento e os Sistemas de Informações Geográficas (SIG) são um exemplo disso. A título de curiosidade, comente com os alunos que geoprocessamento é um conjunto de técnicas que relacionam a Matemática e a computação, objetivando auxiliar na coleta, organização e interpretação de diversas informações geográficas. Do mesmo modo, os SIG são formados por ferramentas (*softwares*, *hardwares* e banco de dados informatizados) responsáveis pela integração e operação da grande quantidade de informações e dados geográficos coletados por diferentes pesquisadores.

Sala dos professores

Avalie a possibilidade de elaborar uma aula em conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **História**. Uma possível abordagem é discutir os contextos históricos e econômicos em que surgiram em decorrência das necessidades das grandes navegações e suas influências para a Cartografia, da maneira como a conhecemos atualmente. Fale da influência que as navegações exerceram para que se intensificassem os esforços na confecção de mapas cada vez mais informativos e confiáveis. Proponha aos alunos que pesquisem e dialoguem sobre acontecimentos históricos que envolvem o tema.

Caso julgue pertinente, acesse uma Linha do Tempo das Navegações e mais informações sobre Cartografia no *site* a seguir. Disponível em: <https://www.laphamsquarterly.org/roundtable/first-you-make-maps>. Acesso em: 8 jun. 2020.

- Além disso, comente com os alunos sobre o Sistema Global de Navegação por Satélite lendo o texto a seguir.

> Sistema Global de Navegação por Satélite (GNSS) refere-se à constelação de satélites que possibilita o posicionamento em tempo real de objetos, bem como a navegação em terra ou mar. Esses sistemas são utilizados em diversas áreas, como mapeamentos topográficos e geodésicos, aviação, navegação marítima e terrestre, monitoramento de frotas, demarcação de fronteiras, agricultura de precisão, entre outros usos.
>
> A performance desses sistemas é avaliada segundo os seguintes critérios:
>
> - precisão: a diferença entre a medição recebida e a posição real;
> - integridade: a capacidade do sistema soltar um alerta quando detectar uma medição anormal;
> - continuidade: capacidade do sistema trabalhar sem interrupções;
> - disponibilidade: percentual do tempo que o sistema preenche os requisitos anteriores (precisão, integridade e continuidade).
>
> [...]
>
> *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 20.

Páginas 145 a 147

BNCC O assunto abordado nesse tema promove o estudo sobre a classificação dos sistemas de projeções cartográficas de acordo com a deformação de ângulos e áreas de superfícies, contemplando a habilidade **EM13MAT509** da BNCC. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Páginas 148 a 150

- A tarefa **2**, da página **148**, aborda o símbolo da Organização das Nações Unidas (ONU). Explique aos alunos que a ONU é uma organização internacional formada por países que se reuniram voluntariamente, em 1945, em decorrência da Segunda Guerra Mundial, para trabalhar pela paz e pelo desenvolvimento mundiais. De modo geral, a ONU tem como objetivo a cooperação em relação ao direito internacional, à segurança

MODERNA

internacional, ao desenvolvimento econômico e sustentável, ao progresso social, aos direitos humanos e à paz mundial. Ou seja, seu principal objetivo é manter a cooperação entre todas as nações do mundo. No *site* da ONU Brasil é possível acessar propósitos e princípios básicos aceitos por todos os países-membros da organização, entre outras informações, notícias e trabalhos desenvolvidos em diversas frentes de atuação. Disponível em: <https://nacoesunidas.org/>. Acesso em: 23 jun. 2020.

BNCC A tarefa **2** propicia reflexões sobre a cooperação entre diferentes nações, a promoção do respeito ao outro, dos direitos humanos e da cultura de paz na sociedade, em âmbito internacional, contemplando, assim, aspectos da **Competência geral 9** da BNCC.

- Converse com os alunos sobre o fato de que representar um mapa no plano é apenas um dos inúmeros desafios que esse tema proporciona. Faça os seguintes questionamentos: Já coloriram um mapa? Quantos lápis seriam necessários se, para colorir o mapa, as regiões vizinhas não pudessem ter a mesma cor? Depois, leia para eles o texto a seguir sobre o teorema das quatro cores.

> [...] Tudo começou em 1852, com Francis Guthrie, estudante de pós-graduação do University College, em Londres. Ele escreveu uma carta a Frederick, seu irmão mais novo, descrevendo o que pensava ser um simples enigmazinho. Guthrie vinha tentando colorir um mapa dos condados ingleses e descobriu que conseguia fazê-lo usando 4 cores, de modo que condados vizinhos jamais tivessem a mesma cor. Ele se perguntou se esse fato seria uma peculiaridade do mapa da Inglaterra, ou algo mais geral. "Será que é possível colorir qualquer mapa no plano com 4 cores (ou menos) de modo que as regiões que possuem fronteiras comuns jamais tenham a mesma cor?", escreveu. Passaram-se 124 anos até que essa pergunta fosse respondida, e mesmo agora, a resposta depende de uma grande quantidade de cálculos feitos por computadores. [...]
>
> STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Trad. Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009. p. 17.

- Proponha aos alunos que tentem colorir um mapa (do Brasil, por exemplo) usando apenas quatro cores, sem que regiões vizinhas tenham a mesma cor.

Página 151 Acessando tecnologias

- Uma sugestão para a realização do trabalho com a seção **Acessando tecnologias** é utilizar o laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se, com antecedência, de que todos os computadores tenham acesso à internet.

Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e atente-se ao fato de que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *site* em questão.

- Esse tipo de abordagem possibilita aos alunos entrarem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.
- Se julgar conveniente, solicite aos alunos que realizem os mesmos procedimentos sugeridos na tarefa **2** considerando, agora, os territórios do Brasil (Brazil) e da Antártica (Antarctica). Oriente-os a destacar cada uma dessas regiões por meio do campo de pesquisa da página. Antes que eles movimentem os territórios indicados, peça que identifiquem qual deles possui a maior área, levando em consideração os destaques apresentados no mapa. É esperado que eles concluam, pelas imagens, que o território da Antártica é muito maior do que o território brasileiro. Em seguida, solicite que movam a área da Antártica para perto do Brasil. Por meio de questionamentos, leve-os a perceber que a diferença entre as áreas das regiões do Brasil e da Antártica não é tão considerável quanto o mapa nos leva a acreditar. Apesar de apresentarem uma diferença de, aproximadamente, 5,5 milhões de quilômetros quadrados nas medidas de suas áreas (o Brasil possui, aproximadamente, 8,5 milhões de quilômetros quadrados de área, enquanto a Antártica possui aproximadamente 14 milhões de quilômetros quadrados), o território da Antártica, na realidade, é bem menor do que aparenta ser quando observamos sua planificação.

- Ao trabalhar com essa seção, verifique a possibilidade de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC A tarefa proposta na seção **Acessando tecnologias** contempla a habilidade **EM13MAT509**, tendo em vista que proporciona aos alunos investigar a deformação de ângulos e áreas provocadas pelas diferentes projeções usadas em Cartografia, com suporte de tecnologia digital.

Essa tarefa tem potencial para desencadear a utilização do recurso tecnológico de forma crítica e reflexiva sobre o tema abordado, conforme sugere a **Competência geral 5** da BNCC.

MODERNA

Agora é com você! **Resoluções e comentários**

1 O aplicativo é interativo e mostra o tamanho preciso dos países. Podemos selecioná-los e comparar o tamanho real entre eles no mapa. Portanto, pode-se dizer que a projeção é equivalente quando permite a utilização da função mover/transportar.

2 Mostre a eles a ferramenta "compasso", no canto inferior esquerdo da tela, que permite ver a mesma região por diferentes ângulos, ou seja, rotacionar a região. Em seguida, permita aos alunos que testem várias combinações e peça que registrem no caderno. Alguns exemplos que podem ser usados são:

Comparação entre as áreas do Cazaquistão e da Austrália

A) No campo de pesquisa, digite o nome de um país "Kazakhstan". Em seguida, pressione ENTER.

B) Clique sobre a região destacada e "transporte-a", de maneira que fique sobre a representação da Austrália.

REPRODUÇÃO/THE TRUE SIZE

A Austrália e o Cazaquistão parecem ter áreas quase de mesmo tamanho, mas, quando são "sobrepostos", nota-se que a Austrália possui um território maior do que o Cazaquistão. A medida da área do Cazaquistão é aproximadamente 2,7 mil km^2 e da Austrália é aproximadamente 7,69 mil km^2, confirmando as conclusões realizadas pela análise visual.

Comparação entre as áreas de Arábia Saudita e Argélia

A) No campo de pesquisa, digite o nome de um país "Saudi Arabia". Em seguida, pressione ENTER.

B) Clique sobre a região destacada e "transporte-a", de maneira que fique sobre a representação da Argélia.

REPRODUÇÃO/THE TRUE SIZE

Nesse caso, a Arábia Saudita e a Argélia parecem ter áreas muito parecidas. Conferindo a medida, verifica-se que a Arábia Saudita possui aproximadamente 2,1 mil km^2 e a Argélia tem aproximadamente 2,3 mil km^2.

De modo geral, os alunos podem concluir que países mais ao sul do mapa parecem maiores quando são transportados para o norte, e o contrário também acontece. Quando a região é movida apenas horizontalmente, não há alteração no modo como é visto seu tamanho. Também é possível concluir que a análise visual é válida quando comparadas as medidas das áreas dos países em km^2.

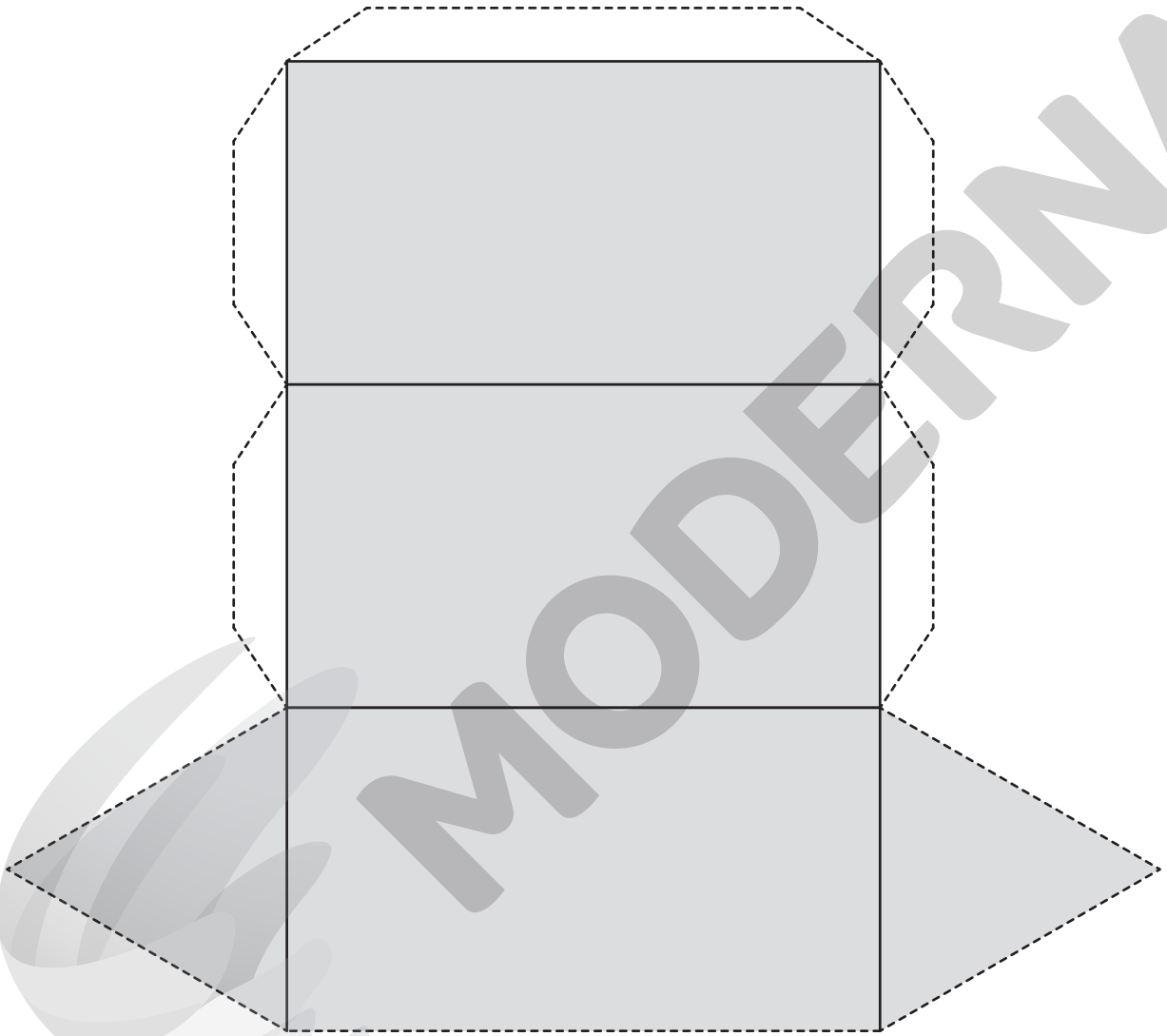
- Ao final do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing**. Solicite aos alunos que construam um mapa mental, para avaliar seu aprendizado, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

Molde do prisma triangular

Referente ao **tema 4**

MODELO



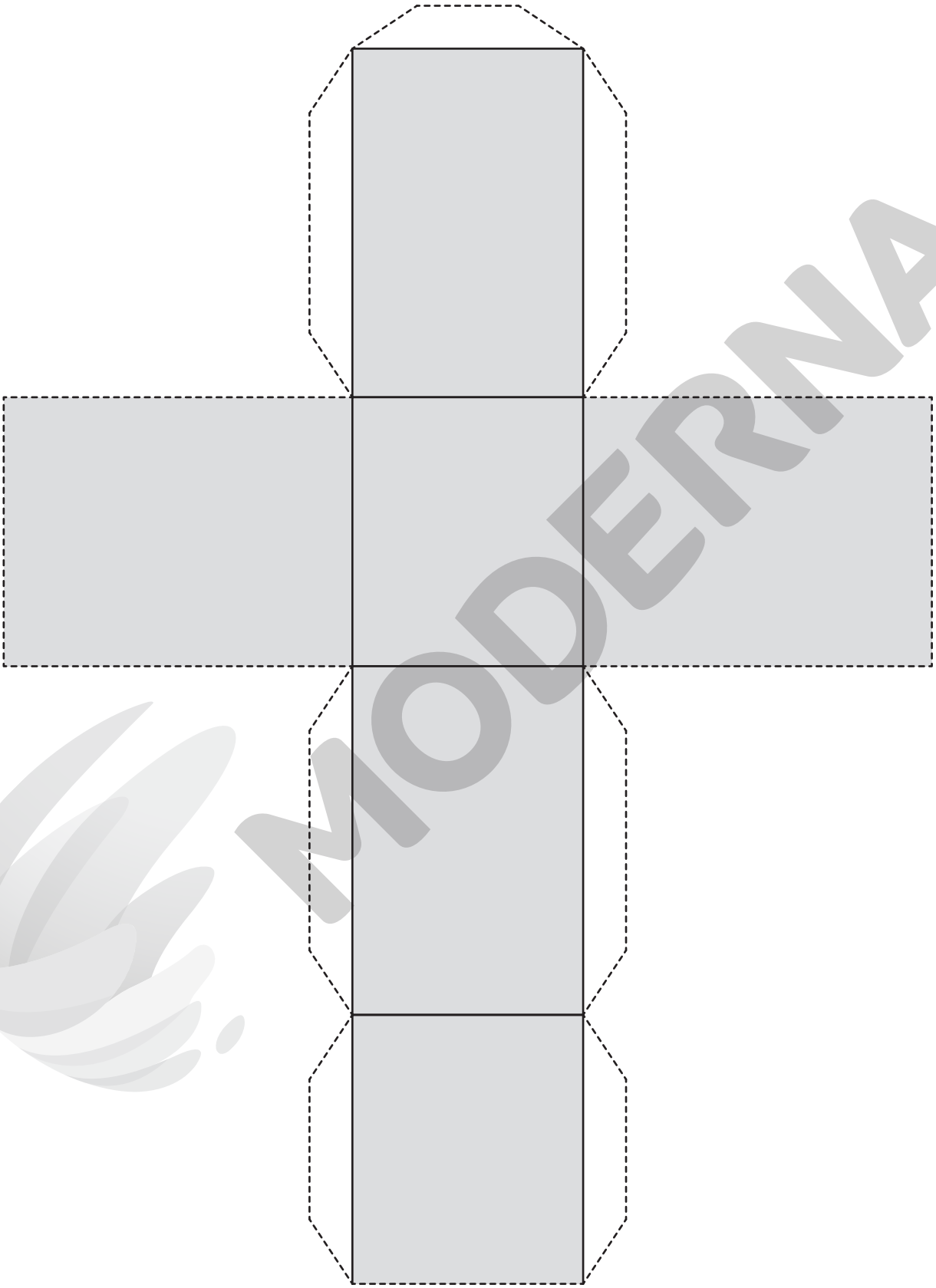
MODERNA

SERGIO L. FILHO

Molde do prisma quadrangular

Referente ao **tema 4**

MODELO



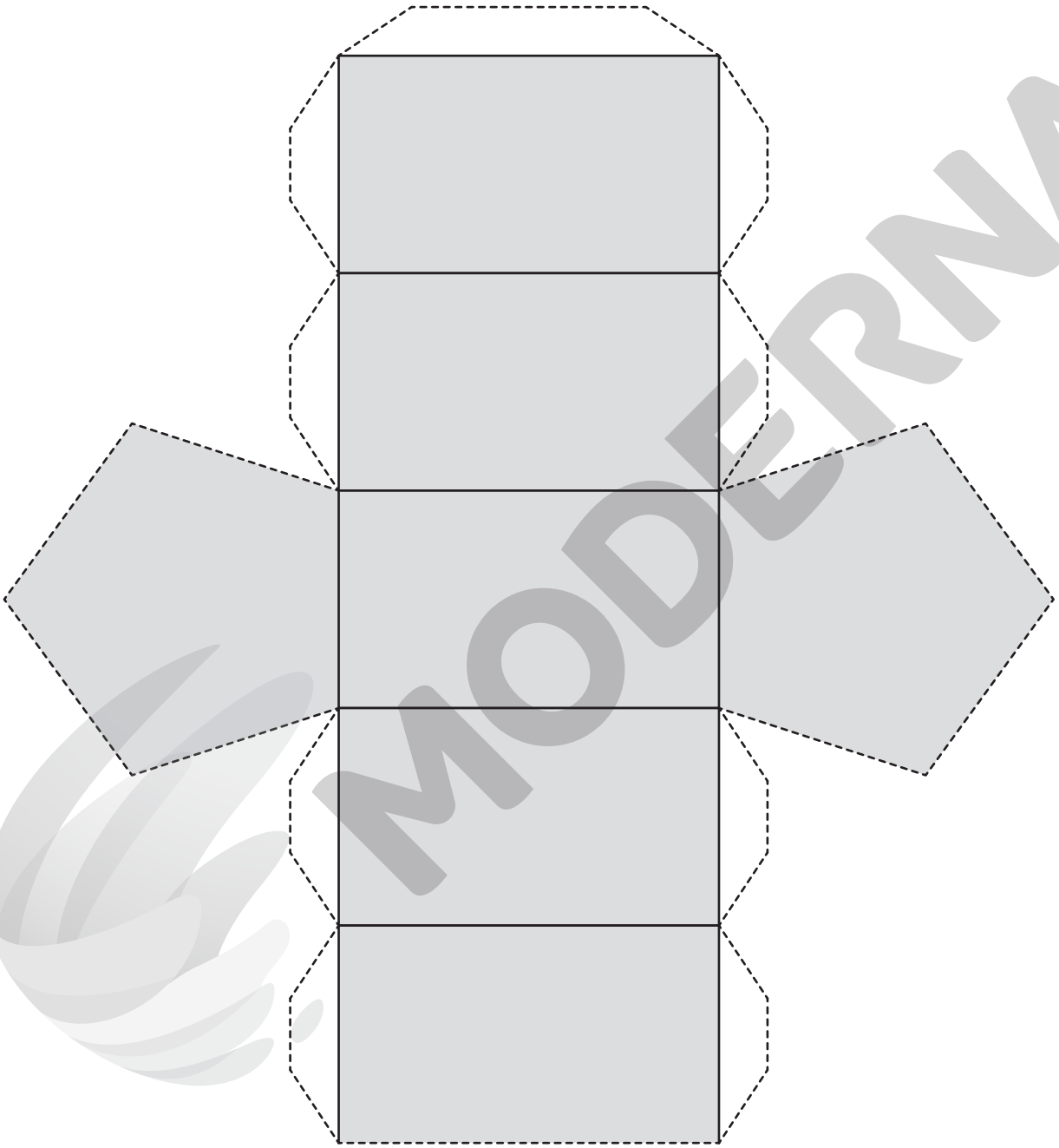
MODERNA

SERGIO L. FILHO

Molde do prisma pentagonal

Referente ao **tema 4**

MODELO



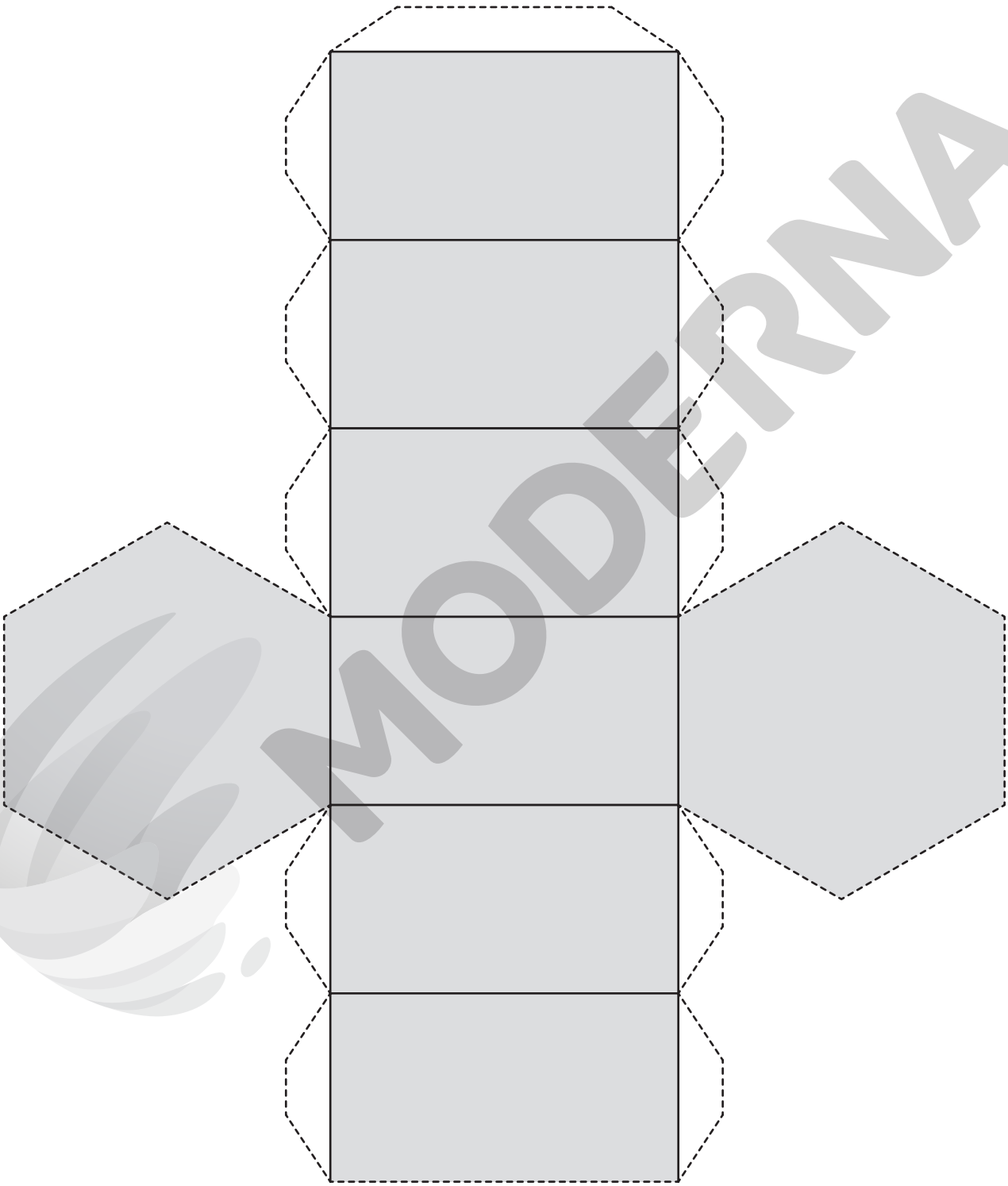
SERGIO L. FILHO

MODERNA

Molde do prisma hexagonal

Referente ao **tema 4**

MODELO



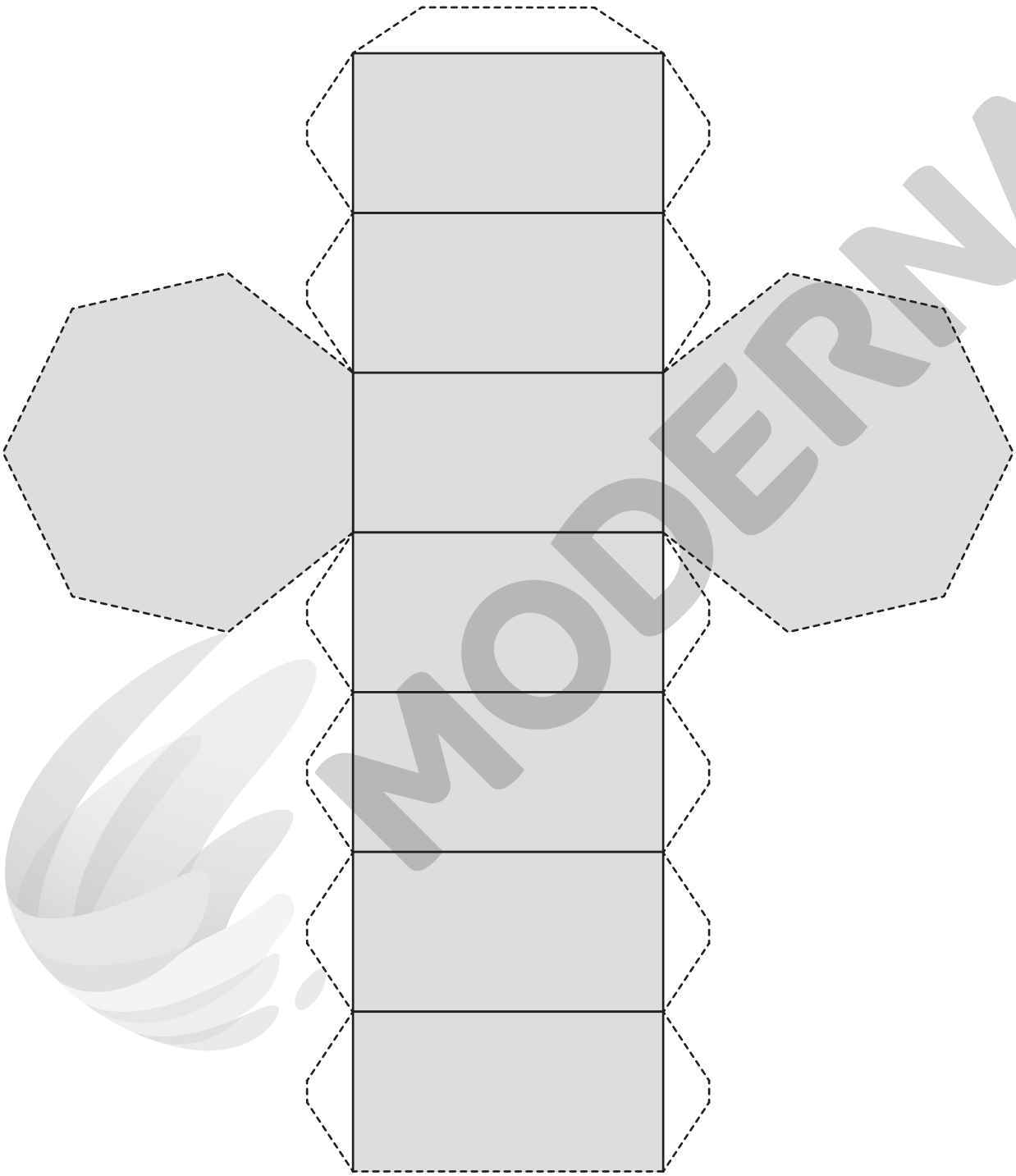
MODERNA

SERGIO L. FILHO

Molde do prisma heptagonal

Referente ao **tema 4**

MODELO



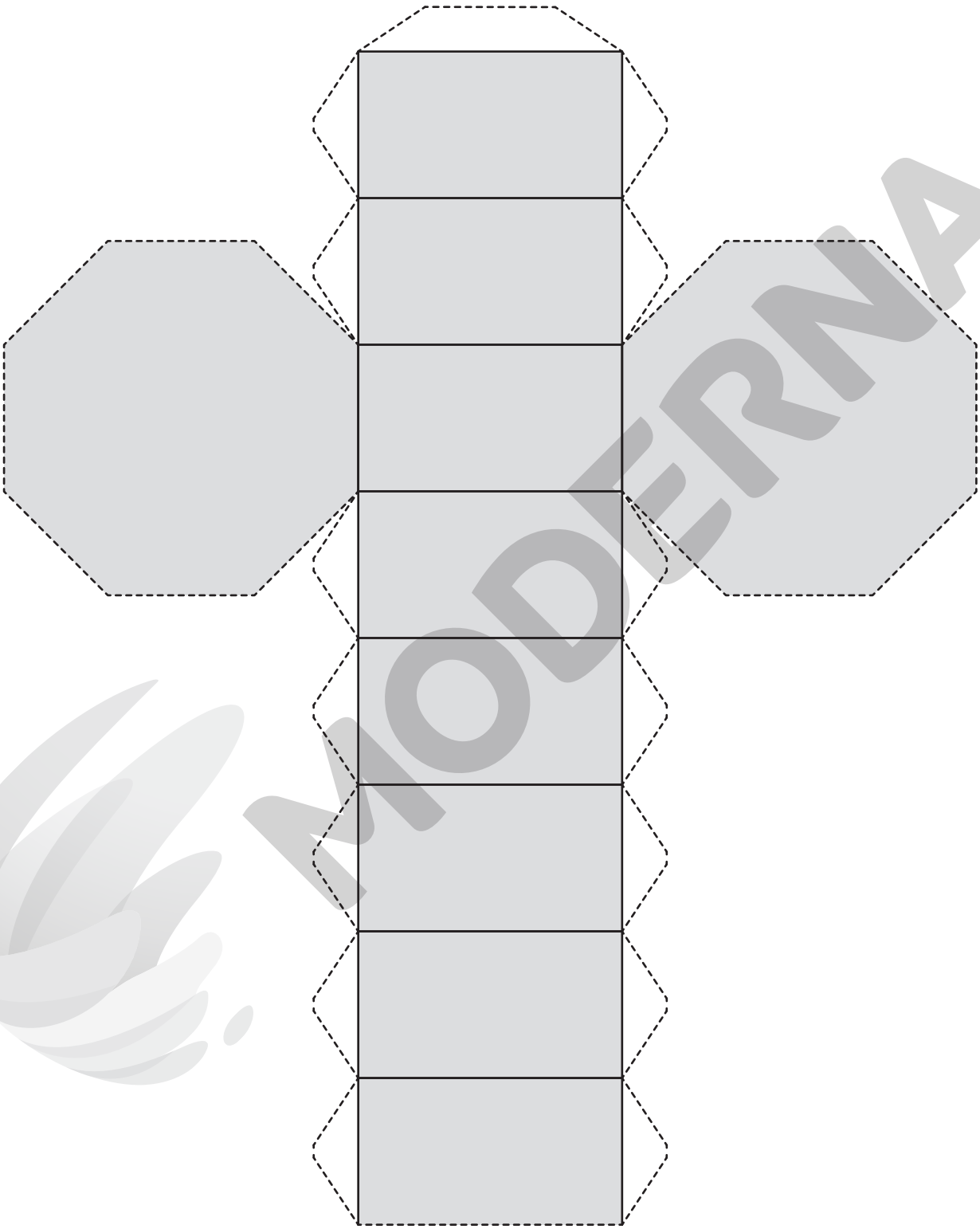
SERGIO L. FILHO

MODERNA

Molde do prisma octogonal

Referente ao **tema 4**

MODELO



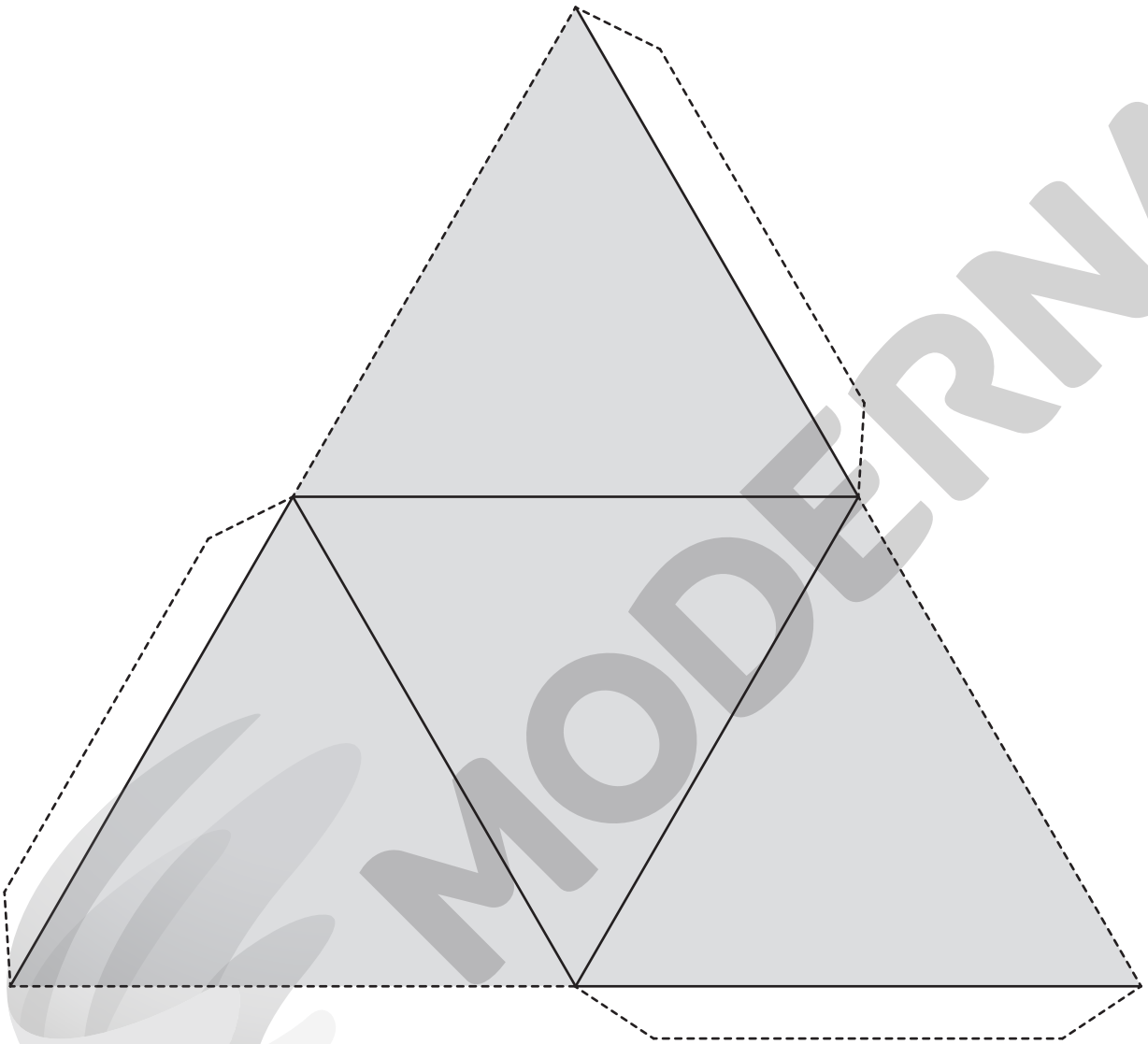
MODERNA

SERGIO L. FILHO

Molde da pirâmide de base triangular

Referente ao **tema 6**

MODELO



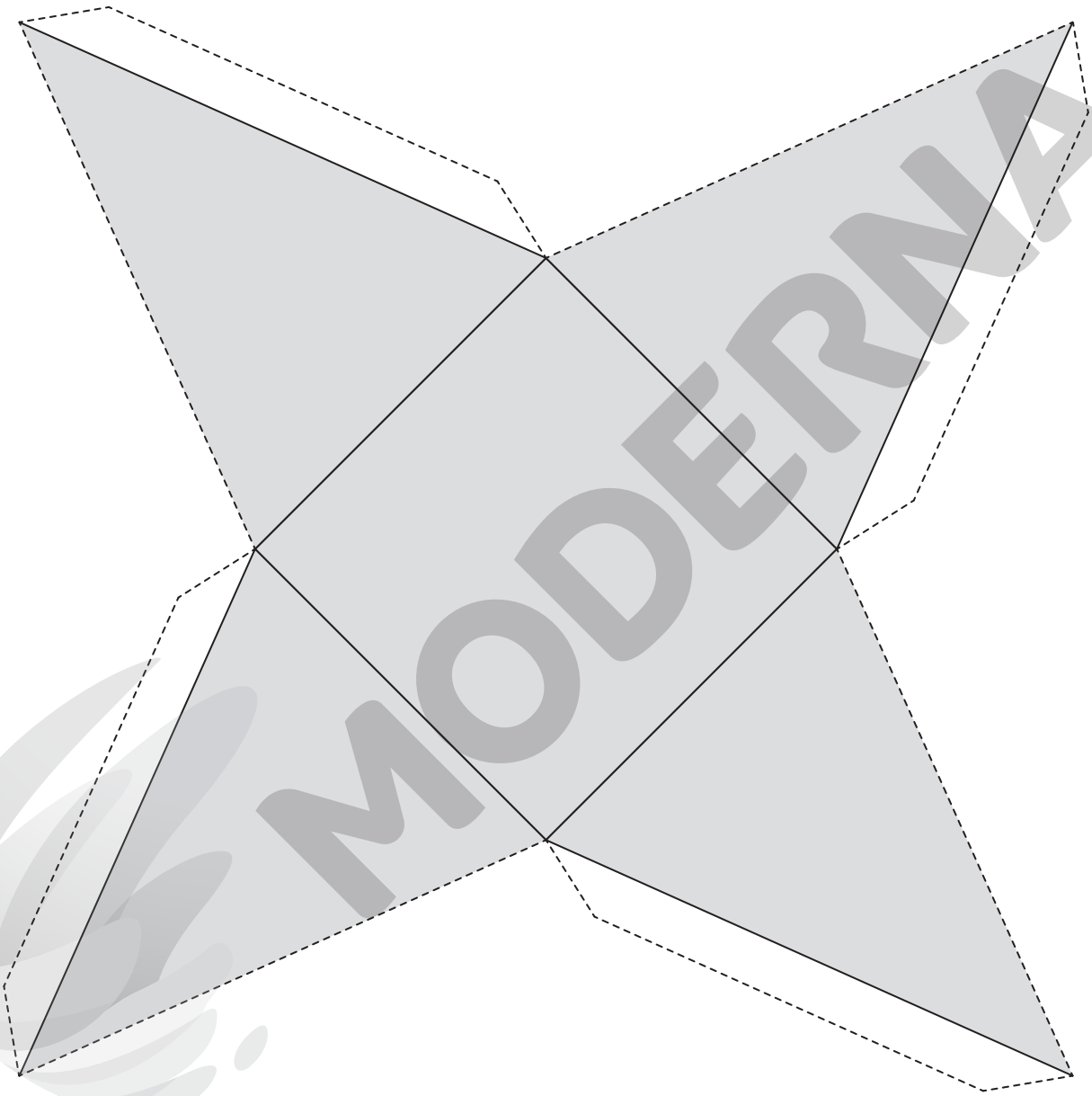
MODERNA

SERGIO L. FILHO

Molde da pirâmide de base quadrada

Referente ao **tema 6**

MODELO



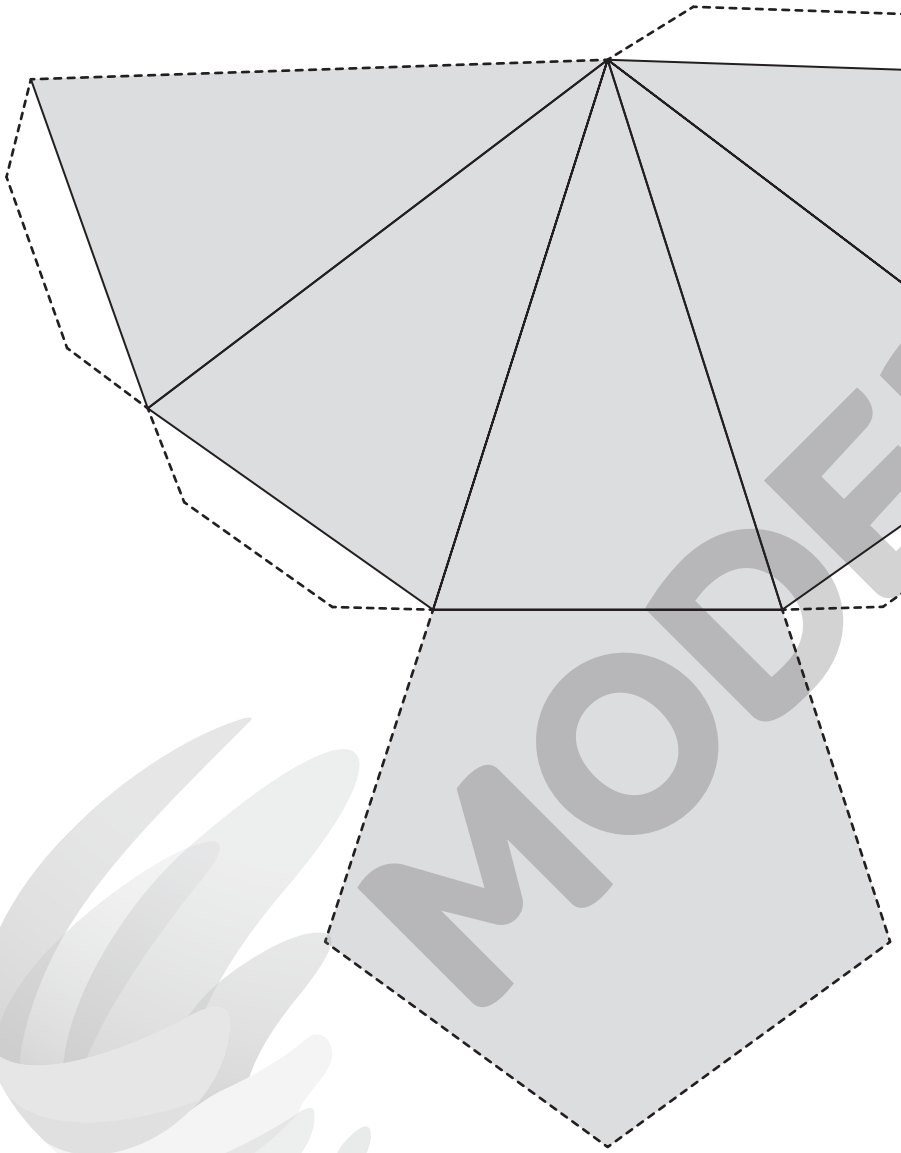
MODERNA

SERGIO L. FILHO

Molde da pirâmide de base pentagonal

Referente ao **tema 6**

MODELO



SERGIO L. FILHO

MODERNA

1 Geometria espacial de posição

1. **a)** $\{a, b, c, d, e, i\}$
b) $\{e\}$
c) $\{a, e, i, o, u\}$
d) $\{a, e\}$

2. **a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $A \cap B = \varnothing$
b) $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ e $A \cap B = \{7, 11\}$
c) $A \cup B = \{3, 6, 9\}$ e $A \cap B = \varnothing$
d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A \cap B = \{1, 4\}$

3. alternativa **c**
Inicialmente, verificamos cada uma das alternativas.
a) $D = (A \cup B) \cap C \Rightarrow$
$\Rightarrow D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \cap \{1, 5, 10\} \Rightarrow D = \{1, 5\}$
b) $D = B \cap (A \cup C) \Rightarrow$
$\Rightarrow D = \{3, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 10\} \Rightarrow D = \{3\}$
c) $D = (B \cup C) \cap A \Rightarrow$
$\Rightarrow D = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow D = \{1, 3, 5\}$
d) $D = (B \cap C) \cap A \Rightarrow D = \{\ \} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow D = \{\ \}$
Portanto, a alternativa **c** é a única com o valor correto para D.

4. **a)** Algumas possíveis respostas: lápis, bônus e imóvel; tênis, táxi e fêmur.
b) Algumas possíveis respostas: helicóptero, âncora e dominó; sílaba, tamanduá e brócolis.
c) Algumas possíveis respostas: escola, maçaneta e borracha; lentilha, ovelha e tomada.

5. **a)** Verdadeira.
b) Falsa. Uma possível resposta: existem infinitos pontos que pertencem e infinitos pontos que não pertencem a um plano.
c) Falsa. Uma possível resposta: três pontos colineares determinam uma única reta.
d) Verdadeira.
e) Falsa. Uma possível resposta: se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida no plano.

6. **a)** Cinco planos: um em cada face lateral e outro na base.
b) Os vértices da base estão contidos em três planos e o vértice da pirâmide, em quatro planos.

7. A construção feita por Carla é a do item **a**, pois no item **a** as retas r e s são perpendiculares entre si, mas no item **b** as retas não são perpendiculares.

8. **a)** • s e u: perpendiculares
• r e u: reversas
b) Não, pois se $r \perp t$, o triângulo formado por r, t e s teria dois ângulos internos retos, o que é um absurdo.

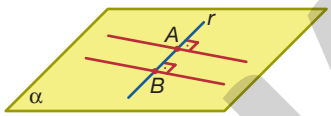
9. **a)** $\overleftrightarrow{FG}$
b) $\overleftrightarrow{AF}$; $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{EJ}$
c) $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{EJ}$
d) $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{HI}$; $\overleftrightarrow{AF}$; $\overleftrightarrow{EJ}$
e) $\overleftrightarrow{IJ}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{IH}$; $\overleftrightarrow{CH}$; $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{FG}$

10. Sim, pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, de maneira que toda reta definida por dois pontos, entre A, B, C e D, são coplanares.

11. **a)** Uma possível resposta: $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$
b) $\overleftrightarrow{HG}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$
c) $\overleftrightarrow{CI}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{EI}$; $\overleftrightarrow{HI}$
d) ortogonal

12. alternativa **c**
Se $s \perp u$, necessariamente $s = t$ ou $s // t$, o que não acontece, pois, de acordo com as informações do problema, s e t são oblíquas.

13. **a)** Verdadeira.



RONALDO INÁCIO

Os pontos A e B são dois pontos distintos de r que pertencem ao plano α, logo r está contida nesse plano.
b) Verdadeira.
c) Falsa. Uma possível resposta: se uma reta r e um plano α são paralelos, então existem retas perpendiculares a r que são perpendiculares a α.

14. **a)** nenhuma
b) concorrente
c) $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{HI}$

15. Concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) ou reversas (ortogonais ou oblíquas).

16. **a)** • contida no plano
• paralela
b) $\overleftrightarrow{DG}$; $\overleftrightarrow{CH}$
c) $\overleftrightarrow{CH}$; $\overleftrightarrow{GH}$

17. Não, porque, para ser perpendicular ao plano α, a reta s tem de ser perpendicular a pelo menos duas retas concorrentes contidas em α.

18. Os planos paralelos são α e γ.

19. **a)** Falsa, pois dois planos secantes possuem uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos em comum.
b) Verdadeira.
c) Falsa, porque, se dois planos α e β são paralelos, então as retas paralelas a α são paralelas ou contidas em β.
d) Verdadeira.
e) Falsa, pois os planos α e β são concorrentes quando possuem apenas uma reta em comum.

20. • α e β: concorrentes
• α e δ: concorrentes
• β e θ: concorrentes

21. **a)** Sim, pois eles têm apenas a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em comum.
b) Não.
c) Os planos que contêm as faces *ABFE*, *BCGF*, *CDHG* e *ADHE*.

22. **a)** Os planos que contêm as faces *IJKL*, *MNOP* e *ABCD*.
b) • 8 planos
• O plano que contém a face *ABONKJGF*.

MOBERNA

23. a) Verdadeira.

b) Falsa, pois uma reta não contida em α pode ser paralela a esse plano e estar contida em γ.

c) Verdadeira.

d) Falsa, pois pode ser um plano coincidente a δ.

e) Verdadeira.

24. a) • Os planos que contêm as faces *BCFG* e *ADEH*.

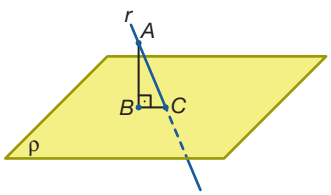
• Os planos que contêm as faces *CDEF*, *BCFG*, *ABGH* e *ADEH*.

O plano que contém a face *ADEH*.

b) Sim, pois as retas são coplanares concorrentes e $\overleftrightarrow{EF}$ é perpendicular a um plano que contém $\overleftrightarrow{BF}$.

c) Nos planos que contêm as faces *CDEF* e *BCFG*.

25.



RONALDO INÁCIO

Todo plano que contém *r* e é perpendicular a ρ deve conter os pontos *A*, *B* e *C*. Existe um único plano que satisfaz essas condições, pois *A*, *B* e *C* são não colineares.

26. a) Espera-se que os alunos respondam que o plano θ e a reta *r* são perpendiculares, pois α e θ sempre são paralelos.

b) Os planos são perpendiculares. Não.

c) A reta *r* é perpendicular aos demais planos.

27. A reta *r* é perpendicular ao plano α.

2 Projeções ortogonais no plano e distância no espaco

1. a) Falsa, pois a projeção ortogonal pode ser uma única reta, como o caso em que uma das retas é perpendicular ao plano de projeção.

b) Verdadeira.

c) Falsa, pois *r* e *s* podem ser retas reversas.

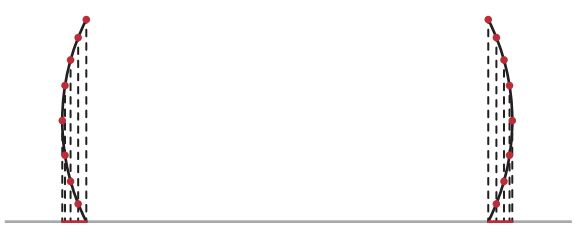
d) Falsa, pois a projeção ortogonal de qualquer polígono sobre um plano pode ser dada por um segmento de reta (quando o plano que contém o polígono é perpendicular ao plano de projeção).

e) Verdadeira.

2. alternativa b

Para responder a essa pergunta, oriente os alunos a observar que a trajetória dos pontos *A* e *B* é descrita por arcos de circunferência.

Portanto, projetando os infinitos pontos pertencentes aos arcos, obtemos:



RONALDO INÁCIO

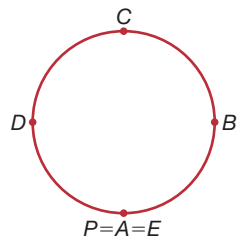
3. • A projeção é um triângulo.

• A projeção será um segmento de reta.

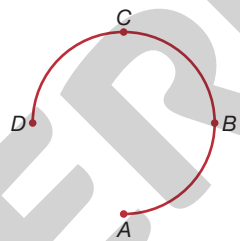
• A projeção é um triângulo.

4. alternativa c

Observe que os cinco pontos do corrimão têm a mesma distância. Assim, a projeção ortogonal dessa figura em um plano forma parte de uma circunferência. Ao olharmos do ponto *A* até o ponto *D* do corrimão, temos $\frac{3}{4}$ da circunferência. A vista superior da escada pode ser descrita pela imagem a seguir.



Projetando a figura obtida, do ponto *A* ao ponto *D*, temos:



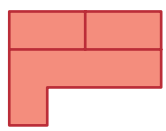
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

5. a) • Os planos que contêm as faces *ABCD*, *IJKL* e *MNOP*.

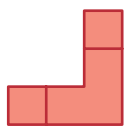
• Os planos que contêm as faces *ABCD*, *EFGH*, *IJKL*, *MNOP*, *BCFGJKON* e *ADEHILPM*.

b) Uma possível resposta:

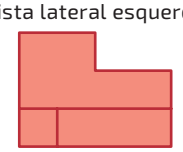
vista superior



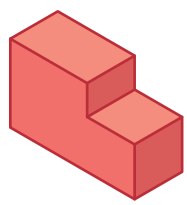
vista frontal



vista lateral esquerda



c)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

d) I. Uma possível resposta: vistas superior e lateral esquerda ou direita.

II. Uma possível resposta: vistas lateral direita, esquerda, frontal e superior.

6. a) Falsa, pois se um ponto pertencer a uma reta, então a distância entre eles será nula.

b) Verdadeira.

c) Verdadeira.

d) Falsa, pois somente terão distância nula se o ponto pertencer à reta.

7. a) $\overline{MN}$; $\overline{IK}$; $\overline{JH}$

b) $\overline{EO}$

c) $\overline{BO}$

d) $\overline{CO}$; $\overline{KL}$

8. a) Três triângulos.

b) • Os planos α e δ são paralelos entre si.

• Os planos α e β; β e δ são perpendiculares entre si.

c) Os segmentos $\overline{DH}$ e $\overline{EF}$.

3 Poliedros

1. a) poliedro

b) não poliedro

c) não poliedro

d) poliedro

e) não poliedro

f) poliedro

2. a) 6 faces, 10 arestas e 6 vértices

b) 8 faces, 18 arestas e 12 vértices

c) 11 faces, 20 arestas e 11 vértices

d) 8 faces, 12 arestas e 6 vértices

e) 7 faces, 15 arestas e 10 vértices

f) 9 faces, 21 arestas e 14 vértices

3. a) convexo

b) não convexo

c) não convexo

d) convexo

4. a) quadriláteros

b) triângulos e quadriláteros

c) quadriláteros e hexágonos

d) pentágonos

5. alternativa c

Ao cortarmos cada vértice do cubo, obtemos 8 novas faces. Como o cubo possui 6 faces, temos:

$$6 + 8 = 14$$

Portanto, serão necessárias 14 cores diferentes para pintar cada uma das faces.

6. Resposta pessoal.

7. Usando a Relação de Euler, temos:

$$10 + F = 15 + 2 \Rightarrow F = 7$$

Portanto, esse poliedro tem 7 faces.

8. a) Não convexo, pois é possível traçar um segmento de reta ligando dois de seus pontos que não está inteiramente contido no poliedro.

b) 9 vértices, 16 arestas e 9 faces

c) Sim, pois, usando a Relação de Euler, temos:

$$\underbrace{9}_{\text{faces}} + \underbrace{9}_{\text{vértices}} = \underbrace{16}_{\text{arestas}} + 2$$

9. Como todas as faces do poliedro são hexagonais, cada face tem 6 arestas. Como cada aresta é comum a duas faces, temos:

$$A = \frac{6F}{2}$$

Sabendo que o poliedro possui 15 faces ($F = 15$), obtemos que $A = 45$.

Como o poliedro é convexo, a Relação de Euler é válida para ele. Assim, temos:

$$V + 15 = 45 + 2 \Rightarrow V = 32$$

Portanto, esse poliedro tem 32 vértices.

10. Para auxiliar os alunos, verifique a necessidade de sugerir a utilização de um sistema linear utilizando as variáveis x e y, respectivamente, para a quantidade de faces triangulares e o número de faces quadrangulares.

$$9 + F = 16 + 2 \Rightarrow F = 9$$

$$\begin{cases} \overbrace{x + y}^{F} = 9 \\ \underbrace{\frac{3x + 4y}{2}}_{A} = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = 5$$

Portanto, esse poliedro possui 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares.

11. Para resolver esse problema, utilizamos um sistema de equações com as informações apresentadas.

$$\begin{cases} A = 2V \\ \frac{3F}{2} = A \\ V + F = A + 2 \end{cases} \Rightarrow A = 12,\ V = 6 \text{ e } F = 8$$

Portanto, esse poliedro possui 6 vértices, 12 arestas e 8 faces.

12. Como a molécula de *buckminsterfullerene* é composta de 60 átomos de carbono, temos:

$$A = \frac{3 \cdot 60}{2} \Rightarrow A = 90$$

Aplicando a Relação de Euler, temos:

$$60 + F = 90 + 2 \Rightarrow F = 32$$

Considerando x o número de faces pentagonais e y o número de faces hexagonais, segue que:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ \frac{5x + 6y}{2} = 90 \end{cases} \Rightarrow x = 12 \text{ e } y = 20$$

Portanto, a quantidade de faces pentagonais e hexagonais são, respectivamente, 12 e 20.

13. Resposta pessoal.

14. Como cada aresta é comum a dois vértices, temos:

$$A = \frac{5 \cdot 12}{2} \Rightarrow A = 30$$

Calculando o número de faces e usando a Relação de Euler, temos:

$$12 + F = 30 + 2 \Rightarrow F = 20$$

Portanto, esse poliedro tem 20 faces e 30 arestas.

MODERNA

15. a) Como o poliedro é regular, cada face possui o mesmo número de lados. Seja n esse número. Então:

$$A = \frac{n \cdot F}{2}$$

Segue que:

$$\overbrace{V}^{V=F} + F = A + 2 \Rightarrow F + F = \frac{n \cdot F}{2} + 2 \Rightarrow F = \frac{4}{4 - n}$$

Como $F > 0$, temos $4 - n > 0 \Rightarrow n < 4$. Assim, como $n \geqslant 3$, segue que $n = 3$. Substituindo, obtemos:

$$V = F = \frac{4}{4 - 3} = 4$$

$$A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Portanto, o poliedro possui 4 faces, 4 vértices e 6 arestas.

b) tetraedro regular

c) As faces são polígonos regulares com $n = 3$ lados, ou seja, todas são triangulares equiláteras.

16. Não, pois o fato de esse poliedro ser de Platão não garante que seja regular. Para que isso ocorra, é necessário que suas faces tenham formato triangular equiláteros e sejam congruentes entre si.

17. Um tetraedro regular possui 4 faces triangulares. Logo, a soma dos ângulos internos é dada por: $4 \cdot 180° = 720°$.

18. a) 8 vértices e 12 arestas

b) 6 vértices e 12 arestas

c) 9 vértices e 16 arestas

19. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

20. a) Algoritmo:

Início
1. Leia a quantidade de faces triangulares F do poliedro.
2. Calcule $A = \frac{3 \cdot F}{2}$.
3. Leia A.
4. Calcule $V = A - F + 2$.
5. Leia V.

Fim

Usando o algoritmo, temos:

- 4 vértices
- 12 vértices

b) Programa em VisualG:

```
1 Algoritmo "numero_vertices"
2 Var
3 F, A, V: real
4 Inicio
5 escreva("Digite o numero de faces triangulares:")
6 leia(F)
7 A<-(3*F)/2
8 V<-(A-F+2)
9 escreva("A quantidade de vertices e: ", V)
10 Fimalgoritmo
```

21. • Arestas:

$$A = \frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90$$

• Vértices:

$$V + \underbrace{32}_{12 + 20} = 90 + 2 \Rightarrow V = 60$$

Portanto, o icosaedro truncado tem 60 vértices e 90 arestas.

22. a) Inicialmente, de acordo com o número de vértices e faces triangulares, escrevemos um sistema de equações.

$$\begin{cases} \overbrace{12}^{V} + F = A + 2 \\ A = \frac{3F}{2} \end{cases} \Rightarrow A = 30 \text{ e } F = 20$$

Assim, esse poliedro possui 30 arestas e 20 faces.

b) icosaedro regular

c) Sim, todo poliedro regular é um Poliedro de Platão.

23. Sejam F_1, V_1 e A_1 o número de faces, de vértices e de arestas do poliedro **A**, respectivamente, e F_2, V_2 e A_2 os números correspondentes do poliedro **B**. De acordo com o enunciado, segue que:

$$\begin{cases} V_1 = V_2 + 8 \\ A_1 = A_2 \\ A_1 = \frac{5F_1}{2} \\ A_2 = \frac{3F_2}{2} \end{cases}$$

Segue que:

$$\begin{cases} V_1 + F_1 = \overbrace{A_1}^{A_1 = A_2} + 2 \\ V_2 + F_2 = A_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(V_2 + 8\right) + \frac{2}{5}A_1 = A_1 + 2 \\ V_2 + F_2 = A_1 + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(V_2 + 8\right) + \frac{2}{5} \cdot \frac{3F_2}{2} = V_2 + F_2 \Rightarrow F_2 = 20$$

$$A_1 = A_2 = \frac{3F_2}{2} = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30$$

$$A_1 = \frac{5F_1}{2} \Rightarrow 30 = \frac{5F_1}{2} \Rightarrow F_1 = 12$$

$$V_2 + F_2 = A_2 + 2 \Rightarrow V_2 + 20 = 30 + 2 \Rightarrow V_2 = 12$$

$$V_1 = V_2 + 8 = 12 + 8 = 20$$

Portanto, o poliedro **A** possui 12 faces, 20 vértices e 30 arestas e o poliedro **B** tem 20 faces, 12 vértices e 30 arestas.

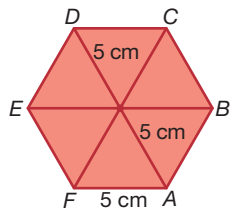
4 Prismas

1. a) prisma regular hexagonal

b) prisma regular octogonal

c) prisma regular decagonal

2. a) Como o hexágono $ABCDEF$ é regular, podemos decompor essa figura em 6 triângulos equiláteros.



RONALDO INÁCIO

MODERNA

$AD = 5 + 5 = 10$

Logo, $AD = 10$ cm.

- $(AD)^2 + (KD)^2 = (AK)^2$

$\Rightarrow 10^2 + 15^2 = (AK)^2$

$\Rightarrow AK = 5\sqrt{13}$

Portanto, $AK = 5\sqrt{13}$ cm.

b) Como o prisma é regular, temos:

$BE = AD = 10$, $EL = KD = IB = 15$

$BL = AK = 5\sqrt{13}$

- área:

$$\frac{BE \cdot EL}{2} = \frac{10 \cdot 15}{2} = 75$$

Logo, a área é 75 cm².

- perímetro:

$BE + EL + BL = 10 + 15 + 5\sqrt{13} = 5 \cdot \left(5 + \sqrt{13}\right)$

Logo, o perímetro é $5 \cdot \left(5 + \sqrt{13}\right)$ cm.

3. De acordo com os dados do problema, temos:

$$\begin{cases} db = 5 \\ dp = 13 \\ c \cdot h = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{c^2 + a^2} = 5 \\ \sqrt{c^2 + a^2 + h^2} = 13 \\ c \cdot h = 48 \end{cases}$$

Logo, $a = 3$, $c = 4$ e $h = 12$.

Portanto, os valores de a, c e h são, respectivamente, 3 cm, 4 cm e 12 cm.

4. Indicando por c, a e h, respectivamente, comprimento (em cm), largura (em cm) e altura (em cm), temos:

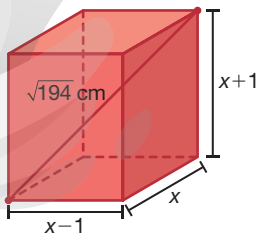
$$\begin{cases} d_p = 15\sqrt{2} \\ \frac{c}{3} = \frac{a}{4} = \frac{h}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{c^2 + a^2 + h^2} = 15\sqrt{2} \\ \frac{c^2}{9} = \frac{a^2}{16} = \frac{h^2}{25} \end{cases}$$

Assim, temos:

$$\frac{c^2}{9} = 9 \Rightarrow c = 9; \frac{a^2}{16} = 9 \Rightarrow a = 12; \frac{h^2}{25} = 9 \Rightarrow h = 15$$

Portanto, os valores de comprimento, largura e altura são, respectivamente, 9 cm, 12 cm e 15 cm.

5. Inicialmente, para determinar as dimensões externas dessa caixa, consideremos a figura a seguir:



RONALDO INÁCIO

Assim, temos:

$$\sqrt{(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2} = \sqrt{194} \Rightarrow$$

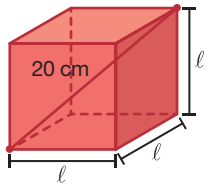
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 = 194 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 = 192 \Rightarrow x = 8$

Logo, $x = 8$ cm.

Portanto, as dimensões dessa caixa são 7 cm, 8 cm e 9 cm.

6.



RONALDO INÁCIO

Calculando o comprimento das arestas do cubo, temos:

$$\sqrt{\ell^2 + \ell^2 + \ell^2} = 20 \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \ell \simeq 11{,}5$$

$20 - 11{,}5 = 8{,}5$

Portanto, é preciso cortar, aproximadamente, 8,5 cm de cada canudo para construir a aresta desse cubo.

7. **a)** Calculando a diagonal da base quadrada, temos:

$$d = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} \Rightarrow d = \sqrt{12} \Rightarrow d = 2\sqrt{3}$$

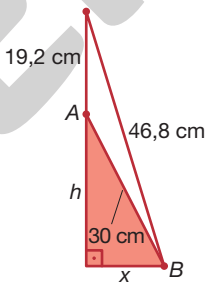
Portanto, o comprimento da diagonal da base é $2\sqrt{3}$ cm.

b) Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(2\sqrt{3}\right)^2 + x^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x = 6$$

Portanto, a altura desse prisma é 6 cm.

8. Para resolver a tarefa, oriente os alunos a montar um esquema que represente a situação.



RONALDO INÁCIO

Em seguida, utilizando os dados do problema, montamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 30^2 \\ (h + 19{,}2)^2 + x^2 = 46{,}8^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow h^2 + 38{,}4h + 368{,}64 + x^2 = 2\,190{,}24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 30^2 + 38{,}4h = 1\,821{,}6 \Rightarrow h = 24$

Portanto, a altura é 24 cm.

9. **a)** $A_\ell = 6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$

Portanto, a área da superfície desse prisma é 96 cm².

b) $A_\ell = 6 \cdot 5 \cdot 10\sqrt{3} \Rightarrow A_\ell = 300\sqrt{3}$

$A_b = 6 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{75\sqrt{3}}{2}$

$A_t = 300\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_t = 375\sqrt{3}$

Portanto, a área da superfície desse prisma é $375\sqrt{3}$ cm².

c) $A_\ell = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 6 \cdot 3) \Rightarrow A_\ell = 60$

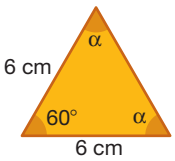
$A_b = 6 \cdot 4 \Rightarrow A_b = 24$

$A_t = 60 + 2 \cdot 24 \Rightarrow A_t = 108$

Portanto, a área da superfície desse prisma é 108 cm².

MODERNA

d) Note que a base é um triângulo equilátero.



RONALDO INÁCIO

$60° + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$

Assim:

$A_\ell = 3 \cdot 6 \cdot 8\sqrt{3} \Rightarrow A_\ell = 144\sqrt{3}$

$A_b = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 9\sqrt{3}$

$A_t = 144\sqrt{3} + 2 \cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 162\sqrt{3}$

Portanto, a área da superfície desse prisma é $162\sqrt{3}$ cm².

10. **a)** Indicando por x a medida de cada aresta, temos:

$6x^2 = 54 \Rightarrow x = 3$

Portanto, o comprimento de cada aresta desse cubo é 3 cm.

b) Temos:

$EG = CA \Rightarrow d_b = \sqrt{3^2 + 3^2} \Rightarrow d_b = 3\sqrt{2}$

Assim, o perímetro de *AEGC* é dado por:

$P = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow P = 6 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$

Portanto, o perímetro do quadrilátero *AEGC* é $6 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$.

11. **a)** Note que cada aresta foi dividida em $\underbrace{30}_{\frac{120}{4}}$ partes.

Portanto, o total de cubinhos obtidos é $\underbrace{27\,000}_{30^3}$.

b) Esses cubinhos são os que contêm a aresta do cubo maior. Como são 12 arestas e cada um dos 8 vértices contém um cubinho em comum com 3 arestas, o total de cubinhos é dado por:

$12 \cdot 30 - 2 \cdot 8 = 344$

Portanto, o total de cubinhos é 344.

c) Inicialmente, determinamos a área de cada cubinho e a área do cubo vermelho:

- cubinho: $A_{\text{cubinho}} = 6 \cdot 4 \cdot 4 \Rightarrow A_t = 96$

  Assim, a área de cada cubinho é 96 cm².
- cubo vermelho: $A_{\text{cubo vermelho}} = 6 \cdot 120 \cdot 120 \Rightarrow A_t = 86\,400$

  Assim, a área do cubo vermelho é 86 400 cm².

  Portanto, a razão é dada por:

$\frac{96}{86\,400} = \frac{1}{900}$

12. **a)** Como a base do prisma é formada por um triângulo equilátero, temos:

$A_b = \frac{30^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 225\sqrt{3}$

Portanto, a área da base desse prisma é $225\sqrt{3}$ cm².

b) Calculando a área lateral, temos:

$A_\ell = 3 \cdot 30 \cdot 30 \Rightarrow A_\ell = 2\,700$

Em seguida, calculamos a área total:

$A_t = 2\,700 + 2 \cdot 225\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 450 \cdot \left(6 + \sqrt{3}\right)$

Portanto, a área lateral é 2 700 cm² e a área total desse prisma, $450\left(6 + \sqrt{3}\right)$ cm².

13. Inicialmente, a partir do fluxograma, determinamos que o rendimento da tinta é 100 m², a altura do prisma é $h = 0{,}25$ m e o comprimento do lado do hexágono, $c = \underbrace{0{,}12 \text{ m}}_{12 \text{ cm}}$.

Em seguida, calculamos as áreas da base e lateral do prisma regular:

$A_b = 6 \cdot \frac{0{,}12^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 0{,}0216\sqrt{3}$

$A_\ell = 6 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}25 \Rightarrow A_\ell = 0{,}18$

Por fim, calculamos a área total do prisma regular e a dividimos pela área que pode ser pintada com 1 ℓ de tinta.

$\frac{2A_b + A_\ell}{100} = \frac{0{,}0432\sqrt{3} + 0{,}18}{100} \simeq 0{,}0025$

Portanto, serão necessários, aproximadamente, $\underbrace{2{,}5 \text{ mℓ}}_{0{,}0025\ell}$ de tinta para pintar essa peça.

14. Como a área total do cubo é 384 cm², temos:

$6 \cdot \ell^2 = 384 \Rightarrow \ell = 8$

Logo, a área lateral do cubo é:

$A_\ell = 4\ell^2 \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 8^2 \Rightarrow A_\ell = 256$

Então, ao aumentarmos a área em 144 cm², temos:

$256 + 144 = 400$

Assim, sendo a o comprimento do lado após o aumento, a diagonal do cubo após a ampliação deve ser:

$A = 4 \cdot a^2 \Rightarrow 400 = 4 \cdot a^2 \Rightarrow a = 10$

Desse modo, a diagonal após o aumento tem $10\sqrt{3}$ cm e a diagonal antes do aumento tinha $8\sqrt{3}$ cm.

Portanto, a diagonal deve ser aumentada em $\underbrace{3{,}46}_{2\sqrt{3}}$ cm.

15. **a)** Calculando a área total de cada uma das caixas, temos:

- caixa de base hexagonal:

$A_t = A_b + 6A_\ell \Rightarrow A_t = 6 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 8 \cdot 8 \Rightarrow A_t \simeq 550$

- caixa de base quadrada:

$A_t = A_b + 4A_\ell \Rightarrow A_t = 64 + 4 \cdot 6 \cdot 8 \Rightarrow A_t = 256$

Portanto, a área da caixa de base hexagonal é aproximadamente 550 cm² e a área da caixa de base quadrada, 256 cm².

b) Calculando a área total a ser revestida, temos:

$2 \cdot 550 + 3 \cdot 256 = 1\,100 + 768 = 1\,868$

Logo:

$\underbrace{0{,}1868}_{1\,868 \text{ cm}^2} \cdot 3{,}2 \simeq 0{,}60$

Portanto, Bruna vai gastar aproximadamente R$ 0,60 com o papel colorido.

16. Calculando a área total da caixa, temos:

$A_t = 2 \cdot (20 \cdot 30 + 80 \cdot 30 + 80 \cdot 20) \Rightarrow A_t = 9\,200$

$20\,000 \cdot \underbrace{0{,}92}_{9\,200 \text{ cm}^2} = 18\,400$

Portanto, foram utilizados 18 400 m² de papelão para confeccionar todas as caixas.

17. **a)** Se necessário, auxilie os alunos na montagem da equação a seguir, em que as variáveis x e h representam, respectivamente, a aresta da base e a medida da aresta lateral:

$D^2 = 3d^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + h^2 = 3 \cdot \left(x\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + h^2 = 6x^2 \Rightarrow h = 2x$

Logo:

$A_t = 2x^2 + 4 \cdot x \cdot \underbrace{h}_{2x} \Rightarrow 640 = 10x^2 \Rightarrow x = 8$

Portanto, o comprimento da aresta da base é 8 cm e o comprimento da aresta lateral, 16 cm.

MODERNA

b) Calculando a área lateral do prisma, temos:

$A_\ell = 4 \cdot x \cdot h \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 8 \cdot 16 \Rightarrow A_\ell = 512$

Portanto, a área lateral desse prisma é 512 cm².

18. a) Inicialmente, calculamos as áreas da lateral e da base, respectivamente, A_ℓ e A_b. Assim, temos:

$A_\ell = 2x(20 - 2x) + 2x(35 - 2x) \Rightarrow A_\ell = 110x - 8x^2$

$A_b = (20 - 2x)(35 - 2x) \Rightarrow A_b = 700 - 110x + 4x^2$

Em seguida, calculamos a área da superfície externa da caixa:

$(110x - 8x^2) + (700 - 110x + 4x^2) = 684 \Rightarrow x = 2$

Portanto, para que a superfície externa da caixa seja 648 cm², x deve ser igual a 2.

b) Calculando as áreas da lateral e da base, respectivamente, A_ℓ e A_b, temos:

$A_\ell = 110 \cdot 2 - 8 \cdot 2^2 \Rightarrow A_\ell = 188$

$A_b = 700 - 110 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 \Rightarrow A_b = 496$

Portanto, a área da lateral é 188 cm² e a área da base, 496 cm².

19. a) Inicialmente, calculamos a área da peça sem o furo:

$A_\ell = 6 \cdot 120 \cdot 80 \Rightarrow A_f = 57\,600$

$A_b = 6 \cdot \frac{80^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 9\,600\sqrt{3}$

$A_t = 57\,600 + 2 \cdot 9\,600\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 57\,600 + 19\,200\sqrt{3}$

Em seguida, calculamos a mudança da área da peça devido ao "recorte" em forma de prisma reto de base quadrada:

$57\,600 + 19\,200\sqrt{3} - 2 \cdot 45^2 + 4 \cdot 45 \cdot 120 =$

$= 75\,150 + 19\,200\sqrt{3} \simeq 108\,405$

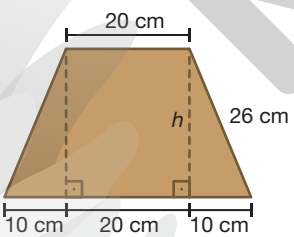
Portanto, a área total da superfície dessa peça é aproximadamente 108 405 cm² ou 10,8405 m².

b) Como a tinta escolhida tem rendimento por litro de 4 m², temos:

$\frac{10{,}8405}{4} \simeq 2{,}71$

Portanto, como cada litro custa R$ 25,00, o gasto aproximado com tinta será $\underbrace{\text{R\$ } 67{,}75}_{\text{R\$ } 25{,}00 \cdot 2{,}71}$.

20. a)



RONALDO INÁCIO

$h^2 + 10^2 = 26^2 \Rightarrow h = 24$

Portanto, a medida h dessa caixa é 24 cm.

b) Calculando as áreas da base e lateral, temos:

$A_\ell = 2 \cdot 15 \cdot 26 + 20 \cdot 15 + 40 \cdot 15 \Rightarrow A_\ell = 1\,680$

$A_b = \frac{(20 + 40) \cdot 24}{2} \Rightarrow A_b = 720$

$A_t = 1\,680 + 2 \cdot 720 \Rightarrow A_\ell = 3\,120$

Portanto, foram usados 3 120 cm² de papelão para montar a caixa.

21. a) Inicialmente, calculamos o comprimento das arestas da peça cúbica maior.

$\frac{486}{6} = 81$

$\ell^2 = 81$

$\ell = 9$

Como o comprimento das arestas dessa peça é igual ao triplo das arestas de cada peça amarela, então o comprimento das arestas de cada peça amarela é 3 cm.

Portanto, a razão entre a área total de uma peça amarela e a área total da peça cúbica maior é $\frac{6 \cdot 3^2}{6 \cdot 9^2} = \frac{1}{9}$.

b) • Área total da peça cúbica maior: $A_t = 6 \cdot 9^2 \Rightarrow A_t = 486$

Assim, a área total da peça cúbica maior é 486 cm².

• Área total de uma peça amarela: $A_t = 6 \cdot 3^2 \Rightarrow A_t = 54$

Assim, a área total de uma peça amarela é 54 cm².

22. a) Como sabemos a área total desse paralelepípedo, temos:

$198 = 2 \cdot (ac + ab + bc) \Rightarrow$

$\Rightarrow 99 = a \cdot \underbrace{3a}_{c} + a \cdot \underbrace{2a}_{b} + 2a \cdot 3a \Rightarrow$

$\Rightarrow 99 = 11a^2 \Rightarrow a = 3$

Logo, $a = 3$; $b = 6$ e $c = 9$.

Portanto, as dimensões desse paralelepípedo são 3 cm, 6 cm e 9 cm.

b) Calculando o comprimento da diagonal desse paralelepípedo, obtemos:

$D = \sqrt{3^2 + 6^2 + 9^2} \Rightarrow D = \sqrt{126} \Rightarrow D = 3\sqrt{14}$

Portanto, o comprimento da diagonal desse paralelepípedo é $3\sqrt{14}$ cm.

c) Calculando a área da base e a área lateral desse paralelepípedo, obtemos:

$A_b = \underbrace{3}_{a} \cdot \underbrace{6}_{b} \Rightarrow A_b = 18$

$A_\ell = 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c \Rightarrow A_\ell = 2 \cdot 54 + 2 \cdot 27 \Rightarrow A_\ell = 162$

Portanto, a área da base desse paralelepípedo é 18 cm² e a área lateral, 162 cm².

23. a) Observe que o prisma regular possui área total igual a 350 cm². Assim, temos:

$\underbrace{350}_{A_t} = 2 \cdot 25\underbrace{\sqrt{3}}_{1{,}73} + 3 \cdot 10 \cdot h \Rightarrow 263{,}5 = 30h \Rightarrow h \simeq 8{,}8$

Portanto, a altura desse prisma é aproximadamente 8,8 cm.

b)

$A_b = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b \simeq 43{,}25$

$A_\ell = 3 \cdot 10 \cdot 8{,}8 \Rightarrow A_\ell = 264$

Portanto, a área da base desse paralelepípedo é aproximadamente 43,25 cm² e a área lateral, aproximadamente 264 cm².

24. Inicialmente, calculamos a área da base e a área da lateral da embalagem:

$A_b = 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}$

$A_\ell = \underbrace{12}_{6+6} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow A_\ell = 96\sqrt{3}$

Em seguida, calculamos a área total da embalagem:

$A_t = 96\sqrt{3} + \underbrace{3}_{1+2} \cdot 24\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 168\sqrt{3}$

Logo, a área da embalagem é $168\sqrt{3}$ cm². Note que foram usados nesse dia $\underbrace{1\,680\,000\sqrt{3}\text{ cm}^2}_{168\sqrt{3}\text{ m}^2}$.

Portanto, foram confeccionadas 10 000 embalagens.

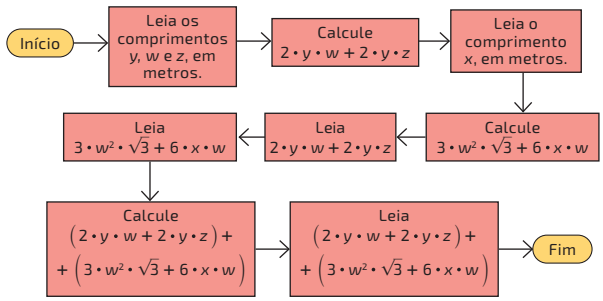
MODERNA

25. a) Algoritmo que possibilita calcular a área total dessa peça, em metros quadrados.

Início
1. Leia os comprimentos y, w e z, em metros.
2. Calcule $2 \cdot y \cdot w + 2 \cdot y \cdot z$
3. Leia o comprimento x, em metros.
4. Calcule $3 \cdot w^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot x \cdot w$
5. Leia $2 \cdot y \cdot w + 2 \cdot y \cdot z$
6. Leia $3 \cdot w^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot x \cdot w$
7. Calcule $\left(2 \cdot y \cdot w + 2 \cdot y \cdot z\right) + \left(3 \cdot w^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot x \cdot w\right)$
8. Leia $\left(2 \cdot y \cdot w + 2 \cdot y \cdot z\right) + \left(3 \cdot w^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot x \cdot w\right)$

Fim

• Organizando o algoritmo em um fluxograma, temos:



b) Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

26. Sugira aos alunos que escrevam as equações do problema.

Observe que, de $a + b + c = 12$, segue que $a = 12 - b - c$.

Determinando a área total, temos:

$A_t = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 2 \cdot \Big(\underbrace{(12 - b - c)}_{a} \cdot b + b \cdot c + \underbrace{(12 - b - c)}_{b} \cdot c \Big) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 24b - 2b^2 - 2c^2 + 24c - 2bc$

De acordo com os dados desse problema, temos:

$a^2 + b^2 + c^2 = 56$

$(12 - b - c)^2 + b^2 + c^2 = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow 24b - 2b^2 - 2c^2 + 24c - 2bc = \underbrace{88}_{144 - 56}$

De $\underbrace{24b - 2b^2 - 2c^2 + 24c - 2bc}_{A_t} = 88$, temos $A_t = 88$.

Portanto, a área total é 88 cm².

27. a) Calculando a capacidade máxima de cada um desses padrões, temos:

• padrão 1: $2{,}44 \cdot 6{,}09 \cdot 2{,}59 \simeq 38{,}49$

Assim, a capacidade aproximada do padrão 1 é 38,49 m³.

• padrão 2: $2{,}44 \cdot 12{,}19 \cdot 2{,}59 \simeq 77$

Assim, a capacidade aproximada do padrão 2 é 77 m³.

b) Calculando a área de superfície aproximada de cada um dos padrões, temos:

• padrão 1:

$2 \cdot 2{,}44 \cdot 6{,}09 + 2 \cdot 2{,}44 \cdot 2{,}59 + 2 \cdot 6{,}09 \cdot 2{,}59 \simeq 73{,}9$

Assim, a área da superfície do padrão 1 é 73,9 m².

• padrão 2:

$2 \cdot 2{,}44 \cdot 12{,}19 + 2 \cdot 2{,}44 \cdot 2{,}59 + 2 \cdot 12{,}19 \cdot 2{,}59 = 135{,}27$

Assim, a área da superfície do padrão 2 é 135,27 m².

28. Indicando por a a aresta do cubo, temos:

$A_t = 384 \Rightarrow 6a^2 = 384 \Rightarrow a = 8$

Para o volume ser 1 728 cm³, devemos ter:

$a^3 = 1\,728 \Rightarrow a = 12$

Logo, é preciso aumentar cada aresta em $\underbrace{4}_{12 - 8}$ cm.

29. alternativa **c**

V_C: volume da mistura sabor chocolate

V_E: volume da embalagem

x: volume da mistura sabor morango

$$(1\,000 + x) + 0{,}25(1\,000 + x) = 2\,000$$
$$1\,000 + x + 250 + 0{,}25x = 2\,000$$
$$1{,}25x = 750$$
$$x = 600$$

Portanto, o volume máximo da mistura sabor morango é 600 cm².

30. a) $V = 10 \cdot 12 \cdot 14 \Rightarrow V = 1\,680$

Portanto, a capacidade desse recipiente é 1 680 cm³.

b) $V = 10 \cdot 12 \cdot 8 \Rightarrow V = 960$

Portanto, o volume de água dentro do recipiente é 960 cm³.

c) O volume do cubo é dado por:

$V = 10 \cdot 12 \cdot 1{,}8 \Rightarrow V = 216$

Portanto, o comprimento de sua aresta é $\underbrace{6}_{\sqrt[3]{216}}$ cm.

31. Calculando o volume do piso, temos:

$V = 10 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 0{,}15 \Rightarrow V = 36$

Portanto, o volume de concreto utilizado no piso da galeria é 36 m³.

32. Indicando com ℓ_A e ℓ_B, respectivamente, a aresta do recipiente A e a aresta do recipiente B, temos:

$$\sqrt{\ell_B^{\,2} + \ell_B^{\,2} + \ell_B^{\,2}} = 2\sqrt{\ell_A^{\,2} + \ell_A^{\,2} + \ell_A^{\,2}}$$
$$\ell_B = 2\ell_A$$

a) $\dfrac{\ell_A^{\,3}}{\ell_B^{\,3}} = \dfrac{\ell_A^{\,3}}{(2\ell_A)^3} = \dfrac{1}{8}$

b) $50\ell_A^{\,2} = 50\left(\dfrac{\ell_B}{2}\right)^2 = 12{,}5\ell_B^{\,2}$

Portanto, a altura que o líquido ocupará no recipiente B é 12,5 cm.

33. Indicando com c' a nova medida de c, temos:

$$(a - 0{,}2a) \cdot b \cdot c' = a \cdot b \cdot c$$
$$0{,}8c' = c$$
$$c' = 1{,}25c$$

Portanto, a medida de c deve ser aumentada em 25%.

34. a) $\underbrace{6 \cdot \dfrac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}_{A_b} \cdot 12 = 72\sqrt{3} \simeq 124{,}7$

Portanto, o volume de cada coluna é aproximadamente 124,7 m3.

b) $\underbrace{0{,}8}_{80\%} \cdot 8 \cdot 124{,}7 = 798{,}08$

Portanto, o volume de concreto utilizado para construir as 8 colunas foi 798,08 m³.

35. Inicialmente, como 2 700 ℓ correspondem a 2,7 m³, calculamos o comprimento da aresta desse reservatório cúbico indicando-o por c.

MODERNA

$$\underbrace{0{,}3}_{30\text{ cm}} \cdot c^2 = 2{,}7 \Rightarrow c = 3$$

Em seguida, determinamos a capacidade total desse reservatório.

$$c^3 = 3^3 = 27$$

Portanto, a capacidade total é 27 m^3 ou 27 000 ℓ.

36. **a)** Devemos calcular o comprimento das arestas desse prisma, indicadas por a.

$A_\ell = 6a^2$

$A_b = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$A_t = 96\left(2\sqrt{3} + 4\right) \Rightarrow 6a^2 + 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 96\left(2\sqrt{3} + 4\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 8$

Portanto, o comprimento das arestas desse prisma é 8 cm.

b) Calculando o volume desse prisma, temos:

$$V = \frac{3 \cdot 8^2\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 768\sqrt{3}$$

Portanto, o volume do prisma é $768\sqrt{3}$ cm^3.

37. Volume do líquido: $\underbrace{0{,}75}_{75\%} \cdot 4 = 3$

O volume do prisma triangular regular é proporcional à sua altura. Logo, 3ℓ correspondem a 40% do seu volume. Utilizando regra de três, temos:

Volume (ℓ)	Porcentagem (%)
3	40
x	100

$$\frac{3}{x} = \frac{40}{100} \Rightarrow 7{,}5$$

Portanto, a capacidade do recipiente é 7,5 ℓ.

38. alternativa **a**

$h = 2$ m; $B = 6$ m; $C = 20$ m

Como $h = 2$, segue que $b = 5$.

$$A_b = \frac{(6 + 5) \cdot 2}{2} = 11$$

$$V = A_b \cdot h = 11 \cdot 20 = 220$$

Como 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3, e o volume do silo é 220 m^3, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo é 110 toneladas.

39. Utilizando regra de três, temos:

Tempo (h)	Volume (m^3)
$\underbrace{3{,}75}_{3\text{ h }45\text{ min}}$	$\underbrace{27}_{3^3}$
x	$\underbrace{32{,}4}_{2 \cdot 5{,}4 \cdot 3}$

$$\frac{3{,}75}{x} = \frac{27}{32{,}4} \Rightarrow x = 4{,}5$$

Portanto, o tempo necessário para a bomba encher completamente essa caixa é 4,5 h ou 4 h 30 min.

40. • Volume da parte de baixo:

$$A_b = \frac{(2{,}6 + 1{,}2) \cdot 1}{2} \Rightarrow A_b = 1{,}9$$

$$V = 1{,}9 \cdot 1{,}7 = 3{,}23$$

Assim, o volume da parte de baixo é 3,23 m^3.

• Volume da parte de cima: $V = 2{,}6 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}884$

Assim, o volume da parte de cima é 0,884 m^3.

Desse modo, temos:

$$4 \cdot (3{,}23 + 0{,}884) \simeq 16{,}46$$

Portanto, o volume máximo de entulho gerado é aproximadamente 16,46 m^3.

41. alternativa **b**

x: medida da aresta da parte cúbica de cima

V_{cb}: volume do cubo de baixo

V_{cc}: volume do cubo de cima

• $V_{cb} = (2x)^3 = 8x^3$

• $V_{cc} = x^3$

A torneira leva 8 minutos para encher metade da parte de baixo, que corresponde a um volume de $4x^3$, e vai levar 2 minutos para encher a parte de cima, que possui um volume de x^3.

Além disso, para terminar de encher a parte de baixo ela vai levar 8 minutos.

Portanto, para a torneira encher o restante do depósito, vai levar $\underbrace{10}_{2 + 8}$ minutos.

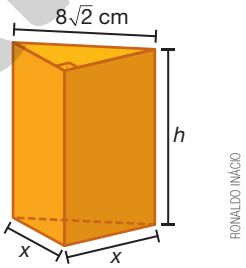
42. **a)** $x^2 + x^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = 8$

$A_b = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$

$V = 640 \Rightarrow 32h = 640 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 20$

Portanto, esse prisma tem 20 cm de altura.



RONALDO INÁCIO

b) $A_\ell = 2 \cdot 8 \cdot 20 + 8\sqrt{2} \cdot 20 \Rightarrow A_\ell = 320 + 160\sqrt{2}$

$A_t = \left(320 + 160\sqrt{2}\right) + 2 \cdot 32 \simeq 610{,}27$

Portanto, a área total desse prisma é aproximadamente 610,27 cm^2.

43. **a)** É necessário 1 bloco para construir o 1º degrau, 2 blocos para construir o 2º degrau, e assim por diante. Então, o total necessário de blocos é dado por:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 20 = \frac{20 \cdot (1 + 20)}{2} = 210$$

Portanto, são necessários 210 blocos.

b) $210 \cdot 0{,}2^2 \cdot 1{,}5 = 12{,}6$

Portanto, o volume de concreto necessário para construir a escada descrita no item *a* é 12,6 m^3.

44. **a)** $V = x \cdot (30 - x) \cdot 2{,}5 \Rightarrow V = -2{,}5x^2 + 75x$

$$x_v = -\frac{75}{2 \cdot (-2{,}5)} = 15$$

Portanto, as dimensões da piscina devem ser 2,5 m, 15 m e 15 m.

b) $15 \cdot 15 \cdot 2{,}5 = 526{,}5$

Portanto, a capacidade dessa piscina é 562,5 m^3.

MODERNA

45. Note que o reservatório é um prisma regular de base hexagonal. Assim, temos:

$$V = \underbrace{6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4}}_{A_b} \cdot 10 \Rightarrow V \simeq 104$$

Logo:

$$\frac{104\,000}{10\,000} = 10$$

Portanto, a água do reservatório supre os bebedouros por, aproximadamente, 10 dias.

46. a) • Volume do assento:

$$V_{AC} = 1{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 \Rightarrow V_{AC} = 0{,}07$$

Assim, o volume do assento é 0,07 m^3.

• Volume do apoio:

$$V_{Ap} = \frac{0{,}2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 0{,}4 \Rightarrow V_{Ap} = 0{,}00692$$

Assim, o volume do apoio é 0,00692 m^3.

Calculando o volume total de concreto para construir um banco, temos:

$V_t = V_{AC} + 2V_{Ap} \Rightarrow V_t = 0{,}07 + 2 \cdot 0{,}00692 \Rightarrow$
$\Rightarrow V_t = 0{,}08384$

Logo:

$$\frac{2}{0{,}08384} \simeq 23$$

Portanto, com essa quantidade de concreto é possível construir aproximadamente 23 bancos.

b) • Calculando a área da superfície do acento A_a:

$$A_a = 2 \cdot (1{,}4 \cdot 0{,}5 + 1{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}1) = 1{,}78$$

• Calculando as seis áreas laterais dos apoios A_l:

$$A_l = 6 \cdot (0{,}4 \cdot 0{,}2) = 0{,}48$$

• Calculando a área da base do apoio A_b:

$$A_b = \frac{0{,}2^2\sqrt{3}}{4} \simeq 0{,}017$$

Dessa maneira, a área que será considerada para a pintura é a área da superfície do acento menos duas áreas da base dos prismas que estão em contato com ele, somada com as seis áreas laterais dos apoios, logo:

$$1{,}78 - (2 \cdot 0{,}017) + 0{,}48 \simeq 2{,}23$$

Assim, a área de superfície total que será pintada de um único banco é 2,23 m^2 totalizando 6,69 m^2 após 3 demãos.

Cada lata de tinta pinta 45 m^2 e temos um total de 23 bancos. Assim, temos:

$$6{,}69 \cdot 23 = 153{,}87$$

$$\frac{153{,}87}{45} \simeq 3{,}42$$

Portanto, devem ser adquiridas 4 latas de tinta para pintar os bancos.

47. a) Note que a área interna da piscina não foi alterada, houve mudança apenas na capacidade máxima da piscina. Essa variação corresponde ao volume da elevação interna:

$V_{antes} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}7 \Rightarrow V_{antes} = 2{,}8$, ou seja, 2,8 m^3.

Portanto, não há variação na área interna, mas ocorre uma redução de 2,8 m^3 na capacidade máxima da piscina.

b) Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: sim, pois não gera aumento de custos com revestimento e reduz o volume de água que deve ser tratada, diminuindo assim os custos; não, pois reduz o espaço disponível para o uso da piscina.

48. Resolução na página CXVI.

49. Inicialmente, calculamos o volume do prisma reto com base pentagonal:

$$V = 25{,}6 \cdot 20 \Rightarrow V = 512$$

Em seguida, determinamos o comprimento da aresta do cubo:

$$a^3 = 512 \Rightarrow a = 8$$

Portanto, o comprimento da aresta desse cubo é 8 cm.

50. Inicialmente, calculamos a medida da aresta da base:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x = 4$$

Logo:

$$V = \underbrace{\frac{4^2\sqrt{3}}{4}}_{A_b} \cdot \underbrace{4 \cdot 4}_{h} \Rightarrow V = 64\sqrt{3} \Rightarrow V \simeq 108{,}8$$

Portanto, o volume dessa embalagem é aproximadamente 108,8 cm^3.

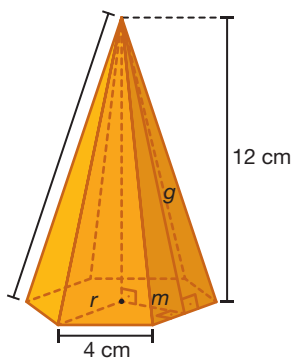
51. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

6 Pirâmides

1. Para responder a essa tarefa, os alunos devem estabelecer as relações a seguir:

- Relação entre o número de lados do polígono da base da pirâmide e o número total de arestas da pirâmide: o número total de arestas é igual ao dobro do número de lados do polígono que compõe a base.
- Relação entre o número de lados do polígono da base da pirâmide e o número de faces da pirâmide: o número de faces da pirâmide é igual ao número de lados do polígono que compõe a base mais 1.

2. Para auxiliar os alunos nessa tarefa, oriente-os a construir um esquema para representar a situação, conforme apresentado a seguir.



RONALDO INÁCIO

a) Como a base da pirâmide é um hexágono regular, o raio da base, representado por r, é igual à aresta da base, portanto o raio da base é 4 cm.

b) Indicando como x o comprimento da aresta lateral, temos:

$$x^2 = \underbrace{4^2}_{r} + 12^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{10}$$

Portanto, o comprimento da aresta lateral é $4\sqrt{10}$ cm.

c) Indicando como m o comprimento do apótema da base, temos:

$$m^2 + 2^2 = \underbrace{4^2}_{r} \Rightarrow m = 2\sqrt{3}$$

Portanto, o comprimento do apótema da base é $2\sqrt{3}$ cm.

MODERNA

d) Indicando como g o comprimento do apótema da pirâmide, temos:

$$g^2 = \underbrace{\left(2\sqrt{3}\right)}_{m} + 12^2 \Rightarrow g = 2\sqrt{39}$$

Portanto, o comprimento do apótema da pirâmide é $2\sqrt{39}$ cm.

3. Como as menores arrestas da pirâmide são $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{GF}$ e ambas têm o mesmo comprimento da aresta $\overleftrightarrow{AD}$, o comprimento da menor aresta é 3 cm.

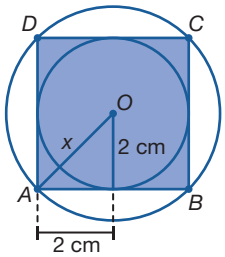
Para calcular o comprimento da maior aresta, fazemos:

$$HF^2 = \underset{GF}{3^2} + \underset{HG}{4^2} \Rightarrow HF = 5$$

$$HV^2 = \underset{HF}{5^2} + \underset{FV}{5^2} \Rightarrow HV = 5\sqrt{2}$$

Portanto, o comprimento da maior aresta é $5\sqrt{2}$ cm.

4. Caso considere necessário, sugira a construção do esquema a seguir para auxiliar nos cálculos.



RONALDO INÁCIO

Como a pirâmide é quadrangular regular, sua base é um quadrado, assim o comprimento do raio da circunferência inscrita é igual à metade do comprimento da aresta do quadrado. Então:

$$2^2 + 2^2 = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

Portanto, o comprimento do raio que circunscreve a base dessa circunferência é $2\sqrt{2}$ cm.

5. O tetraedro regular possui 6 arestas congruentes. Assim, a medida de cada aresta é 2 cm.

a) Indicando por A_ℓ a área lateral, temos:

$$A_\ell = 3 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_\ell = 3\sqrt{3}$$

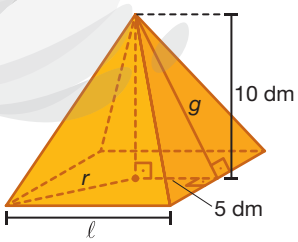
Portanto, a área lateral é $3\sqrt{3}$ cm^2.

b) Indicando por A_t a área total, temos:

$$A_t = 4 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = 4\sqrt{3}$$

Portanto, a área total é $4\sqrt{3}$ cm^2.

6. Oriente os alunos a construir o esquema a seguir para auxiliar na resolução da tarefa.



RONALDO INÁCIO

a) Como o comprimento da aresta da base representado por ℓ é o dobro do apótema da base, logo:

$$\ell = 2 \cdot 5 \Rightarrow \ell = 10$$

Portanto, o comprimento da aresta da base é 10 dm.

b) A partir do esquema, é possível observar que o raio da circunferência, representado por r, coincide com a metade da diagonal do quadrado. Logo:

$$\left(2r\right)^2 = \underset{\ell}{10^2} + \underset{\ell}{10^2} \Rightarrow r = 5\sqrt{2}$$

Portanto, o comprimento do raio da circunferência que circunscreve a base é $5\sqrt{2}$ dm.

c) Como a base da pirâmide é um quadrado, a área da base, representada por A_b, é dada por:

$$A_b = \underset{\ell}{10^2} \Rightarrow A_b = 100$$

Portanto, a área da base é 100 dm^2.

d) Para calcularmos a área total, devemos determinar o valor do comprimento do apótema da pirâmide e a área da lateral da pirâmide.

$$g^2 = 10^2 + 5^2 \Rightarrow g = 5\sqrt{5}$$

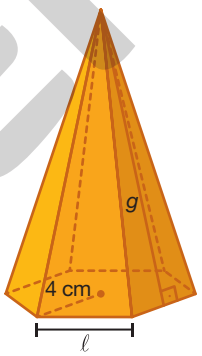
$$A_\ell = 4 \cdot \frac{\overset{\ell}{10} \cdot \overset{g}{5\sqrt{5}}}{2} \Rightarrow A_\ell = 100\sqrt{5}$$

Logo:

$$A_t = 100 + 100\sqrt{5} \Rightarrow A_t = 100 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$$

Portanto, a área total é $100 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$ dm^2.

7. Oriente os alunos a construir o esquema a seguir para auxiliar na resolução da tarefa.



RONALDO INÁCIO

Inicialmente, calculamos a área lateral:

$$A_\ell = 6 \cdot \frac{\overset{\ell}{4} \cdot g}{2} \Rightarrow A_\ell = 12g$$

Calculando a área da base, temos:

$$A_b = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}$$

Por fim, obtemos a área total:

$$A_t = 24 \cdot \left(4 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12g + 24\sqrt{3} = 24 \cdot \left(4 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow g = 8$$

Portanto, o comprimento do apótema é 8 cm.

8. Sendo g a medida do apótema da pirâmide inferior, temos:

$$g^2 + 3^2 = 8^2 \Rightarrow g = \sqrt{55}$$

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{6\sqrt{55}}{2} \Rightarrow A_\ell = 12\sqrt{55}$$

Portanto, foram utilizados, no mínimo, $12\sqrt{55}$ cm^2 de papel para encapar a parte inferior.

MODERNA

9. Inicialmente, calculamos a área de cada face.

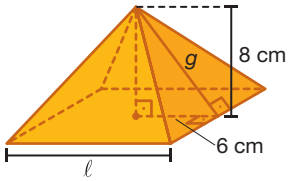
$$A_F = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_F = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Logo:

$$A_t = 8 \cdot A_\ell \Rightarrow A_t = \frac{8\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = 2\sqrt{3}$$

Portanto, a área da superfície de cada pingente é $2\sqrt{3}$ cm².

10. Oriente os alunos a construir o esquema a seguir para auxiliar na resolução da tarefa.



RONALDO INÁCIO

Inicialmente, determinamos a área da pirâmide:

$$g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g = 10$$

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{\overbrace{12 \cdot 10}^{\ell}}{2} \Rightarrow A_\ell = 240$$

$$A_b = 12^2 \Rightarrow A_b = 144$$

Assim, calculamos a área total da embalagem.

$$A_t = 240 + 144 \Rightarrow A_t = 384$$

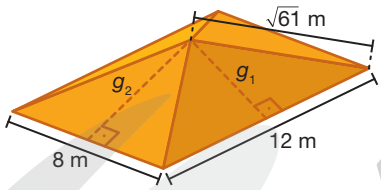
Como o papel de presente é um retângulo de 15 cm por 25 cm, temos:

$$A_p = 15 \cdot 25 \Rightarrow A_p = 375$$

$$A = \underbrace{384}_{A_t} - \underbrace{375}_{A_p} = 9$$

Portanto, faltarão 9 cm² de papel para encapar a embalagem.

11. Oriente os alunos a construir o esquema a seguir para auxiliar na resolução da tarefa.



RONALDO INÁCIO

É possível observar que temos duas medidas de apótema diferentes. Então:

$$g_1^2 + 6^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2 \Rightarrow g_1 = 5$$

$$g_2^2 + 4^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2 \Rightarrow g_2 = 3\sqrt{5}$$

Calculando a área do telhado, temos:

$$A_\ell = 2 \cdot \frac{12 \cdot 5}{2} + 2 \cdot \frac{8 \cdot 3 \cdot \overbrace{2{,}2}^{\sqrt{5}}}{2} \Rightarrow A_\ell = 112{,}8$$

Logo, o número de telhas necessárias é dado por:

$$112{,}8 \cdot 16 + 195 = 1\,999{,}8$$

Portanto, serão necessárias, no mínimo, 2 000 telhas.

12. Se os alunos tiverem alguma dificuldade em resolver a tarefa, sugira que separem a situação em duas partes.

- Calculando a área lateral da pirâmide, temos:

Sendo g o comprimento do apótema da pirâmide, temos:

$$g^2 + 0{,}3^2 = 1^2 \Rightarrow g = \frac{\sqrt{91}}{10}$$

$$A_\ell = 10 \cdot \frac{0{,}6 \cdot \frac{\sqrt{91}}{10}}{2} \Rightarrow A_\ell = 0{,}3\sqrt{91} \Rightarrow A_\ell \simeq 2{,}86$$

- Calculando a área lateral do prisma, obtemos:

$$A_\ell = 10 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}05 \Rightarrow A_\ell = 0{,}3$$

Somando as áreas laterais que formam o guarda-sol, temos:

$$2{,}86 + 0{,}3 = 3{,}16$$

Portanto, a quantidade mínima necessária de lona é 3,16 m².

13. Sendo g o comprimento do apótema da pirâmide, então:

$$g^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3{,}5^2 \Rightarrow g = 2\sqrt{3}$$

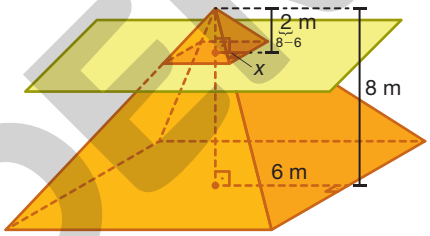
Como será necessária uma quantidade de material suficiente para cobrir 7 faces, calculamos:

$$7 \cdot \frac{1 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \simeq 12$$

Portanto, a quantidade mínima de material necessário para revestir a oca é, aproximadamente, 12 m².

14. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

15. Para resolver o problema, oriente os alunos a montar um esquema que represente a situação.



RONALDO INÁCIO

Determinando a relação de proporcionalidade entre a pirâmide menor e a pirâmide maior, temos:

$$\frac{2}{x} = \frac{8}{6} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Logo, obtemos:

$$A_b = (2x)^2 \Rightarrow A_b = \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow A_b = 9$$

Assim, a área da base é 9 m².

Calculando o volume da pirâmide menor, temos:

$$V = \frac{\overbrace{9}^{A_b} \cdot \overbrace{2}^{h}}{3} \Rightarrow V = 6$$

Portanto, o volume da pirâmide menor é 6 m³.

16. Inicialmente, calculamos a área da base dessa pirâmide:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow 20 = \frac{A_b \cdot 5}{3} \Rightarrow A_b = 12$$

Portanto, os possíveis comprimentos inteiros das arestas da base são: 1 cm e 12 cm; 2 cm e 6 cm; 3 cm e 4 cm.

17. **a)** De acordo com a planificação, temos:

- comprimento do apótema da pirâmide: 3 cm;
- comprimento da aresta da base: 2 cm.

Sendo assim:

$$m^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

Logo, o comprimento do apótema da base é $\sqrt{3}$ cm.

MODERNA

b) Calculando as áreas da base e total, temos:

$$A_b = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 6\sqrt{3}$$

Assim, a área da base é $6\sqrt{3}$ cm². Segue que:

$$A_t = \underbrace{6 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2}}_{A_t} + 6\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 6 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)$$

Portanto, a base total é $6 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm².

c) Para calcular o volume da pirâmide, sendo h a sua altura, fazemos:

$$\underbrace{h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}_{m} = \underbrace{3^2}_{g} \Rightarrow h = \sqrt{6}$$

$$V = \frac{\overbrace{6\sqrt{3}}^{A_b} \cdot \overbrace{\sqrt{6}}^{h}}{3} \Rightarrow V = 6\sqrt{2}$$

Portanto, a pirâmide, quando construída, terá um volume de $6\sqrt{2}$ cm³.

18. Calculando cada um dos volumes separadamente, temos:

- volume da pirâmide *ABCDV*:

$$V = \frac{(a \cdot b) \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{abh}{3}$$

- volume da pirâmide *EFGHV*:

$$V = \frac{\left(\frac{a \cdot b}{2}\right) \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{abh}{6}$$

Assim, a razão é igual a:

$$\frac{\frac{abh}{6}}{\frac{abh}{3}} = \frac{1}{2}$$

Logo, a razão entre os volumes das pirâmides *EFGHV* e *ABCDV* é $\frac{1}{2}$.

19. Volume da pirâmide: $\frac{\overbrace{50^2}^{A_b} \cdot \overbrace{60}^{h}}{3} = 50\,000$

Assim, o tempo necessário para a conclusão da obra foi $\underbrace{100}_{\frac{50\,000}{500}}$ meses ou 8 anos e 4 meses.

20. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

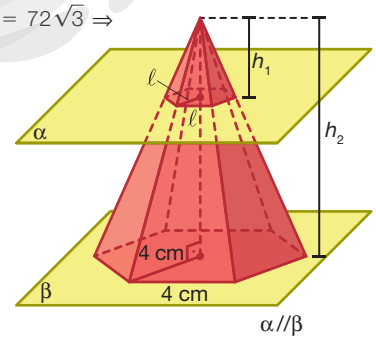
21. Como o volume da pirâmide cuja base está contida no plano β é $72\sqrt{3}$ cm³, temos:

$$V = \frac{\overbrace{6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4}}^{A_b} \cdot h_2}{3} = 72\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = 9$$

$$\frac{h_1}{\underbrace{9}_{h_2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow h_1 = 3$$

$$\frac{\overbrace{h_1}^{3}}{\ell} = \frac{\overbrace{h_2}^{9}}{4} \Rightarrow \ell = \frac{4}{3}$$



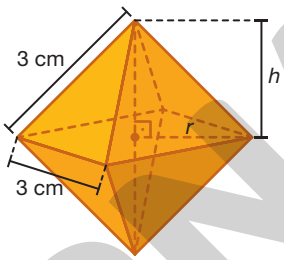
RONALDO INÁCIO

Assim, o volume da pirâmide com base no plano α é dado por:

$$V = \frac{\overbrace{6 \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}}^{A_b} \cdot \overbrace{\frac{h_1}{3}}^{h}}{3} \Rightarrow V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, o volume da pirâmide com base no plano α é $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm³.

22. Para a resolução da tarefa, oriente os alunos a construir o esquema a seguir para auxiliar nos cálculos. Se julgar necessário, diga a eles que densidade é a razão entre massa e volume.



RONALDO INÁCIO

$$(2r)^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$h^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$V = 2 \cdot \frac{\overbrace{3^2}^{A_b} \cdot \overbrace{\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{h}}{3} \Rightarrow V = 9\sqrt{2}$$

Assim, a massa da pedra é dada por:

$$9\sqrt{2} \cdot 19{,}3 \simeq 245$$

Portanto, a massa da pedra de ouro é aproximadamente 245 g.

23. **a)** Indicando por a o comprimento da aresta do octaedro, temos:

$$a^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow a = 10\sqrt{2}$$

Como a superfície externa do octaedro é formada de 8 triângulos equiláteros de lado a, podemos determinar sua área por:

$$A = 8 \cdot \frac{\left(10\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 400\sqrt{3}$$

Portanto, a área da superfície do octaedro é $400\sqrt{3}$ cm².

b) Como o octaedro é formado por 2 pirâmides regulares de base quadrada, temos:

$$V = 2 \cdot \frac{\left(10\sqrt{2}\right)^2 \cdot 10}{3} \Rightarrow V = \frac{4\,000}{3}$$

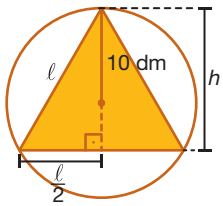
Assim, subtraindo o volume da caixa pelo volume do objeto, temos:

$$20^3 - \frac{4\,000}{3} = \frac{20\,000}{3}$$

Portanto, o volume que permaneceu na caixa é $\frac{20\,000}{3}$ cm³ ou $\frac{20}{3}$ ℓ.

MODERNA

24. Para resolver a tarefa, oriente os alunos a compor o esquema a seguir para auxiliar nos cálculos.



RONALDO INÁCIO

Podemos observar que o apótema do triângulo equilátero corresponde a $\frac{1}{3}h$. Assim, temos:

$$10 = \frac{2}{3}h \Rightarrow h = 15$$

$$\ell^2 = 15^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell = 10\sqrt{3}$$

$$V = \frac{\overbrace{10^3 \cdot \sqrt{3^3}}^{\ell^3} \cdot \sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = 250\sqrt{6}$$

Portanto, o volume é $250\sqrt{6}$ dm^3.

25. Calculando a área das bases menor e maior, temos:

$$A_b = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$A_B = \frac{9^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

$$a^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow a = 4$$

$$A_\ell = 3 \cdot \frac{(9+3) \cdot \overbrace{4}^{a}}{2} \Rightarrow A_\ell = 72$$

$$A_t = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{81\sqrt{3}}{4} + 72 \Rightarrow A_t = 9 \cdot \left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

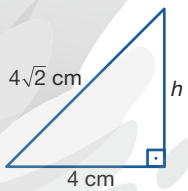
Portanto, a área total desse tronco de pirâmide é

$9 \cdot \left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ m^2.

26. Indicando por ℓ o comprimento da aresta da base maior, temos:

$$\ell^2 + \ell^2 = \left(12\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \ell = 12$$

Assim, o comprimento do cateto do triângulo retângulo destacado na figura e contido na base é 4 cm.



RONALDO INÁCIO

a) Calculando a altura do tronco de pirâmide, temos:

$$h^2 + 4^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow h = 4$$

Assim, a altura do tronco de pirâmide é 4 cm.

b) Calculando a área lateral do tronco de pirâmide, temos:

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{(12+4) \cdot 4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A_\ell = 128\sqrt{2}$$

Assim, a área lateral do tronco de pirâmide é $128\sqrt{2}$ cm^2.

c) Como o comprimento da aresta da base menor e o da base maior são, respectivamente, 4 cm e 12 cm, temos:

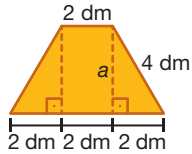
$$A_b = 4^2 \Rightarrow A_b = 16$$

$$A_B = 12^2 \Rightarrow A_B = 144$$

$$A_t = 128\sqrt{2} + 16 + 144 \Rightarrow A_t = 32 \cdot \left(4\sqrt{2} + 5\right)$$

Assim, a área total desse tronco de pirâmide é $32 \cdot \left(4\sqrt{2} + 5\right)$ cm^2.

27. Para resolver a tarefa, oriente os alunos a compor a visão lateral do tronco da pirâmide.



RONALDO INÁCIO

Logo:

$$a^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

Calculando a área lateral, temos:

$$A_\ell = 3 \cdot \frac{(6+2) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

Assim, a área lateral é $24\sqrt{3}$ cm^2.

Então, calculando a área total, temos:

$$A_b = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \sqrt{3}$$

$$A_B = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = 9\sqrt{3}$$

$$A_t = 24\sqrt{3} + \sqrt{3} + 9\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 34\sqrt{3}$$

Portanto, a área lateral desse tronco de pirâmide é $24\sqrt{3}$ dm^2 e sua área total, $34\sqrt{3}$ dm^2.

28. Inicialmente, calculamos o comprimento da aresta da base maior, o comprimento da base menor e a altura:

- aresta da base maior:

$$A_B = 384\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{\ell_1^2\sqrt{3}}{4} = 384\sqrt{3} \Rightarrow \ell_1 = 16$$

- aresta da base menor:

$$A_b = 150\sqrt{3} \Rightarrow 6 \cdot \frac{\ell_2^2\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3} \Rightarrow \ell_2 = 10$$

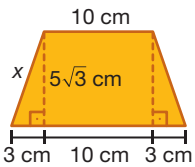
- altura:

$$A_t = 924\sqrt{3} \Rightarrow A_\ell + 150\sqrt{3} + 384\sqrt{3} = 924\sqrt{3} \Rightarrow$$

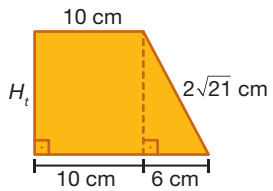
$$\Rightarrow A_\ell = 390\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot \frac{(16+10) \cdot a}{2} = 390\sqrt{3} \Rightarrow a = 5\sqrt{3}$$

A figura a seguir representa uma face lateral e x é a medida da aresta lateral.



$$x^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{21}$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

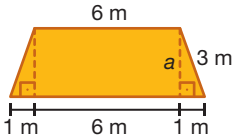
$H_t^2 + 6^2 = \left(2\sqrt{21}\right)^2 \Rightarrow H_t = 4\sqrt{3} \rightarrow 4\sqrt{3}$ cm

Portanto, o comprimento das arestas da base são 16 cm e 10 cm e a altura desse tronco de pirâmide é $4\sqrt{3}$ cm.

29. Inicialmente, calculamos a altura do tronco.

$a^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

Para facilitar o cálculo da área lateral, proponha aos alunos montar um esquema, como mostrado a seguir.



RONALDO INÁCIO

Assim, obtemos:

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{(8+6) \cdot 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A_\ell = 56\sqrt{2}$$

Calculando a área das bases menor e maior, temos:

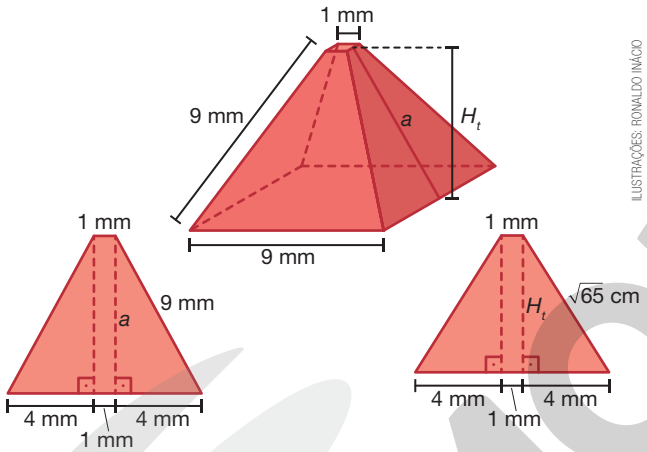
$$A_b = 6^2 \Rightarrow A_b = 36$$
$$A_B = 8^2 \Rightarrow A_B = 64$$

Por fim, calculamos a área total do tronco.

$$A_t = 36 + 64 + 56\sqrt{2} \Rightarrow A_t = 4 \cdot \left(25 + 14\sqrt{2}\right)$$

Portanto, a área total desse tronco é $4 \cdot \left(25 + 14\sqrt{2}\right)$ m².

30. Para realizar a tarefa, considere os esquemas a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

$a^2 + 4^2 = 9^2 \Rightarrow a = \sqrt{65}$ $\qquad H_t^2 + 4^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2 \Rightarrow H_t = 7$

$$V_{tronco} = \frac{7}{3} \cdot \left(\sqrt{1^2 \cdot 9^2} + 1^2 + 9^2\right) \Rightarrow V_{tronco} = \frac{637}{3}$$

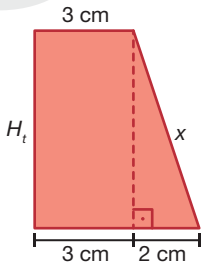
Portanto, o volume desse tronco de pirâmide é $\frac{637}{3}$ mm³.

31. Calculando o dobro do volume, temos:

$$2V_{tronco} = 2 \cdot \frac{30}{3} \cdot \left(\sqrt{15^2 \cdot 25^2} + 15^2 + 25^2\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_{tronco} = 24\,500$$

Portanto, o volume do concreto é 24 500 cm³.

32. Indicando por x a aresta lateral e por H_t a altura do tronco, temos:

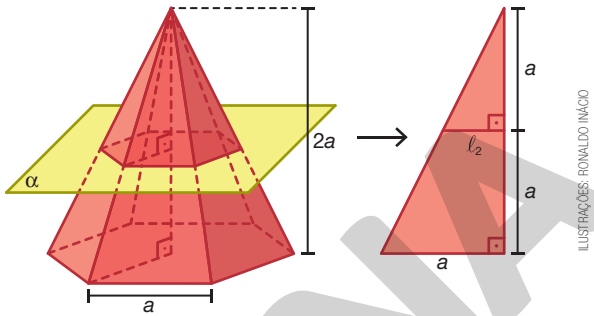


RONALDO INÁCIO

$$V_{tronco} = 6 \cdot \left(2\sqrt{35} + 27\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{H_t}{3} \cdot \left(\sqrt{21 \cdot 60} + 21 + 60\right) = 6 \cdot \left(2\sqrt{35} + 27\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H_t = 6$$
$$x^2 = 6^2 + 2^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$

Portanto, a aresta lateral desse tronco de pirâmide é $2\sqrt{10}$ cm.

33. **a)** Para calcular a área da base da pirâmide, considere a seguinte situação:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

$$\frac{a}{\ell_2} = \frac{2a}{a} \Rightarrow \ell_2 = \frac{a}{2}$$

$$A_b = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$$

b) $V = \frac{\overbrace{\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}}^{A_b} \cdot \overbrace{a}^{h}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

c) $A_B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$$V_{tronco} = \frac{a}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{3a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{8}$$

34. **a)** A altura do subsolo do monumento é 9 m.

b) Calculando 10% das dimensões originais, temos:

$\ell_1 = 0{,}1 \cdot 9 = 0{,}9 \Rightarrow A_B = 0{,}9^2 = 0{,}81$

$\ell_2 = 0{,}1 \cdot 7 = 0{,}7 \Rightarrow A_b = 0{,}7^2 = 0{,}49$

$H_t = 0{,}1 \cdot 72 = 7{,}2$

$$V_{tronco} = \frac{7{,}2}{3} \cdot \left(\sqrt{0{,}49 \cdot 0{,}81} + 0{,}49 + 0{,}81\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_{tronco} = 4{,}632$$

Portanto, a quantidade necessária de material é 4,632 m³.

c) Resposta pessoal.

35. **a)** Inicialmente, calculamos as áreas da base menor e da base maior:

$$A_b = 4 \cdot 3 - \frac{2 \cdot 1{,}5}{2} \Rightarrow A_b = 10{,}5$$
$$A_B = 10 \cdot 6 - \frac{5 \cdot 3}{2} \Rightarrow A_B = 52{,}5$$

Assim, somando as áreas da base menor e da base maior, temos:

$$A_b + A_B = 10{,}5 + 52{,}5 = 63$$

Portanto, a soma das áreas da base menor e da base maior é 63 m².

MODERNA

b) Calculando as áreas das bases antes da seção, temos:

$$A_b = 4 \cdot 3 \Rightarrow A_b = 12$$

$$A_B = 10 \cdot 6 \Rightarrow A_B = 60$$

Dessa forma, podemos calcular o volume do tronco:

$$V_{tronco} = \frac{9}{3} \cdot \left(\sqrt{12 \cdot 60} + 12 + 60 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{tronco} = 36 \cdot \left(\sqrt{5} + 6 \right)$$

Portanto, o volume do tronco antes da seção é $36 \cdot \left(\sqrt{5} + 6 \right)$ cm³.

c) Calculando as áreas das bases obtidas pela seção, temos:

$$A_b = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2} \Rightarrow A_b = \frac{3}{2}$$

$$A_B = \frac{5 \cdot 3}{2} \Rightarrow A_B = \frac{15}{2}$$

Dessa forma, podemos calcular o volume do tronco:

$$V_{tronco} = \frac{9}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{15}{2}} + \frac{3}{2} + \frac{15}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{tronco} = 9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 3 \right)$$

Portanto, o volume do tronco da pirâmide antes da seção é $9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 3 \right)$ cm³.

36. Calculando as áreas da base menor e da base maior, temos:

$$A_b = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}$$

$$A_B = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = 54\sqrt{3}$$

$$V_{tronco} = \frac{3}{3} \cdot \left(\sqrt{24\sqrt{3} \cdot 54\sqrt{3}} + 24\sqrt{3} + 54\sqrt{3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{tronco} = 114\sqrt{3}$$

Portanto, o volume de plástico utilizado na confecção desse troféu foi $114\sqrt{3}$ cm³.

37. Calculando as áreas das bases, temos:

$$A_b = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_B = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_B = \sqrt{3}$$

$$V_{tronco} = \frac{3}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} \right)$$

$$\Rightarrow V_{tronco} = \frac{7\sqrt{3}}{4} = 2{,}975$$

Assim, o volume do tronco é 2,975 m³. Como 1 m³ = 1 000 ℓ, esse reservatório é capaz de armazenar, no máximo, 2 975 ℓ.

38. Caso julgue necessário, diga aos alunos que a parte submersa da pirâmide é um tronco de pirâmide.

A parte submersa da pirâmide é um tronco de pirâmide cujo volume, em cm³, é:

$$V_{tronco} = 20^2 \cdot 4 = 1\,600 \Rightarrow V_{tronco} = 1\,600 \text{ cm}^3$$

Desse modo, temos:

$$\frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{30}{15} \right)^2 \Rightarrow A_B = 4A_b$$

Assim, segue que:

$$V_{tronco} = 1\,600 \Rightarrow \frac{15}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot 4A_b} + A_b + 4A_b \right) = 1\,600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_b = \frac{320}{7}$$

Desse modo, o volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{\frac{320}{7} \cdot 15}{3} + 1600 \Rightarrow V_{tronco} = \frac{12\,800}{7}$$

Portanto, o volume dessa pirâmide é $\frac{12\,800}{7}$ cm³.

8 Cilindro

1. a) • $A_b = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_b = 3{,}14 \cdot 4 \Rightarrow A_b = 12{,}56$

Assim, a área da base é 12,56 cm².

• $A_\ell = 2\pi \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow A_\ell = 20 \cdot 3{,}14 \Rightarrow A_\ell = 62{,}8$

Assim, a área da base é 62,8 cm².

• $A_t = 2 \cdot 12{,}56 + 62{,}8 \Rightarrow A_t = 87{,}92$

Portanto, a área total é 87,92 cm².

b) • $A_b = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_b = 3{,}14 \cdot 9 \Rightarrow A_b = 28{,}26$

Assim, a área da base é 28,26 cm².

• $A_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 9 \Rightarrow A_\ell = 54 \cdot 3{,}14 \Rightarrow A_\ell = 169{,}56$

Assim, a área da base é 169,56 cm².

• $A_t = 2 \cdot 28{,}26 + 169{,}56 \Rightarrow A_t = 226{,}08$

Portanto, a área total é 226,08 cm².

2. $A_t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12{,}5 \cdot (12{,}5 + 40) \Rightarrow A_t = 4\,121{,}25$

Portanto, a área do cilindro é aproximadamente 4 121,25 dm².

3. $A_\ell = 1\,570 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \cdot 25 = 1\,570 \Rightarrow r \simeq 10$

Portanto, a armação deve ter um raio de, aproximadamente, 10 cm.

4. $A_\ell = 314 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot (5 + h) = 314 \Rightarrow h = 5$

Portanto, a altura do reservatório é aproximadamente 5 m.

5. a) $A_\ell = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}65 \cdot 1{,}7 \simeq 6{,}94$

Portanto, a área da superfície lateral é aproximadamente 6,94 m².

b) Chamando C o comprimento da circunferência da base do cilindro, temos:

$$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}65 = 4{,}082$$

Assim, o comprimento da circunferência é 4,082 m.

Note que a área compactada pode ser aproximada por um retângulo de lados de comprimentos 1,7 m e 204,1 m. Desse modo, temos:

$$A = 1{,}7 \cdot 204{,}1 \Rightarrow A = 346{,}97$$

Portanto, a área A compactada é aproximadamente 346,97 m².

6. a) $A_t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3(3 + 5) = 150{,}72$

Portanto, a área é aproximadamente 150,72 u.a. (unidades de área).

b) $A_t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5(5 + 3) = 251{,}2$

Portanto, a área é aproximadamente 251,2 u.a. (unidades de área).

7. Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$\text{Área}_{\text{rótulo}} = \underbrace{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5}_{\substack{\text{comprimento} \\ \text{do rótulo}}} \cdot \underbrace{0{,}6 \cdot 15}_{\substack{\text{60\% da} \\ \text{altura do} \\ \text{pote}}} = 31{,}4 \cdot 9 = 282{,}6$$

Portanto, a área de cada rótulo é aproximadamente 282,6 cm².

MODERNA

8. Inicialmente, como cada embalagem tem o formato de cilindro equilátero, então $2r = h$, em que r é o raio da base e h é a altura da embalagem, respectivamente. Assim, temos:

$$A_t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}175(0{,}175 + 0{,}35) \Rightarrow A_t \simeq 0{,}577$$

Logo, a área de cada embalagem é aproximadamente 0,577 m^2.

Em seguida, calculamos quantos mililitros de tinta são necessários para pintar 1 m^2:

$$\frac{2{,}5}{350} = \frac{1}{Q} \Rightarrow Q = \frac{350}{2{,}5} \Rightarrow Q = 140$$

Assim, são necessários 140 mililitros de tinta para pintar 1 m^2. Então, a quantidade total de tinta para pintar 125 embalagens é:

$$Q_{total} = 125 \cdot 140 \cdot 0{,}577 = 10\,097{,}5$$

Portanto, para pintar 125 embalagens, serão necessários aproximadamente 10 097,5 mℓ de tinta.

9. Inicialmente, adicionamos as áreas das superfícies laterais dos sete pilares:

$$A_t = 6 \cdot \underbrace{2\pi \cdot 3{,}5 \cdot 0{,}15}_{\substack{\text{área de cada pilar}\\ \text{de altura 3,5 m}}} + \underbrace{2\pi \cdot 5 \cdot 0{,}15}_{\substack{\text{área do pilar}\\ \text{de altura 5 m}}} \simeq 24{,}492$$

Logo, a soma das áreas laterais é aproximadamente 24,492 m^2.

Em seguida, calculamos quantos mililitros de impermeabilizante são necessários para proteger 1 m^2:

$$\frac{900}{Q} = \frac{9}{1} \Rightarrow Q = \frac{900}{9} \Rightarrow Q = 100$$

Assim, são necessários 100 mℓ de impermeabilizante para proteger 1 m^2. Desse modo, a quantidade total necessária de impermeabilizante para proteger os pilares é:

$$Q_{total} = \underbrace{100}_{\substack{\text{quantidade de impermeabi-}\\ \text{lizante em mililitros para}\\ \text{proteger 1 m}^2}} \cdot \underbrace{24{,}492}_{\substack{\text{soma da área}\\ \text{total a ser}\\ \text{protegida}}} = 2\,449{,}2$$

Portanto, para proteger todos os pilares, serão necessários aproximadamente 2 449,2 mℓ ou 2,45 litros de impermeabilizante.

10. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

11. Inicialmente, calculamos o raio da base do AquaDom:

$$C = 2\pi r \Rightarrow 34{,}54 = 6{,}28r \Rightarrow r \simeq 5{,}5$$

Em seguida, calculamos a área lateral:

$$A_\ell = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}5 \cdot 25 \Rightarrow A_\ell = 863{,}5$$

Portanto, a área da superfície lateral do AquaDom é aproximadamente 863,5 m^2.

12. Considerando o cilindro com o comprimento da circunferência da base de 15,7 cm, temos:

$$C = 15{,}7 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 15{,}7 \Rightarrow r = \frac{15{,}7}{6{,}28} \Rightarrow r \simeq 2$$

$$A_b = 3{,}14 \cdot (2{,}5)^2 = 19{,}625$$

Portanto, o fundo do recipiente terá no máximo 19,625 cm^2.

13. x: quantidade de metal em 1 cm^2

$$A_b = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_b = 9\pi$$

$$A_\ell = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10 \Rightarrow A_\ell = 60\pi$$

$$A_t = 9\pi + 60\pi \Rightarrow A_t = 69\pi$$

Assim, a área é 69π cm^2.

$$x = \frac{130}{69\pi} \simeq 0{,}6$$

Portanto, em 1 cm^2 dessa chapa há aproximadamente 0,6 g de metal.

14. **a)** $V = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 8 = 56{,}52$

Portanto, o volume desse cilindro é aproximadamente 56,52 m^3.

b) $V = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 6 = 169{,}56$

Portanto, o volume desse cilindro é aproximadamente 169,56 m^3.

15. $V = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 20 = 251{,}2$

Portanto, o volume desse cilindro é aproximadamente 251,2 cm^3.

16. $V = 15\pi \Rightarrow \pi r^2 \cdot 3 = 15\pi \Rightarrow r = \sqrt{5}$

Portanto, o comprimento do raio da base é $\sqrt{5}$ cm.

17. $V = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4 = 113{,}04$

Assim, o volume desse reservatório é 113,04 m^3. Desse modo, a capacidade C do reservatório, em litros, é dada por:

$$\frac{1}{1\,000} = \frac{V}{C} \Rightarrow \frac{1}{1\,000} = \frac{113{,}04}{C} \Rightarrow C = 113\,040$$

Portanto, a capacidade desse reservatório é aproximadamente 113 040 ℓ.

18 **a)** Nesse caso, o raio da base e a altura do cilindro são $r = 2$ cm e $h = 4$ cm, respectivamente. Assim:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 4 = 50{,}24$$

Portanto, o volume do cilindro é aproximadamente 50,24 cm^3.

b) Nesse caso, o raio da base e a altura do cilindro são $r = 8$ cm e $h = 3{,}7$ cm, respectivamente. Assim:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 3{,}7 = 743{,}552$$

Portanto, o volume do cilindro é aproximadamente 743,55 cm^3.

19. $V = 3{,}14 \cdot 0{,}05^2 \cdot h = 0{,}00785\,h$

Desse modo, temos:

$$\frac{1}{1\,000} = \frac{V}{0{,}628} \Rightarrow \frac{1}{1\,000} = \frac{0{,}00785h}{0{,}628} \Rightarrow h = 0{,}08$$

Portanto, a jarra deve encher até a altura de, aproximadamente, 0,08 m ou 8 cm.

20. alternativa **c**

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 81 = 3 \cdot r^2 \cdot 3 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

Considerando o comprimento do raio antigo r_1, temos:

$$3 - 1 = 2$$

Portanto, o aumento deve em torno de 2 m.

21. **a)** Chamando **A**, **B** e **C**, respectivamente, os furos de 8 cm, 15 cm e 12 cm de diâmetro, temos:

$$V_A = 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 20 = 1\,004{,}8$$

Assim, o volume de **A** é 1 004,8 cm^3.

$$V_B = 3{,}14 \cdot 7{,}5^2 \cdot 20 = 3\,532{,}5$$

Assim, o volume de **B** é 3 532,5 cm^3.

$$V_C = 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 20 = 2\,260{,}8$$

Assim, o volume de **C** é 2 260,8 cm^3.

Adicionando os volumes, temos:

$V_1 = V_A + V_B + V_C = 1\,004{,}8 + 3\,532{,}5 + 2\,260{,}8 = 6\,798{,}1$

Portanto, o volume V_1 de metal retirado é aproximadamente 6 798,1 cm^3.

b) Sendo V_2 o volume do paralelepípedo de dimensões 50 cm, 60 cm e 20 cm, temos:

$$V = V_2 - V_1 = 50 \cdot 60 \cdot 20 - 6\,798{,}1 = 53\,201{,}9$$

Portanto, o volume V da peça obtida é aproximadamente 53 201,9 cm^3.

MODELO

22. alternativa **c**

Seja V o volume do tanque. De acordo com o enunciado do problema, temos:

$$\underbrace{0{,}05}_{5\%} \cdot V = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 0{,}25$$

$$V = \frac{3{,}14}{0{,}05}$$

$$V = 62{,}8$$

Portanto, a alternativa que melhor se aproxima do volume total do tanque é 63 m³.

23. Denotando por V_1 e V_2 o volume da água e o do sólido, respectivamente, contidos no recipiente, temos:

$$V_1 = 3{,}14 \cdot 6{,}5^2 \cdot 9 = 1\,193{,}985$$

Assim, o volume V_1 é 1 193,985 cm³. Logo:

$$V_1 + V_2 = 3{,}14 \cdot 6{,}5^2 \cdot 14 \Rightarrow V_2 = 1\,857{,}31 - 1\,193{,}985 = 663{,}325$$

Portanto, V_2 é aproximadamente 663,325 cm³.

24. Sendo V_1 o volume de chocolate em centímetros cúbicos necessário para produzir uma unidade, temos:

$$\frac{\overbrace{1\,000\,000}^{\substack{1\text{ m}^3\text{ ou}\\ 1\,000\,000\text{ cm}^3}}}{1\,000} = \frac{V_1}{\underbrace{0{,}058875}_{\frac{58{,}875}{1\,000}}} \Rightarrow V_1 = 58{,}875$$

Assim, o volume de V_1 é 58,875 cm³. Desse modo:

$V_1 = 3{,}14 \cdot 1{,}25^2 \cdot h \Rightarrow 58{,}875 = 4{,}90625 \cdot h \Rightarrow h = 12$

Portanto, o comprimento h do chocolate é aproximadamente 12 cm.

25. alternativa **d**

$$V = 3 \cdot 300^2 \cdot 1\,200 = 324\,000\,000$$

$$\frac{1}{3}V = \frac{324\,000\,000}{3} = 108\,000\,000$$

Sabendo que o volume do cubo é dado por $V = a \cdot b \cdot c$, temos:

$$108\,000\,000 = 1\,000^2 \cdot h \Rightarrow h = 108$$

Portanto, o índice pluviométrico da região durante o período do temporal é 108 mm.

26. alternativa **c**

Sejam r_1 e r_2 os raios da base de C_1 e C_2, respectivamente. Desse modo temos:

$$\pi r_1^{\,2} = 2\pi r_2^{\,2}$$

$$r_1^{\,2} = 2r_2^{\,2}$$

Assim,

$$V_{C_1} = V_{C_2}$$

$$\pi r_1^{\,2} h_1 = \pi r_2^{\,2} h_2$$

$$2r_2^{\,2} \cdot h_1 = r_2^{\,2} \cdot h_2$$

$$h_2 = 2h_1$$

27. Denotando por V o volume do galpão, temos:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 12}{2} + 8 \cdot 12 \cdot 3 = 589{,}44$$

Assim, o volume do galpão é 589,44 m³. Desse modo, o número P de pontos a serem instalados é dado por:

$$P = \frac{589{,}44}{120} \simeq 5$$

Portanto, serão instalados 5 pontos de refrigeração.

28. Inicialmente, calculamos o volume total do reservatório:

$$V = 3{,}14 \cdot \left(1{,}265\right)^2 \cdot 6$$

$$V \simeq 30{,}15$$

Assim, o volume total do reservatório é aproximadamente 30,15 m³. Calculando 80% desse valor, temos:

$$0{,}8 \cdot V = 0{,}8 \cdot 30{,}15 = 24{,}12$$

Logo, serão abastecidos aproximadamente 24,12 m³ do reservatório. Como a vazão é de 10 litros por segundo e 1 000 ℓ = 1 m³, então o tempo (t) aproximado necessário para abastecer 80% do volume do tanque é:

$$\frac{10}{24\,120} = \frac{1}{t}$$

$$t = \frac{24\,120}{10}$$

$$t = 2\,412$$

Portanto, serão necessários aproximadamente 2 412 segundos ou 40 minutos.

29. $V_{\text{peça}} = \underbrace{\left(10 + 3\right)^3}_{\substack{\text{volume}\\ \text{do cubo}\\ \text{verde}}} + \underbrace{8^3}_{\substack{\text{volume}\\ \text{do cubo}\\ \text{vermelho}}} + \underbrace{\frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 10}{2}}_{\substack{\text{volume do}\\ \text{semicilindro}}} \simeq 2\,960{,}2$

Portanto, o volume da peça é aproximadamente 2 960,2 cm³.

30. Considere C_1 e C_2 os cilindros que compõem a peça, em que C_1 tem altura e diâmetro iguais a 8 cm e C_2 tem altura igual a 9 cm e diâmetro igual a 20 cm.

a) Calculando a área de cada cilindro e considerando que devemos retirar uma base de C_1 para não contar duas vezes, temos:

$\text{Área}_{C_1} = 3{,}14 \cdot 8^2 + 3{,}14 \cdot 4^2 = 251{,}2$

$\text{Área}_{C_2} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot \left(10 + 9\right) - 3{,}14 \cdot 4^2 = 1\,142{,}96$

Logo, a área da superfície desse sólido é:

$\text{Área}_{\text{sólido}} = \text{Área}_{C_1} + \text{Área}_{C_2} = 251{,}2 + 1\,142{,}96 = 1\,394{,}16$

Portanto, a área desejada é aproximadamente 1 394,16 cm².

b) Calculando o volume de cada cilindro, temos:

$$V_{C_1} = 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 8 = 401{,}92$$

$$V_{C_2} = 3{,}14 \cdot \left(10\right)^2 \cdot 9 = 2\,826$$

Logo, o volume desse sólido é:

$$V_{\text{sólido}} = V_{C_1} + V_{C_2} = 401{,}92 + 2\,826 = 3\,227{,}92$$

Portanto, o volume do sólido é aproximadamente 3 227,92 cm³.

31. Inicialmente, calculamos D:

$$D = \frac{1{,}2 + 0{,}8}{2} = 1$$

Assim, temos:

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4} \simeq \frac{3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 20}{4} = 15{,}7$$

Portanto, o volume dessa tora é aproximadamente 15,7 m³.

32. Inicialmente, calculamos o volume do recipiente em metros cúbicos.

$$V \simeq 3{,}14 \cdot \left(0{,}15\right)^2 \cdot 0{,}85 \simeq 0{,}06$$

Como a substância ocupa 65% do recipiente, então seu volume é:

$$V_{\text{substância}} = 0{,}65 \cdot V = 0{,}65 \cdot 0{,}06 = 0{,}039$$

Por fim, sabendo que 1 000 ℓ = 1 m³, temos:

$$M = 1{,}3 \cdot 1000 \cdot 0{,}039 + 5 = 50{,}7 + 5 = 55{,}7$$

Portanto, a massa do recipiente após o armazenamento da substância é aproximadamente 55,7 kg.

33. Denotando por V_1 o volume de água contido no balde em centímetros cúbicos, temos:

$$V_1 = 3{,}14 \cdot 12{,}5^2 \cdot 8 = 3\,925$$

Considerando diretamente proporcional a quantidade de chuva e a área em questão, temos:

$$\frac{V_2}{1} = \frac{V_1}{\pi \cdot 0{,}125^2} \Rightarrow V_2 = \frac{3\,925}{3{,}14 \cdot 0{,}015625} = 80\,000$$

Assim, o volume de água que choveu em 1 m² $\left(V_2\right)$ é 80 000 cm³.

Convertendo em litros, constatamos que choveu nessa propriedade aproximadamente 80 litros por metro quadrado, ou seja, 80 mm.

MODERNA

34. Seja h a altura do palmito. Usando a fórmula do volume do cilindro, temos:

$$84{,}78 \simeq 3{,}14 \cdot (1{,}5)^2 \cdot h$$
$$h \simeq \frac{84{,}78}{7{,}065}$$
$$h \simeq 12$$

Portanto, a altura do palmito é aproximadamente 12 cm.

35. Seja V o volume do balde, logo:

$$V \simeq 3{,}14 \cdot 0{,}35 \cdot (0{,}14)^2 \simeq 0{,}02154$$

Em seguida, calculamos a área da base da caixa-d'água.

$$A_{base} = \frac{V_{caixa}}{A_{caixa}} = \frac{0{,}25}{0{,}64} \simeq 0{,}39063$$

Assim, a altura (h) que o nível da água atingirá é:

$$h = \frac{5 \cdot 0{,}02154}{0{,}39063} \simeq 0{,}2757$$

Portanto, a altura do nível da água será aproximadamente 0,2757 m ou 27,57 cm.

36. Inicialmente, calculamos a área da base do prisma hexagonal.

$$A_b = \frac{6 \cdot 5^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{150\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

O cilindro e o prisma possuem mesmo volume e mesma altura. Indicando por r e h, respectivamente, o comprimento do raio da base do cilindro e a altura dessas figuras, temos:

$$\pi r^2 h = \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot h \Rightarrow r^2 = \frac{75\sqrt{3}}{2\pi} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r \simeq 4{,}55$$

Portanto, o comprimento do raio da base do cilindro é aproximadamente 4,55 cm.

37. Inicialmente, calculamos a área superficial e o volume de cada embalagem.

Embalagem A:

$$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}09 \cdot (0{,}34 + 0{,}09) = 0{,}243036$$
$$V = 3{,}14 \cdot (0{,}09)^2 \cdot (0{,}34) = 0{,}00864756$$

Embalagem B:

$$A = 2 \cdot (0{,}305 \cdot 0{,}193 + 0{,}14432 \cdot 0{,}193 + 0{,}14432 \cdot 0{,}305) =$$
$$= 0{,}26147272$$
$$V = 0{,}305 \cdot 0{,}193 \cdot 0{,}14432 = 0{,}0084953968$$

Embalagem C:

$$A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}12 \cdot (0{,}19125 + 0{,}12) = 0{,}234558$$
$$V = 3{,}14 \cdot (0{,}12)^2 \cdot (0{,}19125) = 0{,}00864756$$

a) Pelos cálculos, as embalagens que têm o mesmo volume são A e C.

b) De acordo com o item a, a área superficial da embalagem C é menor do que da embalagem A. Assim, o fabricante deverá optar pela embalagem C.

c) O custo total para produzir 1 500 embalagens é:

$$custo_{total} = 32{,}50 \cdot 1\,500 \cdot 0{,}234558 \simeq 11\,434{,}70$$

Portanto, o gasto total será aproximadamente R$ 11 434,70.

38. Inicialmente, calculamos o volume abastecido após 5 minutos:

$$V = \underbrace{0{,}00066}_{\text{vazão em m}^3 \text{ por segundo}} \cdot \underbrace{300}_{5 \text{ min}} = 0{,}198$$

Em seguida, calculamos a altura h do nível da água após o abastecimento:

$$V = 3{,}14 \cdot (1{,}3)^2 \cdot h$$
$$h = \frac{0{,}198}{5{,}3066}$$
$$h \simeq 0{,}0373$$

Portanto, a altura do nível da água é aproximadamente 0,0373 m ou 3,73 cm.

39. alternativa **a**

Inicialmente, calculamos o volume da taça:

$$V = 3 \cdot 5^2 \cdot 36 = 2\,700$$

Em seguida, chamando v o volume do outro metal e sabendo que a densidade é a razão entre a massa e o volume, temos:

- $\frac{3}{4}$ da massa é ouro. Assim:

$$19{,}3 = \frac{\frac{3}{4}m}{(2\,700 - v)} \Rightarrow 3m + 77{,}2v = 208\,440$$

- $\frac{1}{4}$ da massa é outro metal. Assim:

$$6{,}1 = \frac{\frac{1}{4}m}{v} \Rightarrow m - 24{,}4v = 0$$

Utilizando um sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} 3m + 77{,}2v = 208\,440 \\ m - 24{,}4v = 0 \end{cases} \Rightarrow m \simeq 33{,}8$$

Portanto, a massa da taça é aproximadamente 33,8 kg. Assim a alternativa correta é **a**.

40. Inicialmente, como o objeto é um cilindro equilátero, então o raio da base equivale à metade da altura.

$$r = \frac{h}{2}$$

Além disso, sabendo que o espaço entre o objeto e a embalagem deverá ter folga mínima, então o diâmetro da base é igual à aresta da embalagem. Logo, a embalagem é de fato um cubo de aresta h e $r = \frac{h}{2}$. Assim, temos:

$$V_{objeto} = 3\,215{,}36$$
$$3{,}14 \cdot r^2 \cdot h \simeq 3\,215{,}36$$
$$\underbrace{h^3}_{\text{volume da embalagem}} = \frac{4 \cdot 3\,215{,}36}{3{,}14}$$
$$V_{embalagem} = 4\,096$$

Portanto, o volume da embalagem é aproximadamente 4 096 cm³.

41. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

42. Seja x o raio da base da peça amarela. Assim, os raios das bases das outras peças serão:

$$r_{verde} = x + 2 \qquad r_{azul} = x + 6$$
$$r_{roxa} = x + 4 \qquad r_{vermelha} = x + 8$$

Como todas as peças têm a mesma altura, então a altura de cada peça é:

$$h = \frac{50}{5} = 10$$

Assim:

$$16\,956 = \pi \cdot x^2 \cdot 10 + \pi \cdot (x + 2)^2 \cdot 10 +$$
$$+ \pi \cdot (x + 4)^2 \cdot 10 + \pi \cdot (x + 6)^2 \cdot 10 +$$
$$+ \pi \cdot (x + 8)^2 \cdot 10 = 10\pi(5x^2 + 40x + 120)$$

Resolvendo a equação, obtemos $x = -14$ ou $x = 6$. Note que $x > 0$, logo $x = 6$. Desse modo, temos:

$$r_{verde} = 6 + 2 = 8 \qquad r_{azul} = 6 + 6 = 12$$
$$r_{roxa} = 6 + 4 = 10 \qquad r_{vermelha} = 6 + 8 = 14$$

Portanto, estes são os raios da base de cada peça: amarela, 6 cm; verde, 8 cm; roxa, 10 cm; azul, 12 cm; vermelha, 14 cm.

MODERNA

43. alternativa **c**

Seja V_{suco} o volume total do suco na garrafa e V_{copo} o volume do copo, calculamos o volume de suco restante na garrafa ($V_{restante}$) após o suco ser despejado no copo:

$$V_{restante} = V_{suco} - V_{copo}$$
$$V_{restante} = 3 \cdot 4^2 \cdot 13 - 3 \cdot 2^2 \cdot 7$$
$$V_{restante} = 624 - 84$$
$$V_{restante} = 540$$

Portanto, o volume de suco restante na garrafa é aproximadamente 540 cm³.

10 Cone

1. **a)** $A_b = \pi \cdot 4{,}5^2 \Rightarrow A_b \simeq 63{,}585$

Portanto, a área da base é aproximadamente 63,585 cm².

b) $g^2 = 4{,}5^2 + 6^2 \Rightarrow g = 7{,}5$

Portanto, o comprimento da geratriz é 7,5 cm.

c) Para calcular a área total, precisamos determinar a área lateral do cone.

$$A_b = \pi \cdot 4{,}5 \cdot 7{,}5 \Rightarrow A_b \simeq 105{,}975$$

Assim, a área lateral é aproximadamente 105,975 cm².

Então:

$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t \simeq 105{,}975 + 63{,}585 \Rightarrow A_t \simeq 169{,}56$

Portanto, a área total é aproximadamente 169,56 cm².

2. $A_t = \pi \cdot 3 \cdot (3 + 10) \Rightarrow A_t \simeq 122{,}46$

Portanto, a área total é aproximadamente 122,46 cm².

3. **a)** Indicando como r o raio da base, temos:

$$A_\ell = 3\,265{,}6 \Rightarrow \pi \cdot r \cdot 52 = 3\,265{,}6 \Rightarrow r \simeq 20$$

Portanto, como o diâmetro é o dobro do raio, o comprimento do diâmetro da base é, aproximadamente, 40 cm.

b) $h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 + 20^2 = 52^2 \Rightarrow h \simeq 48$

Portanto, a altura do cone é, aproximadamente, 48 cm.

4. Inicialmente, calculamos a geratriz.

$$g^2 = 25^2 + 114^2 \Rightarrow g \simeq 116{,}7$$

Assim, $g \simeq 116{,}7$ m.

Calculando a área total, temos:

$$A_t = \pi \cdot 25 \cdot 116{,}7 \Rightarrow A_t \simeq 9\,161$$

Portanto, a área total é, aproximadamente, 9 161 m².

5. Inicialmente, calculamos a geratriz.

$$g^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow g = 26$$

a) Em seguida, calculamos a área total da figura obtida ao rotacionar o triângulo em torno do menor cateto:

$$A_t = \pi \cdot 24 \cdot (24 + 26) \Rightarrow A_t \simeq 3\,768$$

Portanto, a área total é aproximadamente 3 768 m².

b) Calculando a área total da figura obtida ao rotacionar o triângulo em torno do maior cateto, obtemos:

$$A_t = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 26) \Rightarrow A_t \simeq 1\,130{,}4$$

Portanto, a área total é aproximadamente 1 130,4 m².

6. De acordo com os dados do problema, temos:

$$A_b = \pi \cdot 12^2 = 144\pi$$
$$g^2 = 10^2 + 12^2 \Rightarrow g = 2\sqrt{61}$$
$$A_\ell = \pi \cdot 12 \cdot 2\sqrt{61} \Rightarrow A_\ell = 24\pi\sqrt{61}$$

Assim, a área da base é 144π cm², a geratriz é $2\sqrt{61}$ cm e a área lateral, $24\pi\sqrt{61}$ cm².

Por fim, determinamos a geratriz e, então, a altura do cone reto desejado.

$$A_\ell = 48\pi\sqrt{61} \Rightarrow \pi \cdot 12 \cdot g = 48\pi\sqrt{61} \Rightarrow g = 4\sqrt{61}$$
$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \left(4\sqrt{61}\right)^2 = h^2 + 12^2 \Rightarrow h = 8\sqrt{13}$$

Portanto, a altura é $8\sqrt{13}$ cm.

7. A altura h, o raio r e a geratriz formam, nessa ordem, os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Utilizando a relação pitagórica para um triângulo retângulo, temos $(2r)^2 = h^2 + r^2$. Isolando h, segue que:

$$h^2 = (2r)^2 - r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3}$$

Portanto, a altura é $r\sqrt{3}$.

8. alternativa **c**

Indicando como A_1 e A_2 as áreas das superfícies dos cones maior e menor, respectivamente, e como g_1 e g_2 suas geratrizes, temos:

$$g_1^2 = 12^2 + 4^2 \Rightarrow g_1 \simeq 12{,}65$$
$$A_1 = \pi \cdot 4 \cdot (4 + 12{,}65) \Rightarrow A_1 \simeq 209{,}12$$
$$g_2^2 = 8^2 + 3^2 \Rightarrow g_2 \simeq 8{,}54$$
$$A_2 = \pi \cdot 3 \cdot (3 + 8{,}54) \Rightarrow A_2 \simeq 108{,}71$$
$$A_1 - A_2 = 209{,}12 - 108{,}71 = 100{,}41$$

Portanto, a diferença entre as áreas dessas embalagens é 100,41 cm².

9. Note que o sólido obtido corresponderá à união de um cone reto de raio $r = 8$ cm, geratriz g e altura $h_1 = \underbrace{6 \text{ cm}}_{14 - 8}$, com um cilindro de mesmo raio e altura $h_2 = 8$ cm.

Indicando como A_1 e A_2 a área do sólido correspondente ao cone e a área do sólido correspondente ao cilindro, respectivamente, temos:

$$g^2 = h_1^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g = 10$$
$$A_1 = \pi \cdot 8 \cdot 10 \Rightarrow A_1 \simeq 251{,}2$$
$$A_2 = 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 8 + \pi \cdot 8^2 \Rightarrow A_2 \simeq 602{,}88$$

Assim, calculamos a área A do sólido:

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = 251{,}2 + 602{,}88 \Rightarrow A \simeq 854{,}08$$

Portanto, a área da figura obtida é, aproximadamente, 854,08 cm².

10. alternativa **c**

Sendo A_1 a área do cilindro, A_2 a área do cone (cujo diâmetro da base mede 43 cm e sua altura é igual a 51,6 cm) e A_3 a área do cubo, temos:

$$A_1 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \cdot (15 + 40) = 5\,181$$

Indicando como g a geratriz do cone, temos:

$$g^2 = 21{,}5^2 + 51{,}6^2 \Rightarrow g = 55{,}9$$
$$A_2 = \pi \cdot 21{,}5 \cdot (21{,}5 + 55{,}9) \Rightarrow A_2 \simeq 5\,225{,}27$$
$$A_3 = 6 \cdot 30^2 \Rightarrow A_3 = 5\,400$$

Logo, $A_1 < A_2 < A_3$.

11. **a)** Inicialmente, calculamos a altura.

$$10^2 = h^2 + 8^2 \Rightarrow h = 6$$

Em seguida, determinamos o volume.

$$V = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 6}{3} \Rightarrow V \simeq 401{,}92$$

Portanto, o volume do cone reto é aproximadamente 401,92 cm³.

b) Calculamos o volume.

$$V = \frac{\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 6}{3} \Rightarrow V \simeq 127{,}17$$

Portanto, o volume do cone reto é aproximadamente 127,17 cm3.

c) Inicialmente, calculamos o raio.

$$6{,}5^2 = 6^2 + r^2 \Rightarrow r = 2{,}5$$

Em seguida, determinamos o volume.

$$V = \frac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 6}{3} \Rightarrow V \simeq 39{,}25$$

Portanto, o volume do cone reto é aproximadamente 39,25 cm³.

MODERNA

d) Inicialmente, calculamos a altura.

$$5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h = 4$$

Em seguida, determinamos o volume.

$$V = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} \Rightarrow V \simeq 37{,}68$$

Portanto, o volume do cone reto é aproximadamente 37,68 cm^3.

12. $V = 1\,004{,}8 \Rightarrow \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot h}{3} = 1\,004{,}8 \Rightarrow h \simeq 15$

Assim, a altura deve ser, aproximadamente, 15 cm.

13. $V_{cone} = \frac{V_{cilindro}}{3} \Rightarrow V_{cone} = \frac{600}{3} \Rightarrow V_{cone} = 200$

Assim, o volume do recepiente é 200 mℓ.

14. Indicando como r o raio da base do cone, como h a altura do cone, e sabendo que essa altura mede o dobro do comprimento do diâmetro da base, temos $h = 4r$. Além disso:

$$2\pi r = 37{,}68 \Rightarrow r \simeq 6$$

Logo:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot r^2 h}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 6^3}{3} = 904{,}32$$

Portanto, o volume do cone é aproximadamente 904,32 cm^3.

15. Indicando como r o raio da base do cone, semelhante à casquinha do tipo 2, e sabendo que os volumes são iguais, temos:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{3{,}14 \cdot (2{,}5)^2 \cdot 10}{3} = \frac{3{,}14 \cdot r^2 \cdot 12}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{62{,}5}{12} \Rightarrow r \simeq 2{,}28$$

Desse modo, o raio da base do cone que corresponde à casquinha tipo 2 mede aproximadamente 2,28 cm. Portanto, o diâmetro mede aproximadamente 4,56 cm.

16. $A_b = 50{,}24 \Rightarrow \pi \cdot r^2 = 50{,}24 \Rightarrow r \simeq 4$

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot (2 \cdot 4)}{3} \Rightarrow V \simeq 134$$

Assim, o volume do cone é, aproximadamente, 134 cm^3.

17. alternativa **a**

Calculando o volume de cada taça, temos:

$$V_a = \frac{3{,}14 \cdot (4{,}5)^2 \cdot 10}{3} = 211{,}95$$

$$V_b = \frac{3{,}14 \cdot (4{,}5)^2 \cdot 9}{3} = 190{,}755$$

$$V_c = \frac{3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 7}{3} \simeq 183{,}17$$

$$V_d = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 11}{3} \simeq 184{,}213$$

Portanto, a taça com a capacidade que mais se aproxima da taça que se deseja fabricar é a do item **a**.

18. a) $V = \frac{0{,}3}{30\%} \cdot \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 10}{3} \Rightarrow V \simeq 28{,}26$

Portanto, o volume de areia é, aproximadamente, 28,26 cm^3.

b) Seja Q a quantidade de areia a ser acrescentada. Assim, temos:

$$\underset{30\text{ min}}{\frac{V}{30}} = \underset{40\text{ min}}{\frac{V+Q}{40}} \Rightarrow \frac{28{,}26}{30} = \frac{28{,}26 + Q}{40} \Rightarrow Q \simeq 9{,}42$$

Portanto, é necessário acrescentar aproximadamente 9,42 cm^3 de areia.

19. Inicialmente, calculamos o volume de cada chocolate.

$$V = \frac{\pi \cdot (1{,}25)^2 \cdot 6}{3} \simeq 9{,}81$$

Portanto, a quantidade necessária de chocolate para fabricar cada guarda-chuvinha é aproximadamente 9,81 cm^3 ou 9,81 mℓ.

20. Calculando a medida da geratriz, temos:

$$A_\ell = 3 \cdot A_b \Rightarrow 3{,}14 \cdot 15 \cdot g = 3 \cdot \left[3{,}14 \cdot (15)^2\right] \Rightarrow g = 45$$

Assim, pelo Teorema de Pitágoras, calculamos a altura:

$$(45)^2 = (15)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 1800 \Rightarrow h \simeq 42{,}43$$

Logo:

$$V = \frac{\pi \cdot (15)^2 \cdot 42{,}43}{3} \Rightarrow V \simeq 9\,992{,}3$$

Portanto, o volume do cone é, aproximadamente, 9 992,3 cm^3.

21. Indicando como V_1 o volume de cada casquinha, temos:

$$V_1 = \frac{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 9}{3} \Rightarrow V_1 \simeq 37{,}68$$

Assim, o volume de cada casquinha é 37,68 cm^3 ou 0,0378 ℓ.

Para preparar 85 cones trufados, temos:

$$V_t = V_1 \cdot 85 \Rightarrow V_t = 0{,}03768 \cdot 85 \Rightarrow V_t \simeq 3{,}2\ \ell$$

Portanto, são necessários aproximadamente 3,2 ℓ de massa para o preparo dos cones trufados.

22. Indicando como a e b, respectivamente, as medidas do menor cateto e do maior cateto do triângulo e como V_A e V_B, respectivamente, o volume dos cones obtidos quando giramos o triângulo em relação aos catetos a e b, temos:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{\pi \cdot b^2 \cdot a}{3}}{\frac{\pi \cdot a^2 \cdot b}{3}} = \frac{b}{a}$$

Portanto, a razão entre os volumes é igual a $\frac{b}{a}$.

23. Inicialmente, calculamos quantos quilos de soja são necessários para encher o silo, pois cada metro cúbico corresponde a 700 kg de soja.

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 1}{3} + 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 7 + \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V \simeq 226{,}08$$

$$P = 226{,}08 \cdot 700 \Rightarrow P \simeq 158\,256$$

Assim, o silo consegue armazenar aproximadamente 158 256 kg.

Indicando como Q o número de sacas que correspondem a essa quantidade de soja, temos:

$$Q = \frac{158\,256}{50} \Rightarrow Q \simeq 3\,165$$

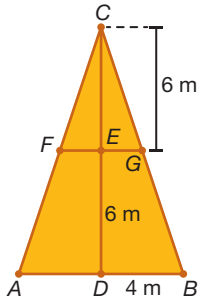
Portanto, são necessárias, aproximadamente, 3 165 sacas de soja para encher esse silo de armazenamentos de grãos.

24. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

25. alternativa **c**

Inicialmente, precisamos determinar o raio da base menor do tronco do cone reto de altura igual à metade da altura do reservatório. Considere, então, o seguinte esquema da vista frontal do reservatório.

MODERNA



RONALDO INÁCIO

Note que os triângulos $B\hat{C}D$ e $G\hat{C}E$ são semelhantes pelo caso *AA*. Assim, temos:

$$\frac{CE}{CD} = \frac{EG}{DB}$$
$$\frac{6}{12} = \frac{EG}{4}$$
$$EG = \frac{24}{12}$$
$$EG = 2$$

Portanto, o comprimento de $\overline{EG}$ é 2 m.

Para calcular o volume de água contido no reservatório, considerando que o nível atinja apenas a metade de sua altura, podemos determinar a diferença entre o volume do cone de altura 12 m e raio da base 4 m e o volume do cone de altura 6 m e raio da base 2 m.

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 12}{3} - \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 6}{3} \Rightarrow V = 56\pi \Rightarrow V \simeq 175{,}84$$

Assim, o volume do tronco é 175,84 m^3 e, como 1000 ℓ = 1 m^3, então, o volume do tronco de cone é 175 840 ℓ.

Como a vazão é 500 ℓ por minuto, determinamos o intervalo de tempo necessário, em minutos, para que o nível da água alcance a metade da altura do reservatório:

$$T = \frac{175\,840}{500} = 351{,}68$$

Portanto, o tempo necessário para encher o reservatório até a metade da sua altura é aproximadamente 351,68 minutos ou 5 horas e 52 minutos.

26. **a)** Por semelhança de triângulos, segue que o raio *r* correspondente ao cone de altura igual a 3,8 cm é dado por:

$$\frac{r}{3{,}8} = \frac{6}{41{,}8 + 3{,}8} \Rightarrow r \simeq 0{,}5$$

Desse modo, o volume V_1, de partículas, correspondente pode ser calculado como:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 3{,}8}{3} \simeq 0{,}994$$

Portanto, há aproximadamente $\underbrace{2{,}49}_{0{,}994 \cdot 2{,}5}$ g de partículas sólidas sedimentadas.

b) Sendo V_2 o volume equivalente a 25 g de partículas, temos:

$$V_2 = \frac{25}{2{,}5} = 10$$

Por semelhança de triângulos, segue que:

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{41{,}8 + 3{,}8} \Rightarrow r = \frac{6h}{45{,}6}$$

$$V_2 = 10 \Rightarrow \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3{,}14 \cdot \left(\frac{6h}{45{,}6}\right)^2 \cdot h = 30 \Rightarrow h \simeq 8{,}2$$

Portanto, elas atingem, aproximadamente, 8,2 cm de altura.

27. Sendo $\overline{BD}$ a altura do ΔABC em relação ao lado $\overline{AC}$, temos:

$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow AC = 20$$

$$\begin{cases} 16^2 = (AD)^2 + (BD)^2 \\ 12^2 = (BD)^2 + (CD)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = 12{,}8,\ BD = 9{,}6 \ \text{e} \ CD = 7{,}2$$

Desse modo, o volume *V* do sólido pode ser calculado como:

$$V = \frac{\pi \cdot (BD)^2 \cdot (AD)}{3} + \frac{\pi \cdot (BD)^2 \cdot (CD)}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 9{,}6^2 \cdot 12{,}8}{3} + \frac{\pi \cdot 9{,}6^2 \cdot 7{,}2}{3} \Rightarrow V \simeq 1\,929{,}2$$

Portanto, o volume é, aproximadamente, 1 929,2 cm^3.

28. Indicando como V_c o volume do cone, temos:

$$V_c = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 1{,}5}{3} \Rightarrow V_c \simeq 1{,}57$$

Indicando por $V_{c'}$ o volume da parte cilíndrica da cisterna, e sendo esse volume o sêxtuplo do volume da parte cônica, então:

$$V_c = 6 \cdot V_{c'} \Rightarrow \pi \cdot 1^2 \cdot h = 9{,}42 \Rightarrow h \simeq 3$$

Assim, a altura da parte cilíndrica da cisterna é aproximadamente 3 m.

Como apenas $\frac{2}{5}$ da cisterna está acima do solo, temos:

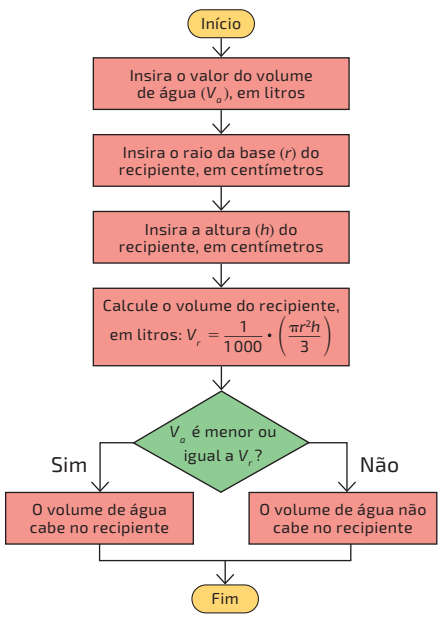
$$h_a = \frac{2}{5} \cdot h \Rightarrow h_a = \frac{2}{5} \cdot 3 \Rightarrow h_a \simeq 1{,}2$$

Portanto, a altura da cisterna que aparece acima do solo é, aproximadamente, 1,2 m.

29. Algoritmo:

Início
1. Insira o valor do volume de água (V_a), em litros
2. Insira o raio da base (*r*) do recipiente, em centímetros
3. Insira a altura (*h*) do recipiente, em centímetros
4. Faça $V_r = \frac{1}{1\,000} \cdot \left(\frac{\pi r^2 h}{3}\right)$
5. Se $V_a \leq V_r$, então a água cabe no recipiente
6. Se $V_a > V_r$, então a água não cabe no recipiente

Fim



MODERNA

30. Observamos que o comprimento da base é igual ao comprimento de um arco de 120° e 6 cm de raio. Então, utilizando uma regra de três simples, temos:

Ângulo	Comprimento
360°	$2 \cdot \pi \cdot 6$
120°	$2 \cdot \pi \cdot r$

$$\frac{360}{120} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

$$r = 2$$

Logo, o raio é 2 cm.

Com o Teorema de Pitágoras, determinamos a altura.

$$6^2 = 2^2 + h^2$$

$$h^2 = 36 - 4$$

$$h = 4\sqrt{2}$$

$$h \simeq 5{,}64$$

Assim, a altura é aproximadamente 5,64 cm.

Então, calculamos o volume do cone.

$$V_c = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 5{,}64}{3} \simeq 23{,}61$$

Portanto, o volume do cone é aproximadamente 23,61 cm^3.

31. Não. Espera-se que os alunos respondam que, para calcular a altura do reservatório cônico, é necessário apresentar o comprimento do diâmetro ou do raio da base.

32. alternativa **a**

Inicialmente, vamos calcular o volume do recipiente cilíndrico que está sem água.

$$V_s = 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 20 - 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 15 \Rightarrow V_s = 565{,}2$$

Para fazer a água transbordar, o volume da peça deverá ser maior do que 565,2 cm^3. Agora, vamos calcular o volume de cada peça:

$$V_a = \frac{3{,}14 \cdot \left(8\sqrt{2}\right)^2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_a \simeq 566{,}7$$

$$V_b = \frac{3{,}14 \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 \cdot 5\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_b \simeq 236{,}1$$

$$V_c = \frac{3{,}14 \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 \cdot 7\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_c \simeq 330{,}6$$

$$V_d = \frac{3{,}14 \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot 6\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_d \simeq 159{,}4$$

Logo, o objeto que fará a água transbordar é o que tem volume de, aproximadamente, 566,7 cm^3. Portanto, a alternativa correta é **a**.

33. Para resolver a essa tarefa, vamos definir como r, g e h o raio da base, a geratriz e a altura do cone, respectivamente.

a) $A_b = 48\pi \Rightarrow \pi r^2 = 48\pi \Rightarrow r = 4\sqrt{3}$

Portanto, o comprimento do raio da base do cone é $4\sqrt{3}$ m.

b) Usando a fórmula do volume do cilindro $\left(V_1\right)$, temos:

$$V_1 = 1\,152\pi \Rightarrow \pi\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot (3g) = 1\,152\pi \Rightarrow g = 8$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 8^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + h^2 \Rightarrow$$

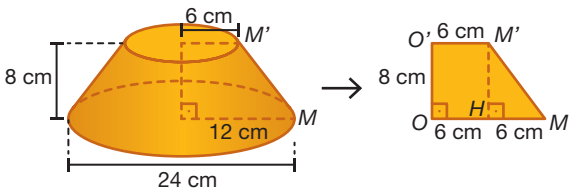
$$\Rightarrow h^2 = 64 - 48 \Rightarrow h = 4$$

Logo, podemos determinar o volume do cone $\left(V_2\right)$:

$$V_2 = \frac{\pi \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 4}{3} = 64\pi$$

Portanto, o volume do cone é 64π m^3.

34. a) Para resolver o problema, considere o seguinte esquema do tronco do cone.



RONALDO INÁCIO

Inicialmente, calculamos a geratriz:

$$\left(MM'\right)^2 = \left(HM'\right)^2 + \left(HM\right)^2 \Rightarrow g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$$

Em seguida, determinamos a área total como:

$$A_B = \pi \cdot 12^2 \Rightarrow A_B \simeq 452{,}16$$

$$A_b = \pi \cdot 6^2 \Rightarrow A_b \simeq 113{,}04$$

$$A_\ell = \pi \cdot 10 \cdot (12 + 6) \Rightarrow A_\ell \simeq 565{,}2$$

$$A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 452{,}16 + 113{,}04 + 565{,}2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t \simeq 1\,130{,}4$$

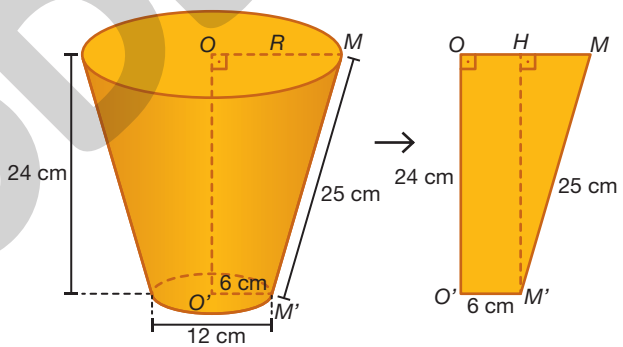
Assim, área total é, aproximadamente, 1 130,4 cm^2.

Calculando o volume, temos:

$$V = \frac{\pi \cdot 8}{3} \cdot \left(12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2\right) \Rightarrow V \simeq 2\,110{,}08$$

Portanto, o volume é, aproximadamente, 2 110,08 cm^3.

b) Para resolver o problema, considere o seguinte esquema do tronco do cone.



RONALDO INÁCIO

Inicialmente, determinamos o comprimento do raio.

$$\left(MM'\right)^2 = \left(HM'\right)^2 + \left(HM\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25^2 = 24^2 + \left(HM\right)^2 \Rightarrow HM = 7$$

$$r = OH + HM \Rightarrow r = 6 + 7 \Rightarrow r = 13$$

Então, determinamos a área total.

$$A_B = \pi \cdot 13^2 \Rightarrow A_B \simeq 530{,}66$$

$$A_b = \pi \cdot 6^2 \Rightarrow A_b \simeq 113{,}04$$

$$A_\ell = \pi \cdot 25 \cdot (13 + 6) \Rightarrow A_\ell \simeq 1\,491{,}5$$

$$A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = 530{,}66 + 113{,}04 + 1\,491{,}5 \Rightarrow A_t \simeq 2\,135{,}2$$

Assim, a área total é aproximadamente 2 135,2 cm^2.

Calculando o volume, temos:

$$V = \frac{\pi \cdot 24}{3} \cdot \left(13^2 + 13 \cdot 6 + 6^2\right) \Rightarrow V \simeq 7\,108{,}96$$

Portanto, o volume é aproximadamente 7 108,96 cm^3.

MODERNA

35. a) $A_t = 405\pi \Rightarrow \pi \cdot \underbrace{\frac{15}{g}} \cdot \left(R + \underbrace{\frac{R}{2}}_{r}\right) = 405\pi \Rightarrow R = 18$

Assim, o comprimento do raio da base maior é 18 cm.
Então:

$$r = \frac{18}{2} \Rightarrow r = 9$$

Portanto, o comprimento do raio menor é 9 cm.

b) $15^2 = 9^2 + h^2 \Rightarrow h = 12$

Portanto, a altura do tronco é 12 cm.

c) Calculando a área total, temos:

$$A_B = \pi \cdot 18^2 \Rightarrow A_B = 324\pi$$
$$A_b = \pi \cdot 9^2 \Rightarrow A_b = 81\pi$$
$$A_\ell = \pi \cdot 15 \cdot (18 + 9) \Rightarrow A_\ell = 405\pi$$
$$A_t = 324\pi + 81\pi + 405\pi \Rightarrow A_t = 810\pi$$

Portanto, a área total é 810π cm^2.

36. a) • $R = \frac{48}{2} \Rightarrow R = 24$

• $\frac{r}{R} = \frac{15}{45} \Rightarrow \frac{r}{24} = \frac{15}{45} \Rightarrow r = 8$

Portanto, o comprimento do raio menor é 8 cm e o do raio maior, 24 cm.

b) • cone menor:

$$g^2 = 15^2 + r^2 \Rightarrow g = 15^2 + 8^2 \Rightarrow g = 17$$
$$A_t = \pi \cdot 8 \cdot (8 + 17) \Rightarrow A_t \simeq 628$$

Assim, a área do cone menor é, aproximadamente, 628 cm^2.

• tronco de cone:

$$A_B = \pi \cdot 24^2 \Rightarrow A_B = 1\,808{,}64$$
$$A_b = \pi \cdot 8^2 \Rightarrow A_b = 200{,}96$$
$$(G + 17)^2 = 45^2 + R^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow G^2 + 2 \cdot G \cdot 17 + 17^2 = 45^2 + 24^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow G^2 + 34G - 2\,312 = 0 \Rightarrow G = 34$$
$$A_\ell = \pi \cdot 34 \cdot (24 + 8) \Rightarrow A_\ell = 3\,416{,}32$$
$$A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t = 1\,808{,}64 + 200{,}96 + 3\,416{,}32 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t \simeq 5\,425{,}92$$

Portanto, a área do tronco de cone é, aproximadamente, 5 425,92 cm^2.

37. Calculando a área da figura obtida, temos:

$$A_B = \pi \cdot 19^2 \Rightarrow A_B \simeq 1\,133{,}54$$
$$A_b = \pi \cdot 10^2 \Rightarrow A_b \simeq 314$$
$$g^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow g = 15$$
$$A_\ell = \pi \cdot 15 \cdot (19 + 10) \Rightarrow A_\ell \simeq 1\,365{,}9$$
$$A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 1\,133{,}54 + 314 + 1\,365{,}9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t = 2\,813{,}44$$

Portanto, a área da figura obtida é, aproximadamente, 2 813,44 u.a.

38. alternativa **e**

Vamos calcular a área superficial de cada modelo de vaso.

• Modelo A

Inicialmente, calculamos o raio da parte superior do vaso.

$$(20)^2 = (16)^2 + (r - 8)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r - 8 = \sqrt{400 - 256} \Rightarrow r = 20$$

Assim:

$$A = \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 20 \cdot (20 + 8) \Rightarrow A = 624\pi$$

• Modelo B

Temos:

$$A = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 19{,}5 \cdot (13{,}5 + 6) \Rightarrow A = 416{,}25\pi$$

• Modelo C

Inicialmente, calculamos a geratriz do vaso.

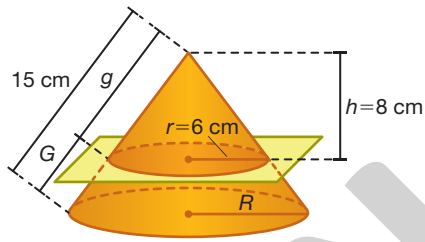
$$g^2 = (20 - 11)^2 + (16)^2 \Rightarrow g \simeq 18{,}36$$

Assim:

$$A = \pi \cdot (11)^2 + \pi \cdot 18{,}36 \cdot (20 + 11) \Rightarrow A = 690{,}16\pi$$

Logo, a ordem do maior para o menor preço é C, A e B.
Portanto, a alternativa correta é **e**.

39. Para resolver o problema, considere o esquema a seguir.



RONALDO INÁCIO

Inicialmente, calculamos a geratriz da pirâmide formada e o raio do tronco de cone:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10$$
$$\frac{g}{r} = \frac{g + G}{R} \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{15}{R} \Rightarrow R = 9$$

Assim, a geratriz da pirâmide obtida é 10 cm e o raio do tronco de cone obtido, 9 cm.
Determinando a área total do tronco, temos:

$$A_B = \pi \cdot 9^2 \Rightarrow A_B \simeq 254{,}34$$
$$A_b = \pi \cdot 6^2 \Rightarrow A_b \simeq 113{,}04$$
$$A_\ell = \pi \cdot 5 \cdot (9 + 6) \Rightarrow A_\ell = 235{,}5$$
$$A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 254{,}34 + 113{,}04 + 235{,}5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t = 602{,}88$$

Portanto, a área total do tronco de cone é aproximadamente 602,88 cm^2.

40. Sendo $x = R - r$, temos:

$$G^2 = \underbrace{x^2}_{15\,-\,10} + 50^2 \Rightarrow G^2 = 5^2 + 50^2 \Rightarrow G \simeq 50{,}3$$
$$A_\ell = \pi \cdot 50{,}3 \cdot (15 + 10) \Rightarrow A_\ell = 3\,948{,}55$$

Portanto, a área lateral é, aproximadamente, 3 948,55 cm^2.

41. a) De acordo com as informações dadas, temos:

$$V = \frac{\pi \cdot 9}{3} \cdot \left[(24)^2 + 24 \cdot 36 + (36)^2\right] \Rightarrow V \simeq 25\,773{,}12$$

Portanto, o volume é aproximadamente 25 773,12 cm^3.

b) Inicialmente, calculamos a altura do tronco.

$$(26)^2 = (10)^2 + h^2 \Rightarrow h = 24$$

Logo:

$$V = \frac{\pi \cdot 24}{3} \cdot \left[(30)^2 + 30 \cdot 20 + (20)^2\right] \Rightarrow V \simeq 47\,728$$

Portanto, o volume é, aproximadamente, 47 728 cm^3.

42. Inicialmente, calculamos a altura do tronco.

$$(25)^2 = (13 - 6)^2 + h^2 \Rightarrow h = 24$$

Logo:

$$V = \frac{\pi \cdot 24}{3} \cdot \left[(13)^2 + 13 \cdot 6 + 6^2\right] \Rightarrow V \simeq 7\,108{,}96$$

Portanto, o volume do tronco de cone é, aproximadamente, 7 108,96 cm^3.

MODERNA

43. **a)** De acordo com as informações dadas, temos:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 6}{3} \cdot \left(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2\right) \Rightarrow V = 175{,}84$$

Portanto, o volume do tronco de cone é aproximadamente 175,84 cm^3.

b) Inicialmente, calculamos a altura do trapézio *ABCD*.

$$5^2 = (9 - 6)^2 + h^2 \Rightarrow h = 4$$

Logo:

$$V = \frac{\pi \cdot 4}{3} \cdot \left(6^2 + 6 \cdot 9 + 9^2\right) \Rightarrow V \simeq 715{,}92$$

Portanto, o volume do tronco de cone é aproximadamente 715,92 cm^3.

44. Inicialmente, determinamos a geratriz do tronco do cone.

$$g^2 = 75^2 + \underbrace{(11)}_{15 - 4}^2 \Rightarrow g \simeq 75{,}8$$

Assim, o comprimento da geratriz é 75,8 cm.

Agora, calculamos:

- a área A_1 da superfície lateral do tronco de cone, em centímetros quadrados.

$$A_1 \simeq 75{,}8\pi \cdot (15 + 4) \simeq 4\,522{,}23$$

- a área A_2 de uma das bases do prisma que representa a base do cone, em centímetros quadrados.

$$A_2 = 40 \cdot 40 = 1\,600$$

- a área A_3 da superfície lateral do prisma que representa a base do cone, em centímetros quadrados.

$$A_3 = 4 \cdot (40 \cdot 0{,}5) = 80$$

Na sequência, calculamos $A_1 + A_2 + A_3$.

$$A_1 + A_2 + A_3 = 4\,522{,}23 + 1\,600 + 80 = 6\,202{,}23$$

Por fim, subtraímos do resultado obtido a área, em centímetros quadrados, de um círculo de raio 15 cm. Desse modo, obtemos a área *A* da superfície externa do cone.

$$A = 6\,202{,}23 - 15^2 \cdot \pi \simeq 5\,496$$

Portanto, a área da superfície externa do cone é, aproximadamente, 5 496 cm^2.

45. Sendo *A* a área da superfície a ser pintada e *G* a geratriz do tronco de cone com altura 40 cm, com os raios das bases medindo 45 cm e 15 cm, respectivamente, temos:

- $G^2 = H_t^2 + (R - r)^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow G^2 = 40^2 + (45 - 15)^2 \Rightarrow G = 50$
- $A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 \cdot 80 + 3{,}14 \cdot 50 \cdot (45 + 15) = 16\,956$

Observando que com uma lata é possível cobrir 4 500 cm^2 de alumínio, segue que o número *n* de latas necessárias para pintar a coifa é dado por:

$$n = \frac{16\,956}{4\,500} \simeq 4$$

Portanto, são necessárias 4 latas para pintar a coifa.

46. Como 1 ℓ = 1 dm^3, segue que:

$V = 165\,854{,}8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3{,}14 \cdot H_t}{3} \cdot \left(35^2 + 35 \cdot 24 + 24^2\right) = 165\,854{,}8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_t = 60$$

Assim, a altura é 60 dm.

47. **a)** $V = \frac{3{,}14 \cdot 6}{3} \cdot \left(13^2 + 13 \cdot 10 + 10^2\right) \Rightarrow V = 2\,505{,}72$

Assim, a capacidade da assadeira é 2 505,72 cm^3.

b) $M = 0{,}75 \cdot V \Rightarrow M = 0{,}75 \cdot 2\,505{,}72 \Rightarrow M = 1\,879{,}29$

Assim, o volume máximo dessa assadeira é 1 879,29 cm^3 ou 1 879,29 mℓ.

48. $V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(4^2 + 4 \cdot 3 + 3^2\right) \Rightarrow 464{,}72 = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot 37 \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \frac{3 \cdot 464{,}72}{\pi \cdot 37} \Rightarrow h \simeq 12$$

Assim, a altura é, aproximadamente, 12 cm.

49. Sendo V_1 o volume da peça em forma de tronco de cone, segue que:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot H_t}{3} \cdot \left[\left(3\sqrt{13}\right)^2 + 3\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} + \left(\sqrt{13}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{169 \cdot \pi \cdot H_t}{3}$$

De acordo com a imagem, é possível perceber que o volume V_1 da peça deve ser igual ao volume V_2 de um cilindro com raio de 13 cm e altura de 4 cm. Então:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{169\pi H_t}{3} = \pi \cdot 13^2 \cdot 4 \Rightarrow H_t = 12$$

Portanto, a altura é 12 cm.

50. Inicialmente, devemos calcular a diferença entre o raio maior e o raio menor para determinar o valor do raio maior.

$$3^2 + x^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 12 - 9 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$x = R - r \Rightarrow \sqrt{3} = R - \sqrt{3} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$$

Assim, o raio da base maior é $2\sqrt{3}$ m.

Calculando o volume do reservatório, temos:

$$V = \frac{3{,}14 \cdot 3}{3} \cdot \left[\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right] \Rightarrow V = 65{,}94$$

Portanto, o volume é 65,94 m^3 ou 65 940 ℓ.

51. **a)** De acordo com as informações dadas, temos:

$$V = \frac{\pi \cdot 9}{3} \cdot \left(4^2 + 2 \cdot 4 + 2^2\right) \Rightarrow V \simeq 263{,}76$$

Portanto, o volume máximo que a xícara pode conter é, aproximadamente, 263,76 cm^3 ou 263,76 mℓ.

b) Como cada xícara recebe $\frac{2}{3}$ de seu volume de café, o volume de café em cada xícara é:

$$V_c = \frac{2}{3} \cdot V \Rightarrow V_c = \frac{2}{3} \cdot 263{,}76 \Rightarrow V_c \simeq 175{,}84$$

Como 1ℓ = 1000 mℓ, para determinar a quantidade de xícaras, indicadas como *Q*, fazemos:

$$Q = \frac{1\,000}{175{,}84} \Rightarrow Q \simeq 5{,}7$$

Portanto, no máximo, podem ser servidas 5 xícaras.

52. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

MODERNA

53. Vamos calcular o volume do cilindro e o do tronco de cone que compõem o reservatório.

$$V_c = \pi \cdot (1{,}5)^2 \cdot 0{,}7 \Rightarrow V_c \simeq 4{,}9455$$

$$V_t = \frac{\pi \cdot 1{,}8}{3} \cdot \left[(1{,}5)^2 + (1{,}5) \cdot (0{,}65) + (0{,}65)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_t \simeq 6{,}8719$$

Logo:

$V_r = V_c + V_t \Rightarrow V_r = 4{,}9455 + 6{,}8719 \Rightarrow V_r \simeq 11{,}8174$

Portanto, o volume do reservatório é aproximadamente 11,8174 m^3 ou 11 817,4 ℓ.

54. Inicialmente, vamos determinar a altura da peça.

$$(18)^2 = (15 - 9)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{288} \Rightarrow h \simeq 16{,}97$$

Assim:

$V_p = V_t - V_c \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_p = \frac{\pi \cdot 16{,}97}{3} \cdot \left[(15)^2 + 15 \cdot 9 + 9^2\right] - \pi \cdot 9^2 \cdot 16{,}97 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p \simeq 3\,517$$

Portanto, o volume dessa peça é, aproximadamente, 3 517 cm^3.

55. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

56. **a)** Seja g a geratriz do tronco de cone. Assim, temos:

$A_t = 2 \cdot A_l \Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi \cdot \left(4^2 + 8^2\right) + \pi \cdot g \cdot (4 + 8) = 2\pi \cdot g \cdot (4 + 8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \frac{16 + 64}{4 + 8} \Rightarrow g = \frac{20}{3}$$

Portanto, a medida de comprimento da geratriz do tronco é $\frac{20}{3}$ dm.

b) Usando o Teorema de Pitágoras, calculamos a altura do tronco.

$$\left(\frac{20}{3}\right)^2 = (8 - 4)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{400}{9} - 16} \Rightarrow h = \frac{16}{3}$$

Logo:

$$V = \frac{\pi \cdot \left(\frac{16}{3}\right)}{3} \cdot \left(8^2 + 8 \cdot 4 + 4^2\right) \Rightarrow V \simeq 625{,}21$$

Portanto, o volume desse tronco de cone é aproximadamente 625,21 dm^3.

57. alternativa **e**

Calculamos o volume do cilindro e o do tronco de cone.

$$V_c = 3 \cdot (1{,}2)^2 \cdot 3 \Rightarrow V_c = 12{,}96$$

$$V_t = \frac{3 \cdot 1}{3} \cdot \left((1{,}2)^2 + 1{,}2 \cdot 0{,}6 + (0{,}6)^2\right) = 2{,}52$$

Assim:

$$V_r = V_c + V_t \Rightarrow V_r = 12{,}96 + 2{,}52 \Rightarrow V_r = 15{,}48$$

Calculando o vazamento por semana, temos:

$$V_v = \frac{1}{3} \cdot V_r \Rightarrow V_v = 5{,}16$$

Logo, vazam 5,16 m^3 por semana.

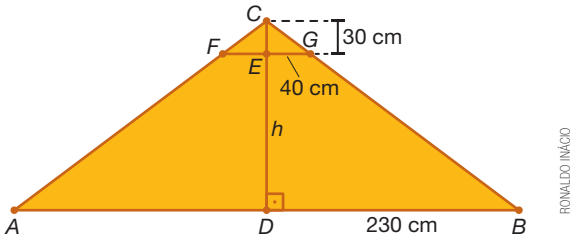
Como 1 m^2 = 1000 dm^3 = 1000 ℓ, então vazam 5160 ℓ.

Portanto, a alternativa correta é **e**.

58. Seja r o raio da base da circunferência projetada pela lâmpada, então:

$$\pi r^2 = 52\,900\pi \Rightarrow r = 230$$

Assim, temos a seguinte configuração:



RONALDO INÁCIO

Como os triângulos DBC e EGC são semelhantes pelo caso AA, temos:

$$\frac{40}{230} = \frac{30}{h + 30} \Rightarrow 40h + 1\,200 = 6\,900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{5\,700}{40} \Rightarrow h = 142{,}5$$

Portanto, a altura entre o pêndulo e o chão é 142,5 cm.

11 Esfera

1. $V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 6^3}{3} \Rightarrow V \simeq 904{,}32$

Portanto, o volume dessa esfera é aproximadamente 904,32 cm^3.

2. Caso julgue necessário, auxilie os alunos na resolução dessa tarefa relembrando a fórmula do comprimento de uma circunferência.

Sendo C o comprimento do equador, temos:

$$C = 9{,}42 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 9{,}42 \Rightarrow r = 1{,}5$$

Assim, temos:

$$V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5^3}{3} \Rightarrow V \simeq 14{,}13$$

Portanto, o volume dessa esfera é aproximadamente 14,13 cm^3.

3. Chamando C_1 e C_2 os comprimentos das circunferências mínima e máxima, respectivamente, temos:

$$C_1 = 749 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot r_1 = 749 \Rightarrow r_1 \simeq 119{,}3$$

$$V_{mínimo} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 119{,}3^3}{3} \Rightarrow V_{mínimo} \simeq 7\,108\,692{,}3$$

$$C_2 = 780 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot r_2 = 780 \Rightarrow r_2 \simeq 124{,}2$$

$$V_{máximo} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 124{,}2^3}{3} \Rightarrow V_{máximo} \simeq 8\,021\,086$$

Portanto, os volumes mínimo e máximo aproximados que uma bola de basquete deve ter são, respectivamente, 7 108 692,3 mm^3 e 8 021 086 mm^3.

4. Note que 1 100 bilhões de quilômetros cúbicos equivalem a $1\,100 \cdot 10^9$ km^3. Sendo assim:

$$V = 1\,100 \cdot 10^9 \Rightarrow \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot r^3}{3} = 1\,100 \cdot 10^9 \Rightarrow r \simeq 6\,400$$

Portanto, o raio aproximado da Terra é 6 400 km.

5. Inicialmente, denotando por A a área do círculo máximo, calculamos o comprimento do raio:

$$A = 706{,}5 \Rightarrow 3{,}14 \cdot r^2 = 706{,}5 \Rightarrow r = 15$$

Desse modo:

MODERNA

$$V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 15^3}{3} \Rightarrow V \simeq 14\,130$$

Portanto, o volume dessa esfera é aproximadamente 14 130 cm^3.

6. Para resolver esse problema, lembre os alunos de que a densidade de um material é dada pela razão entre as grandezas massa e volume.

a) Inicialmente, calculamos o volume da esfera:

$$V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}6^3}{3} \Rightarrow V \simeq 0{,}904$$

Assim, o volume da esfera é aproximadamente 0,904 cm^3. Desse modo, temos:

$$\underset{\text{densidade}}{8} = \frac{m}{0{,}904} \Rightarrow m = 7{,}232$$

Portanto, a massa aproximada m de cada uma dessas esferas é 7,232 g.

b) Inicialmente, calculamos o volume da esfera:

$$\underset{\text{densidade}}{8} = \frac{\overbrace{200{,}96}^{\text{massa}}}{V} \Rightarrow V = 25{,}12$$

Assim, o volume da esfera é 25,12 cm^3. Em seguida, calculamos o comprimento do raio:

$$V = 25{,}12 \Rightarrow \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot r^3}{3} = 25{,}12 \Rightarrow r = \sqrt[3]{6}$$

Portanto, o diâmetro da esfera é $2\sqrt[3]{6}$.

7. Usando a fórmula do volume da esfera, segue que:

$$V = 900 \Rightarrow \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot r^3}{3} = 900 \Rightarrow r \simeq 6$$

Portanto, o número inteiro mais próximo é 6, ou seja, a medida do raio é aproximadamente 6 m.

8. Inicialmente, chamamos V_1 o volume da caixa e V_2 o volume da esfera. Depois, calculamos os respectivos volumes.

- $V_1 = 24^3 \Rightarrow V_1 = 13\,824$
- $V_2 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 12^3}{3} \Rightarrow V_2 \simeq 7\,234{,}56$

Em seguida, calculamos o volume V aproximado de espuma utilizado na embalagem:

$$V = V_1 - V_2 \Rightarrow V = 13\,824 - 7\,234{,}56 \Rightarrow V \simeq 6\,589{,}44$$

Portanto, o volume de espuma utilizado em cada embalagem é, aproximadamente, 6 589 cm^3.

9. Uma possível resposta: temos $V_B = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (2r)}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_B = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$ e que $V_C = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$.

Adicionando os volumes V_B e V_C, segue que:

$$\overbrace{\frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}}^{V_B} + \overbrace{\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}}^{V_C} \Rightarrow \underbrace{V_A}_{V_B + V_C} = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

Portanto, $V_A = V_B + V_C$.

10. Inicialmente, calculamos o volume da esfera:

$$V_{\text{esfera}} = 36\pi \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = 36\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

Como a esfera está inscrita em um cilindro equilátero, esse cilindro possui raio de 3 cm e altura igual a $\underbrace{6\text{ cm}}_{2 \cdot r}$.

Assim, o volume do cilindro é dado por:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot (2r) \Rightarrow V_C = \pi \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow V_C = 54\pi$$

Portanto, o volume do cilindro é 54π cm^3.

11. Denotando por V_1 o volume total do bombom e por V_2 o volume do recheio, temos:

- $V_1 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^3}{3} \Rightarrow V_1 \simeq 33{,}5$
- $V_2 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1^3}{3} \Rightarrow V_2 \simeq 4{,}2$

Calculando o volume de chocolate, segue que:

$$V = V_1 - V_2 \Rightarrow V = 33{,}5 - 4{,}2 \Rightarrow V \simeq 29{,}3$$

Portanto, o volume de chocolate em cada bombom é, aproximadamente, 29,3 cm^3.

12. Para resolver o problema, verifique se os alunos compreendem que é preciso, inicialmente, multiplicar o volume por 8 e, em seguida, utilizar o valor obtido na respectiva fórmula do volume.

Como cada parte tem volume igual a $\frac{785}{96}$ cm^3, o volume V da esfera é dado por:

- $V = 8 \cdot \frac{785}{96} = \frac{785}{12}$
- $V = \frac{785}{12} \Rightarrow \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot r^3}{3} = \frac{785}{12} \Rightarrow r \simeq 2{,}5$

Portanto, o comprimento do raio dessa esfera é aproximadamente 2,5 cm.

13. Usando a fórmula da área da superfície da esfera, temos:

$$A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 \Rightarrow A \simeq 78{,}5$$

Portanto, a área da superfície dessa esfera é aproximadamente 78,5 cm^2.

14. Como o volume da esfera é igual a $\frac{1\,570}{3}$ dm^3, temos:

- $V = \frac{1\,570}{3} \Rightarrow \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot r^3}{3} = \frac{1\,570}{3} \Rightarrow r = 5$
- $A = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \Rightarrow A \simeq 314$

Portanto, a área da superfície da esfera é aproximadamente 314 dm^2.

15. Sendo C a medida da circunferência interna da cúpula, temos:

$$C = 69{,}08 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}14 \cdot r = 69{,}08 \Rightarrow r = 11$$

Logo, a área A da superfície em que ocorre a projeção corresponde à metade da área da superfície de uma esfera de raio 11 m. Assim:

$$A = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 11^2}{2} \Rightarrow A = 759{,}88$$

Portanto, a área da superfície em que ocorre a projeção é aproximadamente 759,88 m^2.

16. **a)** Inicialmente, como a área da superfície é 11 304 cm^2, temos:

$$A = 11\,304 \Rightarrow 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 = 11\,304 \Rightarrow r = 30$$

Assim, o raio da esfera tem comprimento de 30 cm. Em seguida, calculamos o volume da esfera:

$$V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 30^3}{3} \Rightarrow V \simeq 113\,040$$

Portanto, o volume da esfera que representa o planeta Terra é, aproximadamente, 113 040 cm^3.

b) Para resolver esse item, vimos anteriormente que o comprimento do raio da Terra é aproximadamente 6 400 km. Assim, fazemos uma regra de três indicando por x a distância na maquete entre essas representações:

Distância real (km)	Distância na maquete (cm)
6 400	30
5181,1	x

$$\frac{6\,400}{5\,181{,}1} = \frac{30}{x} \Rightarrow x \simeq 24{,}3$$

MODERNA

Portanto, a distância entre o Centro de Lançamento de Alcântara e o Cabo Canaveral na representação feita na maquete é, aproximadamente, 24,3 cm.

17. Chamando V_1 o volume do recipiente cilíndrico e V_2 o volume máximo da esfera, temos:

- $V_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 15 \Rightarrow V_1 = 1\,500\pi$

Assim, o volume V_1 do recipiente cilíndrico é $1\,500\pi$ cm^3.

- $V_2 = \underbrace{1\,500\pi}_{\text{volume do recipiente}} - \underbrace{1\,212\pi}_{\text{volume de água}} = 288\pi$
- $V_2 = 288\pi \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = 288\pi$

Assim, o volume máximo que a esfera pode ter é 288π cm^3. Calculando o raio, temos:

- $V_2 = 288\pi \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = 288\pi \Rightarrow r = 6$

Logo, para $r = 6$ cm, a área A da esfera é dada por:

$$A = 4\pi \cdot 6^2 \Rightarrow A = 144\pi$$

Portanto, no máximo, a área da superfície da esfera será 144π cm^2.

18. Inicialmente, calculamos o volume da esfera:

$$V_{esfera} = 25^2 \cdot \pi \cdot 7{,}2 \Rightarrow V_{esfera} = 4\,500\pi$$

Assim, o volume da esfera é $4\,500\pi$ cm^3. Desse modo:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 4\,500\pi \Rightarrow r^3 = 3\,375 \Rightarrow r = 15$$

Logo, o comprimento do raio é 15 cm. Consequentemente:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot 15^2 \Rightarrow A = 900\pi$$

Portanto, a área da superfície dessa esfera é 900π cm^2.

19. **a)** Como um giro completo equivale a 360°, cada fuso forma um ângulo de $\underbrace{15°}_{\frac{360°}{24}}$.

b) indicando por A_1 a área da Terra e A_2 a área de cada fuso, temos:

- $A_1 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,400^2 \Rightarrow A_1 = 514\,457\,600$

Assim, a área da Terra é 514 457 600 km^2.

- $A_2 = \frac{A_1}{24} \Rightarrow A_2 = \frac{514\,457\,600}{24} \Rightarrow A_2 \simeq 21\,435\,733$

Portanto, a área aproximada do planeta que corresponde a cada fuso horário é 21 435 733 km^2.

20. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

13 Projeções cartográficas

1. alternativa **a**

b) Essa alternativa não está correta, pois, na projeção de Mercator, as deformações que ocorrem nas áreas representadas são mínimas na região equatorial e aumentam consideravelmente em direção aos polos.

c) A alternativa não está correta, pois a projeção de Peters tem a superfície cilíndrica.

d) Essa alternativa não está correta, pois a projeção de Peters é cilíndrica, conservando assim o formato dos continentes.

2. Azimutal, pois consiste na projeção do globo terrestre sobre um plano.

3. Alternativa **b**, pois consistem na projeção do globo terrestre sobre a superfície lateral de um cilindro, que é, em seguida, "desenrolada" sobre um plano.

4. Se os alunos tiverem alguma dificuldade, peça a eles que se orientem pelas características das projeções cônicas e equivalentes.

- projeção de Lambert
- projeção de Albers

5. **a)** **A**: projeção cilíndrica; **B**: projeção cônica

b) Apenas a projeção **B** apresenta deformação de ângulo. Ambas as projeções têm deformação de área.

Após os alunos resolverem a tarefa, informe-os de que a projeção utilizada no item **A** é a de Mercator e a utilizada no item **B** é a cônica equidistante.

Resolução do tema 4

48. Inicialmente, calculamos a área da superfície e o volume da embalagem antiga.

$$A_t = 2 \cdot (20 \cdot 8 + 20 \cdot 10 + 8 \cdot 10) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t = 880$$

Assim, a área da superfície é 880 cm^2.

$$V = 20 \cdot 8 \cdot 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V = 1\,600, \text{ ou seja, } 1\,600 \text{ cm}^3$$

Calculando a área da superfície da embalagem atual, temos:

$$A_t = 20 \cdot 8 + 10 \cdot 8 + 2 \cdot \left(20 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + \frac{\overbrace{(20 + 10) \cdot 5}^{\text{área do trapézio}}}{2} + 8 \cdot 5\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t \simeq 160 + 80 + 2 \cdot (100 + 40 + 75 + 56{,}4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t \simeq 782{,}8$$

Calculando o volume da embalagem atual, temos:

$$V_t = 20 \cdot 8 \cdot 5 + 75 \cdot 8 \Rightarrow V_t = 1\,400$$

Em seguida, calculamos a redução da área da superfície, A_R, e do volume da embalagem, V_R:

$$A_R = 880 - 782{,}8 = 97{,}2$$
$$V_R = 1\,600 - 1\,400 = 200$$

Portanto, houve uma redução na área da superfície de aproximadamente 97,2 cm^2 e, no volume da embalagem, de 200 cm^3.

MODERNA

Sugestões ao professor

- Nesta seção, apresentamos sugestões de livros e *sites* que podem ser consultados com o objetivo de complementar os conteúdos tratados neste volume, bem como obter subsídios teórico-metodológicos para o trabalho em sala de aula. É importante, também, que seja consultada a seção **Ampliando seus conhecimentos**, onde há sugestões de livros e *sites* para os alunos.

Leituras sobre o ensino de Matemática

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; SILVA, Karina Pessoa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

  Este artigo apresenta algumas considerações a respeito da aplicação de uma tarefa sob a ótica da Modelagem matemática para uma turma de 1º ano do Ensino Médio, abordando conceitos de Geometria plana.

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; *et al*. *Práticas de modelagem matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2015.

  Este livro aborda aspectos da Modelagem matemática, apresentando resultados de pesquisas e experiências em sala de aula e destacando a possibilidade de trabalhar com essa metodologia na perspectiva da Educação Matemática.

- ARAÚJO, Jussara de Loiola. *Educação matemática crítica*: reflexões e diálogos. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2007.

  Este livro traz reflexões e diálogos sobre a Educação Matemática crítica, como uma preocupação educacional, incluindo sugestões sobre o que isso pode significar visando à justiça social.

- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.) *Educação matemática*: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

  Nesta obra os autores tratam a respeito da ambiguidade gerada no processo de pesquisa. Embora os textos de vários autores expressem diferentes perspectivas, no geral convergem para o mesmo significado.

- BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

  O livro apresenta explicações sobre modelo matemático e Modelagem matemática. Também traz algumas orientações sobre como o professor pode proceder para utilizar a Modelagem no ensino de Matemática.

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Este livro trata da informática educativa, abordando aspectos que vão desde as políticas governamentais até as questões epistemológicas e pedagógicas. São apresentados exemplos de como usar informática com alunos e professores, bem como questões referentes ao uso de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

  O livro descreve um conjunto de princípios que buscam ajudar os professores a planejar e implementar trabalhos com projetos. Contém, ainda, exemplos de projetos e mostra como desenvolvê-los em sala de aula.

- CAINELLI, Marlene Rosa; TOMAZINI, Elizabete Cristina de Souza. A aula-oficina como campo metodológico para a formação de professores em história: um estudo sobre o Pibid/História/UEL. *História & Ensino*, Londrina, v. 23, n. 2, p. 11-33, 2017.

  Este estudo apresenta a aula-oficina como possibilidade de exercício da docência com base em relatórios e entrevistas concedidas por alunos de iniciação científica do curso de História da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

- CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Na vida dez, na escola zero*. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2015.

  O livro traz considerações sobre o motivo pelo qual muitas pessoas são capazes de utilizar a Matemática para resolver problemas em situações de seu cotidiano, mas, quando se trata da Matemática escolar, elas apresentam dificuldades.

- CURY, Helena Noronha. *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro é apresentada uma visão geral sobre a análise de erros, que, segundo a autora, pode ser encarada como uma abordagem de pesquisa e como uma metodologia de ensino, em ambos os casos, utilizada com o intuito de auxiliar na prática em sala de aula. Também são indicadas pesquisas e sugestões sobre como os erros dos alunos podem ser utilizados nas aulas de Matemática.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

MODERNA

Nesta obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações sobre aspectos da cognição, da natureza da Matemática e das questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

• _____. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 189-204, set./dez. 2018. p. 189. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300189>. Acesso em: 13 jun. 2020.

Este artigo discute as contribuições da Etnomatemática para a formação de indivíduos capazes de produzir conhecimentos e de se comunicarem, colaborando para a superação das desigualdades sociais e garantindo dignidade a todos os cidadãos, independentemente das classes sociais nas quais estão inseridos, e voltados à preservação da natureza por meio da adoção de uma postura que defenda a sustentabilidade.

• FERREIRA, Mariana Kawall Leal (Org.). *Ideias matemáticas de povos culturalmente distintos*. São Paulo: Global, 2002. (Série Antropologia e Educação).

O livro aborda tópicos relacionados à educação e à Matemática do cotidiano. Também trata a respeito da organização social e da Matemática de povos indígenas no Brasil, e da aritmética e da ornamentação geométrica no Brasil e na África.

• FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

Esta obra é destinada a professores e pesquisadores em Educação Matemática, pois orienta esses profissionais sobre como iniciar uma pesquisa nessa área. O livro traz orientações a respeito do processo de investigação na área, além do surgimento e do desenvolvimento desse componente curricular no Brasil.

• GARDNER, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Trad. Maria A. V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

Neste trabalho, o autor explica as ideias fundamentais que desencadeiam uma revolução na aprendizagem e mostra como elas podem ser aplicadas em toda sala de aula onde se espera que os alunos pensem.

• HUETE, J. C. Sánchez; BRAVO, J. A. Fernández. *O ensino da Matemática*: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2005.

O livro pode ser usado como uma ferramenta de estudo e análise teórica para a construção do conhecimento matemático e para a resolução de problemas, visando a melhoras nas práticas em sala de aula.

• KNIJNIK, Gelsa et al. *Etnomatemática em movimento*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

O livro apresenta textos, discussões e reflexões sobre a trajetória e os rumos dos estudos e pesquisas no âmbito da Etnomatemática, tendo como principal referência o professor Ubiratan D'Ambrosio.

• LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

Este livro pode servir de referência aos professores no sentido de propor uma reflexão sobre a avaliação da aprendizagem escolar em termos sociais e pedagógicos.

• MENDES, Iran Abreu. *Investigação histórica no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

O livro trata do uso de projetos de investigação histórica como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática. As experiências de tarefas investigativas apresentadas no livro evidenciam a relevância dessa abordagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

• MENDES, Iran Abreu. *Matemática e investigação em sala de aula*: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro contém perspectivas didáticas que buscam contribuir para o ensino e aprendizagem mais significativo da Matemática, ampliando o conhecimento a respeito desse campo.

• MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria M. M. S. *A formação matemática do professor*: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

O livro aborda questões referentes à formação do professor de Matemática, trazendo aspectos do conhecimento acadêmico e do conhecimento escolar. Para ilustrar sua posição, os autores apresentam como os conjuntos numéricos são trabalhados no nível escolar acadêmico e básico.

• ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa em Educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999.

Este trabalho busca valorizar a interação tanto entre professor e aluno quanto entre os próprios alunos no processo de ensino e aprendizagem, apontando para a importância de as tarefas matemáticas propostas em sala de aula assumirem uma natureza problemática.

EM PROVA

Além disso, trata da necessidade de o professor ser capaz de estabelecer um ambiente de trabalho estimulante, que propicie a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

- PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Este livro levanta questões e propõe reflexões sobre aspectos metodológicos do ensino de Matemática, levando em consideração o saber matemático e os desafios de seu ensino e aprendizagem.

- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. e adapt. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

  Neste livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

- _____. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

  Este trabalho tece comentários a respeito das maneiras de resolver um problema, no qual o processo de solução é mais importante do que a própria solução em si. Para tanto, Polya estabelece as quatro fases da resolução de um problema: compreendendo o problema, elaborando um plano, executando o plano e fazendo o retrospecto.

- RIBEIRO, Alessandro J.; CURY, Helena N. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro, os autores discutem a respeito do ensino e da aprendizagem da Álgebra, com enfoque especial aos assuntos relacionados a equações e funções, fazendo uma breve revisão histórica e apresentando pesquisas relacionadas ao tema.

- SADOVSKY, Patricia. *O ensino de matemática hoje*: enfoques, sentidos e desafios. Trad. Antonio de Padua Danesi. São Paulo: Ática, 2007. (Educação em Ação).

  Neste livro são apresentadas propostas para rever e analisar a Matemática e, assim, reformular a relação entre professor e aluno.

- SKOVSMOSE, O. *Educação matemática crítica*: a questão da democracia. Trad. Abgail Lins e Jussara L. Araújo. Campinas: Papirus, 2017.

  O autor aborda a Educação Matemática por meio de uma perspectiva democrática, propondo que trabalhos com projetos de modelagem possam ser encarados como uma possível saída para a questão democrática na sala de aula.

- TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro as autoras esclarecem como lidar com a interdisciplinaridade no ensino de Matemática. São tratadas, ainda, situações com diferentes abordagens interdisciplinares sobre os conteúdos escolares que possibilitam ao professor refletir sobre como a Matemática e os demais componentes curriculares auxiliam na formação do aluno como cidadão.

- VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

  Em textos que aliam teoria e prática em sala de aula, os autores propõem discussões e reflexões sobre as crenças que permeiam o ensino de Matemática e apontam sugestões de como elas podem ser trabalhadas.

- ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf>. Acesso em: 26 maio 2020.

  A tese apresentada neste documento disserta, entre outros assuntos pedagógicos, a respeito da importância do professor como elemento mediador entre as concepções pessoais e a prática pedagógica.

Leituras sobre a História da Matemática

- ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

  Neste livro, o autor relata as expedições – que duraram sete anos – de Pierre François André Méchain e Jean Baptiste Joseph Delambre, que, com o intuito de medir o planeta e estabelecer um padrão comum de medida, seguiram em direções opostas. Nesse contexto foi definida uma nova medida – o metro – como sendo a décima milionésima parte da distância entre o Polo Norte e a linha do Equador.

- BOYER, Carl Benjamin. MERSBACH, Uta C. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

  Esse livro faz uma viagem para contar a história da Matemática, partindo desde os tempos mais remotos, passando pelas civilizações da Antiguidade, até chegar em descobertas mais recentes. Também apresenta

MODERNA

aspectos relacionados ao desenvolvimento de grande parte dos conteúdos matemáticos, tanto em relação às justificativas formais quanto às aplicações na resolução de problemas diversos.

- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

  O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para a resolução.

- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

  No volume 1, a história dos algarismos é apresentada considerando a origem da representação simbólica dos números em diversas civilizações, como os gregos, os romanos e os maias. Já no volume 2, é explicado por que a civilização indiana é considerada o berço da numeração moderna e são refeitos os caminhos que levaram o homem a inventar o computador.

- _____. *Os números*: a história de uma grande invenção. 11. ed. Trad. Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 2005.

  O livro aborda uma resumida História da Matemática e acompanha a evolução da arte de calcular, contada desde a Pré-História.

- LEAVITT, David. *O homem que sabia demais*: Alan Turing e a invenção do computador. Ribeirão Preto: Novo Conceito, 2011.

  O livro traz a biografia do matemático Alan Turing, que, por meio da proposta de uma máquina ainda imaginária, abriu as portas para a era dos computadores.

- LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. *Um olhar sobre a história nas aulas de matemática*. Abakós, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

  Neste livro, os autores defendem o uso da História da Matemática como metodologia em sala de aula, realizando uma abordagem histórica dos conteúdos como meio de facilitar o entendimento da Matemática.

- MAOR, Eli. *e*: a história de um número. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

  O livro traz em ordem cronológica desde o cálculo com logaritmos até descobertas mais recentes relacionadas ao número *e*.

- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação matemática*: propostas e desafios. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Neste livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

- MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

  O texto apresenta as principais questões e os momentos mais significativos do ensino da Matemática ao longo dos tempos.

- ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  O livro aborda a História da Matemática desde a Mesopotâmia até o século XIX. Um dos objetivos principais da autora é mostrar que a Matemática não é essencialmente abstrata e teórica. O livro também apresenta diferentes práticas matemáticas de povos da Antiguidade para a solução de problemas semelhantes.

- SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 21. ed. Rio de Janeiro: Record, 2014.

  Essa obra conduz o leitor a uma jornada histórica, trazendo os principais fatos relacionados ao estudo do último teorema de Fermat e a busca por sua demonstração – partindo de sua elaboração, no século XVII, até chegar ao ano de 1995, no qual Andrew Wiles pôde corrigir a primeira tentativa e, enfim, apresentar uma demonstração para esse famoso teorema matemático.

- STEWART, Ian. *Uma história da simetria na Matemática*. Trad. Cláudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  O livro apresenta a busca por soluções de equações algébricas, relatando essa história por meio de uma linha do tempo que vai desde a antiga Babilônia até chegar à Física do século XXI.

Leituras sobre os conteúdos deste volume

- BARBOSA, João Lucas M. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Este livro dá ao professor uma visão ampliada do que ensina em sala de aula, mostrando a Geometria euclidiana plana de um ponto de vista que vai além dos tópicos do Ensino Básico.

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal*: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

MODERNA

O livro apresenta um estudo dos fractais voltado para a sala de aula, além de conter características artísticas sem perder a precisão e o rigor matemático.

- CARROL, Lewis. *Euclides e seus rivais modernos*. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

  Tendo como base Os elementos, de Euclides, o autor discute a respeito de conceitos de Geometria presentes nesse livro, comparando-os com os conhecimentos desenvolvidos sobre o tema durante o século XIX, os quais contestavam muitos dos pressupostos euclidianos, propondo inclusive a substituição dessa Geometria da Antiguidade Clássica.

- COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). *As ideias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

  Esta obra comenta a prontidão para conceitos, equações, expressões, resolução de problemas, utilização de computadores e calculadoras voltados ao aprendizado da Álgebra, entre outros temas de grande importância.

- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.

  Este volume é composto de teorias, exercícios de aplicação e testes de vestibular que envolvem Geometria plana, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, sempre acompanhados de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre a história da Matemática relacionados aos temas abordados.

- FERREIRA, Regis de Castro; FALEIRO, Heloina Teresinha; SOUZA, Renata Fonseca de. *Desenho técnico*: apostila de circulação interna da Escola de Agronomia e Engenharia de Alimentos. Goiânia: Universidade Federal de Goiás, 2008.

  Nessa apostila são apresentados conceitos fundamentais de Desenho Técnico, destacando a importância desses conhecimentos para a construção de projetos de Engenharia e Arquitetura além de elementos de sua linguagem característica e as normas que orientam a construção de projetos.

- IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria espacial. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 10.

  Este volume é composto de teorias e exercícios de aplicação, testes de vestibular referentes a Trigonometria, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Uma coleção de crônicas e comentários em torno de um tema comum: a Matemática estudada nos últimos três anos que antecedem a universidade.

- LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).

  O foco desta obra é o trabalho com as funções de uma variável, estudadas sem o uso do cálculo infinitesimal. Tal abordagem elementar traz noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números, como os naturais, os inteiros, os racionais e os reais. Na segunda parte do livro são apresentadas funções variadas: afins, quadráticas, polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar P.; GUIMARÃES FILHO, Florêncio F. *Coordenadas no plano*: com as soluções dos exercícios. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).

  O tema abordado no livro é o uso de coordenadas como método para estudar Geometria plana. A primeira parte contém uma simplificação da Geometria analítica plana; a segunda, uma introdução aos vetores; e na terceira parte, as coordenadas e vetores são utilizados com a finalidade de estudar as transformações geométricas simples.

- WAGNER, Eduardo. *Construções geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

  Este livro visa mostrar que as construções geométricas são um importante instrumento no ensino da Geometria e da Álgebra. O texto explora as propriedades geométricas das figuras e a construção a partir da solução algébrica.

Sugestões de *sites* para o professor

- **Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação**

  Disponível em: <https://anped.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Neste *site* é possível obter informações sobre pós-graduação e pesquisa na área de educação, acessar publicações e consultar datas e locais de eventos sobre o tema.

- **Centro de Informação e Biblioteca em Educação**

  Disponível em: <http://inep.gov.br/pesquisa-ao-acervo>. Acesso em: 5 ago. 2020.

MODERNA

O acervo da biblioteca do Cibec é composto de livros, periódicos, teses, dissertações, folhetos e relatórios de pesquisa, materiais de multimídia, além de obras raras e especiais e documentos a respeito da educação brasileira.

- **Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática João Affonso Pascarelli**

  Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* tem por objetivo a prestação de serviços para professores e, por meio dele, é possível se inscrever e participar de cursos de atualização profissional, oficinas, palestras e seminários.

- **Domínio Público – Biblioteca Digital Desenvolvida em *Software* Livre**

  Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Com este *site*, o Governo Federal visa disponibilizar conhecimentos, colocando à disposição de todos uma biblioteca virtual. Alunos e professores podem utilizá-la para estudos, pesquisas e desenvolvimento profissional.

- **Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec)**

  Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/index.php>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* contém *softwares* disponíveis para *download*, artigos e atividades que tratam da tecnologia informática no âmbito da educação matemática escolar.

- **Educação Matemática em Revista**

  Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Essa revista tem como foco o trabalho do professor em sua prática de educador matemático.

- **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE**

  Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Com este *site* o Ministério da Educação busca prover ações para o desenvolvimento da educação, proporcionando ao professor uma fonte de informações sobre os programas gerenciados pelo FNDE, os financiamentos escolares, os projetos e as ações educacionais.

- **Geometria espacial**

  Disponível em: <https://anchor.fm/suellen-alves/episodes/Matemtica-efvp7p>. Acesso em: 18 ago. 2020.

- **Mathema**

  Disponível em: <https://mathema.com.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Neste *site* o professor encontrará informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação Matemática.

- **Ministério da Educação**

  Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* apresenta informações sobre o órgão governamental responsável pela Educação no Brasil (MEC). Além disso, o professor tem acesso aos projetos desenvolvidos pelo governo para a educação no país.

- **Nova Escola**

  Disponível em: <https://novaescola.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A edição *on-line* da revista Nova Escola proporciona ao leitor o acesso a diversas informações sobre a educação em várias áreas do conhecimento. Neste *site* pode-se ter acesso às edições da revista e pesquisar artigos publicados.

- **Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)**

  Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  Neste *site* encontram-se informações sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática, organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática. Nele, estão disponíveis datas, provas e gabaritos, bem como outras informações relevantes sobre as Olimpíadas.

- **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**

  Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* contém várias informações sobre o evento e possibilita às escolas que se inscrevam *on-line*. Apresenta ainda informações sobre provas, gabaritos, datas, escolas inscritas, entre outras.

- ***Podcast* - Percepção Espacial**

  Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2968986>. Acesso em: 18 ago. 2020.

- **Portal do Núcleo de Pesquisas das Novas Tecnologias de Comunicação Aplicadas à Educação – Escola do Futuro USP**

  Disponível em: <https://www.futuro.usp.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* proporciona ao professor acesso a novas tecnologias da informação e comunicação, bem como a projetos de pesquisa e a produções científicas.

MODERNA

- **Revista Brasileira de Educação – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**

  Disponível em: <https://anped.org.br/site/rbe>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  A revista é voltada à publicação de artigos acadêmico-científicos, visando fomentar e facilitar o intercâmbio acadêmico nos âmbitos nacional e internacional. Por meio do *site*, é possível ter acesso às edições da revista, pesquisar, enviar artigos etc.

- **Revista do Professor de Matemática**

  Disponível em: <http://rpm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* abrange informações sobre a publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. A revista é destinada àqueles que ensinam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No *site*, estão disponíveis artigos, edições da revista e informações a respeito da publicação de artigos.

- **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**

  Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Tem como finalidade congregar profissionais (pesquisadores, professores e alunos) da área de Educação Matemática e de áreas afins. No *site*, podem ser encontradas diversas informações sobre a Educação Matemática no Brasil e no exterior.

- **Sociedade Brasileira de Matemática**

  Disponível em: <https://www.sbm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* busca estimular o desenvolvimento da pesquisa e do ensino da Matemática no Brasil. Nele, estão disponíveis ao professor informações sobre eventos e atividades da área.

Referências bibliográficas

- ABRAMOVAY, Miriam; SILVA, Ana Paula da; FIGUEIREDO, Eleonora. *Guia para diretores e professores*: reflexões e práticas sobre violência e convivência escolar: faça você mesmo. Rio de Janeiro: Flacso Brasil/BID, 2018.

  Guia que apresenta orientações aos professores sobre os principais temas da contemporaneidade, relacionados à violência e à convivência escolar, de maneira reflexiva e prática.

- ACTIVE learning strategies. *Berkeley Center for Teaching & Learning.* Disponível em: <https://teaching.berkeley.edu/active-learning-strategies>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Página elaborada pelo Centro de Ensino e Aprendizagem da Universidade da Califórnia, em Berkeley, nos Estados Unidos, que apresenta definições, organização e exemplos de diversas estratégias associadas às metodologias ativas.

- ARAÚJO, Luciene da Costa; VIEIRA, Kay F. L.; COUTINHO, Maria da Penha de Lima. Ideação suicida na adolescência: um enfoque psicossociológico no contexto do ensino médio. *Psico-USF*, Itatiba, v. 15, n. 1, p. 47-57, jan./abr. 2010.

  Artigo que apresenta um estudo sobre as representações sociais da ideação suicida e a presença desse fenômeno em adolescentes do Ensino Médio.

- ATLAS geográfico escolar. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018.

  Essa obra contém as principais informações referentes ao caráter geográfico de nosso planeta, apresentando mapas que versam a respeito de características diversas, como localização de continentes e países, características físicas, além de estudos envolvendo população e aspectos econômicos e políticos.

- BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

  Este livro reúne artigos de professores que apresentam conceitos, reflexões, experiências e possibilidades de implementação do ensino híbrido nas escolas.

- BARCA, Isabel. Aula oficina: do projeto à avaliação. In: *Para uma educação de qualidade*: atas da Quarta Jornada de Educação Histórica. Braga, Centro de Investigação em Educação (CIED) / Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, 2004. p. 131-144.

  Artigo que apresenta, de maneira objetiva e estruturada, as etapas de uma aula-oficina.

- BARCELOS, Thiago Schumacher; SILVEIRA, Ismar Frango. Pensamento computacional e educação matemática: relações para o ensino de computação na educação básica. In: *WORKSHOP* SOBRE EDUCAÇÃO EM COMPUTAÇÃO, 20., 2012, Curitiba. *Anais*... Curitiba: SBC, 2012. p. 1-10. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/256439343_Pensamento_Computacional_e_Educacao_Matematica_Relacoes_para_o_Ensino_de_Computacao_na_Educacao_Basica/link/0deec5228dfbb4d377000000/download>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Artigo que busca discutir as relações entre conhecimento, habilidades e atitudes possíveis de serem estabelecidas entre Matemática e Ciência da Computação.

- _____. Relações entre o pensamento computacional e a matemática através da construção de jogos di-

MODERNA

gitais. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE *GAMES* E ENTRETENIMENTO DIGITAL, 12., 2013, São Paulo. *Anais...* São Paulo: SBC, 2013. p. 52-55. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/wei/article/view/10222>. Acesso em: 22 jul. 2020.

Esta pesquisa busca estudar a relação entre a Matemática aprendida no Ensino Básico e o sucesso nos cursos de introdução à Ciência da Computação, analisando o modo pelo qual os alunos estimulam as competências matemáticas no processo de desenvolvimento do pensamento computacional, tomando como base as atividades práticas de desenvolvimento de jogos digitais.

- BEFORE, during, or after reading: reflection quick write. *Lakehead University*. Disponível em: <https://teachingcommons.lakeheadu.ca/sites/default/files/inline-files/Quick%20Writes%20explanation.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Texto que apresenta um breve resumo a respeito da metodologia ativa **Quick writing**, publicado na página da Universidade de Lakehead, localizada no Canadá.

- BENINCASA, Miria; REZENDE, Manuel Morgado. Tristeza e suicídio entre adolescentes: fatores de risco e proteção. *Boletim de Psicologia*, São Paulo, v. 55, n. 124, p. 93-110, jun. 2006.

  Artigo que apresenta informações sobre os fatores de risco e proteção relacionados ao suicídio.

- BOUCINHA, Rafael Marimon et al. Construção do pensamento computacional através do desenvolvimento de *games*. *Renote*, v. 15, n. 1, p. 1-10, jul. 2017. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/75146>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo apresenta uma proposta metodológica que busca desenvolver o pensamento computacional nos alunos por meio do desenvolvimento de *games*.

- BRACKMANN, Christian Puhlmann. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Trabalho que busca verificar a possibilidade do desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica por meio de atividades exclusivamente desplugadas, ou seja, sem o uso de aparatos eletrônicos.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018a. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018b. p. 21-24. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/dcnem.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Esta resolução atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicadas em 2012. Nela, são apresentadas as mudanças necessárias para a implementação da proposta do Novo Ensino Médio.

- _____. Ministério da Educação. *Diretrizes para a Educação Básica*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/323-secretarias-112877938/orgaos-vinculados-82187207/12992-diretrizes-para-a-educacao-basica>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Conjunto de pareceres e resoluções que regulamentam a Educação Básica no Brasil.

- _____. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência Enem*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Matriz de referência é um termo utilizado especificamente no contexto das avaliações em larga escala para indicar habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização e orientar a elaboração de itens de testes e provas, bem como a construção de escalas de proficiência que definem o que e o quanto o aluno realiza no contexto da avaliação.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 30 maio 2020.

  As diretrizes reunidas neste documento estabelecem a base nacional comum, que orienta a organização, a ar-

MODERNA

ticulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino do país.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

  Nesta obra, voltada à formação de professores, são discutidos diversos temas relacionados ao Ensino Médio. Em um primeiro momento, discute-se o conceito de juventude com o objetivo de propor mudanças nas maneiras de conceber essa faixa etária. Esses textos buscam valorizar o papel do jovem como sujeito de sua história. Em seguida, os textos destacam temas como juventude e tecnologia, questão do mercado de trabalho e projeto de vida, além do papel da escola no processo de formação dos jovens.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este documento apresenta o histórico dos Temas Contemporâneos Transversais, sua divisão em seis grandes áreas e a importância desses temas para os currículos da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000.

  Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional.

- _____. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Ações Programáticas e Estratégicas. *Proteger e cuidar da saúde de adolescentes na atenção básica*. 2. ed. Brasília 2018c. Disponível em: <https://bvsms.saude.gov.br/bvspublicacoesproteger_cuidar_adolescentes_atencao_basica_2ed.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2020.

  Este documento do Ministério da Saúde foi elaborado para auxiliar as Equipes de Atenção Básica/Saúde da Família no trabalho com adolescentes, propondo o cuidado com a saúde, a adoção de hábitos saudáveis e a atenção aos principais aspectos clínicos.

- CAMARGO, Fausto; DAROS, Thuinie. *A sala de aula inovadora*: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018.

  Este livro é organizado em duas partes: a primeira apresenta reflexões dos autores sobre possibilidades de inovação em sala de aula; a segunda aborda mais de 40 estratégias que contribuem para a aplicação dessas metodologias.

- CAMPOS, Herculano Ricardo; CARDOSO, Samia Dayana J. Violência na escola: uma reflexão sobre o *bullying* e a prática educativa. *Em Aberto*, Brasília, v. 23, n. 83, p. 107-128, mar. 2010.

  Artigo que apresenta informações estatísticas sobre o *bullying* na escola e o papel do professor diante de situações como essa.

- CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  O objetivo deste currículo é oferecer diretrizes e orientações que visam apoiar as escolas a incluir em suas propostas curriculares os temas tecnologia e computação, potencializando o uso da tecnologia na aprendizagem.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

  O autor propicia uma análise do papel da Matemática na cultura ocidental e da noção de que a Matemática é apenas uma forma de Etnomatemática.

- DAYRELL, Juarez (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

  Juarez Dayrell é um pesquisador que investiga questões sobre a juventude e a educação, analisando a importância das culturas juvenis na construção de um cenário educativo mais democrático e significativo. Nessa obra, ele traz algumas experiências vivenciadas no projeto Observatório da Juventude, da Universidade Federal de Minas Gerais (UGMG), que trabalha desde 2003 com a formação de professores e discussões envolvendo a juventude.

- DRIEU, Didier; PROIA-LELOUEY, Nadine; ZANELLO, Fabrice. Ataques ao corpo e traumatofilia na adolescência. *Ágora*, Rio de Janeiro, v. 14, n. 1, p. 9-20, jan./jun. 2011.

  Artigo que apresenta um estudo sobre a relação entre as mudanças que ocorrem na puberdade e os comportamentos suicidas.

MODERNA

- FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa*. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

  Este livro traz aplicações práticas e estratégias de trabalho com diversos tipos de metodologias que apresentam elementos de inovação nas práticas de ensino e aprendizagem, chamadas pelas autoras de metodologias "inov-ativas".

- FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: *SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009*, Ponta Grossa. *Anais...* Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1013-1026.

  Aborda, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, a utilização de recursos de Tecnologia da Informação e Comunicação como tendência em Educação Matemática.

- FORTES, Isabel; MACEDO, Mônica Medeiros Kother. Automutilação na adolescência: – rasuras na experiência de alteridade. *Psicogente*, Barranquilla, v. 20, n. 38, p. 353-367, jul./dez. 2017. Disponível em: <http://revistas.unisimon.edu.co/index.php/psicogente/article/view/2556>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo de reflexão teórica que aborda aspectos do comportamento de automutilação, propondo-se a analisar o tema com base em algumas narrativas em *blogs* de adolescentes.

- FRANÇA, Rozelma; TEDESCO, Patrícia. Desafios e oportunidades ao ensino do pensamento computacional na educação básica no Brasil. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4., 2015, Maceió. *Anais...* Maceió: SBC, 2015. p. 1464-1473. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/283347058_Desafios_e_oportunidades_ao_ensino_do_pensamento_computacional_na_educacao_basica_no_Brasil>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Este trabalho busca discutir os desafios do ensino do pensamento computacional na Educação Básica, apontando alguns dos principais desafios a serem vencidos, bem como oportunidades de pesquisa na área.

- FRANCISCO, Marcos Vinicius; LIBÓRIO, Renata Maria C. Um estudo sobre *bullying* entre escolares do Ensino Fundamental. *Psicologia*: reflexão e crítica, Porto Alegre, v. 22, n. 2, p. 200-207, 2009.

  Artigo que busca caracterizar o *bullying* em escolas públicas, destacando os efeitos tanto sobre o comportamento quanto sobre o sentimento dos vitimados.

- ILLERIS, Knud (Org.). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Porto Alegre: Penso, 2013.

  Nesta obra, o pesquisador Knud Illeris reúne diferentes autores e teorias da aprendizagem que têm sido desenvolvidas na contemporaneidade e apresenta um conjunto de textos que tratam sobre o tema. Cada pesquisador contribui com suas reflexões, buscando caminhos na compreensão sobre o conceito de educar e sobre como funciona o complexo processo de ensino e aprendizagem na atualidade.

- INSTITUTO BRASILEIRO DE FLORESTAS. *O inventário florestal na era digital*. Disponível em: <https://www.ibflorestas.org.br/conteudo/o-inventario-florestal-na-era-digital>. Acesso em: 20 jun. 2020.

  Nesse material são destacadas as características do manejo florestal e do inventário florestal, descrevendo a importância de ambos, bem como os procedimentos a eles relacionados, além das tecnologias que são empregadas nesse contexto, como o uso de *tablets* e inteligência artificial para o monitoramento de áreas florestais.

- LEAL, Edvalda Araújo; MIRANDO, Gilberto José; CASA NOVA, Silvia Pereira de Castro. *Revolucionando a sala de aula*: como envolver o estudante aplicando técnicas de metodologias ativas de aprendizagem. São Paulo: Atlas, 2017.

  Este livro aborda algumas metodologias ativas de aprendizagem utilizando tanto estratégias tradicionais quanto estratégias contemporâneas e inovadoras.

- MAGALHÃES, Lívia Gonçalves. *Histórias do futebol*. São Paulo: Arquivo Público do Estado, 2010. (Coleção Ensino & Memória).

  Obra que aborda a história do futebol no Brasil, revelando informações e imagens relativas ao início do esporte no país, principalmente no estado de São Paulo. Também traz histórias sobre a participação da seleção brasileira em torneios como a Copa do Mundo, o futebol feminino, entre outros temas.

- MENTAL health atlas 2017. Genebra: World Health Organization, 2018.

  Documento que reúne uma compilação de dados sobre a saúde mental da população em nível mundial.

- MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, Lilian; MORAN, José (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 2-25.

  Este artigo apresenta práticas pedagógicas baseadas em metodologias ativas que valorizam o protagonismo dos alunos.

- _____. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Org.). *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. Ponta Grossa: Foca Foto/Proex/UEPG, 2015. v. 2. (Mídias Contemporâneas).

  Esse texto aborda as diferentes facetas das tecnologias educacionais, trazendo reflexões sobre a educa-

MODELO

ção no mundo contemporâneo e as novas concepções de ensino relacionadas às metodologias ativas.

- MORENO, Montserrat et al. *Falemos de sentimentos*: a afetividade como um tema transversal. Trad. Maria Cristina de Oliveira. São Paulo: Moderna, 1999. (Educação em Pauta: Temas Transversais).

  Relacionando aspectos cognitivos e afetivos, este trabalho afirma que é possível aprender em sala de aula características relacionadas à solidariedade, à ajuda mútua e à luta contra a discriminação, com base em ações e reflexões sobre os próprios sentimentos e comportamentos.

- PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Nesta obra é apresentada uma coletânea de ensaios que tratam da inserção da informática na educação escolar, promovendo articulações entre o uso dessa tecnologia e o fenômeno da cognição.

- PARA UMA ABORDAGEM multicultural: o Programa Etnomatemática. Nuno Vieira entrevista Ubiratan D'Ambrosio. *Revista Lusófona de Educação*, Lisboa, n. 11, p. 163-168, 2008.

  Entrevista realizada com o precursor da Etnomatemática, Professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio.

- PAULINO FILHO, Lucival Bento; PELLOSO, João Augusto Grecco; CAETANO, Willyan da Silva. Debates orientados: uma abordagem da aprendizagem ativa no desafio da formação integral. In: ENCONTRO NACIONAL DE JOVENS INVESTIGADORES, 4., 2019, Salvador. *Anais...* Salvador: 2019. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57573>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo apresentado em evento promovido pela Universidade do Estado da Bahia (Uneb), que aborda a realização de debates sob a perspectiva da aprendizagem ativa.

- PENSAMENTO computacional e programação como ferramentas de aprendizagem. *Instituto Ayrton Senna*, 13 set. 2019. Disponível em: <https://www.institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Nesse texto, o pensamento computacional e a programação são indicados como estratégias eficazes na busca por práticas pedagógicas que promovam o desenvolvimento pleno.

- PIVA JUNIOR, Dilermando. *Sala de aula digital*: uma introdução à cultura digital para educadores. São Paulo: Saraiva, 2013.

  Esta obra discute questões relacionadas à utilização de recursos tecnológicos em ambiente escolar, oferecendo ferramentas para que os educadores possam fundamentar e utilizar a cultura digital a serviço de sua principal atividade: a arte de educar.

- PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

  Nesta obra, os autores apresentam os possíveis modos de introduzir em sala de aula as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos, apontando as vantagens e desvantagens no trabalho com essa perspectiva. Também são analisados os papéis dos alunos e professores em sala de aula ao lidar com problemas relacionados às áreas de Geometria, Estatística e Aritmética.

- RAABE, André. Pensamento computacional na educação: para tod*s, por tod*s! *Computação Brasil,* Porto Alegre, Sociedade Brasileira de Computação (SBC), v. 34, n. 2, p. 54-63, jul. 2017. Disponível em: <https://www.sbc.org.br/component/flippingbook/book/35/1?page=54>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Com o intuito de apontar para a grande importância da ampliação do pensamento computacional no Ensino Básico, o autor discorre, neste artigo, a respeito dos esforços e das dificuldades encontradas no processo de valorização da Ciência da Computação como área de conhecimento.

- REIS, Angelina Fatima Moreno Vaz dos; BARRETO, Maria Auxiliadora Motta. *Uma experiência com* Think-pair-share *no Ensino Fundamental I*. Práxis, Volta Redonda, v. 9, n. 17, p. 55-67, jun. 2017.

  Este artigo apresenta definições e a organização da estratégia **Think-pair-share** por meio da aplicação dessa abordagem em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental.

- ROCHA, Julciane. *Design thinking* na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

  O objetivo é apresentar aos professores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar e, com isso, trazer benefícios para o dia a dia da sala de aula, como engajamento, maior aproveitamento, personalização, comunicação e outros.

- ROCHA, Ricael Spirandeli; CARDOSO, Iara Maria Dâmaso; MOURA, Monthelli Aparecida Estevão de. O uso da *gallery walk* como metodologia ativa em sala de aula: uma análise sistemática no processo de ensino-aprendizagem. *Revista Sítio Novo*, Palmas, v. 4, n. 1, p. 162-170, jan./mar. 2020.

  Este artigo apresenta possibilidades de aplicação da estratégia **Gallery walk** por meio da análise documental de publicações de sete experiências vivenciadas em salas de aula de Uberaba-MG.

EM ABERTA

- ROVELLI, Carlo. *A ordem do tempo*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2018.

  Adotando uma linguagem poética, esse livro aborda os mistérios do passado e do futuro, além de avaliar suposições construídas pela ciência e derrubar muitas delas por meio de reflexões profundas, discutindo a respeito do caráter pessoal relacionado à percepção de fluxo de tempo.

- SILVA, Ana Paula Medeiros. *Geometria molecular*: elaboração, aplicação e avaliação de uma sequência didática envolvendo o lúdico. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências da Natureza) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2016. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/5030/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Ana%20Paula%20Medeiros.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2020.

- SOUZA, Maria Helena. 21 *teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.

  Este livro apresenta uma viagem pela história dos teoremas desde os primórdios da humanidade, de modo a estabelecer relações com outras áreas do conhecimento. Nessa viagem, incorpora, por exemplo, a beleza no teorema dos fractais e a possibilidade de obter a medida de distâncias inalcançáveis por meio do teorema de Tales.

- STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Trad. Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

  Nesse livro, o leitor é desafiado a investigar diversos problemas e enigmas matemáticos, envolvendo desde contagem até teoremas de grande destaque, além do estudo de situações comuns e surreais tendo como base os mais variados conteúdos.

- TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. 17. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

  O livro traz considerações e reflexões sobre os saberes docentes que servem de base para o trabalho dos professores, bem como sobre os fundamentos sociocognitivos do ensino e a análise do trabalho e da formação dos professores.

- TOKARNIA, Mariana. Um em cada dez estudantes no Brasil é vítima frequente de *bullying. Agência Brasil,* 19 abr. 2017. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-04/um-em-cada-dez-estudantes-no-brasil-e-vitima-frequente-de-bullying>. Acesso em: 27 abr. 2020.

  Diante da realidade das escolas brasileiras, esta reportagem apresenta um levantamento de dados a respeito da ocorrência de situações de *bullying* em escolas da Educação Básica, sustentada por informações coletadas do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) de 2015. O texto discute as causas e consequências envolvendo esse tipo de situação e a atuação de pais, professores e demais estudantes no enfrentamento do *bullying*.

- VALENTE, Jonas. Agência Brasil explica: o que é a tecnologia 5G. *Agência Brasil*, 30 mar. 2020. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2020-03/agencia-brasil-explica-o-que-e-tecnologia-5g>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Esta reportagem mostra as principais características da tecnologia 5G, considerando os benefícios que podem ser obtidos com a implantação dessa nova tecnologia, em diversas áreas da sociedade, além de apresentar as perspectivas para seu desenvolvimento em relação à implantação no Brasil.

- VALENTE, José Armando. Integração do pensamento computacional no currículo da educação básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. *e-Curriculum*, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 864-897, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/curriculum/article/view/29051/20655>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Neste artigo, o autor busca analisar as diferentes estratégias de implantação do pensamento computacional no currículo da Educação Básica. Essas estratégias foram classificadas em três categorias: a inclusão de temas relacionados à Ciência da Computação, a inserção de componentes curriculares que exploram os conceitos do pensamento computacional por meio de tecnologias e, por fim, a exploração dos conceitos do pensamento computacional de maneira transversal ao currículo do aluno.

- VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

  Relatório que busca fornecer dados atualizados sobre a violência escolar e *bullying*, destacando sua natureza, abrangência e impactos, assim como apresentar iniciativas para enfrentar esses problemas.

- WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia,* Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/4711/pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo traz uma discussão a respeito do pensamento computacional, enfatizando sua importância como habilidade analítica que deve ser desenvolvida nos alunos do Ensino Básico, auxiliando na resolução de quaisquer tipos de problemas.

MODELO

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA ESPACIAL

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37384 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Para conhecer seu livro

Olhar o mundo à nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos de nossa sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações, tomar decisões com base em constatações matemáticas e lidar com os recursos tecnológicos são exemplos da importância da Matemática em nossa vida.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a esta etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos, exercícios e problemas resolvidos, seguidos de propostas de exercícios e problemas que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que tratam do uso de *softwares* e de linguagem de programação.

Por fim, desejamos a você, aluno ou aluna, que desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações de seu professor, faça uso deste material com dedicação, protagonismo e entusiasmo.

Bom estudo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

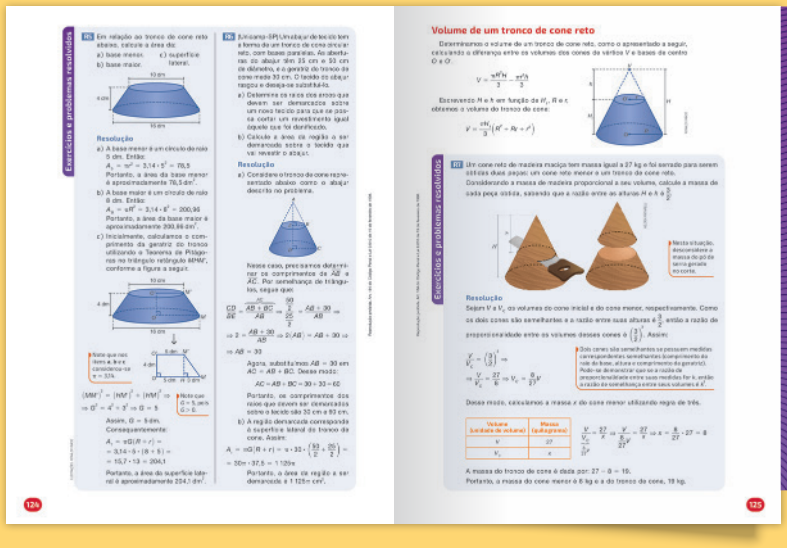
6 Pirâmides

El Castillo de Chichén Itzá

BNCC

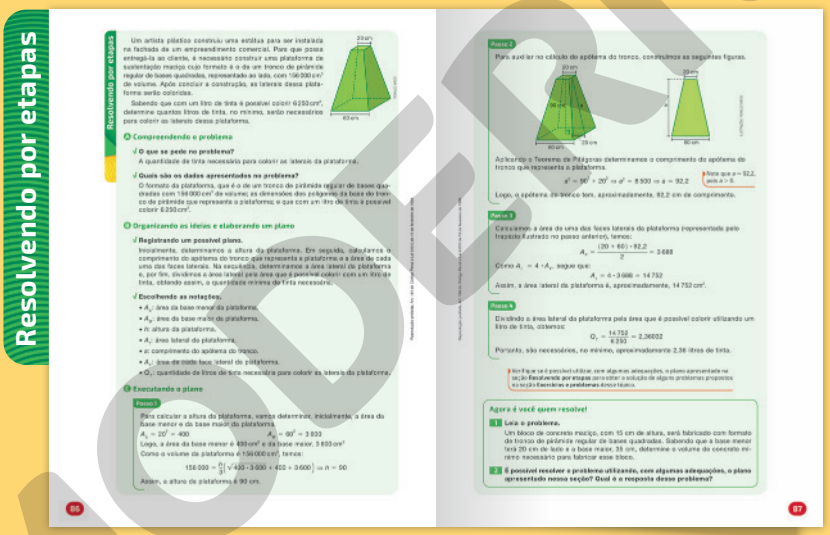
Abertura

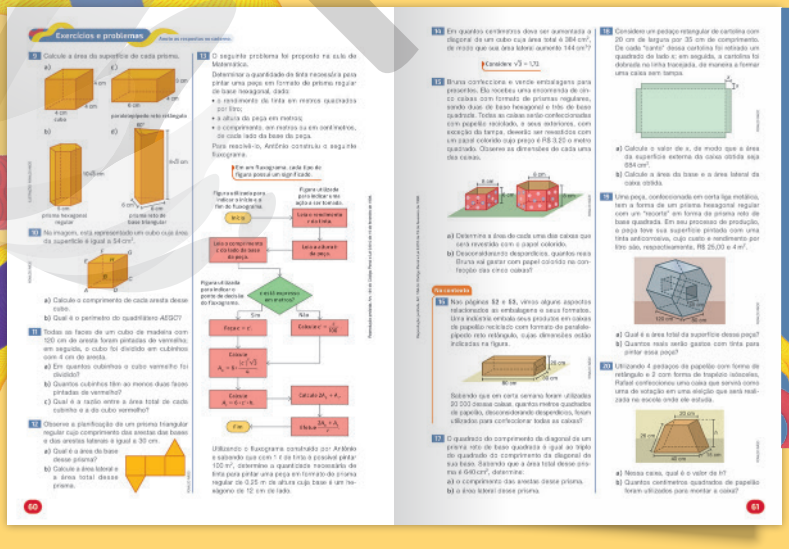
Na abertura de cada tema você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversas temáticas.



Estes exercícios e problemas auxiliam a exercitar habilidades, competências e estratégias para resolver todas as outras tarefas propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

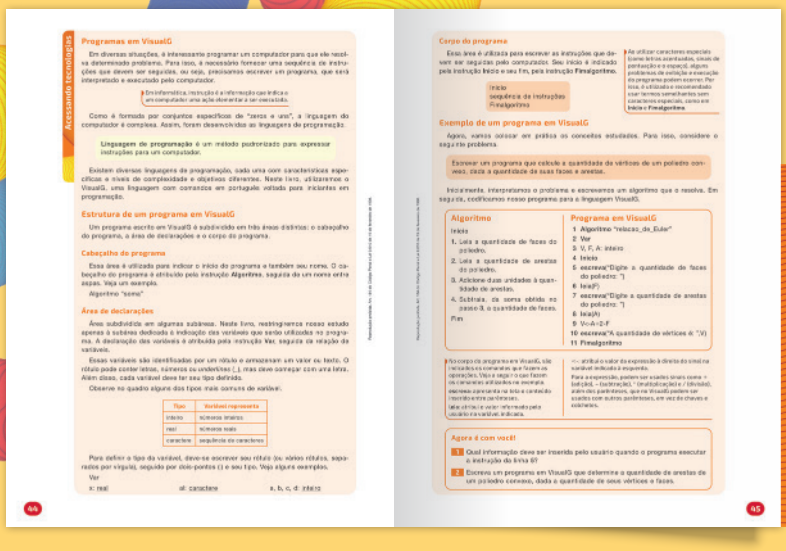
Esta seção apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Espera-se que, a partir dela, você seja capaz de desenvolver estratégias para resolver diversos problemas, matemáticos ou não.





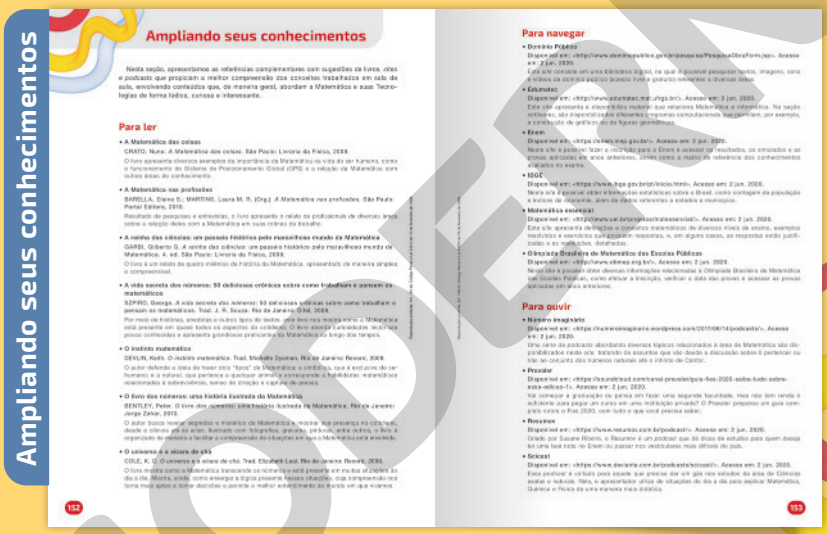
Esta seção apresenta exercícios e problemas diversificados para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Vários deles apresentam relações com outras áreas do conhecimento e outros componentes curriculares, além de questões de provas, como vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Acessando tecnologias

Nesta seção, você vai encontrar exemplos e tarefas que complementam o que foi estudado nos temas, utilizando *softwares*, linguagem de programação e aplicativos disponíveis em *sites*.



Ampliando seus conhecimentos

Esta seção, apresentada antes das **Referências bibliográficas** usadas neste volume, contém referências complementares de livros, vídeos, *sites* e *podcasts* para você conhecer mais sobre o que foi estudado nos temas e para ampliar seus conhecimentos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Calculadora As tarefas com destaque **Calculadora** exploram procedimentos para usar os recursos dessa ferramenta.

Em grupo As tarefas com destaque **Em grupo** serão mais proveitosas se realizadas com a colaboração de um ou mais colegas.

Desafio As tarefas com destaque **Desafio** possuem caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

Elaborando As tarefas com destaque **Elaborando** exploram o desenvolvimento da escrita, da imaginação, da investigação e da reflexão.

No contexto As tarefas com destaque **No contexto** estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.

Ser consciente Nas tarefas com destaque **Ser consciente** você refletirá a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde, cidadania, entre outros, possibilitando uma avaliação cidadã e social da temática abordada.

Este ícone indica que as cores dos objetos retratados não correspondem às reais.

Este ícone indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

Objetivos

A finalidade deste volume é ampliar seus conhecimentos a respeito de **Geometria espacial**. Os conteúdos nele abordados são apresentados de maneira simples e precisa, visando seu protagonismo na aprendizagem e a construção de uma visão integrada da Matemática em diversos contextos.

O objetivo é que você amplie sua compreensão a respeito das noções espaciais e das características dos prismas e corpos redondos, calculando suas áreas de superfícies e seus volumes, além de analisar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em Cartografia. Ademais, você será capaz de estabelecer relações com outras áreas do conhecimento e suas aplicações em nosso cotidiano, como a produção de embalagens e ferramentas da construção civil.

Além disso, durante o desenvolvimento dos conteúdos, você será desafiado a propor estratégias para modelar soluções de determinados problemas e escrevê-las em uma linguagem de programação.

Base Nacional Comum Curricular - BNCC

Em toda a coleção, visando favorecer o desenvolvimento das Competências Gerais da Educação Básica, das Competências Específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades relacionadas a cada uma delas, serão propostas tarefas (problemas, vivências, investigações etc.) para que você as resolva de maneira reflexiva.

A seguir, apresentaremos as competências e as habilidades cujo desenvolvimento é favorecido neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investig ar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Competências específicas

1. **CE1CNT:** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.
2. **CE2CNT:** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 **CE3CNT:** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

Matemática e suas Tecnologias: Competências específicas e habilidades

1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2 Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

EM13MAT309: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT315: Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

EM13MAT405: Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

EM13MAT504: Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

EM13MAT509: Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

EM13MAT308

- **EM**: O primeiro par de letras indica a etapa do **Ensino Médio**.
- **13**: O primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio.
- **MAT**: A segunda sequência de letras indica a área ou o componente curricular: **MAT** = Matemática e suas Tecnologias.
- **308**: Os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUMÁRIO

1 Geometria espacial de posição 10

Um pouco de história 12
Alguns conceitos necessários 13
Noção de conjuntos 13
Conjunto unitário e conjunto vazio 13
Relação de inclusão 14
União e interseção de conjuntos 14
União de conjuntos 14
Interseção de conjuntos 14
Exercícios e problemas 15
Estudando Geometria de posição 15
Exercícios e problemas 17
Posições relativas entre duas retas 18
Exercícios e problemas 20
Posições relativas entre reta e plano 21
Exercícios e problemas 22
Posições relativas entre dois planos 22
Exercícios e problemas 24
Propriedades de paralelismo e perpendicularismo 25
Resolvendo por etapas 27
Exercícios e problemas 29

2 Projeções ortogonais no plano e distância no espaço 30

Projeções ortogonais sobre um plano 32
Exercícios e problemas 33
Distâncias no espaço 35
Exercícios e problemas 36

3 Poliedros 38

Os poliedros 40
Poliedros convexos e poliedros não convexos 41
Exercícios e problemas 42
Relação de Euler 43
Acessando tecnologias
Programas em VisualG 44
Poliedros de Platão 46
Poliedros regulares 48
Exercícios e problemas 50

4 Prismas 52

Os prismas 54
Exercícios e problemas 56
Área da superfície de um prisma 57
Acessando tecnologias
Calculando a área total de um prisma reto retangular 58
Exercícios e problemas 60
Volume do paralelepípedo reto retângulo 63
Princípio de Cavalieri 65
Volume de um prisma qualquer 65
Exercícios e problemas 66

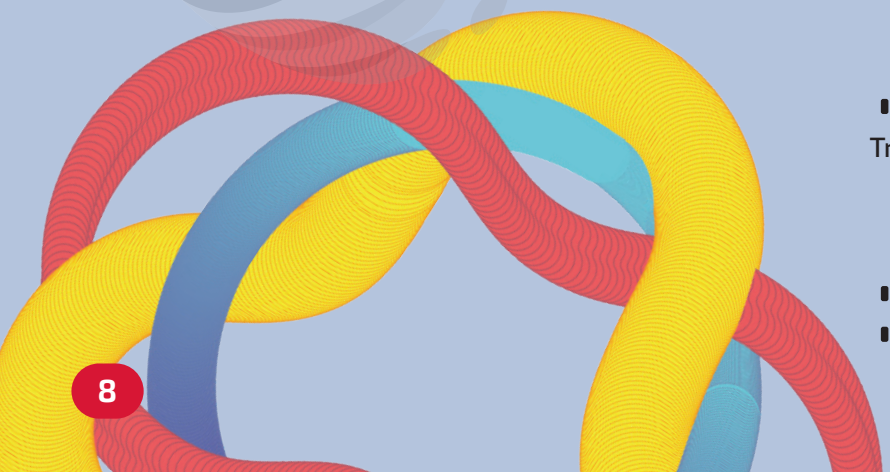
5 Prismas na natureza 70

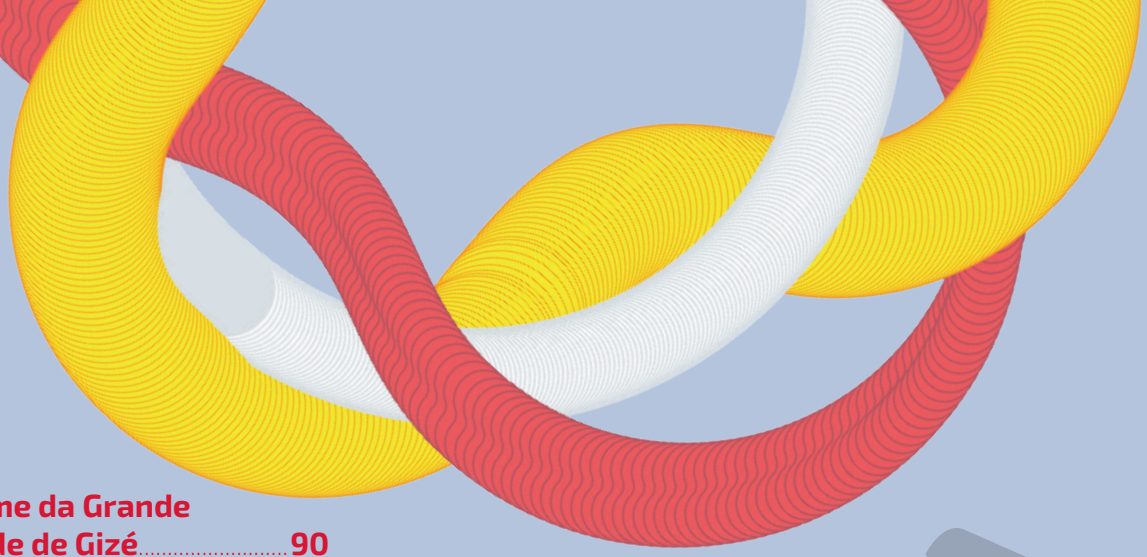
6 Pirâmides 72

As pirâmides 74
Área da superfície de uma pirâmide 75
Exercícios e problemas 77
Volume de uma pirâmide 79
Volume de uma pirâmide triangular 80
Volume de uma pirâmide qualquer 80
Exercícios e problemas 82
Tronco de pirâmide 83
Área da superfície de um tronco de pirâmide 84
Volume de um tronco de pirâmide 84
Resolvendo por etapas 86
Exercícios e problemas 88

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.





7 O volume da Grande Pirâmide de Gizé 90

8 Cilindro 92

Corpos redondos 94
O cilindro 95
Área da superfície de um cilindro reto 96
Exercícios e problemas 98
Volume do cilindro 100
Resolvendo por etapas 102
Exercícios e problemas 104
Acessando tecnologias
Condições no VisualG 108

9 Volume interno de um motor 110

10 Cone 112

O cone 114
Área da superfície de um cone reto 115
Exercícios e problemas 116
Volume do cone 118
Exercícios e problemas 120
Tronco de cone reto 123
Área da superfície de um tronco de cone reto 123
Volume de um tronco de cone reto 125
Exercícios e problemas 126

11 Esfera 130

A esfera 132
Volume da esfera 133
Resolvendo por etapas 134
Exercícios e problemas 137
Área da superfície da esfera 138
Exercícios e problemas 139

12 Uma aplicação de volume: adulteração de combustíveis 140

13 Projeções cartográficas 142

Cartografia 144
O formato do planeta Terra 144
Estudando projeções cartográficas 145
Classificação de projeções 145
Exercícios e problemas 148
Acessando tecnologias
Comparando áreas de países 151

Ampliando seus conhecimentos 152
Respostas 154
Referências bibliográficas 159
Lista de siglas 160

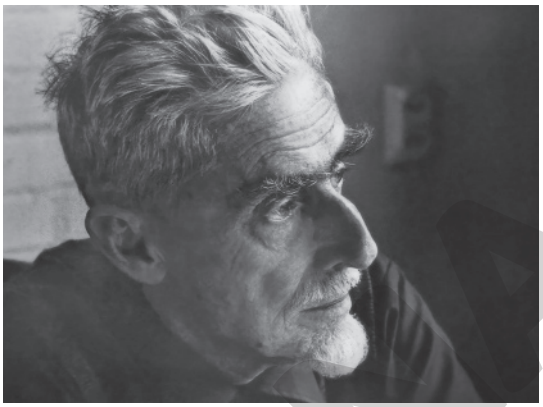
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 Geometria espacial de posição

Ilusão de ótica de Escher

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), mais conhecido como M. C. Escher, foi um dos mais famosos artistas gráficos do mundo. Sua obra reúne mais de 448 litografias, xilogravuras e gravações em madeira, somadas ainda a mais de 2 000 desenhos e esboços.



Maurits Cornelis Escher.

© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY-THE NETHERLANDS.
ALL RIGHTS RESERVED

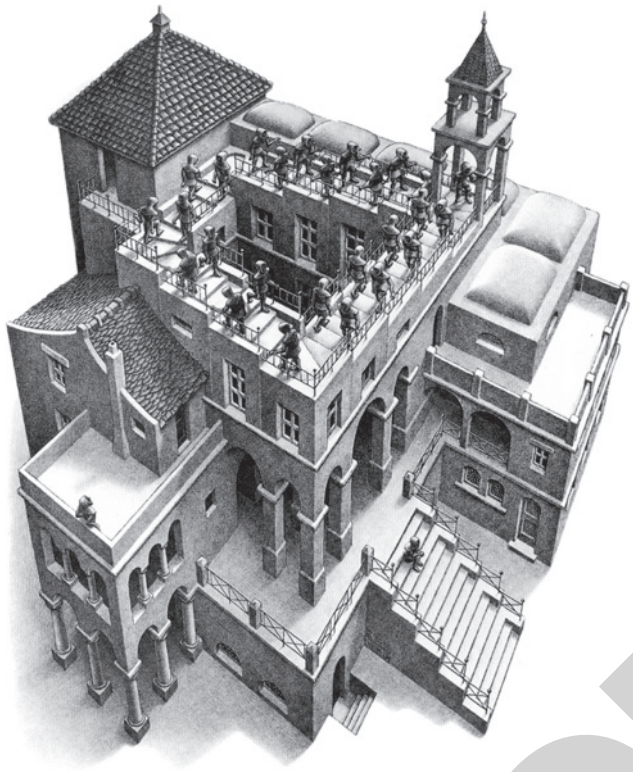
Sua obra pode ser dividida em dois momentos: antes de 1937, em que sua arte era mais voltada a paisagens urbanas e naturais, e após 1937, quando a influência de suas visitas ao Alhambra, palácio árabe em Granada, na Espanha, e dos azulejos mouros presentes nele, com seus padrões geométricos e suas cores, tornou-se presente na obra do artista.

Escher fez mais do que apenas replicar padrões encontrados nos azulejos mouros, ele começou a substituir formas geométricas por imagens realísticas, uma das características mais marcantes de seu estilo artístico.

Litografia: reprodução impressa sobre papel, por meio de prensa, de um desenho executado com tinta graxenta sobre uma superfície calcária ou placa metálica.

Xilogravura: estampa obtida por meio de gravuras em relevo sobre madeira.

A criatividade do artista também o levou a “brincar” com a perspectiva e a ilusão de ótica, misturando esses elementos à arquitetura, de maneira a desenhar, no plano, construções que seriam impossíveis no espaço, como é o caso da obra **Escada acima e escada abaixo**.

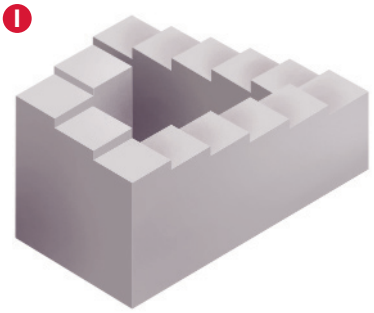


© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY-THE NETHERLANDS. ALL RIGHTS RESERVED

ESCHER, Maurits Cornelis. *Escada acima e escada abaixo*. 1960. Litografia, 35 cm x 28,5 cm. Coleção particular.

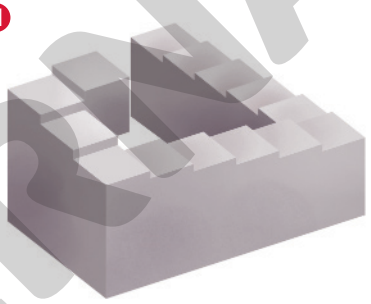
Vista na perspectiva com ilusão de ótica.

I



Rotações que apresentam perspectivas que desvendam a ilusão de ótica.

II



III

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

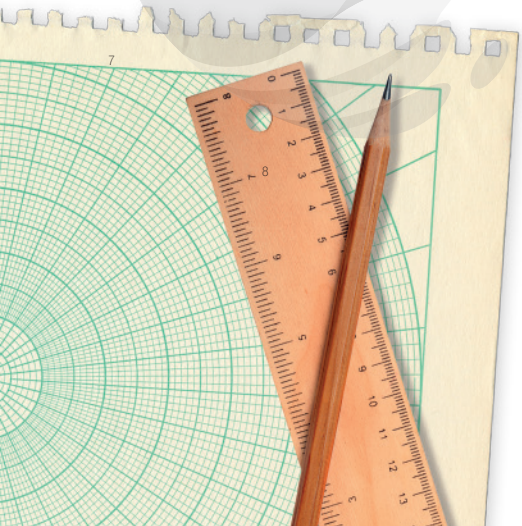
Nessa obra, Escher utiliza o conceito de figuras impossíveis, apresentado a ele pelos matemáticos Lionel e Roger Penrose, para propor uma escada na qual, ao pensarmos em uma pessoa subindo (ou descendo), a ilusão de ótica sugerida é que ela voltaria sempre ao mesmo lugar. Mas como isso seria possível? Veja no esquema ao lado!

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Descreva com suas palavras por que seria impossível subir (ou descer) a escada proposta por Escher e voltar ao mesmo lugar. Resposta pessoal.

B Por meio da imagem **I** apresentada acima, temos a “falsa” impressão de que é possível subir voltando sempre ao mesmo lugar. Por que isso ocorre? Uma possível resposta: porque o ponto de vista (perspectiva) proposto ao espectador sugere uma ilusão de ótica.

C Pesquise outras obras de Escher nas quais ele propõe construções que seriam impossíveis no espaço. Resposta pessoal.

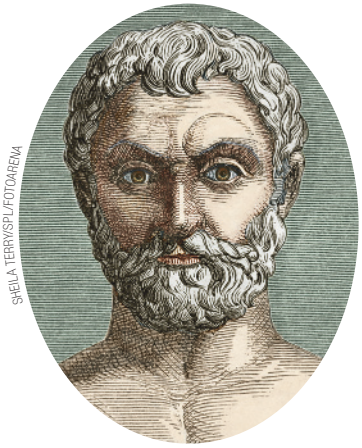


A posição na qual observamos um objeto pode mudar a percepção que temos dele (conforme apresentado nas imagens **I**, **II** e **III**), porém, as relações entre os elementos geométricos são mantidas, como a posição relativa entre os planos que contêm os degraus da escada. Nas próximas páginas, estudaremos a **Geometria de posição** e determinaremos a posição relativa entre retas, entre retas e planos e, também, entre planos. Além disso, estudaremos as propriedades de paralelismo e perpendicularismo.

FOTOMONTAGEM DE MAURICIO PLANEL. FOTOS: 1.GOLBAY/SHUTTERSTOCK; 2.STOKKETE/SHUTTERSTOCK; 3.POTAPOV ALEXANDER/SHUTTERSTOCK; 4.ERIC ISSELEE/SHUTTERSTOCK; 5.STOCKPHOTO MANIA/SHUTTERSTOCK; 6.AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 7.DW LABS INCORPORATED/SHUTTERSTOCK; 8.ANTON STARIKOV/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



SHEILA TERRY/SPL/FOTOARENA

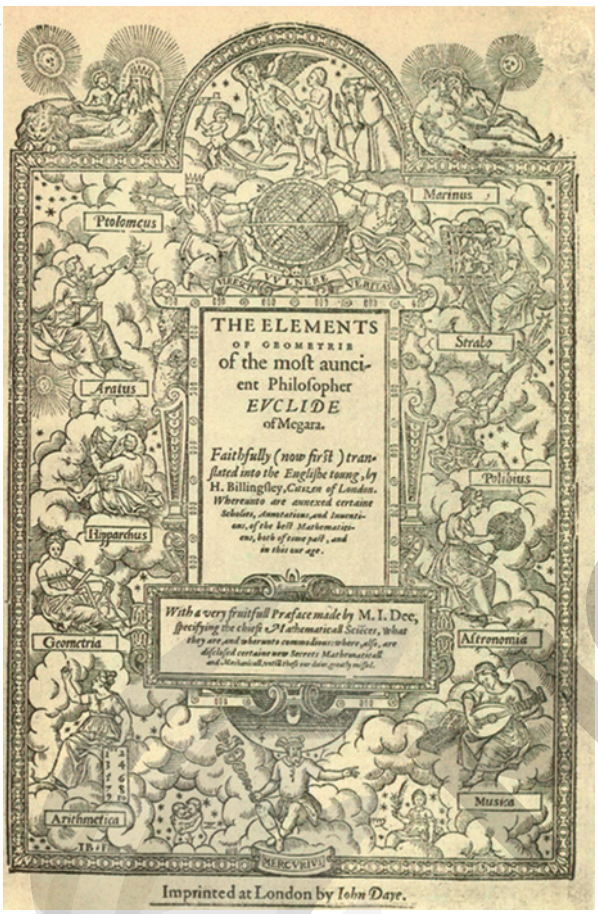
Tales de Mileto.

Um pouco de história

Fazer afirmações sobre a origem da Geometria é demasiadamente arriscado, pois seus primórdios são mais antigos que a própria escrita. Somente há alguns milênios a humanidade foi capaz de registrar por escrito seus conhecimentos e ideias. O que sabemos é que alguns povos, como os mesopotâmios, os egípcios e os babilônicos, já utilizavam conhecimentos geométricos, principalmente os relativos à mensuração.

Em algum momento da história, o homem sentiu a necessidade de argumentos lógicos para que certas afirmações fossem aceitas como verdadeiras. Foi assim que surgiu a chamada Geometria demonstrativa. Comumente, é dito que ela teve início no século VI a.C., com o matemático Tales de Mileto, um dos primeiros personagens conhecidos a quem se creditam descobertas matemáticas.

REPRODUÇÃO



Página de rosto de uma versão em inglês de 1570 da obra *Os elementos*.

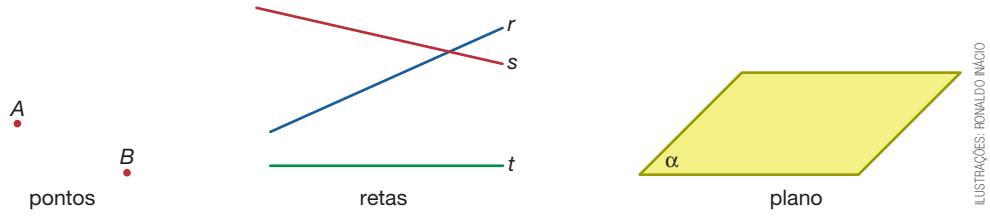
Outro contribuinte notável da Geometria demonstrativa, talvez o mais importante, foi Euclides de Alexandria (c. 300 a.C.). Ele foi um excelente organizador de resultados matemáticos obtidos por vários estudiosos que o precederam, revelando grande habilidade ao escrever suas demonstrações de forma simples e clara. Muito do trabalho de Euclides está contido em sua obra-prima: **Os Elementos**. Essa coleção, composta de 13 livros, é um dos trabalhos mais influentes da história, contabilizando mais de mil edições publicadas.

Durante muito tempo, as deduções matemáticas realizadas por Euclides foram o texto escolar padrão em quase todo o mundo, e ainda hoje muito do que se ensina de Geometria nas escolas é baseado na obra **Os Elementos**. A grandiosa obra de Euclides buscou formalizar o que atualmente conhecemos como Geometria euclidiana.

No estudo da Geometria, existem noções ou conceitos que são aceitos como verdadeiros sem que seja necessário demonstrá-los. As noções de **ponto**, **reta**, **plano** e **espaço** são chamadas **primitivas** e não são definidas formalmente: nós as distinguimos intuitivamente. O ponto, a reta e o plano são elementos básicos do espaço.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Geralmente, indicamos os pontos por letras maiúsculas, as retas por letras minúsculas e os planos por letras gregas minúsculas, como α, β e γ.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO NÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Alguns conceitos necessários

Antes de iniciarmos os estudos sobre Geometria de posição, vamos estudar a **noção de conjunto** e a **relação de inclusão** entre conjuntos, as quais serão importantes para o desenvolvimento desse tema.

Noção de conjuntos

A ideia de conjuntos é fundamental na Matemática e está presente, direta ou indiretamente, em diversos de seus conceitos. Trata-se de um conceito primitivo, de modo que não é definido em termos formais. Intuitivamente, entende-se por conjunto qualquer lista ou reunião bem definida de números, letras, símbolos ou objetos de qualquer natureza.

Um conjunto é constituído por **elementos**. Quando um objeto a é elemento de um conjunto A, dizemos que ele **pertence** ao conjunto, fato que indicamos por $a \in A$. Caso contrário, dizemos que a **não pertence** ao conjunto A, e escrevemos $a \notin A$. Os elementos de um conjunto podem ser apresentados:

- entre chaves e separados por vírgula (ou ponto e vírgula);

Exemplos

Explique aos alunos que, no conjunto M, as reticências indicam que há outros objetos maiores do que 6.

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $M = \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Indicaremos um conjunto por uma letra maiúscula de nosso alfabeto.

- pela condição que os define.

Exemplos

- $P = \{x \mid x \text{ é um número natural maior do que 2 e menor do que 10}\}$
- $S = \{x \mid x \geqslant 0\}$

lê-se: tal que

Os conjuntos A e P são **finitos**, pois podemos contar seus elementos, ou seja, associá-los aos números naturais de 1 até certo número n fixo. Já os conjuntos M e S são **infinitos**, pois não são finitos.

Indicaremos a **quantidade de elementos do conjunto** A por $n(A)$. Nesse caso, $n(A) = 5$.

Conjunto unitário e conjunto vazio

Um conjunto é dito **unitário** se possui um único elemento. Em outras palavras, um conjunto A é unitário se $n(A) = 1$.

Exemplos

- O conjunto $H = \{12\}$ é unitário, pois é composto por um único elemento.
- O conjunto dos países da América do Sul que, em 2019, possuíam mais de 100 milhões de habitantes é unitário, pois apenas o Brasil pertence ao conjunto.

Dizemos que um conjunto é **vazio** quando ele não possui elementos. Indicaremos o conjunto vazio por $\varnothing$ ou $\{\}$. Evidentemente, $n(\varnothing) = 0$. Por definição, o conjunto vazio é finito.

Nunca devemos indicar o conjunto vazio por $\{\varnothing\}$, pois esta notação não representa um conjunto vazio, mas sim um conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio.

Exemplos

- O conjunto dos números naturais menores do que 0 é vazio, pois não existe número natural menor do que zero.
- O conjunto dos números pares cujo algarismo das unidades é 1 é vazio, pois não existe número par cujo algarismo das unidades é 1.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Relação de inclusão

Dados dois conjuntos A e B, se todo elemento de A for também elemento de B, dizemos que A é **subconjunto** de B, ou que A está **contido** em B, ou, ainda, que A é **parte** de B. Indicamos esse fato por $A \subset B$.

A relação $A \subset B$ é denominada **relação de inclusão**.

Exemplo

- O conjunto G de todos os gatos está contido no conjunto F de todos os felinos ($G \subset F$).

Quando nem todo elemento de A é elemento de B, ou seja, quando existe pelo menos um objeto pertencente a A que não pertence a B, dizemos que A **não é subconjunto** de B, ou que A **não está contido** em B, ou, ainda, que A **não é parte** de B. Indicamos esse fato por $A \not\subset B$.

Exemplo

- Considere os conjuntos $C = \{2, 3, 5, 9\}$ e $D = \{2, 3, 9\}$. Como $5 \in C$ e $5 \notin D$, então $C \not\subset D$.

União e interseção de conjuntos

União de conjuntos

Considere os conjuntos A e B. A **união** (ou **reunião**) de A e B, a qual indicaremos por $A \cup B$, é o conjunto cujos elementos são os objetos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos. Formalmente, escrevemos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplos

- Dados os conjuntos $D = \{0, 1, 2, 3\}$ e $E = \{2, 3, 5, 6\}$, temos:

$$D \cup E = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$$

- Dados os conjuntos $G = \{-2, 0, 1\}$ e $H = \{5, 7\}$, temos:

$$G \cup H = \{-2, 0, 1, 5, 7\}$$

Interseção de conjuntos

Considere os conjuntos A e B. A **interseção** entre A e B, a qual indicaremos por $A \cap B$, é o conjunto cujos elementos são os objetos que pertencem a ambos os conjuntos. Formalmente, escrevemos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exemplos

- Dados os conjuntos $I = \{3, 4, 5\}$ e $J = \{6, 7\}$, temos:

$$I \cap J = \varnothing$$

- Dados os conjuntos $E = \{-2, 0, 2, 4\}$ e $F = \{2, 4, 9\}$, temos:

$$E \cap F = \{2, 4\}$$

Note que os conjuntos I e J não possuem elementos em comum, ou seja, $I \cap J$ é o conjunto vazio. Nesse caso, dizemos que I e J são **disjuntos**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

4. a) Algumas possíveis respostas: lápis, bônus e imóvel; tênis, táxi e fêmur.

1 Considerando os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{e, i\}$ e $C = \{a, e, i, o, u\}$, determine:

a) $A \cup B$ $\{a, b, c, d, e, i\}$

b) $A \cap B$ $\{e\}$

c) $B \cup C$ $\{a, e, i, o, u\}$

d) $A \cap C$ $\{a, e\}$

2 Em cada item, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $A \cap B = \varnothing$.

b) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ e $B = \{7, 9, 11\}$
$A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ e $A \cap B = \{7, 11\}$.

c) $A = \{3, 6, 9\}$ e $B = \varnothing$
$A \cup B = \{3, 6, 9\}$ e $A \cap B = \varnothing$.

d) $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A \cap B = \{1, 4\}$.

3 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 7, 9\}$, $C = \{1, 5, 10\}$ e $D = \{1, 3, 5\}$, determine a alternativa correta. alternativa c

a) $D = (A \cup B) \cap C$

b) $D = B \cap (A \cup C)$

c) $D = (B \cup C) \cap A$

d) $D = (B \cap C) \cap A$

4 Sendo A o conjunto de todas as palavras acentuadas da língua portuguesa e B o conjunto de todas as palavras paroxítonas, escreva:

a) três elementos de $A \cap B$.

b) três elementos de A que não são elementos de B. Algumas possíveis respostas: helicóptero, âncora e dominó; sílaba, tamanduá e brócolis.

c) três elementos de B que não são elementos de A. Algumas possíveis respostas: escola, maçaneta e borracha; lentilha, ovelha e tomada.

Estudando Geometria de posição

As noções primitivas de ponto, reta, plano e espaço servem como base para novos conceitos, sendo os postulados (ou axiomas) afirmações tomadas como verdadeiras sem necessidade de demonstrações, e os teoremas, conclusões baseadas em postulados ou em outros teoremas já demonstrados, necessitando de demonstrações para serem aceitos como verdadeiros.

Provavelmente, você já estudou as posições relativas entre pontos e retas em um mesmo plano. Agora, estenderemos esse conceito para a posição relativa entre ponto e plano.

- Relação entre ponto e reta

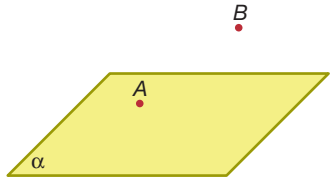
O ponto A pertence à reta s $(A \in s)$.
O ponto B não pertence à reta s $(B \notin s)$.

- Relação entre pontos

Os pontos A, B e C são **colineares**, pois pertencem à mesma reta.
Os pontos A, D e E não são colineares.

Dois pontos são sempre colineares.

- Relação entre ponto e plano



O ponto A pertence ao plano α $(A \in \alpha)$.
O ponto B não pertence ao plano α $(B \notin \alpha)$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Na Matemática nem tudo se manifesta de maneira imediata. Existem situações em que é necessário comprovar a veracidade de alguma proposição, ideia ou teoria. Para que isso seja possível, são considerados alguns princípios, chamados axiomas, que são reconhecidos como verdadeiros, ou, então, proposições que já foram comprovadas como verdadeiras. Por meio da dedução e do raciocínio lógico, é elaborado um método que torne visível ou de fácil percepção a veracidade do que se está questionando. Esse processo de dedução e investigação foi introduzido por Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) e ficou conhecido como demonstração.

Agora, enunciaremos os primeiros postulados e demonstraremos alguns teoremas. A partir deles, iniciaremos o estudo das posições relativas entre retas e planos no espaço.

Postulado 1

Retas e planos são conjuntos de pontos.

Postulado 2

Existem infinitos pontos que pertencem a uma reta, assim como infinitos pontos que não pertencem a ela.

Postulado 3

Existem infinitos pontos que pertencem a um plano, assim como infinitos pontos que não pertencem a ele.

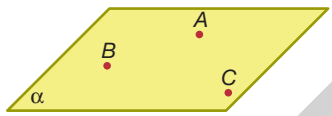
Postulado 4

Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Os pontos *A* e *B* determinam a reta *s*.

Postulado 5

Três pontos não colineares determinam um único plano.



Os pontos *A*, *B* e *C* determinam o plano α.

Postulado 6

Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida nesse plano.

Os pontos *A* e *B* da reta *s* pertencem ao plano α. Portanto, *s* está contida em α ($s \subset \alpha$).

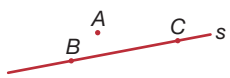
Considerando esses postulados e os conceitos primitivos de ponto, reta, plano e espaço, podemos enunciar e, utilizando o método dedutivo, demonstrar os teoremas a seguir.

Teorema 1

Uma reta e um ponto não pertencente a ela determinam um único plano.

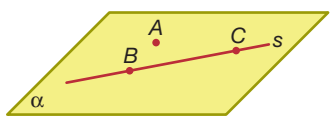
Demonstração

Considere uma reta *s* e um ponto *A* não pertencente a ela. Sejam ainda os pontos *B* e *C* pertencentes à reta *s*.



Os pontos *A*, *B* e *C* não são colineares, pois, pelo **postulado 4**, os pontos *B* e *C* determinam unicamente a reta *s* e, por hipótese, *A* não pertence a *s*. Pelo **postulado 5**, existe um único plano α determinado por *A*, *B* e *C*. Como a reta *s* tem dois de seus pontos pertencentes a α, o **postulado 6** nos permite concluir que a reta *s* está contida em α. Portanto, α é o único plano que contém a reta *s* e o ponto *A*.

Hipótese: proposição (ou conjunto de proposições) que se admite como um princípio, independentemente do fato de ser verdadeira ou falsa.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

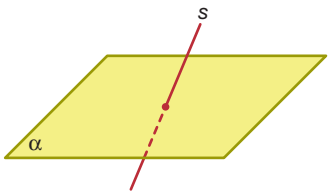
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Teorema 2

Se uma reta não contida em um plano o corta, a interseção dessa reta com esse plano é um único ponto.

Demonstração

Seja o plano α e a reta s, tal que $s \not\subset \alpha$. Suponha por absurdo que existam pelo menos dois pontos distintos de interseção entre a reta s e o plano α. Nesse caso, pelo **postulado 6**, s está contida em α, o que é falso, pois, por hipótese, s não está contida em α. Portanto, o ponto de interseção de s e α é único.



RONALDO INÁCIO

Na demonstração dedutiva por absurdo, utilizada no teorema 2, considera-se a hipótese e a negação da tese verdadeiras. Utilizando argumentos verdadeiros, deduz-se uma sentença absurda, demonstrando-se então que a tese é verdadeira.

Tese: proposição que se expõe para ser defendida.

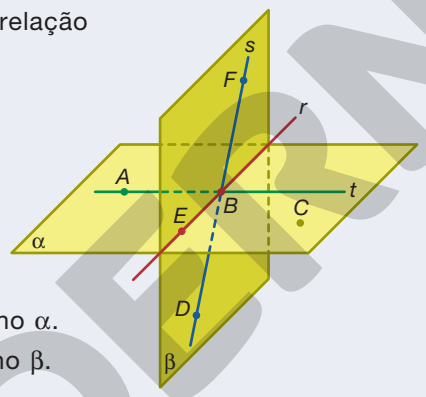
Exercícios e problemas resolvidos

R1 Com o auxílio da figura ao lado, determine a relação de pertinência ou continência de cada:

a) ponto em relação aos planos α e β.

b) reta em relação aos planos α e β.

c) ponto em relação às retas r, s e t.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Da figura, observamos que:

a) • os pontos A, B, C e E pertencem ao plano α.
• os pontos B, D, E e F pertencem ao plano β.

b) • as retas r e t estão contidas no plano α.
• as retas r e s estão contidas no plano β.

c) • os pontos A e B pertencem à reta t.
• os pontos B e E pertencem à reta r.
• os pontos D, B e F pertencem à reta s.

- Os pontos B e E pertencem aos dois planos.
- A reta r está contida nos dois planos.
- O ponto B pertence às três retas.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

5 Em relação às afirmações a seguir, classifique-as em verdadeira ou falsa e reescreva aquelas que julgar falsas, corrigindo-as.

a) Por um ponto, passam infinitas retas. verdadeira

b) Existem finitos pontos que pertencem a um plano e infinitos pontos que não pertencem a ele. Falsa. Uma possível resposta: existem infinitos pontos que pertencem e infinitos pontos que não pertencem a um plano.

c) Três pontos quaisquer determinam sempre uma única reta. Falsa. Uma possível resposta: três pontos colineares determinam uma única reta.

d) Existem infinitas retas que estão contidas em um único plano. verdadeira

e) Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta não está contida no plano. Falsa. Uma possível resposta: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida no plano.

6 Considere uma pirâmide de base quadrangular.

a) Por regiões de quantos planos as faces dessa pirâmide são formadas? 5 planos

b) Cada vértice da pirâmide está contido em quantos dos planos indicados no item a? Os vértices da base estão contidos em três planos e o vértice da pirâmide, em quatro planos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Posições relativas entre duas retas

Neste tópico, estudaremos as posições relativas entre retas contidas em um mesmo plano (retas coplanares) e entre retas não contidas em um mesmo plano (não coplanares).

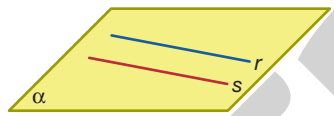
No caso de retas coplanares, temos as seguintes posições relativas.

- Coincidentes

  Se duas retas r e s correspondem ao mesmo conjunto de pontos, dizemos que elas são coincidentes, isto é, são a mesma reta. Assim, indicamos por $r = s$.

- Paralelas

  Duas retas quaisquer r e s são paralelas se e somente se elas são coplanares e não possuem pontos em comum. Indicamos por $r // s$.

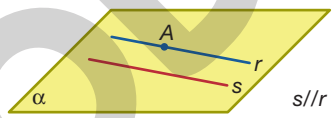


REPRODUÇÃO – BIBLIOTECA NACIONAL DA FRANÇA, PARIS

O **postulado 7**, conhecido como Postulado das paralelas ou Postulado de Euclides, foi enunciado pelo matemático grego Euclides por volta do século III a.C.

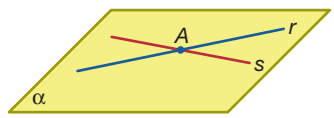
Postulado 7

Sendo A um ponto não pertencente à reta s, existe apenas uma reta r que passa por A e é paralela a s.



- Concorrentes ou secantes

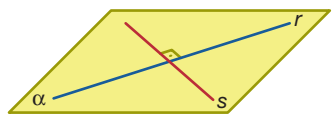
  Duas retas r e s quaisquer são concorrentes (ou secantes) se e somente se elas forem coplanares e tiverem apenas um ponto em comum.



Se nenhum dos ângulos formados por duas retas concorrentes for reto, então dizemos que essas retas são **concorrentes oblíquas**.

- Perpendiculares

  Se duas retas concorrentes r e s formam um ângulo reto, dizemos que elas são perpendiculares. Indicamos por $r \perp s$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

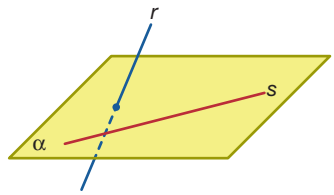
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

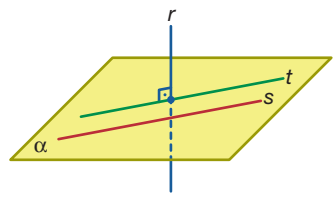
No caso de retas não coplanares, temos a seguinte posição relativa.

- Reversas

  Duas retas *r* e *s* são chamadas reversas (ou não coplanares) quando todo plano que contém uma delas não contiver a outra.



Duas retas reversas *r* e *s* são chamadas **ortogonais** caso exista uma reta *t* perpendicular a uma delas e paralela à outra. Caso duas retas reversas não sejam ortogonais, dizemos que elas são **reversas oblíquas**.



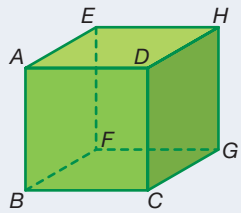
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R2 Observe o cubo.

Relembre com os alunos o que são vértices, arestas e faces de um poliedro, conceitos que eles provavelmente estudaram no Ensino Fundamental.



Informe os alunos de que em temas seguintes será apresentada a definição de cubo.

Utilizamos a notação $\overleftrightarrow{AB}$ para indicar a reta que contém o segmento $\overline{AB}$.

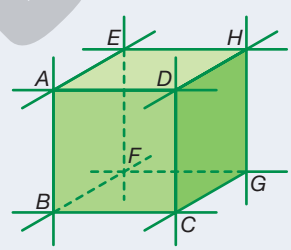
Considerando as retas que contêm as arestas desse cubo, determine:

a) as retas perpendiculares a $\overleftrightarrow{AD}$.

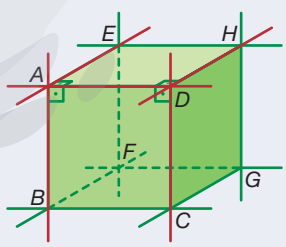
b) a posição relativa entre $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

Resolução

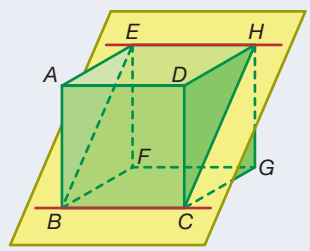
As retas que contêm as arestas do cubo são: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{GH}$, $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{DH}$.



a) Em relação a $\overleftrightarrow{AD}$, as retas perpendiculares são: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DH}$.



b) As retas $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, pois são coplanares e não têm pontos em comum.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

As retas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ são paralelas entre si, assim como as retas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{DH}$.

MODERNA

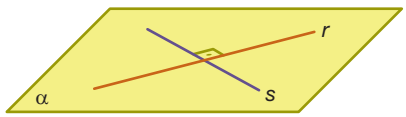
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Em algumas tarefas, são apresentados alguns prismas e pirâmides. Informe os alunos de que esses objetos serão definidos em temas posteriores.

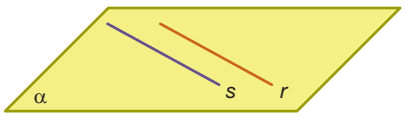
7 Com o auxílio de um *software* de computador, Carla construiu um par de retas perpendiculares contidas em um plano α. Entre os itens a seguir, qual apresenta a construção feita por ela? Justifique sua resposta.

a)



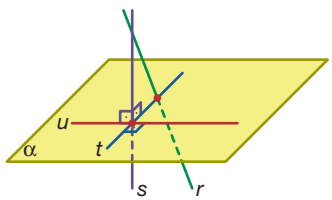
A construção feita por Carla é a do item **a**.

b)



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

8 Dada a representação das retas *r*, *s*, *t* e *u*, concorrentes duas a duas, e do plano α, responda às questões.



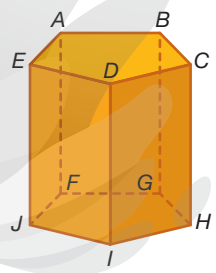
RONALDO INÁCIO

a) Qual é a posição relativa entre:

- *s* e *u*? perpendiculares
- *r* e *u*? reversas

b) É possível que a reta *r* seja perpendicular à reta *t*? Por quê? Não, pois se $r \perp t$, o triângulo formado por *r*, *t* e *s* possuiria dois ângulos internos retos, o que é um absurdo.

9 Observe o prisma reto de base pentagonal e, considerando as retas que contêm as arestas, escreva as retas: Respostas no final do livro.



RONALDO INÁCIO

a) paralelas à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

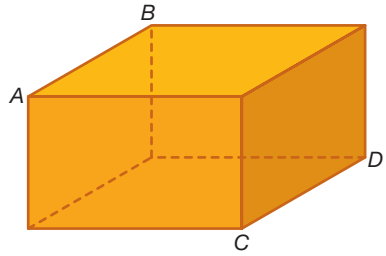
b) ortogonais à reta $\overleftrightarrow{CD}$.

c) perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{IJ}$.

d) coplanares à reta $\overleftrightarrow{CH}$.

e) reversas à reta $\overleftrightarrow{AE}$.

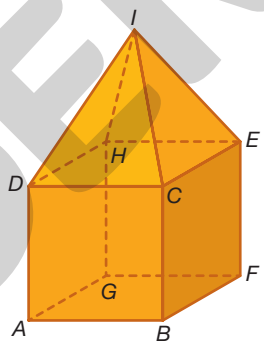
10 Em relação ao paralelepípedo reto retângulo abaixo, é possível afirmar que as retas $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são coplanares? Por quê? Sim, pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são paralelas, de maneira que toda reta definida por dois pontos, entre *A*, *B*, *C* e *D*, são coplanares.



RONALDO INÁCIO

Paralelepípedo reto retângulo é aquele cujas bases e faces laterais são regiões retangulares.

11 A figura apresentada a seguir é composta de um cubo e uma pirâmide.



RONALDO INÁCIO

Em relação às retas que contêm as arestas dessa figura, resolva o que se pede nos itens.

a) Escreva três retas coplanares a $\overleftrightarrow{CD}$.
Uma possível resposta: $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$.

b) Determine todas as retas paralelas a $\overleftrightarrow{EF}$.
$\overleftrightarrow{HG}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$

c) Quais das retas não possuem paralelas?
$\overleftrightarrow{CI}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{EI}$; $\overleftrightarrow{HI}$

d) Qual é a posição de $\overleftrightarrow{AD}$ em relação a $\overleftrightarrow{CE}$?
ortogonal

12 Sejam *r*, *s*, *t* e *u* quatro retas não coincidentes e coplanares, com $r \perp s$, $u \perp t$ e *s* e *t* oblíquas. Qual das afirmações a seguir está incorreta?
alternativa **c**

a) É possível que todas as retas se intersectem em um único ponto.

b) A reta *t* é oblíqua em relação à reta *r*.

c) A reta *s* é perpendicular à reta *u*.

d) As retas *r* e *u* são secantes.

e) Todas essas retas estão contidas em um único plano.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

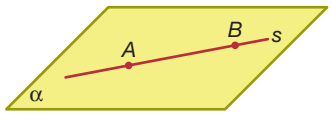
MODERNA

Posições relativas entre reta e plano

Agora, estudaremos as posições relativas entre reta e plano. Considerando uma reta e um plano no espaço, temos as seguintes posições relativas.

- Reta contida no plano

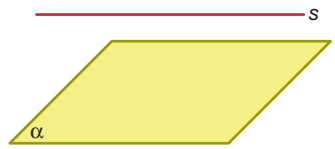
  Se dois pontos distintos *A* e *B* de uma reta *s* pertencem a um plano α, então a reta está contida nesse plano. Indicamos por $s \subset \alpha$.



Lembre-se: pelo postulado **6**, se uma reta possui dois ou mais pontos pertencentes a um plano α, então $s \subset \alpha$.

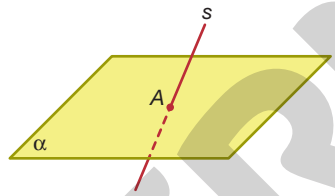
- Reta paralela ao plano

  Se uma reta *s* não possui ponto em comum com um plano α, então a reta é paralela a esse plano. Indicamos por $s // \alpha$.



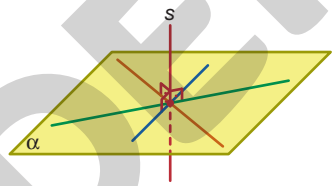
- Reta concorrente ou secante ao plano

  Se uma reta *s* possui um único ponto *A* em comum com um plano α, então a reta e o plano são concorrentes.



- Reta perpendicular ao plano

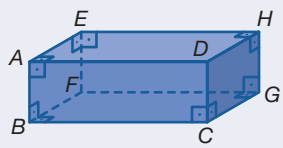
  Uma reta *s* é perpendicular a um plano α se e somente se *s* for perpendicular a todas as retas concorrentes a ela contidas em α. Indicamos por $s \perp \alpha$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas resolvidos

R3 Observe o paralelepípedo reto retângulo.



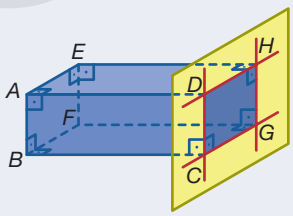
Considerando as retas que contêm as arestas do paralelepípedo reto retângulo e os planos que contêm as faces, responda às seguintes perguntas.

a) Quais são as retas contidas no plano que contém a face *DCGH*?

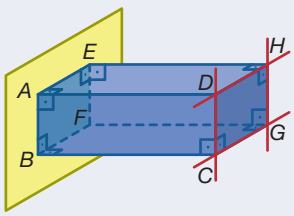
b) Quais são as retas paralelas ao plano que contém a face *ABFE*?

Resolução

a) O plano que contém a face *DCGH* contém as retas $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$.



b) Em relação ao plano que contém a face *ABFE*, as retas paralelas são: $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

13 Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação, reescrevendo corretamente aquelas que julgar falsas.

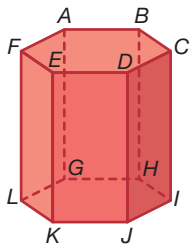
a) Se uma reta r é perpendicular a duas outras retas paralelas e contidas em um mesmo plano α, então r está contida em α. verdadeira

b) Existem infinitas retas paralelas a um plano qualquer e infinitos planos paralelos a uma reta qualquer. verdadeira

c) Se uma reta r e um plano α são paralelos, então toda reta perpendicular a r será perpendicular a α.

13. c) Falsa. Uma possível resposta: se uma reta r e um plano α são paralelos, então existem retas perpendiculares a r que são perpendiculares a α.

14 Considerando os planos que contêm as faces e as retas que contêm as arestas do prisma hexagonal regular, responda às questões.



RONALDO INÁCIO

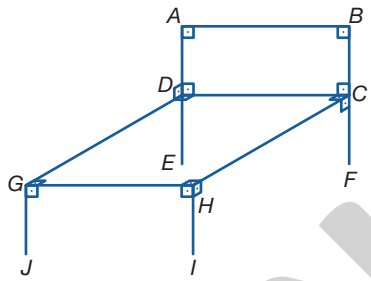
a) Quantas retas são perpendiculares ao plano que contém a face *CDJI*? nenhuma

b) Qual é a posição relativa entre o plano que contém a face *EFLK* e a reta $\overleftrightarrow{CD}$? concorrente

c) Quais retas são paralelas a $\overleftrightarrow{KL}$? $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{HI}$

15 Considere as retas r e s e o plano α. Determine as possíveis posições relativas entre essas retas, sabendo que r é concorrente a α e s está contida em α. Concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) ou reversas (ortogonais ou oblíquas).

16 Veja o esquema que representa uma cama.



RONALDO INÁCIO

a) Qual é a posição relativa entre $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano determinado por:

- *CDEF*? contida no plano
- *CDGH*? paralela

b) Quais retas, que contêm os segmentos do esquema, são perpendiculares ao plano determinado por *ABCD*? $\overleftrightarrow{DG}$; $\overleftrightarrow{CH}$

c) Determine as retas, que contêm os segmentos do esquema, reversas a $\overleftrightarrow{AE}$. $\overleftrightarrow{CH}$; $\overleftrightarrow{GH}$

17 Se uma reta s for perpendicular a apenas uma reta contida em um plano α, então, s será perpendicular a α? Justifique sua resposta.
Resposta no final do livro.

Posições relativas entre dois planos

Antes de estudarmos as posições relativas entre dois planos, vamos apresentar um postulado.

Postulado 8

Se dois planos têm um ponto em comum, então eles possuem pelo menos uma reta em comum.

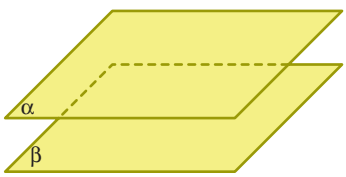
Considerando dois planos no espaço, temos as seguintes posições relativas.

- Coincidentes

Se dois planos α e β correspondem ao mesmo conjunto de pontos, dizemos que eles são coincidentes. Indicamos por $\alpha = \beta$.

- Paralelos

Dois planos quaisquer α e β são paralelos se e somente se não tiverem pontos em comum. Indicamos por $\alpha // \beta$.



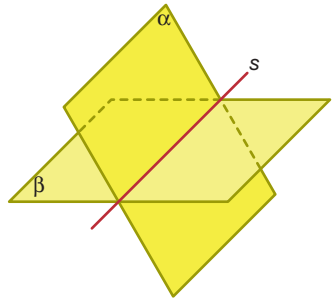
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- Concorrentes ou secantes

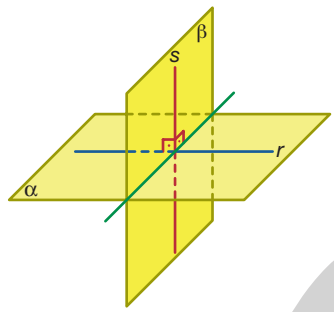
  É possível demonstrar, utilizando postulados e resultados anteriores, que dois planos quaisquer α e β são concorrentes se e somente se tiverem apenas uma reta em comum.



Quando concorrentes, a interseção de dois planos distintos é uma reta.

- Perpendiculares

  Dois planos concorrentes α e β são perpendiculares se e somente se um deles contiver uma reta perpendicular ao outro. Indicamos por $\alpha \perp \beta$.

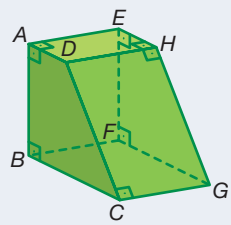


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Se dois planos concorrentes não são perpendiculares, dizemos que eles são **oblíquos**.

Exercícios e problemas resolvidos

R4 Considere os planos que contêm as faces da figura geométrica espacial representada ao lado.

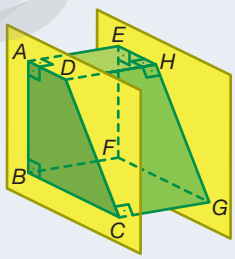


a) Determine os planos paralelos ao plano que contém a face *ABCD*.

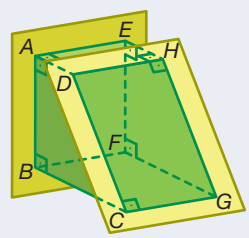
b) Qual é a posição relativa entre os planos que contêm as faces *ABFE* e *DCGH*?

Resolução

a) Em relação ao plano que contém a face *ABCD*, o plano paralelo é aquele que contém a face *EFGH*.



b) Os planos que contêm as faces *ABFE* e *DCGH* são oblíquos.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

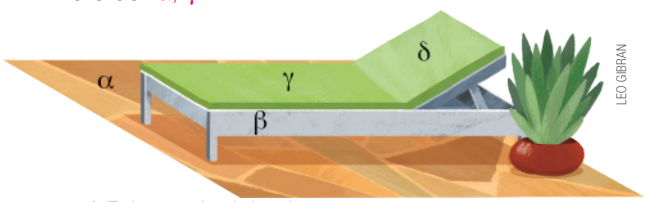
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

18 Na espreguiçadeira ilustrada a seguir, considere os planos α, β, γ e δ, que contêm o solo, uma das laterais, o assento e o encosto, respectivamente, com $\beta \perp \alpha$ e $\beta \perp \gamma$. Quais desses planos são paralelos? α; γ



LEO GIBRAN

19. a) Falsa, pois dois planos secantes possuem uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos em comum.

19 Determine se cada proposição é verdadeira ou falsa. Depois, justifique aquelas que classificar como falsas.

a) Dois planos secantes possuem um único ponto em comum.

b) Dois planos perpendiculares são secantes.

c) Se dois planos α e β são paralelos, então todas as retas paralelas a α são secantes a β.

d) Se uma reta está contida em dois planos não coincidentes, então estes são concorrentes.

e) Se os planos α e β são concorrentes, então podemos concluir que $\alpha = \beta$.

verdadeira

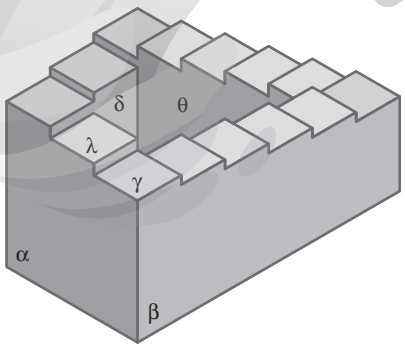
verdadeira

Falsa, pois os planos α e β são concorrentes quando possuem apenas uma reta em comum.

No contexto

20 Estudamos nas páginas 10 e 11 um pouco sobre o artista Maurits Cornelis Escher e uma de suas obras, **Escada acima e escada abaixo**, na qual nos deparamos com uma escada que tanto pode subir quanto descer, mas que não chega a lugar algum.

A imagem representa um modelo de escada semelhante ao utilizado por Escher, em que os degraus são paralelos.



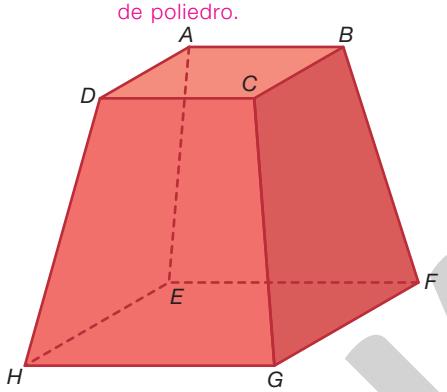
RONALDO INÁCIO

Em relação aos planos que contêm as superfícies indicadas, qual é a posição relativa entre:

- α e β? concorrentes
- α e δ? concorrentes
- β e θ? concorrentes

21 Considere apenas os planos que contêm as faces do poliedro.

Informe os alunos de que em temas seguintes será apresentada a definição de poliedro.



RONALDO INÁCIO

Nesse poliedro, as faces laterais são determinadas por trapézios congruentes e as bases, por quadrados.

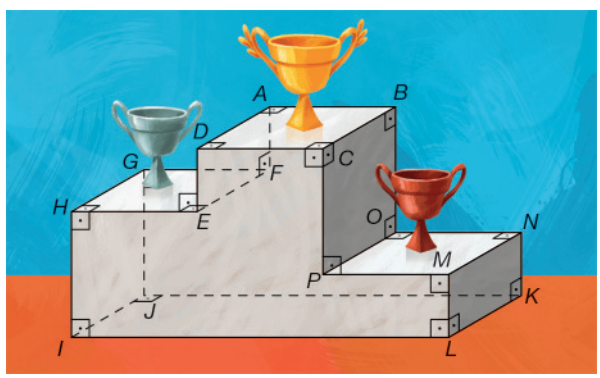
a) O plano que contém a face *ABCD* é concorrente ao plano que contém a face *ABFE*? Por quê? Sim, pois eles possuem apenas a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em comum.

b) Há algum plano perpendicular àquele que contém a face *CDHG*? não

c) Sabendo que os planos que contêm as faces *ABCD* e *EFGH* são paralelos, determine quais dos planos são secantes a todos os outros.

Os planos que contêm as faces *ABFE*, *BCGF*, *CDHG* e *ADHE*.

22 Considerando os planos e as retas que contêm, respectivamente, as faces e as arestas de um modelo de pódio, resolva as questões.



LEO GIBRAN

Os planos que contêm as faces *IJKL*, *MNOP* e *ABCD*.

a) Determine os planos que são paralelos ao plano que contém a face *EFGH*.

b) Em relação ao plano que contém a face *CDEHILMP*:

- quantos planos são concorrentes a ele? 8 planos
- qual plano é paralelo a ele? O plano que contém a face *ABONKJGF*.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

19. c) Falsa, pois, se dois planos α e β são paralelos, então as retas paralelas a α são paralelas ou contidas em β.

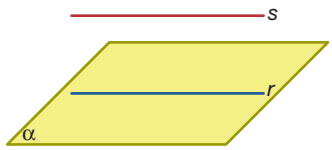
Propriedades de paralelismo e perpendicularismo

Neste tópico, estudaremos algumas propriedades relacionadas a paralelismo e perpendicularismo no espaço. Tais propriedades são teoremas que podem ser demonstrados; porém, nesta obra, apenas as enunciaremos.

Em relação ao paralelismo no espaço, destacamos as seguintes propriedades.

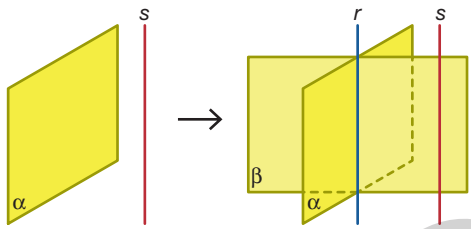
Propriedade 1

Uma reta *s* não contida em um plano α é paralela a esse plano se for paralela a uma reta *r* contida em α.



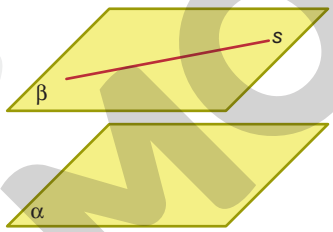
Propriedade 2

Uma reta *s* paralela a um plano α é paralela a pelo menos uma reta *r* desse plano.



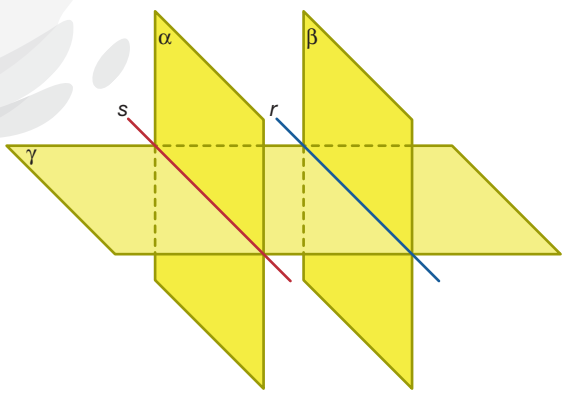
Propriedade 3

Se α e β são planos paralelos, toda reta *s* contida em um deles será paralela ao outro.



Propriedade 4

Sejam α e β planos paralelos e γ um plano secante a α e β. As interseções de γ com α e β são retas paralelas.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

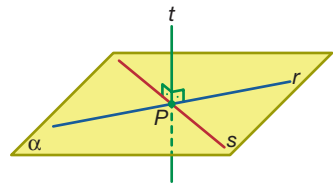
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Em relação ao perpendicularismo no espaço, destacamos as seguintes propriedades.

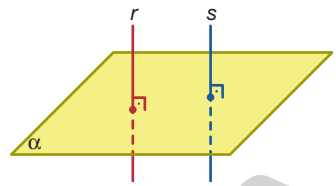
Propriedade 1

Sejam *r* e *s* retas contidas no plano α e concorrentes em um ponto *P*. Para que uma reta *t* seja perpendicular a α em *P*, é necessário e suficiente que ela seja perpendicular a *r* e *s*.



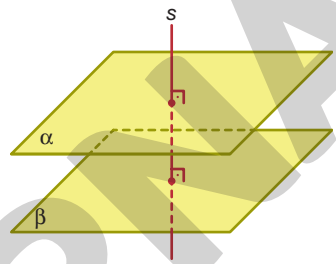
Propriedade 2

Se *s* é uma reta perpendicular a um plano α, então qualquer reta *r*, paralela a *s*, é perpendicular a α.



Propriedade 3

Se α e β são planos paralelos, toda reta *s* perpendicular a um deles será perpendicular ao outro.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas resolvidos

R5 Classifique em verdadeiro ou falso cada item a seguir, justificando cada caso.

a) Se uma reta *r* é paralela a um plano α, então *r* é paralela a qualquer reta de α.

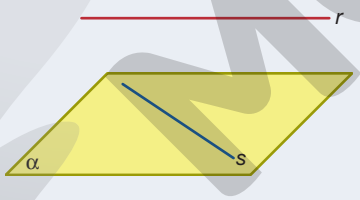
b) Por uma reta *r*, perpendicular a um plano α, passam infinitos planos perpendiculares a α.

c) Se dois planos α e β são paralelos a uma reta *r*, então α e β são paralelos entre si.

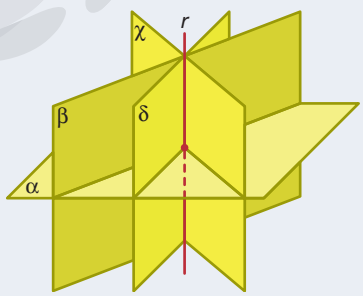
d) Se dois planos α e β são secantes, então toda reta de um desses planos é secante ao outro.

Resolução

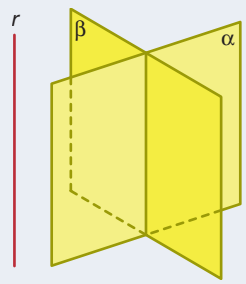
a) Falso, pois existem retas em α que são reversas a *r*.



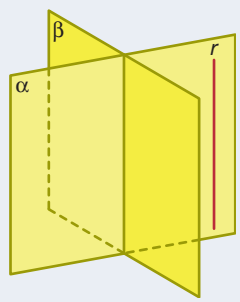
b) Verdadeiro, pois se uma reta *r* é perpendicular a um plano α, então qualquer plano que contenha *r* será perpendicular a α.



c) Falso, pois os planos α e β podem ser secantes.



d) Falso, pois existem retas de α, por exemplo, que são paralelas a β.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

Considere três retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$. Em relação a essas retas, classifique as seguintes afirmações como verdadeiras ou falsas.

I) A reta r pode ser paralela à reta s.

II) A reta r pode ser concorrente às retas s e t.

III) A reta r pode ser reversa em relação às retas s e t.

IV) A reta r pode ser perpendicular ao plano determinado por s e t.

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

Analisar a possibilidade de: r e s serem paralelas; r ser concorrente às retas s e t; r ser reversa às retas s e t; e r ser perpendicular ao plano determinado por s e t.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

As retas r e t, assim como s e t, são perpendiculares.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, construímos um paralelepípedo reto retângulo. Em seguida, para analisar cada uma das afirmações, traçamos, sobre algumas das arestas desse poliedro, as retas r, s e t, de maneira que elas satisfaçam as condições impostas (isto é, $r \perp t$ e $s \perp t$).

√ Escolhendo as notações.

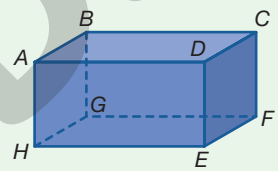
- A, B, C, D, E, F, G e H: vértices do paralelepípedo reto retângulo.
- α: plano que contém os vértices A, B, G e H do paralelepípedo.

C Executando o plano

Passo 1

Primeiro, construímos um paralelepípedo reto retângulo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H.

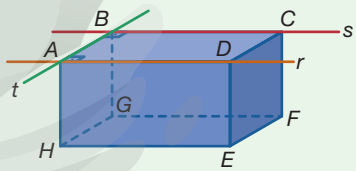
Agora, analisaremos cada uma das afirmações.



Passo 2

I) A reta r pode ser paralela à reta s.

A partir das arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, traçamos as retas r, s e t, respectivamente.

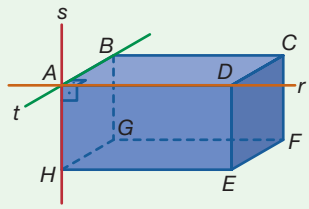


Note que $r \perp t$ e $s \perp t$, como imposto no enunciado. Além disso, nesse caso, $r // s$. Logo, a afirmação **I** é verdadeira, ou seja, dadas as retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é possível que $r // s$.

Passo 3

II) A reta r pode ser concorrente às retas s e t.

A partir das arestas $\overline{AD}$, $\overline{AH}$ e $\overline{AB}$, traçamos as retas r, s e t, respectivamente.



Note que $r \perp t$ e $s \perp t$, como imposto no enunciado.

Além disso, nesse caso, A pertence às retas r, s e t. Logo, a afirmação **II** é verdadeira, ou seja, dadas as retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é possível que r seja concorrente às retas s e t.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

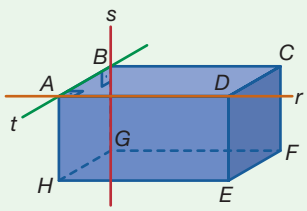
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Passo 4

III) A reta r pode ser reversa às retas s e t.

Como as retas r e t são perpendiculares, então elas são concorrentes e, consequentemente, coplanares. Portanto, não é possível que as retas r e t sejam reversas.



RONALDO INÁCIO

Na imagem, as retas r, s e t foram traçadas a partir das arestas $\overline{AD}$, $\overline{BG}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Note que nesse exemplo $r \perp t$ (consequentemente, não são reversas) e r e s são retas reversas.

Portanto, a afirmação **III** é falsa, ou seja, dadas as retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é impossível que r seja reversa às retas s e t.

Passo 5

IV) A reta r pode ser perpendicular ao plano determinado por s e t.

Para verificar a veracidade dessa afirmação, continuaremos a analisar a imagem apresentada no **passo 4**. Considere $A \in t$, $G \in s$ e o ponto B, interseção entre as retas s e t. Assim, pelo **postulado 5**, o plano determinado pelas retas s e t é o plano α.

Seja a reta u que contém a aresta $\overline{AH}$ do paralelepípedo reto retângulo. Desse modo, $r \perp t$ e $r \perp u$ e. Consequentemente, a reta r é perpendicular ao plano que contém a face $ABGH$. Logo, a afirmação **IV** é verdadeira, ou seja, dadas as retas r, s e t distintas, tais que $r \perp t$ e $s \perp t$, é possível que r seja perpendicular ao plano determinado por s e t.

Portanto, apenas as afirmações **I**, **II** e **IV** são verdadeiras.

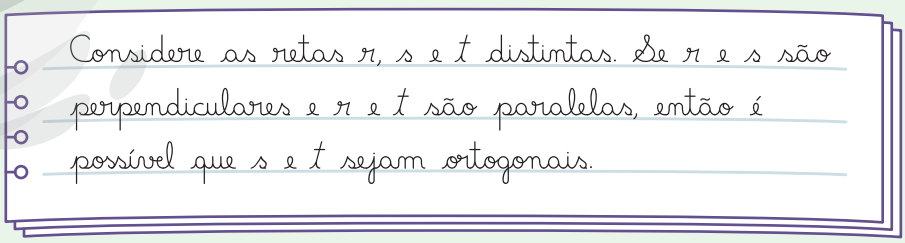
Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico.

Agora é você quem resolve!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema.**

Aroldo escreveu a seguinte frase em seu caderno.



SERGIO L. FILHO

2 **É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nessa seção? Qual é a resposta desse problema?**

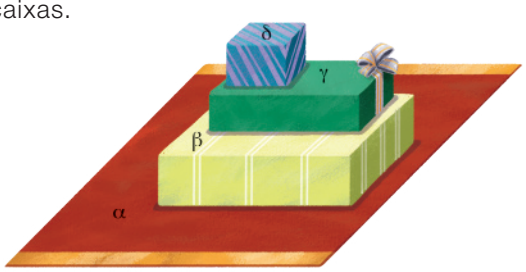
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

23 A figura ilustra três caixas com formato de paralelepípedo reto retângulo empilhadas sobre um tapete (contido no plano α), sendo β, γ e δ os planos que contêm as bases superiores dessas caixas.



LEO GIBRAN

Com relação à figura, classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando aquelas que julgar falsas.

a) Toda reta contida em δ é paralela aos demais planos. verdadeira

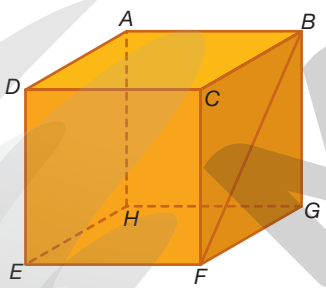
b) Uma reta não contida em α é paralela a esse plano se e somente se for paralela a γ.
Resposta no final do livro.

c) Qualquer plano paralelo a β, não coincidente a α, γ e δ, é paralelo a esses planos. verdadeira

d) Todo plano paralelo a γ também é paralelo a δ. Falsa, pois pode ser um plano coincidente a δ.

e) Todo plano perpendicular a α também é perpendicular aos demais planos. verdadeira

24 No cubo a seguir, considere as retas que contêm as arestas e os planos que contêm as faces.



RONALDO INÁCIO

a) Quais planos são:
- perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$? Os planos que contêm as faces *BCFG* e *ADEH*.
- perpendiculares àquele que contém a face *EFGH*? Os planos que contêm as faces *CDEF*, *BCFG*, *ABGH* e *ADEH*.
- paralelos àquele que contém a face *BCFG*? O plano que contém a face *ADEH*.

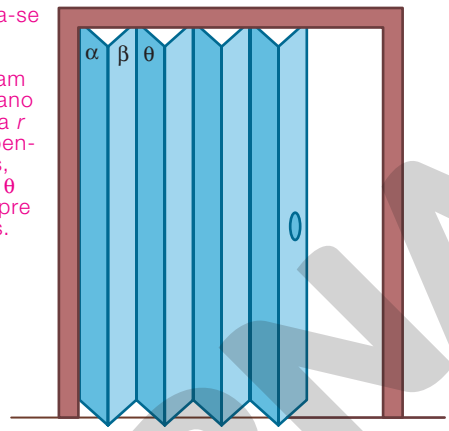
b) A reta $\overleftrightarrow{BF}$ é perpendicular à $\overleftrightarrow{EF}$? Por quê?
Resposta no final do livro.

c) A reta $\overleftrightarrow{CF}$ está contida em quais planos perpendiculares àquele que contém a face *ABCD*? Nos planos que contêm as faces *CDEF* e *BCFG*.

25 Se a reta *r* é oblíqua a um plano ρ, determine quantos planos contêm a reta *r* e são perpendiculares a ρ. um plano

26 Uma opção para quem deseja instalar uma porta em locais com pouco espaço é a chamada porta sanfonada. No esquema, está representada uma dessas portas, sendo destacados alguns planos que contêm três das faixas móveis.

a) Espera-se que os alunos respondam que o plano θ e a reta *r* são perpendiculares, pois α e θ são sempre paralelos.



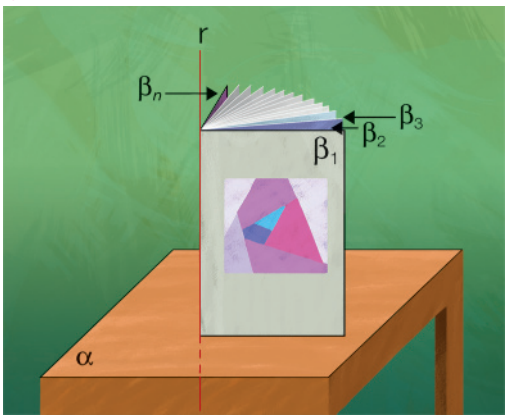
RONALDO INÁCIO

a) Qualquer que seja a abertura da porta, ao traçar uma reta *r* perpendicular ao plano α, qual será a posição do plano θ em relação a *r*? Justifique sua resposta.

b) Qual é a posição relativa entre o plano do solo e os planos indicados na porta sanfonada? Essa posição relativa muda de acordo com a abertura da porta? perpendicular; não

c) Considere que, quando a porta está totalmente aberta, os planos α, β e θ sejam paralelos. Nessa posição, se uma reta *r* for perpendicular em relação ao plano α, qual será a posição relativa de *r* em relação aos demais planos? perpendicular

27 A imagem representa um livro na posição vertical sobre uma mesa, em que α é o plano que contém o tampo da mesa (na horizontal) e os planos β_1, β_2, β_3,..., β_n contém a capa e cada uma das páginas do livro (totalmente esticadas). Se uma reta *r* está contida em β_1, β_2, β_3,..., β_n, qual é a posição relativa de *r* em relação a α?
perpendicular



LEO GIBRAN

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 Projeções ortogonais no plano e distância no espaço

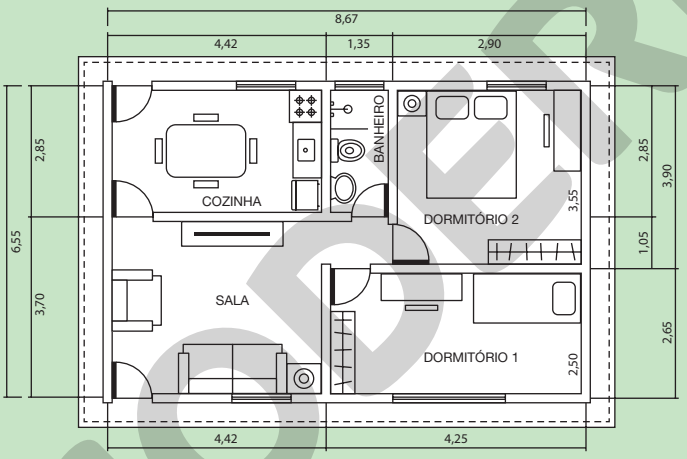
Desenho técnico

Desenhar é um meio de comunicação importante para o ser humano. Sua utilização remete aos primórdios da humanidade e está presente em diversos aspectos da nossa vida, como na sinalização de trânsito, em livros e em logos de empresa.

Um viés desse meio de comunicação é o desenho técnico, que consiste na arte de retratar um objeto de maneira precisa, com todas as informações fundamentais e que foi desenvolvido diante da necessidade de representar objetos tridimensionais no plano. Entre suas principais características, estão as vistas e as escalas.

Máquina de plotagem: dispositivo para impressão de gráficos e desenhos em grandes dimensões e com alta qualidade fotográfica, principalmente plantas arquitetônicas e mapas cartográficos.

Os desenhos técnicos abrangem uma série de metodologias e procedimentos que englobam linhas, números, indicações e símbolos necessários para a comunicação de ideias e projetos. Um de seus exemplos mais comuns são as plantas baixas que são feitas por meio de um corte imaginário em uma altura de, geralmente, 1,5 m do piso.



HELOÍSA PINTARELLI

Alguns dos elementos principais das plantas baixas são as paredes (comprimento e espessura), denominação dos espaços, aberturas (portas e janelas), escalas, móveis e nível da construção.

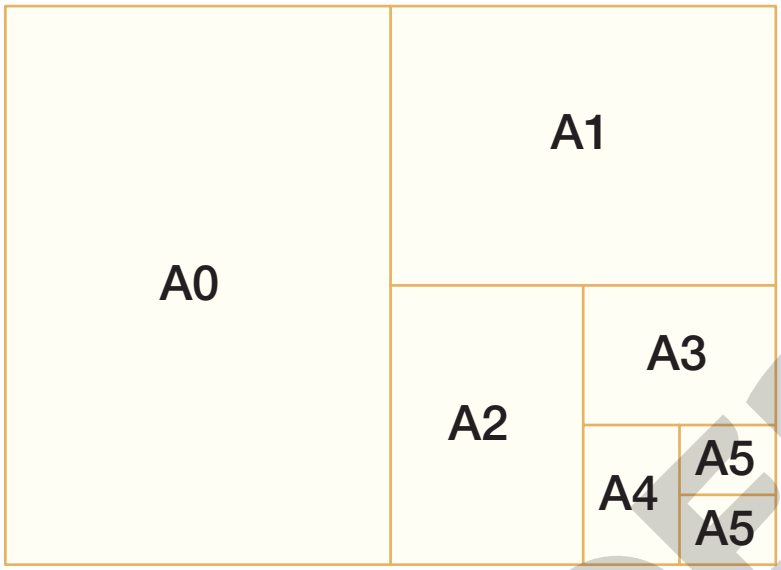
Por algum tempo os desenhos técnicos eram feitos à mão, utilizando instrumentos de desenho como escalímetro, compasso, régua T e esquadros. Mas, com o advento tecnológico, foram desenvolvidos *softwares* específicos que simplificam a produção e o ajuste desses desenhos, assim como permitir seu compartilhamento. Além disso, com esses *softwares*, engenheiros e arquitetos, por exemplo, podem obter uma cópia física de seus projetos por meio de uma máquina de plotagem, que imprime os desenhos em papéis com amplas dimensões.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No Brasil, os desenhos técnicos obedecem às normas e padrões da ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas), que é a representante no país da ISO (Organização Internacional para Padronização), uma entidade não governamental voltada para a normatização e padronização de empresas e produtos em mais de 160 países.

A série "A" de papéis é padronizada pela ABNT e seus formatos mais utilizados são A0, A1, A2, A3 e A4. O A0 é base desse sistema e cada formato é obtido ao dividir o formato anterior pela metade. Assim, por exemplo, para obter o A1, basta dividir o maior lado de um A0 por dois. Veja o esquema a seguir com as relações entre os principais formatos da série "A".



MARYANE VOTO SILVA

Exemplos de normas da ABNT para o desenho técnico são a NBR 10068, que padroniza as dimensões dos papéis e determina os *layouts*, e a NBR 8403, que determina, entre outros detalhes, a aplicação de linhas em desenhos, regulamentando seus tipos e larguras.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Em sua opinião, que necessidade os desenhos técnicos ajudam a suprir?

B Você já fez algum desenho técnico, com ou sem o uso de *softwares*? Converse com seus colegas e professores. Resposta pessoal.

A) Resposta pessoal. Uma possível resposta: a necessidade de representar, em um plano, objetos tridimensionais com o detalhamento e precisão necessários para serem reproduzidos, e que seja uma linguagem global, capaz de superar barreiras linguísticas.

A partir dos dados de um desenho técnico de determinado objeto, uma pessoa capacitada é capaz de reproduzir o objeto no material e formato desejados. Nas próximas páginas, estudaremos a respeito de projeções ortogonais de pontos, figuras e retas sobre planos, assim como a distância no espaço entre alguns desses elementos, assuntos que estão intimamente relacionados aos desenhos técnicos.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.AJT/SHUTTERSTOCK; 2.PHOTO WIN1/SHUTTERSTOCK; 3.VLADITTO/ SHUTTERSTOCK; 4.DOMNITSKY/ SHUTTERSTOCK; 5.JANNTA/ SHUTTERSTOCK; 6.ANDREY_POPOV/ SHUTTERSTOCK; 7.PALADIN12/ SHUTTERSTOCK; 8.DR PROJECT/ SHUTTERSTOCK; 9.SKETCHPHOTO/ SHUTTERSTOCK; 10.ANMBPH/ SHUTTERSTOCK; 11.ENJOY YOUR LIFE/ SHUTTERSTOCK; 12.BAYUROV ALEXANDER/ SHUTTERSTOCK; 13.ANDREY_POPOV/ SHUTTERSTOCK; 14.SVJATOSLAV ANDREICHYN/SHUTTERSTOCK; 15.MICHAL VITEK/SHUTTERSTOCK; 16.MIREXON/ SHUTTERSTOCK; 17.MIREXON/ SHUTTERSTOCK

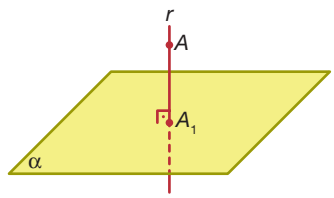
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Projeções ortogonais sobre um plano

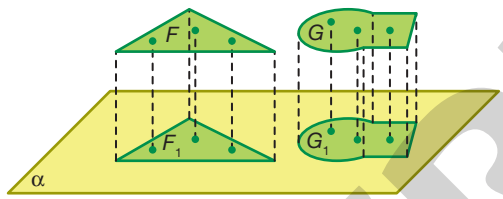
- Projeção de um ponto sobre um plano

  A projeção ortogonal de um ponto A sobre um plano α é dada pelo ponto A_1, correspondente à interseção da reta r e α, com r perpendicular a α e passando por A.



- Projeção de uma figura sobre um plano

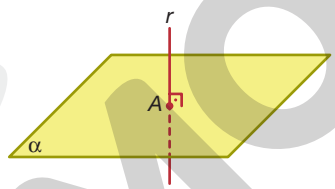
  A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano α é dada pela projeção ortogonal de todos os pontos dessa figura.



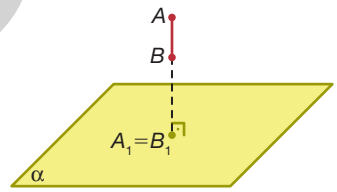
As figuras F_1 e G_1 são as projeções ortogonais, respectivamente, das figuras F e G sobre o plano α.

- Projeção de uma reta ou um segmento de reta sobre um plano

  Caso a reta r ou o segmento $\overline{AB}$ seja perpendicular em relação ao plano α, a projeção ortogonal tanto da reta quanto do segmento em α será um ponto.

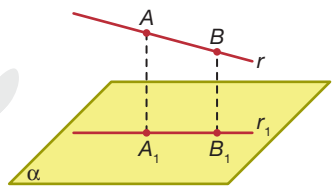


Projeção ortogonal da reta r perpendicular ao plano α.

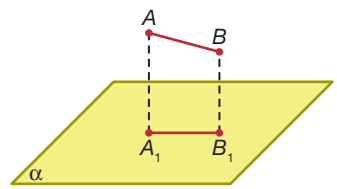


Projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ perpendicular ao plano α.

Caso a reta r ou o segmento $\overline{AB}$ seja não perpendicular ao plano α, a projeção ortogonal da reta será outra reta, e a do segmento de reta, outro segmento.



Projeção ortogonal da reta r não perpendicular ao plano α.



Projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ não perpendicular ao plano α.

A fim de simplificar a escrita, não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, utilizaremos expressões do tipo "comprimento de $\overline{AB}$" quando, na realidade, queremos nos referir à "medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$".

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. a) Falsa, pois a projeção ortogonal pode ser uma única reta, por exemplo, se uma das retas for perpendicular ao plano de projeção.

1 Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando aquelas que julgar falsas.

a) A projeção ortogonal de duas retas concorrentes sobre um plano sempre será dada por duas retas concorrentes.

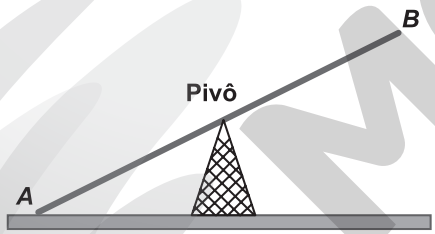
b) Se um segmento de reta $\overline{AB}$ é perpendicular a um plano α, então a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre um plano β, com $\alpha \perp \beta$ e $\overline{AB}$ não contido em β, será um segmento paralelo e de mesmo comprimento de $\overline{AB}$. verdadeira

c) Sabendo que as projeções ortogonais de duas retas r e s sobre um plano são dadas por duas retas paralelas, necessariamente temos $r // s$. Falsa, pois r e s podem ser retas reversas.

d) A projeção ortogonal de um hexágono sobre um plano sempre será dada por um hexágono. Resposta no final do livro.

e) A projeção ortogonal, sobre um plano, de um segmento de reta $\overline{AB}$ e de um ponto não pertencente a $\overline{AB}$ pode ser dada por dois pontos distintos. verdadeira

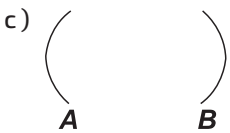
2 (Enem, 2013) Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra. Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos *A* e *B* são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos *A* e *B*, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é: alternativa b

a)

b)

c)


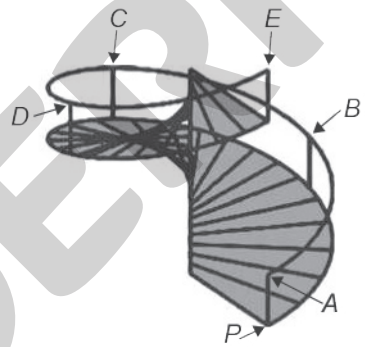
d)

e)

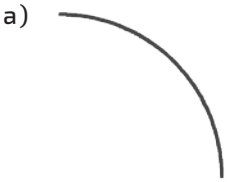
3 Considere um triângulo contido no plano φ que será projetado sobre os planos λ, δ e α, não coincidentes. Qual será a projeção do triângulo sobre:

- λ, sabendo que $\lambda // \varphi$? triângulo
- δ, sabendo que $\delta \perp \lambda$? segmento de reta
- α, sabendo que $\alpha // \lambda$? triângulo

4 (Enem, 2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos *A, B, C, D, E* sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos *P, A* e *E* estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto *A* até o ponto *D*.



A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é: alternativa c

a)


d)

b)

e)

c)

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

FOTOS: REPRODUÇÃO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No contexto

5 A expressão gráfica é uma técnica que utiliza desenhos técnicos e está presente em diversas áreas, como Medicina, Arte, Engenharia e Arquitetura, além das indústrias automobilística, moveleira e cosmética.

Na Engenharia, por exemplo, é utilizada na constituição da base para o desenvolvimento de projetos e, consequentemente, na fabricação dos mais variados produtos. Para transmitir informações precisas aos fabricantes acerca do objeto, da máquina ou da estrutura que se deseja construir, é necessário que o engenheiro prepare descrições completas, principalmente por meio de desenhos, indicando seus formatos e dimensões. A linguagem verbal é utilizada como complemento, sob a forma de especificações no projeto.

Por descrever a forma exata de um objeto, a projeção ortogonal por meio de desenhos técnicos é empregada na maioria dos trabalhos de engenharia. Alguns objetos podem ser descritos totalmente pelos conjuntos das vistas (superior, frontal, lateral direita, lateral esquerda, de baixo e de trás) sobre esses planos.

Na elaboração de alguns projetos, não é necessário desenhar as seis vistas, pois é possível descrever o objeto com exatidão pela combinação de algumas delas. A combinação das vistas frontal, lateral esquerda e superior pode ser suficiente para representar a forma do objeto considerado.

Veja a seguir uma combinação das vistas frontal, lateral esquerda e superior da figura **A**.

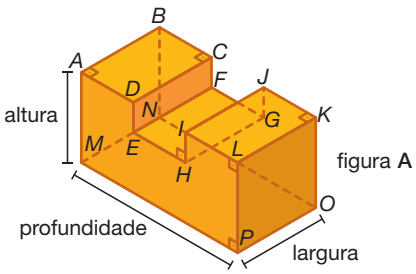
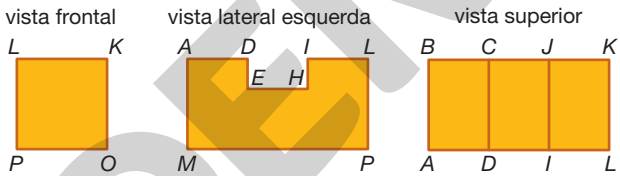


figura **A**

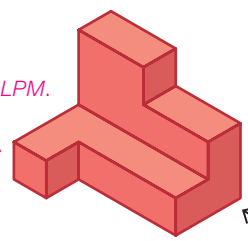


De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

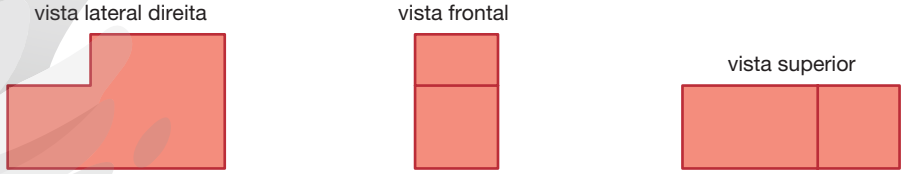
a) Conforme os planos que contêm as faces, e as retas que contêm as arestas da figura anterior, determine:

- os planos paralelos àquele que contém a face *EFGH*.
  Os planos que contêm as faces *ABCD*, *IJKL* e *MNOP*.
- os planos perpendiculares àquele que contém a face *LKOP*.
  Os planos que contêm as faces *ABCD*, *EFGH*, *IJKL*, *MNOP*, *BCFGJKON* e *ADEHILPM*.

b) Desenhe a vista superior, a vista frontal e a vista lateral esquerda do objeto ao lado, desenhado em perspectiva. Resposta pessoal.

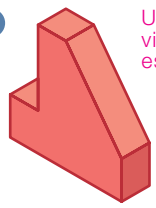


c) Desenhe em perspectiva o objeto cujas vistas lateral direita, frontal e superior são dadas por: Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.



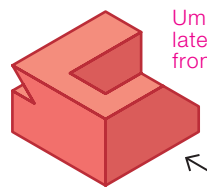
d) Quais vistas podem ser utilizadas para melhor representar cada objeto a seguir?

I



Uma possível resposta: vistas superior e lateral esquerda ou direita.

II



Uma possível resposta: vistas lateral direita, esquerda, frontal e superior.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Distâncias no espaço

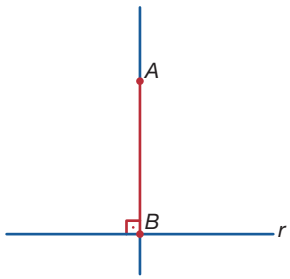
- Distância entre dois pontos

  A distância entre dois pontos distintos A e B é o comprimento do segmento $\overline{AB}$ em uma dada unidade de medida de comprimento.

Se os pontos A e B forem coincidentes, a distância entre eles será nula.

- Distância entre ponto e reta

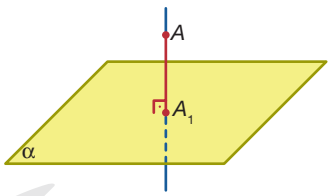
  Podemos obter a distância entre uma reta r e um ponto A, não pertencente a r, traçando uma reta perpendicular a r e passando por A, obtendo em r o ponto B. O comprimento AB é a distância entre a reta r e o ponto A.



Se o ponto A pertencer à reta r, a distância entre eles será nula.

- Distância entre ponto e plano

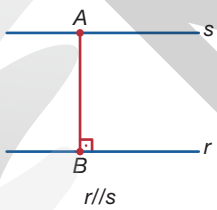
  A distância entre um plano α e um ponto A, não pertencente a α, é o comprimento do segmento $\overline{AA_1}$, sendo A_1 a projeção ortogonal de A sobre α.



Se o ponto A pertencer ao plano α, a distância entre eles será nula.

- Distância entre duas retas paralelas

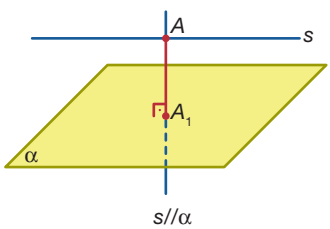
  A distância entre duas retas paralelas r e s é a distância entre um ponto qualquer de uma delas à outra.



Se as retas r e s forem coincidentes, a distância entre elas será nula. Caso as retas sejam concorrentes, não definimos a distância entre elas.

- Distância entre reta e plano paralelos

  A distância entre um plano α e uma reta s, paralela a α, é a distância entre um ponto qualquer de s a α.



Se a reta s estiver contida no plano α, a distância entre eles será nula. Caso a reta seja concorrente ao plano, não definimos a distância entre eles.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

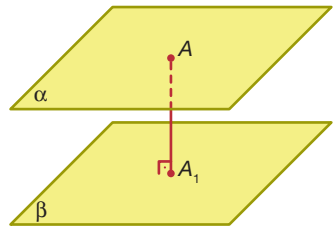
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

- **Distância entre dois planos paralelos**

  A distância entre dois planos paralelos α e β é a distância entre um ponto qualquer de um deles ao outro plano.

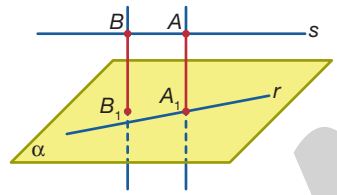
> Se α e β forem coincidentes, a distância entre eles será nula. Caso os planos sejam concorrentes, não definimos a distância entre eles.



$\alpha // \beta$

- **Distância entre duas retas reversas**

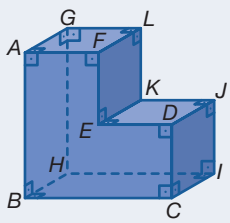
  A distância entre duas retas reversas *r* e *s* é a distância entre um ponto qualquer de *s* ao plano α, paralelo à reta *s*, que contém *r*.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Observe a figura geométrica abaixo.



RONALDO INÁCIO

De acordo com essa figura, determine os segmentos de reta cujas extremidades são vértices e os comprimentos representam a distância entre:

a) os pontos *F* e *I*.

b) o ponto *A* e a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

c) o ponto *H* e o plano que contém a face *DCIJ*.

d) as retas $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{EK}$.

e) a reta $\overleftrightarrow{ED}$ e o plano que contém a face *BCIH*.

f) os planos que contêm as faces *AFLG* e *EDJK*.

Resolução

a) $\overline{FI}$

b) $\overline{AB}$

c) $\overline{HI}$

d) $\overline{AE}$ e $\overline{GK}$

e) $\overline{CD}$

f) $\overline{EF}$ e $\overline{KL}$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

6. a) Falsa, pois se um ponto pertencer a uma reta, então a distância entre eles será nula.

6 Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando as que julgar falsas.

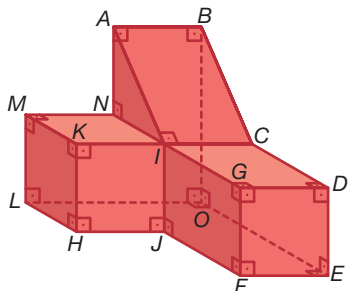
a) Não existe um ponto e uma reta cuja distância entre eles seja nula.

b) A distância entre um plano α e um ponto *P*, não pertencente a α, corresponde a PP_1, em que P_1 é a projeção ortogonal de *P* sobre α. verdadeira

c) Se $\overline{AA'}$ é um segmento de reta cujo comprimento corresponde à distância entre as retas reversas *r* e *s* ($A \in r$ e $A' \in s$), então $\overleftrightarrow{AA'} \perp s$. verdadeira

d) Qualquer reta e ponto contidos em um mesmo plano têm distância nula.
Falsa, pois somente terão distância nula se o ponto pertencer à reta.

7 Considere a figura geométrica ao lado.



RONALDO INÁCIO

Determine o(s) segmento(s) de reta cujas extremidades sejam vértices da figura e a medida represente a distância entre:

a) o plano que contém a face *HKML* e aquele que contém a face *AIN*. $\overline{MN}$; $\overline{IK}$; $\overline{JH}$

b) o plano que contém a face *DEFG* e $\overleftrightarrow{LO}$. $\overline{EO}$

c) $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano que contém a face *EFJHLO*. $\overline{BO}$

d) $\overleftrightarrow{CK}$ e $\overleftrightarrow{LO}$. $\overline{CO}$; $\overline{KL}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

8 Como já estudamos nas páginas 10 e 11, o artista gráfico Maurits Cornelis Escher é conhecido por produzir obras que se apoiam em conceitos matemáticos, especialmente os da Geometria. Fascinado por paradoxos visuais, Escher criou nessas obras situações impossíveis, como em **Queda-d'água**, de 1961.

Nesse tipo de trabalho, um leitor desatento pode não perceber a situação impossível. Observando cuidadosamente, porém, notamos a água passando continuamente pela calha, movimentando-se para baixo e afastando-se do leitor, ou, ainda, passando por um ponto mais alto e próximo do leitor, o que mantém o curso de água contínuo, ou seja, há uma dupla interpretação.

© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY-THE NETHERLANDS. ALL RIGHTS RESERVED

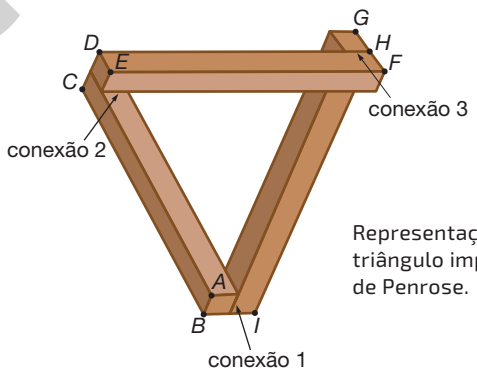
ESCHER, Maurits Cornelis. *Queda-d'água*. 1961. Litografia, 38 cm x 30 cm.

Para isso, Escher utilizou a ideia de triângulos impossíveis, representada por Roger Penrose em 1958, embora existam versões anteriores desses triângulos, como a de Oscar Reutersvärd, de 1934. Podemos representar um triângulo impossível por meio de paralelepípedos que se sobrepõem perpendicularmente e que só possuem consistência como desenho, pois as medidas dos ângulos internos desse suposto triângulo somam 270°. Isso justifica **Queda-d'água** ser possível apenas no plano bidimensional, ou seja, não é um trabalho em três dimensões.

Fontes de pesquisa: LOPES, Cláudio Fragata. Escher, o gênio da arte matemática. *Galileu*, São Paulo, Globo, ano 8, n. 88, nov. 1998. p. 89. ROONEY, Anne. *A história da matemática*: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil, 2012.

REPRODUÇÃO – © REUTERSVÄRD, OSCAR/AUTVIS, BRASIL, 2020. – COLEÇÃO PARTICULAR

Selo sueco projetado por Oscar Reutersvärd, em 1981.



RONALDO INÁCIO

Representação do triângulo impossível de Penrose.

a) Quantos triângulos impossíveis são sugeridos na obra **Queda-d'água**? três

b) Considerando somente a conexão 1 como impossível e admitindo que os pontos *A*, *B* e *C* pertencem a um plano α, os pontos *D*, *E* e *F* pertencem a um plano β e os pontos *G*, *H* e *I*, a um plano δ, determine os planos:

- paralelos entre si. α e δ
- perpendiculares entre si. α e β; β e δ

c) Quais segmentos de reta determinam a distância entre os planos α e δ, indicados no item **b**? $\overline{DH}$; $\overline{EF}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

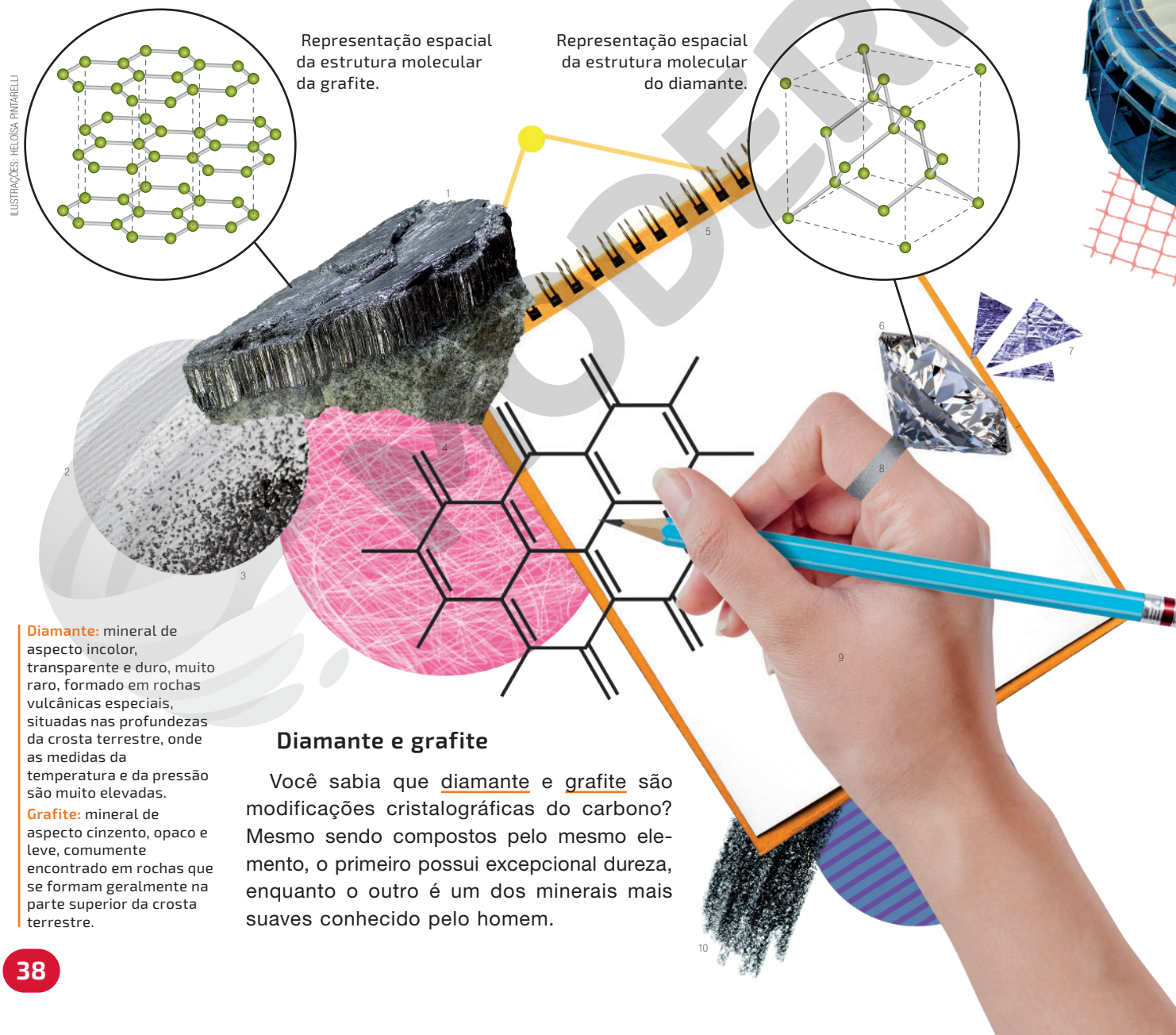
3 Poliedros

Estruturas moleculares

Diversas substâncias podem ser encontradas na natureza em forma de moléculas, ou seja, de dois ou mais átomos ligados entre si. Entre elas, existem moléculas formadas pelo mesmo tipo de átomo, como a do gás oxigênio $\left(O_2\right)$, e moléculas constituídas de mais de um tipo de átomo, como a da água $\left(H_2O\right)$.

As propriedades de uma substância estão relacionadas a aspectos como força e polaridade das ligações existentes entre suas moléculas e forma e tamanho das moléculas que a constituem. A forma de uma molécula pode influenciar tanto em reações bioquímicas, como a absorção ou os efeitos colaterais de um medicamento no organismo, quanto em sensações de olfato e visão.

Em razão de suas propriedades, moléculas constituídas por átomos de elementos químicos como o carbono têm despertado interesse em diversos pesquisadores.



Representação espacial da estrutura molecular da grafite.

Representação espacial da estrutura molecular do diamante.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Diamante: mineral de aspecto incolor, transparente e duro, muito raro, formado em rochas vulcânicas especiais, situadas nas profundezas da crosta terrestre, onde as medidas da temperatura e da pressão são muito elevadas.

Grafite: mineral de aspecto cinzento, opaco e leve, comumente encontrado em rochas que se formam geralmente na parte superior da crosta terrestre.

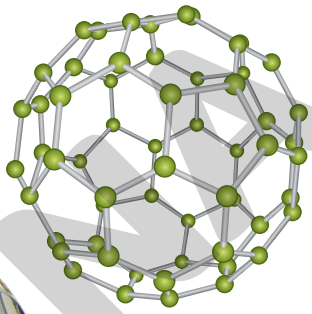
Diamante e grafite

Você sabia que diamante e grafite são modificações cristalográficas do carbono? Mesmo sendo compostos pelo mesmo elemento, o primeiro possui excepcional dureza, enquanto o outro é um dos minerais mais suaves conhecido pelo homem.

Buckminsterfullerene

Em 1996, Robert Curl Jr. e Richard Smalley, da Rice University, nos EUA, com Harold Kroto, da University of Sussex Brighton, no Reino Unido, ganharam o Prêmio Nobel pela descoberta da molécula denominada *buckminsterfullerene*, composta de 60 átomos de carbono, com formato semelhante à de uma bola de futebol e considerada uma das mais revolucionárias descobertas da Química no século XX. Segundo os pesquisadores, essa molécula possivelmente poderia auxiliar em tratamentos contra o câncer, bem como na produção de tintas, solventes, plásticos, entre outros materiais.

BNCC
- EM13MAT405
- CE3CNT



HELÖISA PINTARELLI

Representação espacial de uma molécula de *buckminsterfullerene*, cujo formato lembra o de uma bola de futebol, o que lhe proporcionou o pseudônimo *buckball*.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Que aspectos das moléculas estão relacionados às propriedades da substância que elas constituem? Força, polaridade das ligações, forma e tamanho.

B Aponte semelhanças e diferenças entre as representações espaciais das estruturas moleculares da grafite e do diamante.

C Pesquise e dê exemplos de moléculas que tenham uma representação espacial diferente das apresentadas. Resposta pessoal.

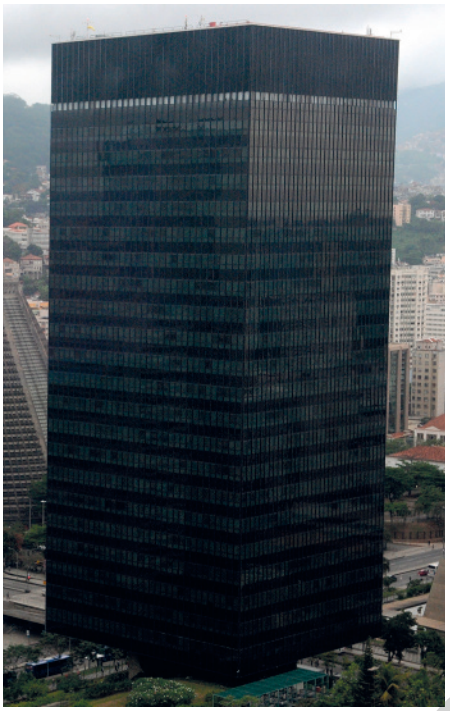
A representação espacial da estrutura molecular do *buckminsterfullerene*, por exemplo, lembra um **poliedro**, figura que estudaremos nas próximas páginas. Além disso, estudaremos as diferenças entre **poliedros convexos** e **poliedros não convexos**, a **Relação de Euler** para poliedros e os **Poliedros de Platão**.

B) Algumas possíveis respostas: semelhanças: possuem "vértices" e "arestas"; diferenças: polígonos das "faces" da representação espacial do diamante e da grafite.

FOTOMONTAGEM DE BARBARA SARZI. FOTOS: 1.LINNAS/SHUTTERSTOCK; 2.YAMABIKAY/SHUTTERSTOCK; 3.LITTLEE/SHUTTERSTOCK; 4.SUPERMIMICRY/SHUTTERSTOCK; 5.PRAPANN/SHUTTERSTOCK; 6.LIFETIMESTOCK/SHUTTERSTOCK; 7.SCHANKZ/SHUTTERSTOCK; 8.GLITTERSTUDIO/SHUTTERSTOCK; 9.LIFESTYLE GRAPHIC/SHUTTERSTOCK; 10.PULLIA/SHUTTERSTOCK; 11.JOLLANDA/SHUTTERSTOCK; 12.DIEGOGUIOP/SHUTTERSTOCK; 13.PHOTO BOUTIQUE/SHUTTERSTOCK; 14.VOVAN/SHUTTERSTOCK; 15.VALENTIN VALKOV/SHUTTERSTOCK; 16.DELTAH/SHUTTERSTOCK; 17.OSTILL IS FRANCK CAMHI/SHUTTERSTOCK; 18.GRESEI/SHUTTERSTOCK

Os poliedros

Ao elaborar um projeto, um arquiteto fica atento a vários elementos, entre eles o formato externo que a edificação terá após o término da obra. Essas construções possuem as mais variadas formas, e algumas delas apresentam características próprias. Algumas obras possuem linhas mais retas, como as apresentadas a seguir.



A. PAES/SHUTTERSTOCK

Prédio do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), cidade do Rio de Janeiro, em 2017.

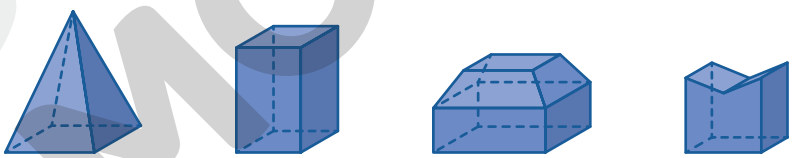
DAVID TONELSON/SHUTTERSTOCK

Walter Pyramid, Califórnia, nos EUA, em 2019.

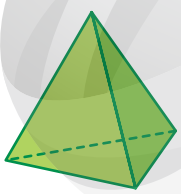
WINDWALK/SHUTTERSTOCK

Museu de Arte de São Paulo (MASP), cidade de São Paulo, em 2019.

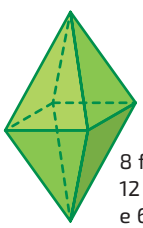
As obras que possuem linhas mais retas têm formas que lembram poliedros. Veja a seguir alguns poliedros.



Exemplos



4 faces, 6 arestas e 4 vértices



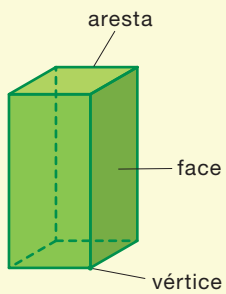
8 faces, 12 arestas e 6 vértices

Um **poliedro** é uma reunião finita de regiões poligonais chamadas **faces**, em que:

a) a interseção de duas faces do poliedro ou é um lado comum, ou um vértice comum ou é vazia;

b) cada lado de uma dessa regiões é também lado de uma, e apenas uma, outra região.

Os lados e os vértices dessas regiões chamam-se, respectivamente, **arestas** e **vértices** do poliedro.



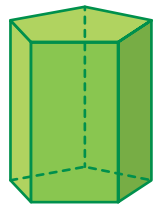
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

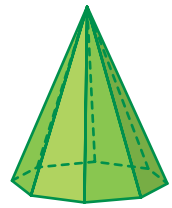
Ao reunirmos um polígono e todos os seus pontos interiores, obtemos uma região poligonal. Neste livro, utilizaremos a palavra "polígono" para nos referirmos tanto aos polígonos quanto às regiões poligonais.

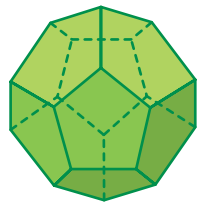
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Podemos classificar um poliedro de acordo com a quantidade de suas faces. Veja alguns exemplos.

Quantidade de faces	Classificação
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
⋮	⋮
20	Icosaedro


heptaedro


eneaedro

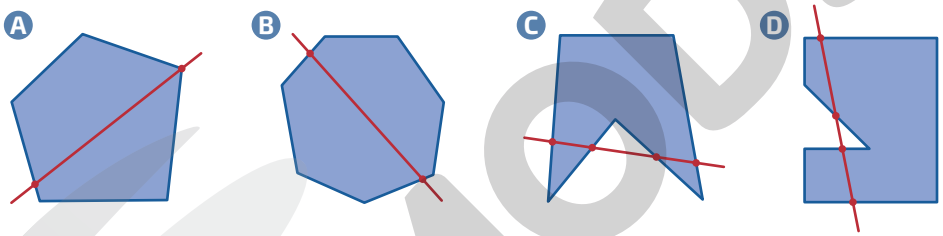

dodecaedro

icosaedro

Poliedros convexos e poliedros não convexos

Antes de definirmos **poliedros convexos** e **poliedros não convexos**, é importante relembrar o que são polígonos convexos e polígonos não convexos.

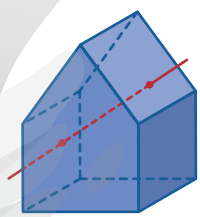
Dizemos que um polígono é convexo quando toda reta que passa em seu interior corta seu contorno em, no máximo, dois pontos. Os polígonos **A** e **B** a seguir são convexos e os polígonos **C** e **D** são não convexos.

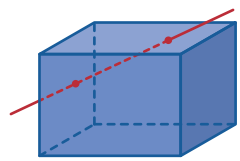


No caso dos poliedros, dizemos que são convexos se qualquer reta, não paralela a nenhuma de suas faces, o corta em, no máximo, dois pontos.

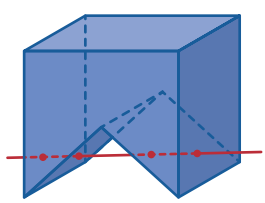
Exemplos

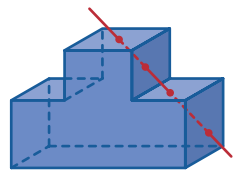
- Poliedros convexos





- Poliedros não convexos





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

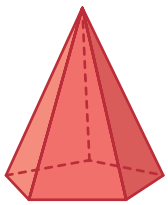
MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

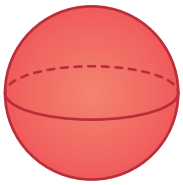
1 Classifique cada uma das figuras geométricas espaciais em poliedros ou não poliedros.

a)



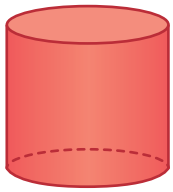
poliedro

b)



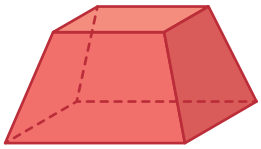
não poliedro

c)



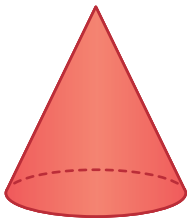
não poliedro

d)



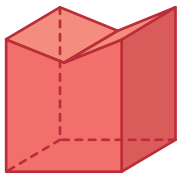
poliedro

e)



não poliedro

f)

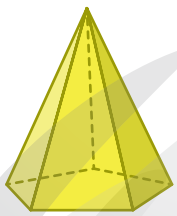


poliedro

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

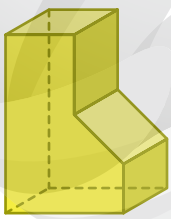
2 Determine a quantidade de faces, arestas e vértices de cada poliedro.

a)



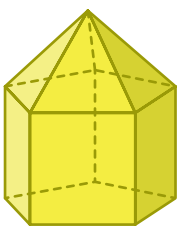
6 faces, 10 arestas e 6 vértices

b)



8 faces, 18 arestas e 12 vértices

c)

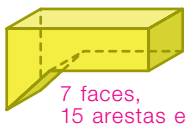


11 faces, 20 arestas e 11 vértices

d)

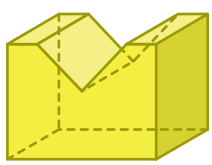
8 faces, 12 arestas e 6 vértices

e)



7 faces, 15 arestas e 10 vértices

f)

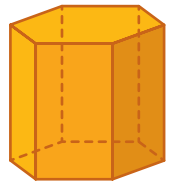


9 faces, 21 arestas e 14 vértices

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

3 Classifique cada poliedro em convexo ou não convexo.

a)

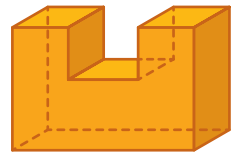


convexo

b)

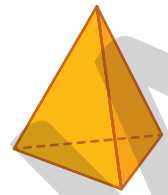
não convexo

c)



não convexo

d)



convexo

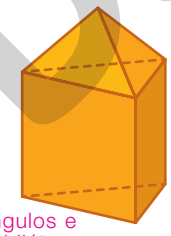
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

4 Determine quais polígonos (triângulo, quadrilátero, pentágono ou hexágono) são faces de cada um dos poliedros.

a)

quadriláteros

b)

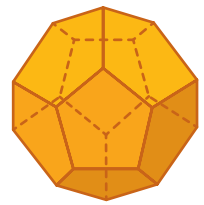


triângulos e quadriláteros

c)

quadriláteros e hexágonos

d)



pentágonos

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

5 (Enem, 2015) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro *P*, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro *P*, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu? alternativa **c**

a) 6 **b)** 8 **c)** 14 **d)** 24 **e)** 30

6 Em grupo

Represente um poliedro convexo de 6 faces e um não convexo de 7 faces. Em seguida, troque essas figuras com um colega e determine a quantidade de vértices e arestas das figuras que você recebeu. Por fim, juntem-se e verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Relação de Euler

PICTORIAL PRESS/ALAMY/FOTOARENA

Leonhard Euler.

O suíço Leonhard Euler (1707-1783) trouxe muitas contribuições à Matemática. Mesmo ficando cego aos 59 anos de idade, Euler continuou seus estudos. É provável que nenhum outro matemático tenha produzido tanto quanto ele, que durante toda a vida publicou cerca de 500 trabalhos, entre livros e artigos.

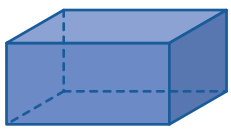
Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomes. São Paulo: Edgard Blücher, 2010. p. 303-304.

Entre as várias contribuições de Euler, podemos destacar uma importante relação envolvendo a quantidade de faces, arestas e vértices de um poliedro convexo, conhecida como **Relação de Euler**.

Seja um poliedro convexo de F faces, A arestas e V vértices. Tem-se $V + F = A + 2$.

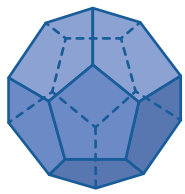
A Relação de Euler pode ser demonstrada, porém, neste livro, não apresentaremos essa demonstração.

Exemplos



$V = 8$
$F = 6$
$A = 12$

$V + F = A + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8 + 6 = 12 + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 14 = 14$



$V = 20$
$F = 12$
$A = 30$

$V + F = A + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 20 + 12 = 30 + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 32 = 32$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO NACIO

A Relação de Euler é válida também para uma infinidade de poliedros não convexos. Além disso, há valores que satisfazem essa relação, mas não correspondem à quantidade de vértices, faces e arestas de um poliedro, como $V = 8$, $F = 14$ e $A = 20$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Escreva um algoritmo que possibilite determinar a quantidade de faces de um poliedro convexo, conforme a quantidade de seus vértices e arestas.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para a construção de um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

Um **algoritmo** é uma sequência finita de passos (instruções) para resolver determinado problema.

Para construí-lo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes, e, em seguida, responder às seguintes perguntas.

a) Quais são os **dados de entrada**, ou seja, os dados fornecidos pelo problema?
Dados de entrada: quantidade de vértices e de arestas.

b) Quais são os **dados de saída**, ou seja, os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?
Dados de saída: quantidade de faces.

c) Conhecendo os dados de entrada e de saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?
Indicando por V, F e A a quantidade de vértices, faces e arestas, respectivamente, temos, pela Relação de Euler:

$V + F = A + 2 \Rightarrow F = A + 2 - V$

Desse modo, deve-se adicionar duas unidades à quantidade de arestas e, da soma obtida, subtrair a quantidade de vértices.

Agora, escrevemos o algoritmo.

Início
1. Leia a quantidade de arestas.
2. Leia a quantidade de vértices.
3. Adicione duas unidades à quantidade de arestas.
4. Subtraia, da soma obtida no passo 3, a quantidade de vértices.

Fim

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Programas em VisualG

Em diversas situações, é interessante programar um computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

> Em informática, instrução é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Neste livro, utilizaremos o VisualG, uma linguagem com comandos em português voltada para iniciantes em programação.

Veja mais informações sobre o VisualG no Suplemento para o professor.

Estrutura de um programa em VisualG

Um programa escrito em VisualG é subdividido em três áreas distintas: o cabeçalho do programa, a área de declarações e o corpo do programa.

Cabeçalho do programa

Essa área é utilizada para indicar o início do programa e também seu nome. O cabeçalho do programa é atribuído pela instrução **Algoritmo**, seguida de um nome entre aspas. Veja um exemplo.

Algoritmo "soma"

Área de declarações

Área subdividida em algumas subáreas. Neste livro, restringiremos nosso estudo apenas à subárea dedicada à indicação das variáveis que serão utilizadas no programa. A declaração das variáveis é atribuída pela instrução **Var**, seguida da relação de variáveis.

Essas variáveis são identificadas por um rótulo e armazenam um valor ou texto. O rótulo pode conter letras, números ou *underlines* (_), mas deve começar com uma letra. Além disso, cada variável deve ter seu tipo definido.

Observe no quadro alguns dos tipos mais comuns de variável.

Tipo	Variável representa
inteiro	números inteiros
real	números reais
caractere	sequência de caracteres

Para definir o tipo da variável, deve-se escrever seu rótulo (ou vários rótulos, separados por vírgula), seguido por dois-pontos (:) e seu tipo. Veja alguns exemplos.

Var

x: real al: caractere a, b, c, d: inteiro

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Corpo do programa

Essa área é utilizada para escrever as instruções que devem ser seguidas pelo computador. Seu início é indicado pela instrução **Inicio** e seu fim, pela instrução **Fimalgoritmo**.

```
Inicio
sequência de instruções
Fimalgoritmo
```

Ao utilizar caracteres especiais (como letras acentuadas, sinais de pontuação e o espaço), alguns problemas de exibição e execução do programa podem ocorrer. Por isso, é utilizado e recomendado usar termos semelhantes sem caracteres especiais, como em **Inicio** e **Fimalgoritmo**.

Exemplo de um programa em VisualG

Agora, vamos colocar em prática os conceitos estudados. Para isso, considere o seguinte problema.

Escrever um programa que calcule a quantidade de vértices de um poliedro convexo, dada a quantidade de suas faces e arestas.

Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo que o resolva. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1. Leia a quantidade de faces do poliedro.
2. Leia a quantidade de arestas do poliedro.
3. Adicione duas unidades à quantidade de arestas.
4. Subtraia, da soma obtida no passo 3, a quantidade de faces.

Fim

Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "relacao_de_Euler"
2  Var
3  V, F, A: inteiro
4  Inicio
5  escreva("Digite a quantidade de faces do poliedro: ")
6  leia(F)
7  escreva("Digite a quantidade de arestas do poliedro: ")
8  leia(A)
9  V<-A+2-F
10 escreva("A quantidade de vértices é: ",V)
11 Fimalgoritmo
```

No corpo do programa em VisualG, são indicados os comandos que fazem as operações. Veja a seguir o que fazem os comandos utilizados no exemplo.

escreva: apresenta na tela o conteúdo inserido entre parênteses.

leia: atribui o valor informado pelo usuário na variável indicada.

<-: atribui o valor da expressão à direita do sinal na variável indicada à esquerda.

Para a expressão, podem ser usados sinais como + (adição), – (subtração), * (multiplicação) e / (divisão), além dos parênteses, que no VisualG podem ser usados com outros parênteses, em vez de chaves e colchetes.

Agora é com você!

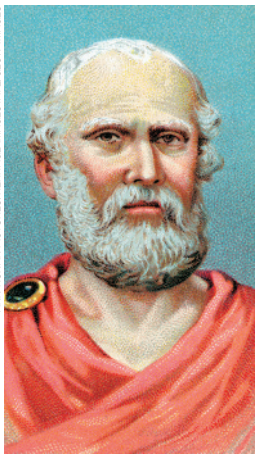
Respostas no Suplemento para o professor.

1 Qual informação deve ser inserida pelo usuário quando o programa executar a instrução da linha 5?

2 Escreva um programa em VisualG que determine a quantidade de arestas de um poliedro convexo, dada a quantidade de seus vértices e faces.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



ANN RONAN PICTURES/HERITAGE IMAGES/TATE/GLOW IMAGES

Platão.

Poliedros de Platão

Platão (427 a.C.-347 a.C.), discípulo de Sócrates, foi um filósofo grego nascido em Atenas.

Comumente é dito que Platão passou a ter uma visão matemática por influência de um amigo, Arquitas. Acredita-se também que foi a partir daí que ele soube da existência de cinco poliedros: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Nessa época, esses poliedros eram associados aos quatro elementos considerados primordiais: ar, associado ao octaedro; terra, associada ao cubo; fogo, ao tetraedro; e água, ao icosaedro. O quinto e último poliedro foi o dodecaedro, que Platão considerou o símbolo do Universo.

Fontes de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 131.
BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. p. 77.

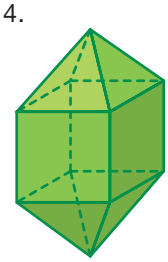
Esses poliedros convexos são chamados **Poliedros de Platão**. Um Poliedro de Platão satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- todas as faces têm a mesma quantidade de arestas;
- de cada vértice, parte a mesma quantidade de arestas;
- a Relação de Euler é válida.

Exemplos

- O poliedro abaixo é de Platão, pois todas as faces têm a mesma quantidade de arestas (3); de cada vértice parte a mesma quantidade de arestas (3); a Relação de Euler é válida, ou seja:
  $V = 4$; $F = 4$; $A = 6$
  $V + F = A + 2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 4 + 4 = 6 + 2 \Rightarrow 8 = 8$

- O poliedro abaixo não é de Platão. Apesar de duas das condições serem satisfeitas, ou seja, de ter a mesma quantidade de arestas partindo de cada vértice e a Relação de Euler ser válida, nem todas as faces têm a mesma quantidade de arestas. Podemos notar que algumas faces têm 3 arestas, enquanto outras têm 4.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Nos exemplos, V, F e A indicam a quantidade de vértices, faces e arestas, respectivamente.

Em relação aos Poliedros de Platão, temos a seguinte propriedade:
Existem 5, e somente 5, classes de Poliedros de Platão.

Para demonstrar essa propriedade, considere um Poliedro de Platão de F faces, V vértices e A arestas e também que n é a quantidade de arestas de cada face e p, de arestas que partem de cada vértice.

Cada face tem n arestas $(n \geqslant 3)$ e cada aresta é comum a 2 faces. Assim:

$$A = \frac{n \cdot F}{2} \Rightarrow F = \frac{2 \cdot A}{n}$$

Como cada aresta contém 2 vértices e p $(p \geqslant 3)$ é a quantidade de arestas que partem de cada vértice, temos:

$$A = \frac{p \cdot V}{2} \Rightarrow V = \frac{2 \cdot A}{p}$$

As restrições $n \geqslant 3$ e $p \geqslant 3$ são necessárias, pois se n for menor do que 3 não é possível obter um polígono, e se p for menor do que 3 não é possível formar um poliedro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Substituímos F por $\frac{2 \cdot A}{n}$ e V por $\frac{2 \cdot A}{p}$ na Relação de Euler. Em seguida, dividimos a equação obtida por $2A$.

$$V + F = A + 2 \Rightarrow \frac{2 \cdot A}{p} + \frac{2 \cdot A}{n} = A + 2 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0$$

Nesse caso, A é positivo e, consequentemente, $\frac{1}{A} > 0$. Assim, $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$ também é maior do que 0.

Vamos supor que as faces sejam triangulares. Nesse caso, temos $n = 3$, e assim:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{6} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{6} \Rightarrow p < 6$$

Para $n = 3$, temos p igual a 3, 4 ou 5.

Agora, vamos supor que as faces sejam quadrangulares. Nesse caso, temos $n = 4$. Assim:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{4} \Rightarrow p < 4$$

Para $n = 4$, temos p igual a 3.

Supondo que as faces sejam pentagonais $(n = 5)$, temos:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{3}{30} > 0 \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{3}{30} \Rightarrow p < \frac{10}{3} = 3,\overline{3}$$

Para $n = 5$, temos p igual a 3.

Se $n \geqslant 6$, obteremos $p < 3$, o que não é possível, pois p deve ser maior ou igual a 3, isto é, $p \geqslant 3$.

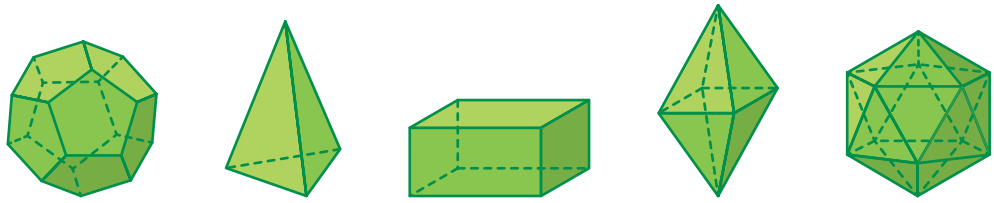
Organizando as informações obtidas, temos:

	n	p
Faces triangulares	3	3
	3	4
	3	5
Face quadrangular	4	3
Face pentagonal	5	3

Observando essas informações, podemos notar que há 5 classes de Poliedros de Platão. Utilizando as relações obtidas anteriormente, determinamos os valores de V, F e A. Ao organizar esses valores em um quadro, temos as 5 classes de poliedros possíveis.

n	p	V	F	A	Nome do poliedro
3	3	4	4	6	Tetraedro
3	4	6	8	12	Octaedro
3	5	12	20	30	Icosaedro
4	3	8	6	12	Hexaedro
5	3	20	12	30	Dodecaedro

Observe alguns Poliedros de Platão.



dodecaedro — tetraedro — hexaedro — octaedro — icosaedro

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Poliedros regulares

Dizemos que um poliedro convexo é regular quando satisfaz as seguintes condições:

- as faces são polígonos regulares e congruentes;
- de cada vértice do poliedro, parte a mesma quantidade de arestas.

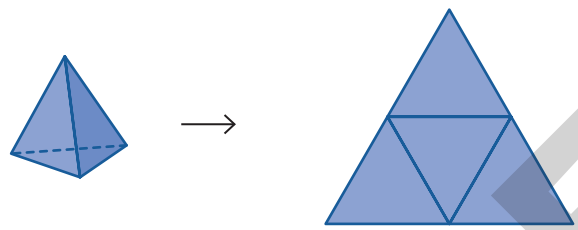
Em relação aos poliedros regulares, temos a seguinte propriedade:
Existem 5, e somente 5, poliedros regulares.

Podemos demonstrar essa propriedade da seguinte maneira.

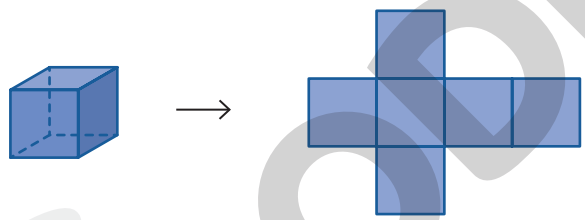
Se um poliedro é regular, suas faces são polígonos regulares e congruentes. Desse modo, todas as faces têm a mesma quantidade de lados. Além disso, em um poliedro regular, de cada vértice parte a mesma quantidade de arestas.

Assim, é possível afirmar que todo poliedro regular é de Platão. Logo, existem no máximo 5 poliedros regulares.

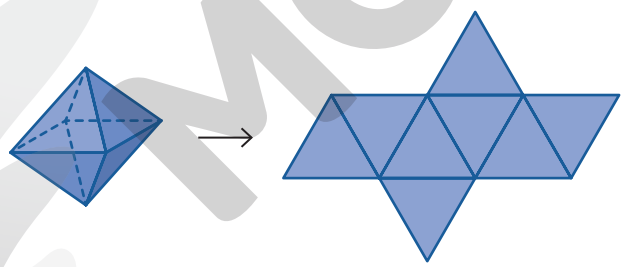
Veja a seguir os 5 poliedros regulares e uma de suas respectivas planificações.



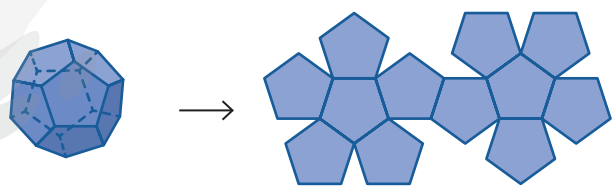
Tetraedro regular: 4 faces triangulares equiláteras e 3 arestas que partem de cada vértice.



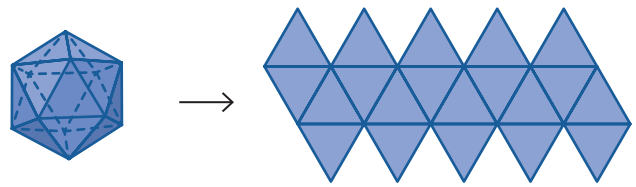
Hexaedro regular ou cubo: 6 faces quadradas e 3 arestas que partem de cada vértice.



Octaedro regular: 8 faces triangulares equiláteras e 4 arestas que partem de cada vértice.



Dodecaedro regular: 12 faces pentagonais regulares e 3 arestas que partem de cada vértice.



Icosaedro regular: 20 faces triangulares equiláteras e 5 arestas que partem de cada vértice.

Para compor outras planificações desses poliedros, é necessário organizar as faces de maneira conveniente.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 Um poliedro convexo é formado por quatro faces hexagonais e quatro faces triangulares. Qual é a quantidade de vértices e arestas desse poliedro?

Resolução

De acordo com o enunciado, a quantidade A de arestas é dada por:

- quatro faces hexagonais: $4 \cdot 6 = 24$
- quatro faces triangulares: $4 \cdot 3 = 12$

Logo, $A = \frac{12 + 24}{2} = 18$.

Como o poliedro é convexo, é válida a Relação de Euler. Assim, a quantidade V de vértices é:

$$V + 8 = 18 + 2 \Rightarrow V = 12$$

Portanto, o poliedro convexo tem 12 vértices e 18 arestas.

R3 Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando cada caso.

a) O cubo é um Poliedro de Platão.

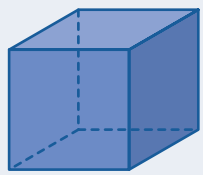
b) As faces de um icosaedro regular são triângulos equiláteros.

c) A Relação de Euler é válida somente para poliedros convexos.

d) Se as faces de um poliedro convexo são polígonos regulares congruentes, então o poliedro é regular.

Resolução

a) Verdadeira, pois o cubo é um hexaedro regular e, portanto, um Poliedro de Platão.

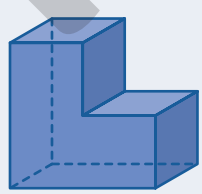


cubo ou hexaedro regular

b) Verdadeira, pois o icosaedro regular tem 20 faces triangulares equiláteras, ou seja, suas faces são triângulos equiláteros.

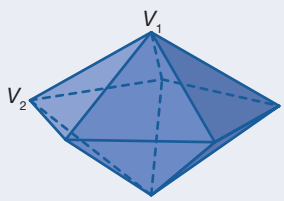
icosaedro regular

c) Falsa, pois a Relação de Euler é válida também para alguns poliedros não convexos, como o apresentado a seguir.



8 faces, 12 vértices e 18 arestas (relação $V + F = A + 2$ verdadeira)

d) Falsa, pois também é necessário que de cada vértice do poliedro parta a mesma quantidade de arestas.



As faces desse poliedro são triângulos regulares e, além disso, é válida a Relação de Euler. Porém, do vértice V_1 partem 5 arestas e do vértice V_2, 4 arestas.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R4 Armando construiu a representação de um poliedro convexo de 32 vértices. Sabendo que ele utilizou apenas faces triangulares nessa construção, determine a quantidade de arestas desse poliedro.

Resolução

Sabemos que o poliedro é convexo. Desse modo, a Relação de Euler é válida, ou seja, indicando por V, F e A a quantidade de vértices, faces e arestas, respectivamente, temos:

$$V + F = A + 2$$

Além disso, sabemos que $V = 32$. Assim:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow 32 + F = A + 2 \Rightarrow A = F + 30$$

Tem-se ainda que toda face tem 3 arestas (regiões triangulares) e cada aresta é comum a duas faces. Consequentemente:

$$A = \frac{3F}{2} \Rightarrow F = \frac{2A}{3}$$

Substituindo $F = \frac{2A}{3}$ em $A = F + 30$, temos:

$$A = F + 30 \Rightarrow A = \frac{2A}{3} + 30 \Rightarrow 3A = 2A + 90 \Rightarrow A = 90$$

Portanto, esse poliedro tem 90 arestas.

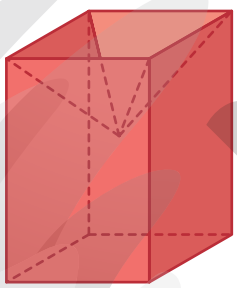
Lembre os alunos de que, para obter a soma S dos ângulos internos de um polígono, é necessário fazer sua decomposição em triângulos, ou recorrer à fórmula $S = (n - 2) \cdot 180°$, em que n corresponde à quantidade de lados do polígono.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

7 Qual é a quantidade de faces de um poliedro convexo de 10 vértices e 15 arestas? 7 faces

8 Observe o poliedro.



RONALDO INÁCIO

a) Não convexo, pois é possível traçar uma reta, não paralela a nenhuma de suas faces, e o cortar em mais de dois pontos.

a) Esse poliedro é convexo ou não convexo? Justifique sua resposta.

b) Determine a quantidade de vértices, arestas e faces desse poliedro. 9 vértices; 16 arestas; 9 faces

c) Nesse poliedro, a Relação de Euler é válida? Justifique sua resposta. Sim, pois $\underbrace{9}_{\text{faces}} + \underbrace{9}_{\text{vértices}} = \underbrace{16}_{\text{arestas}} + 2$.

9 Considere um poliedro convexo de 15 faces. Sabendo que todas as faces desse poliedro são hexagonais, determine quantos vértices ele tem. 32 vértices

10 Um poliedro convexo de 16 arestas e 9 vértices é formado apenas por faces triangulares e quadrangulares. Determine a quantidade de faces triangulares e quadrangulares desse poliedro. 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares

11 Em um poliedro convexo, a quantidade de arestas é o dobro da de vértices. Quantos vértices, arestas e faces tem esse poliedro, sabendo que todas as suas faces são triangulares? 6 vértices; 12 arestas; 8 faces

No contexto

12 Desafio

Estudamos, na página 39, a representação de uma molécula de *buckminsterfullerene*, que é composta de estruturas de carbono. Determine a quantidade de faces pentagonais e hexagonais que compõe o poliedro que lembra uma molécula de *buckminsterfullerene*, considerando cada átomo como um vértice. 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais

Lembre-se de que a molécula de *buckminsterfullerene* é composta de 60 átomos de carbono.

13 Em grupo

Escolha um poliedro convexo e indique a quantidade de vértices e de arestas que ele tem. Depois, peça a um colega que determine a quantidade de faces desse poliedro. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

14 De um poliedro convexo de 12 vértices, partem 5 arestas de cada vértice. Determine a quantidade de faces e arestas desse poliedro.
20 faces e 30 arestas

15 Considere o poliedro regular cuja quantidade de faces é igual à de vértices e responda às questões.

a) Quantas faces, vértices e arestas possui esse poliedro? 4 faces; 4 vértices; 6 arestas

b) Que nome recebe esse poliedro? tetraedro regular

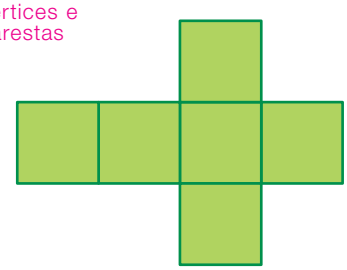
c) Qual é a forma das faces desse poliedro? Todas são triangulares equiláteras.

16 Podemos afirmar que um octaedro, que se enquadra em uma das cinco classes dos Poliedros de Platão, é um poliedro regular? Justifique sua resposta. Resposta no final do livro.

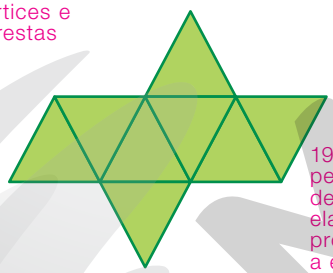
17 Qual é, em graus, a soma dos ângulos internos das faces de um tetraedro regular? 720°

18 Em cada item, é apresentada a planificação de um poliedro convexo. Determine a quantidade de vértices e arestas de cada um deles.

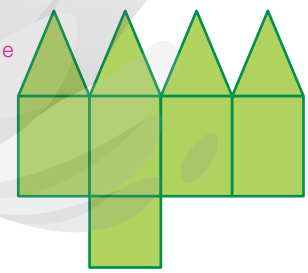
a) 8 vértices e 12 arestas



b) 6 vértices e 12 arestas



c) 9 vértices e 16 arestas



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

19 Elabore um problema que tenha a seguinte frase como resposta:

> Sim, a relação de Euler é válida, pois o poliedro é convexo.

19. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

20 Escreva um algoritmo que possibilite determinar a quantidade de vértices de um Poliedro de Platão de faces triangulares, dada a quantidade de faces desse poliedro. Resposta no final do livro.

a) Utilizando o algoritmo escrito por você, determine a quantidade de vértices de um Poliedro de Platão de faces triangulares, que possui:

- 4 faces. 4 vértices
- 20 faces. 12 vértices

b) Codifique o algoritmo escrito por você para a linguagem VisualG. Resposta no final do livro.

21 A IX Copa do Mundo de futebol da FIFA foi realizada em 1970, no México, e teve como campeã a seleção brasileira. Nessa Copa, foi utilizada pela primeira vez a bola confeccionada com partes de couro com formato pentagonal e hexagonal.

DPA/ZUMA PRESS/FOTOARENA

Bola de futebol utilizada na Copa do mundo de 1970.

Essa bola foi inspirada em um icosaedro truncado, um dos 13 poliedros conhecidos como Sólidos de Arquimedes. O icosaedro truncado é um poliedro convexo formado por 12 pentágonos regulares e 20 hexágonos regulares.

Fonte de pesquisa: LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. p. 239. v. 2.

Qual é a quantidade de vértices e arestas do icosaedro truncado? 60 vértices e 90 arestas

22 Sabendo-se que determinado poliedro regular de 12 vértices é formado apenas por faces triangulares, responda às questões.

a) Quantas arestas e faces tem esse poliedro? 30 arestas e 20 faces

b) Qual é o nome desse poliedro? icosaedro regular

c) Esse é um Poliedro de Platão? Justifique sua resposta. Sim, todo poliedro regular é um Poliedro de Platão.

23 Desafio

Considere dois poliedros convexos, A e B, em que A tem 8 vértices a mais que B e ambos têm a mesma quantidade de arestas. Sabendo que o poliedro A é formado apenas por faces pentagonais e que B é formado apenas por faces triangulares, determine a quantidade de faces, vértices e arestas de cada um desses poliedros.
poliedro A: 12 faces, 20 vértices e 30 arestas;
poliedro B: 20 faces, 12 vértices e 30 arestas

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

4 Prismas

BNCC
- EM13MAT309
- EM13MAT315
- EM13MAT504
- CE2CNT

O formato das embalagens e sua função

O setor industrial faz uso de uma ampla diversidade de embalagens, que se diferenciam em formato e tamanho, variando de acordo com o produto armazenado. O formato de algumas dessas embalagens pode lembrar uma figura geométrica espacial. Você já pensou em como é determinado o formato de uma embalagem?

A escolha de determinado formato leva em consideração diversos fatores mercadológicos e econômicos, como o tipo de produto que será armazenado, a conveniência em relação ao transporte e a facilidade em sua posterior estocagem. Além disso, outros quesitos devem ser considerados, como as legislações e as certificações vigentes, que regulamentam questões relacionadas à matéria-prima que deve ser utilizada em sua fabricação e às informações essenciais que devem constar nas embalagens de cada produto.

As embalagens prestam-se a diversificados propósitos, incluindo a identificação, a distribuição e a comercialização dos produtos armazenados.

Ademais, fatores estéticos e culturais, como o perfil do consumidor, o *design* do produto e as estratégias de *marketing*, além de aspectos relacionados à ergonomia, são considerados, uma vez que a visualidade e o manuseio de uma embalagem são critérios bastante valorizados.

A função da embalagem

Agregação de valor: serve de instrumento de propaganda e *marketing*.

Transporte: favorece o transporte eficiente até o expositor final.

Funcionalidade: identifica, apresenta e descreve o produto, fornece instruções de armazenamento e de descarte do produto e da sua embalagem.

Preocupação com a sustentabilidade: além da proteção e estocagem adequada, reduz a perda de produto e permite reutilização da embalagem e o uso de matérias-primas alternativas e renováveis, entre outras vantagens.

Proteção: previne danos, contaminação e deterioração externa.

Competitividade: proporciona estética e apelo de venda.

Fonte de pesquisa: <http://www.caminhosdasustentabilidade.org.br/elo_ecodesign_funcao.html>. Acesso em: 16 jul. 2020.

Nos últimos anos, as embalagens inteligentes, destinadas principalmente ao setor alimentício, têm ganhado destaque no mercado. Esse tipo de embalagem possui tecnologias que identificam, por meio de indicadores químicos e de umidade, as condições relacionadas à qualidade do produto, como a mudança na cor de uma carne ou o estágio de maturação de um vegetal.

O uso consciente de embalagens

Questões relacionadas às embalagens sustentáveis estão cada vez mais em pauta nas discussões entre consumidores – uma parcela crescente da população tem demonstrado preocupação com o meio ambiente – e empresários conscientes.

É importante, ao adquirir um produto, buscar saber se o material utilizado na confecção da embalagem é ambientalmente amigável, ou seja, material reciclado, feito de fontes renováveis, fáceis de reciclar ou que possibilitem reutilização.

Veja a seguir algumas atitudes para consumir embalagens de maneira consciente.

- Evite produtos "superembalados".
- Sempre que possível, prefira produtos não embalados.
- Utilize o guardanapo disponível no porta-guardanapo em vez do disponibilizado dentro de uma embalagem plástica.
- Evite produtos comercializados com muitas embalagens.
- Utilize sacola retornável.
- Caso não esteja com sua sacola retornável, peça ao funcionário do estabelecimento que utilize a capacidade máxima da sacola plástica (que deve ser resistente).
- Optar por produtos comercializados em embalagens retornáveis.
- Prefira produtos que tenham refil.

Fonte de pesquisa: <https://antigo.mma.gov.br/responsabilidade-socioambiental/producao-e-consumo-sustentavel/consumo-consciente-de-embalagem/item/7581-consumo-consciente-de-embalagem.html>. Acesso em: 12 abr. 2021.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Imagine que você seja o gestor de uma marca de cosméticos reconhecida pela inovação e pela qualidade de seus produtos. Que critérios você levaria em conta para determinar os tipos de embalagem utilizados para o armazenamento desses cosméticos? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que levariam em conta os fatores mercadológicos, econômicos, regulatórios, estéticos e culturais.

B Faça em seu caderno o esboço de uma embalagem que lembre uma figura geométrica espacial para determinado produto. Ele deve conter as especificações sobre as dimensões da embalagem e apresentar um visual atrativo, destinado a possíveis consumidores. Resposta pessoal. Avalie a possibilidade de explorar, com o auxílio dos esboços apresentados, diferentes perspectivas e dimensões para a representação de embalagens.

Muitas das embalagens disponíveis no mercado têm o formato de **prisma**, figura geométrica espacial que estudaremos nas próximas páginas. Nesse tema, estudaremos alguns conteúdos que possibilitarão determinar a quantidade necessária de material para a confecção de embalagens e o espaço ocupado por elas em uma prateleira.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.URFIN/SHUTTERSTOCK; 2.CHRISTIAN NASTASE/SHUTTERSTOCK; 3.AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 4.SOMCHAI SOM/SHUTTERSTOCK; 5.PICSFIVE/SHUTTERSTOCK; 6.JEREMY WHAT/SHUTTERSTOCK; 7.XPIXEL/SHUTTERSTOCK; 8.MUMEMORIES/SHUTTERSTOCK; 9.DJA65/SHUTTERSTOCK; 10.ALEXLMX/SHUTTERSTOCK; 11.FENG YU/SHUTTERSTOCK; 12.DJA65/SHUTTERSTOCK; 13.DJA65/SHUTTERSTOCK; 14.ESB PROFESSIONAL/SHUTTERSTOCK; 15.BUTENKOV ALEKSEI/SHUTTERSTOCK; 16.DONATAS 1205/SHUTTERSTOCK; 17.ROMAN SAMOKIN/SHUTTERSTOCK/18.EVZ/SHUTTERSTOCK

MODERNA

Os prismas

Neste tópico, estudaremos o prisma, que é um caso particular de poliedro. Veja a seguir alguns objetos cujas formas assemelham-se a prismas.

LABORANT/ SHUTTERSTOCK

bloco de madeira

STEYNO & AMP STITCH/ SHUTTERSTOCK

caixa de madeira

HEDZUN VASYL/ SHUTTERSTOCK

caixa de sapatos

Note que $B_1 \notin \alpha$ e que as retas paralelas a $\overline{A_1B_1}$ que passam por $A_2, A_3, \ldots, A_n$ também são paralelas entre si.

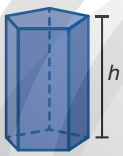
Para definir um prisma, considere os planos paralelos α e β, o polígono convexo $A_1A_2 \ldots A_n$ contido em α e o ponto B_1 pertencente a β. Pelos vértices $A_2, A_3, \ldots, A_n$ traçamos retas paralelas a $\overline{A_1B_1}$ que cortam β nos pontos $B_2, B_3, \ldots, B_n$. Agora, considere dois segmentos consecutivos assim determinados, por exemplo, $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$. O quadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ é plano, pois $\overline{A_1B_1}$ e $\overline{A_2B_2}$ são paralelos. Além disso, como $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ estão contidos em retas coplanares que não se intersectam, esses segmentos são paralelos. Consequentemente, o quadrilátero é um paralelogramo.

A união de todos esses paralelogramos, juntamente com os polígonos $A_1A_2 \ldots A_n$ e $B_1B_2 \ldots B_n$, é chamada **prisma de bases** $A_1A_2 \ldots A_n$ e $B_1B_2 \ldots B_n$.

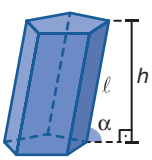
Pode-se mostrar que as bases de um prisma são congruentes.

Os segmentos $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_nB_n}$ são chamados **arestas laterais**. Todas as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento. Os paralelogramos $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3, \ldots, A_nB_nB_1A_1$ são chamados **faces laterais** do prisma. Já os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_nA_1}$ e $\overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}, \ldots, \overline{B_nB_1}$ são chamados **arestas das bases**.

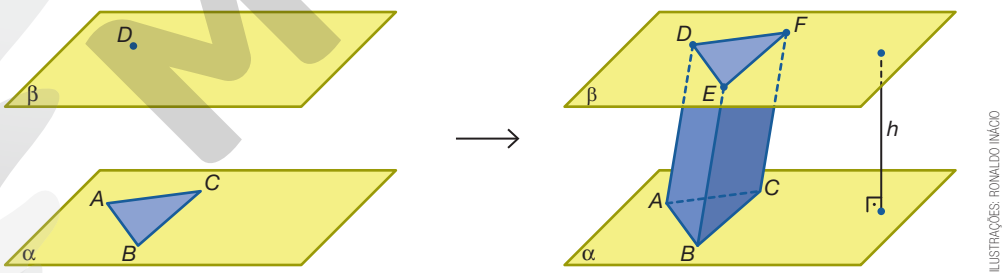
Em um prisma reto, a altura corresponde ao comprimento da aresta lateral.



Em um prisma oblíquo, a altura está relacionada ao comprimento da aresta lateral e ao ângulo formado entre a aresta lateral e sua projeção no plano da base.



Supondo os planos paralelos α e β, o polígono convexo ABC contido em α e o ponto D pertencente a β, temos:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Nesse prisma, segue que:

- as **bases** são os polígonos *ABC* e *DEF* (polígonos congruentes).
- as **arestas das bases** são $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{DF}$.
- as **arestas laterais** são $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$.
- as **faces laterais** são os paralelogramos *ADEB, BEFC* e *CFDA*.
- a **altura** é a distância *h*, entre os planos α e β.

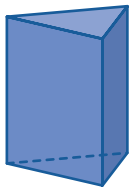
A **altura** de um prisma é a distância entre as bases.

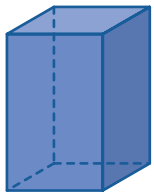
Um prisma é **reto** quando suas arestas laterais são perpendiculares às bases. Caso as arestas laterais sejam oblíquas às bases, dizemos que o prisma é **oblíquo**.

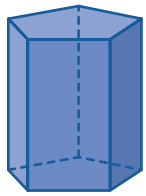
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

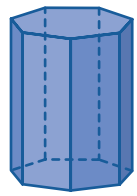
MODERNA

Um prisma pode ser denominado de acordo com sua base. Se a base for um triângulo, o prisma é triangular; se a base for um quadrilátero, o prisma é quadrangular; e assim por diante. Veja alguns exemplos.


prisma triangular


prisma quadrangular


prisma pentagonal

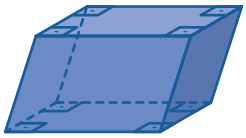

prisma heptagonal

Quando a base de um prisma reto é um polígono regular, dizemos que ele é um **prisma regular**.

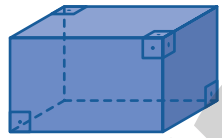
No caso dos prismas quadrangulares, são dadas denominações diferentes de acordo com algumas de suas características. Um deles é o **paralelepípedo**, cujas bases são paralelogramos.

Em relação aos paralelepípedos, temos:

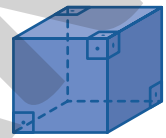
- paralelepípedo retângulo, cujas bases são retângulos.



- paralelepípedo reto retângulo, cujas bases e faces laterais são retângulos.



O cubo é um caso particular de paralelepípedo reto retângulo que possui todas as faces quadradas.

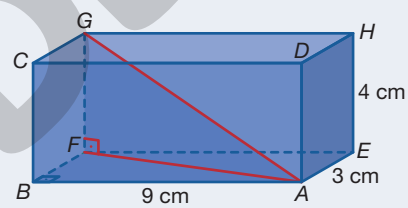


Exercícios e problemas resolvidos

R1 Dado o paralelepípedo reto retângulo, determine AF e AG.

Resolução

Note que, no triângulo retângulo ABF, o segmento $\overline{AF}$ é a hipotenusa. Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:



$$(AF)^2 = (AB)^2 + (BF)^2 \Rightarrow (AF)^2 = 9^2 + 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AF)^2 = 90 \Rightarrow AF = 3\sqrt{10}$$

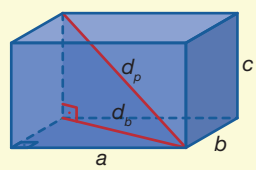
No triângulo retângulo AFG, o segmento $\overline{AG}$ é a hipotenusa, logo:

$$(AG)^2 = (AF)^2 + (FG)^2 \Rightarrow (AG)^2 = \left(3\sqrt{10}\right)^2 + 4^2 \Rightarrow AG = \sqrt{106}$$

Portanto, $AF = 3\sqrt{10}$ cm e $AG = \sqrt{106}$ cm.

Nesse caso, $AF = 3\sqrt{10}$ e $AG = \sqrt{106}$, pois $AF > 0$ e $AG > 0$.

Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c, conforme a figura ao lado, pode-se mostrar que:



- o comprimento da diagonal da base do paralelepípedo é dado por $d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- o comprimento da diagonal do paralelepípedo é dado por $d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

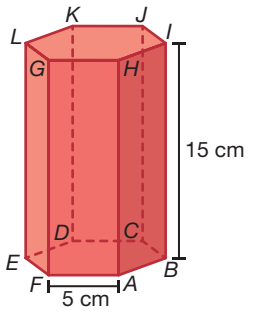
1 Escreva como é denominado, de acordo com o polígono da base, um prisma reto cuja base seja um polígono regular de:

a) 6 lados. prisma regular hexagonal

b) 8 lados. prisma regular octogonal

c) 10 lados. prisma regular decagonal

2 Observe o prisma hexagonal regular a seguir.



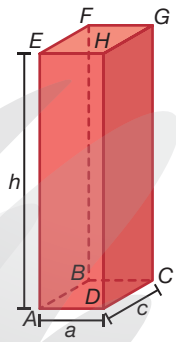
RONALDO INÁCIO

Para resolver o item a, lembre os alunos de que um hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros congruentes.

a) Determine AD e AK. $AD = 10$ cm; $AK = 5\sqrt{13}$ cm

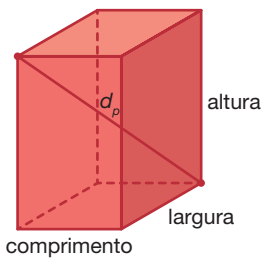
b) Qual a área e o perímetro do triângulo BEL? área: 75 cm²; perímetro: $5 \cdot \left(5 + \sqrt{13}\right)$ cm

3 Sabendo que o comprimento da diagonal da base e da diagonal do paralelepípedo reto retângulo a seguir é igual a 5 cm e 13 cm, respectivamente, e que a área do retângulo $ABFE$ é 48 cm², quais são os valores de a, c e h?
$a = 3$ cm, $c = 4$ cm, $h = 12$ cm



RONALDO INÁCIO

4 O comprimento da diagonal d_p de um paralelepípedo reto retângulo é $15\sqrt{2}$ cm. Sabendo que o comprimento, a largura e a altura desse paralelepípedo são proporcionais aos números 3, 4 e 5, respectivamente, determine as dimensões desse paralelepípedo. comprimento: 9 cm; largura: 12 cm; altura: 15 cm

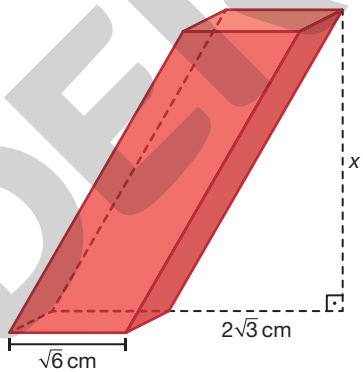


RONALDO INÁCIO

5 As dimensões externas de uma caixa em forma de paralelepípedo reto retângulo são representadas por números consecutivos, e a diagonal desse paralelepípedo tem $\sqrt{194}$ cm de comprimento. Quantos centímetros tem cada uma das dimensões externas dessa caixa?
7 cm, 8 cm e 9 cm

6 Em uma aula de Geometria espacial, o professor solicitou aos alunos que construíssem, com canudos de papel de 20 cm de comprimento, as arestas de um cubo, de maneira que a diagonal desse cubo tivesse o mesmo comprimento de um canudo. Quantos centímetros de cada canudo devem ser cortados para construir as arestas desse cubo? aproximadamente 8,5 cm

7 As arestas laterais do prisma oblíquo de base quadrada representado a seguir têm $4\sqrt{3}$ cm de comprimento.

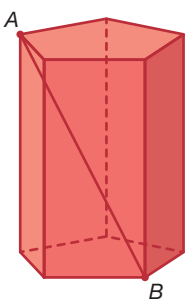


RONALDO INÁCIO

a) o comprimento da diagonal da base. $2\sqrt{3}$ cm

b) a altura x. 6 cm

8 O segmento $\overline{AB}$ indicado no prisma regular pentagonal representado a seguir tem 30 cm de comprimento. Para que esse segmento aumente 16,8 cm, de maneira que o comprimento das arestas da base não seja alterado, a altura desse prisma deve ter aumento de 19,2 cm. Calcule quantos centímetros de altura tem esse prisma.
24 cm



RONALDO INÁCIO

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área da superfície de um prisma

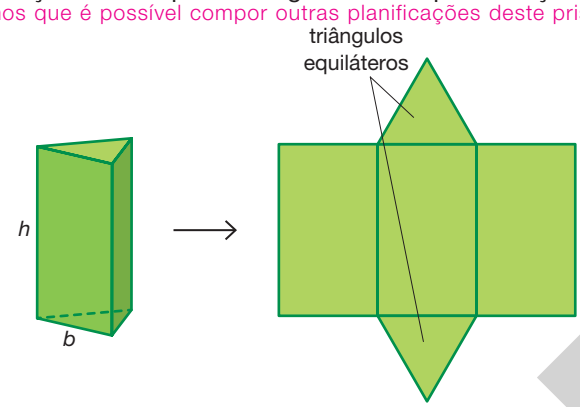
Para iniciar o estudo acerca do cálculo da área da superfície de um prisma, são necessárias algumas considerações. Em um prisma:

- a **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as suas faces laterais, sendo a área dessa superfície a área lateral do prisma $\left(A_\ell\right)$;
- a **área da base** corresponde à área do polígono relativa a cada uma das bases do prisma $\left(A_b\right)$;
- a **superfície total** corresponde à reunião da superfície lateral com as bases, sendo a área total do prisma $\left(A_t\right)$ a soma da área lateral com a área das bases.

Assim, a área total da superfície de um prisma é igual a área lateral mais duas vezes a área da base, isto é: $A_t = A_\ell + 2A_b$.

Veja a representação de um prisma regular e sua planificação.

Explique aos alunos que é possível compor outras planificações deste prisma.



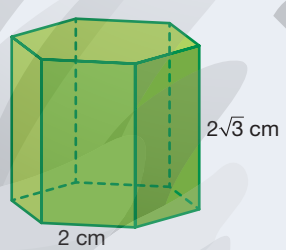
Nesse caso, a área total do prisma é dada pela área lateral, que é igual a três vezes a área de uma face lateral (retângulo), mais a área das bases, que é igual a duas vezes a área de uma base (triângulo equilátero).

$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{3 \cdot b \cdot h} + \underbrace{2A_b}_{\frac{b^2\sqrt{3}}{4}} = 3bh + 2 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 3bh + \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$$

A fim de simplificar a escrita, vamos dizer "a área do polígono" em vez de dizer "a área da região poligonal" em referência à área da região determinada por esse polígono. Além disso, utilizaremos, de maneira simplificada em alguns contextos, expressões sem o uso do termo "medida" ou do verbo medir, em referência à medida do comprimento de um segmento.

Exercícios e problemas resolvidos

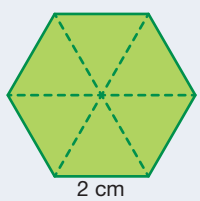
R2 Em relação ao prisma hexagonal regular abaixo, calcule:



a) a área da base.
b) a área lateral.
c) a área total.

Resolução

a) Por ser hexagonal, a base pode ser decomposta em 6 triângulos equiláteros de lado 2 cm. Como a área de um triângulo equilátero de lado a é dada por $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, segue que:



$$A_b = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

Portanto, a área da base do prisma é $6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

b) A superfície lateral é formada por 6 retângulos de dimensões 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm. Assim:

$$A_\ell = 6 \cdot \left(2 \cdot 2\sqrt{3}\right) = 24\sqrt{3}$$

Portanto, a área lateral do prisma é $24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

c) Para calcular a área total do prisma, fazemos:

$$A_t = A_\ell + 2A_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_t = 24\sqrt{3} + 2 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

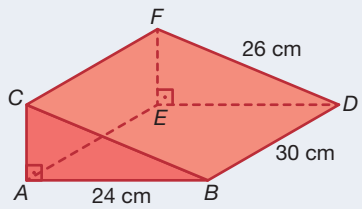
Portanto, a área total do prisma é $36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R3 Considere o prisma reto representado ao lado. Sabendo que *ABDE*, *AEFC* e *BCFD* são retângulos, determine a área total desse prisma.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Inicialmente, note que as bases desse prisma são triângulos retângulos, cujo comprimento do cateto menor não é conhecido. Utilizando o Teorema de Pitágoras, determinamos esse comprimento.

$$(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 + 24^2 = 26^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = 100 \Rightarrow AC = \sqrt{100} = 10$$

Note que $AC = 10$, pois $AC > 0$.

Agora, calculamos a área da base e a área lateral do prisma.

- A área da base: $A_b = \dfrac{10 \cdot 24}{2} = 120$

  Logo, a área da base do prisma é $120\ cm^2$.

- A área lateral: $A_\ell = 30 \cdot 10 + 30 \cdot 24 + 30 \cdot 26 = 1\,800$

  Assim, a área lateral do prisma é $1\,800\ cm^2$.

Por fim, calculamos a área total do prisma.

$$A_t = A_\ell + 2A_b = 1\,800 + 2 \cdot 120 = 2\,040$$

Portanto, a área total do prisma é $2\,040\ cm^2$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Acessando tecnologias

No Suplemento para o professor há mais informações sobre o *software* GeoGebra.

Calculando a área total de um prisma reto regular

Nesta seção, vamos calcular a área total de um prisma regular de altura 12 cuja base é um hexágono de lado 5. Para isso, vamos utilizar o GeoGebra, que é um dos *softwares* de Geometria dinâmica gratuitos disponíveis.

A Selecione a ferramenta **Ponto** e marque um ponto qualquer *A*.

B Construa um segmento de reta cujo comprimento é 5. Para isso, selecione a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo** e clique sobre o ponto *A*. Na janela **Segmento com Comprimento Fixo**, digite o comprimento do segmento, nesse caso 5, e tecle **Enter**.

C Selecione a ferramenta **Polígono Regular** e clique sobre os pontos *A* e *B*, nessa ordem. Na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de lados da base do prisma, nesse caso 6, e tecle **Enter**. Assim, obtemos o hexágono regular *ABCDEF*, o qual chamaremos *pol1*.

Se julgar conveniente, explique aos alunos que é possível mudar a nomenclatura de um objeto clicando com o botão direito do *mouse* e selecionando a opção Renomear.

D Com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto *G* externo ao hexágono *ABCDEF*.

E Novamente com a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**, construa um segmento $\overline{GH}$ cujo comprimento é 5.

F Construa as retas *r* e *s* perpendiculares a $\overline{GH}$ passando por *G* e *H*, respectivamente. Para isso, selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** e clique sobre o segmento $\overline{GH}$ e o ponto *G* (obtendo assim a reta *r*). Em seguida, clique sobre o segmento $\overline{GH}$ e o ponto *H* (obtendo assim a reta *s*).

G Construa uma circunferência de centro H (indicada por C_H) e uma circunferência de centro G (indicada por C_G) ambas com raio 12. Para construir C_H, selecione a ferramenta **Círculo dados Centro e Raio** e clique sobre o ponto H. Em seguida, na janela **Círculo dados Centro e Raio**, digite o comprimento do raio, nesse caso 12, e tecle **Enter**. Para construir C_G, repita o mesmo processo, dessa vez clicando sobre o ponto G.

H Marque os pontos de interseção I e J entre r e C_G. Para isso, selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, e clique sobre C_G e r.

I De maneira semelhante ao passo **H**, marque os pontos de interseção K e L entre s e C_H.

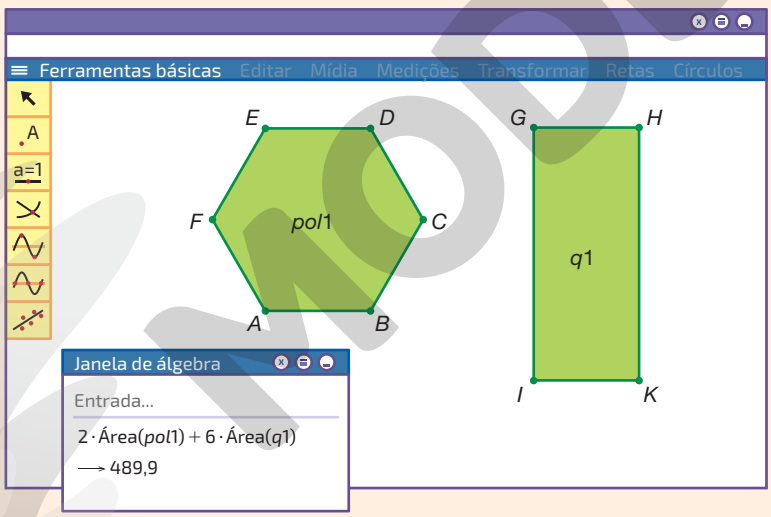
J Selecione a ferramenta **Polígono** e clique sobre os pontos G, H, K, I e G, nessa ordem. Desse modo, obtemos o retângulo $GHKI$, o qual chamaremos $q1$.

K Oculte os pontos J e L, as retas r e s e as circunferências C_G e C_H. Para isso, selecione a ferramenta **Mover**, clique sobre o objeto desejado com o botão direito do *mouse* e desmarque a opção **Exibir Objeto**.

> Para não exibir o nome dos objetos construídos, selecione a ferramenta **Mover**, clique sobre o objeto com o botão direito do *mouse* e desmarque a opção **Exibir Rótulo**.

L No campo **Entrada...**, da **Janela álgebra**, digite $2 * \text{área}(pol1) + 6 * \text{área}(q1)$.

> O resultado obtido, nesse caso, é uma aproximação da área total do prisma regular de base hexagonal. Caso deseje alterar a quantidade de casas decimais, acesse o menu **Opções** e, no item **Arredondamento**, selecione a opção com a quantidade de casas decimais desejada.



RONALDO INÁCIO E SÉRGIO L. FILHO

Portanto, a área total desse prisma é, aproximadamente, 489,9 unidades de área.

Agora é com você!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 Para calcular a área total do prisma, construímos apenas dois polígonos: um para representar uma das bases e o outro, uma das faces laterais. Por que não foi necessário construir todas as faces do prisma?

2 Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, calcule a área total de um prisma regular de altura 7 cuja base é um octaedro de lado 9.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

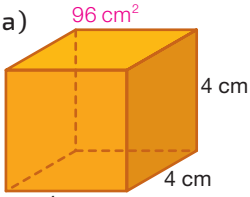
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Se julgar conveniente, solicite aos alunos que resolvam algumas das tarefas propostas nessa seção com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.

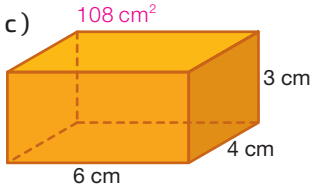
9 Calcule a área da superfície de cada prisma.

a) 96 cm²



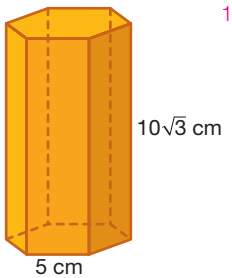
cubo

c) 108 cm²



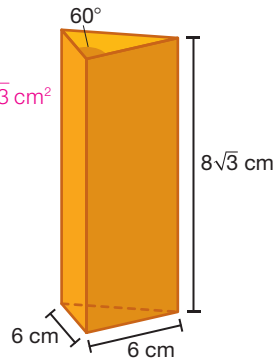
paralelepípedo reto retângulo

b) 375√3 cm²



prisma hexagonal regular

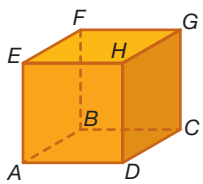
d) 162√3 cm²



prisma reto de base triangular

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

10 Na imagem, está representado um cubo cuja área da superfície é igual a 54 cm².



RONALDO INÁCIO

a) Calcule o comprimento de cada aresta desse cubo. 3 cm

b) Qual é o perímetro do quadrilátero *AEGC*? $6 \cdot (1 + \sqrt{2})$ cm

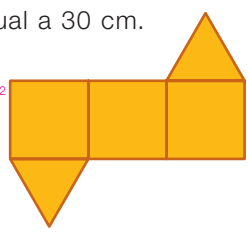
11 Todas as faces de um cubo de madeira com 120 cm de aresta foram pintadas de vermelho; em seguida, o cubo foi dividido em cubinhos com 4 cm de aresta.

a) Em quantos cubinhos o cubo vermelho foi dividido? 27 000 cubinhos

b) Quantos cubinhos têm ao menos duas faces pintadas de vermelho? 344 cubinhos

c) Qual é a razão entre a área total de cada cubinho e a do cubo vermelho? $\frac{1}{900}$

12 Observe a planificação de um prisma triangular regular cujo comprimento das arestas das bases e das arestas laterais é igual a 30 cm.



RONALDO INÁCIO

a) Qual é a área da base desse prisma? $225\sqrt{3}$ cm²

b) Calcule a área lateral e a área total desse prisma.
$A_\ell = 2\,700$ cm²;
$A_t = 450 \cdot (6 + \sqrt{3})$ cm²

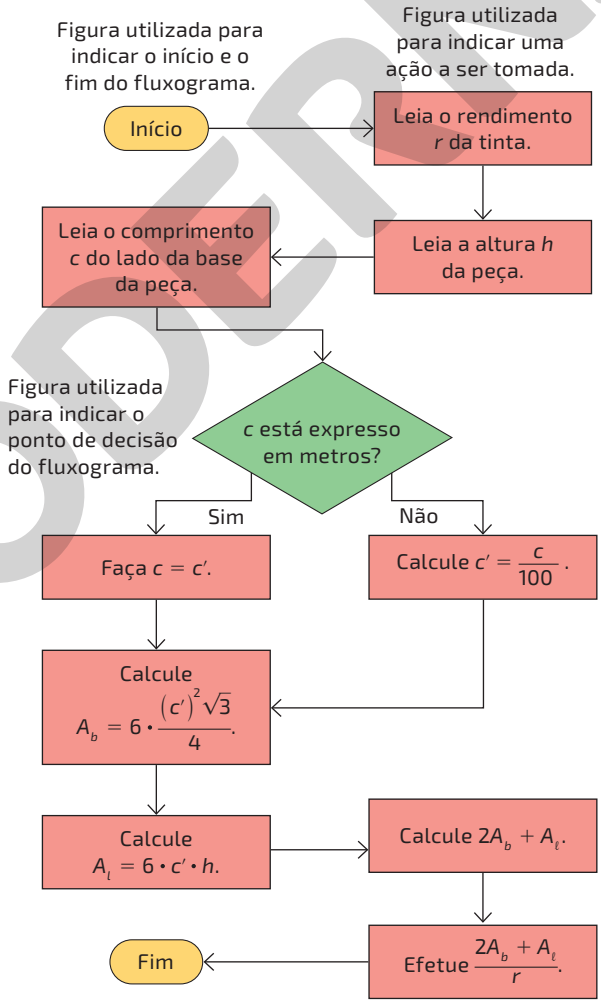
13 O seguinte problema foi proposto na aula de Matemática.

Determinar a quantidade de tinta necessária para pintar uma peça em formato de prisma regular de base hexagonal, dado:

- o rendimento da tinta em metros quadrados por litro;
- a altura da peça em metros;
- o comprimento, em metros ou em centímetros, de cada lado da base da peça.

Para resolvê-lo, Antônio construiu o seguinte fluxograma.

Em um fluxograma, cada tipo de figura possui um significado.



Utilizando o fluxograma construído por Antônio e sabendo que com 1 ℓ de tinta é possível pintar 100 m², determine a quantidade necessária de tinta para pintar uma peça em formato de prisma regular de 0,25 m de altura cuja base é um hexágono de 12 cm de lado. aproximadamente 0,0025 ℓ ou 2,5 mℓ

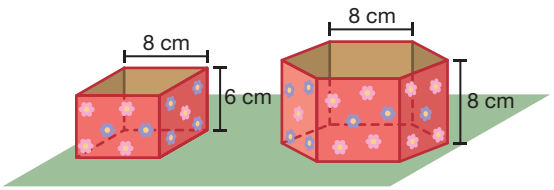
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

14 Em quantos centímetros deve ser aumentada a diagonal de um cubo cuja área total é 384 cm^2, de modo que sua área lateral aumente 144 cm^2? 3,46 cm

Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.

15 Bruna confecciona e vende embalagens para presentes. Ela recebeu uma encomenda de cinco caixas com formato de prismas regulares, sendo duas de base hexagonal e três de base quadrada. Todas as caixas serão confeccionadas com papelão reciclado, e seus exteriores, com exceção da tampa, deverão ser revestidos com um papel colorido cujo preço é R$ 3,20 o metro quadrado. Observe as dimensões de cada uma das caixas. a) caixas de base hexagonal: aproximadamente 550 cm^2; caixas de base quadrada: 256 cm^2



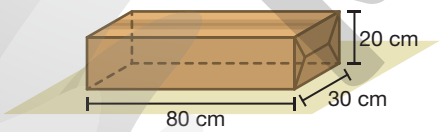
RONALDO INÁCIO

a) Determine a área de cada uma das caixas que será revestida com o papel colorido.

b) Desconsiderando desperdícios, quantos reais Bruna vai gastar com papel colorido na confecção das cinco caixas? aproximadamente R$ 0,60

No contexto

16 Nas páginas 52 e 53, vimos alguns aspectos relacionados as embalagens e seus formatos. Uma indústria embala seus produtos em caixas de papelão reciclado com formato de paralelepípedo reto retângulo, cujas dimensões estão indicadas na figura.



RONALDO INÁCIO

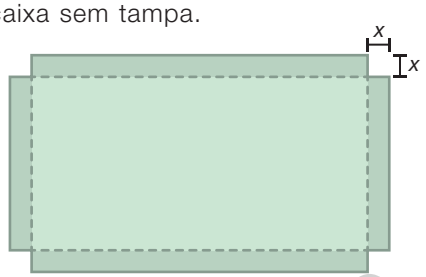
Sabendo que em certa semana foram utilizadas 20 000 dessas caixas, quantos metros quadrados de papelão, desconsiderando desperdícios, foram utilizados para confeccionar todas as caixas? 18 400 m^2

17 O quadrado do comprimento da diagonal de um prisma reto de base quadrada é igual ao triplo do quadrado do comprimento da diagonal de sua base. Sabendo que a área total desse prisma é 640 cm^2, determine:

a) o comprimento das arestas desse prisma. arestas das bases: 8 cm; arestas laterais: 16 cm

b) a área lateral desse prisma. 512 cm^2

18 Considere um pedaço retangular de cartolina com 20 cm de largura por 35 cm de comprimento. De cada "canto" dessa cartolina foi retirado um quadrado de lado x; em seguida, a cartolina foi dobrada na linha tracejada, de maneira a formar uma caixa sem tampa.

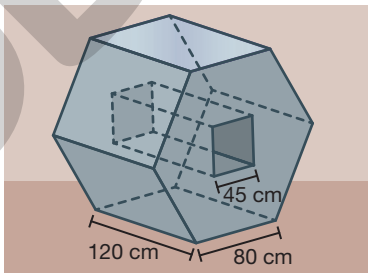


RONALDO INÁCIO

a) Calcule o valor de x, de modo que a área da superfície externa da caixa obtida seja 684 cm^2. $x = 2$ cm

b) Calcule a área da base e a área lateral da caixa obtida. área da base: 496 cm^2; área lateral: 188 cm^2

19 Uma peça, confeccionada em certa liga metálica, tem a forma de um prisma hexagonal regular com um "recorte" em forma de prisma reto de base quadrada. Em seu processo de produção, a peça teve sua superfície pintada com uma tinta anticorrosiva, cujo custo e rendimento por litro são, respectivamente, R$ 25,00 e 4 m^2.



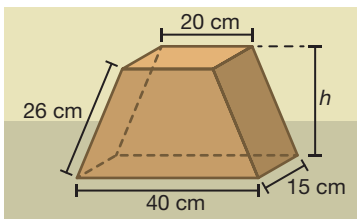
RONALDO INÁCIO

aproximadamente 108 405 cm^2 ou 10,8405 m^2

a) Qual é a área total da superfície dessa peça?

b) Quantos reais serão gastos com tinta para pintar essa peça? aproximadamente R$ 67,75

20 Utilizando 4 pedaços de papelão com forma de retângulo e 2 com forma de trapézio isósceles, Rafael confeccionou uma caixa que servirá como urna de votação em uma eleição que será realizada na escola onde ele estuda.



RONALDO INÁCIO

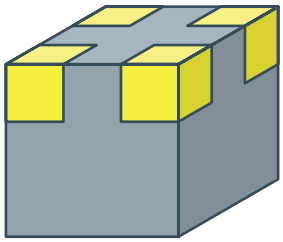
a) Nessa caixa, qual é o valor de h? 24 cm

b) Quantos centímetros quadrados de papelão foram utilizados para montar a caixa? 3 120 cm^2

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

21 Quatro peças amarelas com formato de cubos idênticos são encaixados em uma peça, formando assim uma peça cúbica maior como representado a seguir.



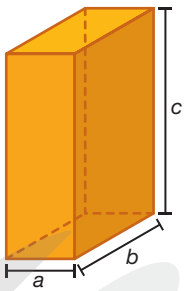
RONALDO INÁCIO

Sabendo que a área total da peça, antes de encaixar as peças amarelas, é 486 cm² e que a peça maior possui arestas com o triplo do comprimento das peças amarelas, responda às questões.

a) Qual é a razão entre a área total de cada peça amarela e a área total da peça cúbica maior? $\frac{1}{9}$

b) Calcule a área total da peça cúbica maior e a área total de cada peça amarela.
peça cúbica maior: 486 cm²; peça amarela: 54 cm²

22 A área total do paralelepípedo reto retângulo representado a seguir é 198 cm² e os lados a, b e c são dados em centímetros, tal que $b = 2a$ e $c = b + a$.



RONALDO INÁCIO

a) Quais são as dimensões desse paralelepípedo?
$a = 3$ cm, $b = 6$ cm e $c = 9$ cm

b) Calcule o comprimento da diagonal desse paralelepípedo. $3\sqrt{14}$ cm

c) Calcule a área da base e a área lateral desse paralelepípedo. área da base: 18 cm²; área lateral: 162 cm²

23 O prisma reto representado possui área total igual a 350 cm².

RONALDO INÁCIO

Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$.

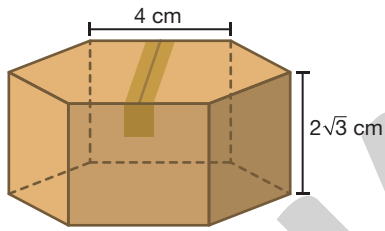
aproximadamente 8,8 cm

a) Qual é, em centímetros, a altura desse prisma?

b) Calcule a área da base e a área lateral desse prisma.
área da base: aproximadamente 43,25 cm²; área lateral: aproximadamente 264 cm²

No contexto

24 A mesma indústria mencionada na tarefa **16** utiliza embalagens com formato de prisma hexagonal regular, com duas camadas de papelão reciclado no fundo (base inferior) e nas laterais, com o objetivo de obter maior resistência em seus produtos. Porém, a tampa (base superior) é produzida com apenas uma camada. Veja as dimensões dessa embalagem.

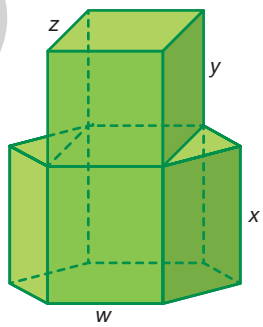


RONALDO INÁCIO

Sabendo que em determinado dia foram usados, na produção desse tipo de embalagem, sem considerar sobras e desperdícios, $168\sqrt{3}$ m² de papelão reciclado, determine quantas dessas embalagens foram confeccionadas.
10 000 embalagens

25 A peça representada a seguir é composta por duas partes: uma com formato de prisma hexagonal regular e outra com formato de paralelepípedo reto retângulo.

O item **b** da tarefa **25** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.



RONALDO INÁCIO

a) Escreva um algoritmo que possibilite determinar a área total dessa peça, em metros quadrados, dado os valores de x, y, z e w, em metros. Em seguida, organize-o em um fluxograma. Resposta no final do livro.

b) Atribua valores para x, y, z e w. Em seguida, elabore um problema envolvendo a área total dessa peça. Por fim, peça para um colega que o resolva.

26 Desafio

Sejam a, b e c, respectivamente, a altura, a largura e o comprimento, em centímetros, de um paralelepípedo reto retângulo. Sabendo que $a + b + c = 12$ e que $d^2 = 56$, em que d é o comprimento, em centímetros, da diagonal desse paralelepípedo, calcule sua área total. 88 cm²

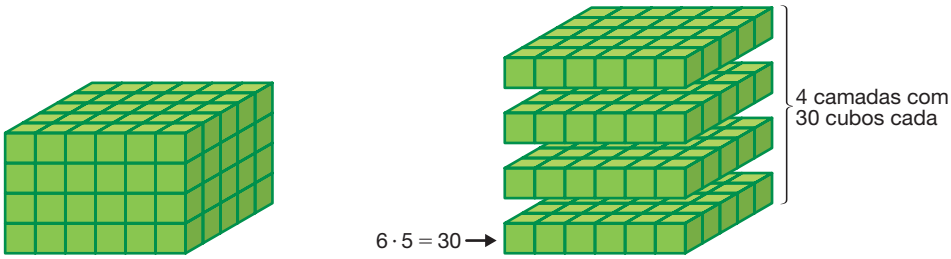
25. b) Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Volume do paralelepípedo reto retângulo

O paralelepípedo abaixo foi construído com cubos de 1 cm de aresta, isto é, cubos com 1 cm^3 de volume. O volume V desse paralelepípedo é igual à soma dos volumes dos cubos com os quais ele é formado. Para calcularmos o número de cubos e, consequentemente, o volume do paralelepípedo, multiplicamos a quantidade de cubos em cada camada pelo número de camadas.



$$V = \overbrace{6 \cdot 5}^{\text{cubos em cada camada}} \cdot \underbrace{4}_{\text{número de camadas}} = 120$$

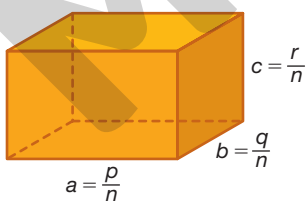
Assim, o volume do paralelepípedo é 120 cm^3.

Agora, vamos demonstrar que o volume V de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões expressas pelos números racionais a, b e c é dado por $V = a \cdot b \cdot c$.

Demonstração

Inicialmente, considere um cubo unitário, ou seja, que tem volume igual 1 u. v. (unidade de volume). Podemos decompor esse cubo em n^3 cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$ u. c. (unidades de comprimento), em que n é um número natural diferente de zero. Consequentemente, cada um desses cubinhos tem volume igual a $\frac{1}{n^3}$ u.v.

Considere agora um paralelepípedo reto retângulo de dimensões expressas pelos números racionais a, b e c. Podemos escrever esses números como fração de mesmo denominador, ou seja, $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$ e $c = \frac{r}{n}$, em que p, q, r e n são números naturais diferentes de zero.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Assim, podemos decompor esse paralelepípedo em p cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$ u. c. no comprimento, q cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$ u. c. na largura e r cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$ u. c. na altura. Consequentemente, como queríamos demonstrar, o volume V desse paralelepípedo é:

$$V = p \cdot q \cdot r \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} \cdot \frac{r}{n} = a \cdot b \cdot c$$

É possível demonstrar, porém não o faremos nesse livro, que o volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões expressas por números reais é obtido calculando-se o produto entre seu comprimento, sua largura e sua altura.

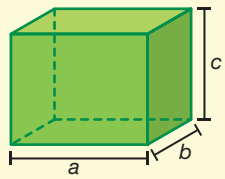
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A Escreva um algoritmo que possibilite calcular o volume de um paralelepípedo reto retângulo, dadas suas dimensões. Em seguida, organize-o em um fluxograma. Resposta no Suplemento para o professor.

O volume V de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c é:

$$V = a \cdot b \cdot c$$



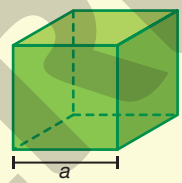
A área da base do paralelepípedo é dada por $A_b = a \cdot b$. Dessa maneira, também podemos escrever a seguinte fórmula para o volume:

$$V = A_b \cdot c$$

Para obter o volume de um cubo, multiplicamos suas dimensões. Porém, como elas são iguais, temos:

$$V = a \cdot a \cdot a \text{ ou } V = a^3$$

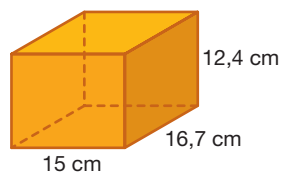
Lembre-se de que o cubo é um caso particular de paralelepípedo reto retângulo.



Exemplo

O volume V do paralelepípedo reto retângulo representado a seguir é igual a 3 106,2 cm³, pois:

$$V = 15 \cdot 16{,}7 \cdot 12{,}4 = 3\,106{,}2$$



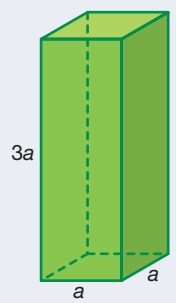
Exercícios e problemas resolvidos

R4 Um paralelepípedo reto retângulo, cuja base é um quadrado, tem a altura igual ao triplo do comprimento das arestas da base. Se o volume desse paralelepípedo é 12 288 cm³, qual é o comprimento da aresta de sua base?

Resolução

Indicando por a o comprimento das arestas da base, a altura desse paralelepípedo é $3a$. Assim, o volume V dessa figura é:

$$V = a \cdot a \cdot 3a = 3a^3$$



Substituindo V por 12 288, segue que:

$$12\,288 = 3a^3 \Rightarrow a^3 = \frac{12\,288}{3} \Rightarrow a^3 = 4\,096 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{4\,096} = 16$$

Portanto, o comprimento da aresta da base desse paralelepípedo é 16 cm.

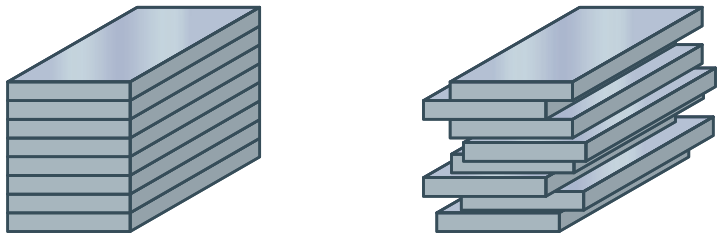
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

Princípio de Cavalieri

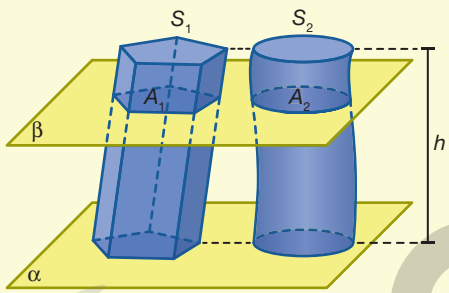
Considere algumas chapas metálicas em forma de paralelepípedo reto retângulo idênticas, empilhadas de duas maneiras diferentes, como mostram as figuras.



B Qual é a relação entre o volume desses dois empilhamentos? Os volumes são iguais. Espera-se que os alunos percebam que o volume de cada uma dessas pilhas é o mesmo, independentemente da maneira como as chapas são empilhadas.

Diante dessa situação, enunciaremos o Princípio de Cavalieri.

Considere as figuras geométricas espaciais S_1 e S_2, cuja altura h é a mesma, apoiadas em um mesmo plano horizontal α, e um plano β, paralelo a α, que determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de área A_1 e A_2. Nesse caso, se $A_1 = A_2$ para qualquer plano β, o volume de S_1 é igual ao de S_2, ou seja, $V_{S_1} = V_{S_2}$.

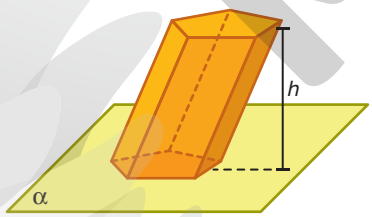


REPRODUÇÃO – BIBLIOTECA MUNICIPAL DE TRENTO, ITÁLIA

O matemático Bonaventura Cavalieri (1598-1647) nasceu em Milão, na Itália. Foi aluno de Galileu e atuou como professor na Universidade de Bolonha por quase duas décadas.

Volume de um prisma qualquer

Imagine um prisma qualquer de altura h, cuja base seja um polígono de área A contido em um plano α.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INACIO

Na imagem ao lado, a base do prisma qualquer é representada por um pentágono.

C Qual estratégia você utilizaria para calcular o volume desse prisma?

C) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que construiriam um paralelepípedo reto retângulo apoiado no plano α, ao lado do prisma, com altura h e área da base (retângulo) igual a A.

D Mostre que, para determinar o volume de um prisma qualquer, multiplicamos a área da base pela sua altura.

D) Utilizando a estratégia descrita na questão C, temos um prisma qualquer e um paralelepípedo reto retângulo apoiados em um plano α, ambos de altura h e área da base igual a A. Suponha agora um plano horizontal β, paralelo a α, que produz seções de áreas A' e A'' no prisma qualquer e no paralelepípedo, respectivamente. Como essas figuras são prismas, então uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes possuem áreas iguais, temos $A' = A = A''$. Consequentemente, pelo Princípio de Cavalieri, o paralelepípedo e o prisma qualquer possuem volumes iguais. Como estudamos anteriormente, o volume do paralelepípedo reto retângulo é igual a $A \cdot h$. Assim, o volume do prisma qualquer também é igual a $A \cdot h$, ou seja, o produto da área da base por sua altura.

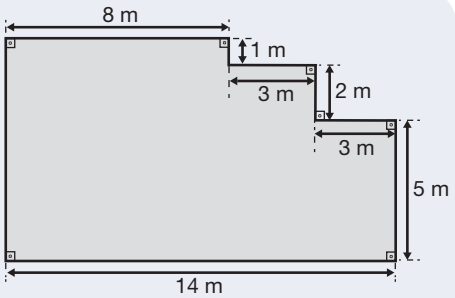
O volume de um prisma é obtido multiplicando a área da base pela sua altura.

E Qual é o volume de um prisma de altura 4 cm cuja base é um hexágono regular de lado 5 cm? $150\sqrt{3}\ cm^3$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R5 (Enem, 2019) Um mestre de obras deseja fazer uma laje com espessura de 5 cm utilizando concreto usinado, conforme as dimensões do projeto dadas na figura. O concreto para fazer a laje será fornecido por uma usina que utiliza caminhões com capacidades máximas de 2 m³, 5 m³ e 10 m³ de concreto.



Qual é a menor quantidade de caminhões, utilizando suas capacidades máximas, que o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto para fazer a laje?

a) Dez caminhões com capacidade máxima de 10 m³.

b) Cinco caminhões com capacidade máxima de 10 m³.

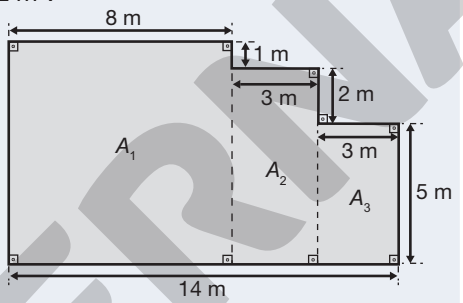
c) Um caminhão com capacidade máxima de 5 m³.

d) Dez caminhões com capacidade máxima de 2 m³.

e) Um caminhão com capacidade máxima de 2 m³.

Resolução

De acordo com as informações apresentadas no problema, a laje tem formato de prisma reto de altura 5 cm, cuja base pode ser decomposta em três retângulos, conforme apresentado, os quais nomeamos A_1, A_2 e A_3.



Agora, calculamos a área A desse polígono.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 8 \cdot (5 + 2 + 1) + 3 \cdot (5 + 2) + 3 \cdot 5 = 64 + 21 + 15 = 100$$

Logo, a área da base do prisma que representa a laje é 100 m².

Agora, convertemos a altura em metros. Assim:

$$5\text{ cm} = \frac{5}{100}\text{ m} = 0{,}05\text{ m}$$

Na sequência, calculamos o volume V do prisma que representa a laje. Desse modo:

$$V = 100 \cdot 0{,}05 = 5$$

Logo, o volume é 5 m³ e, consequentemente, o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto um caminhão com capacidade máxima de 5 m³. Portanto, a alternativa correta é a **c**.

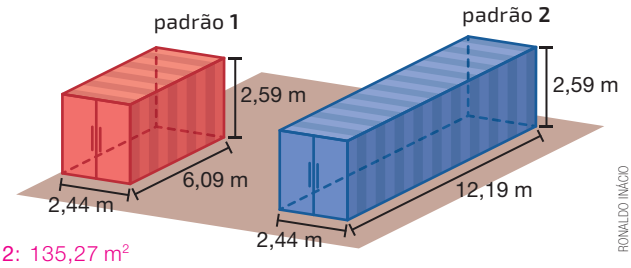
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

27 Observe ao lado as dimensões dos dois padrões mais populares de contêineres.



RONALDO INÁCIO

a) Qual é a capacidade aproximada dos contêineres de padrões 1 e 2?
padrão 1: 38,49 m³; padrão 2: 77 m³

b) Determine a área aproximada da superfície externa dos contêineres de padrões 1 e 2. padrão 1: 73,9 m²; padrão 2: 135,27 m²

Para resolver esta tarefa, considere que os contêineres têm formato de paralelepípedo reto retângulo e desconsidere sua espessura no cálculo do volume.

28 A área da superfície de um cubo é 384 cm². Em quantos centímetros deve ser aumentada cada aresta desse cubo para que seu volume passe a ser 1 728 cm³? 4 cm

29 (Enem, 2015) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocada na embalagem é:

a) 450 **b)** 500 **c)** 600 **d)** 750 **e)** 1 000

alternativa **c**

Se necessário, ao trabalhar com a tarefa **29**, informe aos alunos que paralelepípedo retangular reto é o mesmo que paralelepípedo reto retângulo.

30 Em um recipiente com forma de paralelepípedo reto retângulo, cujas medidas internas da largura, do comprimento e da altura são respectivamente 10 cm, 12 cm e 14 cm, foi colocada água até que esta atingisse 8 cm de altura. Em seguida, foi colocado dentro desse recipiente um cubo sólido que ficou totalmente submerso, fazendo o nível da água subir 1,8 cm.

a) Qual é a capacidade desse recipiente em centímetros cúbicos? 1 680 cm^3

b) Qual é o volume de água dentro do recipiente? 960 cm^3

c) Qual é o comprimento da aresta do cubo colocado no recipiente? 6 cm

31 Uma galeria comercial foi dividida em 10 salas retangulares, todas do mesmo tamanho, cada uma com 4 m de largura e 6 m de comprimento. O piso dessa galeria é feito de concreto com 15 cm de espessura. Quantos metros cúbicos de concreto foram utilizados no piso da galeria? 36 m^3

32 Um líquido, que ocupa uma altura de 50 cm em um recipiente A, de forma cúbica, será despejado em um recipiente B, também de forma cúbica, cujo comprimento da diagonal é o dobro do comprimento da diagonal de A.

a) Calcule a razão entre o volume de A e o de B. $\frac{1}{8}$

b) Que altura o líquido ocupará no recipiente B? 12,5 cm

33 Um paralelepípedo reto retângulo tem dimensões a, b e c com $a < b < c$. Diminuindo em 20% a medida de a e mantendo a medida de b, o que deve ser feito com a medida de c para que o volume do paralelepípedo não seja alterado?

A medida de c deve ser aumentada em 25%.

34 No projeto de construção de uma ponte está prevista a instalação de 8 colunas de sustentação, todas com a forma de um prisma regular hexagonal, com 2 m de aresta da base e 12 m de altura. Sabendo que o volume de cada coluna é composto de 80% de concreto e 20% de ferragem, responda às questões.

a) Quantos metros cúbicos de volume tem cada uma das colunas? aproximadamente 124,7 m^3

b) Qual é o volume de concreto utilizado para construir as 8 colunas? 798,08 m^3

35 De um reservatório com formato cúbico, que estava totalmente cheio, foram retirados 2 700 ℓ de água, fazendo o nível da água baixar 30 cm. Qual é a capacidade total, em litros, desse reservatório? 27 000 ℓ

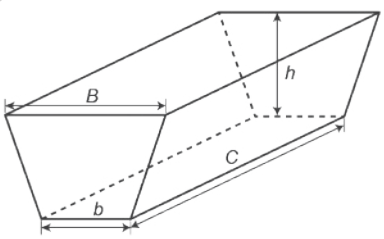
36 Um prisma hexagonal regular tem todas as arestas congruentes e área total igual a $96\left(2\sqrt{3}+4\right)$ cm^2.

a) Quais são os comprimentos das arestas desse prisma? 8 cm

b) Calcule o volume desse prisma. $768\sqrt{3}$ cm^3

37 Certo líquido, que ocupava 75% da capacidade de um recipiente cúbico, foi despejado em um recipiente com forma de prisma triangular regular, atingindo 40% da sua altura. Qual é a capacidade do recipiente em forma de prisma triangular, sabendo que a do recipiente cúbico é de 4 ℓ? 7,5 ℓ

38 (Enem, 2014) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Legenda:
b – largura do fundo
B – largura do topo
C – comprimento do silo
h – altura do silo

REPRODUÇÃO

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA. *Gado de corte*. Disponível em: <https://www.embrapa.br/gado-de-corte>. Acesso em: 1º ago. 2012. (adaptado)

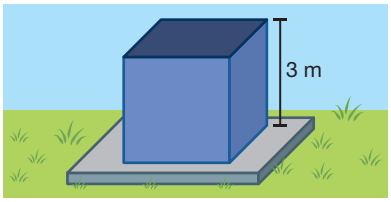
Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é: alternativa **a**

a) 110 **b)** 125 **c)** 130 **d)** 220 **e)** 260

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

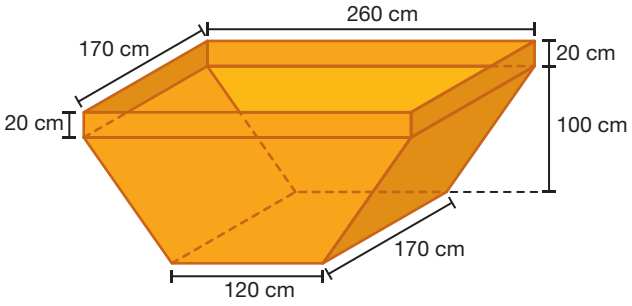
EM DEFESA

39 Uma bomba-d'água enche uma caixa cúbica como da figura a seguir em 3 h 45 min. Calcule o tempo necessário para que essa mesma bomba encha completamente uma caixa com formato de paralelepípedo reto retângulo de dimensões 2 m, 5,4 m e 3 m. 4 h 30 min



RONALDO INÁCIO

40 Lucas contratou um serviço de remoção de entulhos com caçambas estacionárias durante uma reforma em sua casa. A quantidade de entulho gerado na reforma foi transportada em quatro caçambas com forma e dimensões representadas a seguir.



RONALDO INÁCIO

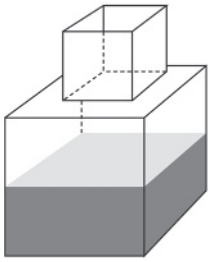
Note que a caçamba pode ser decomposta em duas partes com formas de paralelepípedo reto retângulo e prisma reto cujas bases são trapézios isósceles.

Considerando que não possa ser colocado entulho acima da borda da caçamba, quantos metros cúbicos de entulho, no máximo, foram gerados e removidos na reforma da casa de Lucas? aproximadamente 16,46 m³

41 (Enem, 2014) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8
b) 10
c) 16
d) 18
e) 24



REPRODUÇÃO

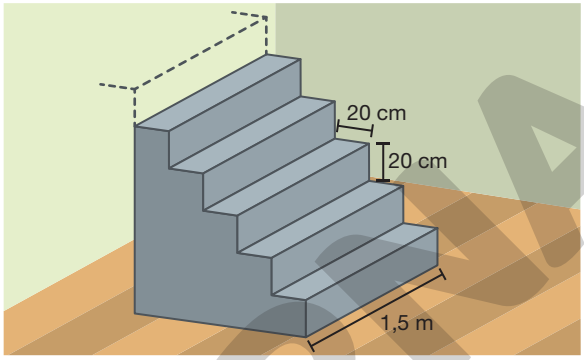
alternativa b

Ao trabalhar com a tarefa **41** informe aos alunos que, no enunciado, quando é dito medida da aresta, o problema se refere à medida do comprimento da aresta.

42 A base de um prisma reto, cujo volume é 640 cm³, tem a forma de um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $8\sqrt{2}$ cm.

a) Quantos centímetros de altura tem esse prisma? 20 cm
b) Calcule a área total desse prisma. aproximadamente 610,27 cm²

43 A figura representa parte de uma escada construída com blocos de concreto na forma de prisma reto com 1,5 m de altura, cuja base é um quadrado de lado 20 cm.



RONALDO INÁCIO

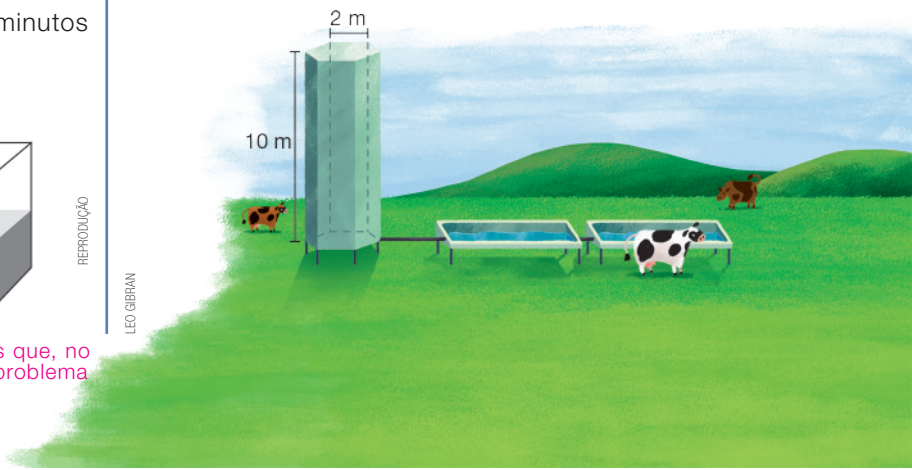
a) Quantos blocos são necessários para construir uma escada como essa com 20 degraus? 210 blocos
b) Qual é o volume de concreto necessário para construir a escada descrita no item a? 12,6 m³

44 Uma piscina deve ser projetada de maneira a ter o maior volume possível e forma de prisma reto retangular com dimensões iguais a x m, $(30 - x)$ m e 2,5 m.

a) Quais devem ser as dimensões dessa piscina? 2,5 m, 15 m e 15 m
b) De quantos metros cúbicos será a capacidade dessa piscina? 562,5 m³

45 Um tanque em forma de prisma hexagonal regular, conforme representado a seguir, é utilizado como reservatório de água e abastece bebedouros para o gado em uma fazenda. Nesses bebedouros, são consumidos diariamente cerca de 10 000 ℓ de água.

Estando inicialmente cheio, durante quantos dias a água do reservatório consegue suprir os bebedouros? aproximadamente 10 dias



LEO GIBRAN

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

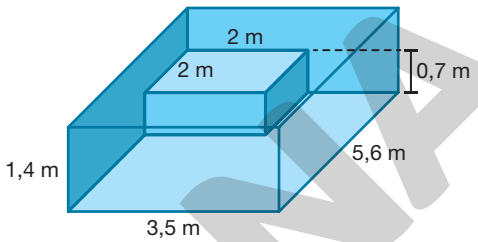
46 Calculadora

Um grupo de voluntários decidiu revitalizar uma praça no bairro em que moram. Para isso, além de reparos nas estruturas existentes, eles decidiram construir alguns bancos de concreto, oferecendo mais conforto para quem frequenta o espaço. Optou-se por um modelo de banco constituído de um assento apoiado em dois blocos idênticos. O assento é um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 1,4 m, 0,5 m e 0,1 m. Cada apoio é um prisma de altura 0,4 m, cuja base é um triângulo equilátero de lado 0,2 m. A superfície dos apoios em contato com o chão e o assento são as bases dos prismas. (Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.)

a) Sabendo que eles possuem material para produzir 2 m^3 de concreto, determine quantos bancos desse modelo será possível construir. 23 bancos

b) Para a pintura dos bancos, são necessárias 3 demãos de certa tinta. Sabe-se que uma lata dessa tinta é suficiente para pintar 45 m^2. Quantas latas dessa tinta devem ser adquiridas para a pintura da quantidade de bancos indicada por você no item a? 4 latas

47 Um condomínio pretende construir uma piscina com formato de paralelepípedo reto retângulo. Um morador sugeriu que houvesse uma elevação em um dos cantos da parte interna da piscina, conforme representado ao lado.



RONALDO INÁCIO

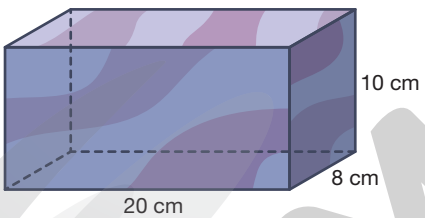
Para fundamentar sua sugestão, o morador apresentou a variação na área interna da base da piscina, em metros quadrados, e na capacidade máxima, em metros cúbicos.

a) Considerando que os cálculos realizados pelo morador estão corretos, quais foram os resultados apresentados por ele? Variação de 0 m^2 na área interna e redução de 2,8 m^3 na capacidade máxima.

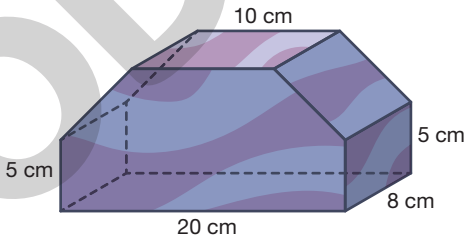
b) Caso pudesse opinar a respeito da construção dessa piscina, você aceitaria a sugestão do morador? Escreva um argumento que fundamente sua opinião.
Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: sim, pois não gera aumento de custos com revestimento e diminui o volume de água que deve ser tratada, reduzindo, assim, custos; não, pois reduz o espaço disponível para o uso da piscina.

No contexto

48 Certo produto era vendido em uma embalagem com formato de paralelepípedo reto retângulo. Ao perceber que havia espaços vazios na embalagem, a empresa responsável alterou o formato para o de um prisma reto, cuja base é um hexágono.



Embalagem antiga (formato de paralelepípedo reto retângulo).



Nova embalagem (formato de prisma reto).

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Sabendo que a base da nova embalagem pode ser decomposta em um retângulo e em um trapézio isósceles com 5 cm de altura, determine a redução na área da superfície e no volume da embalagem desse produto. (Considere $\sqrt{2} = 1{,}41$.)
área: aproximadamente 97,2 cm^2, volume: 200 cm^3

49 Qual é o comprimento da aresta de um cubo que possui volume igual ao de um prisma reto com 20 cm de altura, cuja base é um pentagono de área igual a 25,6 cm^2? 8 cm

No contexto

A tarefa 51 propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

50 A embalagem de certo produto terá formato de prisma regular, cuja base é um triângulo com o comprimento da altura igual a $2\sqrt{3}$ cm. Sabendo que o comprimento da aresta da base do prisma que representa essa embalagem é x cm e sua altura é $4x$ cm, determine o volume dessa embalagem. (Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.) aproximadamente 108,8 cm^3

51 Esboce uma peça composta por dois prismas retos de sua escolha. Em seguida, de acordo com a peça esboçada, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados sobre volume. Por fim, peça para que um colega o resolva. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5 Prismas na natureza

Calçada dos Gigantes

Entre os muitos fenômenos que mesclam natureza e Matemática, a Calçada dos Gigantes (em inglês, Giant's Causeway) é dos exemplos mais populares. Localizada ao norte da Irlanda do Norte, essa estrutura é composta por aproximadamente 40 000 colunas de basalto que, em sua maioria, lembram prismas hexagonais de até 25 m de altura. Apesar de a grande maioria das colunas ter formato hexagonal na base, são observados também formatos que lembram polígonos de 4, 5, 7 e 8 lados.

A área que compõe a Calçada dos Gigantes e sua costa foi a primeira da Irlanda do Norte a se tornar um patrimônio cultural da Unesco, sendo um dos pontos turísticos mais populares do país, tanto pela beleza natural como pelo fato de ser um local onde a mitologia e a ciência se encontram.

BNCC
• CE2CNT

É crédito de William King, arcebispo anglicano de Dublin, a descoberta da Calçada dos Gigantes em sua passagem pela região em 1692. Apesar de a região ser conhecida dos moradores, naquela época era normal que uma descoberta fosse atribuída à primeira pessoa que publicasse sobre o tema.

CHON KIT LEONG/ALAMY/FOTOARENA

Parte da Calçada dos Gigantes, na Irlanda do Norte, em 2017.

FOTOMONTAGEM DE GUSTAVO PEDROSA.
FOTOS: 1.S-F/SHUTTERSTOCK; 2.LEELARYONKUL/SHUTTERSTOCK; 3.MARIMARIKO/SHUTTERSTOCK; 4.DOTTED YETI/SHUTTERSTOCK; 5.LACHLAN VON NUBIA/SHUTTERSTOCK; 6.NATTHAPONG PONEPORMMARAT/SHUTTERSTOCK; 7.REALITYIMAGES/SHUTTERSTOCK; 8.MYKHAILO SKOP/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Diz a lenda que a calçada foi construída pelo gigante norte-irlandês Finn McCool para lutar contra o gigante escocês Benandonner do outro lado do mar. A calçada ligava a costa da Irlanda do Norte à costa da Escócia, usando as colunas de basalto como pavimento. Antes que houvesse o confronto, Finn enganou Benandonner fazendo-o acreditar que era muito maior do que realmente era. Sentindo-se ameaçado, Benandonner fugiu correndo de volta à Escócia, destruindo o caminho que ligava os dois países.

Esse mito é apoiado por certas formações encontradas na Calçada dos Gigantes, como a bota do gigante, uma pedra parecida com uma bota, e também pelo fato de existir uma formação semelhante de colunas de basalto na costa da Escócia.

Apesar da lenda, estudos geológicos apontam que essa estrutura foi formada há mais de 60 milhões de anos, produto de constantes erupções originadas de uma fissura submersa. A Calçada dos Gigantes é o resultado do resfriamento da lava proveniente dessas erupções, que levou o basalto a se contrair lateralmente, resultando em um padrão quase regular de fissuras e dando forma às colunas, que se assemelham a prismas.

SCENICIRELAN/CHRISTOPHER HILL PHOTOGRAPHIC/ALAMY/FOTOARENA

Pedra conhecida como Bota do Gigante, na Irlanda do Norte, em 2010.

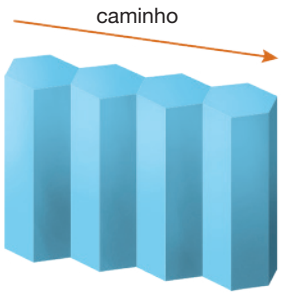
8

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Considere uma coluna de basalto com formato de prisma regular de base hexagonal, cujo comprimento da aresta da base é 28 cm e da altura é 12 m. Calcule a massa, em quilogramas, dessa coluna, considerando que a densidade do basalto é 3 g/cm^3. aproximadamente 7 332,81 kg

A densidade de um material é a razão entre sua massa e seu volume. Um cubo de basalto com 1 cm de aresta, por exemplo, tem 3 g de massa.

B Suponha que fosse possível construir um caminho em linha reta com colunas em basalto entre a Irlanda do Norte e a Escócia. Sabendo que esse caminho teria 19 km, que é aproximadamente a menor distância entre esses países, quantas colunas, como a indicada na questão A, seriam necessárias? Para responder a essa questão, considere as colunas organizadas como na imagem ao lado e $\sqrt{3} = 1{,}73$. 39 224 colunas



HELOÍSA PINTARELLI

Lembre-se de que para determinar a altura h de um triângulo equilátero, podemos utilizar a fórmula $h = \frac{\ell \cdot \sqrt{3}}{2}$, em que ℓ é o comprimento do lado do triângulo.

C Junte-se a um colega e pesquisem outras estruturas naturais nas quais seja possível observar padrões semelhantes aos da Calçada dos Gigantes. Depois, compartilhe com os colegas e o professor as informações obtidas na pesquisa. Resposta pessoal.

7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6 Pirâmides

El Castillo de Chichén Itzá

A civilização maia viveu em florestas tropicais nas regiões onde, atualmente, localizam-se o sul do México (mais especificamente a Península de Yucatán) e os países Guatemala e Honduras. O termo "maias" refere-se, na verdade, a um conglomerado de cidades-estado, constituídas a partir da emigração de tribos procedentes de regiões altiplânicas. Assim, apesar de abarcar uma diversidade de tradições, culturas e grupos étnicos, essas populações compartilham heranças culturais e linguísticas.

Fundada em meados do século VI d.C., a cidade de Chichén Itzá era um centro cultural e religioso do povo maia. Atualmente, considerada uma das sete maravilhas do mundo moderno, é destino turístico de milhares de pessoas. Algo que, certamente, atrai os visitantes, são as ruínas do El Castillo (O Castelo), também chamada pirâmide de Kukulcán, construção mais famosa da cidade maia.

BNCC

- EM13MAT309
- EM13MAT504

Atualmente, as ruínas da cidade formam um grande sítio arqueológico. El Castillo está localizado na praça principal da antiga cidade de Chichén Itzá.

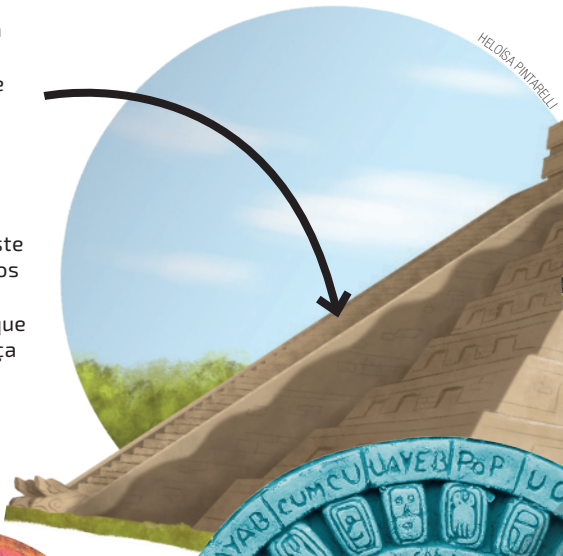
No topo de El Castillo, há um templo dedicado à divindade Quetzalcóatl.

El Castillo tem fachadas posicionadas de acordo com os pontos cardeais (norte, sul, leste e oeste), e uma escadaria com 91 degraus. Incluindo os degraus do piso superior, esse templo totaliza 365 degraus, quantidade de dias do calendário solar.

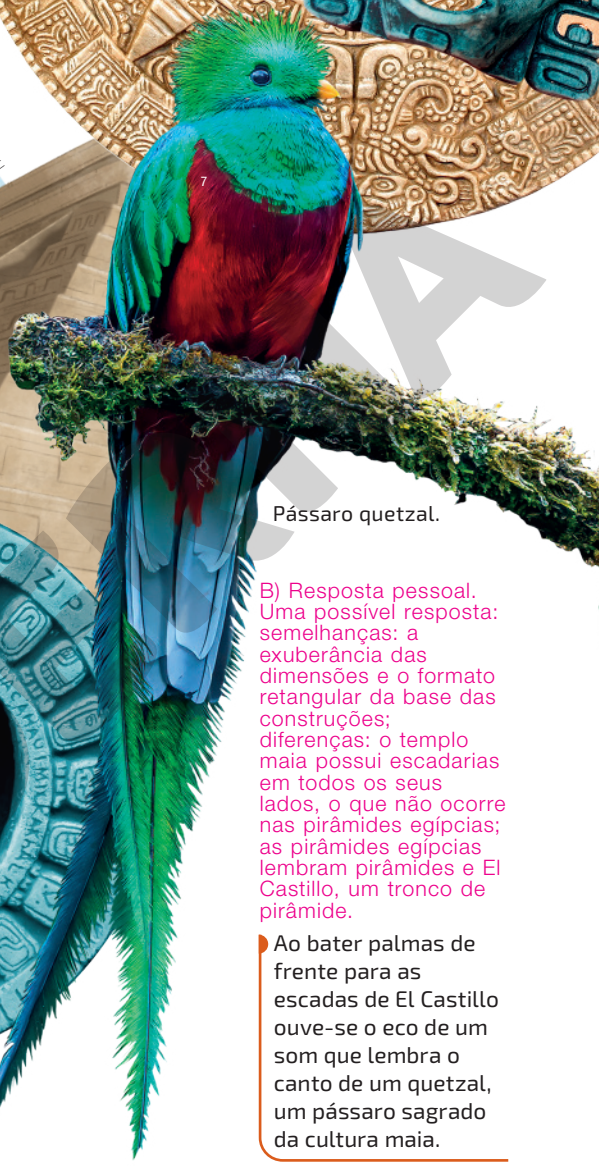
FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.DANIELA CONSTANTINESCU/ SHUTTERSTOCK; 2.NATA LIMA/ SHUTTERSTOCK; 3.DOWRAIK/ SHUTTERSTOCK; 4.GERASIMOV SERGEI/ SHUTTERSTOCK; 5.ALEXANDER SVIRIDOV/ SHUTTERSTOCK; 6.NATALI GLADO/ SHUTTERSTOCK; 7.VACLAV SEBEK/ SHUTTERSTOCK; 8.DANIELA CONSTANTINESCU/SHUTTERSTOCK; 9.ROMANTSOVA OLGA/SHUTTERSTOCK

MODERNA

Nos equinócios de primavera e de outono muitos turistas são atraídos a Kukulcán para ver a luz do Sol desenhando a sombra de uma serpente de aproximadamente 33 m nas escadarias da pirâmide. Isso ocorre porque a luz solar que incide na fachada noroeste reflete triângulos entre os degraus, compondo o corpo de uma serpente que se completa com a cabeça esculpida em pedra na base da pirâmide.



HELOÍSA PINTARELLI



Pássaro quetzal.

Diferentemente das pirâmides egípcias, que serviram como túmulo para os faraós, as pirâmides maias foram construídas com a finalidade de servirem como templos religiosos. Internamente, havia escadas e plataformas para levar as pessoas à parte superior, mais especificamente, a um pequeno espaço localizado no topo dos templos, que era frequentado apenas pelo rei, sua família e alguns súditos.

B) Resposta pessoal. Uma possível resposta: semelhanças: a exuberância das dimensões e o formato retangular da base das construções; diferenças: o templo maia possui escadarias em todos os seus lados, o que não ocorre nas pirâmides egípcias; as pirâmides egípcias lembram pirâmides e El Castillo, um tronco de pirâmide.

Ao bater palmas de frente para as escadas de El Castillo ouve-se o eco de um som que lembra o canto de um quetzal, um pássaro sagrado da cultura maia.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Faça uma pesquisa para conhecer outros aspectos culturais do povo maia. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos apresentem, por exemplo, informações a respeitos dos costumes, ritos e hábitos desse povo.

B Faça uma pesquisa de imagens de pirâmides egípcias. Em seguida, estabeleça semelhanças e diferenças entre elas e El Castillo.

C O templo El Castillo se assemelha à uma figura geométrica espacial. Quantos vértices, arestas e faces tem essa figura? Espera-se que os alunos respondam que a figura tem 8 vértices, 12 arestas e 6 faces.

Nas próximas páginas, estudaremos outros poliedros: a **pirâmide** e o **tronco de pirâmide**, poliedro ao qual o templo El Castillo se assemelha. Além disso, calcularemos a **área da superfície** e o **volume** dessas figuras.

As pirâmides

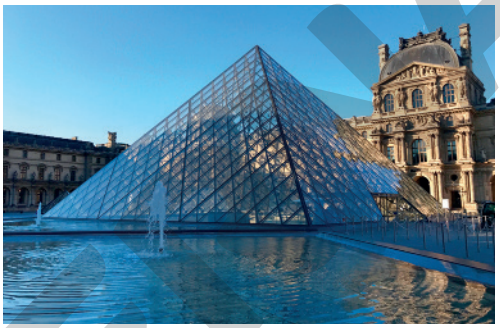
Agora, estudaremos as pirâmides, que, como sabemos, constituem outro tipo de poliedro. Veja a seguir uma embalagem e algumas construções que lembram pirâmides.

CHONGHA/SHUTTERSTOCK

Pirâmides de Gizé, no Cairo, Egito, em 2020.

ALEKSANDR ADLER/SHUTTERSTOCK

Embalagem de presente.



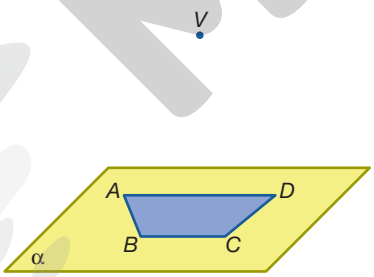
TODAMO/SHUTTERSTOCK

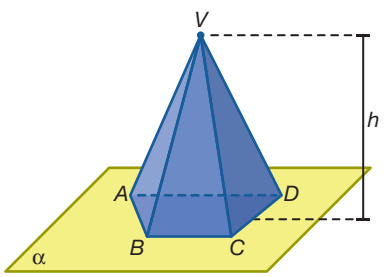
Museu do Louvre, em Paris, França, em 2019.

Para definir uma pirâmide, considere um plano α, um polígono convexo $A_1A_2...A_n$ e um ponto V não pertencente ao plano. Dois vértices consecutivos de $A_1A_2...A_n$ determinam com V um triângulo. A união de todos esses triângulos juntamente com o polígono $A_1A_2...A_n$ é chamada **pirâmide de base** $A_1A_2...A_n$ e **vértice** V.

Os segmentos $\overline{A_1V}$, $\overline{A_2V}$, ..., $\overline{A_nV}$ são chamados **arestas laterais** e os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_nA_1}$, **arestas da base**. Já os triângulos $A_1A_2V, A_2A_3V, ..., A_nA_1V$ são chamados **faces laterais**.

Supondo o polígono convexo $ABCD$ contido em α e o ponto V não pertencente ao plano, temos:





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Nessa pirâmide, segue que:

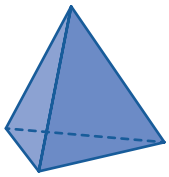
- a **base** é o polígono $ABCD$.
- o **vértice da pirâmide** é o ponto V.
- as **arestas laterais** são $\overline{AV}$, $\overline{BV}$, $\overline{CV}$ e $\overline{DV}$.
- as **arestas da base** são $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.
- as **faces laterais** são os triângulos ABV, BCV, CDV e ADV.
- a **altura** é a distância h, entre o plano α e o vértice V.

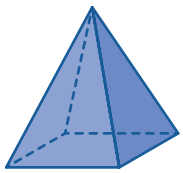
A altura de uma pirâmide é a distância entre o vértice da pirâmide e o plano que contém sua base.

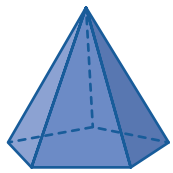
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

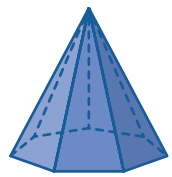
MODELA

Uma pirâmide pode ser denominada de acordo com sua base. Se a base é um triângulo, a pirâmide é **triangular**; se a base é um quadrilátero, a pirâmide é **quadrangular**; e assim por diante. Veja alguns exemplos:


pirâmide triangular


pirâmide quadrangular

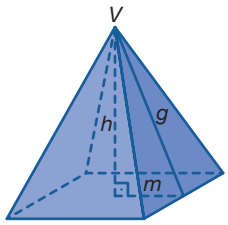

pirâmide pentagonal


pirâmide heptagonal

Lembre os alunos de que todo polígono regular pode circunscrever uma circunferência e que o raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular corresponde ao apótema do polígono.

Uma pirâmide é dita **regular** quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice no plano que contém sua base coincide com o centro do polígono da base. Em toda pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes. Além disso, o apótema do polígono da base é o **apótema da base**, e a altura de uma face lateral é o **apótema da pirâmide**.

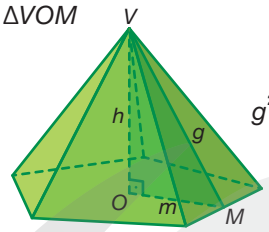
O centro de um polígono regular é o centro das circunferências inscritas e circunscritas nesse polígono.



m: comprimento do apótema da base
g: comprimento do apótema da pirâmide
h: altura da pirâmide

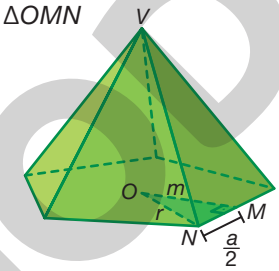
Em uma pirâmide regular, podemos destacar quatro triângulos retângulos e determinar algumas relações entre o comprimento de seus lados. Indicando por L, a, r, g, m e h, respectivamente, o comprimento da aresta lateral, da aresta da base, do raio da circunferência que circunscreve a base, do apótema da pirâmide, do apótema da base e a altura, temos:

- ΔVOM



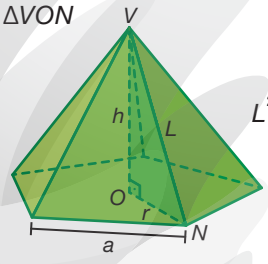
$$g^2 = m^2 + h^2$$

- ΔOMN



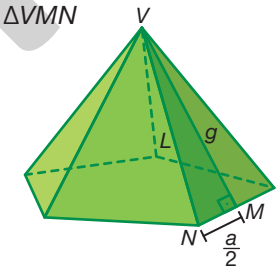
$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2$$

- ΔVON



$$L^2 = r^2 + h^2$$

- ΔVMN



$$L^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + g^2$$

Como exemplo, destacamos os quatro triângulos retângulos em uma pirâmide pentagonal regular. Nessa pirâmide, *O* é o centro do polígono da base.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Área da superfície de uma pirâmide

Assim como nos prismas, em uma pirâmide:

- a **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as suas faces laterais, sendo a área dessa superfície a área lateral da pirâmide $\left(A_\ell\right)$;
- a **área da base** corresponde à área do polígono que é a base da pirâmide $\left(A_b\right)$;
- a **superfície total** corresponde à reunião da superfície lateral com a base, sendo a área dessa superfície a área total da pirâmide $\left(A_t\right)$.

Assim, a área total de uma pirâmide corresponde à área lateral mais a área da base, isto é: $A_t = A_\ell + A_b$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

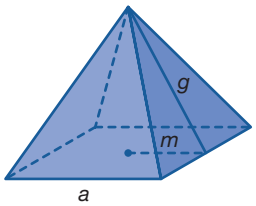
MODERNA

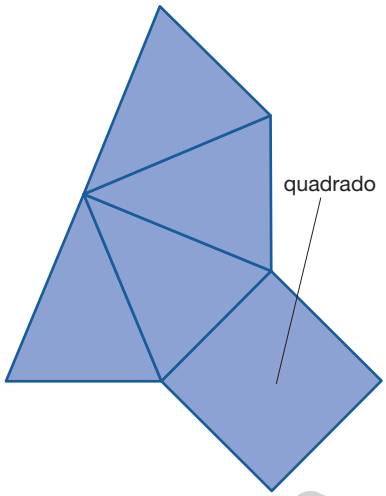
Explique aos alunos que é possível compor outras planificações desta pirâmide.

Veja a representação de uma pirâmide regular e sua planificação.

Nesse caso, a área total da pirâmide é dada pela área lateral, que é igual a quatro vezes a área de uma face (triângulo isósceles), mais a área da base (quadrado).

$$A_t = A_\ell + A_b$$
$$A_t = 4 \cdot \frac{ag}{2} + a^2$$
$$A_t = 2ag + a^2$$





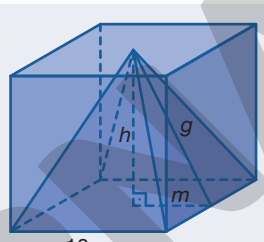
Exercícios e problemas resolvidos

R1 A figura ao lado apresenta uma pirâmide quadrangular regular inscrita em um cubo de aresta 10 cm, de modo que a base e o vértice da pirâmide estão contidos nas bases do cubo. Em relação a essa pirâmide, calcule:

a) a altura.

b) o comprimento do apótema da base.

c) o comprimento do apótema da pirâmide.

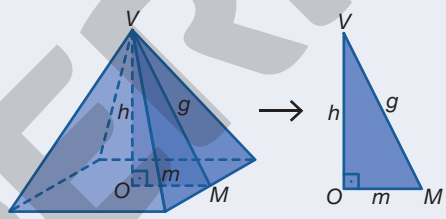


Resolução

a) A distância entre o vértice e a base da pirâmide corresponde ao comprimento da aresta do cubo. Logo, $h = 10$ cm.

b) O apótema da base da pirâmide e do cubo são coincidentes. Logo, $m = 5$ cm.

c) O apótema da base, a altura e o apótema da pirâmide formam, nessa ordem, os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo VOM, conforme a figura.



$$g^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 10^2 \Rightarrow g^2 = 125 \Rightarrow g = 5\sqrt{5}$$

Temos $g = 5\sqrt{5}$, pois $g > 0$.

Portanto, $g = 5\sqrt{5}$ cm.

R2 O apótema de uma pirâmide hexagonal regular tem $4\sqrt{3}$ cm de comprimento, e a aresta da base, 4 cm. Calcule:

a) a área da base. b) a área lateral. c) a área total.

Resolução

a) A base hexagonal pode ser decomposta em 6 triângulos equiláteros de lado 4 cm. Assim:

$$A_b = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$$

Portanto, a área da base é $24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

b) A superfície lateral é formada por 6 triângulos isósceles de base 4 cm e altura $4\sqrt{3}$. Assim:

$$A_\ell = 6 \cdot \left(\frac{4^2\sqrt{3}}{2}\right) = 48\sqrt{3}$$

Logo, a área lateral é $48\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

c) A área total da pirâmide é dada por:

$$A_t = A_\ell + A_b = 48\sqrt{4} + 24\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$$

Portanto, a área total é $72\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODELO

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Qual relação existe entre o número de lados do polígono da base da pirâmide e o número:

- total de arestas da pirâmide? Respostas no final do livro.
- de faces da pirâmide?

2 Considere uma pirâmide hexagonal regular de aresta 4 cm. Sabendo que essa pirâmide tem 12 cm de altura, determine o comprimento:

a) do raio da base. 4 cm

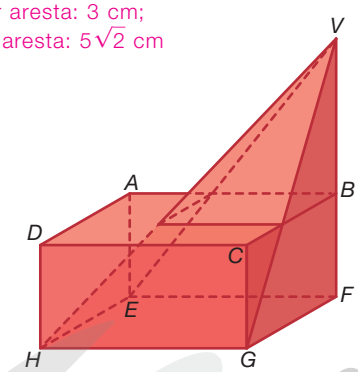
b) da aresta lateral. $4\sqrt{10}$ cm

c) do apótema da base. $2\sqrt{3}$ cm

d) do apótema da pirâmide. $2\sqrt{39}$ cm

3 Considere o paralelepípedo *ABCDEFGH*, com $GH = 4$ cm, $AD = 3$ cm e $CG = 2$ cm. Ao traçarmos o segmento $\overline{BV}$ com 3 cm, perpendicular ao plano que contém a face *ABCD*, e os segmentos $\overline{EV}$, $\overline{GV}$ e $\overline{HV}$, obtemos uma pirâmide de base quadrangular. Determine o comprimento da menor e da maior aresta dessa pirâmide.

menor aresta: 3 cm;
maior aresta: $5\sqrt{2}$ cm



RONALDO INÁCIO

4 Uma pirâmide quadrangular regular tem em sua base uma circunferência inscrita de raio 2 cm. Qual é o comprimento do raio de uma circunferência que circunscreve a base dessa pirâmide? $2\sqrt{2}$ cm

5 Em geral, os dados têm forma de poliedros com gravações em suas faces, sendo muito utilizados para gerar resultados aleatórios em jogos tradicionais de tabuleiro ou em jogos de RPG (*Role-Playing Game*). Considere um dado com formato de tetraedro regular, cuja soma dos comprimentos das arestas é 12 cm. Em relação a esse dado, calcule:

a) a área lateral. $3\sqrt{3}$ cm²

b) a área total. $4\sqrt{3}$ cm²

TIMOJUO/SHUTTERSTOCK

Dado com formato de tetraedro regular.

6 Se uma pirâmide quadrangular regular tem 10 dm de altura e apótema da base com 5 dm de comprimento, então qual é:

a) o comprimento da aresta da base? 10 dm

b) o comprimento do raio da circunferência que circunscreve a base? $5\sqrt{2}$ dm

c) a área da base? 100 dm²

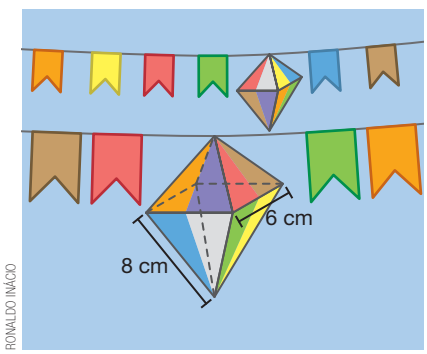
d) a área total? $100 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$ dm²

7 Considerando uma pirâmide hexagonal regular com área total de $24\left(4 + \sqrt{3}\right)$ cm², cuja circunferência que circunscreve a base tem raio com 4 cm de comprimento, calcule o comprimento do apótema dessa pirâmide. 8 cm

8 Os incêndios provocados por balões, principalmente em épocas de festa junina, causam vários prejuízos à natureza e à sociedade. Quando atingem certa altura, os balões saem do controle dos "baloeiros" e entram em correntes de ar que os levam para locais imprevisíveis, podendo cair sobre florestas, casas e até provocar a queda de aeronaves. Esses acidentes vêm diminuindo desde 1998, quando a legislação classificou a soltura de balões como crime ambiental. Portanto, qualquer cidadão que fabricar, vender, transportar ou soltar balões que possam provocar incêndios está sujeito a pena de detenção de três anos ou multa.

Fonte de pesquisa: <https://www.gov.br/infraestrutura/pt-br/assuntos/noticias/ultimas-noticias/soltar-balao-e-crime-e-poe-em-risco-o-espaco-aereo712>. Acesso em: 5 fev. 2020.

Para manter a tradição, na época de festa junina podem ser construídos balões decorativos por meio da arte do origami. Considerando um balão com formato de octaedro, feito de origami, determine quantos centímetros quadrados de papel, no mínimo, foram utilizados para encapar sua parte inferior. $12\sqrt{55}$ cm²



RONALDO INÁCIO

Esse balão pode ser decomposto em duas pirâmides regulares.

Origami: do japonês *ori*, "dobra", e *kami*, "papel". Arte tradicional japonesa de dobrar papel em formas representativas de animais, objetos e outros.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

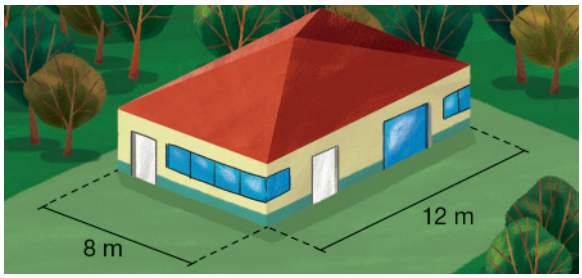
MODERNA

9 Em uma passeata realizada em uma grande cidade contra a poluição do ar, foram distribuídos pingentes com formato de octaedro regular (Poliedro de Platão associado ao ar). Sabendo que as arestas do octaedro tinham 1 cm de comprimento, determine a área da superfície de cada pingente distribuído na passeata.

$2\sqrt{3}$ cm²

10 A partir de um recorte retangular de papel de presente, com 15 cm por 25 cm, deseja-se encapar uma embalagem com formato de pirâmide quadrangular regular que tem 8 cm de altura e apótema da base com 6 cm de comprimento. Considerando que não haverá desperdício ao encapar a embalagem, podemos concluir que sobrará ou faltará papel? Quantos centímetros quadrados? faltará; 9 cm²

11 O telhado de uma casa será construído com formato de superfície lateral de pirâmide de base quadrangular, com as arestas laterais congruentes, cujo comprimento é $\sqrt{61}$ m.



LEO GIBRAN

Sabendo que são necessárias 16 telhas do modelo escolhido para cobrir 1 m² de telhado e supondo que serão desperdiçadas 195 telhas com quebras e emendas, calcule o número mínimo de telhas utilizadas na cobertura desse telhado. (Use $\sqrt{5} = 2{,}2$.) 2 000 telhas

12 Para trocar a lona de um guarda-sol, uma pessoa precisa calcular quantos metros quadrados de lona irá utilizar. Sabendo que a armação a ser revestida pode ser decomposta em duas partes: uma semelhante à superfície lateral de uma pirâmide decagonal regular, com 1 m de aresta lateral e 60 cm de aresta da base, e outra semelhante à superfície lateral de um prisma decagonal regular com 5 cm de altura, determine a quantidade mínima aproximada de lona necessária para revestir o guarda-sol. 3,16 m²

LEO GIBRAN

13 No dia 19 de abril de 1940, indígenas de várias etnias compareceram ao I Congresso Indigenista Interamericano, realizado no México, para tratar da luta por seus direitos. A partir desse ano, nessa data, passou a ser comemorado o Dia do Índio em todo o continente americano.

Fonte de pesquisa: <http://www.funai.gov.br/index.php/comunicacao/noticias/1893-por-que-dia-19-e-dia-do-indio>. Acesso em: 4 fev. 2020.

MARCOS AMEND/PULSAR IMAGENS

Indígenas Tukano e Dessana em apresentação tradicional na Comunidade indígena Cipiá, Manaus (AM), em 2019.

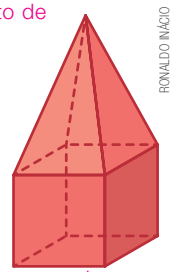
Para comemorar essa data, uma escola vai promover diversas apresentações culturais sobre os costumes indígenas. Na construção de uma réplica de oca (moradia indígena), os alunos construíram uma armação de bambu, em formato de pirâmide octogonal regular, com 1 m de aresta da base e 3,5 m de aresta lateral. Sabendo que os alunos deixarão uma das faces laterais sem cobertura para ser utilizada como porta, qual é a quantidade mínima de material necessária para revestir a oca? (Utilize $\sqrt{3} = 1{,}7$.) aproximadamente 12 m²

LEO GIBRAN

A tarefa **14** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

14 **Elaborando**

Uma pirâmide quadrangular regular foi construída com base sobre uma das faces de um cubo de aresta 6 cm. Sabendo que as arestas laterais da pirâmide têm comprimento igual ao da diagonal do cubo, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados, neste tema, até o momento. Em seguida, peça para um colega que o resolva.

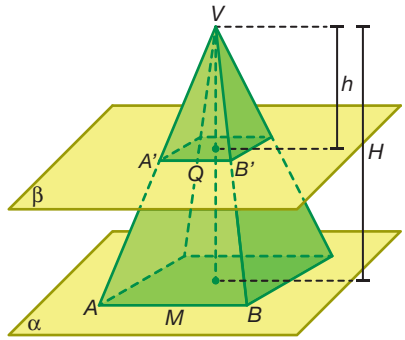

RONALDO INÁCIO

14. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Volume de uma pirâmide

Considere uma pirâmide de vértice V, base M e altura H, apoiada em um plano α. Ao traçarmos um plano β paralelo a α, distando h do vértice V, obtemos, nessa pirâmide, uma seção Q.



A fim de exemplificar a situação apresentada, ilustramos uma pirâmide quadrangular.

De acordo com essa situação, apresentaremos duas importantes propriedades.

a) As regiões M e Q são semelhantes cuja razão de proporcionalidade é $\frac{H}{h}$.

b) A razão entre área de figuras semelhantes é o quadrado da razão de proporcionalidade. Nesse caso, temos:

$$\frac{\text{área de } M}{\text{área de } Q} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$$

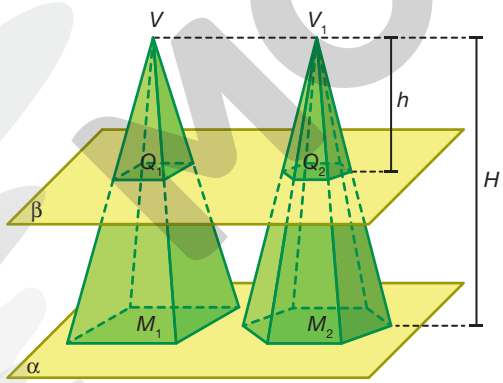
Essas propriedades podem ser demonstradas, porém não apresentaremos suas demonstrações neste livro.

Agora, utilizando essas propriedades, demonstraremos o teorema a seguir.

Pirâmides cujas áreas das bases são iguais e que têm a mesma altura têm também o mesmo volume.

Demonstração

Considere duas pirâmides apoiadas em um plano horizontal α, ambas de altura H e bases com áreas iguais. Considere também um plano β, paralelo a α, que determina duas seções.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Pela propriedade b, temos: $\frac{\text{área de } M_1}{\text{área de } Q_1} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$ e $\frac{\text{área de } M_2}{\text{área de } Q_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$.

Assim, $\frac{\text{área de } M_1}{\text{área de } Q_1} = \frac{\text{área de } M_2}{\text{área de } Q_2}$.

Como a área de M_1 é igual à área de M_2, então a área de Q_1 é igual à área de Q_2, para qualquer plano β paralelo a α.

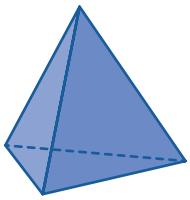
Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, se todo plano paralelo a α determina regiões planas de mesma área nas duas pirâmides, então os volumes das pirâmides são iguais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Volume de uma pirâmide triangular

Até o momento, estudamos algumas propriedades e demonstramos um teorema. Nosso objetivo agora é o de investigar e obter uma fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide triangular.



Se julgar conveniente, entregue aos alunos representações de pirâmides triangulares congruentes (no mínimo três representações), para que eles possam realizar as investigações propostas nas questões A, B e C.

A É possível obter o volume de uma pirâmide triangular relacionando-a a um prisma. Junte-se a um colega, investiguem e determinem qual é esse prisma.

Espera-se que os alunos respondam que é um prisma de base triangular.

B. Espera-se que os alunos respondam que precisam decompor o prisma de base triangular em três pirâmides triangulares. Nesse caso, obteríamos três pirâmides triangulares com a mesma base do prisma e com alturas iguais à do prisma.

B De acordo com a resposta da questão **A**, qual estratégia você utilizaria para obter uma relação entre o volume desse prisma e o da pirâmide triangular?

C Qual é a relação entre o volume da pirâmide triangular e do prisma escolhido por vocês na questão **A**?

Espera-se que os alunos respondam que o volume do prisma é igual ao triplo do volume da pirâmide triangular com a mesma base do prisma e com altura igual à do prisma.

D Mostre que o volume V de uma pirâmide triangular de altura h é: $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ em que A_b indica a área da base da pirâmide.

Resposta no Suplemento para o professor.

Volume de uma pirâmide qualquer

Demonstrada a expressão de cálculo do volume de uma pirâmide triangular, falta pouco para obtermos o volume de qualquer pirâmide.

E. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que dividiriam, por meio de diagonais, a base da pirâmide em triângulos justapostos, sendo cada triângulo a base de uma nova pirâmide que possui vértice comum à pirâmide inicial.

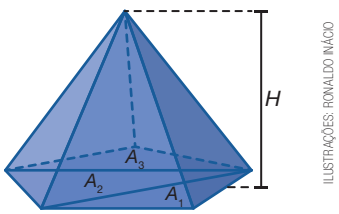
E Dada uma pirâmide de base qualquer, qual estratégia você utilizaria para obter seu volume?

De acordo com as informações obtidas no tópico anterior, vamos demonstrar o seguinte teorema.

> O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto entre a área de sua base e sua altura.

Demonstração

Considere uma pirâmide P de altura H e base de área A. Podemos decompor, por meio de diagonais, a base dessa pirâmide em n triângulos justapostos de áreas $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nesse caso, a pirâmide P fica dividida em n pirâmides triangulares de altura H.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Na imagem é exemplificado o caso em que a base da pirâmide é um pentágono e $n = 3$.

Assim, o volume V da pirâmide P é:

$$V = \frac{A_1 \cdot H}{3} + \frac{A_2 \cdot H}{3} + \cdots + \frac{A_n \cdot H}{3}$$

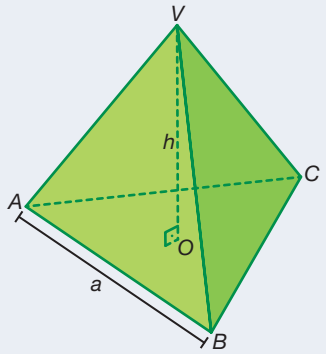
$$V = \frac{1}{3}\left(A_1 + A_2 + \cdots + A_n\right) \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3}A \cdot H$$

Como queríamos demonstrar.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R3 Calcule o volume do tetraedro regular ao lado, sabendo que $h = 12\sqrt{2}$ cm e $a = 12\sqrt{3}$ cm.



RONALDO INÁCIO

Resolução

A área de um triângulo equilátero de lado a é dada por $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Desse modo, o volume do tetraedro é dado por:

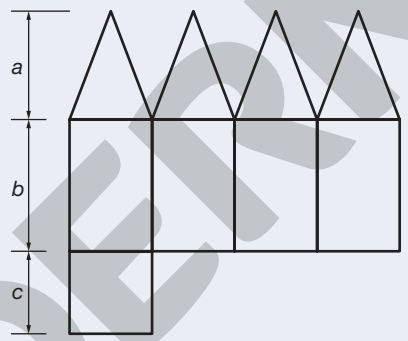
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h}{3} = \frac{\frac{\left(12\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 12\sqrt{2}}{3} =$$

$$= \frac{\frac{432\sqrt{3}}{4} \cdot 12\sqrt{2}}{3} = 432\sqrt{6}$$

Portanto, o volume desse tetraedro é $432\sqrt{6}\,\text{cm}^3$.

Pode-se demonstrar que o volume de um tetraedro regular de aresta a é dado por $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

R4 (Unicamp-SP, 2020) A figura ao lado exibe a planificação de um poliedro convexo, com faces triangulares congruentes e faces retangulares, em que são indicados os comprimentos a, b e c.



a) Determine o número de vértices e de arestas desse poliedro.

b) Para $a = 13$ cm, $b = 16$ cm e $c = 10$ cm, calcule o volume desse poliedro.

Resolução

a) Como as faces triangulares são congruentes, o poliedro é formado por uma pirâmide regular de base quadrada apoiada num paralelepípedo reto retângulo, em que duas de suas faces são quadradas. Nesse caso:

- o número de vértice v desse poliedro é:

$$v = v_P + v_R - 4 = 5 + 8 - 4 = 9$$

em que v_P e v_R indicam, respectivamente, o número de vértices da pirâmide e do paralelepípedo.

- o número de arestas n desse poliedro é:

$$n = n_P + n_R - 4 = 8 + 12 - 4 = 16$$

em que n_P e n_R indicam, respectivamente, o número de arestas da pirâmide e do paralelepípedo.

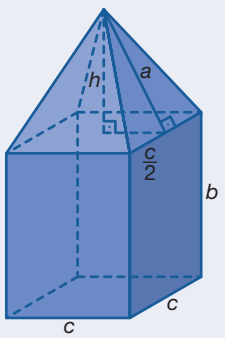
Portanto, esse poliedro possui 9 vértices e 16 arestas.

b) Indicando por h a altura da pirâmide, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 12$$

Note que $h = 12$, pois $h > 0$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

O volume V desse poliedro é igual ao volume da pirâmide V_p mais o volume do paralelepípedo reto retângulo V_R. Assim:

$$V = V_P + V_R = \frac{c^2 \cdot h}{3} + c^2 \cdot b = \frac{10^2 \cdot 12}{3} + 10^2 \cdot 16 = 2\,000$$

Portanto, o volume desse poliedro é igual a $2\,000\,\text{cm}^3$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

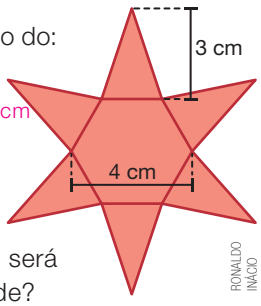
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

15 Uma pirâmide quadrangular regular possui 12 m de aresta da base e 8 m de altura. Se for realizada uma seção transversal paralelamente à sua base, à distância de 6 m, qual será o volume da pirâmide menor obtida? 6 m³

16 O volume de uma pirâmide de 5 cm de altura é 20 cm³. Sabendo que o polígono da base dessa pirâmide é um retângulo, determine todos os possíveis comprimentos inteiros, em centímetros, que as arestas da base podem ter.
1 cm e 12 cm; 2 cm e 6 cm; 3 cm e 4 cm

17 Observe a planificação de uma pirâmide hexagonal regular.



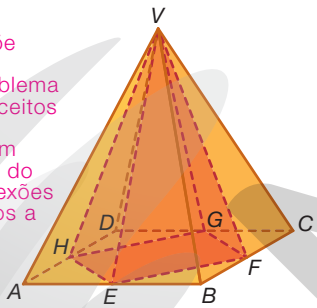
RONALDO INÁCIO

a) Determine o comprimento do:
- apótema da pirâmide. 3 cm
- apótema da base. $\sqrt{3}$ cm

b) Calcule a área:
- da base. $6\sqrt{3}$ cm²
- total. $6 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm²

c) Quando construída, qual será o volume dessa pirâmide? $6\sqrt{2}$ cm³

18 Considere a pirâmide quadrangular de vértice *V* com altura *h*, cuja base é o retângulo *ABCD* com *AB* = *a* e *BC* = *b*. Sabendo que os pontos *E*, *F*, *G* e *H* são pontos médios das arestas da base da pirâmide *ABCDV*, calcule a razão entre os volumes das pirâmides *EFGHV* e *ABCDV*. $\frac{1}{2}$



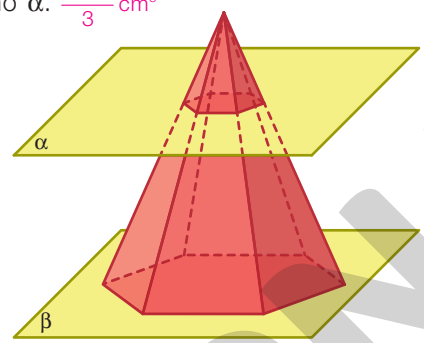
RONALDO INÁCIO

A tarefa **20** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

19 Para ostentar a grandiosidade de seu reino, o rei de uma antiga civilização ordenou a construção de uma pirâmide, cuja base é um quadrado de lado 50 m e a altura é 60 m. Em média, para construir uma parte da pirâmide equivalente a 500 m³, os trabalhadores levaram cerca de 1 mês. De acordo com essa média, quanto tempo foi necessário para a conclusão da obra?
8 anos e 4 meses

20 Crie uma peça cujo formato se pareça com uma composição de prismas e pirâmides. Em seguida, de acordo com essa peça, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados sobre volume. Por fim, peça para que um colega o resolva. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

21 O volume da pirâmide hexagonal regular, cujo comprimento da aresta da base é 4 cm e cuja base está contida no plano β, é $72\sqrt{3}$ cm³. Sabendo que a razão entre as alturas das pirâmides com base no plano α e com base no plano β é $\frac{1}{3}$, determine o volume da pirâmide com base no plano α. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm³



RONALDO INÁCIO

α//β

22 Geralmente encontrado em aluviões e em veios de quartzo associados a rochas intrusivas ácidas, o ouro cristaliza-se em forma de cubos e octaedros, mas o mais comum é encontrá-lo na forma de escamas, fios irregulares ou pepitas (massas irregulares).

Se necessário, lembre aos alunos que a densidade é a razão entre a massa e o volume.

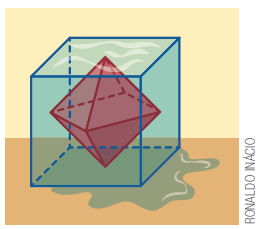
FRANTICOO/SHUTTERSTOCK

Pepita de ouro.

Sabendo que a densidade do ouro é de 19,3 g/cm³, determine a massa de uma pedra de ouro que possui formato de octaedro regular, com arestas medindo 3 cm. (Utilize $\sqrt{2}$ = 1,41.)
aproximadamente 245 g

23 Dentro de uma caixa cúbica de 20 cm de aresta, totalmente cheia de água, foi colocado um sólido maciço com a forma de um octaedro regular, de maneira que seus vértices ficassem exatamente nos centros das faces da caixa cúbica, fazendo parte da água derramar para fora da caixa. Observe a figura.

a) $400\sqrt{3}$ cm²


RONALDO INÁCIO

a) Qual é a área da superfície desse octaedro?

b) Calcule o volume de água, em litros, que permaneceu na caixa após o sólido ser colocado em seu interior. $\frac{20}{3}$ ℓ

24 Qual é o volume de um tetraedro regular que possui uma de suas faces inscrita em uma circunferência de raio 10 dm? $250\sqrt{6}$ dm³

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Tronco de pirâmide

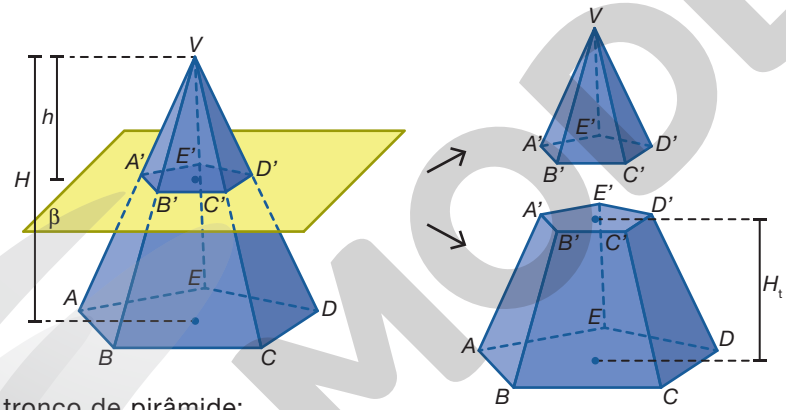
Anteriormente, conhecemos algumas características de El Castillo, uma das ruínas da antiga civilização maia mais visitadas por turistas. Vimos que essa edificação parece um tronco de pirâmide, poliedro que estudaremos neste tópico.

VLAD G/SHUTTERSTOCK

Pirâmide de Kukulkán, em Chichén-Itzá, México, em 2018.

Considere uma pirâmide de base $A_1A_2...A_n$ e vértice V. Ao traçarmos um plano paralelo à base, que corta as arestas laterais segundo o polígono $B_1B_2...B_n$, determinamos dois poliedros: uma pirâmide de base $B_1B_2...B_n$ e um poliedro denominado **tronco de pirâmide** de bases $A_1A_2...A_n$ (**base maior**) e $B_1B_2...B_n$ (**base menor**). Os trapézios $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ são as **faces laterais**.

Supondo uma pirâmide pentagonal, temos:



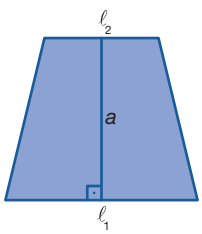
tronco de pirâmide

Nesse tronco de pirâmide:

- a **base maior** é o polígono *ABCDE*.
- a **base menor** é o polígono *A'B'C'D'E*.
- as **faces laterais** são os trapézios *ABB'A'*, *BCC'B'*, *CDD'C'*, *DEE'D'* e *AEE'A'*.
- a **altura** é a distância H_t, entre a base menor e a base maior.

A **altura** de um tronco de pirâmide é a distância entre a base menor e a base maior.

Dizemos que um tronco de pirâmide é regular se este é obtido a partir de uma pirâmide regular. Nesse caso, as bases são polígonos regulares semelhantes e as faces laterais são trapézios isósceles congruentes. Além disso, a altura de uma face lateral é chamada **apótema do tronco** (*a*).



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

a: comprimento do apótema do tronco
ℓ_1: comprimento da aresta da base maior
ℓ_2: comprimento da base menor

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Área da superfície de um tronco de pirâmide

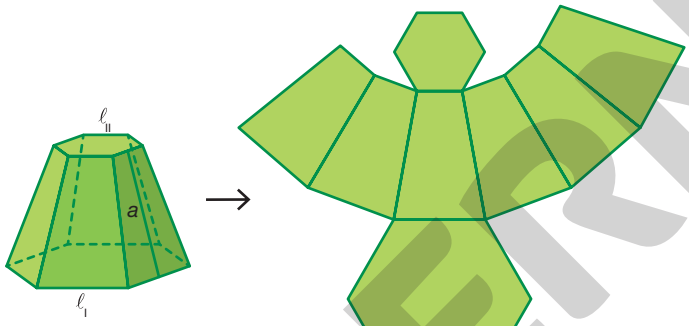
Assim como os prismas e as pirâmides, em um tronco de pirâmide:

- a **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as suas faces laterais, sendo a área dessa superfície a área lateral do tronco $\left(A_\ell\right)$.
- a **área da base maior** corresponde à área do polígono que é a base maior do tronco $\left(A_B\right)$, e a **área da base menor**, à área do polígono que é igual a base menor $\left(A_b\right)$.
- a **superfície total** corresponde à reunião da superfície lateral com as bases, sendo a área dessa superfície a **área total do tronco** $\left(A_t\right)$.

Assim, a área total de um tronco de pirâmide é igual a área lateral mais a área de cada base, isto é:

$$A_t = A_\ell + A_b + A_B$$

Veja na imagem a representação de um tronco de pirâmide regular e sua planificação.



Explique aos alunos que é possível compor outras planificações desse tronco de pirâmide.

Nesse caso, a área total do tronco é dada pela área lateral, que é igual a seis vezes a área de uma face lateral (trapézio isósceles) mais a área das bases (hexágonos regulares):

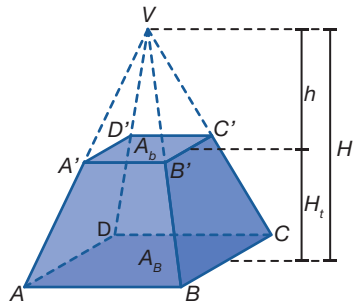
$$A_t = \underbrace{A_\ell}_{6 \cdot \frac{(\ell_I + \ell_{II}) \cdot a}{2}} + \underbrace{A_b}_{6 \cdot \frac{\ell_{II}^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} + \underbrace{A_B}_{6 \cdot \frac{\ell_I^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} = 6 \cdot \frac{(\ell_I + \ell_{II}) \cdot a}{2} + 6 \cdot \frac{\ell_{II}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{\ell_I^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Volume de um tronco de pirâmide

Na imagem está representado um tronco de pirâmide. Para obter o volume desse tronco, podemos calcular a diferença entre os volumes das pirâmides *VABCD* e *VA'B'C'D'*, isto é:

A_B: área da base maior
A_b: área da base menor
H: altura da pirâmide *VABCD*
h: altura da pirâmide *VA'B'C'D'*
H_t: altura do tronco

$$V_{tronco} = V_{VABCD} - V_{VA'B'C'D'} =$$
$$= \frac{A_B \cdot H}{3} - \frac{A_b \cdot h}{3} =$$
$$= \frac{A_B \cdot H - A_b \cdot h}{3}$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

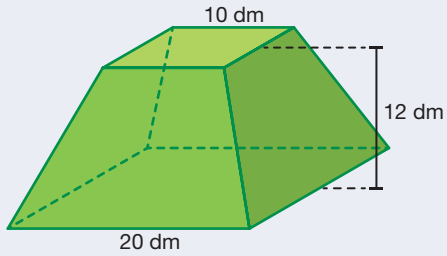
Desenvolvendo essa igualdade, deduzimos a fórmula do volume de um tronco de pirâmide, que é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{H_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right)$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R5 Um tronco de pirâmide regular de altura 12 dm tem como bases duas regiões quadradas de lados 10 dm e 20 dm, conforme a figura.



Em relação ao tronco, calcule a área:

a) da base menor.
b) da base maior.
c) lateral.
d) total.

Resolução

a) A base menor é um quadrado de lado 10 dm. Logo: $A_b = 10^2 = 100$
Portanto, a área da base menor é $100\ dm^2$.

b) A base maior é um quadrado de lado 20 dm. Logo: $A_B = 20^2 = 400$
Portanto, a área da base maior é $400\ dm^2$.

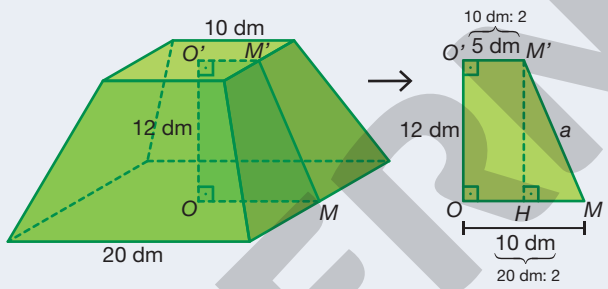
c) As faces laterais são trapézios isósceles congruentes de bases 10 dm e 20 dm, cuja altura é o apótema do tronco. Calculamos o comprimento do apótema do tronco aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MHM', conforme a figura a seguir.

$$(MM')^2 = (HM')^2 + (HM)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$$

Note que $a = 13$, pois $a > 0$.



Como a área lateral é a reunião dos quatro trapézios, temos:

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{(\ell_1 + \ell_2) \cdot a}{2} = 4 \cdot \frac{(20 + 10) \cdot 13}{2} = 780$$

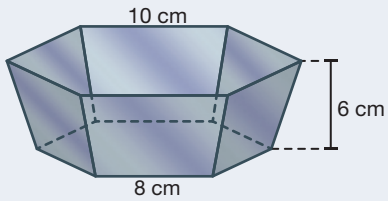
Portanto, a área lateral é $780\ dm^2$.

d) A área total é dada por:

$$A_t = A_\ell + A_b + A_B = 780 + 100 + 400 = 1\,280$$

Portanto, a área total é $1\,280\ dm^2$.

R6 Uma forma de alumínio tem o formato de um tronco de pirâmide hexagonal regular, conforme a figura. Qual é a capacidade, em litros, dessa forma? (Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.)



Resolução

As bases são hexágonos regulares de lados 10 cm e 8 cm. Sendo A_B e A_b, respectivamente, as áreas das bases maior (superior) e menor (inferior), temos:

$$A_B = 6 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3} \qquad A_b = 6 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

Segue que o volume do tronco é dado por:

$$V_{tronco} = \frac{H_t}{3} \cdot \left(\sqrt{A_b \cdot A_B} + A_b + A_B\right) = \frac{6}{3} \cdot \left(\sqrt{96\sqrt{3} \cdot 150\sqrt{3}} + 96\sqrt{3} + 150\sqrt{3}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(120\sqrt{3} + 96\sqrt{3} + 150\sqrt{3}\right) = 2 \cdot 366\sqrt{3} = 732\underbrace{\sqrt{3}}_{1{,}7} = 732 \cdot 1{,}7 = 1\,244{,}4$$

Logo, o volume do tronco é $1\,244{,}4\ cm^3$. Como $1\ \ell = 1\,000\ cm^3$, segue que:

$$\frac{1\,000}{1\,244{,}4} = \frac{1}{x} \Rightarrow x \simeq 1{,}2$$

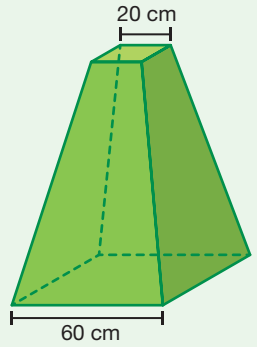
Portanto, a capacidade dessa forma é, aproximadamente, 1,2 ℓ.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Resolvendo por etapas

Um artista plástico construiu uma estátua para ser instalada na fachada de um empreendimento comercial. Para que possa entregá-la ao cliente, é necessário construir uma plataforma de sustentação maciça cujo formato é o de um tronco de pirâmide regular de bases quadradas, representado ao lado, com 156 000 cm^3 de volume. Após concluir a construção, as laterais dessa plataforma serão coloridas.



RONALDO INACIO

Sabendo que com um litro de tinta é possível colorir 6 250 cm^2, determine quantos litros de tinta, no mínimo, serão necessários para colorir as laterais dessa plataforma.

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

A quantidade de tinta necessária para colorir as laterais da plataforma.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

O formato da plataforma, que é o de um tronco de pirâmide regular de bases quadradas com 156 000 cm^3 de volume; as dimensões dos polígonos da base do tronco de pirâmide que representa a plataforma; e que com um litro de tinta é possível colorir 6 250 cm^2.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, determinamos a altura da plataforma. Em seguida, calculamos o comprimento do apótema do tronco que representa a plataforma e a área de cada uma das faces laterais. Na sequência, determinamos a área lateral da plataforma e, por fim, dividimos a área lateral pela área que é possível colorir com um litro de tinta, obtendo assim, a quantidade mínima de tinta necessária.

√ Escolhendo as notações.

- A_b: área da base menor da plataforma.
- A_B: área da base maior da plataforma.
- h: altura da plataforma.
- A_l: área lateral da plataforma.
- a: comprimento do apótema do tronco.
- A_F: área de cada face lateral da plataforma.
- Q_T: quantidade de litros de tinta necessária para colorir as laterais da plataforma.

C Executando o plano

Passo 1

Para calcular a altura da plataforma, vamos determinar, inicialmente, a área da base menor e da base maior da plataforma.

$A_b = 20^2 = 400$ $\qquad$ $A_B = 60^2 = 3\,600$

Logo, a área da base menor é 400 cm^2 e da base maior, 3 600 cm^2

Como o volume da plataforma é 156 000 cm^3, temos:

$$156\,000 = \frac{h}{3}\left(\sqrt{400 \cdot 3\,600} + 400 + 3\,600\right) \Rightarrow h = 90$$

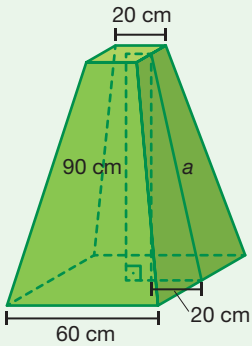
Assim, a altura da plataforma é 90 cm.

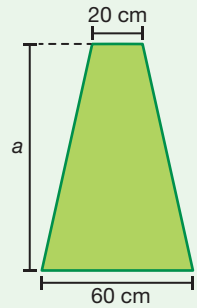
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 2

Para auxiliar no cálculo do apótema do tronco, construímos as seguintes figuras.





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Aplicando o Teorema de Pitágoras determinamos o comprimento do apótema do tronco que representa a plataforma.

$$a^2 = 90^2 + 20^2 \Rightarrow a^2 = 8\,500 \Rightarrow a \simeq 92{,}2$$

Note que $a \simeq 92{,}2$, pois $a > 0$.

Logo, o apótema do tronco tem, aproximadamente, 92,2 cm de comprimento.

Passo 3

Calculamos a área de uma das faces laterais da plataforma (representada pelo trapézio ilustrado no passo anterior), temos:

$$A_F = \frac{(20 + 60) \cdot 92{,}2}{2} = 3\,688$$

Como $A_\ell = 4 \cdot A_F$, segue que:

$$A_\ell = 4 \cdot 3\,688 = 14\,752$$

Assim, a área lateral da plataforma é, aproximadamente, $14\,752\ cm^2$.

Passo 4

Dividindo a área lateral da plataforma pela área que é possível colorir utilizando um litro de tinta, obtemos:

$$Q_T = \frac{14\,752}{6\,250} \simeq 2{,}36032$$

Portanto, são necessários, no mínimo, aproximadamente 2,36 litros de tinta.

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico.

Agora é você quem resolve!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema.**

Um bloco de concreto maciço, com 15 cm de altura, será fabricado com formato de tronco de pirâmide regular de bases quadradas. Sabendo que a base menor terá 20 cm de lado e a base maior, 35 cm, determine o volume de concreto mínimo necessário para fabricar esse bloco.

2 **É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nessa seção? Qual é a resposta desse problema?**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

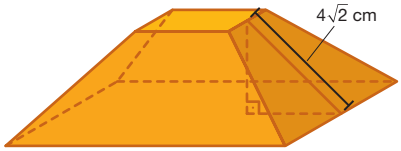
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

25. $9 \cdot \left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ m²

25 Dois triângulos equiláteros, um com 9 m de lado e outro com 3 m de lado, são as bases de um tronco de pirâmide regular de aresta lateral 5 m. Calcule a área total desse tronco de pirâmide.

26 Um tronco de pirâmide quadrangular regular possui diagonal da base maior com $12\sqrt{2}$ cm de comprimento, aresta da base menor com 4 cm de comprimento e apótema com $4\sqrt{2}$ cm de comprimento.



RONALDO INÁCIO

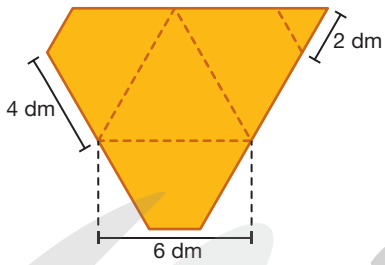
A partir das informações apresentadas, determine:

a) o comprimento da altura do tronco de pirâmide. 4 cm

b) a área lateral. $128\sqrt{2}$ cm²

c) a área total. $32 \cdot \left(4\sqrt{2} + 5\right)$ cm²

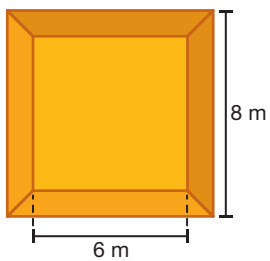
27 A figura corresponde à planificação de um tronco de pirâmide regular, cuja base é um triângulo equilátero. Qual é a área lateral desse tronco de pirâmide? E a área total? $24\sqrt{3}$ dm²; $34\sqrt{3}$ dm²



RONALDO INÁCIO

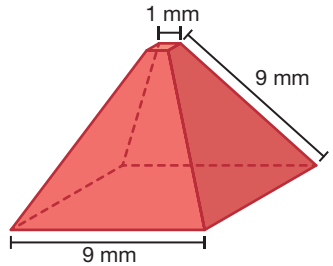
28 Sabendo que a área total de um tronco de pirâmide hexagonal regular é de $924\sqrt{3}$ cm² e que as áreas da base menor e maior são, respectivamente, $150\sqrt{3}$ cm² e $384\sqrt{3}$ cm², determine o comprimento das arestas da base maior, o comprimento das arestas da base menor e a altura desse tronco de pirâmide. 16 cm; 10 cm; $4\sqrt{3}$ cm

29 Observando a figura, que ilustra a vista superior de um tronco de pirâmide de base quadrangular regular, e sabendo que o comprimento da aresta lateral do tronco da pirâmide é 3 m, determine sua área total. $4 \cdot \left(25 + 14\sqrt{2}\right)$ m²



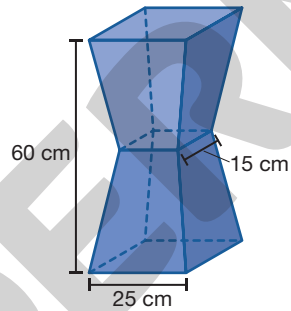
RONALDO INÁCIO

30 Considere o tronco de pirâmide de base quadrangular regular representado a seguir. Qual é o volume desse tronco de pirâmide? $\frac{637}{3}$ mm³



RONALDO INÁCIO

31 Calcule o volume de concreto necessário para construir uma banqueta maciça, composta de dois troncos congruentes de pirâmide quadrangular regular sobrepostos pelas bases menores. 24 500 cm³

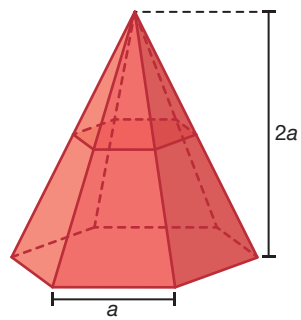


RONALDO INÁCIO

32 Em um tronco de pirâmide pentagonal regular, os raios das circunferências que circunscrevem as bases têm 3 cm e 5 cm. Sabendo que as áreas das bases maior e menor são, respectivamente, 60 cm² e 21 cm², e que o volume é $6\left(2\sqrt{35} + 27\right)$ cm³, determine o comprimento da aresta lateral desse tronco de pirâmide. $2\sqrt{10}$ cm

33 Uma pirâmide hexagonal regular foi secionada por um plano paralelo à base, de modo que o tronco da pirâmide e a pirâmide, obtidos após a seção, possuíssem a mesma altura.

Determine, em função de *a*:



RONALDO INÁCIO

a) a área da base da pirâmide obtida. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$

b) o volume da pirâmide obtida. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

c) o volume do tronco de pirâmide obtido. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{8}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

34 Em 1932, entre os meses de julho e outubro, ocorreu no Brasil o movimento armado conhecido como Revolução Constitucionalista, que visava à derrubada do governo provisório de Getúlio Vargas e a instituição de um regime constitucional. Em homenagem aos heróis dessa revolução, foi construído, na cidade de São Paulo – em mármore travertino –, o Monumento ao Soldado Constitucionalista, mais conhecido como obelisco do Ibirapuera, cujo formato lembra um tronco de pirâmide quadrangular regular. Em seu interior existe um mausoléu que guarda as cinzas dos estudantes Martins, Miragaia, Drausio e Camargo, mortos em combate, cujas iniciais MMDC formam a sigla usada como símbolo da revolução. A cripta também abriga as cinzas de outros ex-combatentes.

A obra, do escultor italiano Galileo Ugo Emendabili, começou a ser construída em 1947, e foi concluída apenas no ano de 1970. Das sepulturas, no subsolo, até o topo, são 81 m; a altura do obelisco é 72 m; a aresta da base maior possui 9 m; e a aresta da base menor, 7 m.

Fonte de pesquisa: <https://www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/secretarias/cultura/patrimonio_historico/adote_obra/index.php?p54524>. Acesso em: 5 fev. 2020.

Cripta: dependência subterrânea utilizada para sepultamentos.

VINICIUS BACARIN/SHUTTERSTOCK

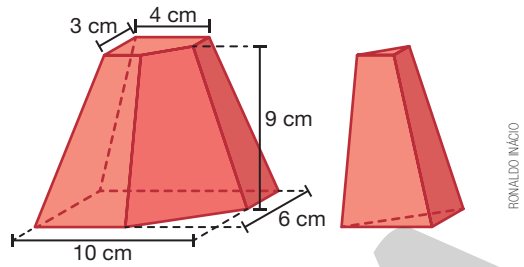
Obelisco do Ibirapuera, São Paulo (SP), em 2019.

a) Qual é a altura do subsolo do monumento? 9 m

b) Que quantidade de material seria necessária para construir uma réplica maciça do obelisco (desconsiderando o subsolo) com 10% das dimensões originais? 4,632 m³

c) Junte-se a um colega e façam uma pesquisa sobre a Revolução Constitucionalista de 1932. Em seguida, apresentem à turma os resultados. Resposta pessoal.

35 Um tronco de pirâmide obtido a partir de uma pirâmide cuja projeção de vértice coincide com o centro da base, que é um retângulo, foi selecionado por um plano de pontos médios de duas arestas da base menor e duas da base maior, como representado na figura.



RONALDO INÁCIO

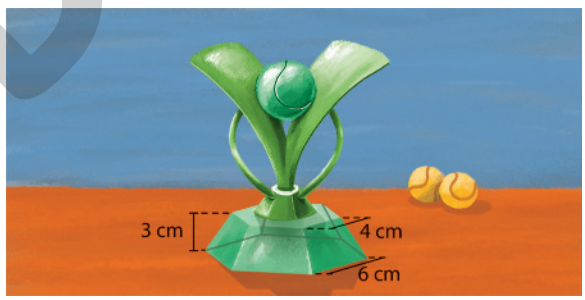
a) Determine a soma das áreas das bases do tronco de pirâmide maior, obtido após a seção. 63 cm²

b) Qual era o volume do tronco da pirâmide antes da seção? $36 \cdot \left(\sqrt{5} + 6\right)$ cm³

c) Calcule o volume do tronco de pirâmide menor obtido após a seção. $9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 3\right)$ cm³

36 A premiação de um torneio de tênis será realizada com troféus construídos a partir de materiais reciclados. A base desse troféu terá formato de tronco de pirâmide hexagonal regular maciça, e sua matéria-prima será o plástico.

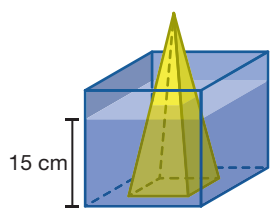
Qual será o volume de plástico utilizado na confecção desse troféu? $114\sqrt{3}$ cm³



LEO GIBRAN

37 Certo reservatório de 3 m de altura possui formato de tronco de pirâmide triangular regular com o comprimento das arestas internas das bases maior e menor, igual a, respectivamente, 2 m e 1 m. Quantos litros, no máximo, esse reservatório é capaz de armazenar? (Utilize $\sqrt{3} = 1{,}7$.) 2 975 ℓ

38 Em um tanque cúbico de 20 cm de aresta, contendo certo tipo de líquido, foi inserida uma pirâmide quadrangular regular de 30 cm de altura, com a base apoiada no fundo do tanque, o que elevou o nível do líquido em 4 cm. Determine o volume dessa pirâmide. $\frac{12\,800}{7}$ cm³



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7 O volume da Grande Pirâmide de Gizé

A mais antiga maravilha é a única que ainda está de pé

A Grande Pirâmide de Gizé, no Egito, é a mais antiga das Sete Maravilhas do Mundo Antigo – e a única que ainda existe. Erguida em 2550 a.C., foi trabalho para muita gente. Estima-se que 100 mil homens tenham participado de sua construção, que levou cerca de 20 anos. Eram homens livres, pagos muitas vezes com comida e cerveja.

Três construções formam o complexo conhecido como Pirâmides de Gizé. Mas apenas a maior, a Grande Pirâmide, é considerada uma das maravilhas. Ela foi construída pelo faraó Quéops (seu nome egípcio era Khufu, Quéops é o nome grego, mais famoso) para ser sua tumba, no platô de Gizé, perto do Cairo. Suas dimensões são monumentais: 137 metros de altura – originalmente eram 147 – e 227 metros em cada lado da base. Ela foi a construção mais alta do mundo até a Torre Eiffel, em Paris, ser inaugurada, em 1889.

"As pirâmides eram obras nacionais, que reuniam todo o Egito, o que ajudava na unificação política", diz o egiptólogo Antônio Brancaglion, do Museu Nacional do Rio de Janeiro. "Existia, inclusive, uma espécie de fundação que geria os recursos destinados aos salários e materiais necessários para sua construção e manutenção."

Gigante egípcia

Construção foi a mais alta do mundo por mais de 4 mil anos

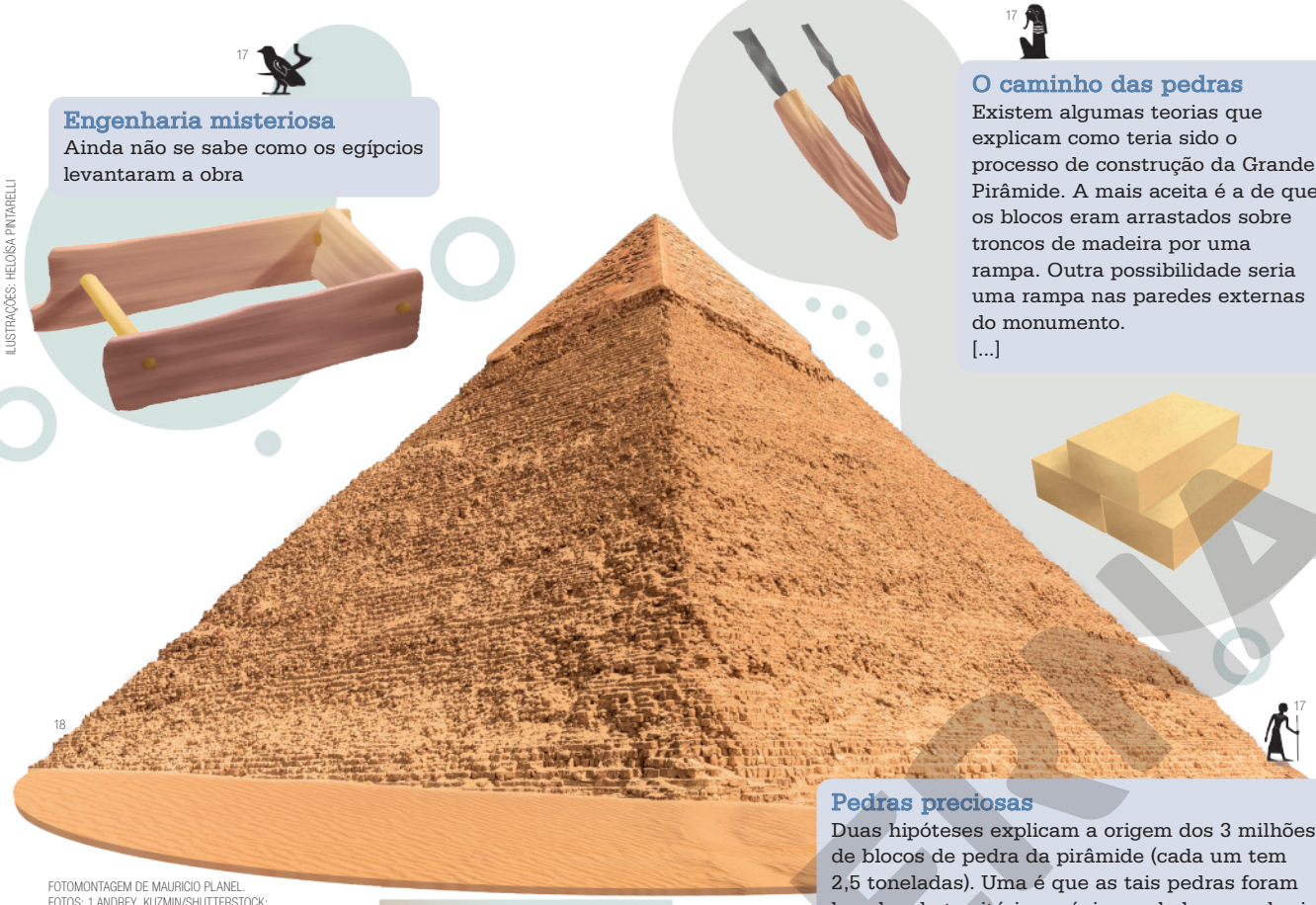
Feita para brilhar
Quéops mandou revestir toda a parte externa de sua futura tumba com pedra calcária polida. A pirâmide, literalmente, brilhava com a luz do Sol e podia ser vista a quilômetros de distância. O revestimento foi saqueado há mais de 600 anos. Hoje existem apenas resíduos dele no topo da maravilha.

Exploração complicada
Além da Câmara do Rei, outras duas são conhecidas: a da Rainha (que, apesar do nome, não abriga a múmia da mulher de Quéops, que foi enterrada fora da Grande Pirâmide) e a Secreta. Para descobrir se há outras salas, os cientistas teriam de usar explosivos, que podem danificar a estrutura da obra.

Sistema de segurança
Entre as medidas tomadas para que o sarcófago do faraó não fosse saqueado, os idealizadores da pirâmide colocaram pedregulhos para bloquear as entradas, portas pesadas de granito, corredores e câmaras vazias para despistar invasores.

Indecisão faraônica
Durante os 20 anos que a pirâmide levou para ser construída, Quéops teria mudado duas vezes de ideia quanto à localização de seu sarcófago. Por fim, acabou optando por uma sala localizada no centro da pirâmide, chamada Câmara do Rei. Quéops teria sido enterrado lá. Mas, quando o local foi explorado, em 820, o sarcófago já estava aberto e vazio.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

FOTOMONTAGEM DE MAURICIO PLANEL.
FOTOS: 1.ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK; 2.DARIO LO PRESTI/SHUTTERSTOCK; 3.GLOBAL-ART/SHUTTERSTOCK; 4.WINDNOISE/SHUTTERSTOCK; 5.DAVID CJ/SHUTTERSTOCK; 6.CBENJASUWAN/SHUTTERSTOCK; 7.JUAN AUNION/SHUTTERSTOCK; 8.PEYKER/SHUTTERSTOCK; 9.JUAN AUNION/SHUTTERSTOCK; 10.BRIAN A JACKSON/SHUTTERSTOCK; 11.MORPHART CREATION/SHUTTERSTOCK; 12.ROMAN SILANTEV/SHUTTERSTOCK; 13.XPIXEL/SHUTTERSTOCK; 14.KSENIA ARSENEVA/SHUTTERSTOCK; 15.JOSE IGNACIO SOTO/SHUTTERSTOCK; 16.XPIXEL/SHUTTERSTOCK; 17.ARTFORM/SHUTTERSTOCK; 18.ALEXANTON/SHUTTERSTOCK

DUARTE, Maria Dolores. A grande pirâmide de Gizé. *Aventuras na história*, ed. 45. 1º maio 2007. p. 22-23. © Maria Dolores Duarte/Perfil.com LTDA.

Estudos em vilas de trabalhadores das pirâmides, encontradas na planície de Gizé por meio de escavações, evidenciam que eles não eram tratados como escravos. As ruínas revelam um estruturado alojamento, com milhares de camas de barro, que recebiam trabalhadores temporários vindos do interior do Egito no período da entressafra. As tumbas dos construtores eram decoradas e alguns corpos apresentam marcas de fraturas curadas e membros amputados, sinal de que os trabalhadores recebiam atendimento médico. Foram encontrados fragmentos de formas de pão, base da alimentação diária, e jarras de cerveja, além de ossos de animais domésticos. No interior da pirâmide de Quéops, foram encontradas inscrições que revelam que os operários sentiam orgulho de completar suas tarefas.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Qual é a ideia principal do texto? Apresentar como foram construídas as Pirâmides de Gizé.

B Junte-se a um colega e façam uma pesquisa a respeito da revista em que o texto foi publicado. Em seguida, considerando as informações obtidas, converse com o professor e os colegas sobre o público a que esse texto se destina?

C Qual é o objetivo do título do texto? Em sua opinião, ele cumpre com esse objetivo? Justifique sua resposta.

D A Grande Pirâmide de Gizé é maciça? Justifique sua resposta.
Não, pois em seu interior existem corredores e câmaras, como a do Rei, a da Rainha e a Secreta.

E Supondo que a Grande Pirâmide de Gizé seja regular e tenha base quadrada, aproximadamente que área foi revestida com pedra calcária polida? aproximadamente 84 444 m^2

F Se a Grande Pirâmide de Gizé fosse maciça, qual seria seu volume original? 2 524 921 m^3

B) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que são jovens e adultos que se interessam por história e curiosidade históricas diversas.
C) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que o objetivo do título é antecipar informações do texto e incentivar o leitor a ler o texto completo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8 Cilindro

Inventário florestal

O manejo florestal sustentável é a denominação para a exploração consciente de riquezas das florestas. É possível, por exemplo, potencializar o turismo, extrair frutos, sementes, resina e, até mesmo, madeira, sem prejudicar o meio ambiente. Contudo, essa exploração deve ser autorizada pelo Serviço Florestal Brasileiro, órgão público ligado ao Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. Para que essa exploração seja feita de forma adequada, é necessário o levantamento de alguns dados, sendo o inventário florestal uma das principais ferramentas para a análise de áreas florestais, organizada pelo Governo Federal.

O inventário florestal consiste em: entrevistas com moradores de regiões próximas, coleta de amostras de solo e de material botânico e medições das árvores. Com esses dados, é possível avaliar a condições das florestas e sua importância para aqueles que residem próximo a elas. Esse procedimento é realizado em pontos espalhados por todo o país, com 20 km de distância entre eles.

MATERIAL

Na década de 1980, foi realizado o primeiro e único inventário florestal de âmbito nacional. Desde então, apenas relatórios pontuais e regionais foram publicados. Enquanto isso, países como Estados Unidos da América e Finlândia já realizam inventários florestais nacionais desde a década de 1920.

A retomada de inventários florestais mais abrangentes, no Brasil, aconteceu com a percepção, por parte dos estados, da viabilidade econômica das florestas, tanto no setor de turismo como na extração de bens, entre eles a exploração responsável de madeira. Em povoamentos florestais, quantificar o volume de madeira de cada árvore se torna indispensável para o estabelecimento de planos do manejo florestal sustentável. Essa quantificação pode ser um meio de ajudar o produtor florestal no momento da comercialização da madeira, pois o auxilia na negociação de preços com base em dados consistentes do volume de seu produto.

Quando uma árvore é transformada em tora, seu volume pode ser obtido por meio do método de Francon, que desconsidera partes da tora que não são aproveitadas pela serraria por serem ocas e podres ou apresentarem outros defeitos.

BNCC
- EM13MAT309
- EM13MAT405
- EM13MAT504
- CE2CNT

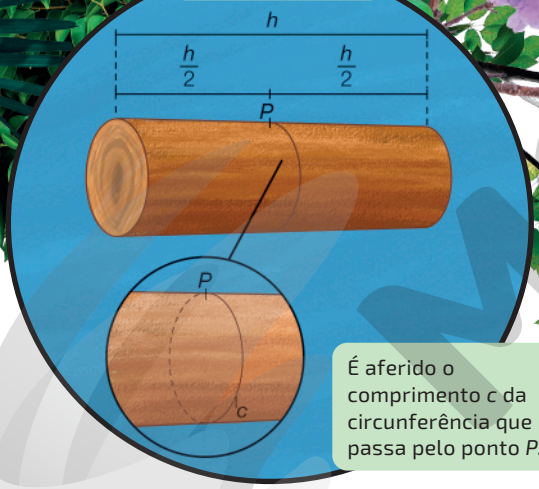
FOTOMONTAGEM DE JULIANA DEL ANHOL AZEVEDO. FOTOS: 1.PERNSANIT FOTO/SHUTTERSTOCK; 2.NUDULI/SHUTTERSTOCK; 3.NUWATPHOTO/SHUTTERSTOCK; 4.PERNSANIT FOTO/SHUTTERSTOCK; 5.CHANSOM PANTIP/SHUTTERSTOCK; 6.PERNSANIT FOTO/SHUTTERSTOCK; 7.JONES M/SHUTTERSTOCK; 8.DECHA SOMPARN/SHUTTERSTOCK; 9.PERNSANIT FOTO/SHUTTERSTOCK; 10.PERNSANIT FOTO/SHUTTERSTOCK; 11.DIOGO PPR/SHUTTERSTOCK; 12.OLEKSIY MARK/SHUTTERSTOCK; 13.PERNSANIT FOTO/SHUTTERSTOCK; 14.ROOP_DEY/SHUTTERSTOCK; 15.PHILIPYB STUDIO/SHUTTERSTOCK; 16.SOMYOT PATTANA/SHUTTERSTOCK; 17.CHANSOM PANTIP/SHUTTERSTOCK; 18.NKT USRBR/SHUTTERSTOCK; 19.CHEREZOFF/SHUTTERSTOCK; 20.ANAN KAEWKHAMMUL/SHUTTERSTOCK; 21.INTARAPONG/SHUTTERSTOCK; 22.IVAN CHUDAKOV/SHUTTERSTOCK; 23.PERNSANIT FOTO/SHUTTERSTOCK; 24.ERIC GEVAERT/SHUTTERSTOCK; 25.PERNSANIT FOTO/SHUTTERSTOCK; 26.SANTOL/SHUTTERSTOCK; 27.PERNSANIT FOTO/SHUTTERSTOCK; 28.DREAMHOMESTUDIO/SHUTTERSTOCK

Avaliação do volume *V* de uma tora de altura *h* pelo método de Francon

ILUSTRAÇÕES: LEO GIBRAN

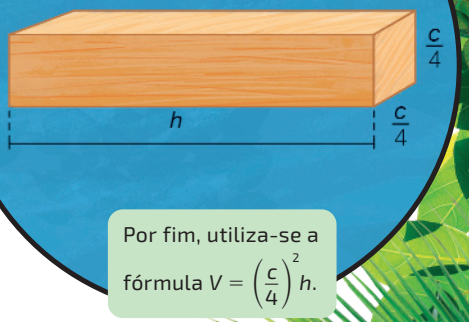
Por ter um formato irregular, é difícil calcular o volume exato de uma tora.

Estima-se o ponto central *P* da tora de madeira.



É aferido o comprimento *c* da circunferência que passa pelo ponto *P*.

Mantendo o perímetro *c* da circunferência, aproxima-se o formato da tora ao de um paralelepípedo reto retângulo de altura *h* cuja base é um quadrado de lado $\frac{c}{4}$.



Por fim, utiliza-se a fórmula $V = \left(\frac{c}{4}\right)^2 h$.

Oriente os alunos a escrever a resposta no caderno.

A Você conhece alguma área de manejo florestal sustentável? Onde se localiza? Resposta pessoal.

B Quantas décadas se passaram desde o último inventário florestal nacional até o ano 2020? 4 décadas

C Utilizando o método de Francon, determine o volume aproximado de uma tora com 3 m de altura cujo comprimento da circunferência central é 1 m. aproximadamente 0,1875 m^3

Com o formato semelhante ao de um cilindro, é possível aproximar o volume de uma tora ao de um **cilindro**, conteúdo que estudaremos neste tema. Utilizando o método de Francon ou aproximando o volume ao de um cilindro, o resultado obtido não é exato, ele representa uma aproximação do volume real.

Corpos redondos

O início da utilização de embalagens, assunto estudado anteriormente, ocorreu em tempos primitivos.

Como vimos, as embalagens não têm somente a finalidade de armazenar os produtos, mas de manter suas propriedades originais (sabor, aroma, qualidade etc.), facilitar seu armazenamento e transporte, e até mesmo conquistar o consumidor. As formas das embalagens são as mais diversas, elaboradas, de maneira geral, a partir de critérios como custo, estética, *marketing* e especificações da legislação.

> Para contribuir com o meio ambiente, os fabricantes procuram produzir embalagens reduzindo o consumo de recursos naturais, aprimorando e reciclando materiais. Além disso, as embalagens que podem ser recicladas apresentam um símbolo, permitindo o descarte e o encaminhamento correto para a indústria recicladora.

Veja a seguir algumas embalagens de diferentes formatos.
Os nomes dos produtos que aparecem nesta página são fictícios.

embalagem de suco

caixa de cereal matinal

frasco de perfume

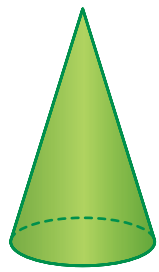
cone de sorvete

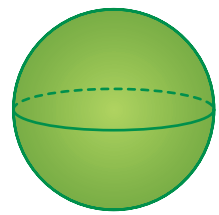
caixa de balas

ILUSTRAÇÕES: FÁBIO EIJI SIRASUMA

Entre as embalagens apresentadas acima, as de suco, sorvete e perfume lembram, respectivamente, um cilindro, um cone e uma esfera, que são figuras geométricas espaciais não poliédricas e serão estudadas neste e nos próximos temas deste livro.

cilindro


cone


esfera

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O cilindro

Em nosso dia a dia, nos deparamos com diversos objetos cuja forma lembra a do cilindro, sendo necessário em certos casos conhecer algumas de suas características, como a quantidade de material necessário para sua construção ou sua capacidade de armazenamento.

lâmpada

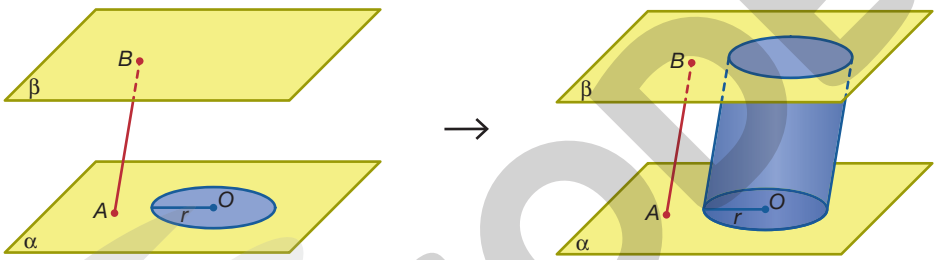
copo

extintor de incêndio

Para definir um cilindro circular, considere dois planos paralelos α e β, um círculo C_1 de centro O e raio r, contido em α, e um segmento $\overline{AB}$, com $A \in \alpha$ e $B \in \beta$. Ao traçarmos todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$ com uma extremidade na circunferência que determina C_1 e outra extremidade em β, obtemos, em β, uma circunferência que determina o círculo C_2.

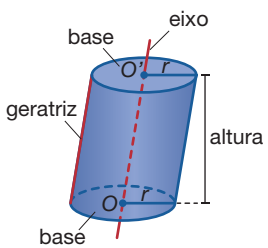
A união de todos esses segmentos paralelos, juntamente com os círculos C_1 e C_2, é chamada **cilindro circular**.

Neste livro, trataremos apenas dos cilindros circulares. Assim, a fim de simplificar a escrita, chamaremos esses cilindros circulares simplesmente de cilindros.

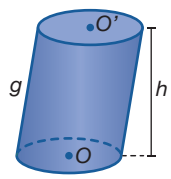


Em um cilindro, podemos destacar os seguintes elementos.

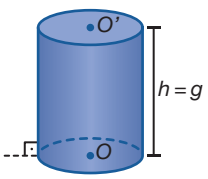
- As **bases** são os círculos paralelos de raio r e centros O e O'.
- As **geratrizes** são os segmentos paralelos a $\overline{OO'}$ com extremidades nas circunferências das bases.
- O **eixo** é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.
- A **altura** é a distância entre os planos das bases.
- A **superfície lateral** é a reunião de todas as geratrizes.



Quando as geratrizes do cilindro são oblíquas às bases, temos um **cilindro oblíquo**. Já quando as geratrizes são perpendiculares às bases, temos um **cilindro reto**.



cilindro oblíquo



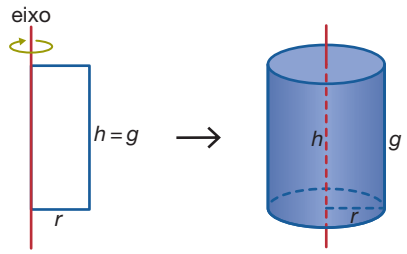
cilindro reto

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

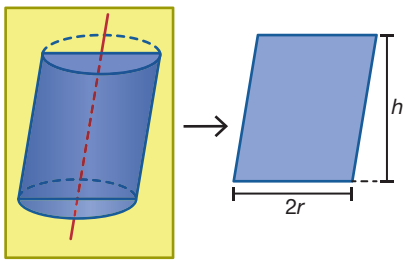
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

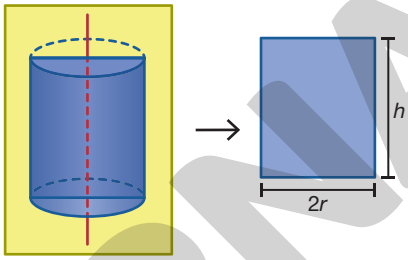
O cilindro reto também é denominado **cilindro de revolução**, visto que pode ser gerado pela rotação de um retângulo em torno do eixo que contém um de seus lados, em um giro completo.



Denominamos **seção meridiana** de um cilindro a região determinada pela interseção do cilindro e de um plano que contém seu eixo.

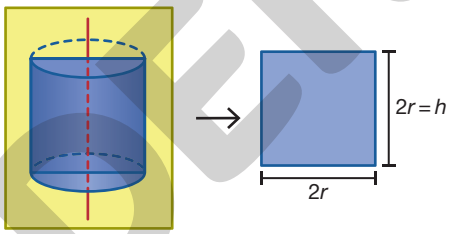


Em um cilindro oblíquo, a seção meridiana é determinada por um paralelogramo.



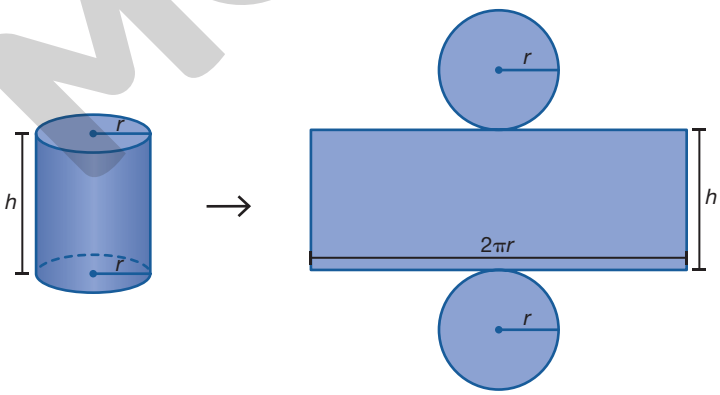
Em um cilindro reto, a seção meridiana é um determinada por retângulo.

Quando a seção meridiana de um cilindro é determinada por um quadrado, ou seja, $2r = h$, o cilindro é denominado cilindro equilátero.



Área da superfície de um cilindro reto

Observe um cilindro reto e sua respectiva planificação.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

As bases do cilindro são círculos congruentes de raio r e a superfície lateral é um retângulo de dimensões h e $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base). A partir dessas informações, podemos calcular a área da superfície, ou seja, a área total do cilindro.

Lembre-se de que a área de um círculo de raio r é πr^2, e o comprimento da circunferência que o determina, $2\pi r$.

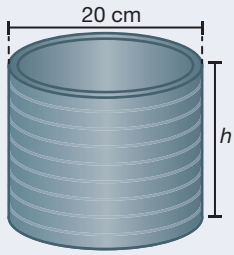
- Área da base: $A_b = \pi r^2$
- Área lateral: $A_\ell = 2\pi rh$
- Área total da superfície: $A_t = 2A_b + A_\ell = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow A_t = 2\pi r(r + h)$

Mostre aos alunos, caso seja necessário, como obter as fórmulas do cálculo da área do círculo e do comprimento da circunferência.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R1 Determine a altura de um recipiente, em forma de cilindro reto, sabendo que sua base tem 20 cm de diâmetro e sua superfície externa total (incluindo a tampa) foi coberta por 1 632,8 cm^2 de alumínio.



Resolução

Para resolver este problema, vamos considerar que esse recipiente seja um cilindro reto cuja base tem 20 cm de diâmetro. Como o comprimento do raio r é igual a metade do comprimento do diâmetro, temos $r = 10$ cm. Assim:

$A_b = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314$

$A_\ell = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot h = 62{,}8h$

Nesta resolução, considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Logo, a área da base é 314 cm^2 e a área da superfície lateral é $62{,}8h$ cm^2. Como a área total da superfície é 1 632,8 cm^2, fazemos:

$A_t = 2A_b + A_\ell \Rightarrow 1\,632{,}8 = 2 \cdot 314 + 62{,}8h \Rightarrow 62{,}8h = 1\,632{,}8 - 628 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \dfrac{1\,004{,}8}{62{,}8} = 16$

Outra maneira de resolver esse problema é substituir os valores na fórmula $A_t = 2\pi r(r + h)$.

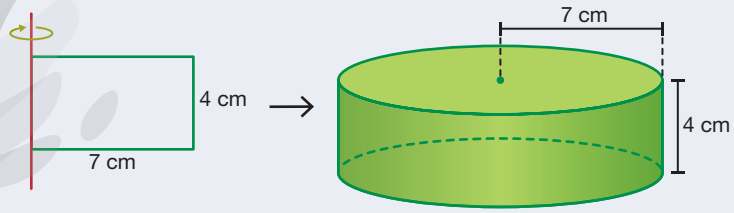
Portanto, a altura do recipiente é, aproximadamente, 16 cm.

R2 Considere um retângulo de lados 4 cm e 7 cm. Calcule a área total do cilindro obtido pela rotação do retângulo em torno de um de seus lados menores. (Considere $\pi = 3{,}14$.)

Resolução

• O cilindro tem altura 4 cm e raio da base 7 cm. Logo:

$$A_t = 2\pi r(r + h) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 \cdot (7 + 4) = 483{,}56$$



Portanto, a área total do cilindro é, aproximadamente, 483,56 cm^2.

Caso o retângulo fosse rotacionado em torno de um de seus lados maiores, qual seria a área total do cilindro obtido?

Verifique se os alunos perceberam que o cilindro obtido tem altura 7 cm e raio da base 4 cm, e nesse caso a área total é, aproximadamente, 276,32 cm^2.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R3 Considere um cilindro reto cuja área total é $20\pi\ cm^2$. Sabendo que a área da seção meridiana desse cilindro é $12\ cm^2$, determine o comprimento do raio da base desse cilindro.

Resolução

Como o cilindro é reto, então sua seção meridiana é um retângulo cujas dimensões são $2r$ e h, em que h é a altura do cilindro e r, o comprimento do raio da base. Assim:

$$2r \cdot h = 12 \Rightarrow rh = 6$$

Como a área total desse cilindro é $20\pi\ cm^2$, segue que:

$$20\pi = 2\pi r(r + h) \Rightarrow 10 = r^2 + rh$$

Substituindo rh por 6, obtemos:

$$10 = r^2 + rh \Rightarrow 10 = r^2 + 6 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

Note que $r = 2$, pois $r > 0$.

Portanto, o comprimento do raio da base desse cilindro é 2 cm.

Exercícios e problemas

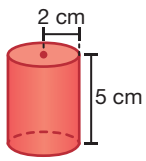
Anote as respostas no caderno.

1. b) $A_b \simeq 28{,}26\ cm^2$
$A_t \simeq 169{,}56\ cm^2$
$A_t \simeq 226{,}08\ cm^2$

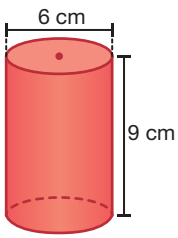
Quando necessário, na resolução das tarefas deste tema, considere $\pi = 3{,}14$.

1 Calcule a área da base, a área lateral e a área total de cada cilindro reto.

a)



b)

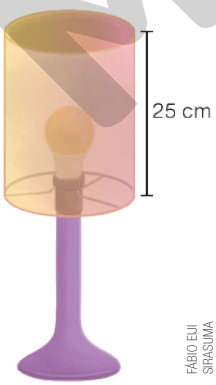


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

$A_b \simeq 12{,}56\ cm^2$
$A_t \simeq 62{,}8\ cm^2$
$A_t \simeq 87{,}92\ cm^2$

2 Calcule a área total de um cilindro reto com 40 cm de altura e comprimento do diâmetro da base igual a 25 dm. aproximadamente $4\,121{,}25\ dm^2$

3 Na confecção da cúpula de um abajur é construída uma armação com formato de cilindro reto que, em seguida, tem sua lateral totalmente coberta por um tecido retangular. Para que a cúpula do abajur com 25 cm de altura tenha $1\,570\ cm^2$ de tecido em sua superfície lateral, é necessário que a armação tenha quantos centímetros de raio? aproximadamente 10 cm



FÁBIO EIJI SIRASUMA

4 Um reservatório de água, com tampa, tem formato de cilindro reto e área da superfície igual a $314\ m^2$. Determine a altura desse reservatório sabendo que o comprimento do diâmetro da sua base é 10 m. aproximadamente 5 m

5 O cilindro compactador de uma máquina compactadora de asfalto, comumente chamada "rolo compressor", localiza-se na parte dianteira dela.

ANDREW OSTRY/SHUTTERSTOCK

Máquina compactadora de asfalto.

Sabendo que o cilindro compactador dessa máquina tem 1,3 m de diâmetro e 1,7 m de comprimento, responda às questões.

a) Qual é a área da superfície lateral do cilindro compactador dessa máquina? aproximadamente $6{,}94\ m^2$

b) No asfaltamento de uma rua, se essa máquina se deslocar em linha reta e contínua, que área, em metros quadrados, será compactada quando o cilindro realizar 50 voltas completas? aproximadamente $346{,}97\ m^2$

6 Considere em um plano cartesiano um retângulo com vértices nos pontos de coordenadas $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(5, 3)$ e $(5, 0)$. Calcule a área da superfície do cilindro obtido ao se rotacionar esse retângulo em torno do:

a) eixo x. aproximadamente 150,72 u.a. (unidades de área)

b) eixo y. aproximadamente 251,2 u.a. (unidades de área)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7 A agroindústria familiar é uma oportunidade para que os pequenos agricultores beneficiem sua produção, ou parte dela, de maneira a agregar valor aos seus produtos. Em geral, a produção das agroindústrias familiares pode ser encontrada em feiras livres, supermercados, entre outros lugares, e constitui ao consumidor uma alternativa de acesso a produtos mais saudáveis.

Em certo sítio são fabricados diversos tipos de compotas, a partir de frutas cultivadas na propriedade. O envasamento desses doces é realizado em potes com formado de cilindro reto com 15 cm de altura e 5 cm de raio da base. Após o envase, cada pote recebe um rótulo retangular, cujo comprimento corresponde à circunferência do pote, e a altura, a 60% da altura do pote.

O nome do produto que aparece nesta página é fictício.

FÁBIO EIJI SIRASUMA

Qual é a área de cada um desses rótulos?
aproximadamente 282,6 cm^2

8 Certa empresa produz, utilizando material reciclado, embalagens com formato de cilindro equilátero com 35 cm de altura. Após produzida, cada embalagem passa por um processo de pintura. Sabendo que 350 mℓ da tinta utilizada pinta, no máximo, 2,5 m^2, determine a quantidade mínima de tinta necessária para pintar 125 dessas embalagens.
aproximadamente 10 097,5 mℓ

9 Para sustentar a cobertura de uma construção serão utilizados sete pilares de madeira com formato de cilindro reto, todos com 30 cm de diâmetro, sendo seis com 3,5 m de altura e um com 5 m. Para protegê-los da umidade, suas superfícies laterais receberão uma camada de impermeabilizante. Sabendo que 900 mℓ de impermeabilizante cobrem uma área de 9 m^2, quantos litros dessa substância, aproximadamente, serão necessários para realizar o trabalho?
aproximadamente 2,45 ℓ

10 Elaborando

Realize uma pesquisa sobre objetos cotidianos com formato de cilindro reto. Em seguida, de acordo com os resultados obtidos, elabore um problema envolvendo o cálculo da área total de um cilindro reto. Por fim, peça para que um colega o resolva. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

11 Um dos aquários mais interessantes do mundo está localizado em um hotel de Berlim, na Alemanha. Esse aquário, denominado AquaDom, tem forma de cilindro reto, com um elevador em seu interior. Com cerca de 1 000 000 litros de água, o AquaDom abriga mais de 1 500 peixes. Sua base tem cerca de 34,54 m de circunferência e sua altura é de 25 m. Qual é a área da superfície lateral desse aquário?
aproximadamente 863,5 m^2

Fonte de pesquisa: <https://www.domaquaree.de/en/Modernisation-AquaDome.html>. Acesso em: 10 fev. 2020.

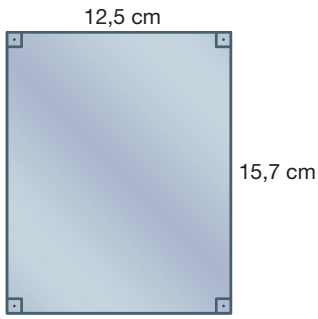
DPA PICTURE ALLIANCE/ALAMY/FOTOARENA

AquaDom, em Berlim, Alemanha, em 2015.

12 A superfície lateral de um recipiente cilíndrico será produzida com a chapa de metal representada abaixo, sem que haja desperdício de material.

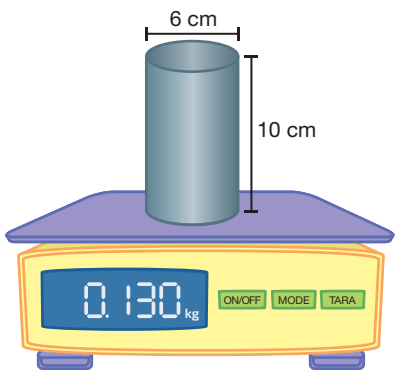
No máximo, quantos centímetros quadrados de área terá o fundo do recipiente? 19,625 cm^2

A tarefa **10** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.



RONALDO INÁCIO

13 O recipiente a seguir, que tem forma de cilindro reto e não possui tampa, foi produzido a partir de uma chapa de metal. Quantos gramas de metal há em 1 cm^2 dessa chapa? aproximadamente 0,6 g



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

O recipiente produzido possui fundo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

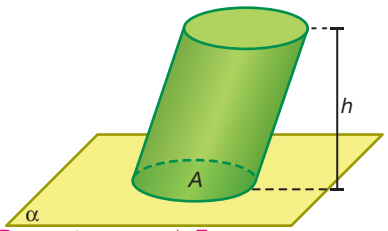
MODELO

Volume do cilindro

No cálculo da quantidade de água que pode ser armazenada em um reservatório cilíndrico podemos utilizar conhecimentos acerca do volume do cilindro.

Mas qual é a expressão que possibilita calcular o volume de um cilindro? Imagine um cilindro qualquer de altura h, cuja base seja um círculo de área A contido em um plano α.

FÁBIO EUI SIRASUMA



RONALDO INÁCIO

Pode-se mostrar que, em um cilindro, toda seção paralela à base é congruente a essa base.

A. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que construiriam um prisma apoiado no plano α, ao lado do cilindro, com altura h e área da base igual a A.

A Qual estratégia você utilizaria para calcular o volume desse cilindro?

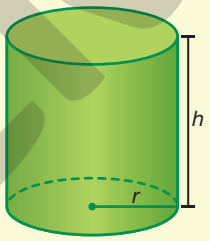
B Mostre que, para determinar o volume de um cilindro qualquer, multiplica-se a área da base pela sua altura.

B. Utilizando a estratégia descrita na questão A, temos um prisma e um cilindro apoiados em um plano α, ambos de altura h e área da base igual a A. Suponha agora um plano horizontal β, paralelo a α, que produz seções de áreas A' e A'' no prisma e no cilindro, respectivamente. Como figuras congruentes possuem áreas iguais, então $A' = A = A''$. Consequentemente, pelo Princípio de Cavalieri, o prisma e o cilindro possuem volumes iguais. Como estudamos anteriormente, o volume do prisma é igual a $A \cdot h$. Assim, o volume do cilindro também é igual a $A \cdot h$, ou seja, o produto da área da base por sua altura.

Use o Princípio de Cavalieri para relacionar um cilindro com outra figura geométrica espacial que você conheça e seja adequada para comparar seus volumes.

O volume V de um cilindro é obtido multiplicando a área da base pela sua altura. No caso do cilindro de altura h e raio da base r, temos:

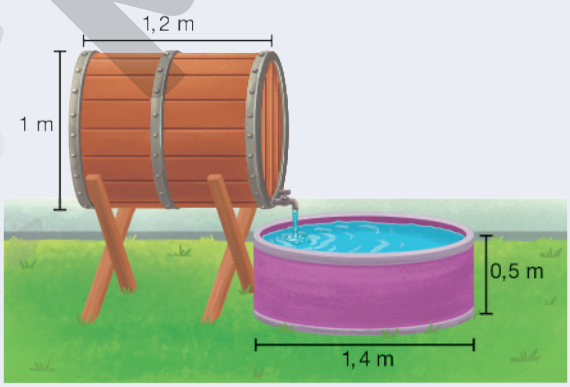
$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 h$$



RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas resolvidos

R4 Um barril de forma cilíndrica, com 1,2 m de altura interna e diâmetro interno da base com 1 m de comprimento, está completamente cheio de água. Para esvaziá-lo, foi utilizada uma torneira que despeja água à vazão média de 6 ℓ por minuto em um recipiente com formato de cilindro reto, conforme a figura.



FÁBIO EUI SIRASUMA

As medidas correspondentes ao recipiente referem-se às dimensões internas.

a) Considerando essa vazão média, quanto tempo é necessário para esvaziar totalmente o barril?

b) A capacidade do recipiente será suficiente para conter toda a água do barril?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolução

Inicialmente, calculamos o volume V de água no barril.

$$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot \underbrace{0{,}5}_{\frac{1}{2}}^2 \cdot 1{,}2 = 0{,}942$$

Assim, o volume de água no barril é, aproximadamente, 0,942 m^3.

Como a vazão é dada em litros e $1\ m^3 = 1\,000\ \ell$, fazemos:

$$0{,}942 \cdot 1\,000 = 942$$

Logo, a capacidade do barril, em litros, é aproximadamente 942 ℓ.

a) Indicando por x o tempo necessário para esvaziar o barril e usando a regra de três, temos:

Quantidade de água (em litros)	Tempo (em minutos)
6	1
942	x

$$\frac{6}{942} = \frac{1}{x} \Rightarrow 6x = 942 \Rightarrow x = 157$$

Portanto, serão necessários aproximadamente 157 minutos ou 2 horas e 37 minutos para esvaziar totalmente o barril.

b) Calculando a capacidade V_r do recipiente cilíndrico, temos:

$$V_r = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot \underbrace{(0{,}7)}_{\frac{1{,}4}{2}}^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}7693$$

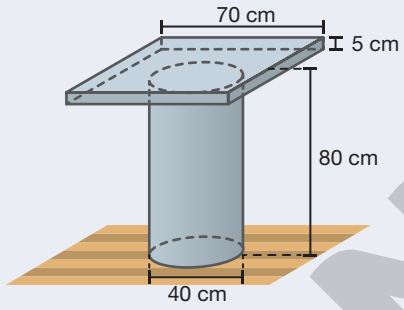
Note que nos itens **a** e **b**, utilizou-se $\pi = 3{,}14$.

Assim, a capacidade do recipiente é, aproximadamente, 0,7693 m^3.

Como a capacidade do recipiente é menor do que o volume de água no barril $(0{,}7693 < 0{,}942)$, então a capacidade do recipiente não será suficiente.

R5 A prefeitura de certa cidade vai construir, em uma praça, cinco mesas de concreto, como as representadas a seguir, com 80 cm de altura. Cada mesa será composta por duas partes maciças: uma com formato de cilindro reto, com 40 cm de diâmetro da base (pé da mesa), e outra com formato de paralelepípedo reto retângulo de base quadrada (tampo da mesa).

De acordo com as medidas indicadas na imagem e desconsiderando desperdícios, determine a quantidade mínima de concreto, em metros cúbicos, necessária para a construção dessas cinco mesas. (Considere $\pi = 3{,}14$.)



RONALDO INÁCIO

Resolução

Como a mesa é composta por duas partes, inicialmente, calculamos a quantidade de concreto necessária para a produção de cada uma delas, ou seja, calculamos seus volumes.

- Volume do pé da mesa:

$$V_P = \pi r^2 h =$$

$$= 3{,}14 \cdot \left(\frac{40}{2}\right)^2 \cdot (80 - 5) = 94\,200$$

Assim, são necessários 94 200 cm^3 de concreto para produzir o pé de uma mesa.

- Volume do tampo da mesa:

$$V_P = A_b \cdot h = 70^2 \cdot 5 = 24\,500$$

Logo, são necessários 24 500 cm^3 de concreto para produzir o tampo de uma mesa.

Agora, adicionando os volumes obtidos, determinamos a quantidade necessária de concreto para construir uma mesa.

$$94\,200\ cm^3 + 24\,500\ cm^3 = 118\,700\ cm^3$$

Por fim, determinamos a quantidade de concreto necessária para a construção das cinco mesas.

$$5 \cdot 118\,700\ cm^3 = 593\,500\ cm^3 = 0{,}5935\ m^3$$

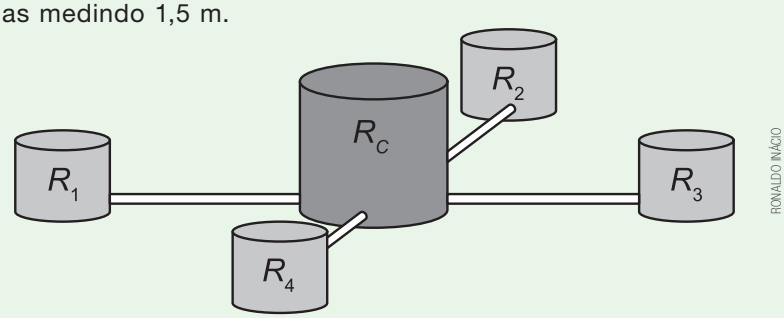
Portanto, são necessários, no mínimo, aproximadamente 0,5935 m^3 de concreto para construir as cinco mesas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

(Enem, 2019) Uma construtora pretende conectar um reservatório central (R_C) em formato de cilindro, com raio interno igual a 2 m e altura interna igual a 3,30 m, a quatro reservatórios cilíndricos auxiliares $(R_1, R_2, R_3$ e $R_4)$, os quais possuem raios internos e alturas internas medindo 1,5 m.



RONALDO INÁCIO

As ligações entre o reservatório central e os auxiliares são feitas por canos cilíndricos com 0,10 m de diâmetro interno e 20 m de comprimento, conectados próximo às bases de cada reservatório. Na conexão de cada um desses canos com o reservatório central há registros que liberam ou interrompem o fluxo de água.

No momento em que o reservatório central está cheio e os auxiliares estão vazios, abrem-se os quatro registros e, após algum tempo, as alturas das colunas de água nos reservatórios se igualam, assim que cessa o fluxo de água entre eles, pelo princípio dos vasos comunicantes.

A medida, em metro, das alturas das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é:

a) 1,44 b) 1,16 c) 1,10 d) 1,00 e) 0,95

A Compreendendo o problema

Se julgar necessário, informe aos alunos que, no problema, foi utilizado o termo "raios internos medindo 1,5 m" para se referir à medida do comprimento do raio que, nesse caso, é 1,5 m.

√ O que se pede no problema?

A altura das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

Dimensões do reservatório central, dos reservatórios auxiliares e dos canos que fazem as ligações entre os reservatórios.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, calculamos o volume de água do reservatório central cheio. Em seguida, determinamos o volume de água total contido nos reservatórios após cessar o fluxo de água entre eles. Por fim, determinamos a altura, em metros, das colunas de água em cada um dos reservatórios auxiliares.

√ Escolhendo as notações.

- V_{R_C}: volume de água do reservatório central cheio.
- V_C: volume interno dos canos de ligação.
- r_{R_C}: comprimento do raio interno do reservatório central.
- r_{R_A}: comprimento do raio interno de cada reservatório auxiliar.
- h_{R_C}: altura interna do reservatório central.
- d_C: comprimento do diâmetro interno de cada cano de ligação.
- h_C: altura interna de cada cano de ligação.
- H: altura das colunas de água.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

C Executando o plano

Passo 1

Inicialmente, calculamos o volume de água do recipiente central cheio.

$$V_{R_C} = \pi \cdot r_{R_C}^2 \cdot h_{R_C} = \pi \cdot 2^2 \cdot 3{,}30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{R_C} = 13{,}2\pi$$

Assim, o volume de água do recipiente central cheio é $13{,}2\pi\ m^3$.

Passo 2

Para determinar o volume total de água contida nos reservatórios, após cessar o fluxo de água entre eles, precisamos calcular, inicialmente, o volume de água contido nos canos que fazem a ligação entre os reservatórios. Nesse caso, o volume de água em um cano é:

$$V_C = \pi \cdot \left(\frac{d_C}{2}\right)^2 \cdot h_C =$$

$$= \pi \cdot (0{,}05)^2 \cdot 20 \Rightarrow V_C = 0{,}05\pi$$

Como são 4 canos, fazemos:

$$4 \cdot V_C = 4 \cdot 0{,}05\pi = 0{,}2\pi$$

Logo, o volume de água nos quatro canos é $0{,}2\pi\ m^3$.

Passo 3

Agora, determinamos o volume total de água contida nos reservatórios, após cessar o fluxo de água entre eles. Para isso, fazemos:

$$V_{R_C} - 4 \cdot V_C = 13{,}2\pi - 0{,}2\pi = 13\pi$$

Assim, o volume total de água contida nos reservatórios é $13\pi\ m^3$.

Passo 4

Pelo princípio dos vasos comunicantes, a altura das colunas de água em todos os reservatórios é a mesma. Assim:

$$\pi \cdot r_{R_C}^2 \cdot H + 4 \cdot \left(\pi \cdot r_{R_A}^2 \cdot H\right) = 13\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \cdot 2^2 \cdot H + 4 \cdot \left(\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot H\right) = 13\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\pi H + 9\pi H = 13\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13\pi H = 13\pi \Rightarrow H = 1$$

Desse modo, a altura das colunas de água nos reservatórios auxiliares, após cessar o fluxo de água entre eles, é 1 m. Portanto, a alternativa correta é a **d**.

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de tarefas ou problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico.

Agora é você quem resolve!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema.**

Jonas possui três recipientes: um em formato cúbico com o comprimento das arestas internas igual a 60 cm; outro em formato de prisma regular hexagonal com 40 cm de altura interna e arestas internas da base com 25 cm de comprimento; e outro em formato de cilindro reto, com raio interno igual a 1 m e altura interna de 1,2 m.

Para realizar um experimento, ele encheu, com água, os recipientes em formato cúbico e de prisma. Em seguida, despejou o conteúdo desses recipientes no recipiente cilíndrico. Após despejar a água, qual é a altura do nível da água no recipiente cilíndrico?

Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$ e $\pi = 3{,}14$.

2 **É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nessa seção? Qual é a resposta desse problema?**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

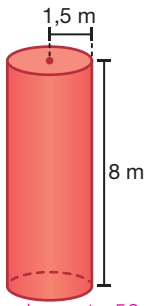
MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

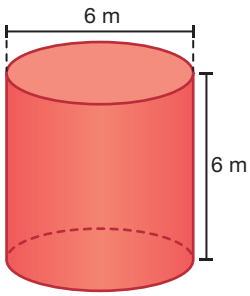
14 Calcule o volume de cada cilindro reto.

a)



aproximadamente 56,52 m³

b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

aproximadamente 169,56 m³

15 Calcule o volume de parafina utilizada na confecção de uma vela cilíndrica cujo comprimento do diâmetro da base é 4 cm, e a altura, 20 cm.
aproximadamente 251,2 cm³

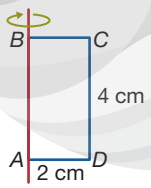
16 Determine o comprimento do raio da base de um cilindro reto, cujo volume é 15π cm³, e a altura, 3 cm. $\sqrt{5}$ cm

17 O reservatório de água de um condomínio tem a forma de um cilindro reto com 3 m de raio da base e 4 m de altura. Qual é a capacidade, em litros, desse reservatório?
aproximadamente 113 040 ℓ

Lembre-se de que 1 m³ = 1 000 ℓ.

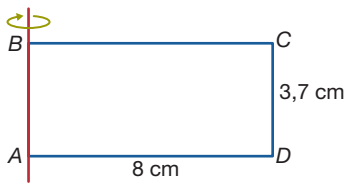
18 Em cada item, determine o volume do cilindro obtido pela rotação do retângulo em torno do eixo que contém seu lado $\overline{AB}$.

a)



aproximadamente 50,24 cm³

b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

aproximadamente 743,55 cm³

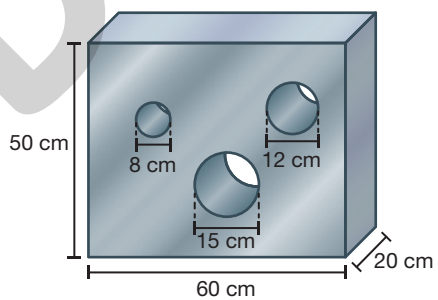
19 Até que altura, em centímetros, deve-se encher uma jarra cilíndrica, cujo raio da base tem 5 cm de comprimento, para que ela fique com 628 mℓ de água? aproximadamente 8 cm

20 (Enem, 2015) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m³ de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado? alternativa c

a) 0,5
b) 1,0
c) 2,0
d) 3,5
e) 8,0

21 Para confeccionar uma peça, um torneiro mecânico irá realizar três furos em formato de cilindro reto em uma chapa metálica com forma de paralelepípedo reto retângulo, como indicado no esquema.



RONALDO INÁCIO

a) Qual é o volume total de metal retirado da chapa na realização dos furos? aproximadamente 6 798,1 cm³

b) Qual é o volume da peça obtida?
aproximadamente 53 201,9 cm³

22 Desafio

(UFRGS-RS, 2018) Um tanque no formato de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 2 m, tem o nível da água aumentado em 25 cm após uma forte chuva. Essa quantidade de água corresponde a 5% do volume total de água que cabe no tanque.

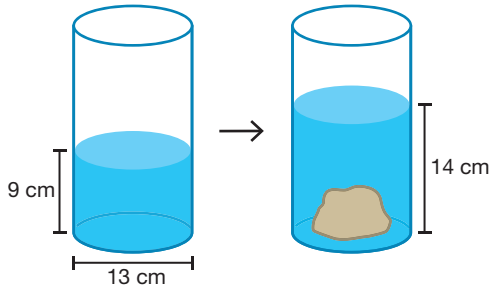
Qual é a alternativa que melhor aproxima o volume total de água que cabe no tanque, em m³? alternativa c

a) 57
b) 60
c) 63
d) 66
e) 69

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

23 Para medir o volume de um sólido irregular, Beatriz o submergiu totalmente em um recipiente com formato de cilindro reto com água, conforme o esquema. Qual é o volume desse sólido em centímetros cúbicos? aproximadamente 663,325 cm^3



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

24 Certa indústria produz um chocolate com forma cilíndrica cujo comprimento do diâmetro da base é 25 mm.

Sabendo que com 58,875 ℓ de chocolate é possível produzir 1 000 unidades desse produto, qual é o comprimento desse chocolate cilíndrico? aproximadamente 12 cm

FÁBIO EIJI SIRASUMA

O nome do produto que aparece nesta página é fictício.

25 (Enem, 2015) O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1 m^2, ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m^2 de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço de sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para π. O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de: alternativa d

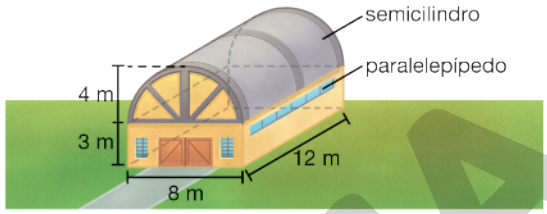
a) 10,8 c) 32,4 e) 324,0
b) 12,0 d) 108,0

26 Considere os cilindros C_1 e C_2 com alturas indicadas por, respectivamente, h_1 e h_2. Sabendo que os cilindros possuem volumes iguais e que a área da base de C_1 é igual ao dobro da área da base de C_2, pode-se afirmar que: alternativa c

a) $h_1 = h_2$.
b) $h_1 = 2 \cdot h_2$.
c) $h_2 = 2 \cdot h_1$.
d) $h_2 = \pi \cdot h_1$.
e) $h_1 = \frac{h_2}{4}$.

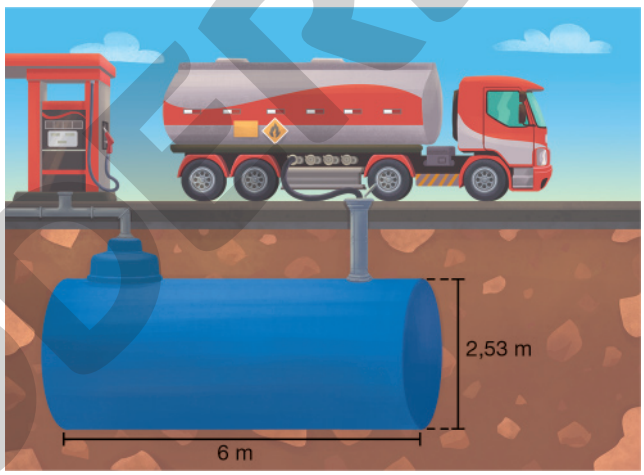
27 O galpão representado a seguir foi construído para armazenar a produção de certa indústria. Para conservar as propriedades originais dos produtos armazenados, será instalado um sistema de refrigeração no qual estarão dispostos em locais estratégicos pontos de entrada de ar.

Determine quantos desses pontos serão instalados, sabendo que para cada 120 m^3 de espaço interno do galpão será instalado um ponto. 5 pontos



FÁBIO EIJI SIRASUMA

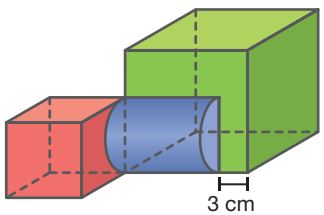
28 Para armazenar combustível, um posto revendedor utiliza um reservatório em formato de cilindro reto cuja altura e comprimento do diâmetro da base estão indicados no esquema.



FÁBIO EIJI SIRASUMA

Considerando que o reservatório esteja vazio e que será abastecido com 80% de sua capacidade por um caminhão-tanque, a uma vazão de 10 ℓ por segundo, em aproximadamente quantos minutos o reservatório será abastecido? aproximadamente 40 min

29 Um artesão construiu uma peça composta por três partes: duas em formato de cubo e uma em formato de um semicilindro reto.



RONALDO INÁCIO

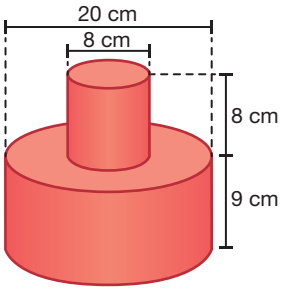
O diâmetro do semicilindro coincide com a aresta do cubo vermelho.

Sabendo que o semicilindro tem 10 cm de altura e o cubo em vermelho tem 8 cm de aresta, determine o volume dessa peça. aproximadamente 2 960,2 cm^3

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EM OBRA

30 O sólido a seguir é composto por duas peças, ambas com formato de cilindro reto.



RONALDO INÁCIO

aproximadamente 1 394,16 cm^2

a) Qual é a área da superfície desse sólido?

b) Determine o volume desse sólido.
aproximadamente 3 227,92 cm^3

No contexto

31 Vimos, nas páginas **92** e **93**, que no manejo florestal sustentável é necessário determinar o volume de uma tora. Além do método de Francon, pode-se utilizar o método geométrico para calcular o volume de uma tora de árvore. Esse método avalia o volume V de uma tora pela fórmula:

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4}$$

em que h é o comprimento da tora e D é a média aritmética entre o comprimento do diâmetro da base D_1 e do topo D_2 da tora.

Qual é o volume de uma tora com 20 m de comprimento cujo diâmetro da base e do topo têm, respectivamente, 1,2 m e 80 cm de comprimento? aproximadamente 15,7 m^3

32 No recipiente em formato de cilindro reto representado a seguir, foi armazenada uma substância homogênea cuja massa é 1,3 kg por litro.

RONALDO INÁCIO

As medidas apresentadas referem-se às dimensões internas do recipiente.

Sabendo que essa substância ocupa o espaço correspondente a 65% do volume interno do recipiente e que o recipiente vazio tem 5 kg, determine a massa do recipiente após o armazenamento da substância.
aproximadamente 55,7 kg

33 O pluviômetro é um instrumento utilizado para medir a quantidade de chuva ocorrida em certa região. De maneira geral, essa quantidade é expressa em milímetros. Quando dizemos, por exemplo, que choveu 10 mm em certa região, equivale a dizer que, nessa região, choveu 10 ℓ de água por metro quadrado. Considere que um agricultor, a fim de verificar a precipitação ocorrida em sua propriedade, tenha instalado em uma área aberta um balde cilíndrico com 12,5 cm de raio e 35 cm de altura. Se, após uma chuva, o balde, que estava vazio, passou a ter água no nível de 8 cm, qual foi a precipitação, em milímetros, ocorrida nessa propriedade?
aproximadamente 80 mm

DU ZUPPANI/PULSAR IMAGENS

Pluviômetro.

34 O palmito é um legume retirado do caule de algumas palmeiras. Além de pouco calórico é benéfico à saúde, pois fortalece o sistema imunológico, auxilia contra doenças cardíacas, ajuda os músculos, auxilia na cicatrização, é um tônico para o corpo, entre outros. Deve-se ter o cuidado de ferver o palmito por pelo menos 15 minutos antes do consumo.

Fonte de pesquisa: <https://alimentos.com.br/beneficios-do-palmito-para-a-saude/>. Acesso em: 11 fev. 2020.

Qual é a altura de um palmito cujo volume é 84,78 cm^3 e o comprimento do diâmetro da base é 3 cm? aproximadamente 12 cm

Para resolver essa tarefa, considere que o palmito tenha formato de cilindro.

35 Utilizando um balde em formato de cilindro com 35 cm de altura cujo comprimento do diâmetro da base é 28 cm, Neide pretende encher uma caixa d'água com 64 cm de altura cuja capacidade é 250 ℓ. Qual será, desconsiderando possíveis desperdícios, a altura do nível da água na caixa d'água, após Neide despejar o conteúdo de 5 baldes completamente cheios nesse recipiente? aproximadamente 27,57 cm

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

36 Considere um cilindro reto e um prisma hexagonal regular de mesmo volume e altura. Sabendo que o polígono da base do prisma tem 5 cm de lado, determine o comprimento do raio da base do cilindro. aproximadamente 4,55 cm

37 Certo fabricante está em dúvida entre qual formato de embalagem com tampa deve utilizar para armazenar um de seus produtos. Foram apresentados os seguintes tipos.

- Embalagem A: formato de cilindro com 34 cm de altura e comprimento do raio da base igual a 9 cm.
- Embalagem B: formato de paralelepípedo reto retângulo cujas dimensões são 30,5 cm, 19,3 cm e 14,432 cm.
- Embalagem C: formato de cilindro com 19,125 cm de altura e comprimento do raio da base igual a 12 cm.

a) Após realizar alguns cálculos, o fabricante percebeu que duas das embalagens possuem volumes iguais. Quais são elas? embalagens A e C

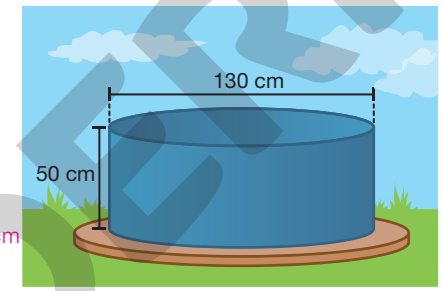
b) Sabendo que o metro quadrado do material utilizado na fabricação dessas embalagens custa R$ 32,50 e que, entre as embalagens de mesmo volume, o fabricante optou pela de menor custo, determine qual foi a embalagem escolhida. embalagem C

c) Qual será o gasto com material para produzir 1 500 embalagens? aproximadamente R$ 11 434,70

Para responder o item **c**, considere a embalagem escolhida pelo fabricante.

38 Um reservatório em formato de cilindro reto será abastecido com água por meio de uma torneira que possui vazão constante de 0,66 litros por segundo. Veja as dimensões internas desse reservatório.

Qual será a altura, em centímetros, do nível da água após 5 minutos de abastecimento? aproximadamente 3,73 cm



RONALDO INÁCIO

39 O quilate das ligas de ouro é uma unidade de pureza, que indica quanto de ouro e quanto de outros metais está presente no material. Cada quilate indica $\frac{1}{24}$ do todo. Assim, uma peça com 18 partes em massa de ouro e 6 partes em massa de algum outro metal é um ouro de 18 quilates. Portanto, uma peça de ouro de 18 quilates tem $\frac{3}{4}$ da massa em ouro e $\frac{1}{4}$ da massa em outro metal.

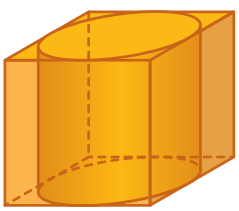
Imagine que a taça de uma competição seja maciça e composta apenas por ouro 18 quilates, cuja composição é de ouro com densidade 19,3 g/cm^3 e outro metal com densidade 6,1 g/cm^3. Sabendo que essa taça tem formato de cilindro reto com 36 cm de altura e 5 cm de raio da base, sua massa seria de: alternativa a

a) 30 kg a 35 kg.
b) 10 kg a 15 kg.
c) 15 kg a 20 kg.
d) 20 kg a 25 kg.
e) 40 kg a 45 kg.

40 Desafio

Um objeto em formato de cilindro equilátero deverá ser acondicionado em uma embalagem com formato de paralelepípedo reto retângulo, de maneira que as "folgas" entre o objeto e a parte interna da embalagem sejam mínimas.

Sabendo que o volume do objeto é 3 215,36 cm^3, qual deverá ser o volume interno da embalagem? aproximadamente 4 096 cm^3


RONALDO INÁCIO

A tarefa **41** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

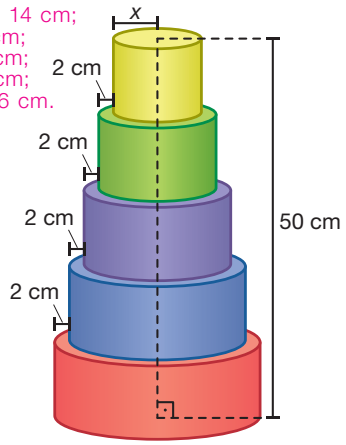
41 De acordo com os resultados obtidos na pesquisa realizada na tarefa **10** deste tema, elabore um problema envolvendo o cálculo do volume de um cilindro. Por fim, peça para que um colega o resolva. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

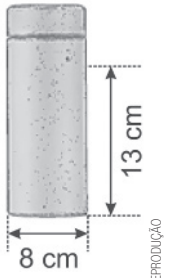
42 Cinco peças em formato de cilindro reto de mesma altura, porém com diferentes volumes, foram empilhadas. Sabendo que os centros das bases dessas peças estão alinhados e que a pilha de peças possui um volume igual a 16 956 cm^3, determine o comprimento do raio da base de cada uma dessas peças.

peça vermelha: 14 cm;
peça azul: 12 cm;
peça roxa: 10 cm;
peça verde: 8 cm;
peça amarela: 6 cm.



RONALDO INÁCIO

43 (Fatec-PR, 2019) Uma garrafa térmica tem formato de um cilindro circular reto, fundo plano e diâmetro da base medindo 8,0 cm. Ela está em pé sobre uma mesa e parte do suco em seu interior já foi consumido, sendo que o nível do suco está a 13 cm da base da garrafa, como mostra a figura.



REPRODUÇÃO

O suco é despejado num copo vazio, também de formato cilíndrico e base plana, cujo diâmetro da base é 4 cm e com altura de 7 cm. O copo fica totalmente cheio de suco, sem desperdício.

Nessas condições, o volume de suco restante na garrafa é, em cm^3, aproximadamente,

a) 250.
b) 380.
c) 540.
d) 620.
e) 800.

alternativa **c**

Adote $\pi = 3$.

Despreze a espessura do material da garrafa e do copo.

Se julgar necessário, informe aos alunos que, no problema, foi utilizado o termo "diâmetro da base medindo 8,0 cm" para se referir à medida do comprimento do diâmetro da base que, nesse caso, é 8,0 cm.

Acessando tecnologias

Condições no VisualG

Em diversas situações cotidianas, formulamos proposições do tipo: se Luiz obtiver uma nota superior a 7,5, então ele será aprovado em Matemática; se eu receber meu salário hoje, irei ao cinema, se não, lerei um livro. Essa estrutura, além de estar presente em nosso cotidiano, é útil e, muitas vezes, necessária em programação. Ela indica para o sistema se o programa deve ou não executar certa sequência de instruções, dependendo se a condição atribuída for verdadeira ou falsa. Para isso, no VisualG, podemos utilizar as seguintes instruções.

se(condição)**entao**
sequência de instruções
fimse

se(condição)**entao**
sequência de instruções 1
senao
sequência de instruções 2
fimse

Note que, para indicar o fim da sequência de instruções com condição deve-se adicionar a instrução **fimse**.

A instrução **se( )entao** tem por finalidade tomar uma decisão e executar determinada sequência de instruções, caso a condição descrita entre os parênteses seja verdadeira. Se a condição for falsa, a sequência de instruções deve ser desprezada. Assim como a instrução **se( )entao**, a instrução **se( )entao...senao** tem por finalidade tomar decisão e realizar um desvio no processamento. Se a condição descrita entre os parênteses for verdadeira, a sequência de instruções 1 será executada e a sequência de instruções 2, desprezada. Caso a condição seja falsa, a sequência de instruções 1 será desprezada e a sequência de instruções 2, executada.

Para as condições, são utilizados os seguintes operadores relacionais para testar a relação entre dois ou mais termos.

Comando	=	>	>=	<	<=	<>
Significado	igual	maior do que	maior do que ou igual	menor do que	menor do que ou igual	diferente

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Além disso, é possível utilizar dois ou mais operadores relacionais em uma mesma condição, por meio de operadores lógicos como **e**, **ou** e **nao**.

Exemplo de um programa em VisualG – É possível armazenar certo volume de água em um recipiente com formato cilíndrico?

Utilizando os conceitos de programação estudados, vamos resolver o problema a seguir.

Escrever um programa que determine se é possível armazenar certo volume de água, em litros, em um recipiente com formato de cilindro reto, dados o comprimento do diâmetro interno da base e a altura interna do recipiente, ambos em centímetros.

Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo que o resolva. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1. Leia o volume V de água, em litros, a ser armazenada no recipiente.
2. Leia o comprimento, em centímetros, do diâmetro interno d da base do recipiente.
3. Leia a altura interna h, em centímetros, do recipiente.
4. Calcule $V_R = \dfrac{\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 h}{1\,000}$.
5. Se V_R for menor do que V, não é possível armazenar o volume de água no recipiente. Caso contrário, é possível armazenar o volume de água no recipiente.

Fim

Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "recipiente_cilindrico"
2  Var
3  d, altura, volume_recipiente, litros: real
4  Inicio
5  escreva("Digite o volume de água, em litros, a ser armazenado no recipiente: ")
6  leia(litros)
7  escreva("Digite o comprimento do diâmetro interno, em centímetros, da base do recipiente: ")
8  leia(d)
9  escreva("Digite a altura interna, em centímetros, do recipiente: ")
10 leia(altura)
11 volume_recipiente <- (d/2)*(d/2)*pi*altura
12 se(volume_recipiente/1000 < litros)entao
13 escreva("Não é possível armazenar o volume de água no recipiente!")
14 senao
15 escreva("É possível armazenar o volume de água no recipiente!")
16 fimse
17 Fimalgoritmo
```

Agora é com você!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 Qual condição deve ser satisfeita para que a instrução da linha **15** seja executada?

2 Escreva um programa em VisualG que determine se é possível armazenar certo volume de água, em litros, em um recipiente com formato de cilindro reto, dados o comprimento do diâmetro interno da base e a altura interna do recipiente, ambos em metros.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

9 Volume interno de um motor

BNCC
•CE3CNT

Como funciona o motor de um carro?

A função principal do motor é transformar combustível em energia capaz de gerar movimento nas rodas. O coração desse sistema é uma pequena câmara de combustão chamada cilindro. Dentro de cada cilindro [...] estão os pistões. A queima do combustível faz os pistões se movimentarem, girando um eixo chamado virabrequim, que vai levar a energia mecânica até o sistema de transmissão, que por sua vez distribui essa energia para as rodas. O resultado dessa reação em cadeia é o movimento do carro. [...].

CC, CV, RPM

Siglas-chave para o motor

- Cilindrada (CC)

  Volume de ar e combustível que os cilindros suportam. Se um carro tem quatro cilindros com capacidade para 0,25 litro de ar e combustível cada um, a cilindrada será de 1 litro $(0{,}25 \cdot 4 = 1)$. Nesse caso, a gente diz que o motor é 1.0 ou tem 1 000 cc.
- Rotações por minuto (RPM)

  Número de giros por minuto do virabrequim. Geralmente, um carro de passeio chega a até 6 000 rpm.
- Potência (CV)

  Cálculo que envolve cilindrada, rpm e rendimento do motor e do combustível. Um carro 1.0 girando a 6 000 rpm tem potência de [aproximadamente] 65 cv (cavalos-vapor).

FOTOMONTAGEM DE MARIANA COAN. FOTOS: 1.ICESTYLECG/SHUTTERSTOCK; 2.ZENTILIA/SHUTTERSTOCK; 3.AKSENENKO OLGA/SHUTTERSTOCK; 4.EGOROV ARTEM/SHUTTERSTOCK; 5.ANDREY BURMAKIN/SHUTTERSTOCK; 6.PHICHAI/SHUTTERSTOCK

Mão na roda

Explosão de ar e combustível dentro dos cilindros é a força que faz o carro andar

1. Imagine que seu possante está parado e você vira a chave no contato. Quando isso rola, a bateria manda eletricidade para o motor de arranque, um motor elétrico que é ligado para fazer os pistões do cilindro se movimentar pela primeira vez. A partir daí, o motor tá ligado.

2. Para que o motor siga em movimento, os pistões precisam de combustível, que é injetado nos cilindros pelos bicos de injeção. Um outro equipamento, a central da injeção eletrônica, é o "cérebro" que controla a quantidade de ar e combustível jogada no motor.

3. O processo de combustão precisa obrigatoriamente de ar. Ele entra no carro pelo filtro de ar, que barra as impurezas, e segue para o cilindro, possibilitando a explosão. A relação ar/combustível tem de ser exata: com ar demais, o motor perde desempenho. Com ar de menos, o consumo do carro aumenta.

4. Em cada cilindro, a explosão do combustível rola assim: primeiro ocorre a entrada da mistura ar/combustível, quando a válvula de admissão está aberta. Depois, o pistão se movimenta para cima, comprimindo a mistura ar/combustível. Nessa hora, a vela recebe eletricidade [...] e gera uma faísca, causando a explosão da mistura ar/combustível.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5. A explosão gera um gás quente que se expande, empurrando o pistão para baixo. Esse "empurrão" faz o pistão movimentar o virabrequim, um eixo que recebe a energia de todos os pistões e a transforma em rotação. No fim, a válvula de exaustão do cilindro se abre e os gases da combustão são liberados para o escapamento.

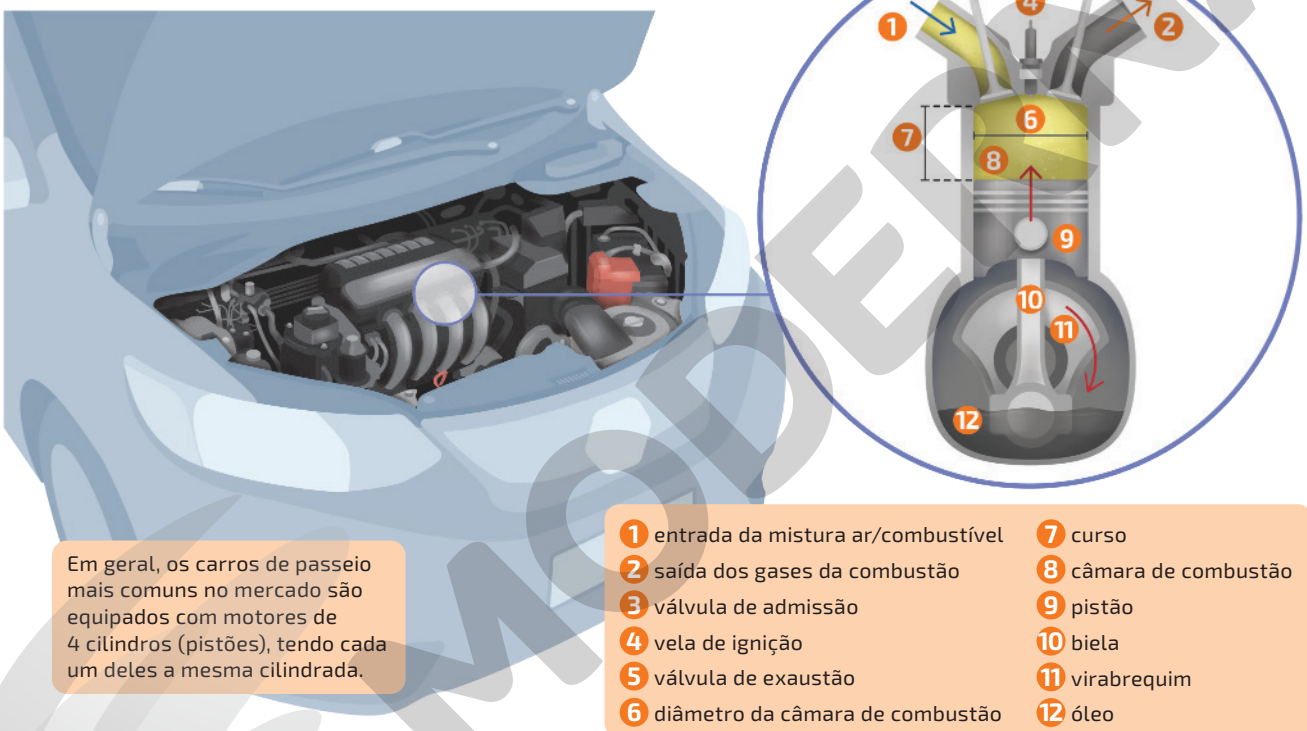
6. O movimento do virabrequim influencia outras peças. Primeiro, por meio da correia dentada, as rotações são transmitidas para uma polia que controla as válvulas. Se a correia se romper, as válvulas param de funcionar. O entra-e-sai de combustível e ar não rola e o carro pifa.

7. Depois, a rotação do virabrequim é transmitida para o câmbio, um conjunto de engrenagens que transmite a energia da explosão dos pistões para as rodas, fazendo o carro andar. A cada minuto, todo esse processo se repete até 6 mil vezes no motor do carro.

BADÔ, Fernando. *Como funciona o motor de um carro?* Mundo Estranho, São Paulo, ed. 81a, 1º nov. 2008. p. 24-25.

© Fernando Badô/Abril Comunicações S.A.

Veja na imagem um esquema mostrando algumas peças que fazem parte de um motor a combustão interna.



HELOÍSA PINTARELLI

Em geral, os carros de passeio mais comuns no mercado são equipados com motores de 4 cilindros (pistões), tendo cada um deles a mesma cilindrada.

1. entrada da mistura ar/combustível
2. saída dos gases da combustão
3. válvula de admissão
4. vela de ignição
5. válvula de exaustão
6. diâmetro da câmara de combustão
7. curso
8. câmara de combustão
9. pistão
10. biela
11. virabrequim
12. óleo

Oriente os alunos a escrever a resposta no caderno.

A Qual é a ideia principal do texto?
Apresentar como funciona o motor a combustão interna de um carro.

B Em sua opinião, qual a importância da ilustração acrescentada após o texto do artigo? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que a ilustração auxilia na compreensão do texto.

C Qual é a função da vela de ignição no funcionamento do motor?
Gerar a faísca que causa a explosão da mistura ar/combustível, que movimenta os pistões.

D Em um motor de 1.6 ℓ e 4 cilindros, qual é a capacidade, em litro, de cada câmara de combustão? 0,4 ℓ

E Considerando um motor 3.0 ℓ, 6 cilindros e curso de 8,8 cm, qual é o diâmetro, em centímetros, da câmara de combustão de cada um dos pistões? aproximadamente 8,5 cm

F Quantas cilindradas tem um motor de 8 cilindros, cujo diâmetro do pistão é 9,7 cm e curso de 8,8 cm? aproximadamente 5 200 cc

G Junte-se a um colega e pesquisem alguns benefícios e malefícios que a invenção do motor de combustão interna trouxe para a humanidade. Depois, apresentem para a turma as conclusões da pesquisa. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

10 Cone

Colorindo imagens com o poder do cérebro

Quando navegamos pela internet ou lemos algum livro, por exemplo, podemos nos deparar com imagens que enganam a visão humana, conhecidas como ilusões de ótica. Algumas dessas imagens podem gerar debates em relação a movimentos ou cores, como no caso da imagem no vídeo disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=3P8q_dCU3RI&feature=emb_title>
Acesso em: 3 jun. 2020.

BNCC
- EM13MAT309
- EM13MAT315
- EM13MAT504
- CE2CNT

Para realizar a experiência disponível nesse vídeo, você deve observar fixamente a foto que apresenta contraste com vermelho e azul, durante 30 segundos, fixando seu olhar no ponto azul no centro da imagem (foto representada pela imagem **A**). Em seguida, dirija seu olhar rapidamente à foto que, a princípio, é em preto e branco (foto representada pela imagem **B**). Em um rápido instante, ao transferir o olhar da foto em contraste para a foto em preto e branco, é possível que você observe a imagem em cores (representada na imagem **C**), ainda que a foto esteja apresentada originalmente em preto e branco! Mas como isso é possível?

Explique aos alunos que essa experiência só funciona no vídeo citado e que as fotos são ilustrativas.

A

B

C

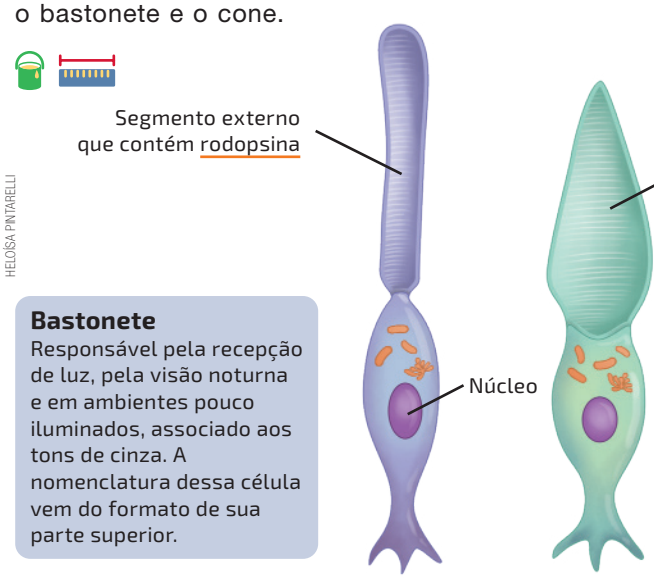
Esse efeito acontece por conta de algumas características da visão humana, principalmente por causa das células chamadas **cones**. A retina corresponde a um revestimento mais interno do olho, sendo formada, entre outros elementos, por duas células responsáveis pela formação das imagens: os cones e os bastonetes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Células receptoras de luz

As duas células receptoras de luz e responsáveis por enxergamos as cores são o bastonete e o cone.



HELOÍSA PINTARELLI

Bastonete
Responsável pela recepção de luz, pela visão noturna e em ambientes pouco iluminados, associado aos tons de cinza. A nomenclatura dessa célula vem do formato de sua parte superior.

Cone
Responsável por enxergarmos colorido, de modo que existe um tipo correspondente à luz vermelha, outro à luz verde e outro à luz azul. A nomenclatura dessa célula tem relação com o formato de sua parte superior.

Rodopsina: pigmento de natureza proteica presente nos bastonetes.

A mudança na cor da figura apresentada anteriormente ocorre porque, quando os cones são superexpostos a apenas uma cor, um dos tipos deixa de responder e os outros dois tipos acabam mostrando cores opostas ou complementares da imagem. Nesse caso, por exemplo, em vez da cor vermelha, os cones mostram a cor verde. Porém, essa mudança é rápida devido à velocidade de funcionamento de nosso cérebro, sendo essa falha corrigida em questão de segundos. Assim, é possível construir essas ilusões de ótica que, apesar de muitas vezes serem utilizadas como entretenimento, podem contribuir para estudos científicos associados à Medicina e ao funcionamento do corpo humano.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Você já se deparou com algum outro tipo de ilusão de ótica envolvendo cores? Se sim, cite-o(s). Resposta pessoal.

B Em sua opinião, quais figuras geométricas espaciais podem ser associadas ao formato do cone e do bastonete?

C Pesquise a respeito de outros tipos de ilusão de ótica e compartilhe as informações com os colegas. Resposta pessoal.

B) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que ao formato do bastonete podem ser associados o cilindro e a esfera, e ao do cone podem ser associados o cone e a esfera.

Para expressar o nome de uma célula presente no olho humano, é utilizada a nomenclatura **cone**, que também é o nome de uma importante figura geométrica espacial que você provavelmente já conhece. Nas próximas páginas, vamos relembrar e aprimorar o estudo do cone, bem como realizar o cálculo da área e do volume dessa figura. Além disso, estudaremos o tronco de cone.

FOTOMONTAGEM DE JULIANA DEL ANHOL AZEVEDO. FOTOS: 1.CANADASTOCK/SHUTTERSTOCK; 2.SLANAPOTAM/SHUTTERSTOCK; 3.ARSGERA/SHUTTERSTOCK; 4.MASSON/SHUTTERSTOCK; 5.GREENBELKA/SHUTTERSTOCK; 6.MASSON/SHUTTERSTOCK; 7.SIRIWAT WONGCHANA/SHUTTERSTOCK; 8.YULIYA KOLDOVSKA/SHUTTERSTOCK; 9.ZAMUROVIC PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 10.WAYHOME STUDIO/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

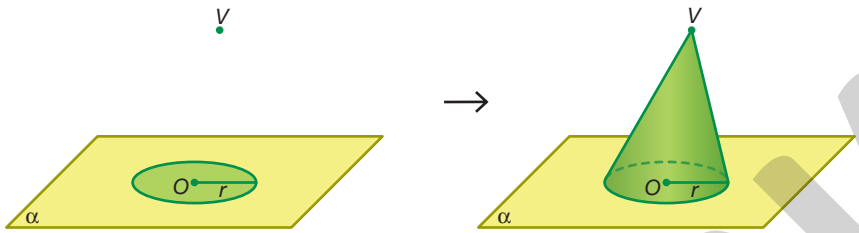
O cone

AD/KM/SHUTTERSTOCK

funil

Parte do funil ao lado assemelha-se a um cone. Para determinarmos a quantidade de material necessário para sua fabricação ou a capacidade que ele pode comportar, é necessário que estudemos os elementos que compõem o cone, assim como a área de sua superfície e seu volume.

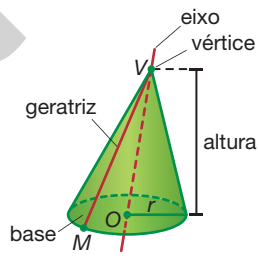
Para definirmos o cone circular, consideramos um plano α, um círculo C de centro O contido nele e um ponto V não pertencente a α. A união de todos os segmentos com uma extremidade na circunferência que determina C e a outra extremidade em V, juntamente com o círculo C, é chamada **cone circular**.



Neste livro, trataremos apenas dos cones circulares. Assim, a fim de simplificar a escrita, chamaremos o cone circular simplesmente de cone.

Em um cone, podemos destacar os seguintes elementos.

- A **base** é o círculo de raio r e centro O.
- O **vértice** é o ponto V.
- As **geratrizes** são os segmentos com uma extremidade no vértice e outra na circunferência da base. Nesse cone, $\overline{VM}$ é um exemplo de geratriz.
- O eixo é a reta $\overleftrightarrow{OV}$.
- A **altura** é a distância entre os planos paralelos que contêm a base base e o vértice V.
- A **superfície lateral** é a reunião de todas as geratrizes.

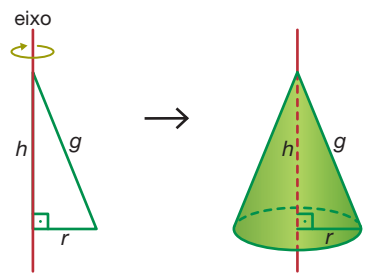


O cone é denominado **cone oblíquo** quando tem eixo oblíquo à base. Já quando tem eixo perpendicular à base, recebe o nome de **cone reto**.

cone oblíquo

cone reto

O cone reto pode ser obtido ao rotacionarmos um triângulo retângulo em torno do eixo até uma volta completa (com um dos catetos contido no eixo). Dessa maneira, ele também é denominado **cone de revolução**.

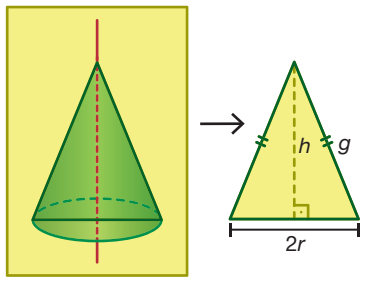


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

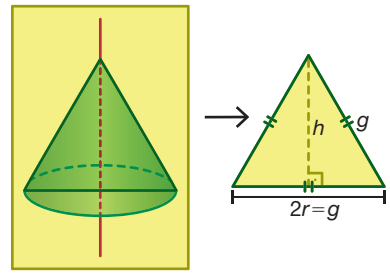
MODERNA

A **seção meridiana** de um cone, região determinada pela interseção do cone com um plano que contém seu eixo, é um triângulo.



Em um cone reto, a seção meridiana é determinada por um triângulo isósceles.

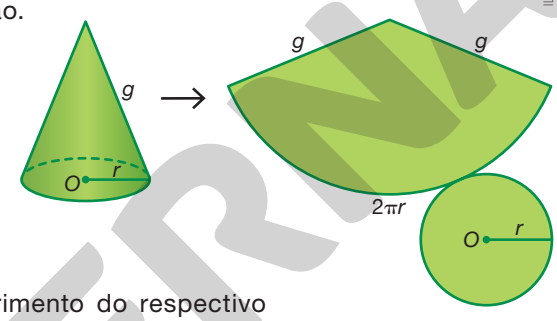
Quando a seção meridiana de um cone é determinada por um triângulo equilátero, este é denominado **cone equilátero**. Nesse caso, $2r = g$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Área da superfície de um cone reto

Observe ao lado um cone reto e sua respectiva planificação.



De acordo com a planificação, é possível notar que a base do cone reto é um círculo de raio r e a superfície lateral é um setor circular de raio g e comprimento $2\pi r$. Com base nessas informações, podemos calcular a área da superfície, ou seja, a área total do cone.

- Área da base: $A_b = \pi r^2$
- Área lateral:

  Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do respectivo arco, podemos determinar a área lateral A_ℓ por meio de uma regra de três.

Comprimento do arco	Área do setor
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	A_ℓ

$$\frac{2\pi g}{2\pi r} = \frac{\pi g^2}{A_\ell} \Rightarrow A_\ell \cdot g = r \cdot \pi g^2 \Rightarrow A_\ell = \pi rg$$

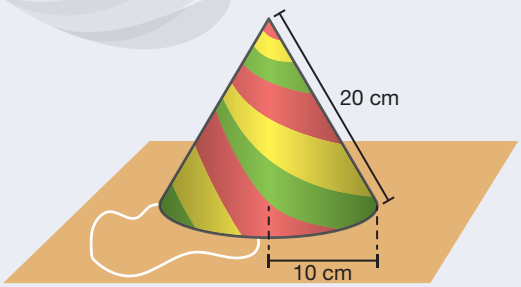
Note que g é o comprimento do raio do setor circular.

- Área total da superfície: $A_t = A_b + A_\ell = \pi r^2 + \pi rg \Rightarrow A_t = \pi r(r + g)$

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Um chapéu de festa, feito de cartolina, tem o formato de um cone reto. Suas dimensões estão indicadas na imagem.

Sabendo que a aba de encaixe de cada chapéu tem 5 cm² de área, determine quantos centímetros quadrados de cartolina são necessários para produzir 50 unidades desse chapéu.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Após ser montado, o chapéu tem formato de cone reto de raio 10 cm e geratriz 20 cm. Assim:

$$A_\ell = \pi rg = 3{,}14 \cdot 10 \cdot 20 = 628$$

Nessa resolução, considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Logo, a área da superfície lateral do chapéu é, aproximadamente, 628 cm².

Calculando a quantidade q necessária para produzir 50 unidades, temos:

$$q = 50 \cdot 628 + 50 \cdot 5 = 31\,650$$

Portanto, para produzir 50 unidades do chapéu são necessários, aproximadamente, 31 650 cm² de cartolina.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 A altura de um cone reto mede 12 cm, e o diâmetro da base, 10 cm. Em relação a esse cone, calcule:

a) o comprimento da geratriz.

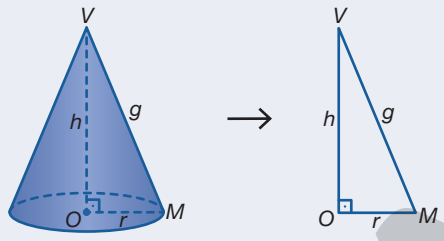
b) a área total.

c) a medida do ângulo do setor circular.

Resolução

a) O raio da base r, a altura h e a geratriz g do cone formam, nessa ordem, os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo VOM, conforme a figura ao lado.

Como $r = 5\,\text{cm}$ e $h = 12\,\text{cm}$, calculamos o comprimento da geratriz do cone utilizando o Teorema de Pitágoras.



$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g^2 + 169 \Rightarrow g = 13$

Note que $g = 13\,\text{cm}$, pois $g > 0$.

Portanto, o comprimento da geratriz é 13 cm.

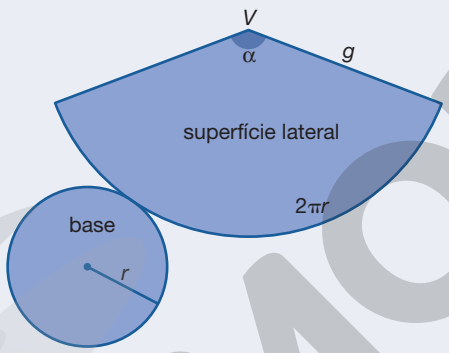
b) Calculando a área total do cone, temos:

$A_t = \pi r(r + g) = 3{,}14 \cdot 5 \cdot (5 + 13) = 15{,}7 \cdot 18 = 282{,}6$

Considere $\pi = 3{,}14$.

Portanto, a área total do cone é, aproximadamente, $282{,}6\,\text{cm}^2$.

c) Ao planificar a superfície lateral do cone, obtemos um setor circular de ângulo α cujo arco tem comprimento $2\pi r$. Considerando a circunferência completa $(360°)$ de raio g, seu comprimento é $2\pi g$. Logo, calculamos a medida do ângulo α do setor circular utilizando regra de três.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Ângulo (graus)	Comprimento (centímetro)
360	$2\pi g$
α	$2\pi r$

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{2\pi g}{2\pi r} \Rightarrow \alpha \cdot \underset{\sim 13}{g} = 360 \cdot \underset{\sim 5}{r} \Rightarrow \alpha \simeq 138{,}5°$$

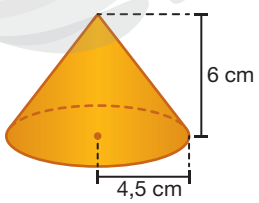
Portanto, $\alpha \simeq 138{,}5°$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Quando necessário, na resolução das tarefas desse tema, considere $\pi = 3{,}14$.

1 Em relação ao cone reto apresentado, calcule:



RONALDO INÁCIO

a) a área da base. aproximadamente $63{,}585\,\text{cm}^2$

b) o comprimento da geratriz. 7,5 cm

c) a área total da superfície. aproximadamente $169{,}56\,\text{cm}^2$

2 Qual é a área total da superfície de um cone reto, sabendo que sua geratriz tem 10 cm de comprimento, e o raio da base, 3 cm?
aproximadamente $122{,}46\,\text{cm}^2$

3 Sabendo que em um cone reto a área da superfície lateral é $3\,265{,}6\,\text{cm}^2$ e o comprimento da geratriz é 52 cm, responda às questões.

a) Qual é o comprimento do diâmetro da base desse cone? aproximadamente 40 cm

b) Qual é a altura desse cone? aproximadamente 48 cm

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Considerado o décimo monumento em altura no mundo e o segundo na América do Sul, a Catedral de Maringá é, sem dúvida, um cartão-postal do Paraná. Construída no período de julho de 1959 a maio de 1972, essa igreja possui forma cônica, com 50 m de diâmetro externo da base e 114 m de altura. Calcule a área lateral dessa catedral, considerando apenas sua parte cônica. aproximadamente 9 161 m²

Fonte de pesquisa: Catedral. *Prefeitura do Município de Maringá*. Disponível em: <http://www2.maringa.pr.gov.br/cultura/?cod=turismo-cultural/1>. Acesso em: 10 abr. 2021.

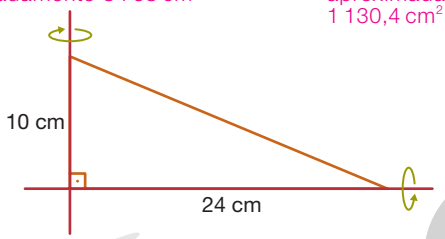
ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Catedral de Maringá, Paraná, em 2018.

5 Calcule a área total da superfície da figura obtida ao rotacionar o triângulo a seguir em torno do:

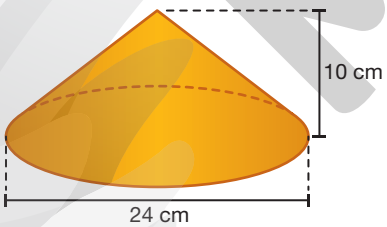
a) menor cateto. aproximadamente 3 768 cm²

b) maior cateto. aproximadamente 1 130,4 cm²



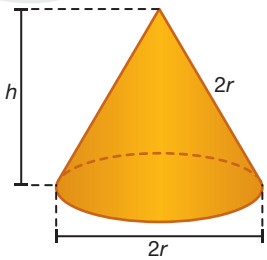
RONALDO INÁCIO

6 Determine a altura de um cone reto para que este tenha a mesma área da base e o dobro da área da superfície lateral do cone reto representado a seguir. $8\sqrt{13}$ cm



RONALDO INÁCIO

7 Mostre que, em um cone equilátero de altura h e raio r, temos $h = r\sqrt{3}$. Resposta no final do livro.



RONALDO INÁCIO

8 Uma pequena empresa prepara e acondiciona amendoins torrados em embalagens cônicas fechadas de dois tamanhos, conforme as imagens. Nessas condições, é correto afirmar que a diferença entre as áreas das superfícies dessas embalagens: alternativa c

a) é maior do que 140 cm².

b) está entre 110 cm² e 140 cm².

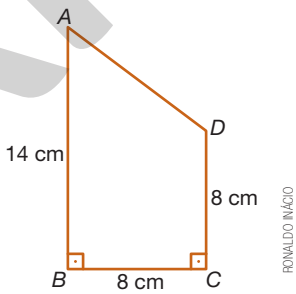
c) está entre 90 cm² e 110 cm².

d) é menor do que 90 cm².

O nome do produto que aparece nesta página é fictício.

FÁBIO EIJI SIRASUMA

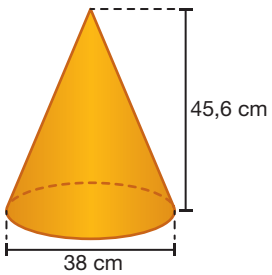
9 Qual é a área total da superfície da figura obtida pela rotação do trapézio ao lado em torno do lado $\overline{AB}$? aproximadamente 854,08 cm²



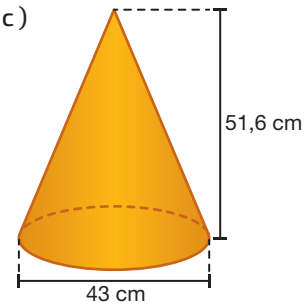
RONALDO INÁCIO

10 Qual dos cones a seguir tem a área da superfície maior do que a de um cilindro reto com raio da base igual a 15 cm e altura igual a 40 cm e menor do que a de um cubo com 30 cm de aresta? alternativa c

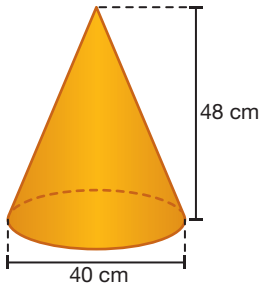
a)



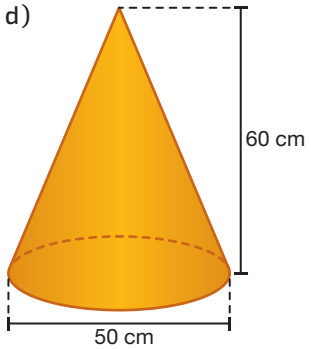
c)



b)



d)



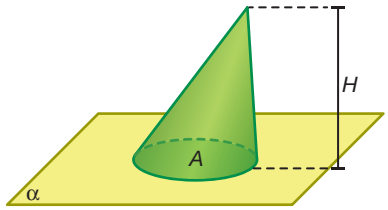
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Volume do cone

Assim como feito para as outras figuras geométricas espaciais, vamos determinar uma expressão de cálculo para o volume de um cone. Imagine um cone qualquer de altura H, cuja base seja um círculo de área A contido em um plano α.



Considere um plano paralelo a α, que intersecta o cone a uma distancia h de seu vértice, determinando, no cone, uma seção Q. É possível demonstrar que Q e a base do cone são regiões semelhantes, cuja razão de proporcionalidade é $\frac{h}{H}$.

A Que estratégia você utilizaria para calcular o volume desse cone?

B Mostre que o volume de um cone qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Use o Princípio de Cavalieri para relacionar um cone com outra figura geométrica espacial que você conheça e seja adequada para comparar seus volumes.

A) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que construiriam uma pirâmide apoiada no plano α, ao lado do cone, com altura H e área da base igual a A.

B) Utilizando a estratégia descrita na questão A, temos um cone e uma pirâmide apoiados em um plano α, ambos de altura H e área da base igual a A. Se um plano horizontal β, paralelo a α, distando h do vértice dessas figuras, intersecta ambas produzindo seções de áreas A' e A'', então:

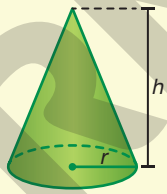
$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A''}{A}$$

ou seja, $A' = A''$. Pelo Princípio de Cavalieri, o cone e a pirâmide possuem volumes iguais. Como estudamos anteriormente, o volume da pirâmide é igual a $\frac{A \cdot H}{3}$. Assim, o volume do cone também é igual a $\frac{A \cdot H}{3}$, ou seja, um terço do produto da área da base pela altura.

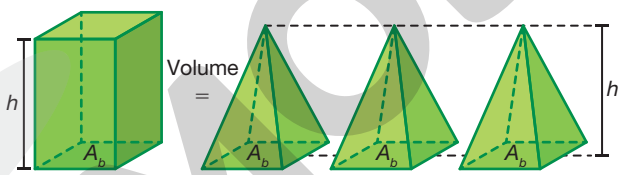
Ao trabalhar a questão B, se julgar conveniente, lembre os alunos de que a razão entre a área de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de proporcionalidade.

O volume V de um cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura. No caso do cone de altura h e raio da base r, temos:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

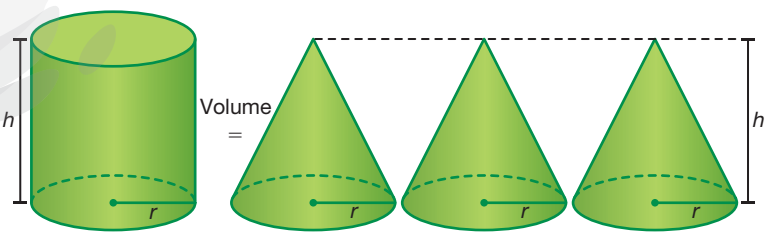


Provavelmente você já utilizou o seguinte resultado: se um prisma e uma pirâmide de mesma altura têm bases de áreas iguais, então o volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma, ou seja: $V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$.



O volume do prisma de altura h e área da base A_b é igual a soma dos volumes de três pirâmides de altura h e área da base A_b.

Também é possível verificar que, se um cone e um cilindro de mesma altura têm bases com áreas iguais, então o volume do cone é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro, ou seja: $V_{\text{cone}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3}$.



O volume do cilindro de altura h e raio da base r é igual à soma dos volumes de três cones de altura h e raio da base r.

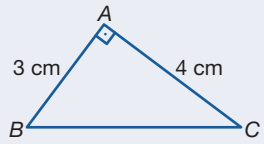
Essa relação foi demonstrada há cerca de 2 400 anos pelo grego Eudoxo (408 a.C.-355 a.C.), considerado o mais célebre astrônomo e matemático de seu tempo.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

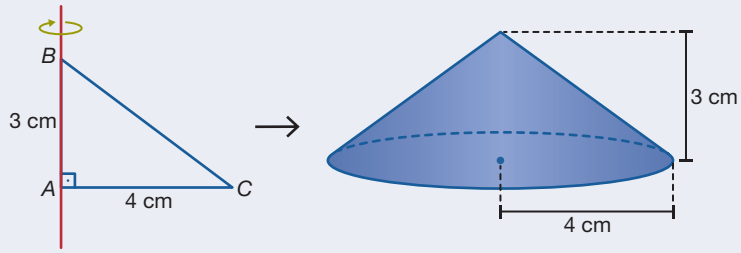
R3 Considere o triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm. Calcule o volume da figura obtida pela rotação do triângulo em relação a cada um de seus catetos.



Resolução

- Cateto menor: 3 cm

A figura obtida pela rotação do triângulo em torno do cateto menor é um cone reto de altura 3 cm e raio da base 4 cm. Calculando seu volume, temos:



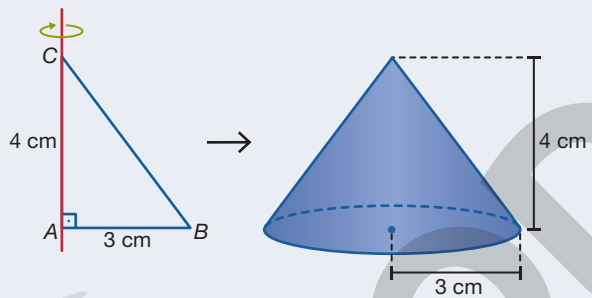
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = 50{,}24$$

No cálculo do volume dos cones obtidos, considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Portanto, o volume do cone obtido é, aproximadamente, 50,24 cm^3.

- Cateto maior: 4 cm

A figura obtida pela rotação do triângulo em torno do cateto maior é um cone reto de altura 4 cm e raio da base 3 cm. Logo:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

É possível que dois cones obtidos a partir da rotação em torno de cada um dos catetos de um mesmo triângulo retângulo tenham volumes iguais? Justifique sua resposta.

Sim, quando o triângulo retângulo for isósceles, pois os catetos terão a mesma medida e os cones serão congruentes. Consequentemente, os volumes serão iguais.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = \frac{113{,}04}{3} = 37{,}68$$

Portanto, o volume do cone obtido é, aproximadamente, 37,68 cm^3.

R4 Sabendo que a geratriz de um cone equilátero tem 8 cm de comprimento, determine o volume desse cone. (Considere $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$.)

Resolução

Indicando por g o comprimento da geratriz e por r o comprimento do raio da base, temos:

$$g = 2r \Rightarrow 8 = 2r \Rightarrow r = 4$$

Note que $g = 2r$, pois o cone é equilátero.

Assim, o raio da base do cone tem 4 cm de comprimento. Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras, determinamos a altura desse cone.

$$8^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 64 - 16 \Rightarrow h^2 = 48 \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$$

Note que $h = 4\sqrt{3}$, pois $h > 0$.

Por fim, calculamos o volume V do cone.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3}}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 1{,}73}{3} \simeq 115{,}89$$

Portanto, o volume desse cone é, aproximadamente, 115,89 cm^3.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

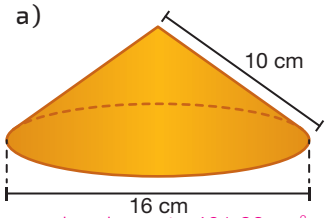
MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

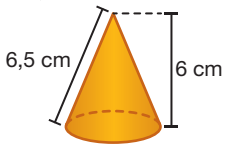
11 Calcule o volume de cada cone reto.

a)



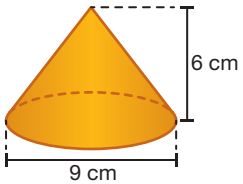
aproximadamente 401,92 cm³

c)



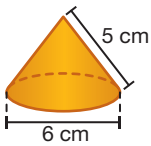
aproximadamente 39,25 cm³

b)



aproximadamente 127,17 cm³

d)



aproximadamente 37,68 cm³

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

12 Determine qual deve ser a altura de um cone reto, cujo raio da base tem 8 cm de comprimento, para que seu volume seja 1 004,8 cm³.

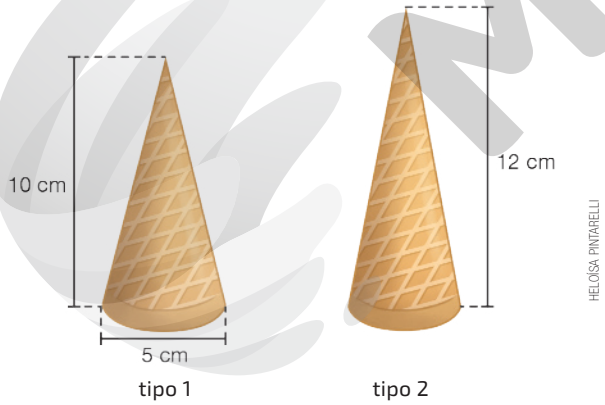
aproximadamente 15 cm

13 Dois recipientes, um cilíndrico e um cônico, cujos formatos se assemelham a um cilindro reto e a um cone reto, têm a mesma altura e bases com raios de mesmo comprimento. Se a capacidade do recipiente cilíndrico é 600 mℓ, então qual é a capacidade do recipiente cônico? 200 mℓ

14 O comprimento da circunferência da base de um cone reto é 37,68 cm. Determine o volume desse cone, sabendo que sua altura é igual ao dobro do comprimento do diâmetro da base.

aproximadamente 904,32 cm³

15 Em determinada sorveteria há dois tipos de casquinhas de sorvete, ambos em formato de cone reto, conforme representado a seguir.



tipo 1 tipo 2

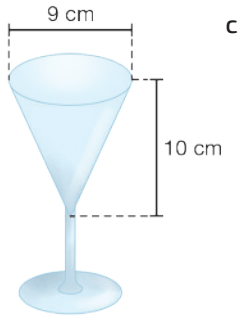
HELOÍSA PINTARELLI

Sabendo que essas casquinhas têm volumes iguais, determine o comprimento do diâmetro da base do cone ao qual a casquinha do tipo 2 se assemelha. aproximadamente 4,56 cm

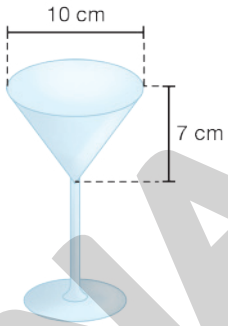
16 Qual é o volume de um cone equilátero cuja área da base mede 50,24 cm²? aproximadamente 134 cm³

17 Uma indústria de artefatos de vidro pretende fabricar taças com 210 mℓ de capacidade cujo formato interno se assemelha a um cone reto. Entre as opções a seguir, qual é aquela cuja capacidade mais se aproxima da taça que se deseja fabricar? alternativa a

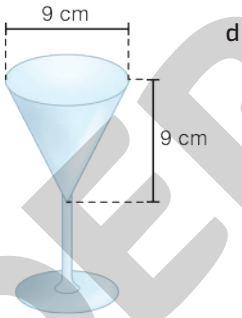
a)



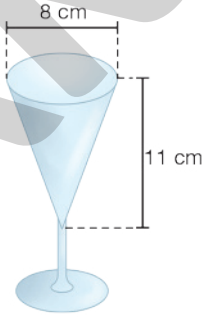
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

18 A ampulheta é um dos mais antigos instrumentos utilizados para medir o tempo. Ela consiste em dois recipientes transparentes que se unem por meio de um pequeno orifício, por onde a areia que está no recipiente superior escorre para o inferior a uma vazão constante. O período marcado corresponde ao tempo necessário para que toda a areia de um recipiente desça para o outro.

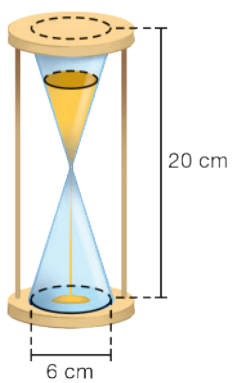
A ampulheta representada a seguir é formada por duas partes que se assemelham a cones retos idênticos, e a quantidade de areia em seu interior corresponde a 30% da capacidade de um desses cones. Para que toda a areia escoe de um cone para o outro são necessários 30 min.

a) Qual é o volume de areia, em centímetros cúbicos, no interior da ampulheta?

aproximadamente 28,26 cm³

b) É preciso acrescentar quantos centímetros cúbicos de areia na ampulheta para que ela registre períodos de 40 min?

aproximadamente 9,42 cm³



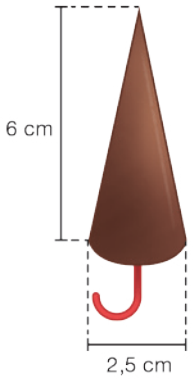
HELOÍSA PINTARELLI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

19 Determinada empresa fabrica chocolates com formato de guarda-chuva, como o representado ao lado.

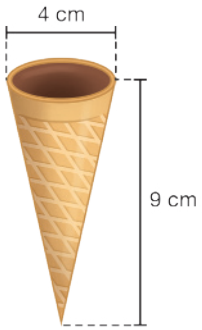
De acordo com as medidas apresentadas, determine a quantidade de chocolate, em mililitros, necessária para produzir uma unidade desse produto. aproximadamente 9,81 mℓ



HELOÍSA PINTARELLI

20 O comprimento do diâmetro da base de um cone reto é 30 cm e sua área lateral é igual ao triplo da área de sua base. Qual é o volume desse cone? aproximadamente 9 992,3 cm^3

21 Márcia vende cones trufados de chocolate. O preparo dessa sobremesa consiste em rechear casquinhas cônicas de sorvete com massa a base de chocolate e creme de leite até a borda. O diâmetro interno da base de cada casquinha utilizada por Márcia tem 4 cm e sua altura interna mede 9 cm. Quantos litros, aproximadamente, da massa de recheio ela vai usar para preparar 85 cones trufados? 3,2 ℓ



HELOÍSA PINTARELLI

22. $\frac{b}{a}$, em que a e b indicam, respectivamente, o comprimento do menor e do maior cateto do triângulo.

22 Dois cones são obtidos pela rotação de um triângulo retângulo em torno de seus catetos: o cone A é obtido pelo giro em torno do cateto menor e o cone B, em torno do cateto maior. Qual é a razão entre os volumes do cone A e do cone B?

23 A imagem a seguir representa um silo de armazenamento de grãos completamente cheio de soja. Considerando que cada metro cúbico dessa soja corresponde a 700 kg, calcule quantas sacas de 50 kg de soja correspondem à quantidade armazenada no silo.

aproximadamente 3 165 sacas

FÁBIO EIJI SIRASUMA

24 Faça uma pesquisa sobre objetos e construções que se assemelham a cones retos. Em seguida, de acordo com os resultados obtidos, elabore um problema envolvendo a área total e o volume de um cone reto. Por fim, peça a um colega que resolva esse problema.

25 Desafio

(Fuvest-SP, 2017) Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8 m. Sua altura é igual a 12 m. A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto. O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente, alternativa c

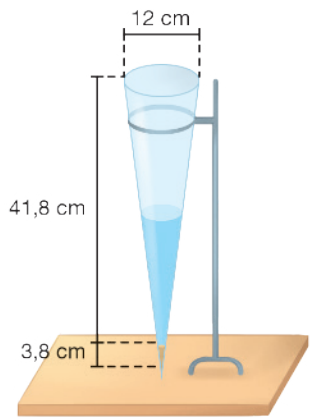
a) 4 horas e 50 minutos.
b) 5 horas e 20 minutos.
c) 5 horas e 50 minutos.
d) 6 horas e 20 minutos.
e) 6 horas e 50 minutos.

A tarefa 24 propõe a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para ampliar o repertório de reflexões e questionamentos dos alunos acerca de determinadas situações.

Dados:
π é aproximadamente 3,14.
O volume do cone circular reto de altura h e raio da base r é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

26 Para analisar a qualidade da água de acordo com a quantidade de resíduos sólidos existentes, um método que pode ser utilizado é o do Cone de Imhoff, em que uma amostra da água, em geral 1 ℓ, é colocada em um cone graduado e deixada em repouso por 1 h, sedimentando as partículas em suspensão pela ação da gravidade.

Considere um Cone de Imhoff em que foi colocada uma amostra de água e, após 1 h, verificou-se que as partículas sólidas depositadas no fundo atingiram a altura de 3,8 cm, conforme a imagem. Admita que não há espaços entre as partículas e que sua densidade é 2,5 g/cm^3.



HELOÍSA PINTARELLI

a) Calcule o valor aproximado da massa, em gramas, das partículas sólidas sedimentadas nessa amostra. 2,49 g

b) 25 g dessas mesmas partículas sólidas atingem, aproximadamente, que altura nesse mesmo Cone de Imhoff? 8,2 cm

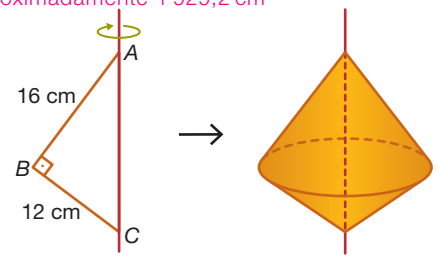
24. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

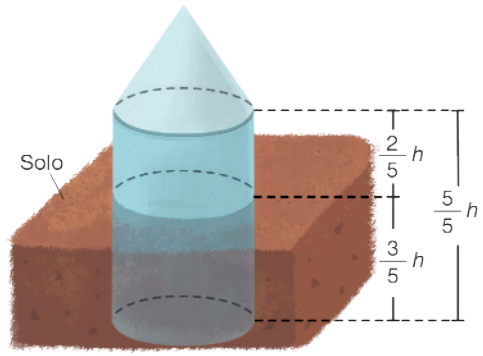
27 Calcule o volume da figura obtida pela rotação do triângulo *ABC* em torno do maior lado.

aproximadamente 1 929,2 cm³



RONALDO INÁCIO

28 No semiárido brasileiro, como parte do Nordeste, é comum o uso de cisternas para o armazenamento de águas pluviais. A imagem a seguir representa uma cisterna composta por uma parte em formato de cone reto, com 1 m de raio e 1,5 m de altura, e outra em formato de cilindro reto, com $\frac{3}{5}$ da sua altura h enterrada no solo.



FÁBIO EUI SIRASUMA

Sabendo que o armazenamento de água nessa cisterna ocorre apenas na parte cilíndrica e que seu volume é equivalente ao sêxtuplo do volume da parte cônica, determine a altura da cisterna que aparece acima da superfície do solo.

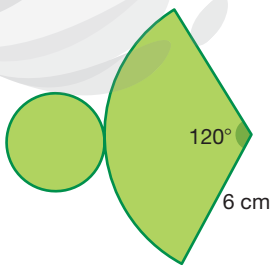
aproximadamente 1,2 m

29 Escreva um algoritmo que indique se é possível armazenar determinado volume de água, em litros, em um recipiente com formato de cone reto, dados o comprimento do raio da base e a altura do recipiente, ambos em centímetros. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

Resposta no final do livro.

30 Observe a planificação de um cone reto e algumas de suas medidas.

Desafio



RONALDO INÁCIO

Qual é o volume do cone correspondente a essa planificação? (Considere $\sqrt{2} = 1{,}41$.)

aproximadamente 23,61 cm³

31 Leia o problema abaixo.

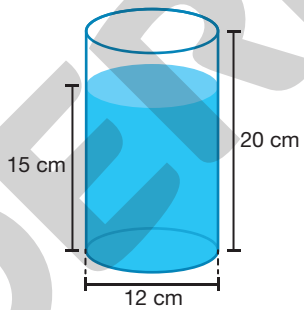
> Um reservatório cilíndrico tem 50 000 ℓ de capacidade. Para que um reservatório cônico tenha a mesma capacidade, qual deve ser a altura desse reservatório?

Com os dados apresentados é possível resolver o problema? Em caso afirmativo, resolva-o.

não; Espera-se que os alunos compreendam que, para calcular a altura do reservatório cônico, é necessário apresentar o comprimento do diâmetro ou do raio da base.

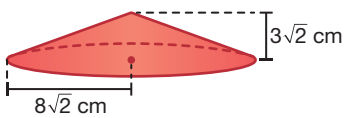
Caso não seja possível resolver o problema com os dados apresentados, justifique sua resposta.

32 Pedro realizará um experimento. Para isso, ele vai submergir totalmente alguns objetos maciços no recipiente com formato de cilindro reto representado a seguir.

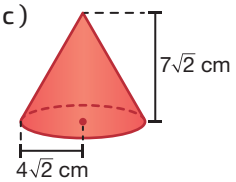


Entre os objetos com formato de cone reto, qual, ao ser submergido, fará a água transbordar do recipiente? (Considere $\sqrt{2} = 1{,}41$.) alternativa a

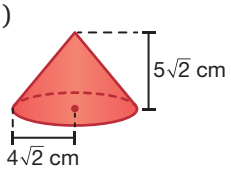
a)



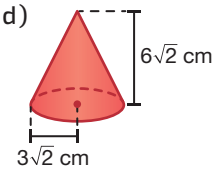
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

33 Considere um cone reto e um cilindro reto, ambos com área da base igual a 48π m². Sabendo que o volume do cilindro é $1\,152\pi$ m³ e que sua altura é igual ao triplo do comprimento da geratriz do cone, determine:

a) o comprimento do raio da base do cone. $4\sqrt{3}$ m

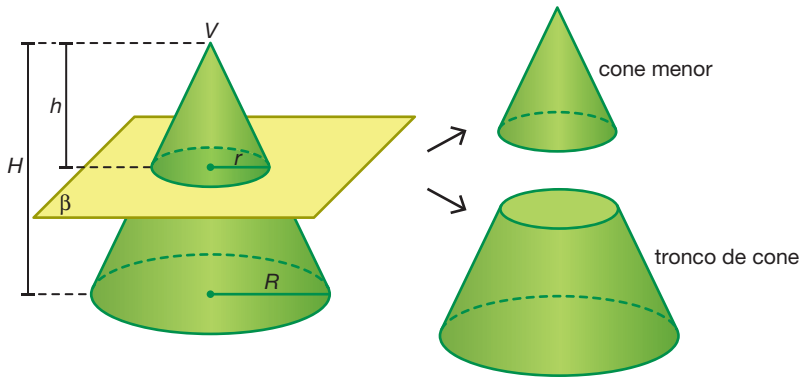
b) o volume do cone. 64π m³

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

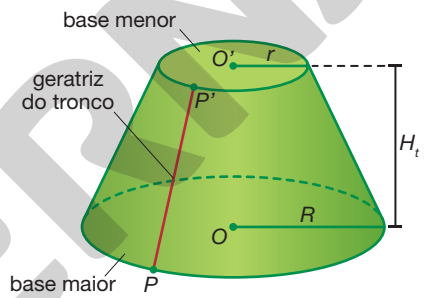
MODERNA

Tronco de cone reto

Na figura a seguir está representado um cone reto de altura H e raio da base R, seccionado por um plano β paralelamente à sua base. Esse plano determina um cone menor, de altura h e raio da base r, e um sólido denominado **tronco de cone**.



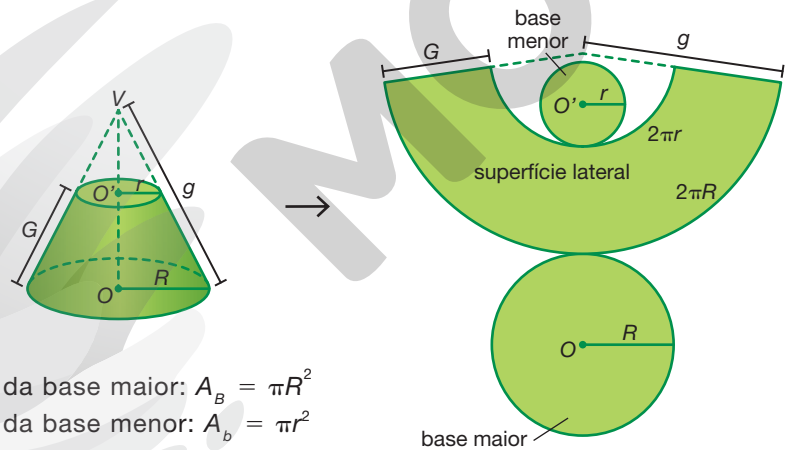
Em um tronco de cone, podemos destacar os seguintes elementos.



- A **base maior** é o círculo de centro O e raio R.
- A **base menor** é o círculo de centro O' e raio r.
- A distância H_t entre a base maior e a base menor é a **altura** do tronco de cone.
- A **geratriz do tronco** corresponde a cada segmento contido na geratriz do cone cujas extremidades pertencem às bases do tronco e o comprimento é igual à diferença entre os comprimentos das geratrizes dos cones maior e menor. Nesse tronco, $\overline{PP'}$ é um exemplo de geratriz do tronco.
- A **superfície lateral** corresponde à reunião de todas as geratrizes do tronco.

Área da superfície de um tronco de cone reto

Observe um tronco de cone reto e sua respectiva planificação.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

- Área da base maior: $A_B = \pi R^2$
- Área da base menor: $A_b = \pi r^2$
- Área lateral:

  Podemos obter a área lateral de um tronco de cone calculando a diferença entre as áreas laterais dos cones de vértice V e bases de centro O e O'.

$$A_\ell = A_O - A_{O'} = \pi Rg - \pi r(g - G)$$

  Escrevendo a expressão acima com g em função de G, R e r, obtemos a área lateral do tronco de cone.

$$A_\ell = \pi G(R + r)$$

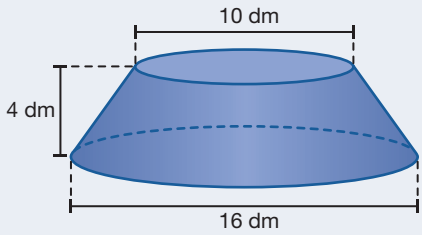
- Área total da superfície: $A_t = A_B + A_b + A_\ell$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R5 Em relação ao tronco de cone reto abaixo, calcule a área da:

a) base menor.
b) base maior.
c) superfície lateral.



Resolução

a) A base menor é um círculo de raio 5 dm. Então:

$A_b = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5$

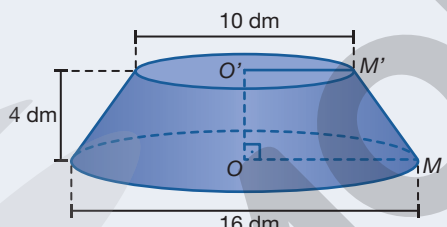
Portanto, a área da base menor é aproximadamente 78,5 dm^2.

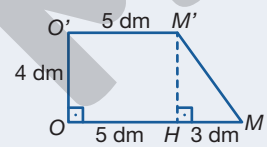
b) A base maior é um círculo de raio 8 dm. Então:

$A_B = \pi R^2 = 3{,}14 \cdot 8^2 = 200{,}96$

Portanto, a área da base maior é aproximadamente 200,96 dm^2.

c) Inicialmente, calculamos o comprimento da geratriz do tronco utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MHM', conforme a figura a seguir.





Note que nos itens **a**, **b** e **c** considerou-se $\pi = 3{,}14$.

$(MM')^2 = (HM')^2 + (HM)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow G^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow G = 5$

Note que $G = 5$, pois $G > 0$.

Assim, $G = 5$ dm.

Consequentemente:

$A_\ell = \pi G(R + r) =$

$= 3{,}14 \cdot 5 \cdot (8 + 5) =$

$= 15{,}7 \cdot 13 = 204{,}1$

Portanto, a área da superfície lateral é aproximadamente 204,1 dm^2.

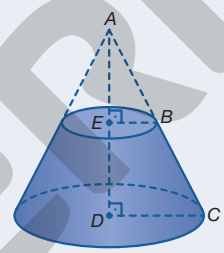
R6 (Unicamp-SP) Um abajur de tecido tem a forma de um tronco de cone circular reto, com bases paralelas. As aberturas do abajur têm 25 cm e 50 cm de diâmetro, e a geratriz do tronco de cone mede 30 cm. O tecido do abajur rasgou e deseja-se substituí-lo.

a) Determine os raios dos arcos que devem ser demarcados sobre um novo tecido para que se possa cortar um revestimento igual àquele que foi danificado.

b) Calcule a área da região a ser demarcada sobre o tecido que vai revestir o abajur.

Resolução

a) Considere o tronco de cone representado abaixo como o abajur descrito no problema.



Nesse caso, precisamos determinar os comprimentos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Por semelhança de triângulos, segue que:

$$\frac{CD}{BE} = \frac{\overbrace{AB + BC}^{AC}}{AB} \Rightarrow \frac{\frac{50}{2}}{\frac{25}{2}} = \frac{AB + 30}{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{AB + 30}{AB} \Rightarrow 2(AB) = AB + 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 30$$

Agora, substituímos $AB = 30$ em $AC = AB + BC$. Desse modo:

$$AC = AB + BC = 30 + 30 = 60$$

Portanto, os comprimentos dos raios que devem ser demarcados sobre o tecido são 30 cm e 60 cm.

b) A região demarcada corresponde à superfície lateral do tronco de cone. Assim:

$$A_\ell = \pi G(R + r) = \pi \cdot 30 \cdot \left(\frac{50}{2} + \frac{25}{2}\right) =$$

$$= 30\pi \cdot 37{,}5 = 1\,125\pi$$

Portanto, a área da região a ser demarcada é $1\,125\pi$ cm^2.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

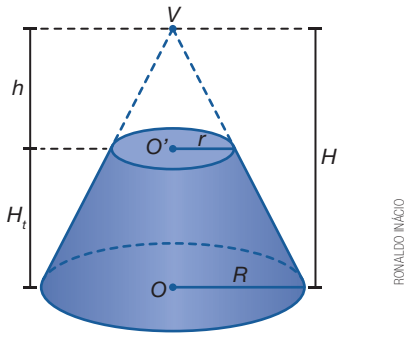
MODERNA

R6. Se julgar necessário, informe aos alunos que, no problema, foi utilizado o termo "a geratriz do tronco de cone mede 30 cm" para se referir à medida do comprimento da geratriz que, nesse caso, é 30 cm.

Volume de um tronco de cone reto

Determinamos o volume de um tronco de cone reto, como o apresentado a seguir, calculando a diferença entre os volumes dos cones de vértice V e bases de centro O e O'.

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3}$$



RONALDO INÁCIO

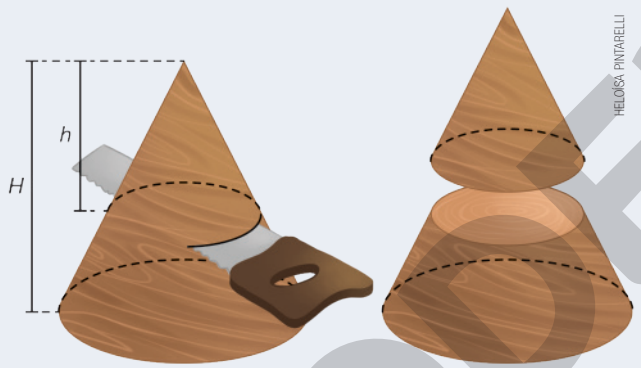
Escrevendo H e h em função de H_t, R e r, obtemos o volume do tronco de cone:

$$V = \frac{\pi H_t}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Exercícios e problemas resolvidos

R7 Um cone reto de madeira maciça tem massa igual a 27 kg e foi serrado para serem obtidas duas peças: um cone reto menor e um tronco de cone reto.

Considerando a massa de madeira proporcional a seu volume, calcule a massa de cada peça obtida, sabendo que a razão entre as alturas H e h é $\frac{3}{2}$.



HELOÍSA PINTARELLI

Nesta situação, desconsidere a massa do pó de serra gerado no corte.

Resolução

Sejam V e V_C os volumes do cone inicial e do cone menor, respectivamente. Como os dois cones são semelhantes e a razão entre suas alturas é $\frac{3}{2}$, então a razão de proporcionalidade entre os volumes desses cones é $\left(\frac{3}{2}\right)^3$. Assim:

$$\frac{V}{V_C} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V_C} = \frac{27}{8} \Rightarrow V_C = \frac{8}{27}V$$

Dois cones são semelhantes se possuem medidas correspondentes semelhantes (comprimento do raio da base, altura e comprimento da geratriz). Pode-se demonstrar que se a razão de proporcionalidade entre suas medidas for k, então a razão de semelhança entre seus volumes é k^3.

Desse modo, calculamos a massa x do cone menor utilizando regra de três.

Volume (unidade de volume)	Massa (quilograma)
V	27
V_C	x

$$\underbrace{\frac{V}{V_C}}_{\frac{8}{27}V} = \frac{27}{x} \Rightarrow \frac{V}{\frac{8}{27}V} = \frac{27}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{27} \cdot 27 = 8$$

A massa do tronco de cone é dada por: $27 - 8 = 19$.

Portanto, a massa do cone menor é 8 kg e a do tronco de cone, 19 kg.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

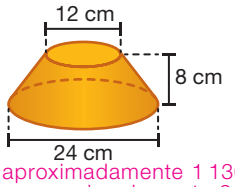
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

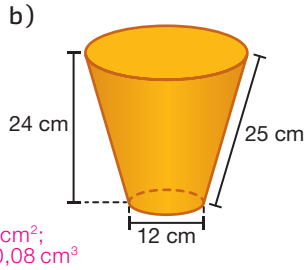
34. b) área: aproximadamente 2 135,2 cm²; volume: aproximadamente 7 108,96 cm³

34 Determine a área total da superfície e o volume de cada tronco de cone reto.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

área: aproximadamente 1 130,4 cm²; volume: aproximadamente 2 110,08 cm³

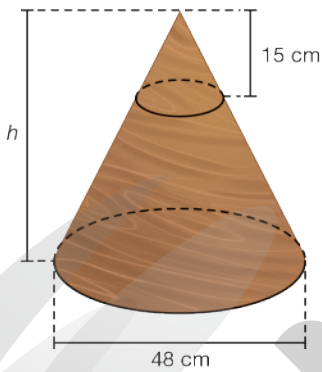
35 Considere um tronco de cone reto cuja área lateral é 405π cm², o comprimento da geratriz é 15 cm e o comprimento do raio da base maior é igual ao dobro do da base menor.

a) Qual é o comprimento do raio da base maior? E o da base menor? 18 cm; 9 cm

b) Qual é a altura desse tronco de cone? 12 cm

c) Calcule a área total da superfície desse tronco de cone. 810π cm²

36 Um marceneiro cortou uma peça de madeira de 45 cm de altura (*h*) em forma de cone reto paralelamente à base, conforme a figura, obtendo um cone menor e um tronco de cone reto.



HELOÍSA PINTARELLI

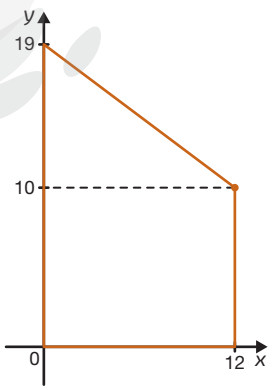
a) Calcule os comprimentos dos raios das bases menor e maior do tronco de cone. 8 cm; 24 cm

b) Qual é a área total da superfície do cone menor? E a do tronco de cone?

aproximadamente 628 cm²; aproximadamente 5 425,92 cm²

37 Calcule a área total da superfície da figura obtida ao se rotacionar em torno do eixo *x* o polígono ao lado.

aproximadamente 2 813,44 u.a.

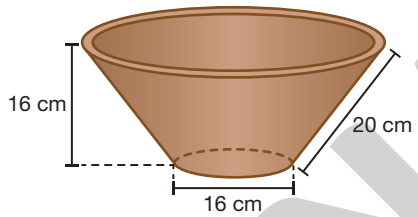


RONALDO INÁCIO

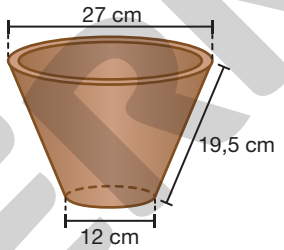
38 Felipe é artesão e produz vasos de barro em formato de tronco de cone reto. O preço de venda de cada vaso está associado à sua área de superfície, de maneira que vasos com maiores áreas de superfície externa têm, também, maiores preços.

Veja a seguir alguns modelos de vasos produzidos por Felipe.

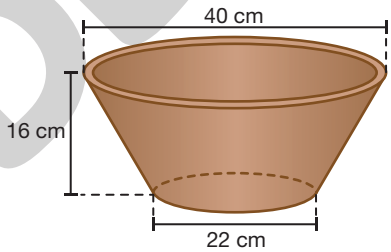
A



B



C



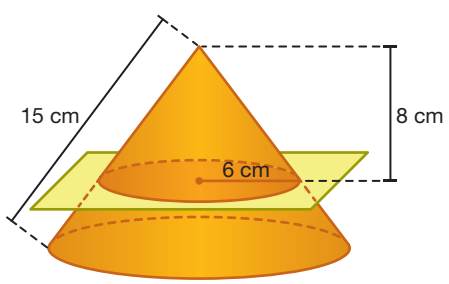
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Em relação aos modelos apresentados, a ordem correta dos vasos, do maior preço para o menor é:

a) A, B e C.
b) A, C e B.
c) B, A e C.
d) B, C e A.
e) C, A e B.

alternativa e

39 Considere um cone reto com o comprimento da geratriz igual a 15 cm. Ao seccionar esse cone por um plano paralelo à sua base e distando 8 cm de seu vértice, determina-se um círculo de raio 6 cm. Calcule a área total da superfície do tronco de cone obtido. aproximadamente 602,88 cm²



RONALDO INÁCIO

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

40 O rebolo cônico é um instrumento musical de percussão cuja forma é a de um tronco de cone reto, feito de madeira ou alumínio, vazado na base menor e geralmente revestido de couro na base maior.

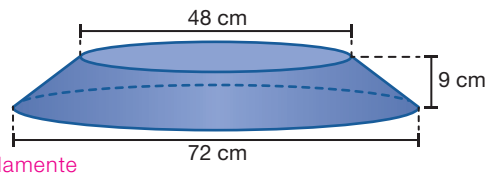
Um artesão vai confeccionar a superfície lateral de um instrumento desses com 50 cm de altura e raios das bases menor e maior com, respectivamente, 10 cm e 15 cm de comprimento. Qual será a área lateral da superfície desse instrumento?

aproximadamente 3 948,55 cm^2

FÁBIO EIJI SIRASUMA

41 Determine o volume de cada tronco de cone reto.

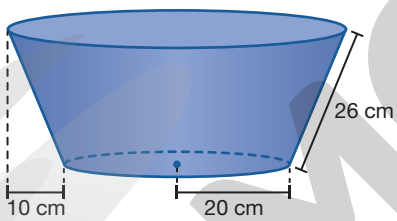
a)



aproximadamente 25 773,12 cm^3

b)

aproximadamente 47 728 cm^3



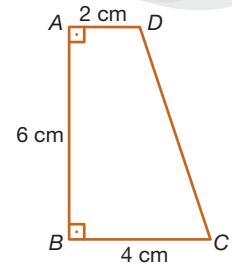
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

42 Sabendo que a geratriz de um tronco de cone reto tem 25 cm de comprimento e que os raios das bases têm 6 cm e 13 cm de comprimento, determine o volume desse tronco de cone.

aproximadamente 7 108,96 cm^3

43 Determine o volume da figura obtida ao se rotacionar o trapézio em torno do:

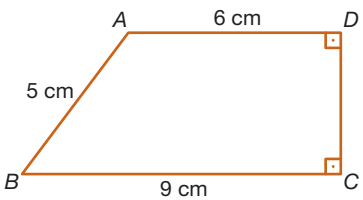
a) lado $\overline{AB}$.



aproximadamente 175,84 cm^3

b) lado $\overline{CD}$.

aproximadamente 715,92 cm^3

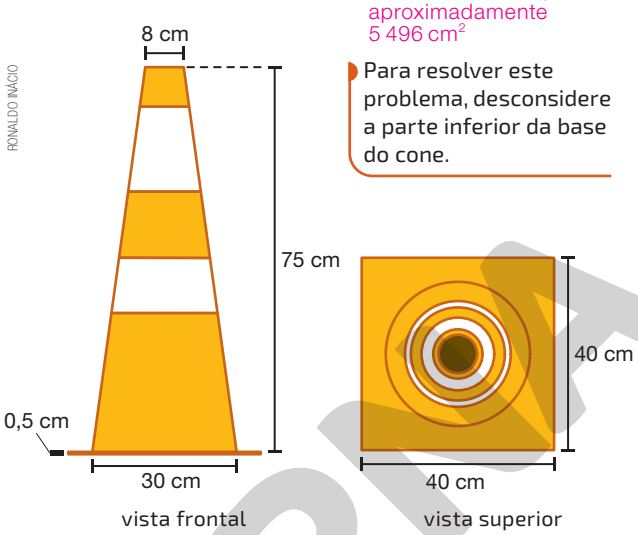


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

44 Observe as vistas frontal e superior de um cone de sinalização. Note que ele é composto por um tronco de cone e uma base cujo formato se assemelha a um prisma reto quadrangular. Calcule, em centímetros quadrados, a área da superfície externa desse cone de sinalização.

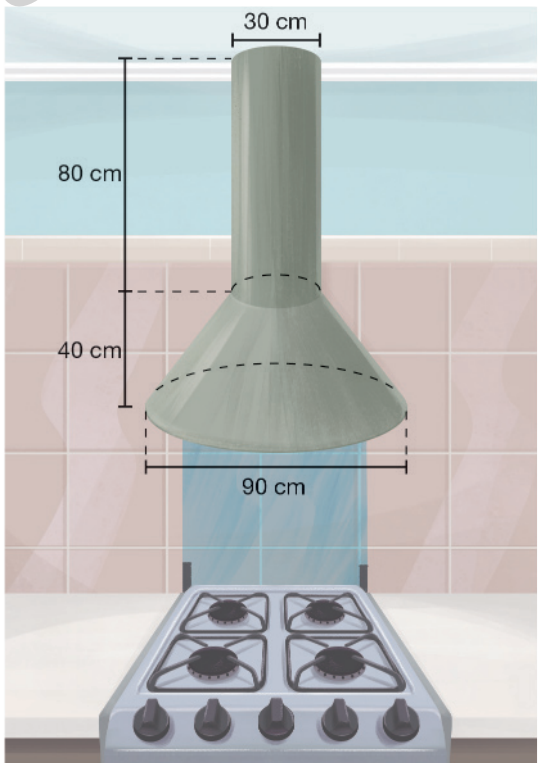
aproximadamente 5 496 cm^2

Para resolver este problema, desconsidere a parte inferior da base do cone.



RONALDO INÁCIO

45 José comprou uma coifa formada por duas partes que lembram um tronco de cone reto e um cilindro reto. Ele deseja pintar a parte lateral externa do alumínio que reveste essa coifa com certa tinta, de modo que a cor escolhida combine com a decoração do ambiente. Quantas latas de tinta com 500 mℓ serão necessárias, sabendo que 100 mℓ da tinta que José escolheu permitem cobrir 900 cm^2 de alumínio? 4 latas

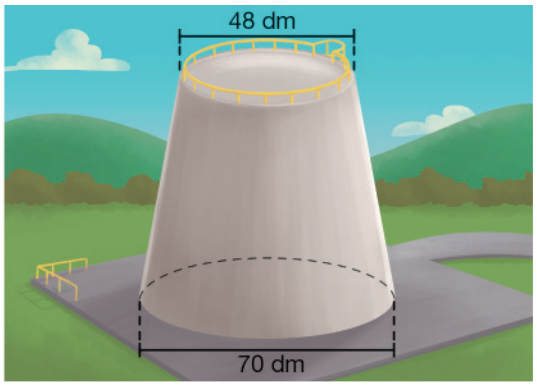


FÁBIO EIJI SIRASUMA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

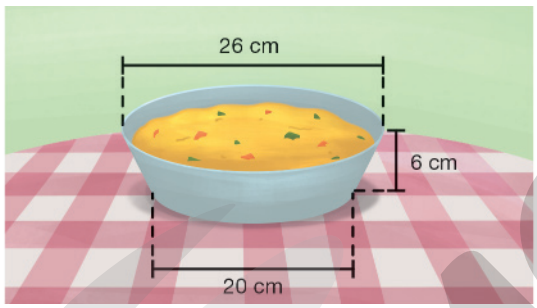
MODERNA

46 Um reservatório de água tem formato de um tronco de cone reto, cujos diâmetros internos das bases maior e menor são, respectivamente, 70 dm e 48 dm. Sabendo que sua capacidade é de 165 854,8 ℓ, determine a altura interna desse reservatório. 60 dm



FÁBIO EIJI SIRASUMA

47 Uma assadeira de tem o formato de um tronco de cone reto, em que o fundo corresponde à base menor. A fim de reservar espaço para que a massa de uma torta cresça ao assar, é acondicionada nessa assadeira uma quantidade de massa correspondente a 75% de sua capacidade.

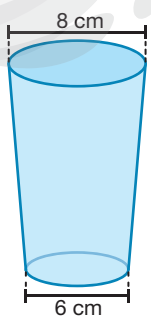


FÁBIO EIJI SIRASUMA

a) Qual é a capacidade dessa assadeira? 2 505,72 cm³

b) No preparo da torta citada, qual é o volume máximo de massa, em mililitros, que deve ser acondicionado na assadeira? 1 879,29 mℓ

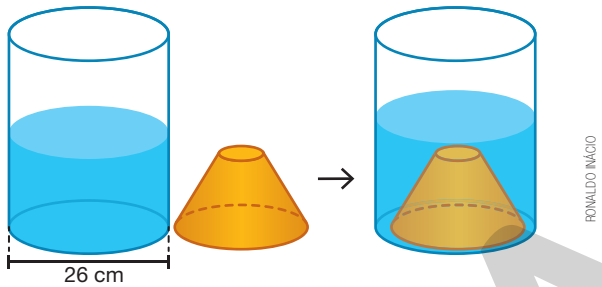
48 O copo representado abaixo tem a forma de um tronco de cone reto e sua capacidade é de 464,72 mℓ. Quantos centímetros de altura tem esse copo? aproximadamente 12 cm



RONALDO INÁCIO

A tarefa **52** propõe aos alunos que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

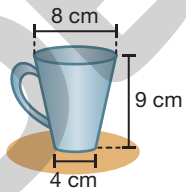
49 Ao submergir totalmente a peça maciça com forma de tronco de cone reto indicada a seguir no recipiente cilíndrico, o nível da água aumenta 4 cm. Determine a altura dessa peça, sabendo que os raios das bases têm $\sqrt{13}$ cm e $3\sqrt{13}$ cm de comprimento. 12 cm



RONALDO INÁCIO

50 Um reservatório tem o formato de tronco de cone reto, cuja superfície lateral forma um ângulo cujo comprimento da geratriz é $2\sqrt{3}$ m. Sabendo que esse reservatório tem 3 m de altura interna e $\sqrt{3}$ m de raio interno da base menor, qual é sua capacidade em litros? 65 940 ℓ

51 Em certo restaurante, após a refeição e como cortesia, os clientes ganham café, que é servido em uma xícara, como a representada a seguir, cujo interior tem formato de cone reto.



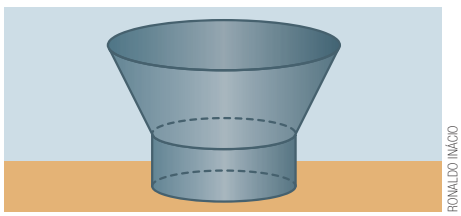
RONALDO INÁCIO

As medidas apresentadas referem-se às dimensões internas da xícara.

a) De acordo com as medidas indicadas, determine o volume máximo, em mililitros, de café que essa xícara pode conter. aproximadamente 263,76 mℓ

b) Sabendo que no bule há 1 ℓ de café e que, ao servi-lo, o garçom coloca aproximadamente $\frac{2}{3}$ da capacidade da xícara, determine quantas xícaras iguais a essa, no máximo, podem ser servidas com a quantidade de café que tem no bule. 5 xícaras

52 A partir da imagem a seguir, elabore uma questão relacionada ao volume do tronco de cone. Depois, troque a questão com um colega e, ao final, verifiquem se as resoluções estão corretas.

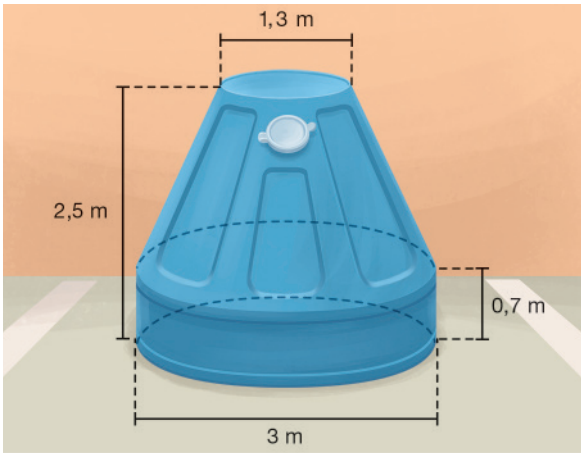

RONALDO INÁCIO

52. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

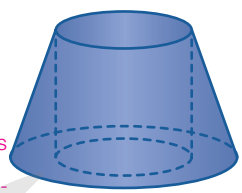
53 Márcia pretende armazenar certa solução para a produção de um produto de sua empresa. Para isso, ela encomendou um reservatório composto por duas partes: uma em formato de cilindro reto e outra em formato de tronco de cone reto. Veja as dimensões internas desse reservatório.



FÁBIO EIJI SIRASUMA

Qual é, em litros, a capacidade desse reservatório? aproximadamente 11 817,4 ℓ

54 Certa empresa fabrica peças em formato de tronco reto com uma cavidade em formato de cilindro reto, conforme apresentado.


RONALDO INÁCIO

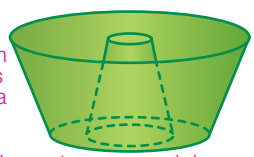
A seguir, são apresentadas algumas informações acerca dessa peça.

- a altura do cilindro coincide com a altura do tronco de cone;
- o raio da base menor e o da base maior da peça têm, respectivamente, 9 cm e 15 cm de comprimento;
- o comprimento da geratriz do tronco de cone é 18 cm.

De acordo com as informações, determine o volume dessa peça. aproximadamente 3 517 cm^3

55 Elaborando

De acordo com a imagem que representa uma assadeira de bolo, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados até o momento. Em seguida, peça a um colega que o resolva.


RONALDO INÁCIO

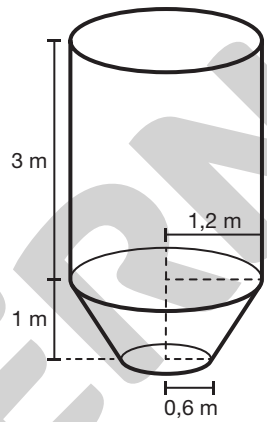
Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

56 Os raios das bases de um tronco de cone têm 8 dm e 4 dm de comprimento.

a) Determine o comprimento da geratriz desse tronco para que a área total seja igual ao dobro da área lateral. $\frac{20}{3}$ dm

b) Qual é o volume desse tronco de cone? aproximadamente 625,21 dm^3

57 (UPF-RS, 2016) Um reservatório de água tem formato de um cilindro circular reto de 3 m de altura e base com 1,2 m de raio, seguido de um tronco de cone reto cujas bases são círculos paralelos, de raios medindo 1,2 m e 0,6 m, respectivamente, e altura 1 m, como representado na figura a seguir.

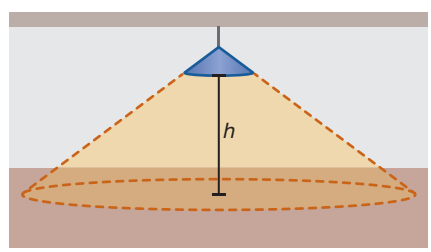


RONALDO INÁCIO

Nesse reservatório, há um vazamento que desperdiça $\frac{1}{3}$ do seu volume por semana. Considerando a aproximação $\pi = 3$ e sabendo que 1 dm^3 = 1 ℓ, esse vazamento é de: alternativa e

a) 4 320 litros.
b) 15,48 litros.
c) 15 480 litros.
d) 12 960 litros.
e) 5 160 litros.

58 Um pendente em formato de cone reto com 30 cm de altura e raio da base com 40 cm de comprimento foi instalado no teto de uma sala. Em certo momento, a lâmpada desse pendente projeta no chão um círculo com 52 900π cm^2 de área.



RONALDO INÁCIO

Qual é, em centímetros, a distância *h* entre o pendente e o chão? 142,5 cm

A tarefa **55** propõe aos alunos que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

11 Esfera

Base de Alcântara

O Centro de Lançamento de Alcântara (CLA), também conhecido como Base de Alcântara, situado a 90 km de São Luís, no Maranhão, integra a estrutura do Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial (DCTA), que corresponde a um órgão da Força Aérea Brasileira (FAB). Essa estrutura é utilizada para o lançamento de foguetes e é um espaço essencial ao desenvolvimento do Programa Espacial Brasileiro.

O Brasil possui dois centros de lançamento: o Centro de Lançamento da Barreira do Inferno (CLBI) e o CLA. Porém, o CLBI está disponível apenas para lançamento de foguetes de sondagem, por sua proximidade com a cidade de Natal, no Rio Grande do Norte. Já o CLA, mais afastado da zona urbana, é o local ideal, no conjunto de instalações dessa natureza disponíveis no Brasil, para o lançamento dos mais variados equipamentos.

BNCC

- EM13MAT309
- CE2CNT
- CE3CNT

O CLA foi inaugurado no ano de 1983, e a primeira das principais ações desenvolvidas nessa base ocorreu em 1989, seis anos após o início das atividades, com o lançamento de 15 foguetes. Ao longo dos últimos anos, foram realizadas mais de 100 operações nessa base, de modo que mais de 480 lançamentos já foram feitos nesse local, entre os quais temos a presença de atividades de testes e lançamento de sondas, entre outros.

LUCAS LACAZ RUIZ/FOTOARENA

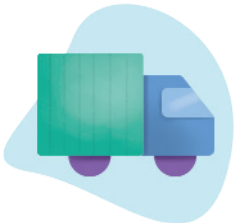
Torre móvel na Base de Alcântara, no Maranhão, em 2012.

A seguir, são apresentadas algumas das vantagens do CLA em relação ao CLBI.

Condições favoráveis de segurança para lançamentos, pela sua proximidade com o mar.

Condições climáticas favoráveis, com regime de chuvas bem definido e ventos toleráveis.

Estabilidade geológica, pela distância em relação a regiões de choques entre placas tectônicas.



Facilidade para transportes, pela sua proximidade com a capital São Luís.

Proximidade com importantes centros de operações espaciais, como o CLBI e o da Guiana Francesa.

Baixa densidade demográfica da região.

HELOÍSA PINTARELLI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

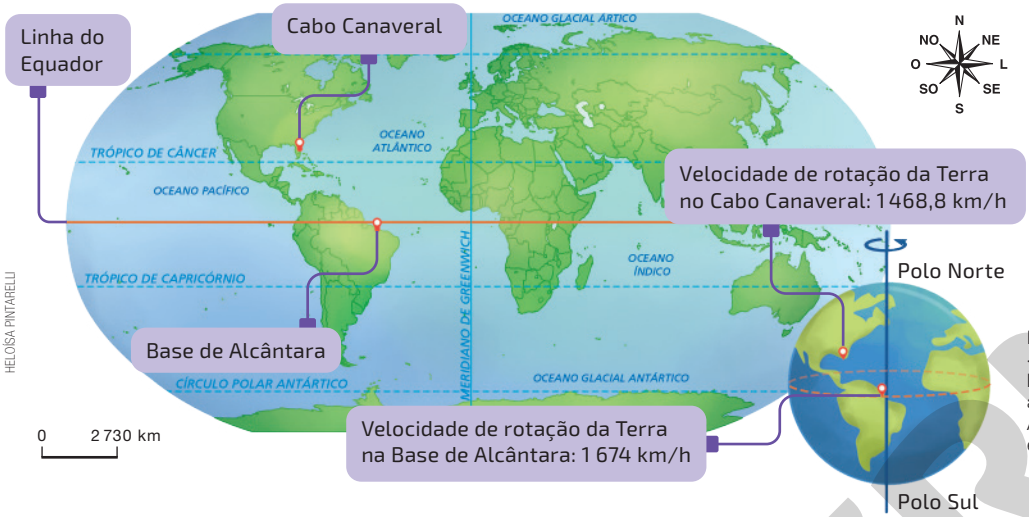
MODERNA

A localização da Base de Alcântara

A Base de Alcântara possui uma localização privilegiada no mundo em relação ao lançamento de foguetes e outros equipamentos, por estar situada em uma região próximo da linha do Equador, diferentemente do que ocorre com o Cabo Canaveral, famosa base de lançamento localizada nos Estados Unidos.

A Terra gira em torno de seu eixo, e qualquer local em sua superfície demora o mesmo período de tempo para completar uma volta (24 horas). Sendo assim, um local mais próximo da linha do Equador, por exemplo, está a uma velocidade maior do que um local próximo dos polos.

Localização da Base de Alcântara e do Cabo Canaveral



HELOÍSA PINTARELLI

Fonte de pesquisa: <http://www.senado.leg.br/comissoes/cre/ap/AP20090701_Base_Alcantara.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2020.

Devido ao posicionamento favorável da Base de Alcântara, o lançamento de equipamentos partindo dessa região, em vez do Cabo Canaveral, pode gerar uma economia de combustível entre 20% a 30%, o que seria uma grande vantagem tanto em relação aos custos quanto ao tipo de estrutura necessária para, por exemplo, enviar um satélite para a órbita terrestre.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Pesquise a respeito das atividades realizadas na Base de Alcântara. Depois, compartilhe as informações obtidas com os colegas de classe. Resposta pessoal.

B Você conhece alguma unidade de medida utilizada no estudo de problemas envolvendo grandes distâncias, como as dos programas espaciais? Justifique sua resposta. Algumas possíveis respostas: unidade astronômica e ano-luz.

C Em sua opinião, quais aspectos deveriam ser desenvolvidos para que o Brasil ganhasse destaque entre os principais programas espaciais mundiais? Resposta pessoal.

Para apresentar algumas informações acerca das bases de Alcântara e Cabo Canaveral, assim como indicar suas localizações, foi usado, além do mapa, um esquema representando o planeta Terra, o qual se assemelha a uma figura geométrica espacial que você provavelmente já estudou, a **esfera**.

Nas páginas seguintes, vamos relembrar e aprimorar o estudo da esfera, bem como realizar o cálculo da área da superfície e do volume dessa figura.

FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.KAISKYNET STUDIO/SHUTTERSTOCK; 2.DG STOCK/SHUTTERSTOCK; 3.VADIM SADOVSKI/SHUTTERSTOCK; 4.NUITHEBLUES/SHUTTERSTOCK; 5.PAVEL CHAGOCHKIN/SHUTTERSTOCK; 6.JOHAN SWANEPOEL/SHUTTERSTOCK; 7.IXPERT/SHUTTERSTOCK; 8.SERGEY NIVENS/SHUTTERSTOCK; 9.EFETOVA ANNA/SHUTTERSTOCK; 10.ROMOLO TAVANI/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

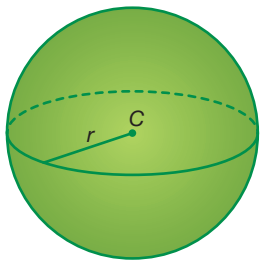
A esfera

bola de vôlei

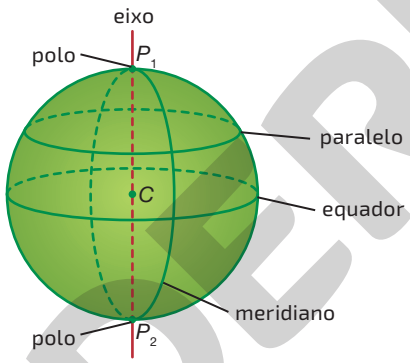
IRIN-K/SHUTTERSTOCK

No vôlei, assim como em outros esportes, a bola oficial tem medidas específicas. De acordo com as normas da Confederação Brasileira de Vôlei, essa bola, que tem formato de esfera, deve ter raio com, aproximadamente, 10,5 cm de comprimento.

Para definirmos a esfera, consideramos um número real positivo r e um ponto C. Denomina-se **esfera** de centro C e raio r o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância *de* C é igual a r.



Em uma esfera, podemos destacar os seguintes elementos.

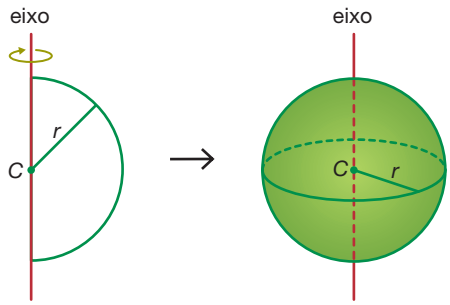


Considerando a figura acima, segue que:

- o **centro** é o ponto C.
- o **eixo** é qualquer reta que contém o centro da esfera.

  Em relação a esse eixo, definimos os polos, o equador, os paralelos e os meridianos.
- Os **polos** são os pontos de interseção da esfera com o eixo. Na figura, os polos são P_1 e P_2.
- O **equador** é a circunferência obtida ao secionar a esfera por um plano que seja perpendicular ao eixo e que passe pelo centro C.
- Os **paralelos** são as circunferências obtidas ao secionar a esfera por planos paralelos ao equador.
- Os **meridianos** são as circunferências obtidas ao secionar a esfera por planos que contenham o eixo.

A esfera pode ser obtida ao rotacionar uma semicircunferência em torno da reta (eixo) que contém seu diâmetro.



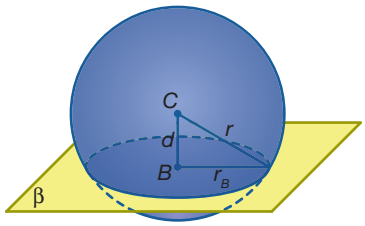
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Volume da esfera

Considere uma esfera de centro C e raio r seccionada por um plano β.



IVPERTYSHUTTERSTOCK

O planeta Terra tem o formato aproximado ao de uma esfera, com volume de cerca de 1 110 bilhões de quilômetros cúbicos.

Por meio do círculo de centro B e raio r_B, obtido na seção, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$r^2 = r_B^2 + d^2 \Rightarrow r_B^2 = r^2 - d^2$$

Escrevendo a área do círculo de centro B em função de r e d, temos:

$$S_B = \pi r_B^2 \Rightarrow S_B = \pi\left(r^2 - d^2\right)$$

Considere agora uma figura **X**, obtida ao retirarmos de um cilindro reto de raio r e altura $2r$ (cilindro equilátero) dois cones retos de raio e altura r, conforme as figuras a seguir.

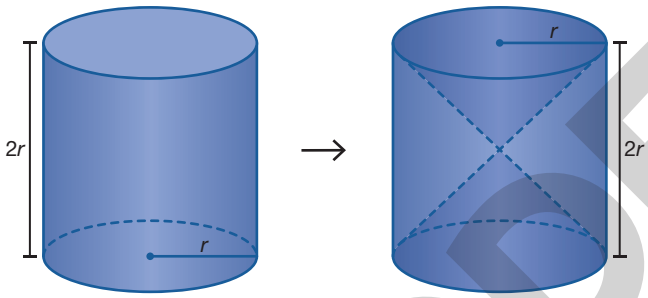


figura **x**

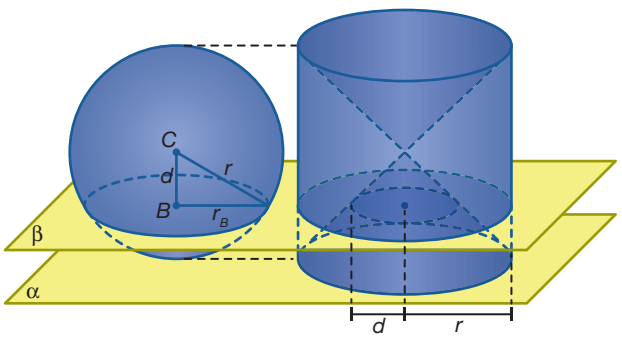
O volume V dessa figura é dado pela diferença entre o volume do cilindro e o dos cones retirados.

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Para obtermos o volume da esfera, vamos utilizar novamente o Princípio de Cavalieri, considerando a esfera e a figura **X**, obtidas anteriormente, apoiadas em um plano α e seccionados por um plano β, paralelo a α.

A área S_C da seção obtida na figura **X** é dada pela área da coroa definida pelos círculos de raio r e d:

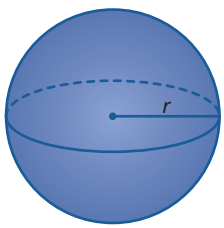
$$S_C = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi\left(r^2 - d^2\right)$$



A área da seção determinada na esfera é dada por $S_B = \pi\left(r^2 - d^2\right)$, conforme visto anteriormente, então as áreas das duas seções obtidas são iguais $\left(S_B = S_C\right)$. Dessa maneira, pelo Princípio de Cavalieri, o volume da esfera e o da figura **X** são iguais.

Portanto, o volume V da esfera de raio r é:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$



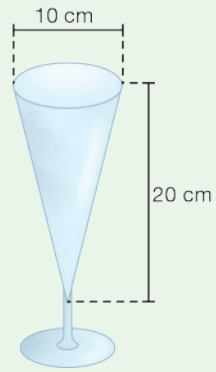
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

Em uma taça vazia com formato interno de cone reto, como a representada ao lado, Gustavo colocou 0,35 ℓ de suco de laranja e cinco pedras de gelo esféricas iguais. Sabendo que, após colocar as pedras de gelo, 10 mℓ de suco transbordaram, determine o comprimento do diâmetro de cada pedra de gelo.



HELOÍSA PINTARELLI

As medidas apresentadas na imagem referem-se às dimensões internas da taça.

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

O comprimento do diâmetro de cada uma das pedras de gelo.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

Dimensões internas da taça; quantidade de suco adicionado à taça por Gustavo; formato e quantidade das pedras de gelo introduzidas na taça; e a quantidade, em mililitros, de suco que transbordou da taça.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, determinamos a capacidade, em mililitros, da taça. Em seguida, calculamos a capacidade disponível na taça, após serem adicionados os 0,35 ℓ de suco. Na sequência, determinamos o volume de cada uma das pedras de gelo. Por fim, determinamos o comprimento do raio de cada uma das pedras de gelo e, depois, o comprimento de seu diâmetro.

√ Escolhendo as notações.

- H: altura interna da taça.
- R: raio interno do aro da taça.
- V_T: volume interno da taça.
- r: raio de cada pedra de gelo.
- d: diâmetro de cada pedra de gelo.
- V_G: volume de cada pedra de gelo.

C Executando o plano

Passo 1

Sabemos que o volume de um cone de altura h e raio da base r_1 é dado por: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot h$. Assim:

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 20 =$$

$$= \frac{500}{3} \cdot \pi \simeq 523{,}33$$

Considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Logo, o volume interno da taça é, aproximadamente, 523 cm^3 ou 523 mℓ.

Lembre-se de que 1 cm^3 = 1 mℓ.

Passo 2

Como 1 ℓ = 1 000 mℓ, segue que:

0,35 ℓ = 0,35 · 1 000 mℓ = 350 mℓ

Agora, vamos calcular a capacidade disponível na taça após Gustavo adicionar o suco. Como o volume interno da taça é aproximadamente 523 mℓ, segue que:

523 mℓ – 350 mℓ = 173 mℓ

Ou seja, após adicionar o suco, havia uma capacidade disponível aproximada de 173 mℓ.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 3

Conhecendo a capacidade disponível na taça, calculamos o volume de cada pedra de gelo. Para isso, fazemos:

$$V_G = \frac{173 + 10}{5} = 36{,}6$$

Logo, o volume de cada pedra de gelo é, aproximadamente, 36,6 mℓ.

Passo 4

Como as pedras de gelo têm formato esférico, segue que:

$$V_G = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Substituindo V_G por 36,6 mℓ, temos:

$$V_G = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow 36{,}6 = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow r^3 = \frac{109{,}8}{4\pi} \Rightarrow r \simeq 2{,}06$$

Considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Assim, o comprimento do raio de cada pedra de gelo é, aproximadamente, 2,06 cm.

Passo 5

Por fim, calculamos o comprimento do diâmetro de cada pedra de gelo. Para isso, fazemos:

$$d = 2r \Rightarrow d = 2 \cdot 2{,}06 = 4{,}12$$

Portanto, o comprimento do diâmetro de cada pedra de gelo é, aproximadamente, 4,12 cm.

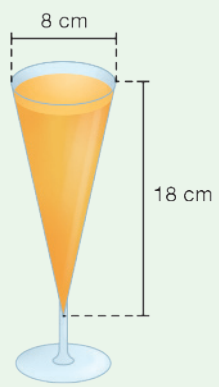
Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Agora é você quem resolve!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema.**

Em uma taça com formato interno de cone reto, como a representada ao lado, há 260 mℓ de suco. Amanda deseja acrescentar pedras de gelo esféricas de 2 cm de diâmetro. Desconsiderando o derretimento do gelo, quantas pedras de gelo, no máximo, ela poderá acrescentar sem que o suco transborde da taça? (Considere $\pi = 3{,}14$.)



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

As medidas apresentadas na imagem referem-se às dimensões internas da taça.

2 **É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta desse problema?**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R1 Um plano α secciona uma esfera a 8 cm de seu centro, obtendo-se um círculo de comprimento do raio 6 cm. Em relação à esfera, calcule:

a) o comprimento do raio;

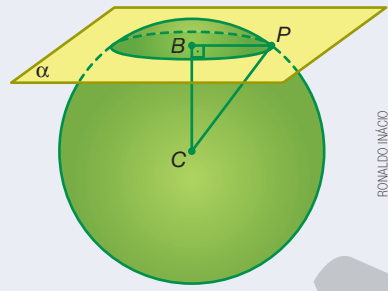
b) o comprimento do equador;

c) o volume.

Considere $\pi = 3{,}14$.

Resolução

a) A distância do centro da esfera ao plano α (BC), o comprimento do raio do círculo da seção (BP) e o comprimento do raio da esfera (CP) são, nessa ordem, os comprimentos dos catetos e da hipotenusa do triângulo retângulo CBP, indicado na figura ao lado.



RONALDO INÁCIO

Como $BC = 8$ cm e $BP = 6$ cm, calculamos o comprimento do raio da esfera por meio do Teorema de Pitágoras.

$$(CP)^2 = (BC)^2 + (BP)^2 \Rightarrow r^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow r = 10$$

Note que $r = 10$, pois $r > 0$.

Portanto, o comprimento do raio da esfera é 10 cm.

b) O comprimento do equador da esfera é dado por:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8$$

Assim, o comprimento do equador da esfera é aproximadamente 62,8 cm.

c) Calculando o volume da esfera, temos:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^3}{3} \simeq 4\,187$$

Portanto, o volume da esfera é, aproximadamente, 4 187 cm^3.

R2 A densidade de um corpo é a razão entre sua massa e seu volume. Um objeto é mais denso do que outro se, tendo uma massa igual, ocupar menor volume, ou, analogamente, com o mesmo volume, tiver maior massa. Por exemplo, ao comparar 1 kg de chumbo com 1 kg de algodão, apesar de as massas serem iguais, o volume ocupado pelo algodão é maior, pois sua densidade é menor.

Os valores da densidade do ouro e da prata são, respectivamente, 19,3 g/cm^3 e 10,5 g/cm^3, em condições ideais de pressão e de temperatura. Considere duas esferas nessas condições: uma de ouro, com comprimento do raio 1,05 cm, e uma de prata, com comprimento do raio 1,20 cm. Determine qual esfera tem maior massa. (Considere $\pi = 3{,}14$.)

Resolução

Note que a esfera de prata tem o volume maior, pois possui o maior raio. No entanto, não podemos dizer o mesmo da massa, pois as esferas são compostas de materiais com diferentes densidades.

Para calcular a massa de cada esfera, inicialmente calculamos o volume, em centímetros cúbicos, de cada uma delas.

- $V_{ouro} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}05)^3}{3} = \frac{14{,}53977}{3} = 4{,}84659$
- $V_{prata} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}20)^3}{3} = \frac{21{,}70368}{3} = 7{,}23456$

Por fim, calculamos a massa, em gramas, de cada esfera.

- $d_{ouro} = \frac{m_{ouro}}{V_{ouro}} \Rightarrow 19{,}3 = \frac{m_{ouro}}{4{,}84659} \Rightarrow m_{ouro} \simeq 93{,}5$
- $d_{prata} = \frac{m_{prata}}{V_{prata}} \Rightarrow 10{,}5 = \frac{m_{prata}}{7{,}23456} \Rightarrow m_{prata} \simeq 76{,}0$

Portanto, as massas das esferas de ouro e prata são, respectivamente, 93,5 g e 76,0 g. Assim, a esfera de ouro tem a maior massa.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Quando necessário, na resolução das tarefas deste tema, considere $\pi = 3{,}14$.

1 Calcule o volume de uma esfera de comprimento do raio 6 cm. aproximadamente 904,32 cm^3

2 Qual é o volume de uma esfera cujo equador tem 9,42 cm de comprimento?
aproximadamente 14,13 cm^3

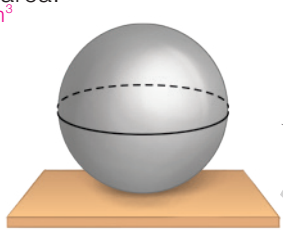
3 A bola de basquete, que pode ser de couro animal, couro sintético ou borracha, não deve ter sua circunferência máxima menor do que 749 mm e maior do que 780 mm, em qualquer categoria masculina.

Quais são os volumes mínimo e máximo, aproximados, que uma bola de basquete masculino deve ter? aproximadamente $7{,}1 \cdot 10^6$ mm^3; aproximadamente $8{,}0 \cdot 10^6$ mm^3

4 O planeta Terra tem o formato aproximado de uma esfera com volume de 1 100 bilhões de quilômetros cúbicos. Dessa maneira, qual é o comprimento do raio aproximado da Terra? 6 400 km

5 Calcule o volume de uma esfera cujo círculo máximo tem 706,5 cm^2 de área.
aproximadamente 14 130 cm^3

6 Uma indústria que fabrica esferas de metal para rolamentos produz certo modelo de esfera em aço-carbono, cuja densidade é 8 g/cm^3.



HELOÍSA PINTARELLI

a) Qual é a massa aproximada de uma dessas esferas com comprimento do raio 0,6 cm?
7,232 g

b) Determine o comprimento do diâmetro de uma esfera desse tipo cuja massa é 200,96 g.
$2\sqrt[3]{6}$ cm

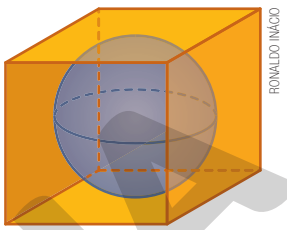
7 Uma das maneiras de armazenar gás a elevadas pressões é colocá-lo em um reservatório esférico, pois, com esse formato, a pressão do gás exercida internamente nas paredes do recipiente é a mesma em todas as direções.

Certo reservatório esférico tem volume aproximado de 900 m^3. Determine o número inteiro mais próximo, por excesso ou por falta, do verdadeiro valor, em metros, do comprimento do raio desse reservatório. 6 m

ALEXANDR MALYSHEV/ALAMY/FOTOARENA

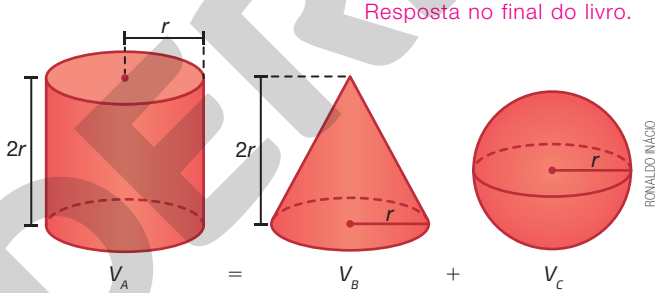
Tanques de armazenamento de produtos químicos.

8 Uma esfera de vidro utilizada como objeto decorativo é embalada em uma caixa cúbica cujo comprimento da aresta corresponde ao do diâmetro da esfera. A fim de proteger essa esfera durante o transporte, o fabricante ocupa as partes vazias da caixa com espuma. Sabendo que o comprimento da aresta da caixa é 24 cm, determine o volume aproximado de espuma utilizado em cada embalagem.
6 589 cm^3



RONALDO INÁCIO

9 Considere um cilindro A com raio r e altura $2r$, um cone B com raio r e altura $2r$ e uma esfera C de raio r. Mostre que o volume de A é igual à soma dos volumes de B e C, ou seja, $V_A = V_B + V_C$.
Resposta no final do livro.

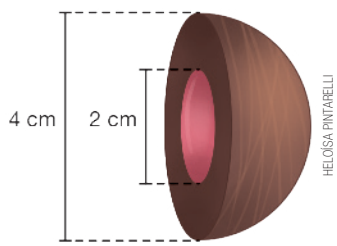


RONALDO INÁCIO

10 Uma esfera com volume igual a 36π cm^3 está inscrita em um cilindro equilátero. Qual é o volume desse cilindro? 54π cm^3

11 Os bombons de chocolate esféricos, fabricados por uma indústria, têm em seu interior um recheio que também possui formato esférico, mas não é de chocolate.

Na imagem ao lado, está representado um corte meridional nesse bombom. Qual é o volume de chocolate utilizado na produção de cada um desses bombons?
aproximadamente 29,3 cm^3



HELOÍSA PINTARELLI

12 Considere, em uma esfera, o equador e dois meridianos perpendiculares entre si. Ao realizar cortes contendo essas circunferências, a esfera é dividida em oito partes idênticas com $\frac{785}{96}$ cm^3 de volume cada. Qual é o comprimento do raio dessa esfera? aproximadamente 2,5 cm

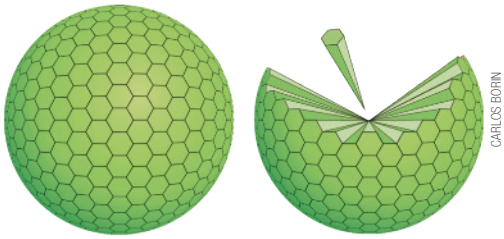
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Área da superfície da esfera

O desenvolvimento apresentado nesta página não é uma demonstração, mas um auxílio na compreensão da fórmula da área da superfície em uma esfera.

Imagine que uma esfera de centro C e raio r seja, de maneira aproximada, a reunião de n (em que n é um número muito grande) pirâmides com vértice em C e altura igual ao comprimento do raio da esfera. Assim, o volume de cada uma dessas pirâmides será dado por $V_i = \frac{1}{3}A_i r$, com $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, em que A_i representa a área da base da pirâmide.



CARLOS BORIN

Uma esfera não pode ser "coberta" exclusivamente por hexágonos. A imagem é apresentada apenas para auxiliar o raciocínio.

O volume V da esfera é, aproximadamente, igual à soma dos volumes das pirâmides obtidas.

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}A_1 r + \frac{1}{3}A_2 r + \ldots + \frac{1}{3}A_n r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right)$$

Nesse caso, $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ é a área aproximada da superfície da esfera, a qual indicaremos por A. Assim:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}r\underbrace{\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right)}_{A} \Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3}rA \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

Portanto, a área da superfície da esfera é $A = 4\pi r^2$.

Exercícios e problemas resolvidos

R3 Desde o tempo de Eratóstenes, matemático grego do século III a.C., acredita-se que o planeta Terra tem formato esférico. Porém, em função de seu movimento de rotação, ela possui um ligeiro achatamento nos polos, sendo que o eixo equatorial do planeta tem 12 756 km, ao passo que o eixo polar tem 12 712 km, aproximadamente. Devido a essa pequena diferença, para efeitos didáticos, é comum desprezar o achatamento e considerar o planeta Terra como uma esfera. O raio equatorial terrestre (aproximadamente 6 400 km) é muitas vezes empregado como unidade de medida para avaliar distâncias no Sistema Solar.

a) Calcule o comprimento da linha do equador terrestre.

b) Determine a área da superfície da Terra.

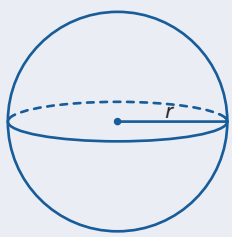
c) Calcule a área da superfície terrestre coberta por água, sabendo que ela corresponde a, aproximadamente, 70% do total.

Resolução

a) Considerando o comprimento do raio da Terra com 6 400 km, obtemos o comprimento do equador calculando o comprimento de uma circunferência de mesmo raio.

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,400 = 40\,192$$

Portanto, o comprimento da linha do equador terrestre é, aproximadamente, 40 192 km.



RONALDO INÁCIO

modelo matemático

b) Calculando a área da superfície, temos:

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6\,400^2 = 514\,457\,600$$

Portanto, a área da superfície terrestre é, aproximadamente, 514 457 600 km^2.

c) Calculando 70% da área da superfície terrestre, temos:

$$A \cdot 0{,}7 = 514\,457\,600 \cdot 0{,}7 = 360\,120\,320$$

Portanto, aproximadamente 360 120 320 km^2 da superfície do planeta Terra são cobertos por água.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

A tarefa **20** propõe a elaboração de um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos dos alunos a respeito de determinadas situações.

13 Qual é a área da superfície de uma esfera de comprimento do raio 2,5 cm? aproximadamente 78,5 cm^2

14 Calcule a área da superfície de uma esfera cujo volume é $\frac{1\,570}{3}$ dm^3. aproximadamente 314 dm^2

15 Os planetários são equipamentos que projetam imagens simulando o céu e seus astros em uma noite sem nuvens. Essa projeção, em geral, é realizada na superfície interna de uma cúpula com formato semiesférico. Se em certo planetário o comprimento da circunferência interna da cúpula semiesférica é 69,08 m, qual é a área da superfície em que ocorre a projeção? 759,88 m^2

ANDRÉ DIB/PULSAR IMAGENS

Edifício do planetário no Centro Dragão do Mar de Arte e Cultura, em Fortaleza, Ceará, em 2015.

No contexto

16 Aroldo construiu uma maquete que contém a representação do planeta Terra. Para representar nosso planeta, ele utilizou uma esfera cuja área da superfície é 11 304 cm^2.

a) Qual é o volume da esfera que representa o planeta Terra? aproximadamente 113 040 cm^3

b) Aroldo marcou corretamente, em sua maquete, o centro de Lançamento de Alcântara, no Maranhão, e o Cabo Canaveral, na Flórida. Sabendo que a distância real em linha reta entre essas bases é 5 181,1 km, determine a distância entre elas na representação feita por ele. aproximadamente 24,3 cm

17 Em um recipiente cilíndrico de 10 cm de raio e 15 cm de altura, contendo 1 212π cm^3 de água, uma esfera de aço maciça deve ser colocada de maneira a ficar totalmente submersa, sem que o líquido do recipiente transborde. Dessa maneira, qual será, no máximo, a área da superfície dessa esfera? 144π cm^2

18 Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem 25 cm de comprimento, estava inicialmente cheio de água. Uma esfera de vidro maciça foi totalmente mergulhada dentro desse recipiente, fazendo transbordar parte da água. Após a esfera ser cuidadosamente retirada, verificou-se que o nível da água no recipiente estava 7,2 cm mais baixo. Qual é a área da superfície dessa esfera? 900π cm^2

FÁBIO EIJI SIRASUMA

19 O sistema de fuso horário utilizado mundialmente consiste em dividir o planeta Terra em meridianos, determinando 24 partes de mesma área, denominadas fusos.

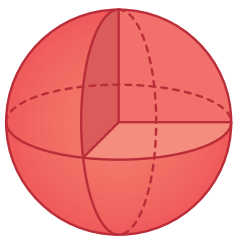
Considerando a Terra como uma esfera de raio 6 400 km, responda às seguintes questões.

a) Qual é o ângulo formado em cada fuso? 15°

b) Qual é a área aproximada do planeta correspondente a cada fuso horário? 21 435 733 km^2

20 Elaborando

Considere, em uma esfera de raio *r*, o equador e dois meridianos perpendiculares entre si. Ao realizar cortes contendo essas circunferências, a esfera é dividida em oito partes idênticas.



RONALDO INÁCIO

De acordo com as informações apresentadas, elabore um problema envolvendo os conteúdos estudados. Em seguida, peça a um colega que o resolva. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

12 Uma aplicação de volume: adulteração de combustíveis

Abasteça sem ser enganado

A manutenção do automóvel está em dia, mas percebe-se um consumo superior ao habitual, além de falhas repentinas no motor? Cuidado! Este veículo pode ter sido abastecido com combustível adulterado.

Para a verificação da qualidade dos combustíveis, são realizados testes específicos com base em normas estabelecidas pela Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP). A gasolina utilizada nos automóveis, por exemplo, é resultante da mistura de gasolina com etanol anidro. A ANP é quem estabelece qual deve ser a proporção entre esses dois combustíveis.

BNCC
CE1CNT

Como consumidores, uma maneira de nos precavermos legalmente em caso de defeitos no veículo por combustível adulterado é exigir a nota fiscal a cada abastecimento. No caso da gasolina, também podemos exigir o "teste de proveta", que avalia se a porcentagem de etanol anidro está dentro dos limites estabelecidos. Em fevereiro de 2020, por exemplo, esse valor era de 27%, com tolerância de até 1% para mais ou para menos.

Alguns cuidados básicos podem evitar o abastecimento do veículo com combustível adulterado. Desconfie, fiscalize e, se necessário, denuncie!

Os preços dos combustíveis devem estar expostos de forma bem visível. Desconfie de preços muito inferiores à média da região. Procure abastecer sempre no mesmo posto de combustível. Caso desconfie da qualidade do produto, saberá sua origem.

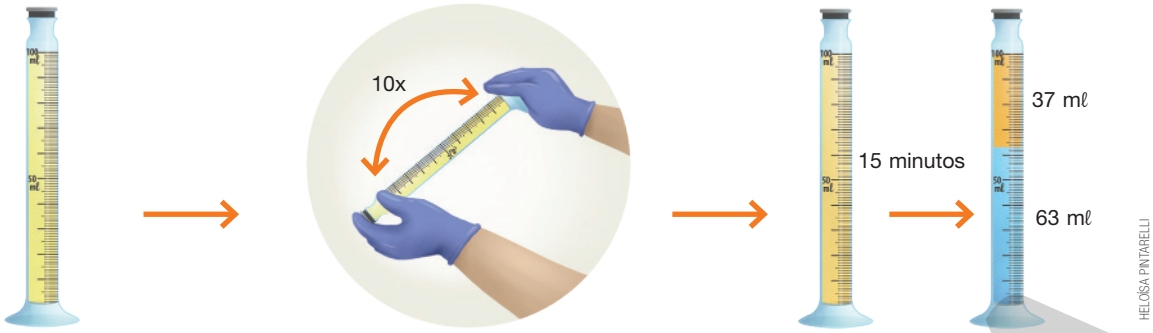
Confira a origem do combustível. Os postos devem informar as suas distribuidoras e, no caso de não haver uma exclusiva (bandeira branca), em cada bomba deve ser informada a distribuidora que forneceu o combustível.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Como é realizado o teste de teor de etanol (proveta)

Para realizar o teste de teor de etanol na gasolina, é necessária uma solução de 100 g de cloreto de sódio (sal de cozinha) para cada 1 ℓ de água.



HELOÍSA PINTARELLI

Em uma proveta de vidro transparente com tampa e capacidade para 100 mℓ, graduada em subdivisões de 1 mℓ, despejam-se 50 mℓ de amostra de gasolina e 50 mℓ da solução de água e cloreto de sódio.

Realizando 10 inversões sucessivas de proveta, a solução e a gasolina são misturadas.

Em seguida, deixa-se a mistura em repouso por 15 minutos, a fim de que ocorra a separação em duas camadas. Após esse tempo, a gasolina (de cor amarelada) estacionará na parte superior da proveta, e a solução aquosa (água e etanol) na parte inferior.

Ao final, verifica-se o volume V de aumento na parte aquosa e, por meio da fórmula $T = 2V + 1$, obtém-se, em porcentagem, o teor T de etanol na gasolina.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A No teste de proveta, se ao final forem obtidos 63 mℓ de solução aquosa, qual terá sido a porcentagem de etanol na gasolina testada? 27%

B Considere que uma pessoa, por curiosidade, faça o teste de proveta utilizando um tubo cilíndrico transparente e não graduado, com 20 cm de altura e comprimento do raio da base igual a 1,5 cm. Inicialmente, a pessoa realizará duas marcações, indicando as medidas de 50 mℓ e 100 mℓ. Aproximadamente, em quais alturas do tubo, a partir da base, ela deve fazer as marcações? 50 mℓ: 7 cm; 100 mℓ: 14 cm

C Em relação ao item anterior, se ao final do experimento a parte ocupada pela solução aquosa corresponder a 9 cm de altura, qual terá sido o teor aproximado de etanol na gasolina testada? Em relação à proporção de etanol, essa gasolina está de acordo com o percentual em vigor em fevereiro de 2020, que correspondia a 27%? 28,58%; não

Ser consciente

Uma possível resposta: porque, além de servir como prova de consumo naquele estabelecimento, ela garante o recolhimento dos devidos impostos, evitando a sonegação fiscal.

A Por que é importante pedir a nota fiscal ao abastecer um veículo?

B Se você pedisse o teste de proveta em um posto de combustível e o responsável se recusasse a realizar, que atitude você deveria tomar?

Resposta esperada: denunciar o posto ao Procon do estado ou à ANP.

Caso desconfie da qualidade do combustível, é possível denunciar o posto ao Programa de Proteção e Defesa do Consumidor (Procon) do estado ou à ANP.

FOTOMONTAGEM MAURÍCIO PLANEL. FOTOS: 1.ANUSORN NAKDEE/SHUTTERSTOCK; 2.JULES2000/SHUTTERSTOCK; 3.DONATAS1205/SHUTTERSTOCK; 4.JNP/SHUTTERSTOCK; 5.JEFF KWON/SHUTTERSTOCK; 6.BLUESKYIMAGE/SHUTTERSTOCK; 7.FOTOGRIN/SHUTTERSTOCK; 8.AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 9.AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 10.NIP STUDIO/SHUTTERSTOCK; 11.LUIS MOLINERO/SHUTTERSTOCK; 12.A_PLE/SHUTTERSTOCK; 13.STUDIOVIN/SHUTTERSTOCK; 14.SUCHAT MICRO/SHUTTERSTOCK; 15.VILAX/SHUTTERSTOCK; 16.ELENA ELISSEEVA/SHUTTERSTOCK; 17.24NOVEMBERS/SHUTTERSTOCK; 18.NEJRON PHOTO/SHUTTERSTOCK; 19.ZHAO JIANKANG/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

13 Projeções cartográficas

BNCC
• EM13MAT509

Mapear é impreciso

Desde a Antiguidade, a humanidade apresenta uma preocupação constante com a representação das regiões do globo terrestre. As primeiras representações cartográficas são creditadas a Eratóstenes de Cirene, um matemático, geógrafo e astrônomo grego nascido em 276 a.C. Com base nos trabalhos desse astrônomo, diferentes mapas foram sendo elaborados, buscando sempre a representação mais adequada dos países e dos diferentes territórios do planeta. No entanto, será que é possível elaborar um mapa que consiga descrever as regiões de maneira exata, sem distorções?

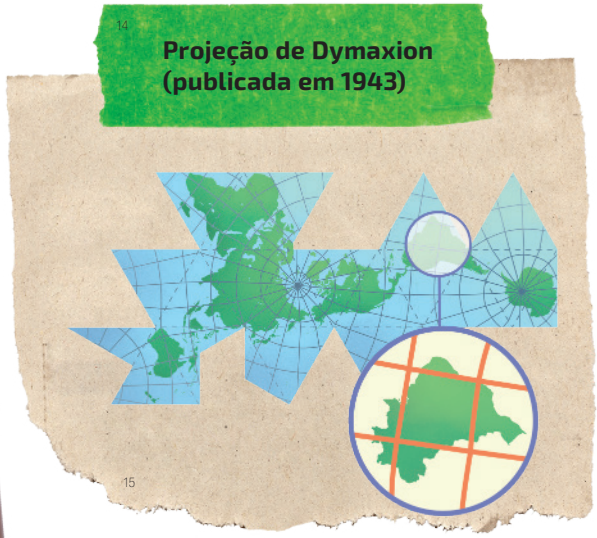
Sabemos que o planeta Terra é uma estrutura tridimensional cujo formato parece com determinada figura geométrica espacial, enquanto os mapas são construídos sob superfícies planas. Assim, como apontou Carl Friedrich Gauss, no século XIX, é impossível representar uma esfera em um plano sem que haja distorções. Logo, é impossível construir um mapa que seja 100% fiel à realidade. Dessa maneira, os cartógrafos precisam escolher uma das três principais características (dimensões, formatos e ângulos) para manter em seus mapas, enquanto as outras, inevitavelmente, deverão ser modificadas. De acordo com a característica escolhida, diferentes mapas podem ser elaborados, conforme podemos observar nos exemplos apresentados.

Cartógrafo: profissional da Cartografia, ciência responsável pela elaboração de mapas e de outros tipos de representação.

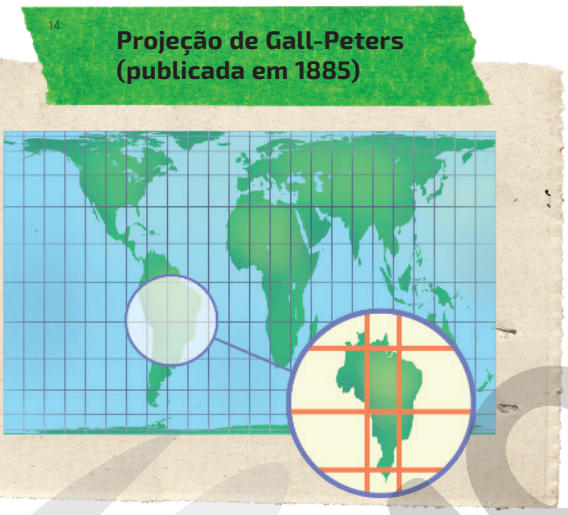
FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.MARZOLINO/SHUTTERSTOCK; 2.ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK; 3.RTIMAGES/SHUTTERSTOCK; 4.TRIFF/SHUTTERSTOCK; 5.RTIMAGES/SHUTTERSTOCK; 6.FREES; 7.CHANNARONG PHERNGJANDA/SHUTTERSTOCK; 8.PAVILA/SHUTTERSTOCK; 9.CARACOLLA/SHUTTERSTOCK; 10.PHOTO BOUTIQUE/SHUTTERSTOCK; 11.MARIA ISAEVA/SHUTTERSTOCK; 12.ALEX STAROSELTSEV/SHUTTERSTOCK; 13.ELBUD/SHUTTERSTOCK; 14.BULBSPARK/SHUTTERSTOCK; 15.PICSFIVE/SHUTTERSTOCK; 16.VLABO/SHUTTERSTOCK; 17.ELBUD/SHUTTERSTOCK

MODERNA

Alguns mapas-múndi elaborados historicamente e o destaque para a representação do Brasil



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI



Ilustrações produzidas com base em: VAIANO, Bruno. Todos os mapas-múndi estão errados. *Superinteressante*, São Paulo, Abril, ed. 379, ano 31, nº 10, ago. 2017. p. 54-59.

Observe que o Brasil pode ser representado com formatos e posições diferentes em cada uma das projeções apresentadas, apesar de ainda manter algumas de suas principais características geográficas. Isso acontece devido à opção feita pelo cartógrafo por preservar áreas, distâncias ou ângulos, dependendo de seu objetivo. Assim, a escolha por determinado tipo de mapa deve ser feita de modo coerente com as propostas estabelecidas para o uso daquele tipo de representação.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Identifique semelhanças e diferenças entre os tipos de mapa apresentados.

B Você consegue identificar erros de representação nos mapas apresentados? Se sim, quais? Algumas possíveis respostas: na projeção de Mercator, é possível perceber erros em relação ao tamanho das representações dos polos Norte e Sul; na projeção de Gall-Peters, existem erros em relação ao tamanho dos continentes; na projeção de Dymaxion, tem-se uma representação com regiões convexas, apresentando um distanciamento em relação ao formato original do planeta; na projeção de Robinson, é possível perceber um distanciamento em relação às características do globo terrestre.

C Pesquise outros tipos de mapas-múndi construídos no decorrer da história, analisando suas características. Depois, elabore um pequeno texto com suas conclusões para ser apresentado aos colegas e ao professor. Resposta pessoal.

A) Algumas possíveis respostas: todos os tipos de mapas mantêm as ligações existentes entre as regiões, o posicionamento dos países e a presença dos oceanos, porém cada um deles dá enfoque a diferentes características.

Vimos nessas páginas algumas projeções de mapas-múndi elaboradas ao longo do tempo e, em cada uma delas, foi possível identificar algumas características. Nas páginas a seguir, estudaremos um pouco mais sobre **Cartografia** e **projeções cartográficas**, bem como as deformações provocadas pelas projeções cilíndrica e cônica.

MODELO

Cartografia

Meridiano: linha imaginária que corta a superfície da Terra no sentido Norte-Sul, ligando um polo ao outro. É utilizado como referência na localização de um ponto em qualquer parte do planeta. O principal é o meridiano de Greenwich, que divide a Terra em Leste e Oeste.

Paralelo: linha imaginária que circula a Terra no sentido Leste-Oeste. Assim como os meridianos, os paralelos também são utilizados como referência na localização de um ponto em qualquer parte do planeta. O principal é a linha do Equador, que divide a Terra nos hemisférios Norte e Sul.

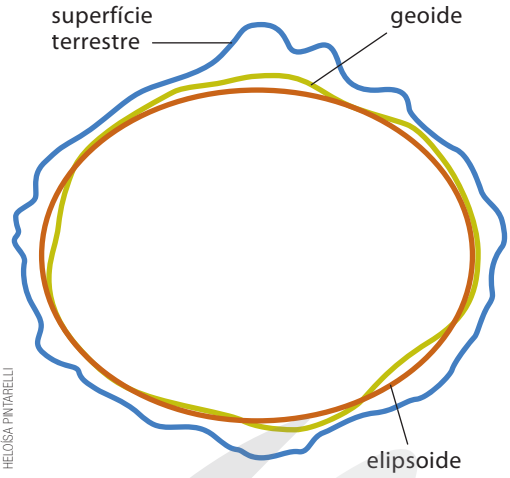
Conforme dito anteriormente, os primeiros registros relacionados à produção de mapas de que se tem notícia são atribuídos a Eratóstenes de Cirene. A ele também é atribuída a criação de um dos primeiros mapas do mundo, que já contava com um sistema de paralelos e meridianos que auxiliavam na localização de partes específicas das regiões retratadas. Esse fato deu início à Cartografia.

SAMMLUNG RAUCH/INTERFOTO/FOTOARENA

Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-194 a.C.).

Por ser impossível representar uma superfície curva em um plano, no decorrer do tempo, inúmeros mapas foram criados com o objetivo de tentar minimizar os erros cometidos nas versões anteriores, cada qual com suas próprias características.

Nos tópicos seguintes, estudaremos as deformações que não podem ser evitadas ao transpor a superfície terrestre para um plano. Porém, vale destacar que a utilidade de cada mapa é válida para determinada aplicação, em determinado instante.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

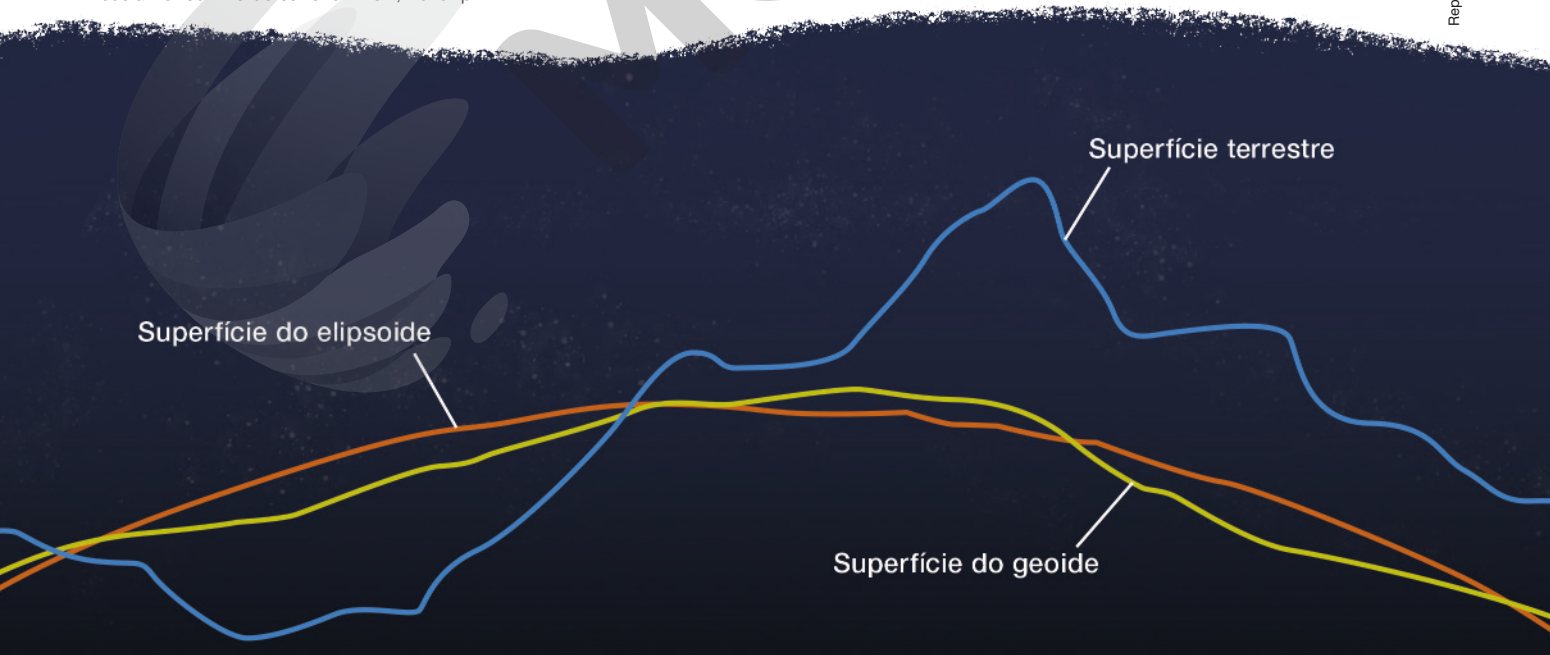
Ilustrações produzidas com base em: *Atlas Geográfico Escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 17.

O formato do planeta Terra

Como mencionado anteriormente, o planeta Terra não possui uma superfície regular. Em vez disso, apresenta uma estrutura cheia de rugosidades, que se assemelha ao formato de um **geoide**. Esse tipo de estrutura é difícil de ser representado e analisado matematicamente, tornando-se necessária sua aproximação por meio de um modelo regular.

Dependendo da aplicação desejada, pode-se representar o planeta Terra por uma esfera, como feito em outros temas deste livro, ou por uma elipsoide.

O esquema abaixo possibilita uma comparação mais detalhada da superfície terrestre, da superfície do elipsoide e da superfície do geoide.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Estudando projeções cartográficas

Ao representarmos a superfície terrestre em um mapa, devemos, inicialmente, estabelecer um método em que todo ponto da superfície do planeta corresponda um ponto do mapa e vice-versa. Existem diversos métodos que possibilitam essa correspondência, os quais são chamados **sistemas de projeção cartográficos**.

Todos os mapas são representações aproximadas da superfície terrestre. Assim, o sistema de projeções utilizado deve ser escolhido de maneira que o mapa satisfaça suas finalidades.

Classificação de projeções

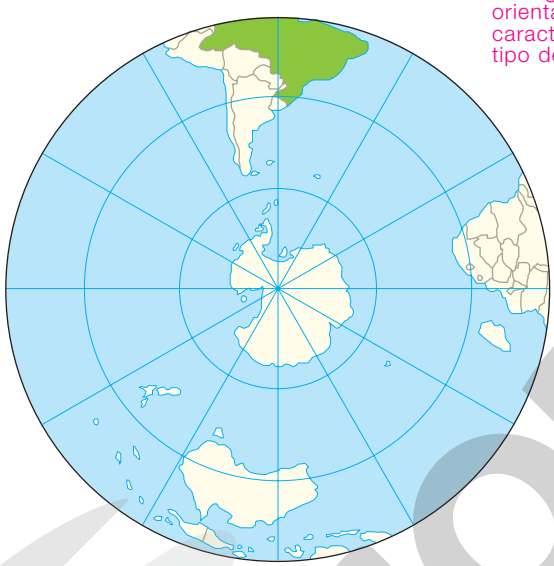
Os sistemas de projeções cartográficas são classificados pelo tipo de superfície adotada e por seu grau de deformação.

Quanto à superfície adotada

Quanto ao tipo de superfície adotada, apresentaremos as projeções planas ou azimutais, cônicas e cilíndricas.

- A **projeção plana** ou **azimutal** consiste na projeção do globo terrestre sobre um plano. É o tipo mais antigo de projeção.

Neste tema, algumas representações cartográficas não apresentam escala e orientação, pois o objetivo é destacar as características de deformação de cada tipo de projeção.



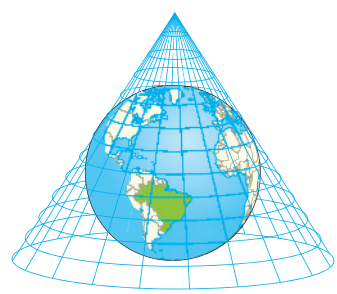
KEITHY MOSTACHI

CAMILA CARMONA

Ilustrações produzidas com base em: *Atlas Geográfico Escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 21.

- A **projeção cônica** consiste na projeção do globo terrestre sobre a superfície lateral de um cone reto que, em seguida, é "desenrolada" sobre um plano.

HELOÍSA PINTARELLI



CAMILA CARMONA

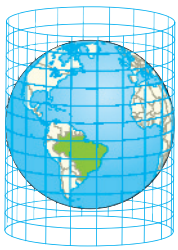
Ilustrações produzidas com base em: *Atlas Geográfico Escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 21.

Em todas as projeções cônicas normais – cujo eixo do cone coincide com o eixo de rotação da Terra – os meridianos são retas que convergem para um ponto (que representa o vértice do cone) e os paralelos são arcos de circunferências concêntricas cujo centro é esse ponto.

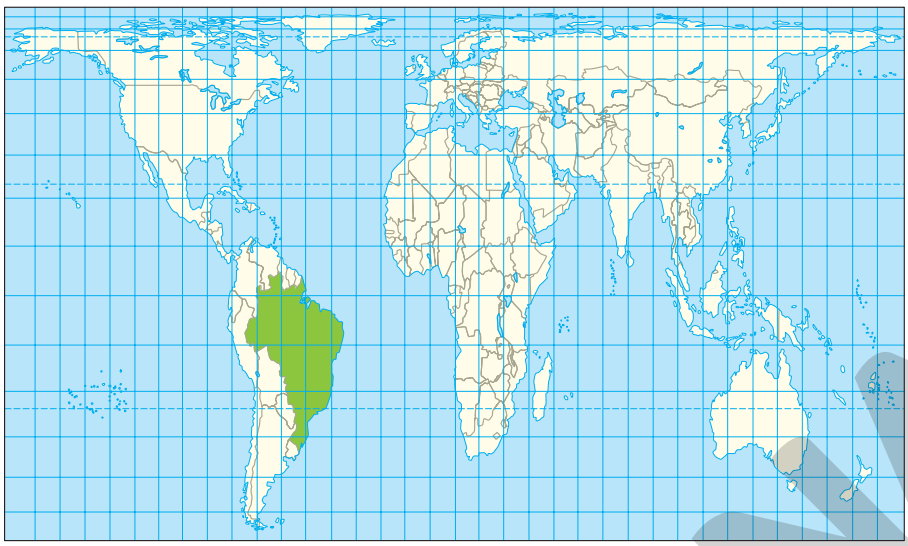
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- A **projeção cilíndrica** consiste na projeção do globo terrestre sobre a superfície lateral de um cilindro reto que, em seguida, é "desenrolada" sobre um plano.



CAMILA CARMONA



HELOÍSA PINTARELLI

Ilustrações produzidas com base em: *Atlas Geográfico Escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 21.

Em todas as projeções cilíndricas normais – cujo eixo do cilindro coincide com o eixo de rotação da Terra – os meridianos e os paralelos são representados por retas perpendiculares.

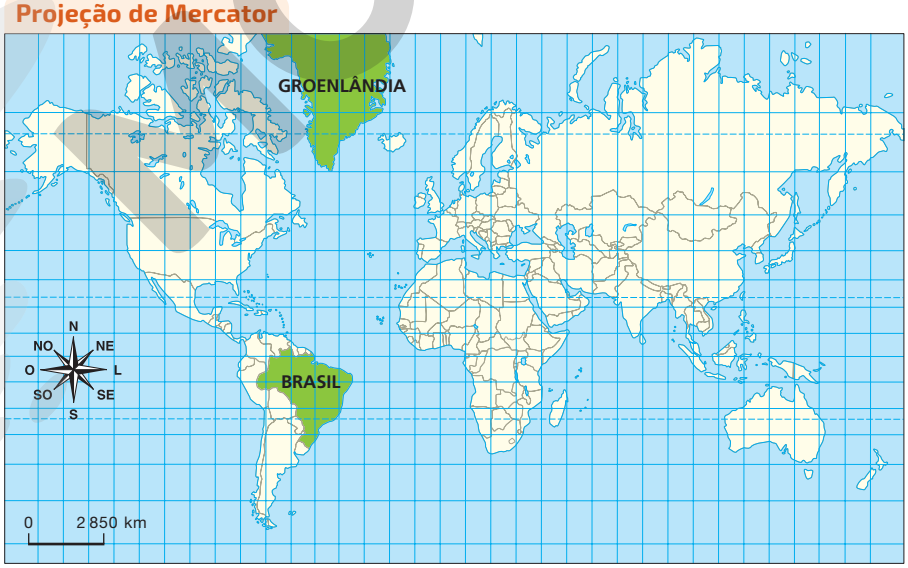
Quanto ao grau de deformação

Cada um dos métodos de projeção da superfície terrestre preserva diferentes propriedades: área, direção, distância e forma. Desse modo, quanto ao grau de deformação das superfícies representadas, as projeções são classificadas em conformes, equivalentes ou equidistantes.

Ao se preservar uma propriedade, as demais normalmente sofrem distorções.

- As **projeções conformes** conservam as formas da superfície terrestre. Nelas, os ângulos da representação mantêm fidelidade aos do globo. Um exemplo de projeção conforme é a de Mercator, elaborada por Gerardus Mercator, em 1569.

Projeção de Mercator



HELOÍSA PINTARELLI

Nessa projeção a Groenlândia, localizada no extremo norte do continente americano, aparenta ter uma área maior do que a do Brasil, porém a área da Groenlândia é, aproximadamente um quarto da do Brasil.

Fonte de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. 8 ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 23.

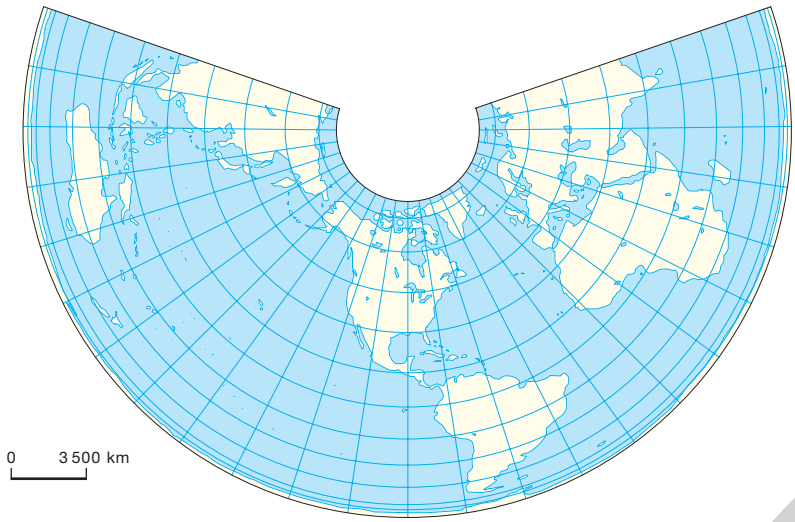
A projeção de Mercator é, provavelmente, uma das projeções conformes mais conhecidas. Nessa projeção, as deformações que ocorrem nas áreas representadas são mínimas na região equatorial, mas aumentam consideravelmente em direção aos polos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- As **projeções equivalentes** conservam as relações de superfície, não havendo deformação de área. Um exemplo de projeção equivalente é a de Albers, desenvolvida por Heinrich Christian Albers no início do século XIX.

Projeção de Albers

KEITH Y MOSTACHI

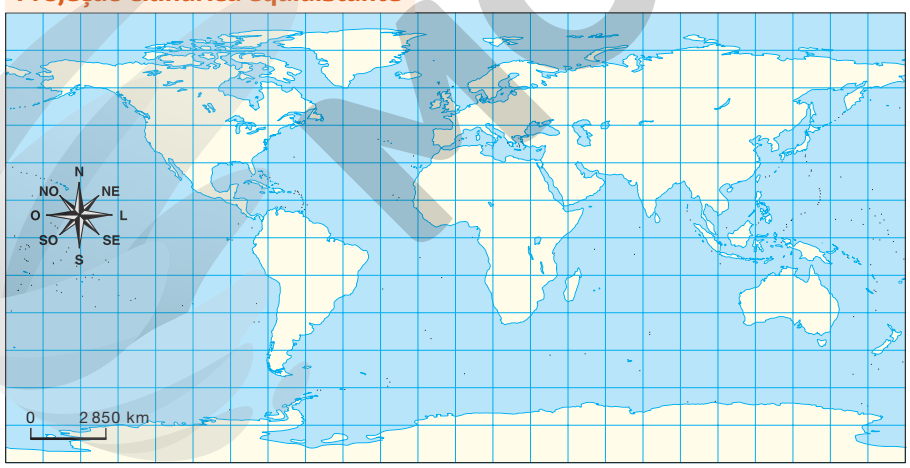


Fonte de pesquisa: SNYDER, J. P. *An album of map projections*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1989. p. 101

Nessa projeção, os paralelos são arcos de circunferências concêntricas. Além disso, quanto mais próximo da borda Norte e Sul do mapa, a distância entre dois paralelos é menor. Já os meridianos são raios de uma mesma circunferência, que intersecta os paralelos perpendicularmente.

- As **projeções equidistantes** conservam a proporção entre as distâncias, em determinadas direções, na superfície representada. Um exemplo de projeção equidistante é a projeção cilíndrica equidistante. Essa projeção era muito empregada na navegação marítima, porém foi substituída pela projeção de Mercator.

Projeção cilíndrica equidistante



HELOÍSA PINTARELLI

Fonte de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. 8 ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 23.

- Imagine que você precisa construir um mapa que apresente menos distorções em relação ao tamanho real das áreas representadas. Qual das projeções citadas anteriormente melhor atenderia ao seu interesse? Espera-se que os alunos respondam que são as projeções equivalentes, como é o caso da projeção de Albers.

A escolha de uma projeção deve levar em consideração a precisão desejada, o impacto sobre o que se pretende analisar e o tipo de dado disponível.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

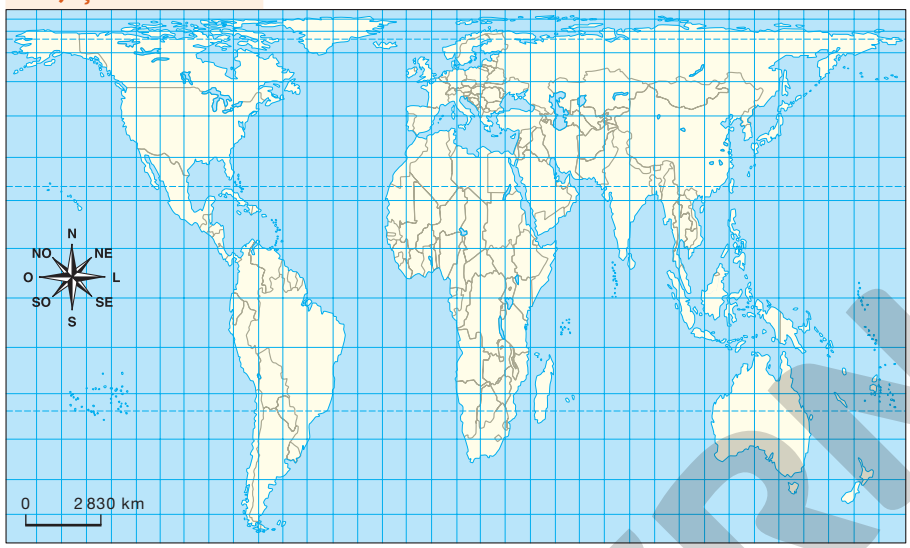
MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Duas das principais projeções cartográficas são a de Mercator, apresentada anteriormente, e a de Peters, elaborada pelo cartógrafo alemão Arno Peters, em 1974.

Projeção de Peters



HELOÍSA PINTARELLI

Fonte de pesquisa: *Atlas des colléges*. Paris: Hachette, 1996. p. 100.

Com base em seus conhecimentos sobre projeções cartográficas, determine a alternativa correta. alternativa a

a) Na projeção de Peters, as formas da superfície parecem visivelmente deformadas, como se os continentes tivessem sido mais alongados no sentido norte-sul e mais achatados no sentido leste-oeste.

b) Na projeção de Mercator, as deformações que ocorrem nas áreas representadas são máximas na região equatorial, mas diminuem consideravelmente em direção aos polos.

c) A superfície adotada na projeção de Peters é um plano, enquanto a adotada na de Mercator é um cone.

d) Na projeção de Peters, as formas da superfície parecem visivelmente deformadas, como se os continentes tivessem sido mais alongados no sentido leste-oeste e mais achatados no sentido norte-sul.

2 O logotipo e a bandeira da ONU são os símbolos utilizados pela Organização para se fazer representar nos diferentes palcos em que opera. Esses elementos são essenciais em cenários de conflito, permitindo a rápida e fácil identificação dos agentes e dos postos de comando das Nações Unidas.

Fonte de pesquisa: Organização das Nações Unidas (ONU). Centro Regional de Informações para a Europa Ocidental. Disponível em: <https://unric.org/pt/logotipo-e-bandeira-da-onu/>. Acesso em: 30 maio 2020.

YURIY BOYKO/SHUTTERSTOCK

Bandeira da ONU.

A sigla ONU refere-se à Organização das Nações Unidas.

O logotipo das Nações Unidas consiste em um mapa do mundo representado por meio de uma projeção inscrita numa coroa composta por ramos de oliveira. Quanto à superfície adotada, podemos classificar essa projeção em azimutal, cilíndrica ou cônica? azimutal

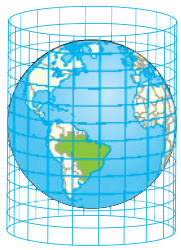
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

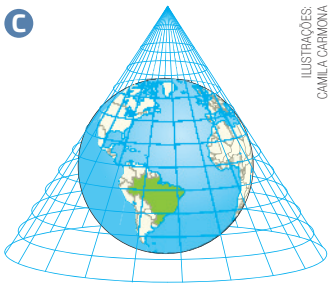
3 Estudamos anteriormente as projeções de Mercator e de Peters. Entre as alternativas a seguir, qual apresenta o modelo que ambas as projeções utilizam? alternativa b

A

B



C

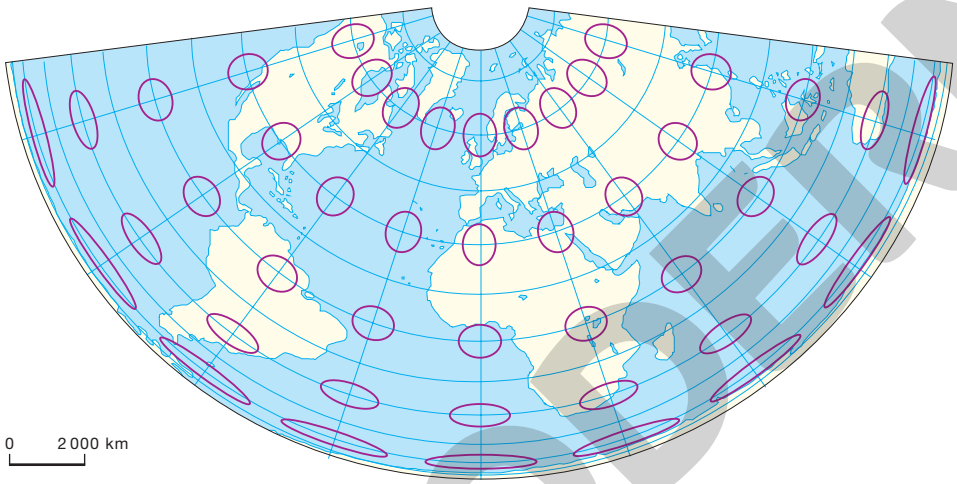


ILUSTRAÇÕES: CAMILA CARMONA

Ilustrações produzidas com base em: *Atlas Geográfico Escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 21.

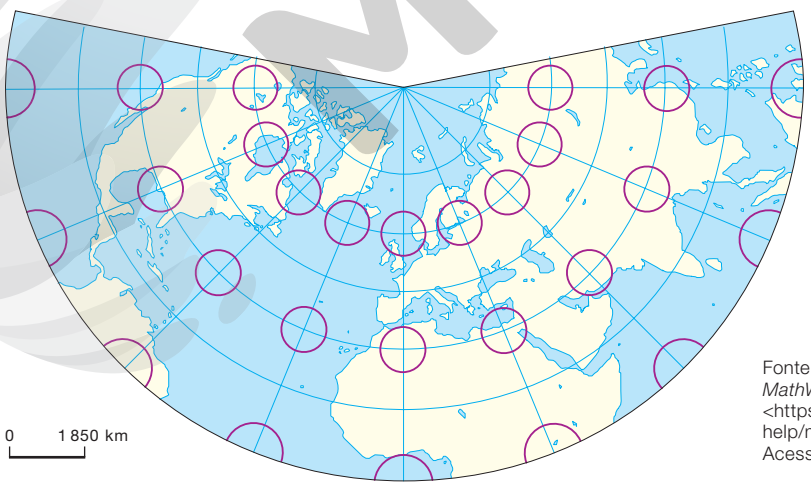
4 Na superfície de um globo terrestre, foram desenhadas algumas circunferências congruentes. Em seguida, utilizando métodos de projeções cartográficas e um *software*, obteve-se os seguintes resultados.

Projeção de Albers



Fonte de pesquisa: Eqaconic. *MathWorks*, 2020. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/map/eqaconic.html>. Acesso em: 2 jun. 2020.

Projeção de Lambert



ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI

Fonte de pesquisa: Lambertstd. *MathWorks*, 2020. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/map/lambertstd.html>. Acesso em: 2 jun. 2020.

Para o propósito específico de reduzir as deformações de:

- ângulo, qual é o resultado mais adequado? projeção de Lambert
- área, qual é o resultado mais adequado? projeção de Albers

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5 A fim de analisar deformações em algumas projeções, Tobias construiu, utilizando um *software* matemático, algumas representações no plano. Antes de aplicar as projeções, ele indicou algumas circunferências congruentes sobre o globo terrestre. Após os alunos resolverem a tarefa, informe que a projeção utilizada no item A é a de Mercator e a utilizada no item B é a cônica equidistante.

A

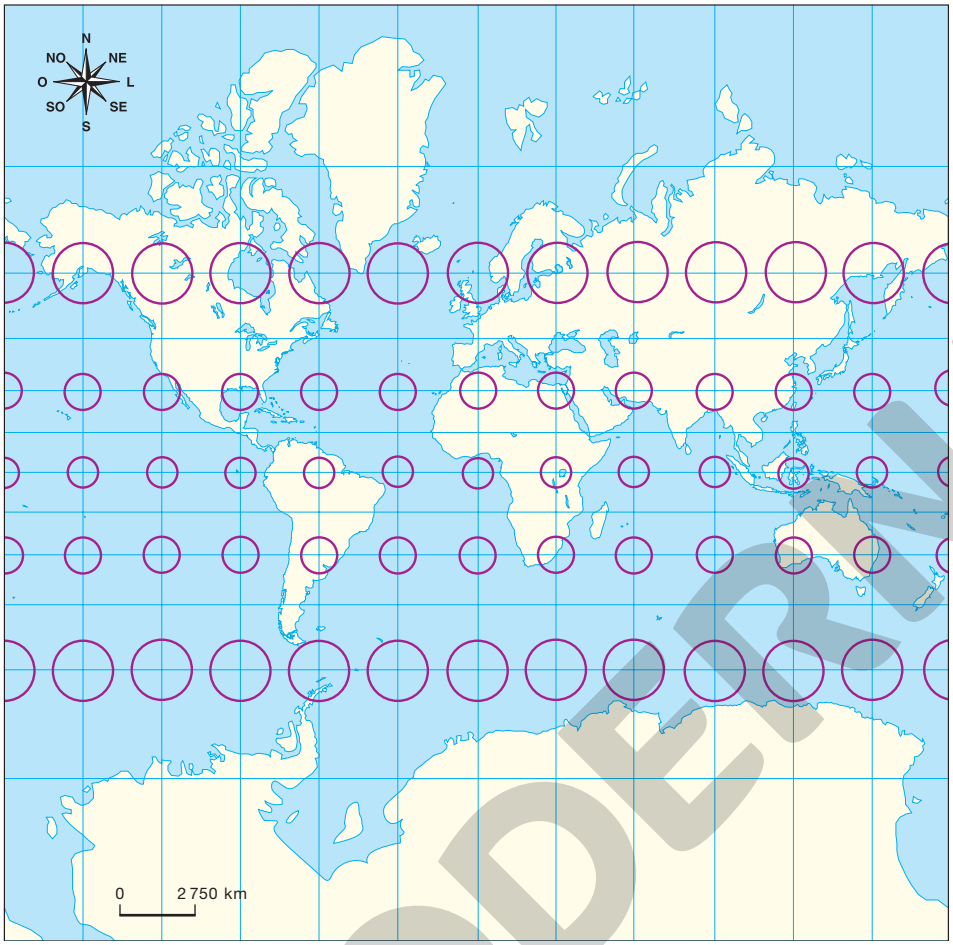


Ilustração produzida com base em: Mercator. *MathWorks*, 2020. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/map/mercator.html>. Acesso em: 2 jun. 2020.

B

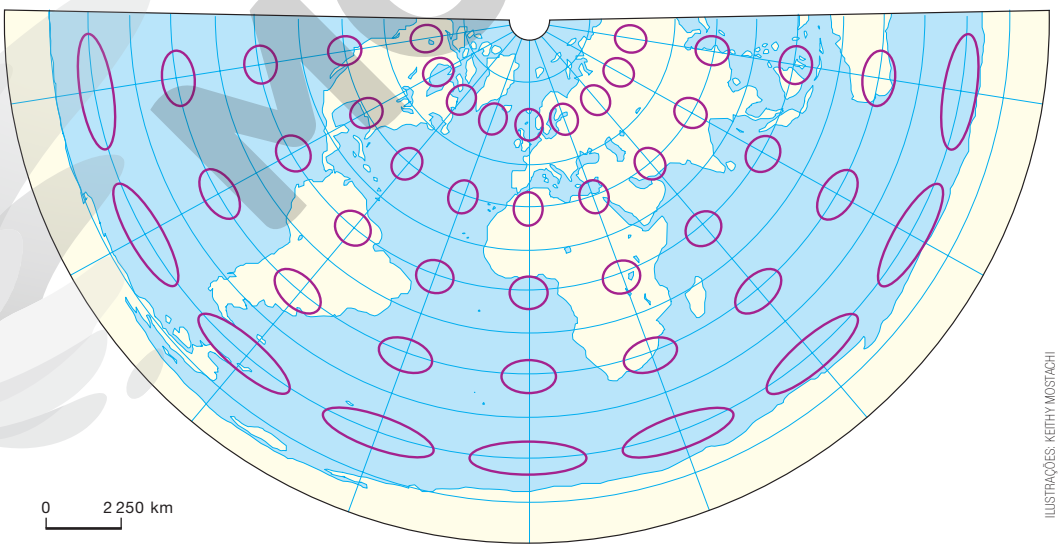


Ilustração produzida com base em: Eqdconicstd. *MathWorks*, 2020. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/map/eqdconicstd.html>. Acesso em: 2 jun. 2020.

ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI

A: projeção cilíndrica; B: projeção cônica.

a) Classifique as projeções aplicadas por Tobias quanto à superfície adotada.

b) Entre as projeções aplicadas, alguma delas apresenta deformação de ângulo? E de área?
Apenas a projeção B apresenta deformação de ângulo. Ambas as projeções apresentam deformação de área.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Comparando áreas de países

Com o auxílio de recursos tecnológicos, é possível analisar as deformações de ângulos e de áreas sofridas na construção de mapas. Com o aplicativo disponível no *site* The true size, por exemplo, é possível obter a representação de um país em diferentes posições do mapa, permitindo, em alguns casos, a comparação de área.

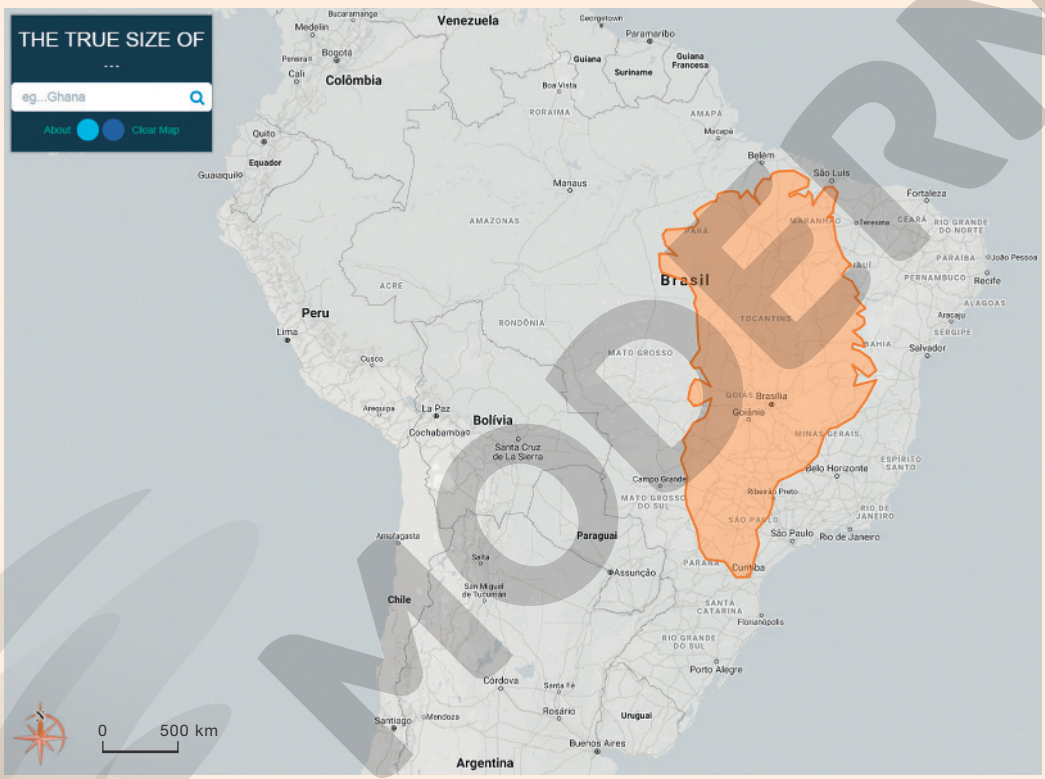
Vamos comparar as áreas do Brasil e da Groenlândia.

A No campo de pesquisa, digite o nome de um país, nesse caso, Greenland. Em seguida, pressione **Enter**.

> Devido ao fato de o *site* indicado ser em inglês, os nomes dos países a serem pesquisados também devem estar em inglês, como é o caso da Groenlândia, cujo nome digitado foi *Greenland*.

B Clique sobre a região destacada e "arraste-a", de maneira que fique sobre a representação do Brasil.

REPRODUÇÃO – THE TRUE SIZE



Explique aos alunos que a tradução de The true size of é "O tamanho real de".

Como havíamos dito anteriormente, é possível verificar que a área da Groenlândia é menor do que a do Brasil.

Agora é com você!

Respostas no Suplemento para o professor.

1 A projeção utilizada nesse aplicativo pode ser classificada como equivalente? Justifique sua resposta.

2 De maneira semelhante à apresentada, compare a área de outros países. Em seguida, converse com os colegas e o professor sobre as deformações observadas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ampliando seus conhecimentos

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de livros, *sites* e *podcasts* que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula, envolvendo conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

Para ler

- **A Matemática das coisas**

  CRATO, Nuno. *A Matemática das coisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro apresenta diversos exemplos da importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

- **A Matemática nas profissões**

  BARELLA, Elaine S.; MARTINS, Laura M. R. (Org.). *A Matemática nas profissões*. São Paulo: Portal Editora, 2010.

  Resultado de pesquisas e entrevistas, o livro apresenta o relato de profissionais de diversas áreas sobre a relação deles com a Matemática em suas rotinas de trabalho.

- **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**

  GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro é um relato de quatro milênios da história da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

- **A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos**

  SZPIRO, George. *A vida secreta dos números*: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. Trad. J. R. Souza. Rio de Janeiro: Difel, 2008.

  Por meio de histórias, anedotas e outros tipos de textos, este livro nos mostra como a Matemática está presente em quase todos os aspectos do cotidiano. O livro aborda curiosidades históricas pouco conhecidas e apresenta grandiosos praticantes da Matemática ao longo dos tempos.

- **O instinto matemático**

  DEVLIN, Keith. *O instinto matemático*. Trad. Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

  O autor defende a ideia de haver dois "tipos" de Matemática: a simbólica, que é exclusiva do ser humano; e a natural, que pertence a qualquer animal e corresponde a habilidades matemáticas relacionadas à sobrevivência, senso de direção e captura de presas.

- **O livro dos números: uma história ilustrada da Matemática**

  BENTLEY, Peter. *O livro dos números*: uma história ilustrada da Matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

  O autor busca revelar segredos e mistérios da Matemática e mostrar sua presença no cotidiano, desde a ciência até as artes. Ilustrado com fotografias, gravuras, pinturas, entre outros, o livro é organizado de maneira a facilitar a compreensão de situações em que a Matemática está envolvida.

- **O universo e a xícara de chá**

  COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá*. Trad. Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

  O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como enxergar a lógica presente nessas situações, cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para navegar

- **Domínio Público**

  Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* consiste em uma biblioteca digital, na qual é possível pesquisar textos, imagens, sons e vídeos de domínio público (acesso livre e gratuito) referentes a diversas áreas.

- **Edumatec**

  Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

- **Enem**

  Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível fazer a inscrição para o Enem e acessar os resultados, os simulados e as provas aplicadas em anos anteriores, assim como a matriz de referência dos conhecimentos avaliados no exame.

- **IBGE**

  Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/pt/inicio.html>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível obter informações estatísticas sobre o Brasil, como contagem da população e índices da economia, além de dados referentes a estados e municípios.

- **Matemática essencial**

  Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* apresenta definições e conceitos matemáticos de diversos níveis de ensino, exemplos resolvidos e exercícios que possuem respostas, e, em alguns casos, as respostas estão justificadas e as resoluções, detalhadas.

- **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**

  Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível obter diversas informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, como efetuar a inscrição, verificar a data das provas e acessar as provas aplicadas em anos anteriores.

Para ouvir

- **Número imaginário**

  Disponível em: <https://numeroimaginario.wordpress.com/2017/06/14/podcasts/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Uma série de *podcasts* abordando diversos tópicos relacionados à área de Matemática são disponibilizados neste *site*, tratando de assuntos que vão desde a discussão sobre 0 pertencer ou não ao conjunto dos números naturais até o infinito de Cantor.

- **Pravaler**

  Disponível em: <https://soundcloud.com/canal-pravaler/guia-fies-2020-saiba-tudo-sobre-essa-edicao-1>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Vai começar a graduação ou pensa em fazer uma segunda faculdade, mas não tem renda o suficiente para pagar um curso em uma instituição privada? O Pravaler preparou um guia completo sobre o Fies 2020, com tudo o que você precisa saber.

- **Resumov**

  Disponível em: <https://www.resumov.com.br/podcast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Criado por Susane Ribeiro, o Resumov é um *podcast* que dá dicas de estudos para quem deseja ter uma boa nota no Enem ou passar nos vestibulares mais difíceis do país.

- **Scicast**

  Disponível em: <https://www.deviante.com.br/podcasts/scicast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Esse *podcast* é voltado para aquele que precisa dar um gás nos estudos da área de Ciências exatas e naturais. Nele, o apresentador utiliza de situações do dia a dia para explicar Matemática, Química e Física de uma maneira mais didática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 Geometria espacial de posição

1 a) {a, b, c, d, e, i}
b) {e}
c) {a, e, i, o, u}
d) {a, e}

2 a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $A \cap B = \varnothing$.
b) $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ e $A \cap B = \{7, 11\}$.
c) $A \cup B = \{3, 6, 9\}$ e $A \cap B = \varnothing$.
d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A \cap B = \{1, 4\}$.

3 alternativa **c**

4 a) Algumas possíveis respostas: lápis, bônus e imóvel; tênis, táxi e fêmur.
b) Algumas possíveis respostas: helicóptero, âncora e dominó; sílaba, tamanduá e brócolis.
c) Algumas possíveis respostas: escola, maçaneta e borracha; lentilha, ovelha e tomada.

5 a) verdadeira
b) Falsa. Uma possível resposta: existem infinitos pontos que pertencem e infinitos pontos que não pertencem a um plano.
c) Falsa. Uma possível resposta: três pontos colineares determinam uma única reta.
d) verdadeira
e) Falsa. Uma possível resposta: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida no plano.

6 a) 5 planos
b) Os vértices da base estão contidos em três planos e o vértice da pirâmide, em quatro planos.

7 A construção feita por Carla é a do item **a**, pois no item **a** as retas *r* e *s* são perpendiculares entre si, mas no item **b** as retas são paralelas entre si.

8 a) • perpendiculares
• reversas
b) Não, pois se $r \perp t$, o triângulo formado por *r*, *t* e *s* possuiria dois ângulos internos retos, o que é um absurdo.

9 a) $\overleftrightarrow{FG}$
b) $\overleftrightarrow{AF}$; $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{EJ}$
c) $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{EJ}$
d) $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{HI}$; $\overleftrightarrow{AF}$; $\overleftrightarrow{EJ}$
e) $\overleftrightarrow{IJ}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{IH}$; $\overleftrightarrow{CH}$; $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{FG}$

10 Sim, pois $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são paralelas, de maneira que toda reta definida por dois pontos, entre *A*, *B*, *C* e *D*, são coplanares.

11 a) Uma possível resposta: $\overleftrightarrow{AB}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$.
b) $\overleftrightarrow{HG}$; $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{BC}$
c) $\overleftrightarrow{CI}$; $\overleftrightarrow{DI}$; $\overleftrightarrow{EI}$; $\overleftrightarrow{HI}$
d) ortogonal

12 alternativa **c**

13 a) verdadeira
b) verdadeira
c) Falsa. Uma possível resposta: se uma reta *r* e um plano α são paralelos, então existem retas perpendiculares a *r* que são perpendiculares a α.

14 a) nenhuma
b) concorrente
c) $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{HI}$

15 Concorrentes (perpendiculares ou oblíquas) ou reversas (ortogonais ou oblíquas).

16 a) • contida no plano
• paralela
b) $\overleftrightarrow{DG}$; $\overleftrightarrow{CH}$
c) $\overleftrightarrow{CH}$; $\overleftrightarrow{GH}$

17 Não, pois para ser perpendicular ao plano α, a reta *s* tem de ser perpendicular a, pelo menos, duas retas concorrentes contidas em α.

18 α; γ

19 a) Falsa, pois dois planos secantes possuem uma reta em comum, ou seja, infinitos pontos em comum.
b) verdadeira
c) Falsa, pois, se dois planos α e β são paralelos, então as retas paralelas a α são paralelas ou contidas em β.
d) verdadeira
e) Falsa, pois os planos α e β são concorrentes quando possuem apenas uma reta em comum.

20 • α e β: concorrentes
• α e δ: concorrentes
• β e θ: concorrentes

21 a) Sim, pois eles possuem apenas a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em comum.
b) não
c) Os planos que contêm as faces *ABFE*, *BCGF*, *CDHG* e *ADHE*.

22 a) Os planos que contêm as faces *IJKL*, *MNOP* e *ABCD*.
b) • 8 planos
• O plano que contém a face *ABONKJGF*.

23 a) verdadeira
b) Falsa, pois uma reta não contida em α pode ser paralela a esse plano e estar contida em γ.
c) verdadeira
d) Falsa, pois pode ser um plano coincidente a δ.
e) verdadeira

24 a) • Os planos que contêm as faces *BCFG* e *ADEH*.
• Os planos que contêm as faces *CDEF*, *BCFG*, *ABGH* e *ADEH*.
• O plano que contém a face *ADEH*.
b) Sim, pois as retas são coplanares concorrentes e $\overleftrightarrow{EF}$ é perpendicular a um plano que contém $\overleftrightarrow{BF}$.
c) Nos planos que contêm as faces *CDEF* e *BCFG*.

25 um plano

26 b) perpendicular; não
c) perpendicular

27 perpendicular

2 Projeções ortogonais no plano e distância no espaço

1 a) Falsa, pois a projeção ortogonal pode ser uma única reta, por exemplo, se uma das retas for perpendicular ao plano de projeção.
b) verdadeira
c) Falsa, pois *r* e *s* podem ser retas reversas.
d) Falsa, pois a projeção ortogonal de qualquer polígono sobre um plano pode ser dada por um segmento de reta (quando o plano que contém o polígono é perpendicular ao plano de projeção).
e) verdadeira

2 alternativa **b**

3 • triângulo
• segmento de reta
• triângulo

4 alternativa **c**

5 a) • Os planos que contêm as faces *ABCD*, *IJKL* e *MNOP*.
• Os planos que contêm as faces *ABCD*, *EFGH*, *IJKL*, *MNOP*, *BCFGJKON* e *ADEHILPM*.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) (I) Uma possível resposta: vistas superior e lateral esquerda ou direita.
(II) Uma possível resposta: vistas lateral direita, esquerda, frontal e superior.

6 a) Falsa, pois se um ponto pertencer a uma reta, então a distância entre eles será nula.
b) verdadeira
c) verdadeira
d) Falsa, pois somente terão distância nula se o ponto pertencer à reta.

7 a) $\overline{MN}$; $\overline{IK}$; $\overline{JH}$ c) $\overline{BO}$
b) $\overline{EO}$ d) $\overline{CO}$; $\overline{KL}$

8 a) três
b) • α e δ
• α e β; β e δ
c) $\overline{DH}$; $\overline{EF}$

3 Poliedros

1 a) poliedro
b) não poliedro
c) não poliedro
d) poliedro
e) não poliedro
f) poliedro

2 a) 6 faces, 10 arestas e 6 vértices
b) 8 faces, 18 arestas e 12 vértices
c) 11 faces, 20 arestas e 11 vértices
d) 8 faces, 12 arestas e 6 vértices
e) 7 faces, 15 arestas e 10 vértices
f) 9 faces, 21 arestas e 14 vértices

3 a) convexo
b) não convexo
c) não convexo
d) convexo

4 a) quadriláteros
b) triângulos e quadriláteros
c) quadriláteros e hexágonos
d) pentágonos

5 alternativa c

7 7 faces

8 a) Não convexo, pois é possível traçar uma reta, não paralela a nenhuma de suas faces, e o cortar em mais de dois pontos.
b) 9 vértices; 16 arestas; 9 faces
c) Sim, pois $\underbrace{9}_{\text{faces}} + \underbrace{9}_{\text{vértices}} = \underbrace{16}_{\text{arestas}} + 2$.

9 32 vértices

10 4 faces triangulares e 5 faces quadrangulares

11 6 vértices; 12 arestas; 8 faces

12 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais

14 20 faces e 30 arestas

15 a) 4 faces; 4 vértices; 6 arestas
b) tetraedro regular
c) Todas são triangulares equiláteras.

16 Não, pois o fato de esse poliedro ser de Platão não garante que ele seja regular. Para que isso ocorra, é necessário que suas faces tenham forma triangular equiláteras e sejam congruentes entre si.

17 720°

18 a) 8 vértices e 12 arestas
b) 6 vértices e 12 arestas
c) 9 vértices e 16 arestas

20 Algoritmo:

```
Início
  1. Leia a quantidade de faces triangulares F do poliedro.
  2. Calcule A = 3 • F / 2.
  3. Leia A.
  4. Calcule V = A – F + 2.
  5. Leia V.
Fim
```

a) • 4 vértices
• 12 vértices
b) Programa em VisualG:

```
1 Algoritmo "numero_vertices"
2 Var
3 F, A, V: real
4 Inicio
5 escreva("Digite o número de faces triangulares: ")
6 leia(F)
7 A<-(3*F)/2
9 V<-(A-F+2)
10 escreva("A quantidade de vértices é: ",V)
11 Fimalgoritmo
```

21 60 vértices e 90 arestas

22 a) 30 arestas e 20 faces
b) icosaedro regular
c) Sim, todo poliedro regular é um Poliedro de Platão.

23 poliedro A: 12 faces, 20 vértices e 30 arestas; poliedro B: 20 faces, 12 vértices e 30 arestas

4 Prismas

1 a) prisma regular hexagonal
b) prisma regular octogonal
c) prisma regular decagonal

2 a) $AD = 10$ cm; $AK = 5\sqrt{13}$ cm
b) área: 75 cm²; perímetro: $5 \cdot \left(5 + \sqrt{13}\right)$ cm

3 $a = 3$ cm, $c = 4$ cm, $h = 12$ cm

4 comprimento: 9 cm; largura: 12 cm; altura: 15 cm

5 7 cm, 8 cm e 9 cm

6 aproximadamente 8,5 cm

7 a) $2\sqrt{3}$ cm b) 6 cm

8 24 cm

9 a) 96 cm² c) 108 cm²
b) $375\sqrt{3}$ cm² d) $162\sqrt{3}$ cm²

10 a) 3 cm
b) $6 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm

11 a) 27 000 cubinhos
b) 344 cubinhos
c) $\frac{1}{900}$

12 a) $225\sqrt{3}$ cm²
b) $A_t = 2\,700$ cm²; $A_t = 450 \cdot \left(6 + \sqrt{3}\right)$ cm²

13 aproximadamente 0,0025 ℓ ou 2,5 mℓ

14 3,46 cm

15 a) caixas de base hexagonal: aproximadamente 550 cm²; caixas de base quadrada: 256 cm²
b) aproximadamente R$ 0,60

16 18 400 m²

17 a) arestas das bases: 8 cm; arestas laterais: 16 cm
b) 512 cm²

18 a) $x = 2$ cm
b) área da base: 496 cm²; área lateral: 188 cm²

19 a) aproximadamente 108 405 cm² ou 10,8405 m²
b) aproximadamente R$ 67,75

20 a) 24 cm b) 3 120 cm²

21 a) $\frac{1}{9}$
b) peça cúbica maior: 486 cm²; peça amarela: 54 cm²

22 a) $a = 3$ cm; $b = 6$ cm; $c = 9$ cm
b) $3\sqrt{14}$ cm
c) área da base: 18 cm²; área lateral: 162 cm²

23 a) aproximadamente 8,8 cm
b) área da base: aproximadamente 43,25 cm²; área lateral: aproximadamente 264 cm²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

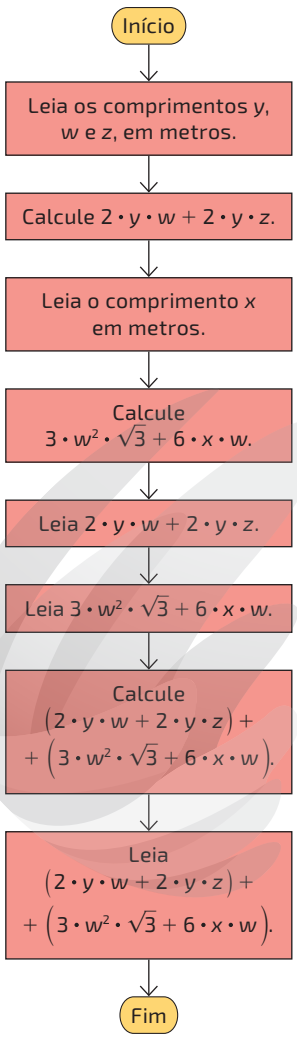
24 10 000 embalagens

25 a) Algoritmo que possibilita calcular a área total dessa peça, em metros quadrados:

Início
1. Leia os comprimentos y, w e z, em metros.
2. Calcule $2 \cdot y \cdot w + 2 \cdot y \cdot z$.
3. Leia o comprimento x em metros.
4. Calcule $3 \cdot w^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot x \cdot w$.
5. Leia $2 \cdot y \cdot w + 2 \cdot y \cdot z$.
6. Leia $3 \cdot w^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot x \cdot w$.
7. Calcule $(2 \cdot y \cdot w + 2 \cdot y \cdot z) + (3 \cdot w^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot x \cdot w)$.
8. Leia $(2 \cdot y \cdot w + 2 \cdot y \cdot z) + (3 \cdot w^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot x \cdot w)$.

Fim

Organizando o algoritmo em um fluxograma:



26 88 cm^2

27 a) padrão 1: 38,49 m^3; padrão 2: 77 m^3
b) padrão 1: 73,9 m^2; padrão 2: 135,27 m^2

28 4 cm

29 alternativa c

30 a) 1 680 cm^3
b) 960 cm^3
c) 6 cm

31 36 m^3

32 a) $\frac{1}{8}$
b) 12,5 cm

33 A medida de c deve ser aumentada em 25%.

34 a) aproximadamente 124,7 m^3
b) 798,08 m^3

35 27 000 ℓ

36 a) 8 cm
b) $768\sqrt{3}$ cm^3

37 7,5 ℓ

38 alternativa a

39 4 h 30 min

40 aproximadamente 16,46 m^3

41 alternativa b

42 a) 20 cm
b) aproximadamente 610,27 cm^2

43 a) 210 blocos
b) 12,6 m^3

44 a) 2,5 m, 15 m e 15 m
b) 562,5 m^3

45 aproximadamente 10 dias

46 a) 23 bancos
b) 4 latas

47 a) Variação de 0 m^2 na área interna e redução de 2,8 m^3 na capacidade máxima.

48 área: aproximadamente 97,2 cm^2; volume: 200 cm^3

49 8 cm

50 aproximadamente 108,8 cm^3

6 Pirâmides

1 • O número total de arestas da pirâmide é igual ao dobro do número de lados do polígono que compõe a base.
• O número de faces da pirâmide é igual ao número de lados do polígono que compõe a base, mais 1.

2 a) 4 cm
b) $4\sqrt{10}$ cm
c) $2\sqrt{3}$ cm
d) $2\sqrt{39}$ cm

3 menor aresta: 3 cm; maior aresta: $5\sqrt{2}$ cm

4 $2\sqrt{2}$ cm

5 a) $3\sqrt{3}$ cm^2
b) $4\sqrt{3}$ cm^2

6 a) 10 dm
b) $5\sqrt{2}$ dm
c) 100 dm^2
d) $100 \cdot (1 + \sqrt{5})$ dm^2

7 8 cm

8 $12\sqrt{55}$ cm^2

9 $2\sqrt{3}$ cm^2

10 faltará; 9 cm^2

11 2 000 telhas

12 3,16 m^2

13 aproximadamente 12 m^2

15 6 m^3

16 1 cm e 12 cm; 2 cm e 6 cm; 3 cm e 4 cm

17 a) • 3 cm
• $\sqrt{3}$ cm
b) • $6\sqrt{3}$ cm^2
• $6 \cdot (3 + \sqrt{3})$ cm^2
c) $6\sqrt{2}$ cm^3

18 $\frac{1}{2}$

19 8 anos e 4 meses

21 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm^3

22 aproximadamente 245 g

23 a) $400\sqrt{3}$ cm^2
b) $\frac{20}{3}$ ℓ

24 $250\sqrt{6}$ dm^3

25 $9 \cdot \left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ m^2

26 a) 4 cm
b) $128\sqrt{2}$ cm^2
c) $32 \cdot (4\sqrt{2} + 5)$ cm^2

27 $24\sqrt{3}$ dm^2; $34\sqrt{3}$ dm^2

28 16 cm; 10 cm; $4\sqrt{3}$ cm

29 $4 \cdot (25 + 14\sqrt{2})$ m^2

30 $\frac{637}{3}$ mm^3

31 24 500 cm^3

32 $2\sqrt{10}$ cm

33 a) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ c) $\frac{7a^3\sqrt{3}}{8}$
b) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

34 a) 9 m
b) 4,632 m^3

35 a) 63 cm^2
b) $36 \cdot \left(\sqrt{5} + 6\right)$ cm^3
c) $9 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 3\right)$ cm^3

36 $114\sqrt{3}$ cm^3

37 2 975 ℓ

38 $\frac{12\,800}{7}$ cm^3

8 Cilindro

1 a) $A_b \simeq 12{,}56$ cm^2; $A_\ell \simeq 62{,}8$ cm^2; $A_t \simeq 87{,}92$ cm^2
b) $A_b \simeq 28{,}26$ cm^2; $A_\ell \simeq 169{,}56$ cm^2; $A_t \simeq 226{,}08$ cm^2

2 aproximadamente 4 121,25 dm^2

3 aproximadamente 10 cm

4 aproximadamente 5 m

5 a) aproximadamente 6,94 m^2
b) aproximadamente 346,97 m^2

6 a) aproximadamente 150,72 u.a. (unidades de área)
b) aproximadamente 251,2 u.a. (unidades de área)

7 aproximadamente 282,6 cm^2

8 aproximadamente 10 097,5 mℓ

9 aproximadamente 2,45 ℓ

11 aproximadamente 863,5 m^2

12 19,625 cm^2

13 aproximadamente 0,6 g

14 a) aproximadamente 56,52 m^3
b) aproximadamente 169,56 m^3

15 aproximadamente 251,2 cm^3

16 $\sqrt{5}$ cm

17 aproximadamente 113 040 ℓ

18 a) aproximadamente 50,24 cm^3
b) aproximadamente 743,55 cm^3

19 aproximadamente 8 cm

20 alternativa c

21 a) aproximadamente 6 798,1 cm^3
b) aproximadamente 53 201,9 cm^3

22 alternativa c

23 aproximadamente 663,325 cm^3

24 aproximadamente 12 cm

25 alternativa d

26 alternativa c

27 5 pontos

28 aproximadamente 40 min

29 aproximadamente 2 960,2 cm^3

30 a) aproximadamente 1 394,16 cm^2
b) aproximadamente 3 227,92 cm^3

31 aproximadamente 15,7 m^3

32 aproximadamente 55,7 kg

33 aproximadamente 80 mm

34 aproximadamente 12 cm

35 aproximadamente 27,57 cm

36 aproximadamente 4,55 cm

37 a) embalagens A e C
b) embalagem C
c) aproximadamente R$ 11 434,70

38 aproximadamente 3,73 cm

39 alternativa a

40 aproximadamente 4 096 cm^3

42 peça vermelha: 14 cm;
peça azul: 12 cm;
peça roxa: 10 cm;
peça verde: 8 cm;
peça amarela: 6 cm

43 alternativa c

10 Cone

1 a) aproximadamente 63,585 cm^2
b) 7,5 cm
c) aproximadamente 169,56 cm^2

2 aproximadamente 122,46 cm^2

3 a) aproximadamente 40 cm
b) aproximadamente 48 cm

4 aproximadamente 9 161 m^2

5 a) aproximadamente 3 768 cm^2
b) aproximadamente 1 130,4 cm^2

6 $8\sqrt{13}$ cm

7 A altura h, o raio r e a geratriz formam, nessa ordem, os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Utilizando a relação pitagórica para um triângulo retângulo, temos $(2r)^2 = h^2 + r^2$. Isolando h, segue que $h^2 = (2r)^2 - r^2 \Rightarrow h = r\sqrt{3}$.

8 alternativa c

9 aproximadamente 854,08 cm^2

10 alternativa c

11 a) aproximadamente 401,92 cm^3
b) aproximadamente 127,17 cm^3
c) aproximadamente 39,25 cm^3
d) aproximadamente 37,68 cm^3

12 aproximadamente 15 cm

13 200 mℓ

14 aproximadamente 904,32 cm^3

15 aproximadamente 4,56 cm

16 aproximadamente 134 cm^3

17 alternativa a

18 a) aproximadamente 28,26 cm^3
b) aproximadamente 9,42 cm^3

19 aproximadamente 9,81 mℓ

20 aproximadamente 9 992,3 cm^3

21 3,2 ℓ

22 $\frac{b}{a}$, em que a e b indicam, respectivamente, o comprimento do menor e do maior cateto do triângulo.

23 aproximadamente 3 165 sacas

25 alternativa c

26 a) 2,49 g
b) 8,2 cm

27 aproximadamente 1 929,2 cm^3

28 aproximadamente 1,2 m

29 Algoritmo do volume de água, em litros, em certo recipiente:

Início

1. Insira o valor do volume de água (V_a), em litros.
2. Insira o raio da base (r) do recipiente, em centímetros.
3. Insira a altura (h) do recipiente, em centímetros.
4. Calcule o volume do recipiente, em ℓ: $V_r = \frac{1}{1\,000} \cdot \left(\frac{\pi r^2 h}{3}\right)$.
5. Se $V_a \leq V_r$, então a água cabe no recipiente.
6. Se $V_a > V_r$, então a água não cabe no recipiente.

Fim

Agora, organizando o algoritmo em um fluxograma:

Fluxograma no final da página **158**.

30 aproximadamente 23,61 cm^3

31 não

32 alternativa a

33 a) $4\sqrt{3}$ m
b) 64π m^3

34 a) área: aproximadamente 1 130,4 cm^2; volume: aproximadamente 2 110,08 cm^3
b) área: aproximadamente 2 135,2 cm^2; volume: aproximadamente 7 108,96 cm^3

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

35 a) 18 cm; 9 cm
b) 12 cm
c) 810π cm^2

36 a) 8 cm; 24 cm
b) aproximadamente 628 cm^2; aproximadamente 5 425,92 cm^2

37 aproximadamente 2 813,44 u.a.

38 alternativa **e**

39 aproximadamente 602,88 cm^2

40 aproximadamente 3 948,55 cm^2

41 a) aproximadamente 25 773,12 cm^3
b) aproximadamente 47 728 cm^3

42 aproximadamente 7 108,96 cm^3

43 a) aproximadamente 175,84 cm^3
b) aproximadamente 715,92 cm^3

44 aproximadamente 5 496 cm^2

45 4 latas

46 60 dm

47 a) 2 505,72 cm^3
b) 1 879,29 mℓ

48 aproximadamente 12 cm

49 12 cm

50 65 940 ℓ

51 a) aproximadamente 263,76 mℓ
b) 5 xícaras

53 aproximadamente 11 817,4 ℓ

54 aproximadamente 3 517 cm^3

56 a) $\frac{20}{3}$ dm
b) aproximadamente 625,21 dm^3

57 alternativa **e**

58 142,5 cm

11 Esfera

1 aproximadamente 904,32 cm^3

2 aproximadamente 14,13 cm^3

3 aproximadamente $7{,}1 \cdot 10^6$ mm^3; aproximadamente $8{,}0 \cdot 10^6$ mm^3

4 6 400 km

5 aproximadamente 14 130 cm^3

6 a) 7,232 g
b) $2\sqrt[3]{6}$ cm

7 6 m

8 6 589 cm^3

9 Uma possível resposta:

$V_B = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (2r)}{3} \Rightarrow V_B = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$ e que $V_C = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$.

Adicionando os volumes V_B e V_C, segue que:

$$\overbrace{\frac{2 \cdot \pi \cdot r^3}{3}}^{V_B} + \overbrace{\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}}^{V_C} \Rightarrow \overbrace{V_A}^{V_B + V_C} = 2 \cdot \pi \cdot r^3$$

Portanto, $V_A = V_B + V_C$.

10 54π cm^3

11 aproximadamente 29,3 cm^3

12 aproximadamente 2,5 cm

13 aproximadamente 78,5 cm^2

14 aproximadamente 314 dm^2

15 759,88 m^2

16 a) aproximadamente 113 040 cm^3
b) aproximadamente 24,3 cm

17 144π cm^2

18 900π cm^2

19 a) 15°
b) 21 435 733 km^2

13 Projeções cartográficas

1 alternativa **a**

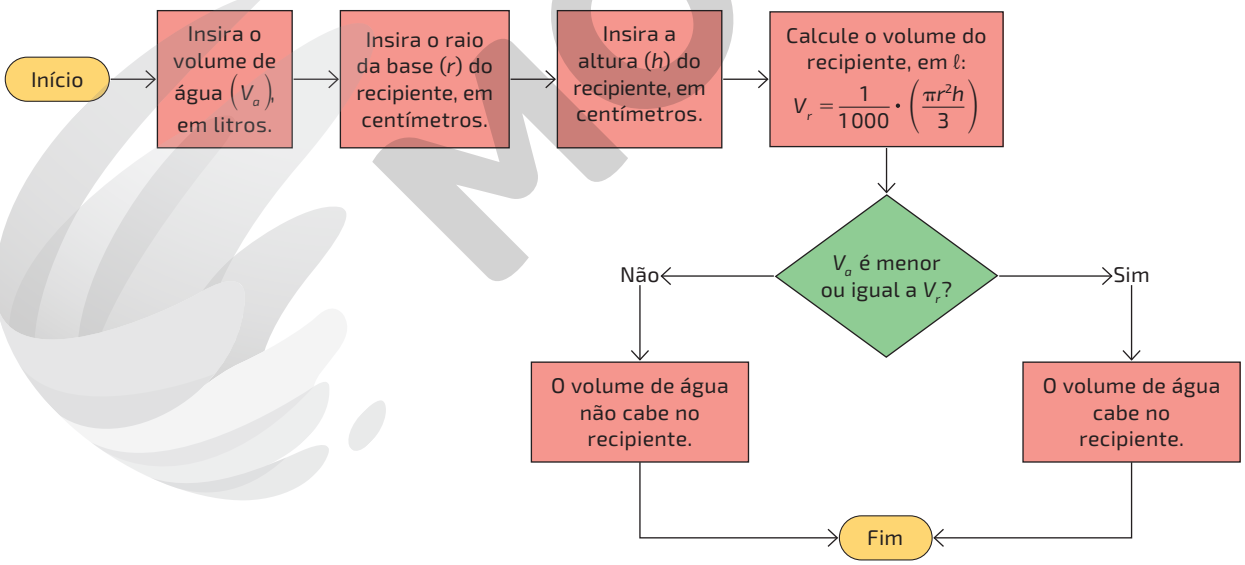
2 azimutal

3 alternativa **b**

4
- projeção de Lambert
- projeção de Albers

5 a) A: projeção cilíndrica; B: projeção cônica
b) Apenas a projeção B apresenta deformação de ângulo. Ambas as projeções apresentam deformação de área.

Fluxograma da questão **29** do tema **10**.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

- BADÔ, Fernando. *Como funciona o motor de um carro?* Mundo Estranho, São Paulo, ed. 81a, 1º nov. 2008. p. 24-25.

  Este artigo explica o funcionamento do motor de um carro, inclusive as diversas ações que ocorrem no interior de um motor que possibilitam seu funcionamento, além de elucidar alguns termos técnicos envolvidos.

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em educação matemática).

  Este livro trata da informática educativa, abordando aspectos que vão desde as políticas governamentais até as questões epistemológicas e pedagógicas. São apresentados exemplos do uso da informática com alunos e professores, bem como questões referentes ao uso de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  A História da Matemática é abordada neste livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, e finalmente chegando aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades a ser desenvolvidas em cada etapa da Educação Básica.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  O objetivo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente. A qualidade da escola é condição essencial de inclusão e democratização das oportunidades no Brasil, e o desafio de oferecer uma educação básica de qualidade para a inserção do aluno, o desenvolvimento do país e a consolidação da cidadania é tarefa de todos.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, [s.d.]. Disponível: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  Este documento pretende discutir a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de modo a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a Educação Básica.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo escolar, contribuindo para a atualização profissional.

- Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual, 2013.

  A coleção aborda uma grande variedade de conteúdos e conceitos dispostos em dez volumes direcionados a alunos do Ensino Médio e Superior.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

  Nesta obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações a respeito de aspectos relacionados à cognição, à natureza da Matemática e às questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar, 10: Geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. v. 10. São Paulo: Atual, 2013.

  Este volume é composto por teorias e exercícios de aplicação, testes de vestibulares atualizados, selecionados criteriosamente e ordenadas por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- DUARTE, Maria Dolores. A grande pirâmide de Gizé. *Aventuras na história*, ed. 45. 1º maio 2007. p. 22-23.

  Este artigo traz diversas diversas curiosidades e informações históricas a respeito da construção das Pirâmides de Gizé, além de inúmeras implicações políticas que permeiam essa obra faraônica.

- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

  O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para a sua resolução.

- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2. v.

  No volume 1, a história dos algarismos é apresentada considerando a origem da representação simbólica dos números em diversas civilizações, como a dos gregos, dos romanos e dos maias. Já no volume 2, é explicado por que a civilização indiana é considerada o berço da numeração moderna, e são refeitos os caminhos que levaram o homem a inventar o computador.

- LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  O conteúdo desse livro é uma coleção de crônicas e comentários em torno de um tema comum: a Matemática estudada nos últimos três anos que antecedem a universidade.

- LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

  O livro aborda a Matemática discreta por meio do estudo de progressões (com aplicações à Matemática financeira), análise combinatória e probabilidade, e apresenta exemplos de objetos do mundo real que ilustram conceitos importantes de Geometria espacial.

- LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 3. (Coleção do Professor de Matemática).

  O livro apresenta noções sobre Geometria analítica (plana e espacial), vetores, matrizes, determinantes, sistemas de equações lineares, números complexos, polinômios e equações algébricas.

- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. adap. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

  Neste livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

Lista de siglas

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

Fatec-PR: Faculdade de Tecnologia de Curitiba

Fuvest: Fundação Universitária para o Vestibular

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas

UPF-RS: Universidade de Passo Fundo

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ISBN 978-65-5779-075-5

MODERNA