ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

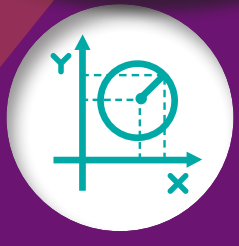
EDITORA RESPONSÁVEL:
Lilian Aparecida Teixeira

MANUAL DO PROFESSOR
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
Código da coleção: 0197P21202
Código da obra: 0197P21202136

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA ANALÍTICA, SISTEMAS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS



Área do conhecimento:
Matemática
e suas Tecnologias

MODERNA

MODERNA

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA ANALÍTICA, SISTEMAS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37387 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

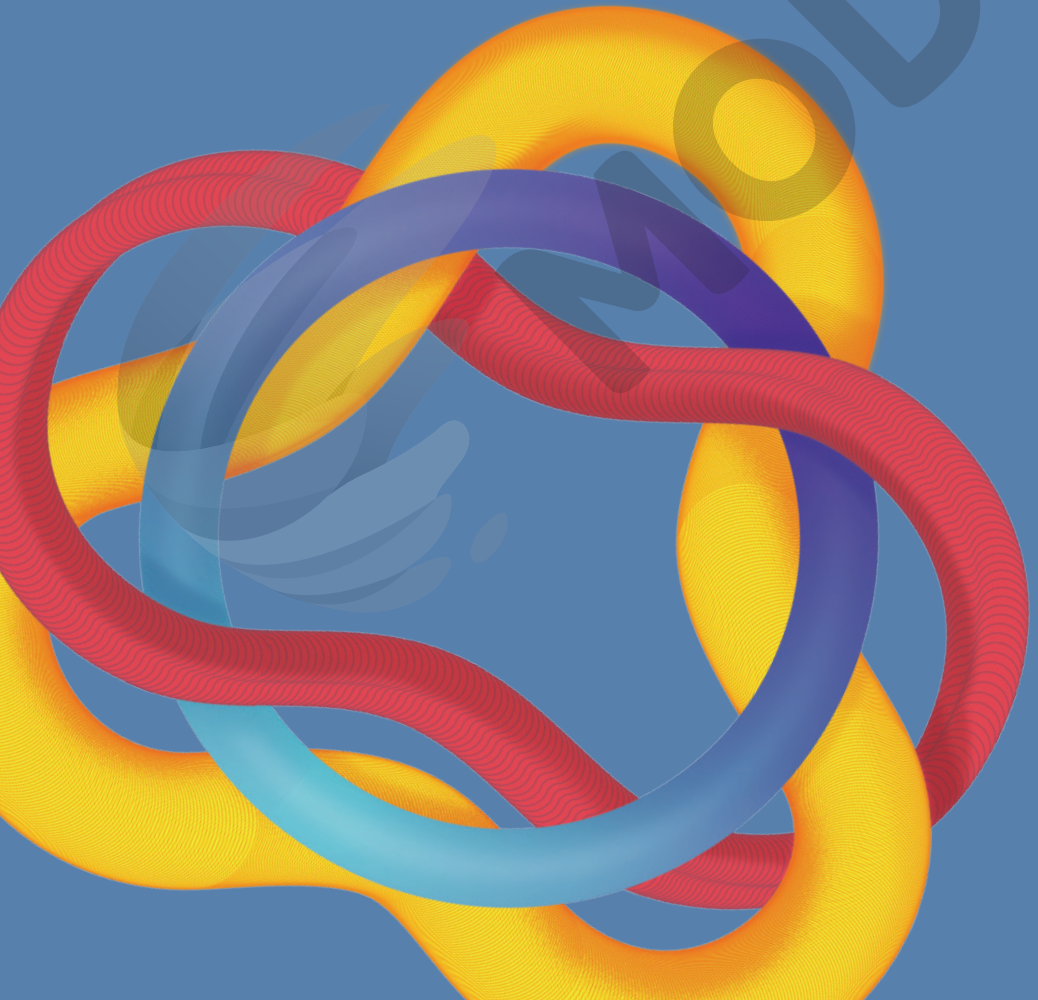
Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Suplemento para o professor



MODERNA

Apresentação

Um meio de inclusão e democratização de oportunidades é a educação. O Ensino Médio representa um momento decisivo na vida de qualquer indivíduo. Assim, cabe ao livro didático auxiliar professores e alunos nessa fase, oferecendo-lhes ferramentas úteis no processo de ensino e aprendizagem. Pensando nisso, esta coleção procurou tratar a Matemática e suas Tecnologias como parte integrante do cotidiano dos alunos, além de estabelecer associação com outros componentes curriculares e com outras áreas do conhecimento.

Tomando diversos documentos oficiais como diretrizes, esta coleção contempla os conteúdos essenciais para esse nível de ensino, apresentando-os de maneira contextualizada e empregando uma linguagem clara e objetiva, em uma sequência que favorece a aprendizagem.

O objetivo é possibilitar aos alunos o desenvolvimento das competências gerais, competências específicas e habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referentes ao Ensino Médio. Porém, é importante que o professor tenha autonomia e consciência de que pode selecionar os conteúdos que serão abordados em sala de aula adotando uma ordem diferente da sugerida no livro do aluno, de acordo com a proposta didático-pedagógica da escola.

Este **Suplemento para o professor** busca oferecer aos docentes subsídios teórico-metodológicos, de maneira a auxiliar seu trabalho na utilização desta coleção em sala de aula e em suas demais atribuições.

MODERNA

Sumário

A estrutura da coleção VI

Livro do aluno VI

Suplemento para o professor X

O Ensino Médio XII

O aluno do Ensino Médio XII

O professor XIII

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos XIV

O convívio social em sala de aula XV

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio XVI

As áreas do conhecimento XVII

Temas contemporâneos transversais XVIII

Orientações didáticas e metodológicas XIX

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção XIX

O computador e o ensino da Matemática XXII

O pensamento computacional XXIII

O aluno no centro do processo de aprendizagem XXIV

Estratégias XXV

Avaliação XXVII

A BNCC e a coleção XXIX

Sugestão de cronograma XXIX

Objetivos, comentários e sugestões XXXII

Tema 1 Coordenadas e distâncias XXXII

Tema 2 Matrizes XXXV

Tema 3 Operações com matrizes XXXVIII

Tema 4 Matriz inversa e determinantes XLI

Tema 5 Uma aplicação de matrizes XLIV

Tema 6 O ponto e a reta XLV

Tema 7 Sistemas lineares XLVIII

Tema 8 Escalonamento de sistemas lineares LI

Tema 9 Circunferência LV

Tema 10 Circunferência e Arte LVII

Tema 11 Cônicas LIX

Tema 12 A elipse e o comenta Halley LXIII

Tema 13 Transformações geométricas LXIV

Tema 14 Transformações geométricas e Arte LXIX

Resoluções dos exercícios e problemas LXX

Sugestões ao professor CI

Leituras sobre o ensino de Matemática CI

Leituras sobre a História da Matemática CIII

Leituras sobre os conteúdos deste volume CIV

Sugestões de *sites* para o professor CV

Referências bibliográficas CVI

MODERNA

A estrutura da coleção

Esta coleção de Matemática e suas Tecnologias, destinada ao Ensino Médio, é composta de seis volumes, cujos conteúdos estão organizados por temas. Esses temas, por sua vez, foram elaborados com base nas competências gerais, competências específicas e habilidades elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como nos temas contemporâneos transversais.

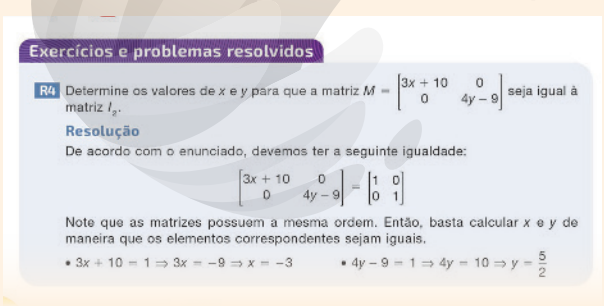
A seguir, são apresentadas as características das seções e de outros elementos que compõem esta coleção.

Livro do aluno

Páginas de abertura do tema

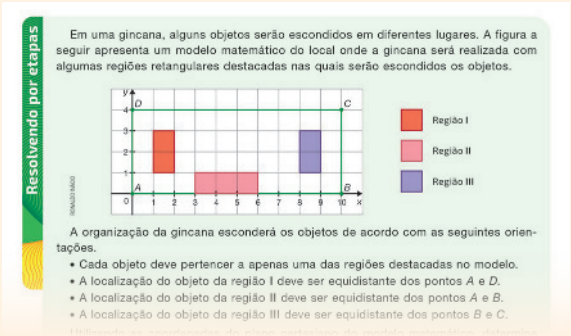
As páginas de abertura apresentam uma temática cujas características permitem estabelecer relações com os conteúdos que serão trabalhados naquele tema. Nessas páginas, há informações que se referem a outras áreas do conhecimento ou à própria Matemática, apresentadas por meio de diferentes recursos, como textos, fotografias, gráficos, infográficos e esquemas. Esses recursos são acompanhados por questões que buscam levantar os conhecimentos prévios dos alunos com relação a diversas situações de âmbito geral, bem como estabelecer intuitivamente relações entre o assunto abordado e alguns conteúdos matemáticos. Essas questões propiciam um momento de interação e troca de ideias entre os alunos, auxiliando no desenvolvimento de sua capacidade argumentativa, além de proporcionar momentos nos quais eles devem ouvir e lidar com pensamentos que possam ser divergentes dos seus. Neste **Suplemento para o professor**, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, são apresentadas informações complementares sobre as páginas de abertura referentes a cada tema, além de sugestões para trabalhá-las em sala de aula, dicas de avaliação dos alunos e outros assuntos que podem ser propostos como ideia para a realização de pesquisas extraclasse. Também são sugeridos outros questionamentos, a fim de atingir os objetivos daquele tema específico.

Exercícios e problemas resolvidos



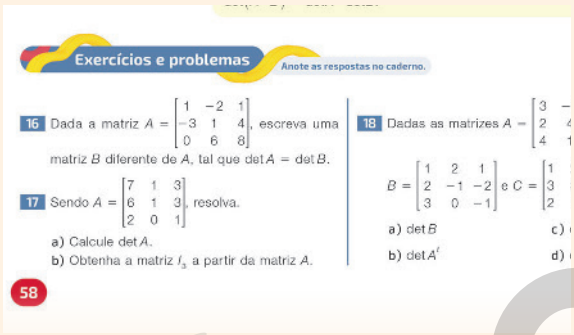
O objetivo dessa seção é complementar a teoria abordada e os exemplos apresentados com o auxílio de tarefas cujas resoluções são apresentadas aos alunos de maneira detalhada, facilitando-lhes compreender a aplicação prática do conteúdo em questão. Essa seção também tem por finalidade auxiliar os alunos a exercitar suas habilidades e estratégias na resolução de tarefas que serão propostas em outras seções, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

Resolvendo por etapas



A seção **Resolvendo por etapas** apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Tais problemas, além de contar com o auxílio do recurso textual, também podem apresentar imagens, gráficos, tabelas, esquemas e outros recursos necessários à compreensão dos alunos. O processo de resolução dos problemas é feito em quatro etapas, denominadas **Compreendendo o problema**, **Organizando as ideias e elaborando um plano**, **Executando o plano** e **Verificando a solução obtida**. Em cada uma dessas etapas, os alunos são orientados a analisar as informações fornecidas no enunciado do problema, separar e organizar os dados apresentados, elaborar e executar um plano que resolva o problema e, por fim, verificar se os procedimentos efetuados estão de acordo com o que foi solicitado. No boxe **Agora é você quem resolve!**, outro problema é apresentado aos alunos. Com isso, eles são levados a analisar se a resolução desse novo problema pode ser obtida seguindo os mesmos procedimentos utilizados na resolução do problema anterior.

Exercícios e problemas


Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

16 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, escreva uma matriz B diferente de A, tal que $\det A = \det B$.

17 Sendo $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, resolva.

a) Calcule $\det A$.

b) Obtenha a matriz I_3 a partir da matriz A.

18 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & - \\ 2 & \\ 4 & \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) $\det B$ c)

b) $\det A^t$ d)

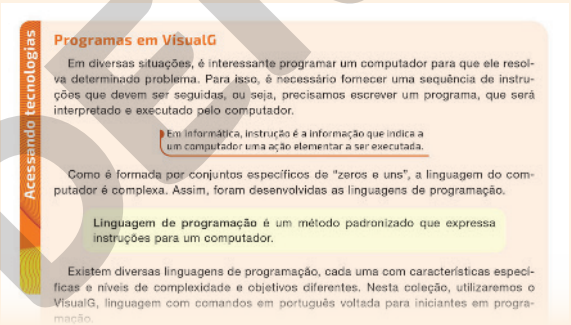
58

Essa seção traz tarefas relacionadas ao conteúdo estudado em um ou mais tópicos do tema. Dispostas em nível gradual de complexidade, elas podem ser exploradas, em sua maioria, em sala de aula. Aquelas cuja resolução for indicada para ser realizada fora do ambiente escolar devem ser corrigidas, se possível, em aula imediatamente posterior, a fim de promover uma discussão acerca das diferentes maneiras de resolução que vierem a ser apresentadas pelos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, estão indicadas sugestões de condução para algumas das tarefas apresentadas no livro do aluno, que são propostas por meio de questionamentos adicionais, pesquisas complementares e trabalhos interdisciplinares e transdisciplinares a serem desenvolvidos com base no conteúdo ou na temática tratada, visando desenvolver a autonomia e o pensamento crítico dos alunos.

Nos exercícios, a tarefa solicitada está explícita, ou seja, os alunos deverão aplicar de imediato um conceito ou procedimento-padrão estabelecido anteriormente. Já nos problemas, é esperado que os alunos mobilizem conhecimentos, competências e habilidades a fim de conceber estratégias para resolvê-los.

Acessando tecnologias

A seção **Acessando tecnologias** apresenta propostas de tarefas cujos contextos permitem desenvolver os conceitos estudados com o auxílio de recursos tecnológicos, oferecendo, assim, uma estratégia complementar àquela apresentada no livro do aluno. Tais recursos tratam-se, principalmente, de *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, uso de linguagem de programação, indicações de *sites*, entre outras ferramentas tecnológicas que permitem aprofundar os conteúdos matemáticos trabalhados até então. Essa abordagem contribui para que os alunos visualizem e verifiquem, por meio dessas ferramentas, as propriedades estudadas, auxiliando-os, posteriormente, na resolução de problemas. O principal objetivo dessa seção é estimular o aluno a utilizar ferramentas tecnológicas computacionais com o intuito de agilizar diversas atividades práticas de seu dia a dia. É importante enfatizar que os recursos sugeridos nessa seção são disponibilizados gratuitamente na internet, estando, portanto, ao alcance de todos.


Acessando tecnologias

Programas em VisualG

Em diversas situações, é interessante programar um computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Em informática, instrução é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

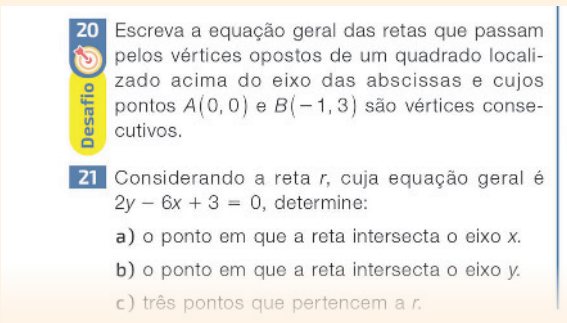
Linguagem de programação é um método padronizado que expressa instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Nesta coleção, utilizaremos o VisualG, linguagem com comandos em português voltada para iniciantes em programação.

Algumas tarefas, por apresentarem certas características, recebem destaques diferentes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Desafio

O destaque **Desafio** indica tarefas que apresentam maior nível de dificuldade e cuja resolução vai além da aplicação imediata do conteúdo trabalhado. De modo geral, o aluno é levado a desenvolver as próprias estratégias de resolução e a aprimorar seu raciocínio lógico.


Desafio

20 Escreva a equação geral das retas que passam pelos vértices opostos de um quadrado localizado acima do eixo das abscissas e cujos pontos $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$ são vértices consecutivos.

21 Considerando a reta r, cuja equação geral é $2y - 6x + 3 = 0$, determine:

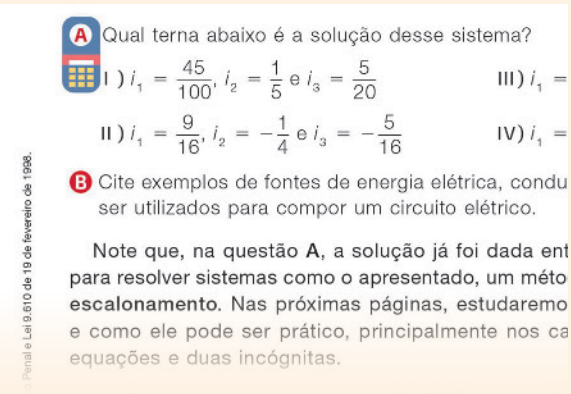
a) o ponto em que a reta intersecta o eixo x.

b) o ponto em que a reta intersecta o eixo y.

c) três pontos que pertencem a r.

Calculadora

O destaque **Calculadora** é utilizado em tarefas cuja execução dos cálculos deve ser realizada com o auxílio de calculadoras, comuns ou científicas. Em alguns casos, esse instrumento possibilitará ao aluno criar as próprias estratégias de resolução, verificando resultados e regularidades.


A Qual terna abaixo é a solução desse sistema?

I) $i_1 = \frac{45}{100}$, $i_2 = \frac{1}{5}$ e $i_3 = \frac{5}{20}$ III) $i_1 =$

II) $i_1 = \frac{9}{16}$, $i_2 = -\frac{1}{4}$ e $i_3 = -\frac{5}{16}$ IV) $i_1 =$

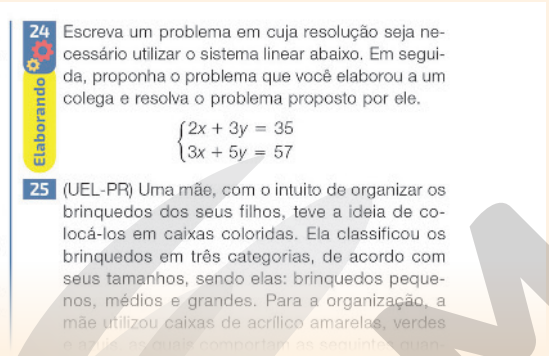
B Cite exemplos de fontes de energia elétrica, condu ser utilizados para compor um circuito elétrico.

Note que, na questão A, a solução já foi dada ent para resolver sistemas como o apresentado, um méto **escalonamento**. Nas próximas páginas, estudaremo e como ele pode ser prático, principalmente nos ca equações e duas incógnitas.

Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Elaborando

O destaque **Elaborando** indica tarefas que exploram o desenvolvimento da escrita, nas quais os alunos são levados a elaborar problemas, relatórios ou outros tipos de textos tomando como base imagens ou informações previamente apresentadas.


Elaborando

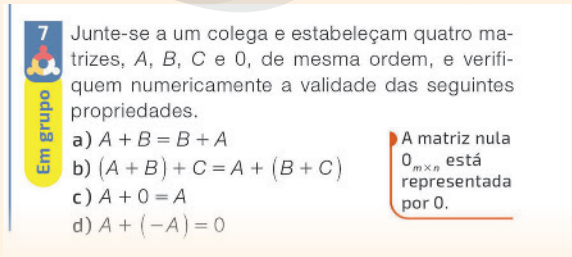
24 Escreva um problema em cuja resolução seja necessário utilizar o sistema linear abaixo. Em seguida, proponha o problema que você elaborou a um colega e resolva o problema proposto por ele.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 35 \\ 3x + 5y = 57 \end{cases}$$

25 (UEL-PR) Uma mãe, com o intuito de organizar os brinquedos dos seus filhos, teve a ideia de colocá-los em caixas coloridas. Ela classificou os brinquedos em três categorias, de acordo com seus tamanhos, sendo elas: brinquedos pequenos, médios e grandes. Para a organização, a mãe utilizou caixas de acrílico amarelas, verdes e azuis, as quais comportam as seguintes quan-

Em grupo

O destaque **Em grupo** é aplicado às tarefas cuja resolução será mais proveitosa aos alunos caso tenham o auxílio de um ou mais colegas, promovendo, assim, um momento de interação e permitindo que eles investiguem, expliquem e justifiquem os problemas resolvidos.


Em grupo

7 Junte-se a um colega e estabeleçam quatro matrizes, A, B, C e 0, de mesma ordem, e verifiquem numericamente a validade das seguintes propriedades.

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $A + 0 = A$

d) $A + (-A) = 0$

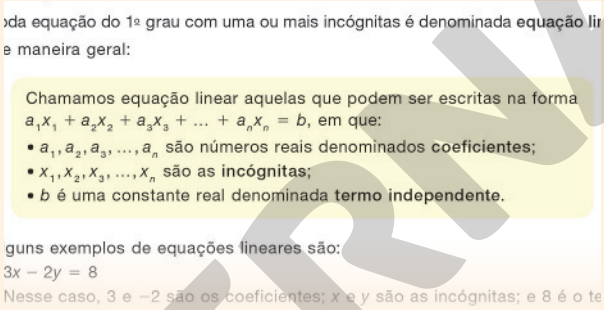
A matriz nula $0_{m \times n}$ está representada por 0.

Elementos das teorias e das seções especiais

No decorrer do livro do aluno, alguns elementos, por possuírem certas características, serão apresentados com algum destaque. Os elementos visuais que caracterizam esses destaques estão descritos logo a seguir.

Quadro-teoria

Localizado junto à parte teórica, o **Quadro-teoria** tem o objetivo de formalizar alguns conceitos, apresentando propriedades, definições e relações importantes acerca do conteúdo estudado.

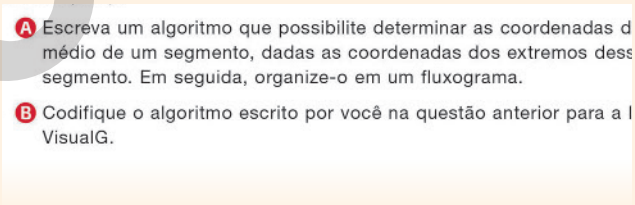

da equação do 1º grau com uma ou mais incógnitas é denominada equação li
e maneira geral:

Chamamos equação linear aquelas que podem ser escritas na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, em que:
- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais denominados coeficientes;
- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas;
- b é uma constante real denominada termo independente.

guns exemplos de equações lineares são:
$3x - 2y = 8$
Nesse caso, 3 e −2 são os coeficientes; x e y são as incógnitas; e 8 é o te
independente.

Questão intervenção

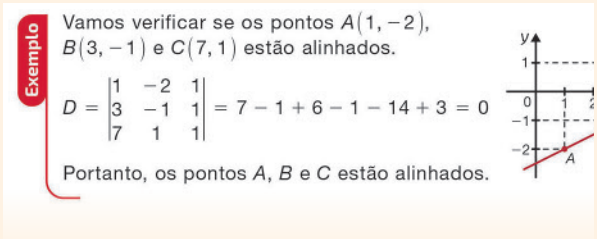
Localizada junto à parte teórica, a **Questão intervenção**, que pode apresentar cunho matemático ou de caráter pessoal, leva os alunos a refletir a respeito das aplicações práticas que envolvem o conteúdo apresentado.


A Escreva um algoritmo que possibilite determinar as coordenadas d médio de um segmento, dadas as coordenadas dos extremos dess segmento. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

B Codifique o algoritmo escrito por você na questão anterior para a l VisualG.

Exemplo

O destaque **Exemplo** tem o objetivo de apresentar aos alunos alguns exemplos práticos que retratam a teoria abordada.


Exemplo

Vamos verificar se os pontos $A(1, -2)$, $B(3, -1)$ e $C(7, 1)$ estão alinhados.

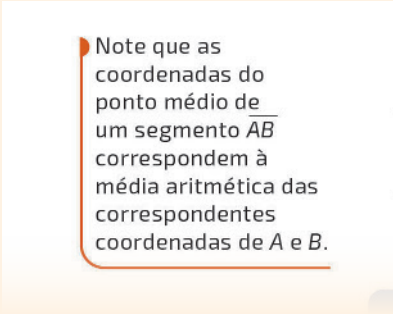
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 1 + 6 - 1 - 14 + 3 = 0$$

Portanto, os pontos A, B e C estão alinhados.

MODERNA

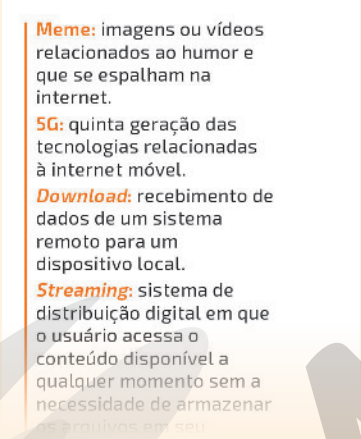
Boxe info

O destaque **Boxe info** apresenta lembretes, dicas ou informações complementares, cujo objetivo é fornecer subsídios que auxiliem os alunos na resolução de algumas tarefas ou na compreensão de determinadas teorias.


Note que as coordenadas do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ correspondem à média aritmética das correspondentes coordenadas de A e B.

Vocabulário

O quadro **Vocabulário** traz o significado de algumas palavras em destaque no texto, geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos alunos, a fim de auxiliar na compreensão das informações apresentadas.


Meme: imagens ou vídeos relacionados ao humor e que se espalham na internet.

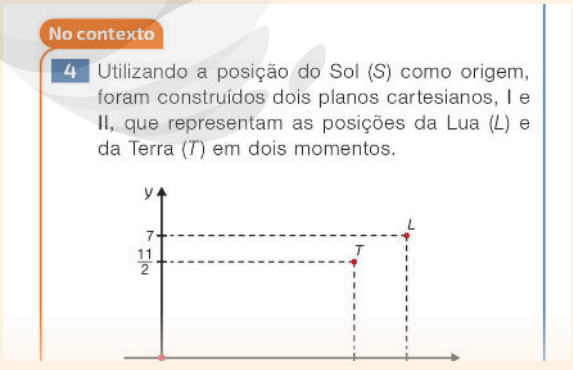
5G: quinta geração das tecnologias relacionadas à internet móvel.

***Download*:** recebimento de dados de um sistema remoto para um dispositivo local.

***Streaming*:** sistema de distribuição digital em que o usuário acessa o conteúdo disponível a qualquer momento sem a necessidade de armazenar

No contexto

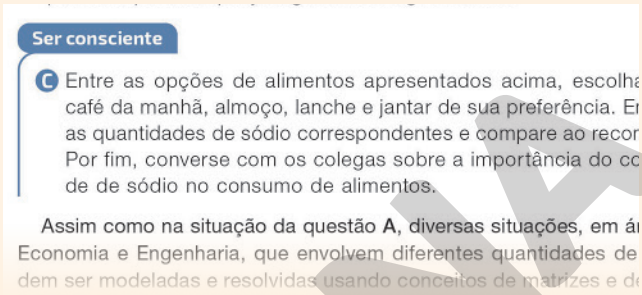
O destaque **No contexto** indica tarefas que estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.


No contexto

4 Utilizando a posição do Sol (S) como origem, foram construídos dois planos cartesianos, I e II, que representam as posições da Lua (L) e da Terra (T) em dois momentos.

Ser consciente

O destaque **Ser consciente** tem o objetivo de abordar assuntos que podem, inclusive, ser relacionados aos temas contemporâneos transversais descritos na BNCC. Geralmente, os contextos que apresentam esse destaque procuram levar os alunos a refletir a respeito de questões que impactam diretamente em alguns aspectos da nossa sociedade, com o intuito de envolvê-los em uma avaliação cidadã e social da situação proposta.


Ser consciente

C Entre as opções de alimentos apresentados acima, escolha café da manhã, almoço, lanche e jantar de sua preferência. Em as quantidades de sódio correspondentes e compare ao recom Por fim, converse com os colegas sobre a importância do co de de sódio no consumo de alimentos.

Assim como na situação da questão **A**, diversas situações, em ár Economia e Engenharia, que envolvem diferentes quantidades de dem ser modeladas e resolvidas usando conceitos de matrizes e de

Ícones

Em certos momentos desta coleção, alguns ícones serão utilizados para indicar informações importantes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Proporcionalidade

Indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

Cor

Indica que as cores dos objetos retratados não correspondem à realidade.

O GPS (do inglês *Global Po*
foi desenvolvido na década
Unidos para fins militares. N
países, nos mais variados se
controle de frotas e agricultu
parte do sistema e variam em

Ampliando seus conhecimentos

Encontrada no fim de cada volume, essa seção traz sugestões de livros, *sites* e *podcasts* para complementar o estudo dos conteúdos trabalhados nos temas. É essencial que os alunos sejam incentivados a consultar essas fontes de informação.

MODERNA

Suplemento para o professor

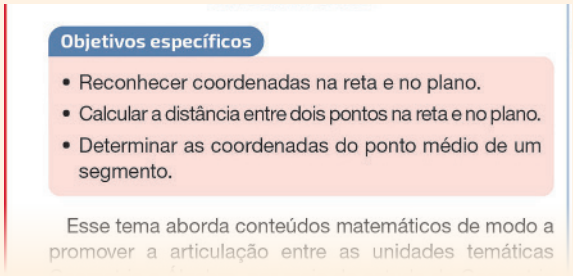
O livro do professor impresso é composto do livro do aluno, com comentários e respostas das tarefas apresentadas, e do **Suplemento para o professor**, constituído de parte geral, parte específica, resoluções dos exercícios e problemas e sugestões de leitura e de *sites*. A parte geral é composta dos pressupostos teóricos e metodológicos que fundamentam esta coleção, da descrição e das orientações acerca das seções e da estrutura de conteúdos, bem como de suas relações com a BNCC e do quadro de distribuição dos conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Já a parte específica, desenvolvida no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, apresenta ao professor orientações específicas dos conteúdos apresentados página a página.

Além do livro impresso, também é disponibilizado um videotutorial de caráter complementar, que tem o objetivo de destacar elementos-chave da obra em linguagem audiovisual atrativa e simplificada para o professor.

Conheça, a seguir, as características da parte específica deste **Suplemento para o professor**.

Objetivos específicos

No início de cada tema são apresentados os principais objetivos que se almejam atingir no trabalho com aqueles conteúdos.



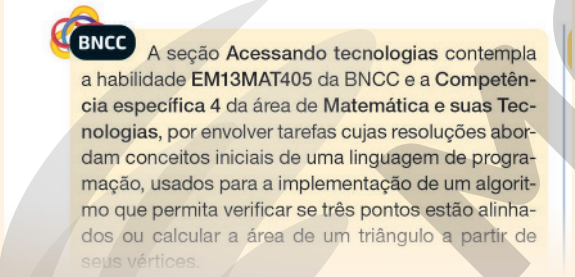
Objetivos específicos

- Reconhecer coordenadas na reta e no plano.
- Calcular a distância entre dois pontos na reta e no plano.
- Determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento.

Esse tema aborda conteúdos matemáticos de modo a promover a articulação entre as unidades temáticas

BNCC

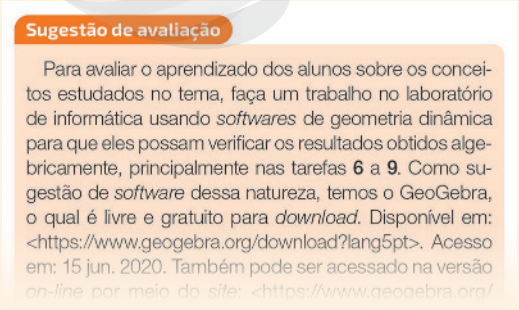
No decorrer dos temas são destacadas e comentadas algumas relações entre o que está sendo abordado no livro do aluno e o que é proposto na BNCC.



BNCC A seção **Acessando tecnologias** contempla a habilidade **EM13MAT405** da BNCC e a **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, por envolver tarefas cujas resoluções abordam conceitos iniciais de uma linguagem de programação, usados para a implementação de um algoritmo que permita verificar se três pontos estão alinhados ou calcular a área de um triângulo a partir de seus vértices.

Sugestão de avaliação

Apresenta sugestões e estratégias de avaliação para que o professor verifique a aprendizagem dos alunos em momentos oportunos.

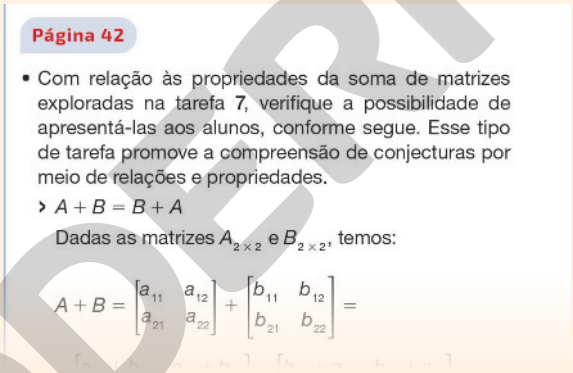


Sugestão de avaliação

Para avaliar o aprendizado dos alunos sobre os conceitos estudados no tema, faça um trabalho no laboratório de informática usando *softwares* de geometria dinâmica para que eles possam verificar os resultados obtidos algebricamente, principalmente nas tarefas **6** a **9**. Como sugestão de *software* dessa natureza, temos o GeoGebra, o qual é livre e gratuito para *download*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang5pt>. Acesso em: 15 jun. 2020. Também pode ser acessado na versão *on-line* por meio do *site*: <https://www.geogebra.org/

Orientações página a página

As orientações e informações complementares importantes para o desenvolvimento dos conteúdos, das tarefas e das seções especiais encontram-se indicadas em tópicos, separadas de acordo com as páginas do livro do aluno.



Página 42

- Com relação às propriedades da soma de matrizes exploradas na tarefa **7**, verifique a possibilidade de apresentá-las aos alunos, conforme segue. Esse tipo de tarefa promove a compreensão de conjecturas por meio de relações e propriedades.

› $A + B = B + A$

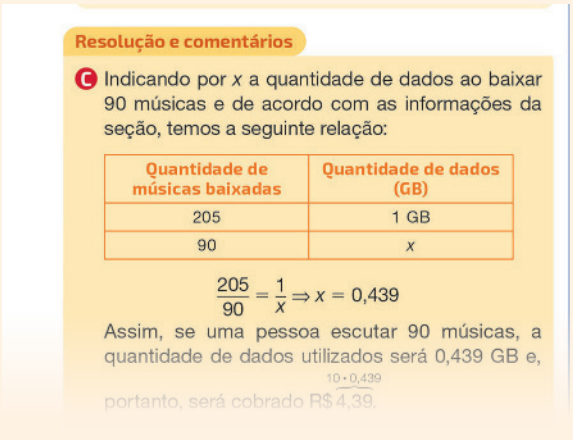
Dadas as matrizes $A_{2\times 2}$ e $B_{2\times 2}$, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

Resolução e comentários

As resoluções das questões das páginas de abertura, das questões intervenção e de algumas tarefas específicas encontram-se em boxes como esse.

No decorrer do desenvolvimento dos temas, sempre que for oportuno, são apresentadas citações que enriquecem e fundamentam o trabalho com o conteúdo proposto.



Resolução e comentários

c) Indicando por x a quantidade de dados ao baixar 90 músicas e de acordo com as informações da seção, temos a seguinte relação:

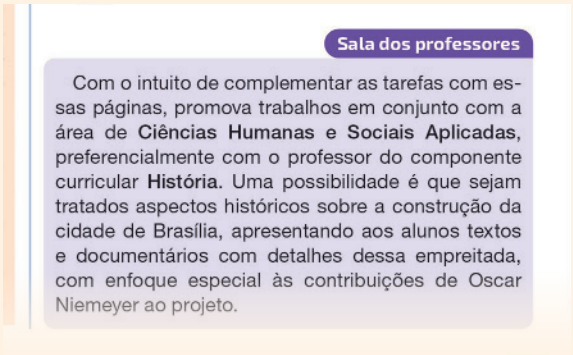
Quantidade de músicas baixadas	Quantidade de dados (GB)
205	1 GB
90	x

$$\frac{205}{90} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 0{,}439$$

Assim, se uma pessoa escutar 90 músicas, a quantidade de dados utilizados será 0,439 GB e, portanto, será cobrado R$ 4,39.

Sala dos professores

Esse boxe estará presente em abordagens e tarefas que permitam relacionar o conteúdo com outras áreas do conhecimento, apresentando sugestões e subsídios para a construção de aulas em conjunto com professores de outros componentes curriculares.

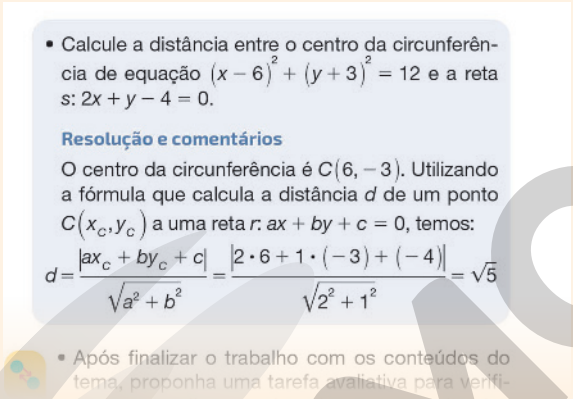


Sala dos professores

Com o intuito de complementar as tarefas com essas páginas, promova trabalhos em conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **História**. Uma possibilidade é que sejam tratados aspectos históricos sobre a construção da cidade de Brasília, apresentando aos alunos textos e documentários com detalhes dessa empreitada, com enfoque especial às contribuições de Oscar Niemeyer ao projeto.

Tarefas extras

Apresenta sugestões de tarefas extras com o objetivo de complementar o trabalho com o conteúdo do respectivo tema.



- Calcule a distância entre o centro da circunferência de equação $(x-6)^2+(y+3)^2=12$ e a reta $s: 2x+y-4=0$.

Resolução e comentários

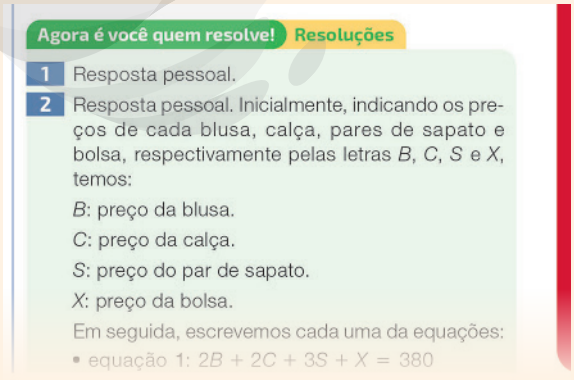
O centro da circunferência é $C(6,-3)$. Utilizando a fórmula que calcula a distância d de um ponto $C(x_C, y_C)$ a uma reta $r: ax+by+c=0$, temos:

$$d=\frac{|ax_C+by_C+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\cdot 6+1\cdot(-3)+(-4)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

- Após finalizar o trabalho com os conteúdos do tema, proponha uma tarefa avaliativa para verifi-

Agora é você quem resolve! **Resolução**

Apresenta as respostas da seção **Resolvendo por etapas**.



Agora é você quem resolve! **Resoluções**

1 Resposta pessoal.

2 Resposta pessoal. Inicialmente, indicando os preços de cada blusa, calça, pares de sapato e bolsa, respectivamente pelas letras B, C, S e X, temos:

B: preço da blusa.

C: preço da calça.

S: preço do par de sapato.

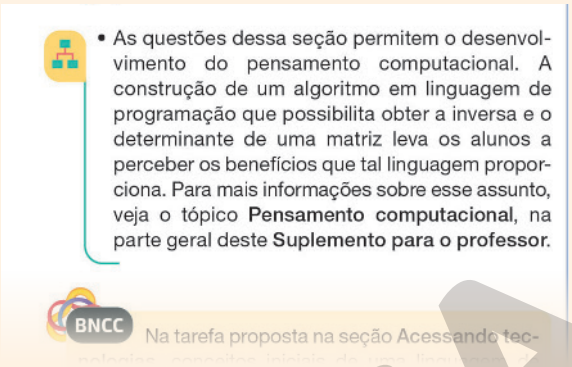
X: preço da bolsa.

Em seguida, escrevemos cada uma da equações:

- equação 1: $2B + 2C + 3S + X = 380$

Pensamento computacional

Selo utilizado para indicar que o texto apresenta informações a respeito do pensamento computacional.

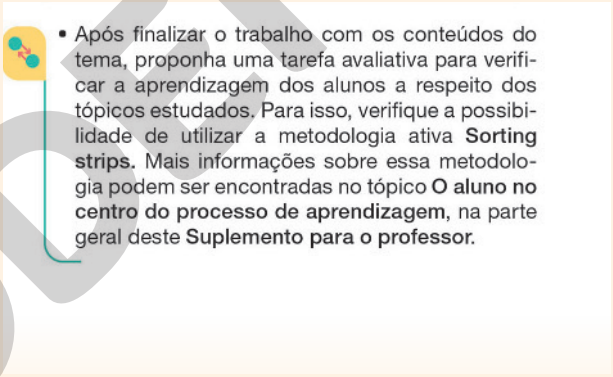


- As questões dessa seção permitem o desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um algoritmo em linguagem de programação que possibilita obter a inversa e o determinante de uma matriz leva os alunos a perceber os benefícios que tal linguagem proporciona. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Na tarefa proposta na seção Acessando tec-

Metodologia ativa

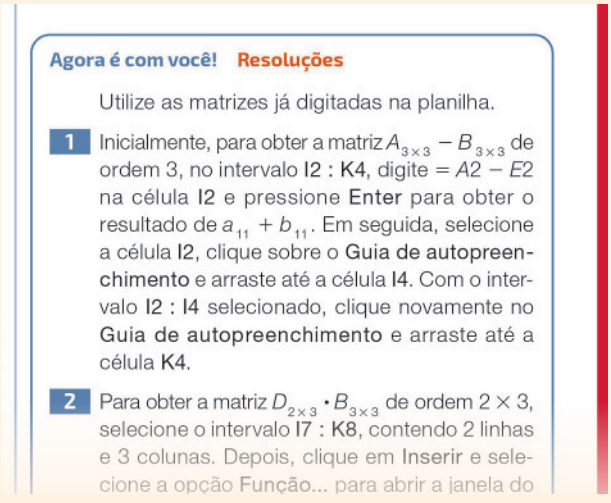
Selo utilizado para sinalizar que o texto apresenta indicações quanto ao uso das metodologias ativas.



- Após finalizar o trabalho com os conteúdos do tema, proponha uma tarefa avaliativa para verificar a aprendizagem dos alunos a respeito dos tópicos estudados. Para isso, verifique a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! **Resolução**

Apresenta as respostas da seção **Acessando tecnologias**.



Agora é com você! **Resoluções**

Utilize as matrizes já digitadas na planilha.

1 Inicialmente, para obter a matriz $A_{3\times3}-B_{3\times3}$ de ordem 3, no intervalo I2 : K4, digite $=A2-E2$ na célula I2 e pressione **Enter** para obter o resultado de $a_{11}+b_{11}$. Em seguida, selecione a célula I2, clique sobre o **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula I4. Com o intervalo I2 : I4 selecionado, clique novamente no **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula K4.

2 Para obter a matriz $D_{2\times3}\cdot B_{3\times3}$ de ordem 2×3, selecione o intervalo I7 : K8, contendo 2 linhas e 3 colunas. Depois, clique em **Inserir** e selecione a opção **Função...** para abrir a janela do

MODERNA

O Ensino Médio

Nos últimos anos, o Ensino Médio no Brasil passou por uma reforma que instituiu novos parâmetros e diretrizes para esse segmento. O objetivo dessas mudanças foi combater índices de evasão escolar, promovendo um ensino que atendesse às expectativas dos jovens em relação ao seu projeto de vida pessoal e profissional e que estivesse alinhado com as necessidades e os anseios desse público. Além disso, almejava-se também ampliar o engajamento desses alunos, para que pudessem desenvolver maneiras autônomas de lidar com os desafios do mundo contemporâneo.

Com base nessas novas perspectivas educacionais, é necessário compreender o Ensino Médio como uma etapa de grande importância política e social, aspecto que supera o conceito de apenas ser uma fase passageira na vida dos jovens. Na verdade, o Ensino Médio constitui-se um momento fundamental de protagonismo e de desenvolvimento pessoal. É nessa fase que os alunos ampliam suas perspectivas culturais, convivendo em um espaço de ampla diversidade de ideias e de opiniões. Também desenvolvem suas capacidades de tomada de decisão, cujo maior desafio é aprender a fazer escolhas coerentes e alinhadas com seu projeto de vida.

Assim, é fundamental que a escola do Ensino Médio desenvolva uma atitude acolhedora das juventudes, estando preparada para os desafios que essa fase exige, principalmente no que se refere à formação profissional e à construção da cidadania dos jovens. Isso requer condutas que priorizem a construção da autonomia dos alunos, que em breve estarão atuando na vida pública sem o acompanhamento de adultos. Desse modo, como podemos preparar os jovens para participar da sociedade de forma responsável?

> A experiência participativa representa uma das formas de os jovens vivenciarem processos de construção de pautas, projetos e ações coletivas. Além disso, a experiência participativa também é importante por permitir a vivência de valores, como os da solidariedade e da democracia, e o aprendizado da alteridade. O que significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças. O exercício da participação pode ser, então, uma experiência decisiva para a vida dos jovens um efetivo contraponto – em uma sociedade que, ao se individualizar, enfraquece ideias, valores e práticas relacionadas à dimensão coletiva da vida social.
>
> BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 46.

É no Ensino Médio também que ocorre a preparação mais intensa e aprofundada dos alunos para os vestibulares e os exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Algumas instituições, inclusive, aceitam alunos que não tenham completado o Ensino Médio como uma espécie de "treineiros", para testar suas habilidades e seus conhecimentos antes da prova efetiva ao final desse ciclo. Esses exames têm como objetivo verificar o desempenho e avaliar o preparo dos jovens para os desafios da vida adulta, seja no âmbito profissional, seja no social. Além disso, as avaliações em larga escala contribuem para monitorar as redes de ensino de modo a oferecer soluções educacionais viáveis por meio de políticas públicas.

Esta coleção apresenta diversos subsídios para auxiliar os alunos na preparação para esses exames, entre eles o Enem. Nas seções **Exercícios e problemas resolvidos** e **Exercícios e problemas**, por exemplo, sempre que possível, apresentamos questões extraídas diretamente do Enem e de vestibulares atuais para que os alunos possam se familiarizar com o formato das provas fornecidas por essas instituições. Além disso, há propostas de elaboração de problemas e articulações interdisciplinares e transdisciplinares, com abordagens que podem contribuir para o desempenho dos alunos em futuras avaliações.

O aluno do Ensino Médio

Existem diversas maneiras de conceituar a fase da juventude. Época de incertezas e de definição identitária, por muito tempo a juventude foi compreendida como um período de passagem, uma etapa prévia da vida adulta, marcada por uma faixa etária delimitada. Porém, de acordo com o estudioso Juarez Dayrell (2016), as pesquisas mais atuais têm demonstrado que a juventude deve ser compreendida como uma categoria socialmente construída na qual os jovens se assumem como verdadeiros sujeitos, ou seja, possuem determinada origem familiar, estão inseridos em relações sociais, apresentam uma historicidade específica, movem-se por desejos e se constituem como seres ativos e produtores de conhecimento.

> A juventude constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social, no qual o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe, por exemplo), a diversidade cultural (a cor da pele, as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero e

MODELO

> de orientação afetiva e até mesmo as diferenças territoriais se articulam para a constituição das diferentes modalidades de se vivenciar a juventude.
>
> DAYRELL, Juarez. (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016, p. 27.

Para que as relações possam ser fecundas e mutuamente respeitosas no ambiente escolar, uma opção interessante é investir no trabalho com as diversas manifestações culturais juvenis, ou seja, fazer da escola um território de produção cultural da juventude e não apenas um local de aprendizado de uma cultura externa ou "adulta". Nesse contexto, o jovem deve se identificar com as produções culturais com as quais convive, deve se sentir incluído e, principalmente, valorizado.

> Os jovens sujeitos do Ensino Médio nos trazem cotidianamente desafios para o aprimoramento de nosso ofício de educar. Entre esses desafios, encontra-se a difícil tarefa de compreensão dos sentidos os quais os jovens elaboram no agir coletivo, em seus grupos de estilo e identidades culturais e territoriais que, em grande medida, nos são apenas "estranhos" (no sentido de estrangeiros) e diferem de muitas de nossas concepções (adultas) de educação (escolar ou não), de autoridade, de respeito, de sociabilidade "adequada" e produção de valores e conhecimentos.
>
> BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I - caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 20.

Realizar esse trabalho de aproximação e de valorização das culturas juvenis exige muito mais do professor. A primeira etapa é passar a compreender o jovem como um sujeito de interlocução, com o qual podemos aprender e expandir nossos horizontes culturais. Essa aproximação requer uma flexibilidade por parte dos professores, que muitas vezes terão de superar visões estereotipadas e superficiais sobre a juventude atual. Assim, deve-se considerar que os jovens não estão inseridos em uma cultura única. A juventude se constitui como categoria socialmente construída, que deve ser analisada com base no contexto de cada comunidade. Existem jovens, por exemplo, que já estão inseridos no mercado de trabalho e que vivenciam a juventude de um modo muito diferente daqueles que têm mais tempo de lazer ou de estudo.

Compreender essas múltiplas culturas juvenis que permeiam o contexto escolar faz parte do processo de inovação que tem marcado o curso educativo nos últimos anos. Em vez de "transmitirmos os saberes" aos jovens, por que não trocarmos e compartilharmos conhecimento, abrindo espaços e criando condições para que as culturas juvenis se expressem no ambiente escolar? Essas novas práticas compõem um caminho de construção coletiva do conhecimento. Sob esse ponto de vista, a aprendizagem passa a ser encarada como uma via de mão dupla, como uma troca e, assim, tende a criar um clima mais saudável e menos impositivo, sendo menos propício ao desenvolvimento de problemas indisciplinares e de relações conflituosas.

O professor

Diante desses novos desafios educacionais, que envolvem inclusive o trabalho com metodologias ativas e tecnologias, o professor assume cada vez mais o papel de mediador das relações entre os alunos e o conhecimento, orientando o caminho a ser adotado no processo de ensino e aprendizagem. Essa mediação ocorre de acordo com um planejamento bem definido das aulas, no qual são explicitadas as estratégias de engajamento e protagonismo dos alunos. Supera-se a postura de um profissional meramente transmissor de informações e almeja-se uma conduta mais interativa, que toma como base a colaboração.

> O papel do professor é mais o de curador e de orientador. Curador, que escolhe o que é relevante entre tanta informação disponível e ajuda a que os alunos encontrem sentido no mosaico de materiais e atividades disponíveis. Curador, no sentido também de cuidador: ele cuida de cada um, dá apoio, acolhe, estimula, valoriza, orienta e inspira. Orienta a classe, os grupos e cada aluno.
>
> MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Orgs.). Coleção Mídias Contemporâneas. *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. v. II. Ponta Grossa: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. p. 24.

Sabe-se que no Brasil as turmas de Ensino Médio são diversificadas e são formadas por grupos de alunos que possuem diferenças nos modos de aprender. O processo de ensino e aprendizagem é complexo e envolve diversas dimensões da vida dos sujeitos. Knud Illeris (2013), por exemplo, descreve a aprendizagem em três dimensões: a de conteúdo, a de incentivo e a de interação. A dimensão de **conteúdo** envolve a aprendizagem cognitiva, relacionada aos conhecimentos que são internalizados. Já a dimensão de **incentivo** se relaciona às sensibilidades, ao equilíbrio mental e às motivações que instigam as pessoas no aprendizado. Por fim, a dimensão de **interação** é aquela que está ligada à sociabilidade e à comunicação do indivíduo.

Desse modo, uma maneira de o professor lidar com a diversidade em sala de aula é identificar em qual dimensão de aprendizagem estão as defasagens dos alunos. Com esse diagnóstico, pode-se, então, desenvolver estratégias adequadas ao tipo de dificuldade específica apresentada por eles. Por exemplo, em casos de defasa-

EM MODERNIZAÇÃO

gem na dimensão de interação, o professor poderá desenvolver estratégias de trabalho em grupo e dinâmicas que exijam a troca de ideias. Quando o problema for em relação à dimensão de incentivo, o professor poderá repensar as maneiras pelas quais aquele conteúdo instiga os alunos e se relaciona com o cotidiano deles.

Nesse sentido, sabe-se que não é fácil a adequação aos novos parâmetros que têm sido delimitados na educação no século XXI. Muitos professores vão precisar de um período de adaptação para renovar e implementar suas práticas. Para contribuir com esse processo, sugerimos a seguir algumas condutas que podem ser utilizadas durante o planejamento e durante as aulas com turmas do Ensino Médio.

- Observar os alunos de modo personalizado, adequando os desafios e as propostas às características de cada um e procurando colocar a diferença como um agregador e um ponto positivo em relação ao coletivo.
- Organizar planejamentos coletivos e individuais para lidar com as turmas como um todo e também de modo personalizado.
- Relacionar os temas e conteúdos à realidade próxima dos alunos, problematizando as experiências vivenciadas e alinhando os conteúdos aos interesses da turma.
- Dar importância à significação dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula.
- Propor constantemente diferentes maneiras de autoavaliação, permitindo aos alunos um momento de reflexão a respeito de suas atividades e seu aprendizado e, também, permitindo ao professor avaliar suas práticas em sala de aula.
- Desenvolver flexibilidade para improvisar, quando necessário, e para adequar as propostas metodológicas à realidade de cada turma.
- Acompanhar a evolução de cada grupo ou aluno, avaliando-a sob uma perspectiva processual.
- Evitar propostas que abordem capacidades meramente interpretativas e que não desafiem os alunos a desenvolver sua criatividade e seu pensamento crítico.
- Inserir opiniões e sugestões dos alunos no planejamento das tarefas, considerando suas dificuldades e preferências.
- Capacitar os alunos em determinadas atividades com as quais eles possam não estar acostumados, como a realização de uma pesquisa bem fundamentada ou a produção de um texto-síntese.
- Gerir o tempo de modo personalizado, observando os ritmos de aprendizagem específicos das turmas.
- Aderir a dinâmicas que alterem o posicionamento tradicional das carteiras em sala de aula, promovendo atividades em grupo e explorando os diversos ambientes da escola.
- Propor trabalhos em grupos, para que os alunos desenvolvam suas capacidades de expressão e de socialização.

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a adolescência é o período de 10 a 19 anos de idade (BRASIL, 2018d). Nessa etapa da vida, o indivíduo ainda se encontra em desenvolvimento e vários fatores podem interferir em seu comportamento e em sua saúde mental. Trata-se de um período de mudanças e descobertas, no qual o jovem constrói e reconstrói sua identidade. Fatores emocionais associados à realidade social, econômica, histórica e cultural tornam essa parcela da população muito vulnerável mental e emocionalmente.

Entre os problemas relacionados à saúde mental que mais afetam os jovens, de acordo com entidades internacionais, está a violência familiar, o *bullying*, a depressão, a ansiedade e a dependência química.

Os casos de *bullying*, por exemplo, envolvem relações de poder e dominação que provocam violência psicológica e, muitas vezes, física, sem motivos aparentes. Em alguns casos, os indivíduos agressores recebem punição, mas é necessário promover um trabalho de conscientização para que esses jovens possam refletir sobre suas ações e analisar os impactos emocionais que elas acarretam para as vítimas. Os jovens que praticam *bullying* geralmente são atraídos por um imaginário preestabelecido de padrões de beleza, comportamento, consumo e configurações sociais. Por isso, as ações de combate a essa prática devem contribuir para a desconstrução desses padrões e para o respeito à diversidade.

Além disso, é preciso analisar o contexto familiar desses jovens, que, muitas vezes, vivem em ambientes onde há violência e/ou negligência. Por essas razões, é imprescindível o papel da escola no cuidado com a saúde mental dos alunos, combatendo ativamente todos os modos de discriminação e violência.

Para isso, são necessários programas para prevenir o *bullying* e qualquer outro tipo de violência, além do abuso de substâncias nocivas. Esses programas devem ter a participação da escola, dos familiares, da comunidade e de profissionais, como psicólogos e psicopedagogos. Tal união pode contribuir para detectar os sinais de problemas envolvendo a saúde mental dos alunos e para

MODERNA

tomar as medidas necessárias antes que esse tipo de comportamento resulte em alguma consequência grave.

Como a escola pode contribuir na promoção da saúde mental dos alunos?

A escola deve ser um espaço de disseminação do respeito e da proteção social dos jovens, atuando com a participação ativa das famílias. Nela, os alunos podem ser organizados em grupos a fim de possibilitar a troca de experiências em debates mediados por um psicólogo. Assim, os jovens tendem a se sentir mais à vontade para discutir e relatar sua realidade, compartilhando suas emoções e descobrindo os gatilhos que os fazem reagir com violência, ansiedade ou tristeza, por exemplo. Trata-se de uma oportunidade para trabalhar o autoconceito, a autoimagem e a autoestima dos jovens.

Averigue a possibilidade de a escola oferecer espaços em horários alternativos para que os alunos desenvolvam atividades extracurriculares, como esportes, oficinas de teatro, atividades de cuidado com a escola e com os colegas, oficinas de dança, gincanas, competições e simulados. Nesses momentos, é importante incluir alunos de diferentes perfis. A convivência é essencial para o desenvolvimento do respeito mútuo e da empatia, colaborando com a saúde mental deles.

Atividades envolvendo atitudes solidárias podem contribuir para que os alunos se coloquem no lugar de outras pessoas, desenvolvendo a empatia. Uma sugestão é promover campanhas de coleta de produtos com o intuito de disponibilizá-los às pessoas vulneráveis e em situação de necessidade assistidas por instituições sociais do município.

Outras atividades podem envolver o futuro dos alunos, identificando os potenciais de cada um a fim de construir um projeto de vida. Mostrar que suas atitudes hoje influenciam o futuro incentiva-os a refletir sobre suas escolhas e opções. A escola, então, tem o papel de ajudá-los a ultrapassar as barreiras com atividades que envolvam a autoestima, o autoconhecimento e o autocuidado.

O professor deve ficar atento aos sinais que denotem mudança de comportamento dos alunos e que demandem o encaminhamento para avaliação da equipe formada pelos profissionais que cuidam da saúde mental, ações que contribuem para prevenir transtornos. Para isso, é muito importante que o professor converse com a administração da escola sobre a possibilidade de promover eventos de formação continuada relacionada à saúde mental.

O convívio social em sala de aula

A convivência social é um aspecto importante na vida de qualquer indivíduo. Vivemos constantemente em interação com outras pessoas e dependemos delas em muitas atividades do dia a dia. Por isso, é necessário ter harmonia no convívio social, com proveito mútuo e respeito constante. Não ter preconceitos, compreender as necessidades do outro, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para criar um ambiente propício para o crescimento em conjunto exige, além de boa vontade, ações de inclusão e integração comunitária.

Na socialização humana, em especial no ambiente escolar, lidamos com indivíduos de diferentes perfis, com diversas crenças e opiniões. Respeitar essas diferenças é dever de cada um e a palavra-chave, em todos os casos, é empatia.

Comumente, a escola é um dos primeiros lugares onde boa parte dos jovens tem contato com outras pessoas. Assim, entre as tarefas do professor, está a necessidade de orientar e instruir os alunos a ser empáticos, desenvolvendo a tolerância, a sensibilidade e, principalmente, o respeito para com os demais. Por meio de práticas saudáveis e bons exemplos, é possível que o professor consiga influenciar seus alunos em um sentido positivo de comportamento socialmente responsável, o qual poderá vir a ter impactos benéficos na sociedade como um todo.

Ações que podem facilitar a construção de um ambiente com essas características incluem, por exemplo, conversas amistosas nas quais, um a um, os alunos possam expressar suas opiniões e compartilhar suas emoções sobre os mais variados assuntos. Tal prática pode ser incrementada com atividades complementares, como a solicitação de pesquisas extraclasse, para posterior debate construtivo, a respeito de temas como as relações familiares, a importância dos vínculos de amizade, a aceitação de ideias contrárias às nossas e o respectivo respeito, o pluralismo cultural na escola e no ambiente de trabalho, a promoção da paz na comunidade escolar, entre outros.

A Matemática, nesse contexto, pode ser uma ferramenta para analisar dados acerca da distribuição de renda ou das discriminações em razão de etnia, sexo ou crença, investigando e interpretando as porcentagens de cada grupo sociocultural em diferentes estudos estatísticos. Com base em análises quantitativas, é possível discutir os desafios que a sociedade enfrenta rumo à efetividade da justiça social, que pode ser um ponto de partida para a troca de ideias e o autoconhecimento por parte dos alunos, inclusive com o envolvimento do professor. Para isso, noções de proporcionalidade, de causas e consequências lógicas e até mesmo da objetividade dos números na descrição dos fenômenos naturais, incluindo os socioeconômicos, são fatores importantes para a compreensão da realidade e, também, para aumentar a consciência dos jovens de modo a auxiliá-los no embasamento de argumentos.

Ademais, sempre que julgar conveniente, o professor pode conversar com os alunos, dispondo-se a ouvi-los e incentivando-os a expressar suas ideias. Atitudes desse tipo favorecem o respeito e a admiração mútuos, contribuindo para o engajamento saudável e natural em sala de aula.

MODERNA

Além disso, é importante conversar com os alunos sobre traçar planos em busca de sonhos e alcançar os meios necessários para consolidá-los pelo próprio esforço. Justamente por essa razão, também estão entre seus maiores desafios.

Nesse processo dinâmico, muitas vezes sem fim, a educação assume um papel importantíssimo, em especial nas peculiares etapas de transição entre a infância e a vida adulta. Ao lado da família, da sociedade e da autodeterminação do próprio sujeito, a escola é o fator mais importante na produção desse despertar de consciência e de responsabilidade no jovem, instruindo-o, tanto quanto possível, na estruturação gradativa e na viabilização sensata de um projeto de vida tão necessário. Tal projeto, constituindo o alicerce em que o futuro do jovem será edificado, deve levar em consideração os múltiplos âmbitos interconectados em que a vida se manifesta: pessoal, educacional, profissional, social, político, moral, intelectual e emocional.

O anseio por objetivos de vida maiores e mais realistas do que aqueles dos primeiros sonhos da infância costumam despontar com ímpeto durante a juventude, e normalmente o fazem de maneira desordenada, cheia de agitação, ingenuidades, inseguranças e receios. Assim, a escola deve se preocupar com a formação integral dos alunos e assumir o compromisso de lidar adequadamente com essas questões, elegendo a construção da autonomia como o eixo central em torno do qual organizar suas atividades.

Sendo a última etapa da Educação Básica, no Ensino Médio tais questões devem ser trabalhadas pelo professor com maior atenção e de maneira mais explícita, ora no contexto das tarefas do componente curricular, ora em conversas com a turma, mas sempre por meio de exemplos e de aconselhamentos que fomentem o delineamento de planos de vida e o recrudescimento do caráter.

Nesse sentido, a trajetória escolar deve ser capaz de dialogar com os jovens, desenvolvendo neles habilidades e conhecimentos que incentivem atitudes efetivas para lidar com os desafios da sociedade, promovendo a maturação de valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida. Além de prepará-los para o mercado de trabalho, fornecer orientação vocacional e capacitá-los para eventuais estudos mais complexos no ensino superior ou para aperfeiçoamento técnico em cursos profissionalizantes, conforme as circunstâncias de cada caso.

O estabelecimento do projeto de vida, como já frisado, é um processo dinâmico que conta com diálogos entre jovens, família, amigos, escola e sociedade. Contudo, a liberdade e o protagonismo são exclusivos do indivíduo: é ele que escolherá sua profissão, decidirá constituir família ou não, e vai direcionar sua atenção e seus esforços para a área de seu interesse. Desse modo, o projeto de vida que os alunos almejam, projetam e redefinem para si ao longo de suas trajetórias, praticamente coincidindo com o desenvolvimento da própria identidade, é apenas motivado e instruído pela escola, nunca imposto forçosamente por ela. As escolhas devem ocorrer naturalmente em uma multiplicidade de influências, experiências e aprendizagens que enriquecem à medida que se tornam plurais, de tal modo que os alunos de diferentes perfis aprendem uns com os outros por interação mútua e convívio constante, mediados – e não determinados – pela família, pelo professor, pela escola como um todo e, ainda mais amplamente, pelas conjunturas socioculturais nas quais o jovem está inserido.

É, enfim, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de modo controlado, as interações com o outro e com o mundo, vislumbrando, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e futuro. É nessa riqueza de motivação que o jovem deve traçar o próprio caminho, explorando seus talentos e potencialidades, assumindo deveres e responsabilidades, aprendendo a fruir e a conter desejos, a dosar razão com emoção, a harmonizar lazer com labor, a mesclar estudos com diversão, disciplina com curiosidade. Com isso, ele estará apto a constituir-se um ser humano íntegro, seguro de si, cônscio de quem é, dos próprios méritos e limitações, atento ao seu papel no mundo e ativo quanto às necessidades de seu tempo e de sua comunidade.

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Com o intuito de substituir o currículo do Ensino Médio isolado em componentes curriculares, a BNCC apresenta, para essa etapa, as aprendizagens essenciais distribuídas por áreas do conhecimento. Assim, para cada área são definidas competências específicas que se relacionam diretamente com as habilidades da área. Essa estrutura constitui a formação geral básica que, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), "[...] é composta por competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e articuladas como um todo indissociável, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social [...]" (BRASIL, 2018b).

Além de estabelecer que os conteúdos sejam apresentados por área (formação geral básica), a BNCC prevê, tendo como documento orientador as DCNEM, os itinerários formativos, em que os alunos poderão escolher, por exemplo, a formação técnica como maneira de complementar sua formação escolar. Veja o esquema a seguir.

PROVISÓRIA

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 469. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Com essa estruturação, a BNCC do Ensino Médio articula-se às habilidades e competências do Ensino Fundamental, com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral dos alunos, possibilitando, assim, a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

As áreas do conhecimento

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área e supõe um trabalho interdisciplinar e transdisciplinar. Isso requer um currículo que integre não só os conteúdos dos componentes de determinada área (interdisciplinaridade), mas também os componentes de outras áreas, estabelecendo relações transdisciplinares. As áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares são divididos na BNCC conforme apresenta o quadro a seguir.

ÁREAS DO CONHECIMENTO	COMPONENTES CURRICULARES
Linguagens e suas Tecnologias	- Arte - Educação Física - Língua Inglesa - Língua Portuguesa
Matemática e suas Tecnologias	- Matemática
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	- Biologia - Física - Química
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	- Filosofia - Geografia - História - Sociologia

As dez competências gerais da Educação Básica, previstas na BNCC, têm como principal objetivo formar cidadãos conscientes do seu papel na sociedade e que saibam agir de maneira justa. Essas competências se desdobram na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes.

1 – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 – Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 – Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 – Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

MODERNA

5 – Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 – Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 – Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 – Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 – Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para que os alunos desenvolvam as competências gerais é preciso, primeiramente, adquirirem as aprendizagens essenciais de cada área, por meio das habilidades, desenvolvendo, também, os princípios das competências específicas.

Esta coleção foi organizada de maneira a contemplar as habilidades e as competências específicas relacionadas à área do conhecimento **Matemática e suas Tecnologias**, bem como contemplar as competências gerais propostas na BNCC. Essas relações estão presentes nas abordagens dos conteúdos, nas teorias, nas seções especiais e nas tarefas apresentadas. O livro do aluno aborda as relações entre as habilidades e/ou competências, de maneira que os conteúdos de Matemática estão destacados, permitindo que tanto os alunos quanto o professor confiram como esses elementos são desenvolvidos. Já o **Suplemento para o professor** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências e os conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**, assim como as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, auxiliando o professor a verificar como esses itens podem ser desenvolvidos, a fim de contribuir com a formação integral dos alunos.

As diferentes maneiras de trabalhar com esses elementos serão explicitadas no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**. Além disso, no tópico **A BNCC e a coleção** há um mapeamento em que são apresentados os elementos da BNCC desenvolvidos em cada tema deste volume.

Temas contemporâneos transversais

Os temas contemporâneos transversais não são novidade nos documentos oficiais para a Educação Básica. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997, eram chamados **temas transversais** e pressupunha-se que fossem incluídos nos currículos das escolas. Contudo, como os PCNs não tinham caráter obrigatório e os seis temas listados não eram pautados em nenhuma legislação ou norma específica, nem sempre essa inclusão acontecia no contexto escolar.

Com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) de 2013, os Temas transversais receberam o nome de **eixos temáticos** ou **eixos norteadores**, e pressupunham que os professores e os alunos escolhessem temas/assuntos afeitos ao componente curricular que desejassem estudar, contextualizando-os com outros. O trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, por meio de eixos temáticos, tornou-se obrigatório a fim de conduzir os alunos na reflexão sobre a vida em sociedade.

Com a homologação da BNCC, em 2018, eles passaram a ser chamados **temas contemporâneos** e tornaram-se uma referência obrigatória para a elaboração dos currículos. Em 2019, com a publicação do documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC*, passaram a ser chamados **temas contemporâneos transversais** (TCTs). Essa mudança de nomenclatura é pautada na BNCC, que afirma: "[...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma **transversal** e integradora." (BRASIL, 2018a, grifo nosso).

Na BNCC, os TCTs foram distribuídos em seis áreas temáticas, conforme apresentado no quadro a seguir.

MODERNA

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS					
CIÊNCIA E TECNOLOGIA	**MEIO AMBIENTE**	**ECONOMIA**	**MULTICULTURALISMO**	**CIDADANIA E CIVISMO**	**SAÚDE**
• Ciência e tecnologia	• Educação ambiental • Educação para o consumo	• Trabalho • Educação financeira • Educação fiscal	• Diversidade cultural • Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	• Vida familiar e social • Educação para o trânsito • Educação em direitos humanos • Direitos da criança e do adolescente • Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso	• Saúde • Educação alimentar e nutricional

Os TCTs não pertencem a nenhuma área específica do conhecimento e devem ser abordados por todas elas de maneira integrada e complementar, possibilitando aos alunos a melhor compreensão da sociedade em que vivem. Seguindo essa premissa, e com o objetivo de orientar o professor no trabalho com os TCTs, esta coleção aborda esses temas por meio de recursos e tarefas, tanto no livro do aluno quanto neste **Suplemento para o professor**. Essas abordagens percorrem as áreas do conhecimento e proporcionam aos alunos a reflexão sobre seu papel na sociedade, contribuindo para sua formação cidadã.

Orientações didáticas e metodológicas

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção

Esta coleção propõe a contextualização sociocultural do aluno, tornando-o protagonista de seu processo de aprendizagem. Embora a Matemática seja, "[...] por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados [...]" (BRASIL, 2018, p. 265), o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática tem importância considerável e deve fazer parte, sempre que possível, das tarefas discentes, a fim de produzir questionamentos saudáveis, levantar conjecturas e buscar contra-exemplos, entre outras situações. Nesse sentido, em diversos momentos desta coleção a condução dos conceitos busca ferramentas da tendência socioetnocultural, amparada na Etnomatemática, que propõe troca de conhecimento entre professor e aluno, incentivando sua autonomia crítica, criativa e transformadora na aprendizagem de um saber prático e dinâmico. Além disso, a realidade do aluno é, muitas vezes, problematizada e tomada como contexto para explorar novos conceitos e ampliar os conhecimentos prévios deles.

O ponto de partida da tendência socioetnocultural está pautado nos "problemas oriundos do meio cultural, das práticas cotidianas. Professor e alunos trocariam seus conhecimentos [...]. Isso se evidencia pelo trabalho pedagógico a partir da abordagem de temas envolvendo o conhecimento cotidiano dos alunos." (ZIMER, 2008, p. 86-87).

Dessa maneira, a Matemática é uma ciência prática e dinâmica, produzida histórica e culturalmente em diversos contextos sociais, em que sua história desmitifica a realidade e estabelece estratégias que incentivam e facilitam as ações dos alunos, contribuindo para a construção de uma consciência cidadã e democrática. Além disso, as trocas de conhecimentos entre o professor e os alunos por meio de metodologias ativas objetivam a formação crítica, pessoal e social.

Ademais, os recursos tecnológicos são ferramentas potenciais de ensino ao apoiar a autoprodução de conhecimentos por parte dos alunos.

Sabe-se que os resultados matemáticos são obtidos por meio de deduções pautadas em axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados ou proposições. Grande parte do ensino atual está relacionada à mera reprodução de algoritmos. No entanto, não podemos reduzir a Matemática à simples aplicação de fórmulas e à resolução de exercícios, pois são procedimentos mecânicos, que não possibilitam o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno. Com o objetivo de mudar essa abordagem em sala de aula, algumas concepções no ensino de Matemática podem ser adotadas, visando tornar o aluno protagonista do próprio processo de aprendizagem. Entre elas, temos a Etnomatemática, a História da Matemática, a Investigação matemática, a Resolução de problemas e a Modelagem matemática.

No Brasil, o precursor da Etnomatemática é o professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio. Etimologicamente, Etnomatemática significa a maneira, a técnica ou a arte (*tica*) de explicar, conhecer e entender (*mathema*) a realidade natural e sociocultural em que o indivíduo está inserido (*etno*). Nesse sentido, o autor a concebe como "o reconhecimento que as ideias matemáticas, substanciadas nos processos de comparar, classificar, quantificar, medir, organizar e de inferir e de concluir, são próprias da natureza humana. Em todo ser humano, cérebro e mente se organizam para execução desses processos" (D'AMBROSIO, 2008, p. 164). Para D'Ambrosio, a Matemática é espontânea e individual, motivada e desenvolvida de acordo com o ambiente social e cultural em que o indivíduo se encontra. Ao sugerir um vínculo entre a Etnomatemática e a sala de aula, D'Ambrosio argumenta que "a proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. E através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos

CONTEMPORÂNEA

nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural" (D'AMBROSIO, 2015, p. 46-47).

Nesta coleção, a Etnomatemática é trabalhada em alguns contextos e tarefas que apresentam o conhecimento matemático atrelado a diversas culturas, oportunizando momentos de reflexão quanto ao papel social que a Matemática representa nas relações humanas. Por meio dessa abordagem, é esperado que os alunos descubram métodos úteis para resolver, de maneira eficaz, problemas em contextos não tão comuns à própria realidade. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, são apresentadas diversas situações que permitem ao professor promover, junto aos alunos, um debate acerca da importância da Etnomatemática.

A História da Matemática, como uma tendência de ensino, excede a descrição de fatos históricos ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. Esse ramo envolve a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático, favorecendo a contextualização dos objetos de conhecimento. Segundo Lopes e Ferreira (2013), uma dinâmica interessante para introduzir um novo conteúdo em sala de aula é proporcionar aos alunos o contato com o desenvolvimento histórico desse conceito, apontando, sempre que possível, quais eram as condições sociais, econômicas e políticas que, possivelmente, levaram ao surgimento daquela ideia. Para Miguel e Miorim (2011), o professor pode buscar na História da Matemática o apoio de que necessita para atingir os objetivos pedagógicos que levem os alunos a perceber:

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.
>
> MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. p. 53.

Nesta coleção, a História da Matemática é abordada, sempre que oportuno, por meio de situações motivadoras, que propiciam o trabalho com os aspectos históricos dos conceitos envolvidos. Tais situações podem ser encontradas tanto no decorrer das teorias quanto nos enunciados das tarefas propostas.

A Investigação matemática, por sua vez, consiste no trabalho com situações abertas, isto é, situações em que a questão principal não está bem definida. Visto que os alunos podem tomar diferentes pontos de partida, é provável que os resultados obtidos também sejam diferentes ao final do processo de investigação. Para Ponte, Brocado e Oliveira (2016), a Investigação matemática pode ser concebida como uma atividade de ensino e aprendizagem que favorece "o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016, p. 23). O desenvolvimento de atividades de investigação envolve quatro momentos distintos: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016). Em um primeiro momento, os alunos devem reconhecer e explorar a situação-problema proposta, além de formular questões que serão investigadas no decorrer desse processo. Em um segundo momento, eles são levados a organizar os dados coletados e propor conjecturas com base nas informações obtidas até então. Depois, eles devem testar tais conjecturas, verificando sua validade e reformulando-as, caso necessário. Por fim, devem justificar essas conjecturas, avaliando o raciocínio desenvolvido e os resultados obtidos.

Nesta coleção, a Investigação matemática é trabalhada em contextos nos quais os alunos são levados a: investigar algoritmos e representá-los por meio de um fluxograma; elaborar enunciados de problemas, nos quais eles devem investigar problemas parecidos que envolvam os conceitos estudados, tomando-os como base para criar uma nova situação; investigar propriedades matemáticas e estabelecer relações entre diferentes conceitos, de modo a formular conjecturas e validá-las sempre que necessário; entre outros casos.

Outra tendência no ensino de Matemática é a Resolução de problemas, que consiste em trabalhar com situações cujos procedimentos que permitem sua resolução não estão predefinidos. Em primeiro lugar, é preciso definir o conceito de problema. Para Onuchic (1999), problemas são situações nas quais não se sabe o que fazer, mas há interesse em solucioná-las. Em outras palavras, são situações que levam o aluno a pensar em algum procedimento de resolução que ainda não está bem definido. A autora ainda destaca que, na abordagem da Resolução de problemas, o aluno, por um lado, aprende Matemática para resolver problemas e, por outro, aprende Matemática resolvendo problemas. Polya (1999), ao tratar da Resolução de problemas no ensino de Matemática, propõe uma heurística de resolução, isto é, resolver um problema consiste em seguir determinadas etapas. O primeiro passo é compreender o problema interpretando o enunciado. Em seguida, elabora-se um plano de resolução, no qual é possível identificar procedimentos mate-

COPEIA

máticos que podem ser úteis. Definido o plano, deve-se colocá-lo em execução, encontrando uma solução para o problema. Por fim, a última etapa consiste na comparação dos resultados obtidos com o enunciado do problema, verificando todos os procedimentos utilizados e analisando se a solução é consistente com o que foi solicitado.

De acordo com a BNCC:

> [...]
>
> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.
>
> No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.
>
> Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 535. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Nesta coleção, a Resolução de problemas é abordada na seção **Resolvendo por etapas**, em que são apresentadas situações que complementam os conteúdos trabalhados no livro do aluno. Por meio de orientações específicas detalhadas em algumas etapas, os alunos são levados a determinar a resposta do problema proposto. Dependendo do que o professor julgar conveniente, o trabalho com essa seção poderá ser desenvolvido individualmente ou em grupos.

As atividades de cunho predominantemente investigativo, que não possuem procedimentos de resolução previamente determinados, não se restringem apenas à Resolução de problemas ou à Investigação matemática. A Modelagem matemática, enquanto tendência de ensino, também tem como base as atividades investigativas. Porém, o que a diferencia das outras tendências é o fato de que as atividades abordam situações do mundo real, em contextos próximos à realidade dos alunos. A Modelagem matemática pode ser considerada uma alternativa pedagógica, que aborda situações não matemáticas, isto é, reais, por meio da Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nesse sentido, ao trabalhar com uma atividade na perspectiva da Modelagem matemática, os alunos têm como ponto de partida uma situação-problema cujo contexto está relacionado ao mundo real e cujos dados só serão conhecidos por meio da coleta de informações. Essa etapa leva os alunos a elaborar problemas que serão investigados por meio da Matemática, resultando em um modelo formado por um sistema conceitual expresso em linguagem matemática. A construção desse modelo matemático requer que os alunos criem estratégias que os auxiliem na resolução do problema, mesmo que tais estratégias não sejam determinadas *a priori*. Por fim, é necessário que eles determinem a resolução do problema por meio do modelo matemático elaborado, cuja resposta será confrontada com o enunciado, buscando possíveis divergências de valores. Essa interpretação do resultado pode resultar em uma solução que satisfaça o problema ou, então, em uma solução que não seja condizente com as informações previamente apresentadas. Nesse último caso, é necessário orientar o aluno para que retome os procedimentos a fim de encontrar o erro cometido e, assim, executar novamente os procedimentos com o intuito de encontrar a solução correta. Esse tipo de atividade, além de proporcionar uma aprendizagem significativa, pode causar motivação nos alunos, visto que são estudadas situações de seu cotidiano. O desenvolvimento de atividades sob a luz da Modelagem matemática exige que o professor desempenhe o papel de orientador, tornando o aluno o próprio protagonista de seu processo de aprendizagem.

Apesar das diferentes características entre as tendências citadas, todas elas destacam o papel do professor distinto do modelo usual de ensino. Quando inserido em atividades com as características descritas, ele deve se tornar um mediador do ensino, no sentido de fazer com que os alunos utilizem suas habilidades e técnicas na resolução dos problemas e/ou situações que surgirem. Nesse sentido, há dois caminhos que podem ser percorridos: primeiro, o professor encaminha os alunos na resolução do problema por meio de dicas e orientações que, na verdade, não os auxiliam no desenvolvimento do raciocínio crítico; segundo, o professor, por meio de questionamentos, auxilia os alunos na resolução da situação proposta sem revelar a solução do problema inicial. Em qualquer caso, cabe ao professor utilizar todo o conhecimento relacionado à sua prática pedagógica para refletir acerca do caminho mais adequado para aquela situação, de acordo com o trabalho que estiver sendo desenvolvido.

MODERNA

O computador e o ensino da Matemática

O advento da tecnologia beneficiou diversos setores importantes da nossa sociedade, um deles foi a educação. Os computadores, celulares, *tablets* e outros dispositivos eletrônicos estão presentes em qualquer ambiente, inclusive na sala de aula. Assim, é de se esperar que tais equipamentos passem a fazer parte do cotidiano escolar dos alunos, contrariando grande parte da população que considera instrumentos escolares apenas a lousa, o giz e o livro didático.

Apesar da constante presença em diversos setores e do comprovado auxílio de um computador a um ambiente escolar, muitos professores ainda apresentam certa resistência à sua implementação na sala de aula. Enquanto alguns encaram os equipamentos tecnológicos como eficazes transmissores de conhecimento (informática na educação), outros ainda acreditam que deveria ser criado um componente curricular específico no currículo escolar dos alunos com o intuito de auxiliá-los a manipular tais equipamentos (educação informática). Mas qual seria a diferença entre esses dois conceitos?

De maneira geral, o objetivo da educação informática é preparar o indivíduo para o mercado de trabalho, ensinando-lhe alguns conceitos computacionais, os fundamentos sobre como um computador funciona e a utilização de alguns *softwares* para trabalhos específicos. Contudo, esse tipo de serviço ainda é ofertado pelas escolas de informática em algumas localidades. Já em relação à informática na educação, o computador assume outro papel: sua inserção na rotina escolar tem participação no processo de ensino e aprendizagem. Nesse caso, é possível obter e trocar informações, desenvolver conceitos, entre outras possibilidades.

Focando no segundo conceito, informática na educação, podem surgir algumas perguntas que merecem reflexão.

- De quais maneiras é possível inserir o computador no ambiente escolar?
- Que tipo de contribuição esse instrumento pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem?
- Quais são os *softwares* mais adequados para o trabalho em sala de aula?
- Que cuidados devemos ter para que o computador seja uma ferramenta efetiva utilizada para fins educativos?

As respostas para essas e outras perguntas devem surgir de acordo com o planejamento do projeto pedagógico da escola, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

O uso de um computador como recurso didático requer muito mais do que a simples instalação desse equipamento e de como os professores farão uso dele. É necessário que eles sejam capazes de extrair todo o potencial desse equipamento no ambiente escolar. Com o objetivo de alcançar resultados cada vez mais satisfatórios, ao trabalhar com o auxílio da tecnologia, o professor deve explorá-la como uma ferramenta pedagógica capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. É importante enfatizar que, diante de todas essas transformações, o professor em sala de aula deixa de ser apenas um transmissor de informações para ser mediador do processo de ensino e aprendizagem.

> Os recursos computacionais em si mesmos, quando amplamente dominados pelo professor, não são suficientes para garantir uma ação educacional diferenciada, se não estiverem claras e fundamentadas as teorias. Assim, além da necessidade de saber lidar com o computador, o professor deve entregar-se ao processo de construir para si mesmo um novo conhecimento, incorporando não somente os princípios que estão sendo atualmente desenvolvidos sobre informática e educação, mas acima de tudo, passando pelas considerações teóricas sobre a aprendizagem que melhor explicam a aquisição do conhecimento e o desenvolvimento cognitivo. Trata-se de dominar o conhecimento científico de uma maneira ampla e necessária para o seu próprio aprimoramento intelectual.

OLIVEIRA, 2007, p. 59, apud FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Ponta Grossa. *Anais* [...]. Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1023.

Em certos momentos, especificamente nas aulas de Matemática, a utilização de alguns *softwares* pode facilitar algumas dinâmicas em sala de aula ou propiciar a exploração de algo que seria inviável sem esses recursos. Os *softwares* contribuem de maneira significativa no processo de ensino e aprendizagem, pois são interativos, promovem maior abertura para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, estimulam a pesquisa e auxiliam na construção de um saber coletivo. Portanto, quanto maior a gama de *softwares* distintos conhecidos pelo professor, mais rica, dinâmica e produtiva será a aula ministrada.

> [...] Inovações didáticas resultantes da utilização do computador podem ser ilustradas por *softwares* destinados ao ensino da geometria, incorporando o recurso do movimento e da simulação na representação de conceitos. Essa é uma novidade, uma vez que o movimento é um recurso mais próximo da flexibilidade da representação por imagens mentais, restritas ao cérebro humano.
>
> [...]

PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 40-41.

MODERNA

Nesta coleção, alguns temas relacionados ao uso do computador em sala de aula são abordados em diversos momentos. Por exemplo, na seção **Acessando tecnologias** são apresentados *softwares* e outros recursos tecnológicos que complementam o ensino dos conteúdos abordados no livro do aluno. O trabalho com essa seção poderá ser realizado no laboratório de informática da escola ou, ainda, proposto como atividade extraclasse.

O pensamento computacional

Vivemos em uma sociedade na qual a presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) provoca importantes transformações em diversos setores, como na economia, na cultura e na educação. Diante disso, pesquisadores de campos relacionados às políticas educacionais enfatizam a importância da implantação da programação e de conceitos oriundos da ciência da computação no currículo escolar, uma vez que o trabalho realizado no âmbito dessa ciência desenvolve capacidades relacionadas ao pensamento computacional, que, junto à leitura, à escrita e à aritmética, deveria ser uma das habilidades analíticas inerentes a cada indivíduo (RAABE, 2017).

Mas o que é o pensamento computacional?

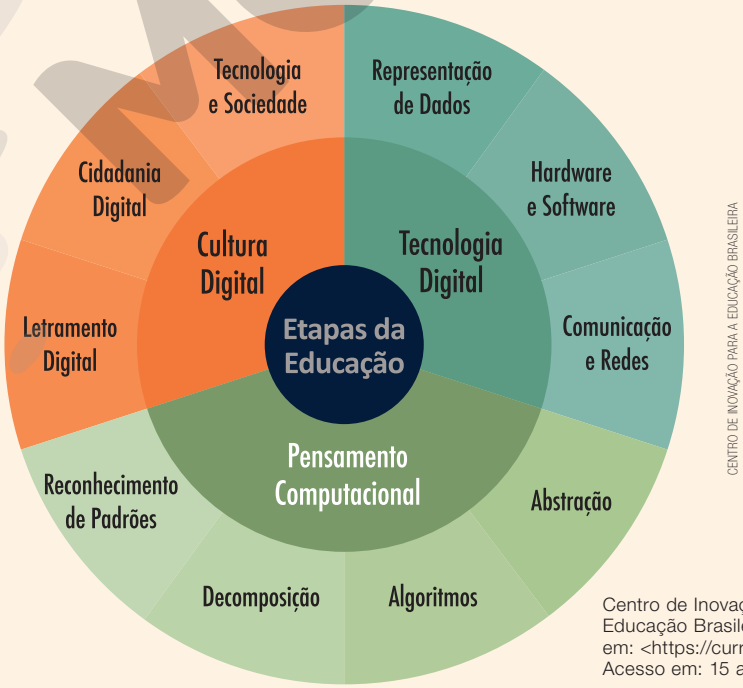
> [...]
>
> Pensamento computacional é uma forma para seres humanos resolverem problemas; não é tentar fazer com que seres humanos pensem como computadores. Computadores são tediosos e enfadonhos; humanos são espertos e imaginativos. Nós humanos tornamos a computação empolgante. Equipados com aparelhos computacionais, usamos nossa inteligência para resolver problemas que não ousaríamos sequer tentar antes da era da computação e construir sistemas com funcionalidades limitadas apenas pela nossa imaginação.
>
> [...]

WING, Jeannette. *Computational Thinking*. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, n. 3, p. 4, 2006. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Um dos eixos do currículo de referência em tecnologia e computação, do Centro de Inovação para a Educação Brasileira, é o pensamento computacional, o qual dissera sobre a resolução de problemas que envolvem tecnologias digitais considerando quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo (CIEB, 2018; BRACKMANN, 2017).

- **Decomposição:** decompor o problema em problemas menores, conhecidos como subproblemas, mais fáceis de serem resolvidos.
- **Reconhecimento de padrões:** analisar os subproblemas individualmente, com o objetivo de reconhecer padrões e identificar características comuns que ajudam na sua resolução.
- **Abstração:** filtrar, classificar e organizar as informações relevantes ao considerar apenas os dados essenciais para a resolução do problema e ignorar as informações irrelevantes, atingindo uma generalização dos padrões identificados.
- **Algoritmo:** construção de estratégias ou instruções claras e ordenadas que auxiliam a resolução dos subproblemas e, consequentemente, a obter a solução do problema principal.

Para mais informações a respeito do currículo de referência em tecnologia e computação, acesse o *site* do CIEB. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.



Centro de Inovação para a Educação Brasileira. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

MODELO

Como estratégia didática para o desenvolvimento do pensamento computacional, os conceitos relacionados à linguagem de programação, quando o contexto assim solicitar, podem ser utilizados de modo contextualizado a fim de que os alunos exercitem sua aprendizagem e autonomia para estabelecer relações com situações de seu cotidiano. O uso de simulações, *softwares* ou equipamentos específicos, por exemplo, pode levar os alunos a estudar determinados fenômenos reais que dificilmente seriam possíveis sem o auxílio desses recursos.

No Ensino Médio, ao trabalhar com abordagens que desenvolvem o pensamento computacional, deve-se planejar a maneira como as atividades propostas serão efetuadas, considerando diferentes perfis de alunos, bem como as características de cada turma, além de fazer uso dos recursos disponíveis no ambiente escolar e de perseguir os objetivos a serem alcançados.

Sabe-se que as escolas públicas brasileiras, muitas vezes, não possuem o aparato tecnológico e computacional necessário para o desenvolvimento de atividades com essas tecnologias. Nesses casos, o professor deve recorrer ao trabalho com o pensamento computacional sem o auxílio de recursos tecnológicos, conhecido como pensamento computacional desplugado, ou *unplugged*. Segundo Brackmann (2017), essa alternativa, por ser de fácil aplicação em diferentes realidades, foi pensada justamente com o intuito de atender às escolas públicas que não possuem condições socioeconômicas de ter acesso a computadores ou outras tecnologias. Desse modo, o professor pode aplicar abordagens lúdicas, como truques de mágica e competições entre os alunos ou, ainda, usar objetos manipuláveis, como jogos (de tabuleiro, de cartas, de peças), livros, fichas, figuras e, até mesmo, o próprio material escolar dos alunos.

Além disso, de acordo com a BNCC (2018, p. 474), o pensamento computacional "envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, nesta coleção, o pensamento computacional é incentivado eventualmente: em tarefas que envolvem a organização do pensamento; no registro e na análise de resultados e dados por meio de planilhas e gráficos; no uso de *softwares* de geometria dinâmica; nas construções de algoritmos e fluxogramas; por meio de linguagem de programação usando o *software* VisualG – programa que possibilita a criação, edição, interpretação e execução de algoritmos, bastante utilizado para o ensino da lógica de programação por ser de fácil manipulação.

No trabalho com o VisualG, os alunos são levados a interpretar as informações do problema proposto e organizá-las em uma sequência de instruções que devem ser transformadas em um algoritmo. Então, essas instruções são transcritas no *software*, realizando a codificação do problema, apresentado em linguagem materna, para uma linguagem de programação. Com isso, os alunos desenvolvem os quatro pilares do pensamento computacional. O VisualG é livre e seu *download* pode ser feito por meio do *site* disponível em: <https://visualg3.com.br/>. Acesso em: 14 maio 2020.

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 271. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para auxiliar nas práticas que propiciam o desenvolvimento do pensamento computacional em sala de aula, veja algumas referências no tópico **Sugestões ao professor** deste **Suplemento para o professor.**

O aluno no centro do processo de aprendizagem

Metodologias ativas

Nas últimas décadas, o advento da tecnologia e as discussões envolvendo novos métodos de ensino têm gerado grandes desafios aos professores e às escolas. Estruturas de ensino tradicionais, nas quais professores transmitem conhecimentos aos alunos, têm sido cada vez mais questionadas quanto ao seu papel efetivo no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, as metodologias ativas são uma maneira de transformar essa realidade, engajando o aluno e tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo. As estratégias de metodologias ativas são um processo de ensino e aprendizagem em que o aluno é o protagonista da construção do conhecimento, tendo o professor como mediador para atingir um objetivo de aprendizagem de modo interativo, dinâmico, reflexivo e colaborativo.

Nesse tipo de abordagem, o professor deixa de ser o transmissor do conhecimento, passando a ser um mediador ao planejar as aulas com foco em orientar e incentivar os alunos.

> As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as eta-

MODERNA

pas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor [...].

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, L; MORAN, J. (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 02-25.

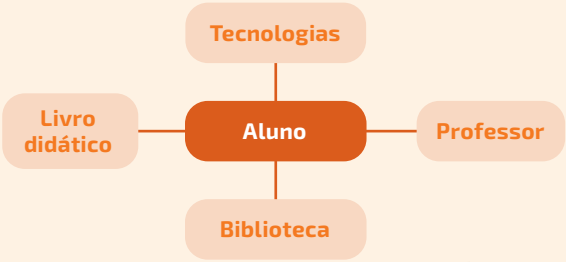
As dez competências gerais propostas pela BNCC estão alinhadas às situações de aprendizagem que podem ser conduzidas por meio da aplicação de estratégias de metodologias ativas, incentivando o protagonismo do aluno.

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 14. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

As competências gerais da BNCC centralizam no aluno o processo de ensino e aprendizagem, colocando-o como produtor efetivo de conhecimento. Assim, as competências visam à mobilização de conhecimentos com o intuito de atender às demandas cotidianas e também aos problemas sociais mais complexos, sempre conferindo ao aluno um papel central e ativo nesse processo.

Ao empregar estratégias de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, os alunos são incentivados a construir o conhecimento de modo integrado às necessidades de seu cotidiano. Nesse processo, é possível agregar o uso de recursos diversos, como o livro didático usado em sala de aula, os livros disponíveis na biblioteca e os recursos provenientes da tecnologia, como o computador, o celular, a internet e as plataformas digitais.



Considerando esse contexto, esta coleção busca explorar diferentes estratégias de metodologias ativas por meio de tarefas que incentivam o protagonismo dos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, encontra-se o destaque **Metodologia ativa,** que explica, de maneira geral, como algumas estratégias podem ser aplicadas em determinados momentos, orientando o professor, sempre que conveniente, sobre a metodologia ativa mais adequada para ser adotada naquele contexto específico.

Estratégias

Design thinking (Pensamento de *design*)

Design thinking (DT) é uma estratégia baseada em empatia, colaboração, criatividade e otimismo, que busca soluções para determinada necessidade por meio de um processo estruturado.

Inspirado na maneira como os *designers* resolvem problemas, o processo do Design thinking parte da compreensão de um problema para um *brainstorming* e, por fim, segue para a criação de soluções inovadoras. Veja a seguir as principais etapas do DT.

EMPATIZAR

Conhecer e compreender a realidade do problema. Podem ocorrer por meio de pesquisas em diversas fontes ou de diálogos com as pessoas envolvidas.

DEFINIR

O grupo deve se unir para compartilhar o que percebeu na etapa da empatia e analisar todos os dados coletados para definir sobre qual aspecto do problema vai se debruçar. Recomenda-se expressar esse desafio por meio de uma pergunta iniciada com "Como podemos...?".

Exemplo: Como podemos conscientizar os moradores do bairro sobre o problema da dengue?

IDEAR

Momento de *brainstorming*. Todos devem se sentir à vontade para sugerir. Após esse processo, o grupo deve refinar as opções, escolhendo as que podem ser aplicadas. Em seguida, devem antecipar as dificuldades de cada uma, até chegar à que será executada. Nessa etapa, o *feedback* do público envolvido é importante.

PROTOTIPAR

Fazer um protótipo é tornar uma ideia tangível, como a primeira versão de algo. Um protótipo pode ser um produto, um processo ou uma experiência. É a proposta do grupo para a solução do problema.

TESTAR

O teste é a parte da implementação e execução da proposta feita pelo grupo. É necessário um plano de ação para aplicá-la. É importante que o grupo acompanhe e esteja atento a possíveis necessidades de modificações no protótipo.

Fonte de pesquisa: ROCHA, Julciane. Design thinking na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Orgs.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

MODELO

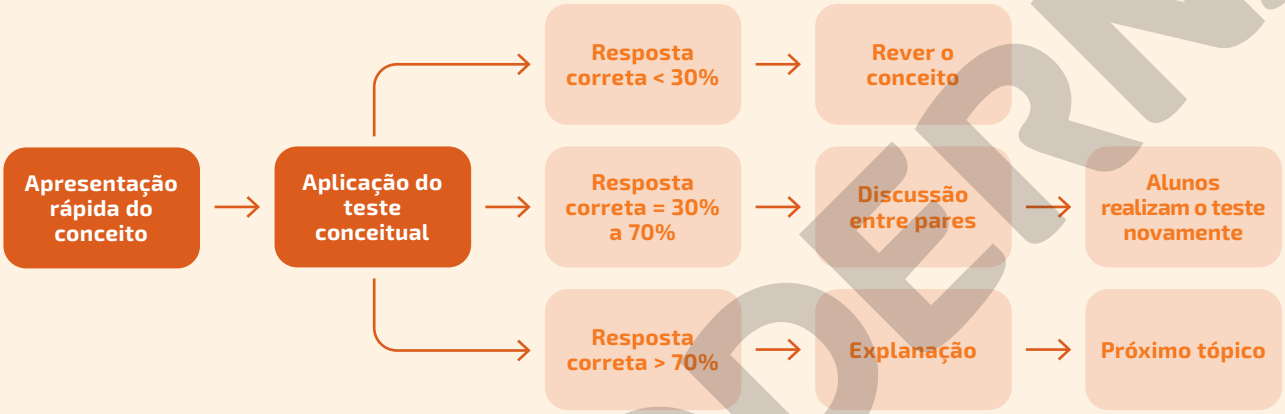
Na educação, a estratégia DT pode ser aplicada tanto em atividades que levem horas para serem resolvidas, como as problematizações de conteúdos em aulas expositivas, quanto em atividades que podem levar semanas ou meses, como as campanhas na escola. Essa metodologia ativa contribui para o desenvolvimento da empatia, da criatividade e da colaboração entre os alunos.

Peer instruction (Abordagem por pares)

A estratégia Peer instruction ou abordagem por pares consiste em uma dinâmica na qual a aprendizagem dos alunos não se baseia somente no estudo individual e na explicação do professor, mas também em auxiliar e ser auxiliado pelos colegas para compreender conceitos.

A estratégia é organizada da seguinte maneira.

- O aluno estuda os conteúdos antes da aula.
- Em sala de aula, o professor faz uma breve exposição do assunto e aplica um teste, preferencialmente oral e com respostas de múltipla escolha.
- Ao fazer a primeira pergunta, o professor deve avaliar as respostas da turma: se mais de 70% dos alunos acertarem a resposta, o professor faz uma breve explanação da resposta correta e dos motivos pelos quais as outras estão erradas e prossegue com o teste. Se menos de 30% dos alunos responderem corretamente, é necessário voltar aos conteúdos e revisá-los de maneira aprofundada. Se a porcentagem de acertos ficar entre 30% e 70%, o professor deve pedir aos alunos que se reúnam em duplas ou grupos para conversar sobre a questão, explicando ao colega o que foi entendido e chegando a um consenso. Ao terminarem a conversa, o professor faz a pergunta novamente, e segue nesse ciclo.



Fonte de pesquisa: FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa.* São Paulo: Saraiva Educação, 2018. p. 46.

Há diversas maneiras de aplicar o teste para os alunos: pode-se indicar alternativas e pedir que levantem as mãos; distribuir cartões coloridos e pedir que os levantem conforme a resposta; registrar em papel ou utilizar aplicativos.

Essa estratégia é válida, por exemplo, para iniciar os estudos sobre o tema e para revisar os conteúdos estudados. A abordagem por pares contribui com a interação, a colaboração e o diálogo entre os alunos.

Gallery walk (Caminhada na galeria)

Gallery walk é uma estratégia que desenvolve a habilidade de síntese e estimula a interação, o trabalho em equipe e a socialização do conhecimento. Nela, os alunos exibem seus trabalhos em cartazes que devem ser afixados em paredes, como obras de arte em uma galeria. Em seguida, a turma circula pela sala, observando os cartazes afixados, debatendo e refletindo sobre o tema proposto.

Há diversas possibilidades de condução dessa estratégia: trabalhos individuais apresentados enquanto a turma percorre a "galeria" em conjunto; circulação livre dos alunos pela "galeria", colando notas adesivas nos cartazes com dúvidas ou sugestões; entre outras.

Essa dinâmica pode ser aplicada na apresentação, revisão ou mesmo na avaliação de conteúdos. Cabe ao professor definir os objetivos e o tema a serem trabalhados, orientando a turma em relação à atividade. Durante o processo, o docente assume o papel de observador, permitindo que os alunos se organizem e intervindo somente se for necessário. Ao final, é importante promover um debate geral com a turma ou fazer uma breve explanação sobre os trabalhos e o processo da Gallery walk.

Sorting strips (Tiras de classificação)

Na estratégia Sorting strips, trechos de informações ou conteúdos são separados em tiras de papel para serem organizados em sequência ou classificados em categorias.

Essa dinâmica auxilia a sistematização da aprendizagem de modo colaborativo, incentivando a troca de ideias entre os alunos e possibilitando a discussão de ideias opostas, complementares ou sequenciais ao conteúdo das tiras.

A estratégia pode ser aplicada para explorar a compreensão de processos, o encadeamento de ideias e o exercício de classificações.

MODERNA

Think-pair-share (Pensar-conversar-compartilhar)

Think-pair-share é uma estratégia de aprendizagem cooperativa que consiste em pensar, individualmente, sobre uma questão ou um problema levantado pelo professor, compartilhar o raciocínio individual com um colega e, em seguida, socializar com um grupo maior os pensamentos e as conclusões aos quais a dupla chegou.

Essa estratégia favorece os alunos que não se sentem à vontade em compartilhar suas opiniões ou seus conhecimentos com a turma ou com um grupo, mas são capazes de conversar com um colega sobre determinada situação antes de se posicionar diante de um grupo maior.

Think

O professor expõe o problema e o aluno reflete individualmente sobre a situação.

Pair

O aluno reúne-se com um colega para trocar percepções sobre a situação.

É interessante que as duplas sejam definidas antes de a questão ser exposta, a fim de que as reflexões dos alunos não sejam interrompidas para que eles encontrem um par.

Share

As duplas se unem em grupos maiores para compartilhar as conclusões a que chegaram após a discussão conjunta. O grupo discute todas as percepções e chega a uma nova síntese das ideias com base na discussão coletiva.

Em outro modelo de socialização, o professor pode pedir a algumas duplas que compartilhem suas conclusões com toda a turma.

ILUSTRAÇÕES: LAÍS GARBELINI

Essa estratégia desenvolve habilidades de oralidade e argumentação, além de incentivar os alunos a ouvir e respeitar diferentes opiniões.

Quick writing (Escrita rápida)

Quick writing é uma estratégia que consiste em escrever uma resposta relacionada a um conteúdo em, no máximo, cinco minutos.

Essa dinâmica desenvolve a fluência na escrita e a capacidade de síntese. A pergunta é feita pelo professor e pode se relacionar tanto aos assuntos estudados quanto à vivência dos alunos. É possível aplicar essa estratégia baseando-se em abordagens como: explicação de conceitos ou vocabulários de um texto; formulação de hipóteses; ou inferências e explanação de conhecimentos prévios.

Avaliação

A etapa escolar do Ensino Médio busca o desenvolvimento **integral** dos jovens alunos. Os objetivos pedagógicos, portanto, de acordo com as orientações da BNCC, devem propiciar o desenvolvimento de **competências** nesses jovens, não apenas no sentido de **saber**, mas principalmente de **saber fazer**. Desse modo, nesta coleção, os alunos são envolvidos em situações de estudo que perpassam suas necessidades e seus interesses, ampliam seus conhecimentos e permitem a mobilização desses conhecimentos visando atender às demandas do mundo onde vivem.

Portanto, a **avaliação das aprendizagens** desses alunos, como parte indissociável do processo de ensino e aprendizagem, deve estar alinhada a esses objetivos na atividade escolar.

A prática avaliativa tem sido cada vez mais reconhecida por sua importância, pois auxilia o trabalho do professor, e por seu caráter legítimo na validação da condução didático-pedagógica. Desse modo, faz-se necessário compreender a essência de algumas modalidades de avaliação e implementá-las de acordo com os objetivos definidos para cada momento do processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação diagnóstica

Toda avaliação tem caráter diagnóstico, pois tende a obter informações sobre a aprendizagem dos alunos. Essa é uma prática muito importante ao iniciar um conteúdo, pois, por meio dela, é possível identificar os conhecimentos prévios de cada um. Desse modo, é possível tomar decisões sobre seu planejamento de ensino, caso seja necessário complementá-lo ou resumi-lo.

Avaliação somativa

Em geral, é aplicada ao final do estudo de um conteúdo e pode valer-se de diferentes tipos de instrumentos. Fornece dados ou informações que sintetizam os avanços das aprendizagens dos alunos em relação a tal conteúdo. Busca, de maneira pontual e conclusiva, sintetizar e registrar os resultados verificados, com finalidade informativa ou classificatória.

Avaliação formativa

É parte integrante de todo o processo de ensino e aprendizagem, pois busca melhorias na atividade em curso. Oferece subsídios que respaldam a interferência no processo de atuação do professor e de aprendizagem dos alunos, com vistas ao seu aprimoramento. Desse modo, permite a retomada e a revisão de conceitos e temas, além do ajuste da prática pedagógica.

A avaliação e o trabalho do professor

Alguns fatores são fundamentais para que a prática avaliativa possa contribuir de modo efetivo com o professor em seu trabalho diário.

A avaliação e a prática pedagógica

É possível observar casos de práticas avaliativas que se limitam, na maioria das vezes, a uma verificação resumida de notas, seguida de progressão e certificação. Essas práticas, em geral, estão relacionadas a encaminha-

MODERNA

mentos pedagógicos em que o professor é um transmissor de conhecimento e os alunos, meros receptores. Por outro lado, em algumas metodologias, nas quais o aluno assume parte importante no processo de construção e ampliação de seu conhecimento, a avaliação preocupa-se mais com "como" o aluno aprende e menos com "o que" ele aprende. Portanto, o acompanhamento das aprendizagens dos alunos está intrinsicamente relacionado à **opção teórico-metodológica** escolhida, ou seja, o modo como se avalia diz muito sobre o modo como se ensina, e vice-versa.

Uma prática constante

A avaliação não deve ser estanque ou limitada a determinados momentos. Uma prova ao final do estudo de um conteúdo não é suficiente para obter todas as informações necessárias sobre a aprendizagem de cada aluno. Desse modo, a **diversificação** de dinâmicas e instrumentos de avaliação, assim como o registro das informações que elas fornecem sobre o processo de aprendizagem, devem ser analisados e confrontados constantemente, a fim de embasar o prosseguimento do trabalho do professor.

Há diferentes maneiras de **registrar** a trajetória dos alunos em relação à sua aprendizagem. Muitos professores fazem relatórios de observação diária, constroem um portfólio ou anotam comentários em um diário de aulas. Esses registros podem conter descrições ou conceitos que indiquem o progresso ou as dificuldades dos alunos de maneira individual, em pequenos grupos ou de toda a turma. Com base neles, é possível decidir sobre a retomada de explicações, sugestões de leituras ou atividades paralelas, que auxiliem o acompanhamento dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Esse **aspecto qualitativo** da prática avaliativa exige do professor uma postura ativa, reflexiva e reguladora em relação ao processo de ensino e aprendizagem. E, portanto, é inevitável que a avaliação seja **constante**, estando inserida em diversos momentos desse processo.

A seguir, apresentamos um modelo de **relatório** que pode auxiliar no acompanhamento da aprendizagem dos alunos. O modelo traz itens de acompanhamento diferentes em cada linha a fim de exemplificar a variação a ser aplicada nesse documento. É possível considerar os objetivos de aprendizagem do estudo de cada tema ou outros objetivos propostos em seus planejamentos. Também é possível acompanhar o desempenho dos alunos em relação às habilidades a serem desenvolvidas. Outra alternativa é registrar os indicadores de aprendizagem dos alunos obtidos por meio de uma determinada tarefa que pode ser desenvolvida individualmente ou em grupos. O campo de observações é muito importante para que comentários e lembretes de detalhes sejam registrados, auxiliando nas futuras tomadas de decisões com base nesses relatórios.

Lembramos que esse relatório figura como modelo que pode (e deve) ser adaptado de acordo com as necessidades e realidade de trabalho de cada turma ou escola.

Modelo de relatório de acompanhamento da aprendizagem

MODELO

NOME DO ALUNO					
Componente curricular		Ano		Turma	
Objetivos/habilidades ou atividades propostas	Período letivo do registro			Apresentou progressos durante o período letivo indicado?	
	NÃO consegue executar	Executa com DIFICULDADE	Executa com FACILIDADE	SIM	NÃO
Reconhecer algumas unidades de medida de base do Sistema Internacional de Unidades (SI).					
(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.					
Síntese conclusiva da utilização de diferentes unidades de medida de base pertencentes ou não ao Sistema Internacional de Unidades (SI).					
Observações					

Instrumentos de avaliação diversificados

Independentemente do instrumento de avaliação que o professor decida utilizar, é fundamental que os objetivos a serem atingidos estejam bem definidos. Obter **indicadores** da aprendizagem dos alunos deve ser a essência de cada instrumento de avaliação elaborado pelo professor. Portanto, provas objetivas ou discursivas, seminários, produções de textos, sínteses de pesquisas, debates, dramatizações, produção de esquemas ou desenhos e trabalhos em grupo ou individuais estão entre as variações possíveis.

Quanto ao professor, é preciso esclarecer os **objetivos** de ensino a serem investigados em relação à aprendizagem dos alunos. Já os alunos devem receber, por parte do professor, toda e qualquer **orientação** possível sobre a dinâmica proposta, de modo que estejam conscientes a respeito de como e quando serão avaliados.

Mas, por que a avaliação deve ter essa **diversificação**? Porque os alunos são diferentes, aprendem de maneiras distintas e expressam-se também de modos diversos. Alguns têm mais facilidade em aprender ouvindo explicações, enquanto outros precisam ler textos, resumos ou esquemas. Há aqueles que demonstram o que sabem por meio de conversas ou debates, mas apresentam dificuldade para se expressar por meio da escrita. Enquanto alguns têm facilidade em compreender raciocínios lógico-matemáticos, outros têm destreza na produção de textos.

A variedade de estratégias, como dinâmicas em grupo ou individuais, ou de participação anônima, por exemplo, também são recursos que auxiliam no trabalho com grupos de **diferentes perfis**. O incentivo à socialização e à junção de grupos heterogêneos, a relevância dos temas de estudos e o envolvimento dos jovens também são fatores que podem tornar eficaz o trabalho de professores e alunos no processo de ensinar, aprender e avaliar.

A avaliação nesta coleção

Nesta coleção, a opção por um trabalho que destaque o protagonismo dos alunos do Ensino Médio apresenta **oportunidades constantes** de avaliação do processo de ensino e aprendizagem, privilegiando **dinâmicas diversificadas**, em especial aquelas fundamentadas em **metodologias ativas**. Para tanto, no trabalho com as diferentes unidades temáticas, são propostas dinâmicas e atividades variadas, com a exploração de diversos recursos (textuais e imagéticos), ocasiões que permitem o acompanhamento do professor em relação à aprendizagem dos alunos.

Também são disponibilizadas, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, diversas orientações com dicas pontuais, alinhadas aos objetivos de ensino e a uma avaliação formativa. Destacamos o boxe **Sugestão de avaliação**, que apresenta, em geral, orientações específicas para os momentos de avaliação, com sugestões de como obter informações a respeito da aprendizagem dos alunos, e as possibilidades de escolher o melhor procedimento a ser tomado.

A **autoavaliação** também é uma ferramenta que colabora coerentemente com o propósito de que os alunos assumam o protagonismo no processo de formação do seu conhecimento. Essa proposta de reflexão a respeito de sua aprendizagem, participação, limitações e potencialidades deve ser mediada pelo professor como um processo construtivo e positivo, para que não se encaminhe de modo depreciativo e interfira na autoestima dos alunos. Ao contrário, deve ser encarada e assimilada como um procedimento de verificação dos caminhos possíveis para superar os diferentes desafios que a vida lhes colocará.

Em se tratando de desafios, esta coleção também se preocupa em preparar os alunos para os **exames de larga escala**. Para isso, a condução dos estudos é norteada pelo objetivo de desenvolver **habilidades** e **competências** que permitam o embasamento em conhecimentos científicos, o exercício da criatividade, a resolução de problemas com base em saberes interdisciplinares e transdisciplinares, a valorização da cultura em suas diversas expressões, expressar-se e argumentar por meio de diferentes linguagens, inclusive a tecnológica e a digital, agindo com respeito a si mesmo e aos outros, sempre com responsabilidade.

A BNCC e a coleção

Cada volume desta coleção foi organizado e desenvolvido de maneira a contemplar as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais elencados na BNCC, estabelecendo, sempre que possível, conexões com outras áreas do conhecimento. É possível perceber tais relações na maneira como os temas foram estruturados e abordados, nas questões-teoria ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, nas seções especiais e nas tarefas propostas no decorrer do livro do aluno. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor** há o aporte para o desenvolvimento do trabalho com esses objetos.

Sugestão de cronograma

Apresentamos, a seguir, uma proposta de cronograma para elaborar o planejamento deste volume. No entanto, cabe ao professor a decisão de como utilizar o livro didático como apoio pedagógico, seguindo critérios de seleção dos temas e levando em consideração diversos fatores, como o projeto pedagógico da escola, as condições da turma, a carga horária e a grade

MODERNA

curricular. Da maneira como está estruturada, esta coleção permite que o professor tenha autonomia pedagógica para decidir sobre quais temas abordar ou deixar de abordar, no todo ou em partes; sobre seguir a ordem apresentada ou reagrupar os temas de acordo com os critérios organizacionais escolhidos e, com isso, estabelecer as conexões entre os temas dentro desses critérios.

No caso de um cronograma bimestral, considerando que a duração do curso seja de 12 bimestres, este volume pode ser trabalhado, em sua totalidade, em 2 bimestres, ou seja, aproximadamente 16 semanas.

Sugestão de cronograma bimestral			
1º bimestre		**2º bimestre**	
1ª semana	Tema 1	9ª semana	Temas 7 e 8
2ª semana		10ª semana	
3ª semana	Temas 2 e 3	11ª semana	
4ª semana		12ª semana	Temas 9 e 10
5ª semana		13ª semana	Temas 11 e 12
6ª semana	Temas 4 e 5	14ª semana	
7ª semana		15ª semana	Temas 13 e 14
8ª semana	Tema 6	16ª semana	

O quadro a seguir apresenta os principais conceitos, as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais trabalhados neste volume, organizados de acordo com cada tema, especificando, também, as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, quando estas forem abordadas.

Neste quadro, por exemplo:
CG1 indica a **Competência geral 1**.
CE3MAT indica a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.
CE3CNT indica a **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Tema	Principais conceitos	Habilidades	Competências gerais; competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Temas contemporâneos transversais
1	• Geometria analítica • Coordenadas na reta e no plano • Distância entre dois pontos • Coordenadas do ponto médio de um segmento	• EM13MAT315 • EM13MAT405	• CG1 • CG4 • CE3MAT • CE4MAT • CE3CNT	
2	• Matrizes • Igualdade de matrizes • Matriz transposta e matriz simétrica		• CE1MAT	• Ciência e tecnologia

3	• Adição e subtração de matrizes • Multiplicação de um número real por uma matriz • Multiplicação de matrizes		• CG2	• Educação financeira • Trabalho
4	• Matriz inversa • Equações envolvendo matrizes • Determinante de uma matriz • Teorema de Jacobi e Teorema de Binet		• CG4	
5	• Uma aplicação de matrizes		• CE3CNT	• Educação alimentar e nutricional • Saúde
6	• Condição de alinhamento de três pontos • Área da região determinada por um triângulo • Equação da reta	• EM13MAT315 • EM13MAT405	• CE3MAT • CE4MAT • CE3CNT	• Ciência e tecnologia
7	• Equação linear • Sistema linear • Solução de um sistema linear	• EM13MAT301	• CE3MAT • CE2CNT	• Ciência e tecnologia • Educação alimentar e nutricional • Educação financeira • Saúde
8	• Matrizes associadas a um sistema linear • Classificação de um sistema linear • Escalonamento de um sistema linear • Discussão de um sistema linear	• EM13MAT301	• CE3MAT • CE1CNT • CE2CNT	• Educação alimentar e nutricional
9	• Circunferência			• Ciência e tecnologia
10	• Circunferência e Arte		• CG3	
11	• Cônicas • Elipse • Hipérbole • Parábola		• CG4 • CE3CNT	
12	• A elipse e o cometa Halley		• CE1MAT • CE2CNT	
13	• Transformações geométricas • Reflexão • Rotação • Translação • Composição de transformações • Homotetia	• EM13MAT105	• CE1MAT	
14	• Transformações geométricas e Arte		• CG3	• Diversidade cultural

MODERNA

Objetivos, comentários e sugestões

Nesta seção do **Suplemento para o professor**, para cada tema que compõe o livro do aluno, são apresentados objetivos, comentários e sugestões, oferecendo ao professor subsídios para seu trabalho em sala de aula. Nos comentários de cada tema, são abordados, inicialmente, os objetivos específicos e questões relativas à organização do conteúdo. Há sugestões de condução e tarefas para a abordagem inicial, resgatando os conhecimentos prévios dos alunos. Essas sugestões estão relacionadas às páginas iniciais do tema, complementando a situação nelas tratada. No entanto, existem casos em que é sugerida outra abordagem inicial para o conteúdo, oferecendo a você, professor, novos elementos, de modo que possa escolher essas situações e adaptá-las segundo sua realidade.

Na sequência, encontram-se comentários e sugestões a respeito de algumas seções e tarefas que envolvem o tema, por exemplo, há comentários adicionais sobre as páginas de abertura, sugestões de condução, tarefas que podem ser desenvolvidas em sala de aula e informações complementares ao livro do aluno. Também são apresentadas demonstrações, sugestões de condução para a resolução de algumas tarefas, comentários e informações, entre outros recursos.

1 Coordenadas e distâncias

Objetivos específicos

- Reconhecer coordenadas na reta e no plano.
- Calcular a distância entre dois pontos na reta e no plano.
- Determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento.

Esse tema aborda conteúdos matemáticos de modo a promover a articulação entre as unidades temáticas Geometria e Álgebra, por meio do estudo da Geometria analítica. Os principais conteúdos abordados são: coordenadas na reta, coordenadas no plano, distância entre dois pontos, coordenadas do ponto médio de um segmento e baricentro de um triângulo, além de retomar outros conceitos matemáticos, como coordenadas cartesianas, pontos notáveis no triângulo, Teorema de Pitágoras e módulo de um número real.

Sugestão de avaliação

Ao iniciar o tema, realize com os alunos uma tarefa cujo objetivo seja tratar o conceito intuitivo de distância entre pontos. Reproduza e entregue a eles uma malha pontilhada e peça que determinem a distância entre dois pontos quaisquer da malha, utilizando como unidade de medida a distância d entre dois pontos consecutivos, horizontal ou verticalmente.

Oriente os alunos a considerar essa distância constante em toda a malha.

Como exemplo, proponha aos alunos uma tarefa para calcular a distância entre os pontos A e B. Para isso, considere um ponto C de maneira que ABC seja um triângulo retângulo em C. Mostre a eles que há duas possibilidades para posicionar o ponto C; em qualquer caso, o raciocínio será análogo.

Páginas 10 e 11 Caça ao tesouro

- Essas páginas de abertura relacionam conceitos de Geometria analítica com a investigação sobre a provável localização de um tesouro. Nessa abordagem, de maneira intuitiva, a ideia de coordenadas de um ponto qualquer é relacionada às instruções para se chegar a um tesouro. Peça aos alunos que leiam o texto e respondam às questões propostas, estipulando um tempo (por exemplo, 15 minutos). Em seguida, organize um debate com a finalidade de observar se eles assimilaram as informações necessárias para compreender o texto.
- Verifique se os alunos são capazes de perceber as ideias de coordenadas no plano e de distância entre dois pontos no espaço; no caso, a localização do tesouro a partir da distância entre pontos de referência.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas de abertura, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor.**

Sala dos professores

Esse tema possibilita um trabalho conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **História**. Sugira ao professor desse componente que desenvolva tarefas sobre os contextos históricos em que a ação dos piratas teve grande interferência. Uma possível abordagem é a chamada Idade de Ouro da Pirataria, compreendida no período de 1650 a 1730, principalmente na América Central, com grande concentração nas ilhas do Caribe.

Explique que o Caribe tornou-se alvo de piratas, corsários e bucaneiros, por ser importante rota de navios carregados de riquezas exploradas na América e que eram levadas para a Europa. Soma-se a isso o fato de serem trechos isolados e, por isso, favoráveis a saques, ataques surpresas e de difícil reação.

MODERNA

Páginas 12 a 17

BNCC Ao relacionar o tema à história do matemático René Descartes, os alunos são levados a utilizar os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar aspectos da realidade, conforme sugere a **Competência geral 1** da BNCC.

O problema **R2** da seção **Exercícios e problemas** da página **16** aborda a habilidade **EM13MAT315**, ao favorecer a organização do pensamento para a construção de um algoritmo e sua organização em um fluxograma.

- No problema **R2**, se achar conveniente, explique aos alunos que, segundo a normativa ISO 5807, em um fluxograma podem ser utilizados vários outros símbolos cujos significados podem ser consultados no *site* disponível em: <http://www.cantareira.br/thesis2/ed_1/1_navarro.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Páginas 18 e 19

- Na tarefa **11**, é possível trabalhar com a importância do rádio no Brasil. Questione os alunos se eles ouvem rádio e quais meios utilizam para isso. Explique que o rádio é um dos meios de comunicação mais abrangentes e antigos em todo o mundo e teve grande contribuição como meio popular de comunicação, de divulgação, de informação e entretenimento. Vale ressaltar que, mesmo com o advento das novas tecnologias, o rádio ainda é um meio muito presente nas casas dos brasileiros, por se tratar de um veículo democrático e de fácil acesso. Seja no aparelho, no celular, no carro, seja até na internet, é possível estar sempre informado e aproveitar as novidades também no mundo da música. Além disso, o rádio é considerado uma fonte confiável de informação, cuja transmissão de notícias acontece em linguagem simples e de fácil entendimento.

Sala dos professores

A tarefa **5**, da página **18**, apresenta uma relação com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Geografia**. Ela permite a melhor exploração de conceitos referentes às coordenadas geográficas, especificamente tomando como base os meridianos e os paralelos, em interface com as coordenadas cartesianas, cujo princípio de localização é semelhante.

Além disso, as tarefas **11** e **16** possibilitam um trabalho conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o componente curricular **Física**. Uma sugestão é estudar a importância das localizações exatas das antenas de transmissão de rádio e TV. O professor de **Física** pode abordar questões relacionadas ao comprimento, transmissão e sinais de ondas desses meios de comunicação.

BNCC As tarefas **12** e **16** abordam aspectos da **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

Páginas 20 e 21 Acessando tecnologias

- O trabalho com a seção **Acessando tecnologias** poderá ser realizado no laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se de que todos os computadores possuam o *software* VisualG instalado, por meio do qual a tarefa será realizada. O *download* pode ser feito gratuitamente no *site* a seguir. Disponível em: <http://visualg3.com.br>. Acesso em: 12 jun. 2020.

  A fim de que os alunos trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitá-lo no *software* e atribuir valores às variáveis definidas.

- Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e atente-se ao fato de que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

- Ao trabalhar com essa seção, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Para isso, utilize o algoritmo apresentado na seção ou até mesmo proponha outro problema. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- As questões dessa seção permitem o desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um algoritmo em linguagem de programação que possibilita obter a distância entre dois pontos, conhecendo suas coordenadas, faz com que os alunos notem os benefícios que tal linguagem proporciona. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

Agora é com você! **Resoluções**

1 A abscissa do ponto *B*.

2 Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "distancia_ponto_origem"
2  Var
3  x_a, y, x_b, dist: real
4  Inicio
5  escreva("Digite a distância entre os pontos
   A e B: ")
6  leia(dist)
7  escreva("Digite a abscissa do ponto A: ")
8  leia(x_a)
9  escreva("Digite a abscissa do ponto B: ")
10 leia(x_b)
11 y <- raizq(quad(dist)-quad(x_b-x_a))/4
12 escreva("A ordenada do ponto A é ",y,
   " e a ordenada do ponto B é ",5*y)
13 Fimalgoritmo
```

BNCC

A tarefa proposta no boxe **Agora é com você!** contempla as habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405** ao possibilitar investigar um algoritmo que resolve um problema e ao utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. Desse modo, abordam-se as **Competências específicas 3** e **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Além disso, são mobilizados aspectos da **Competência geral 4** da BNCC ao utilizar diferentes linguagens (oral, escrita e digital) que permitem aos alunos se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

Páginas 22 e 23

- Ao trabalhar o conteúdo dessas páginas, verifique a possibilidade de os alunos observarem na prática que o baricentro de um triângulo é seu ponto de equilíbrio. Para isso, distribua a eles pedaços de cartolina. Peça-lhes que construam um triângulo qualquer, tracem as medianas e recortem-no. O ponto de encontro das medianas corresponde ao baricentro do triângulo. Para equilibrá-lo, coloque linha em uma agulha, dando um nó na ponta da linha, e atravesse a agulha no baricentro.

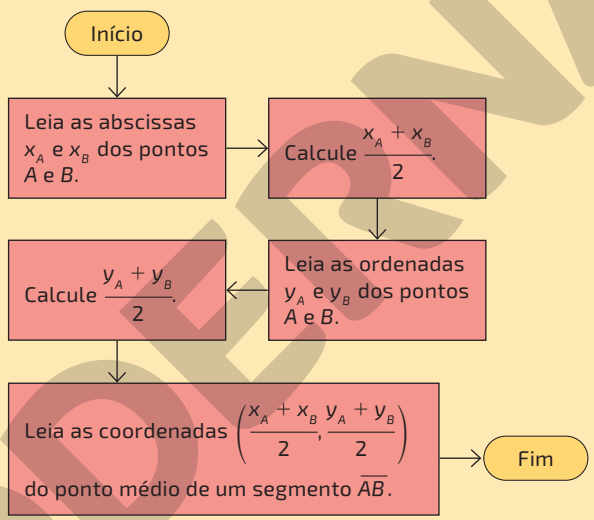
Resoluções e comentários

A Algoritmo que possibilita determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$.

Início

1. Leia as abscissas x_A e x_B dos pontos A e B.
2. Calcule $\frac{x_A + x_B}{2}$.
3. Leia as ordenadas Y_A e Y_B dos pontos A e B.
4. Calcule $\frac{y_A + y_B}{2}$.
5. Leia as coordenadas $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$.

Fim



Organizando o algoritmo em um fluxograma, temos:

B Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "coordenadas_ponto_médio_
   segmento AB"
2  Var
3  xa, ya, xb, yb, xm, ym: real
4  Inicio
5  escreva("Digite a abscissa do ponto A: ")
6  leia(xa)
7  escreva("Digite a abscissa do ponto B: ")
8  leia(xb)
9  xm <- (xa+xb)/2
10 escreva("Digite a ordenada do ponto A: ")
11 leia(ya)
12 escreva("Digite a ordenada do ponto B: ")
13 leia(yb)
14 ym <- (ya+yb)/2
15 escreva("A abscissa do ponto médio é: ",xm)
16 escreva("A ordenada do ponto médio é: ",ym)
17 Fimalgoritmo
```

MODERNA

Páginas 24 e 25 Resolvendo por etapas

- Na seção **Resolvendo por etapas**, apresenta-se um encaminhamento para a resolução de um problema que visa determinar um possível ponto em que um objeto será escondido em uma gincana escolar. Oriente os alunos a se inteirar da situação apresentada e compreender cada uma das etapas sugeridas para a resolução do problema, anotando possíveis dúvidas.
- Esse tipo de abordagem tem relação com ferramentas e hábitos que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Caso considere viável, utilize a metodologia ativa **Design thinking** a fim de propor outro problema semelhante aos alunos, alterando, por exemplo, o formato, o tamanho ou a posição das figuras, para que eles executem as etapas da tarefa apresentada nessa seção. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 26 e 27

- Para auxiliar na resolução das tarefas, oriente os alunos a fazer anotações, destacar os dados relevantes em cada problema e representar os pontos no plano nos problemas sem imagens.

- O trabalho com a seção **Exercícios e problemas resolvidos** pode ser orientado pela metodologia ativa **Think-pair-share**. Proponha aos alunos que resolvam as tarefas e, em seguida, compartilhem suas resoluções com os colegas. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.
- Ao final do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite aos alunos que expliquem de que modo o estudo de Coordenadas e distâncias pode contribuir para sua formação. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

2 Matrizes

Objetivos específicos

- Identificar os mais variados tipos de matrizes.
- Reconhecer e utilizar a linguagem matricial.
- Verificar possíveis regularidades, generalizá-las e aplicá-las em casos particulares.

Nesse tema, é apresentado o conceito de matriz, a princípio de modo intuitivo, por meio de um exemplo prático, comparando-a a uma tabela, para gradativamente proceder a uma conceituação mais formal. Ao longo da exposição, as nomenclaturas e as notações tradicionais para matrizes e seus elementos são introduzidas uma a uma, com explicações e exemplos. Em seguida, temos as classificações, especificando o que são matrizes quadradas, matrizes diagonais, matrizes identidades e os demais casos especiais de matrizes mais recorrentes e de mais interesse nos estudos em geral. Além disso, é abordada a igualdade entre matrizes, bem como a operação de transposição de matrizes com a ideia de matriz simétrica. De modo geral, busca-se relacionar o estudo de matrizes com a resolução de problemas das mais variadas áreas do conhecimento, inclusive da própria Matemática.

O estudo dos assuntos desse tema também leva os alunos a perceber as conveniências de organização de dados que as matrizes proporcionam. Para tanto, elas são associadas a planilhas de dados, à tabela periódica, a *pixels* de um monitor, entre outras estruturas cujos elementos possam ser dispostos em linhas e colunas ordenadas.

Sugestão de avaliação

Veja a seguir uma tarefa que tem como objetivo externar os conhecimentos prévios dos alunos sobre a localização de um elemento em uma tabela ou matriz, por meio da correspondência entre a linha e a coluna onde se localiza tal elemento.

Se houver possibilidade, leve os alunos ao laboratório de informática da escola para que pesquisem sobre o jogo de raciocínio lógico chamado Sudoku. Deixe que eles próprios conheçam a história e descubram as regras do jogo. Se julgar necessário, auxilie-os.

O modelo mais conhecido desse jogo é constituído por 9 matrizes do tipo 3×3, unidas de maneira que formam uma matriz maior, 9×9. O objetivo é, a partir de algumas células preenchidas com dígitos que variam de 1 a 9, completar toda a matriz 9×9 para que, em cada linha e coluna da matriz maior e dentro de cada matriz 3×3, apareça apenas uma ocorrência de cada dígito.

Proponha aos alunos que joguem o Sudoku a seguir.

MODERNA

9	4		1		2		5	8
6				5				4
		2	4		3	1		
	2						6	
5		8		2		4		1
	6						8	
		1	6		8	7		
7				4				3
4	3		5		9		1	2

Resolução e comentários

9	4	7	1	6	2	3	5	8
6	1	3	8	5	7	9	2	4
8	5	2	4	9	3	1	7	6
1	2	9	3	8	4	5	6	7
5	7	8	9	2	6	4	3	1
3	6	4	7	1	5	2	8	9
2	9	1	6	3	8	7	4	5
7	8	5	2	4	1	6	9	3
4	3	6	5	7	9	8	1	2

Diga a eles que, em uma matriz, por definição, as filas horizontais são chamadas linhas e ficam dispostas em ordem crescente, de cima para baixo. Já as filas verticais, chamadas colunas, são dispostas da esquerda para a direita.

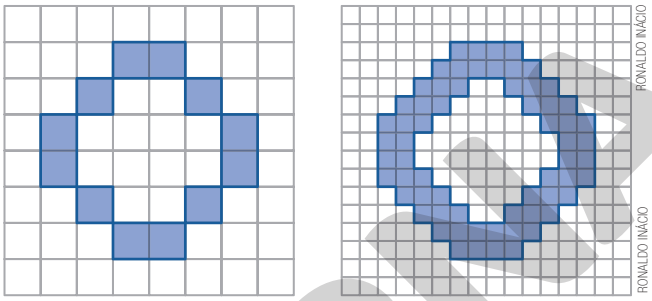
É importante que os alunos percebam que toda célula tem um "endereço", o qual é determinado pela linha e pela coluna em que se encontra, respectivamente.

No Sudoku, por exemplo, na célula cujo endereço é a 5ª linha e a 7ª coluna, temos o dígito 4. Assim, para que esses conceitos possam ser construídos de maneira mais efetiva, peça aos alunos que determinem o endereço de cada uma das células que contêm o dígito 5, por exemplo.

Após terem encontrado o endereço dos quatro algarismos 5 da matriz e realizado o jogo, dê continuidade ao estudo do tema. Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 28 e 29 Quantos *pixels*?

- As páginas de abertura tratam da resolução de imagens em telas de dispositivos eletrônicos. Considerando como temos nos acostumado com os avanços tecnológicos e a popularização da tecnologia digital nos últimos anos, é explicado o que são os *pixels*, que compõem uma imagem em dispositivos eletrônicos. Antes de iniciar o trabalho com essas páginas, mostre aos alunos as duas figuras a seguir, a fim de que o texto se torne mais significativo.



Agora, faça as seguintes perguntas à turma.

- Quais semelhanças e diferenças podem ser observadas nessas figuras?
- O que vocês acham que essas figuras representam?

Depois, diga aos alunos que é semelhante a essa maneira que as imagens digitais são formadas, e cada "quadradinho" representa um *pixel*. As imagens têm melhor ou pior definição dependendo da quantidade de *pixels*.

Solicite aos alunos que leiam o texto e respondam às questões propostas nessas páginas. Em seguida, promova uma conversa, abrindo espaço para comentários sobre os conhecimentos prévios relacionados ou não ao texto, pois, na era digital em que vivemos, a maioria deles já ouviu falar em *pixel*, *megapixel*, resolução de imagem, entre outros termos.

Verifique se os alunos percebem que, tanto no sistema RGB (*red*, *green* e *blue*) como no de escala cinza, a organização dos *pixels* em linhas e colunas é o que forma a imagem. Verifique também se eles compreendem como representar as cores por meio de ternas numéricas e que a disposição dos números, no sistema RGB, interfere na cor obtida – por exemplo, uma cor representada por (25, 113, 249) é diferente da cor representada por (249, 113, 25).

É importante que os alunos percebam que a matriz formada pelos *pixels* não apresenta número algum, mas sim quadradinhos com a combinação das cores vermelha, verde e azul que formam a imagem, dispostos como se fossem os elementos da matriz.

Para complementar as informações, diga aos alunos que a primeira imagem digital foi feita pelo norte-americano Russell Kirsch, em 1957, no National Bureau of Standards (NBS, atualmente conhecido por National Institute of Standards and Technology, ou NIST).

MODELO

REPRODUÇÃO – INSTITUTO NACIONAL DE PADRÕES E TECNOLOGIA/GAITHERSBURG, EUA

Primeira imagem digital, de Russell Kirsch, feita em 1957.

Kirsch desenvolveu um escâner com tambor rotativo, por meio do qual digitalizou uma foto de seu filho Walden, de apenas três meses. A foto, em preto e branco, tinha 176 *pixels*, bem distante da resolução das câmeras fotográficas digitais utilizadas atualmente. No entanto, essa imagem é considerada precursora da manipulação digital. Além disso, no ano de 2003, editores da revista norte-americana Life elaboraram uma seleção com algumas das imagens mais importantes do século XX, em que a foto de Walden foi escolhida para estar entre as "100 fotografias que mudaram o mundo".

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- O assunto dessas páginas de abertura possibilita que os alunos entrem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC

O conteúdo abordado nas páginas de abertura permite estabelecer conexões com o tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**. Nelas, trabalha-se com termos técnicos frequentemente utilizados no cotidiano moderno da humanidade. Além disso, identificar a relação entre imagens digitais e matrizes proporciona um conhecimento extra sobre o funcionamento das tecnologias contemporâneas, despertando a percepção quanto às evoluções de sistemas de linguagem e de codificação na implementação de recursos em dispositivos eletrônicos.

A utilização da Matemática como estratégia para a interpretação de situações tecnológicas vai ao encontro da **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Página 33

Sala dos professores

A tarefa **4** permite um trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Química**. Nessa tarefa, como a intenção é explorar o posicionamento dos elementos, e não os conceitos químicos, a tabela periódica que aparece no livro está em menor escala. Leve à sala de aula, ou peça aos alunos, uma tabela periódica, para que todos possam observá-la melhor. Verifique a possibilidade de apresentar a eles mais informações sobre a tabela periódica, em especial no que diz respeito à sua organização, de modo a compará-la com a formação de uma matriz.

Páginas 35 a 37

- Ao mostrar aos alunos o que é igualdade de matrizes, explique-lhes que a ordem das matrizes iguais deve ser a mesma. Assim, por exemplo, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ao resolver a tarefa **9**, diga aos alunos que uma matriz pode ter mais de uma classificação, pois alguns tipos são um caso particular de outro. Por exemplo, a matriz identidade é também quadrada.
- No item **a** da tarefa **14**, caso os alunos não compreendam o porquê os elementos da diagonal principal são iguais a zero, explique-lhes que esses elementos, em que $i = j$, correspondem ao percurso de uma cidade até ela mesma.

- Ao fim do trabalho com o tema, verifique a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos. Assim, oriente-os a refletir sobre as dificuldades que eventualmente encontraram, como em determinar ordem de matrizes ou a posição de elementos, ou, ainda, em compreender alguma classificação ou operação que não tenha ficado totalmente clara. Proponha a eles que pensem em outras situações (da ciência, da tecnologia, do mundo profissional ou mesmo de suas rotinas) em que seja possível perceber que matrizes são indispensáveis ou que pelo menos podem ser úteis na tarefa desenvolvida, seja para planejamento, seja em nível operacional. No final da conversa, solicite aos alunos que registrem, em não mais do que 5 minutos, suas conclusões a respeito de todo o tema.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

3 Operações com matrizes

Objetivos específicos

- Realizar operações envolvendo matrizes.
- Resolver e elaborar problema envolvendo operações com matrizes.

Esse tema aborda operações com matrizes, sendo seus principais conteúdos estudados a adição e a subtração de matrizes, as propriedades da adição de matrizes, a multiplicação de um número real por uma matriz e a multiplicação de matrizes.

Páginas 38 e 39 8 fatias de empreendedorismo

- Nessas páginas são apresentadas informações sobre o empreendedorismo, e também algumas ações necessárias para obter sucesso nesse ramo.

  Aproveite o momento e proponha uma reflexão sobre o papel dos jovens empreendedores no mercado de trabalho, alertando-os para a importância de reconhecer suas potencialidades, identificar perspectivas e possibilidades, construir aspirações e metas de formação, enfatizar a inserção profissional presente e/ou futura e desenvolver uma postura empreendedora para transitar no mundo do trabalho e em outros setores da sociedade. Caso julgue pertinente, leve para a sala de aula trechos do vídeo Empreendedorismo: uma forma de ser, de Fernando Dolabela. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=B24C2wfYajl>. Acesso em: 18 jun. 2020.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O assunto dessas páginas de abertura possibilita o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Trabalho** e **Educação financeira**. Questione os alunos sobre a necessidade do controle de gastos, do planejamento orçamentário e da boa administração de recursos. Além disso, converse a respeito da importância de estratégias empreendedoras, entre elas criatividade, inovação, organização, planejamento, responsabilidade, liderança, colaboração, visão de futuro, assunção de riscos, resiliência e curiosidade científica. Explique que o empreendedorismo é uma competência essencial no desenvolvimento pessoal, na cidadania ativa, na inclusão social e na empregabilidade.

Páginas 40 e 41

- Se possível, converse com os alunos sobre outras conquistas femininas no Brasil, que foram importantes marcos históricos. Diga, por exemplo, que em 1827 as meninas foram liberadas para frequentar a escola. Já em 1988, a Constituição Brasileira passou a reconhecer as mulheres como iguais aos homens, isto é, com os mesmos direitos. Diga, também, que algumas das conquistas recentes se deram em 2006, quando foi sancionada a Lei Maria da Penha, em 2015, com a Lei do feminicídio, e em 2018, quando a importunação sexual feminina passou a ser considerada crime. Questione os alunos sobre o que eles consideram que ainda deve ser conquistado pelas mulheres, ou seja, quais direitos, embora conquistados legalmente, ainda não são praticados no dia a dia. Para mais detalhes e descrição de outras conquistas femininas, acesse o *site* disponível em: <https://nossacausa.com/conquistas-do-feminismo-no-brasil/>. Acesso em: 18 jun. 2020.
- Antes de responder à pergunta apresentada na lateral direita da página **41**, peça aos alunos que escrevam duas matrizes de mesma ordem, A e B, e calculem $A - B$ e $B - A$, comparando os resultados. Verifique se eles percebem que as matrizes resultantes são opostas. Se tiverem alguma dificuldade, peça a eles que escrevam outras duas matrizes e repitam os procedimentos a fim de constatarem essa regularidade. Complemente a questão propondo a seguinte pergunta:

  Quando essa igualdade é verdadeira?

  Espera-se que a resposta seja quando $A = B$. Esse tipo de tarefa desenvolve a capacidade de investigação e estimula a formulação de hipóteses.

Página 42

- Com relação às propriedades da soma de matrizes exploradas na tarefa **7**, verifique a possibilidade de apresentá-las aos alunos, conforme segue. Esse tipo de tarefa promove a compreensão de conjecturas por meio de relações e propriedades.

  › $A + B = B + A$

  Dadas as matrizes $A_{2\times 2}$ e $B_{2\times 2}$, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix} = B + A$$

comutatividade da soma de números reais

MONITORIA

› $(A+B)+C=A+(B+C)$

Dadas as matrizes $A_{2\times2}$, $B_{2\times2}$ e $C_{2\times2}$, então:

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(a_{11}+b_{11})+c_{11} & (a_{12}+b_{12})+c_{12}\\ (a_{21}+b_{21})+c_{21} & (a_{22}+b_{22})+c_{22}\end{bmatrix}\overset{=}{\downarrow}$$

associatividade de soma de números reais

$$=\begin{bmatrix}a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12})\\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22})\end{bmatrix}=A+(B+C)$$

› $A+0=A$

Dadas as matrizes $A_{2\times2}$ e $0_{2\times2}$, então:

$$A+0=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}+0 & a_{12}+0\\ a_{21}+0 & a_{22}+0\end{bmatrix}\overset{=}{\downarrow}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=A$$

propriedade do elemento neutro da soma de números reais

› $A+(-A)=0$

Dadas as matrizes $A_{2\times2}$ e $-A_{2\times2}$, então:

$$A+(-A)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & -a_{22}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}+(-a_{11}) & a_{12}+(-a_{12})\\ a_{21}+(-a_{21}) & a_{22}+(-a_{22})\end{bmatrix}\overset{=}{\downarrow}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0_{2\times2}$$

propriedade do elemento oposto da soma de números reais

- Para desenvolver as tarefas dessa página, utilize a metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 45 Acessando tecnologias

- O Calc é uma planilha eletrônica do pacote LibreOffice, versão gratuita de aplicativos que inclui, além da planilha, editores de textos, de apresentações, de desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o *site* <https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/>. Acesso em: 13 maio 2020.
- Uma sugestão para o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** é utilizar, se possível, o laboratório de informática da escola. Para isso, verifique antecipadamente se todos os computadores possuem o *software* necessário para o desenvolvimento da tarefa.

- Ao trabalhar com essa seção, analise a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- As questões dessa seção permitem o desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um algoritmo em linguagem de programação que possibilita calcular a adição e a multiplicação de matrizes leva os alunos a perceber os benefícios que tal linguagem proporciona. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Nessa seção, os alunos são levados a compreender, utilizar e criar planilhas eletrônicas para fazer cálculos diversos e a comunicar-se de maneira crítica, significativa e reflexiva, exercendo assim protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, mobilizando a **Competência geral 2** da BNCC.

Agora é com você! Resoluções

Utilize as matrizes já digitadas na planilha.

1 Inicialmente, para obter a matriz $A_{3\times3}-B_{3\times3}$ de ordem 3, no intervalo I2 : K4, digite $=A2-E2$ na célula I2 e pressione **Enter** para obter o resultado de $a_{11}+b_{11}$. Em seguida, selecione a célula I2, clique sobre o **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula I4. Com o intervalo I2 : I4 selecionado, clique novamente no **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula K4.

2 Para obter a matriz $D_{2\times3}\cdot B_{3\times3}$ de ordem 2×3, selecione o intervalo I7 : K8, contendo 2 linhas e 3 colunas. Depois, clique em **Inserir** e selecione a opção **Função...** para abrir a janela do assistente de funções. No campo **Categoria**, escolha **Matriciais**; já na lista **Função** selecione MATRIZ.MULT. Em **matriz 1**, digite D7 : F8, correspondente ao intervalo da matriz *D*; e, em matriz 2, digite E2 : G4, correspondente ao intervalo da matriz *B*. Por fim, clique em **OK**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Matriz *A*				Matriz *B*				Subtração (*A*−*B*)		
2	20	−3	−9		−5	−2	35		25	−1	−44
3	18	22	61		13	−7	1		5	29	60
4	10	0	2		8	15	17		2	−15	−15
5											
6	Matriz *C*			Matriz *D*				Produto (*D***B*)			
7	0	−3		0	−1	1		−5	22	16	
8	−2	1		−4	2	3		70	39	−87	
9	5	8									
10	1	2									

SERGIO L. FILHO

MODELO

3 A) Digite as matrizes E, F e G na planilha.

B) Para obter a matriz $E_{4\times1} \cdot F_{1\times3}$ de ordem 4×3, selecione o intervalo **A8 : C11**, contendo 4 linhas e 3 colunas. Depois, clique em **Inserir** e selecione a opção **Função...** para abrir a janela do assistente de funções. No campo **Categoria**, escolha **Matriciais**; já na lista **Função**, selecione MATRIZ.MULT. Depois, em **matriz 1**, digite **A2 : A5**, correspondente ao intervalo da matriz A; em **matriz 2**, digite *C2* **:** *E2*, correspondente ao intervalo da matriz *D*. Para finalizar, clique em **OK**.

C) Para obter a matriz $(E \cdot F)_{4\times3} + G_{4\times3}$ de ordem 4×3, no intervalo **E8 : G11**, inicialmente, digite $= A8 + G2$ na célula **E8** e pressione **Enter** para obter o resultado. Em seguida, selecione a célula **E8**, clique sobre o **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula **E11**. Com o intervalo **E8 : E11** selecionado, clique novamente no **Guia de autopreenchimento** e arraste até a célula **G11**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Matriz *E*			Matriz *F*				Matriz *G*	
2	−5		−1	1	9		−5	0	−10
3	0						0	−3	8
4	1						1	15	0
5	2						2	0	1
6									
7	Produto (*E***F*)				Produto (*E***F*)+*G*				
8	5	−5	−45		0	−5	−55		
9	0	0	0		0	−3	8		
10	−1	1	9		−1	16	9		
11	−2	2	18		0	2	19		

SERGIO L. FILHO

Página 46 Resolvendo por etapas

- Na seção **Resolvendo por etapas**, há um encaminhamento para a resolução de um problema, visando resolver operações com matrizes.

- Caso considere viável, utilize a metodologia ativa **Design thinking** a fim de propor aos alunos outro problema, alterando, por exemplo, os elementos ou a ordem das matrizes. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é você quem resolve! Resolução

2 Uma opção é resolver as multiplicações $A \cdot B$ e, depois, $2 \cdot C$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (-2x)\cdot(-x)+1\cdot(x+3) & (-2x)\cdot0+1\cdot4 \\ (x-1)\cdot(-x)+0\cdot(x+3) & (x-1)\cdot0+0\cdot4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x^2+x+3 & 4 \\ -x^2+x & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot C = \begin{pmatrix} -4x & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Depois disso, escreva a igualdade e compare os elementos de mesma posição.

$$\begin{pmatrix} 2x^2+x+3 & 4 \\ -x^2+x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Na sequência, obtenha as equações.

$2x^2 + x + 3 = -4x$ e $-x^2 + x = -2$

Resolvendo a primeira equação, temos:

$2x^2 + x + 3 = -4x \Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 = 0$

Logo:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2} = \frac{-5\pm1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1{,}5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação, temos:

$-x^2 + x = -2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Logo:

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot1\cdot(-2)}}{2} = \frac{1\pm3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Portanto, $x = -1$ é o único valor que verifica a igualdade.

Página 49

- Na tarefa **16**, proponha aos alunos, como tarefa extraclasse, a demonstração das propriedades citadas para uma matriz quadrada genérica de ordem 2. Para isso, solicite a eles que desenvolvam cada um dos lados da igualdade e comparem os resultados obtidos, conforme o exemplo a seguir.

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$(A \cdot B)^t = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \end{bmatrix}^t =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} \\ a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}\cdot a_{11} + b_{21}\cdot a_{12} & b_{11}\cdot a_{21} + b_{21}\cdot a_{22} \\ b_{12}\cdot a_{11} + b_{22}\cdot a_{12} & b_{12}\cdot a_{21} + b_{22}\cdot a_{22} \end{bmatrix}$$

Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Quick writing**, com o objetivo de verificar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

4 Matriz inversa e determinantes

Objetivos específicos

- Determinar a transposta e a inversa de uma matriz.
- Resolver equações matriciais.
- Calcular o determinante de uma matriz quadrada.
- Resolver situações problema usando matriz inversa ou determinantes.

Nesse tema, busca-se relacionar o estudo de matrizes e determinantes com a resolução de problemas das mais variadas áreas do conhecimento, inclusive da própria Matemática. Nele, procura-se propiciar a consolidação de alguns conteúdos estudados nos temas anteriores, como operações com matrizes e classificação de matrizes. Os principais conteúdos abordados são: inversa de matriz, equações matriciais, determinante de matriz de ordem 1, de ordem 2 e de ordem 3, Teorema de Jacobi e Teorema de Binet.

Sugestão de avaliação

Avalie a possibilidade de realizar uma tarefa com os alunos cujo objetivo é verificar os conhecimentos prévios deles sobre características de matrizes que viabilizam o cálculo de determinantes e de inversa de matrizes.

Para avaliar a compreensão dos alunos sobre os conceitos já estudados, faça algumas perguntas, pedindo a eles que citem exemplos de matriz quadrada e matriz identidade. Dados os exemplos, pergunte aos alunos se toda matriz identidade é uma matriz quadrada. Tal questionamento pode desencadear uma conversa e levá-los a refletir sobre a percepção que têm acerca desses conceitos.

Mais informações sobre avaliação diagnóstica podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 50 e 51 Criptografia

- Nessas páginas, são apresentadas informações sobre as mensagens criptografadas utilizadas no contexto de guerras e sua função na sociedade atual, que é a de garantir a segurança das informações. Leia o texto com os alunos e peça-lhes que respondam às questões propostas (estabeleça um tempo de 15 minutos, por exemplo). Em seguida, organize um debate para que eles falem sobre a utilidade da criptografia em diferentes situações.
- Complemente as discussões explicando que a máquina Enigma, utilizada na Segunda Guerra Mundial, para enviar mensagens criptografadas, dispunha de um número de combinações geradas que era da ordem de $15 \cdot 10^{18}$, que só foi quebrada quando Alan Turing (matemático, considerado o "pai da computação") criou a Enigma Bomb, usada para traduzir uma mensagem codificada em uma mensagem verdadeira e compreensível. Explique aos alunos que no uso de senha para entrar em um computador, realizar pagamento pela internet, acessar uma conta bancária, e até mesmo ao enviar mensagens em rede social, a criptografia está presente.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Esse tema possibilita a elaboração de uma aula em conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **História**. Uma sugestão é abordar o papel decisivo da criptografia em batalhas e guerras ao longo da história, enfatizando que, para além do uso militar, a criptografia foi utilizada para a comunicação entre governantes, em sociedades secretas e até mesmo religiosas. Proponha ao professor de **História** explorar mais detalhadamente aspectos da criptografia no contexto da Segunda Guerra Mundial, momento no qual o volume e a necessidade de troca de mensagens criptografadas contribuíram para o surgimento das primeiras máquinas de codificação.

BNCC Ao abordar a criptografia, os alunos podem fazer uso de diferentes linguagens, bem como de conhecimentos da linguagem matemática, para criar, expressar e partilhar informações e ideias em diferentes contextos, de modo a promover o entendimento mútuo, conforme sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

Páginas 52 e 53

- Na tarefa **R1** da página **52**, proponha aos alunos que troquem um dos números da matriz A e calculem sua inversa (se existir).
- Na página **53**, as ideias de multiplicação de matrizes e matriz inversa são utilizadas para decodificar uma mensagem criptografada. Para desenvolver a tarefa proposta no item **e**, organize a turma em grupos com quatro alunos e oriente-os para que dois deles sejam responsáveis por definir a matriz-chave e codificar uma mensagem, enquanto os outros dois deverão decifrar a versão codificada. Em seguida, proponha que troquem de função.

MODELO

Página 58

- Após introduzir os conteúdos dessas páginas, demonstre na lousa, passo a passo, o Teorema de Jacobi e o de Binet, conforme segue.

Demonstração do Teorema de Jacobi

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Ao adicionarmos aos elementos da 1ª linha os elementos da 3ª linha multiplicados pelo número real k, obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{31} \cdot k & a_{12} + a_{32} \cdot k & a_{13} + a_{33} \cdot k \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Calculando o determinante dessas duas matrizes, temos:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det B = \left(a_{11} + a_{31} \cdot k\right) \cdot a_{22} \cdot a_{33} + \left(a_{12} + a_{32} \cdot k\right) \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ \left(a_{13} + a_{33} \cdot k\right) \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \left(a_{13} + a_{33} \cdot k\right) \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot \left(a_{11} + a_{31} \cdot k\right) - a_{33} \cdot \left(a_{12} + a_{32} \cdot k\right) \cdot a_{21} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + \cancel{a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot k} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \cancel{a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot k} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + \cancel{a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot k} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \cancel{a_{33} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot k} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - \cancel{a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{31} \cdot k} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} - \cancel{a_{33} \cdot a_{32} \cdot a_{21} \cdot k} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

Portanto, $\det A = \det B$.

Demonstração do Teorema de Binet

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, seus determinantes são, respectivamente,

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ e $\det B = b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}$.

Logo:

$$\det A \cdot \det B = \left(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}\right) \cdot \left(b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}\right)$$

Calculando o produto dessas matrizes, obtemos a matriz $A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$.

Calculando seu determinante, temos:

$$\det\left(A \cdot B\right) = \left(a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}\right)\left(a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}\right) - \left(a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}\right)\left(a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}\right) =$$

$$= \cancel{a_{11} \cdot a_{21} \cdot b_{11} \cdot b_{12}} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_{21} \cdot b_{12} + a_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{11} \cdot b_{22} +$$

$$+ \cancel{a_{12} \cdot a_{22} \cdot b_{21} \cdot b_{22}} - \cancel{a_{11} \cdot a_{21} \cdot b_{11} \cdot b_{12}} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_{22} \cdot b_{11} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{12} \cdot b_{21} - \cancel{a_{12} \cdot a_{22} \cdot b_{21} \cdot b_{22}} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \left(b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}\right) - a_{12} \cdot a_{21}\left(b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}\right) =$$

$$= \left(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}\right)\left(b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}\right) = \det A \cdot \det B$$

Logo, $\det\left(A \cdot B\right) = \det A \cdot \det B$.

Página 59 Acessando tecnologias

- É possível desenvolver o trabalho com essa seção utilizando o programa Calc, que é uma planilha eletrônica do pacote LibreOffice, versão gratuita de aplicativos que inclui, além da planilha, editores de textos, de apresentações, de desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o *site*. Disponível em: <https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/>. Acesso em: 8 jul. 2020.
- Uma sugestão para o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** é utilizar, se possível, o laboratório de informática da escola. Para isso, verifique antecipadamente se todos os computadores possuem o *software* necessário para o desenvolvimento da tarefa.
- Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e fique atento para que, no decorrer da tarefa, todos tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

MODERNA

- Ao trabalhar com essa seção, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- As questões dessa seção permitem o desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um algoritmo em linguagem de programação que possibilita obter a inversa e o determinante de uma matriz leva os alunos a perceber os benefícios que tal linguagem proporciona. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Na tarefa proposta na seção **Acessando tecnologias**, conceitos iniciais de uma linguagem de programação são utilizados para a implementação de um algoritmo que permita obter a inversa e o determinante de uma matriz. Além disso, os alunos utilizam diferentes linguagens, possibilitando que se expressem a partir delas, e partilhem informações, experiências, ideias e sentimentos, como sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

Agora é com você! **Resoluções**

Utilize as matrizes já digitadas na planilha.

1 Digite, na célula **E7**, =MATRIZ.DETERM(E2:G4) e pressione a tecla **Enter**. O resultado que deverá aparecer é –0,25.

2 Para resolver a questão, siga os passos abaixo.

Para a matriz *R*.

A) Na planilha, digite a matriz

$$R = \begin{bmatrix} 25 & -4 \\ -12 & 2 \end{bmatrix}.$$

B) Para determinar a matriz inversa de *R*, selecione o intervalo **D2:E3**. Em seguida, digite =MATRIZ.INVERSO(A2:B3) e pressione **Ctrl**+**Shift**+**Enter**. Desse modo, será apresentada a matriz inversa de *R* no intervalo **D2:E3**.

	A	B	C	D	E
1	Matriz *R*			Matriz inversa de *R*	
2	25	–4		1	2
3	–12	2		6	12,5

Logo, existe inversa de *R*.

Para a Matriz *T*.

A) Na planilha, digite a

$$\text{matriz } T = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 26 & 14 & -5 \\ 0 & -16 & -4 \end{bmatrix}.$$

B) Para determinar a matriz inversa de *T*, selecione o intervalo **E2:G4**. Em seguida, digite =MATRIZ.INVERSO(A2:C4) e pressione **Ctrl**+**Shift**+**Enter**. Desse modo, será apresentada a matriz inversa de *T* no intervalo **E2:G4**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Matriz *T*				Matriz inversa de *T*		
2	0	8	2		#NÚM!		
3	26	14	–5				
4	0	–16	–4				

O erro na célula **E2** indica que não existe inversa de *T*.

Para a Matriz *U*

A) Na planilha, digite a

$$\text{matriz } U = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 1 & -6 \\ 5 & 26 & 10 & 8 \\ -9 & -1 & 0 & -1 \\ 12 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

B) Para determinar a matriz inversa de *U*, selecione o intervalo **F2:I5**. Em seguida, digite =MATRIZ.INVERSO(A2:D5) e pressione **Ctrl**+**Shift**+**Enter**. Desse modo, será apresentada a matriz inversa de *U* no intervalo **F2:I5**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Matriz *U*					Matriz inversa de *U*			
2	13	5	1	–6		0,009313	–0,00529	–0,09092	0,007261
3	5	26	10	8		0,034094	0,031489	–0,01081	–0,05816
4	–9	–1	0	–1		0,001026	0,007892	0,210323	0,153342
5	12	0	6	1		–0,11791	0,0161	–0,17094	–0,00718

3 Pela propriedade que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, calculamos os determinantes de *A* e de *B* e depois multiplicamos os resultados.

A) Digite a matriz *A* na planilha e calcule o determinante da matriz *A*. Para isso, digite, na célula **A7**, =MATRIZ.DETERM(A2:C4) e pressione a tecla **Enter**.

B) Digite a matriz *B* na planilha e calcule o determinante da matriz *B*. Para isso, digite, na célula **E7**, =MATRIZ.DETERM(E2:G4) e pressione a tecla **Enter**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Matriz *A*				Matriz *B*		
2	30	25	–2		–15	29	–21
3	–16	20	28		19	7	3
4	–18	–4	10		–20	11	–13
5							
6	det *A*				det *B*		
7	–88				–46		

Logo:

$\det A \cdot \det B = (-88) \cdot (-46) = 4\,048$

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

5 Uma aplicação de matrizes

Objetivo específico

- Resolver problemas envolvendo matrizes e determinantes.

Esse tema relaciona conceitos matemáticos ao consumo de sal e, consequentemente, de sódio, levando os alunos a empregar seus conhecimentos a respeito das matrizes e suas operações, bem como das equações matriciais.

Páginas 60 e 61 Muito salgado?

- A Organização Mundial da Saúde (OMS) é uma agência internacional responsável por elaborar padrões internacionais relativos aos mais variados assuntos associados à saúde. Essa organização atua em temas importantes, como poluição, doenças infecciosas, obesidade infantil, saúde mental, entre outros, assim como estabelece a Classificação Internacional de Doenças, que consiste em um referencial indispensável aos médicos que atuam em todo o planeta. Além das recomendações em relação à ingestão de sódio, a OMS também recomenda a redução no consumo de açúcares e de gorduras trans, por exemplo.
- Converse com os alunos a respeito dos hábitos alimentares adotados por eles e por seus familiares tanto em relação ao sódio quanto a outras substâncias. Além disso, para contribuir com essa reflexão, verifique a possibilidade de mostrar a eles um vídeo do Ministério da Saúde que apresenta um informativo a respeito do consumo de sal e de açúcar e sua relação com a saúde. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=a3I5A0THGtA>. Acesso em: 15 jun. 2020.

Sala dos professores

O contexto dessas páginas permite a realização de um trabalho articulado com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares **Química** e **Biologia**. Assim, pode ser realizada uma tarefa com o intuito de abordar a quantidade de sódio presente em diferentes tipos de alimento, discutindo a respeito dos efeitos colaterais que podem ser causados devido ao consumo excessivo.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC

O tema abordado possibilita relacionar as matrizes com o tema contemporâneo transversal **Saúde**, contribuindo tanto para o estudo de aplicações práticas dos conceitos matemáticos quanto para incentivar reflexões a respeito da importância de adotar hábitos saudáveis. A proposta também pode motivar o estudo de uma situação-problema, com base em conceitos teóricos presentes na atualidade e cuja solução pode gerar implicações no cotidiano das pessoas. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

Em relação ao item **C**, é possível estabelecer uma relação com o tema contemporâneo transversal **Educação alimentar e nutricional**, mediante reflexões a respeito da importância de seguir uma alimentação balanceada para a manutenção da saúde, priorizando frutas, verduras e legumes em detrimento de produtos industrializados.

Resoluções e comentários

A Para resolver esse problema, considere a matriz $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 6{,}48 & 0{,}51 \\ 1{,}42 & 1{,}40 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 780 \\ 500 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6{,}48 & 0{,}51 \\ 1{,}42 & 1{,}40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 780 \\ 500 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6{,}48a + 0{,}51b \\ 1{,}42a + 1{,}40b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 780 \\ 500 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6{,}48a + 0{,}51b = 780 \\ 1{,}42a + 1{,}40b = 500 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 100 \text{ e } b = 255$$

Portanto, uma pessoa deve ingerir, aproximadamente, 100 g de pão e 255 g de leite.

B Assim, indicando por x a quantidade ingerida, temos:

$780 + x < 2\,000 \Rightarrow x < 1\,220$

Portanto, a pessoa ainda pode ingerir até 1 220 mg.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODELO

6 O ponto e a reta

Objetivos específicos

- Calcular a área de um triângulo sabendo apenas as coordenadas de seus vértices em um plano cartesiano.
- Resolver problemas envolvendo alinhamento de três pontos.

Esse tema trata da condição de alinhamento de três pontos e sua relação com as retas, além do estudo de uma estratégia específica para o cálculo da área de triângulos, por meio de conceitos da Geometria analítica, e da equação geral de uma reta. Assim, os alunos são levados a construir expressões e realizar cálculos que permitam avaliar quando os pontos estão alinhados e se as equações referem-se a retas, os quais podem ser aplicados em situações práticas nas quais a Geometria se revelar útil.

Sugestão de avaliação

Investigue os conhecimentos prévios dos alunos a respeito da estrutura do plano cartesiano e da identificação e representação das coordenadas de pontos. Para isso, reproduza e entregue a eles uma malha quadriculada. Depois, organize-os em duplas e oriente-os a esboçar nessa malha os eixos das abscissas e das ordenadas para representar o plano cartesiano. Escreva na lousa alguns pares ordenados, pedindo que marquem esses pontos. Escreva pares ordenados que contenham zero na abscissa ou na ordenada, ou em ambos, para verificar se os alunos marcam corretamente tais pares.

Mais informações a respeito de avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 62 e 63 Esconde-esconde com astros

- Nas páginas de abertura, o conceito de distância e de alinhamento entre pontos é associado ao estudo de fenômenos astronômicos do Sistema Solar, no caso, os eclipses. Nessa abordagem, a ideia de alinhamento entre três pontos é utilizada para estimar a posição do Sol, da Lua e da Terra nos eclipses solar e lunar.
- A respeito da temática, veja mais informações sobre os eclipses no *site* da agência espacial norte-americana Nasa (National Aeronautics and Space Administration). Disponível em: <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/eclipse.html>. Acesso em: 15 jun. 2020. Embora as informações contidas nesse *site* estejam em inglês, é possível verificar a data e o local em que ocorrerão os próximos eclipses. Além disso, pergunte aos alunos se eles já viram um eclipse solar ou lunar e avalie a possibilidade de levá-los ao laboratório de informática para ver imagens de eclipses que a NASA disponibiliza em seu *site*. Disponível em: <https://www.nasa.gov/eclipsephotos/>. Acesso em: 10 jul. 2020. Um exemplo dessas imagens é a foto a seguir, que retrata um eclipse total solar.

AUBREY GEMIGNANI/NASA

Eclipse solar total.

- Avalie a possibilidade de levar os alunos a uma visita guiada a um museu de ciência ou observatório da cidade onde a escola se localiza, ou de alguma cidade vizinha, para que tenham contato com as ferramentas que esses lugares fornecem, contribuindo para a aprendizagem dos conceitos astronômicos.

> [...] visita escolar é um recurso didático utilizado pelos professores para programar uma atividade curricular intencionalmente planejada, servindo para desenvolver e complementar conteúdos curriculares, mediante saídas direcionadas para ambientes externos ao espaço físico da escola ou da sala de aula. São, portanto, atividades educativas de cunho pedagógico, e não necessariamente contidas no plano de curso.
>
> [...]

LINHARES, Fernando R. da C. *O objetivo das visitas escolares a um observatório astronômico na visão dos professores*. 2011. 239 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011. p. 149.

Sala dos professores

Avalie a possibilidade de elaborar uma aula em conjunto com professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente o do componente curricular **Física**. Aproveite a oportunidade para realizar experimentos que permitam aos alunos compreender como ocorre, na prática, um eclipse lunar ou solar. Para isso, pode-se utilizar, por exemplo, uma lanterna para representar o Sol e bolas de isopor de diferentes tamanhos para representar a Terra e a Lua. Esses objetos devem ser organizados conforme as ilustrações apresentadas nessas páginas, para permitir a observação das sombras, como as produzidas

MODERNA

por um eclipse. Durante esse trabalho, os alunos podem ser organizados em grupos para que discutam a respeito das características específicas de cada um dos tipos de eclipse, construindo e testando conjecturas e pesquisando o tema para que, ao final, seja realizada uma discussão com toda a turma e os professores responsáveis para a apresentação das conclusões obtidas durante o estudo.

No desenvolvimento dessa dinâmica, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Para desenvolver o conteúdo, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O trabalho com essas páginas permite o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**, uma vez que discute a respeito dos eclipses, relacionados à movimentação dos astros no Sistema Solar. Além disso, contribui para uma formação geral no sentido de possibilitar aos alunos a compreensão de um fenômeno natural, divulgado com frequência por meios de comunicação quando estão prestes a ocorrer. Desse modo, abordam-se aspectos da **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

Página 64

- O assunto apresentado nessa página integra os conteúdos matemáticos Geometria analítica, matrizes e determinantes. Aproveite esse momento para lembrar os alunos das diferentes técnicas que podem ser utilizadas para calcular o determinante de uma matriz, recorrendo, inicialmente, a exemplos numéricos e prosseguindo com a apresentação de exemplos que envolvem a presença de uma variável em alguma das entradas da matriz, como o cálculo de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, por exemplo, de tal forma que os alunos possam perceber que, ao igualar o determinante a um número, podemos obter equações, como é o caso de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3$, que implica a equação $4x + 11 = 3$.

Página 65

- Como o cálculo da área envolve tanto o estudo de valor absoluto de números reais quanto os determinantes de matrizes de ordem 3, é importante certificar-se de que os alunos compreendem ambos os conceitos, para que possam assimilar as definições e aplicá-las corretamente na resolução dos exercícios e problemas propostos nas páginas seguintes.
- Ao trabalhar o conteúdo dessa página, diga aos alunos que o determinante utilizado para calcular a área de uma região triangular é o mesmo utilizado para verificar se três pontos estão alinhados. Observe se os alunos compreenderam que três pontos alinhados não determinam um triângulo, e sim uma reta.

Páginas 66 e 67 Acessando tecnologias

- O trabalho com a seção **Acessando tecnologias** poderá ser realizado no laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se de que todos os computadores possuam o *software* VisualG instalado, por meio do qual a tarefa será realizada. O *download* pode ser feito gratuitamente no *site* <http://visualg3.com.br>. Acesso em: 15 jun. 2020.
- Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e garanta que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

  A fim de que os alunos trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitar no *software* as instruções correspondentes e a atribuir valores às variáveis definidas.

- Esse tipo de abordagem possibilita que os alunos entrem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Ao trabalhar com a resolução do item 2, avalie a possibilidade de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

PROVA

BNCC A seção **Acessando tecnologias** contempla a habilidade **EM13MAT405** da BNCC e a **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, por envolver tarefas cujas resoluções abordam conceitos iniciais de uma linguagem de programação, usados para a implementação de um algoritmo que permita verificar se três pontos estão alinhados ou calcular a área de um triângulo a partir de seus vértices.

Agora é com você! **Resoluções**

1 Espera-se que os alunos respondam que "det" deve ser diferente de zero.

2 Programa em VisualG:

```
1  Algoritmo "alinhamento"
2  Var
3  x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c, det: real
4  Inicio
5  escreva("Digite a coordenada x do ponto A: ")
6  leia(x_a)
7  escreva("Digite a coordenada y do ponto A: ")
8  leia(y_a)
9  escreva("Digite a coordenada x do ponto B: ")
10 leia(x_b)
11 escreva("Digite a coordenada y do ponto B: ")
12 leia(y_b)
13 escreva("Digite a coordenada x do ponto C: ")
14 leia(x_c)
15 escreva("Digite a coordenada y do ponto C: ")
16 leia(y_c)
17 det <- x_b*y_c-x_b*y_a-x_a*y_c-x_c*y_
   b+x_c*y_a+x_a*y_b
18 se(det = 0)entao
19 escreva("A, B e C estão alinhados.")
20 senao
21 escreva("O triângulo formado pelos vértices A,
   B e C possui área igual à: ",abs(det)/2)
22 fimse
23 Fimalgoritmo
```

Página 68

- No trabalho com o problema **R2** da seção **Exercícios e problemas resolvidos**, é possível recorrer à metodologia ativa **Design thinking**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- A tarefa **2** da seção **Exercícios e problemas** auxilia no desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um fluxograma associado a um algoritmo em linguagem de programação para a determinação da condição de alinhamento entre três pontos e para o cálculo de área de triângulos permite aos alunos identificar características da linguagem de programação e refletir a respeito de seu funcionamento, além de contribuir para a resolução de problemas correlatos. Com isso, eles podem comparar diferentes estratégias empregadas na resolução de um mesmo problema, tanto usando os conceitos matemáticos e procedimentos algébricos quanto por meio de um programa escrito em uma linguagem de programação específica. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC A tarefa **2** da seção **Exercícios e problemas** contempla a habilidade **EM13MAT315** da BNCC, por solicitar a construção de fluxograma associado a um algoritmo, exigindo dos alunos a compreensão da estrutura do algoritmo a fim de organizá-lo por meio de um fluxograma. Assim, é abordada a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Página 69

Sugestão de avaliação

Para avaliar o aprendizado dos alunos sobre os conceitos estudados no tema, faça um trabalho no laboratório de informática usando *softwares* de geometria dinâmica para que eles possam verificar os resultados obtidos algebricamente, principalmente nas tarefas **6** a **9**. Como sugestão de *software* dessa natureza, temos o GeoGebra, o qual é livre e gratuito para *download*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang5pt>. Acesso em: 15 jun. 2020. Também pode ser acessado na versão *on-line* por meio do *site*: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 15 jun. 2020.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para fazer com que os alunos reflitam sobre os conteúdos estudados. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

7 Sistemas lineares

Objetivos específicos

- Compreender o conceito de equações lineares e sistemas lineares.
- Interpretar e representar problemas utilizando sistemas lineares.
- Resolver problemas utilizando o conceito de sistema linear.

O presente tema aborda os sistemas de equações lineares, apresentando as definições associadas, a identificação de solução e sua aplicação na modelagem e resolução de situações-problema. Esses conteúdos matemáticos estabelecem relações com matrizes, determinantes e Geometria analítica, estudados em temas anteriores. Assim, os alunos são levados a construir expressões algébricas e a efetuar cálculos que permitam relacionar variáveis entre si, por meio dos sistemas lineares, em diferentes contextos.

BNCC

Ao longo do tema, diversos problemas são propostos aos alunos a fim de que os interpretem e os representem por meio de sistemas lineares, que possibilitem a criação de modelos matemáticos cujas soluções são obtidas com a resolução dos sistemas lineares segundo o contexto em estudo, abordando a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e a habilidade **EM13MAT301** ao levar os alunos a resolver problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas.

Páginas 74 e 75 Um mundo conectado

- Essas páginas de abertura apresentam uma aplicação matemática em um contexto relacionado à tecnologia. Nessa abordagem, de maneira intuitiva, as ideias de equações e sistemas lineares estão associadas ao consumo de dados na internet. Determine um tempo (por exemplo, 15 minutos) para que os alunos leiam o texto e respondam às questões propostas nessas páginas. Em seguida, por meio de uma conversa com toda a turma, colete informações acerca da compreensão dos alunos sobre a importância dos avanços tecnológicos dos meios de comunicação. Nesse momento, se julgar conveniente, outros tópicos podem entrar em discussão, como o uso das redes sociais e o cuidado a ser tomado ao compartilhar informações, imagens e vídeos.

Sugestão de avaliação

Verifique os conhecimentos prévios e intuitivos dos alunos, no que diz respeito à solução de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, que pode ser associado ao ponto de interseção de duas retas.

Organize a turma em grupos pequenos, com dois ou três integrantes, e peça a cada grupo que:

a) determine dois números reais cuja soma seja 9;

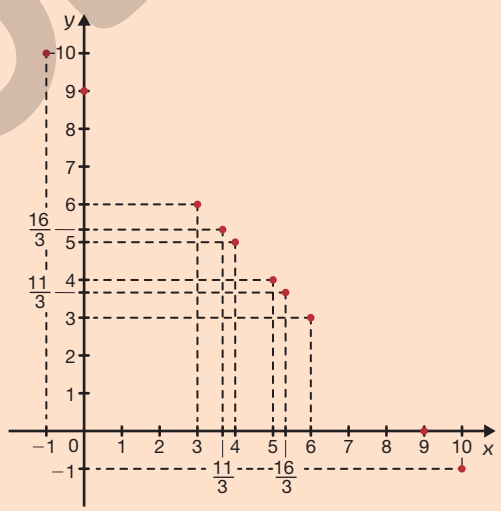
b) determine dois números reais cuja diferença seja 5.

Note que, no item **a**, os alunos podem fornecer uma infinidade de pares de números, por exemplo: 5 e 4; 3 e 6; -1 e 10; $\frac{11}{3}$ e $\frac{16}{3}$; 9 e 0. Conforme eles forem falando os pares de números, escreva-os na lousa. Depois, peça a eles que, a partir de então, considerem esses pares numéricos como pares ordenados (x, y) para representar alguns deles no plano cartesiano. Utilizando um desses pares de números (5 e 4, por exemplo), diga a eles que a esse par numérico são associados dois pares ordenados diferentes, a saber: $(4, 5)$ e $(5, 4)$, porque $4 + 5 = 5 + 4 = 9$.

Assim, para esses exemplos, temos o seguinte conjunto de pares ordenados:

$$\left\{(4,5);(5,4);(3,6);(6,3);(-1,10);(10,-1);\left(\frac{11}{3};\frac{16}{3}\right);\left(\frac{16}{3};\frac{11}{3}\right);(0,9);(9,0)\right\}$$

Auxilie os alunos na representação geométrica dos pontos. Para nosso exemplo, temos a seguinte representação:



RONALDO INÁCIO

Ao representarem no plano cartesiano alguns desses pontos, é possível que alguns alunos percebam que todos eles são colineares. Chame a atenção deles para isso. Diga-lhes que é possível traçar uma reta sobre os pontos, mostrando aos alunos que todos os pares de números reais que eles escolherem pertencem a essa mesma reta.

MODERNA

Peça a eles que utilizem os mesmos procedimentos indicados no item **b** e ajude-os a representar os pares ordenados que escolherem no mesmo plano cartesiano utilizado no item **a**.

Ao final, verifique se eles percebem a interseção das duas retas em um ponto, associando-a ao conceito de sistema linear.

BNCC O trabalho com essas páginas permite o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**, uma vez que permite a discussão a respeito de novas tecnologias presentes em nossa realidade, bem como dos planos de telefonia e franquias. Além disso, o tema também permite o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação financeira**, que possibilita a realização de discussões que envolvam os gastos que podem ser gerados na contratação de planos de telefonia conforme o uso dos aparelhos, contribuindo para desenvolver a percepção dos impactos financeiros associados a esse tipo de situação, muito presente no cotidiano das pessoas.

Resolução e comentários

C Indicando por x a quantidade de dados ao baixar 90 músicas e de acordo com as informações da seção, temos a seguinte relação:

Quantidade de músicas baixadas	Quantidade de dados (GB)
205	1 GB
90	x

$$\frac{205}{90} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 0{,}439$$

Assim, se uma pessoa escutar 90 músicas, a quantidade de dados utilizados será 0,439 GB e, portanto, será cobrado R$ $\overbrace{10 \cdot 0{,}439}^{}$,39.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas de abertura, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 77

- Verifique se os alunos percebem que existem soluções reais para cada uma das equações apresentadas na tarefa **6** da seção **Exercícios e problemas**. Com eles, escreva na lousa algumas delas. Leve para a sala de aula malhas quadriculadas e peça aos alunos que representem as equações lineares e as respectivas soluções. A malha quadriculada também será útil durante a resolução de outras tarefas, no decorrer desse tema.

Páginas 78 e 79

- O estudo da tarefa **R3** da seção **Exercícios e problemas resolvidos** pode ser realizado com o suporte de um *software* de Geometria dinâmica, possibilitando relacionar as representações algébricas e geométricas com o auxílio da tecnologia. Uma sugestão de *software* dessa natureza é o GeoGebra, que é livre e gratuito para *download*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang5pt>. Acesso em: 16 jun. 2020. Também pode ser acessado na versão *on-line* pelo *link* a seguir. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 16 jun. 2020. Dessa maneira, além de realizar as construções manualmente, com o auxílio de malhas quadriculadas, os alunos podem fazer construções utilizando o *software*, comparando os resultados obtidos entre si.
- Na tarefa resolvida **R3** da página **79**, volte ao sistema (I) do exemplo da página **78** e, com o auxílio dos alunos, represente geometricamente as equações apresentadas no sistema e os pontos analisados. Destaque que a solução do sistema é o ponto de interseção entre as duas retas.

- Antes de trabalhar com os alunos o problema **R4** da seção **Exercícios e problemas resolvidos**, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 80 e 81 Resolvendo por etapas

- Para desenvolver o trabalho com essa seção, é possível utilizar a metodologia ativa **Design thinking**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é você quem resolve! Resoluções

1 Resposta pessoal.

2 Resposta pessoal. Inicialmente, indicando os preços de cada blusa, calça, pares de sapato e bolsa, respectivamente pelas letras B, C, S e X, temos:

B: preço da blusa.

C: preço da calça.

S: preço do par de sapato.

X: preço da bolsa.

Em seguida, escrevemos cada uma da equações:

- equação 1: $2B + 2C + 3S + X = 380$

MODERNA

- equação 2: $2X = 3B + C + S$
- equação 3: $S = B + C$
- equação 4: $C = 2B$

Substituindo a equação 4 nas equações 3 e 2, temos:

$$S = B + \underbrace{C}_{2B} \Rightarrow S = 3B$$

$$2X = 3B + \underbrace{C}_{2B} + \underbrace{S}_{3B} \Rightarrow 2X = 8B \Rightarrow X = 4B$$

Por fim, substituindo na equação 1, temos:

$2B + 2C + 3S + X = 380 \Rightarrow 2B + 4B + 9B + 4B = 380 \Rightarrow B = 20$

Logo,

$C = 2B \Rightarrow C = 40$

$S = 20 + 40 \Rightarrow S = 60$

$2B + 2C + 3S + X = 380 \Rightarrow X = 80$

Portanto, cada blusa custa R$ 20,00, cada calça custa R$ 40,00, cada par de sapatos custa R$ 60,00 e a bolsa custa R$ 80,00.

Página 82

- Nas tarefas **8** a **12**, se julgar conveniente, pode ser feito um trabalho no laboratório de informática comparando os resultados obtidos algebricamente, com base nos conceitos teóricos estudados no livro e por meio do auxílio das ferramentas disponíveis nos *softwares* de Geometria dinâmica. Assim, nessa proposta, os alunos podem resolver alguns dos problemas utilizando, inicialmente, os procedimentos algébricos e, em seguida, as construções no *software*, enquanto, em outros problemas, pode ser adotada a ordem contrária, iniciando a resolução da tarefa pelo *software* e validando seus resultados por meio dos procedimentos algébricos correspondentes.
- Após a resolução da tarefa **13**, pode ser proposta uma discussão a respeito de outras configurações geométricas capazes de ser identificadas durante a resolução de um sistema linear. Para isso, apresente um sistema que admite infinitas soluções e outro que não admite nenhuma, como os sistemas lineares $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$. Depois, faça a comparação geométrica com o auxílio do *software*, a fim de diferenciar esses casos dos que estão presentes nessa tarefa.

Página 83

Sala dos professores

Antes de abordar a tarefa **14**, verifique a possibilidade de um trabalho integrado com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares **Biologia** e **Química**, para estudarem os benefícios de uma alimentação balanceada e descobrirem quais alimentos devemos ingerir para obter os nutrientes necessários. Se possível, elabore com esses professores um projeto ou uma aula integrada que aborde diferentes aspectos do tema alimentação, alinhando os detalhes sobre a conversa que terão com os alunos. Nesse trabalho, organize a turma em grupos de três ou quatro integrantes e peça a cada grupo que se encarregue de pesquisar alimentos que contenham nutrientes necessários a uma alimentação balanceada. Durante a pesquisa desses alimentos, peça aos alunos que atentem também aos preços e às quantidades necessárias de cada produto, de modo que se consiga ingerir a quantidade suficiente do nutriente. A composição de cada alimento pode ser consultada na Tabela Brasileira de Composição de Alimentos (TBCA). Disponível em: <http://www.tbca.net.br/base-dados/composicao_alimentos.php>. Acesso em: 16 jun. 2020.

Como complemento do tema, pode-se elaborar cardápios balanceados, analisar pirâmides alimentares e discutir a respeito de manter uma alimentação equilibrada para evitar doenças.

Para o desenvolvimento dessa dinâmica, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O trabalho com a tarefa **14** permite o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Saúde** e **Educação alimentar e nutricional** ao incentivar discussões a respeito de ter uma alimentação saudável para a manutenção da saúde e proporcionar um espaço importante para reflexões, por parte dos alunos, a respeito de qualidade de vida e prevenção de doenças. Além disso, aborda aspectos da **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODELO

8 Escalonamento de sistemas lineares

Objetivos específicos

- Aplicar o método mais adequado na resolução de sistemas lineares.
- Utilizar o conceito de matriz na resolução de sistemas lineares.
- Resolver um sistema linear pelo método de escalonamento.
- Resolver possíveis problemas do cotidiano utilizando o conceito de matriz e o de sistema linear.

O tema aborda conteúdos de matrizes relacionados a sistemas lineares. Além disso, destaca as possíveis classificações e descreve como resolver um sistema linear por meio de escalonamento. Esses conteúdos matemáticos estabelecem relações com os conteúdos de matrizes, determinantes e Geometria analítica.

Verifique os conhecimentos prévios dos alunos no que diz respeito à solução de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, que pode ser associado ao ponto de interseção de duas retas.

BNCC No decorrer desse tema, seja na resolução dos **Exercícios e problemas propostos**, seja na seção **Acessando tecnologias**, é necessário que os alunos resolvam e elaborem problemas do cotidiano envolvendo equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas. Em muitos desses momentos, os *softwares* de Geometria dinâmica são utilizados como ferramenta de auxílio na resolução e elaboração de problemas e obtenção de resultados. Ao realizar essas tarefas, contemplam a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e a habilidade **EM13MAT301** da BNCC.

Sugestão de avaliação

Para avaliar os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao conteúdo do tema anterior, verifique a possibilidade de escrever na lousa a questão a seguir, pedindo a eles que a resolvam antes de iniciar o trabalho com os conteúdos desse tema.

(UEL-PR) Um agricultor tinha uma quantidade M de mudas de hortaliças para replantar em uma quantidade C de canteiros. Pensou em plantar 8 mudas de hortaliças em cada um dos canteiros, mas, dessa forma, sobrariam 32 mudas de hortaliças sem plantar. Tentou reorganizar o pensamento simulando o plantio de 12 mudas de hortaliças em cada um dos canteiros. Desse modo, todas as hortaliças seriam plantadas, porém sobrariam 8 canteiros sem muda alguma plantada. Finalmente, organizou o plantio da seguinte forma: 10 mudas de hortaliças de cor verde-escuro por canteiro, ocupando metade da quantidade de canteiros, e 8 mudas de hortaliças de cor verde-claro por canteiro, ocupando a outra metade da quantidade de canteiros. Assim, todas as mudas de hortaliças seriam plantadas e nenhum canteiro ficaria vazio.

A partir das informações desse problema, determine a quantidade de mudas de hortaliças de cor verde-escuro e de cor verde-claro.

Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

Resolução

Considerando C a quantidade de canteiros e M a quantidade de mudas de hortaliças, temos:

$$\begin{cases} 8C + 32 = M \\ 12(C - 8) = M \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 8C = M - 32 \\ 12C = M + 12 \cdot 8 \end{cases}$$

$$8C + 32 = 12C - 96$$

$$128 = 4C$$

$$C = \frac{128}{4}$$

$$C = 32$$

$$M = 8 \cdot 32 + 10 \cdot 32 \Rightarrow M = 256 + 320 \Rightarrow M = 576$$

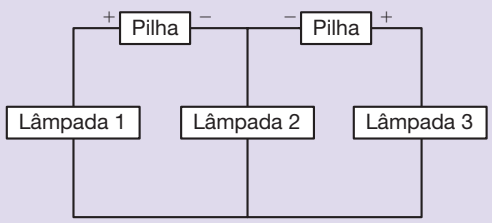
Portanto, são 32 canteiros e 576 mudas de hortaliças, sendo 256 mudas de hortaliças de cor verde-claro e 320 mudas de hortaliças de cor verde-escuro.

Páginas 84 e 85 A corrida dos elétrons

Sala dos professores

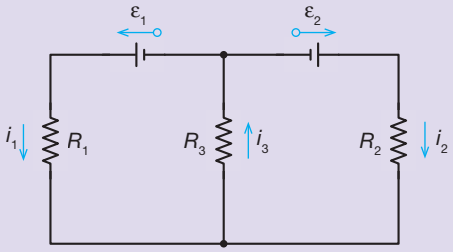
O tema proposto nessas páginas de abertura permite que seja realizado um trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Física**. Proponha aos alunos que leiam o conteúdo dessas páginas iniciais e que, em seus respectivos cadernos, anotem as possíveis dúvidas que surgirem. Uma sugestão para avaliar a compreensão dos alunos em relação a esse conteúdo é propor um trabalho em conjunto com o professor de **Física** para estudar o funcionamento dos circuitos elétricos.

Utilizando fios elétricos finos, 2 pilhas de 1,5 V e 3 lâmpadas pequenas de 12 V e 55 W $(CR \simeq 2{,}62\ \Omega)$, organize a turma em grupos de três ou quatro integrantes e oriente cada grupo a montar um circuito elétrico, da seguinte maneira.



MODERNA

Assim, determinando o sentido das correntes, indicado pelas setas, temos o circuito a seguir.



RONALDO NÁCIO

Percorrendo o circuito no sentido anti-horário e utilizando a Primeira e a Segunda Lei de Kirchhoff, monte com os alunos o sistema a seguir.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ 2{,}62i_1 + 2{,}62i_3 - 1{,}5 = 0 \\ -2{,}62i_2 - 2{,}62i_3 + 1{,}5 = 0 \end{cases}$$

Em seguida, peça aos alunos que escrevam a equação matricial associada ao sistema apresentado anteriormente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2{,}62 & 0 & 2{,}62 \\ 0 & -2{,}62 & -2{,}62 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Comente com os alunos que o sistema formado não é homogêneo, visto que duas equações não são homogêneas.

BNCC Ao abordar circuitos elétricos nas páginas de abertura, os alunos são levados a analisar conteúdos relacionados a processos tecnológicos, mobilizando aspectos da **Competência específica 1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global."

Resoluções e comentários

A Substituindo os valores das ternas nas equações do sistema, verificamos que a única terna que satisfaz o sistema é a alternativa **III**.

Página 87

- Uma sugestão para desenvolver os exemplos apresentados é a utilização de um *software* de Geometria dinâmica. Para isso, com o auxílio do *software* GeoGebra, oriente-os a digitar no campo de entrada as equações de cada um dos exemplos dados. Peça aos alunos que representem geometricamente outros exemplos de sistemas lineares e que os classifiquem com base em sua interpretação. Caso não haja máquinas suficientes para todos os alunos, organize-os em duplas ou trios e certifique-se de que todos os alunos tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang5pt>. Acesso em: 16 jun. 2020. Ele também pode ser acessado na versão *on-line*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 16 jun. 2020.

Página 88

- Após o trabalho com o problema **R1** da seção **Exercícios e problemas resolvidos**, apresente aos alunos uma maneira geral de classificar um sistema 2×2, dado por $\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases}$, com a_2, b_2 e k_2 não nulos.
  - Se $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, então o sistema é SPD.
  - Se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{k_1}{k_2}$, então o sistema é SPI.
  - Se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{k_1}{k_2}$, então o sistema é SI.

Página 90 Acessando tecnologias

- Uma sugestão para o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** é utilizar, se possível, o laboratório de informática da escola. Para isso, verifique antecipadamente se todos os computadores têm instalado o *software* de Geometria dinâmica escolhido para o desenvolvimento do contexto. Caso não haja um computador para cada aluno, organize-os em grupos e atente ao fato de que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

- Para trabalhar com a seção **Acessando tecnologias**, verifique a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

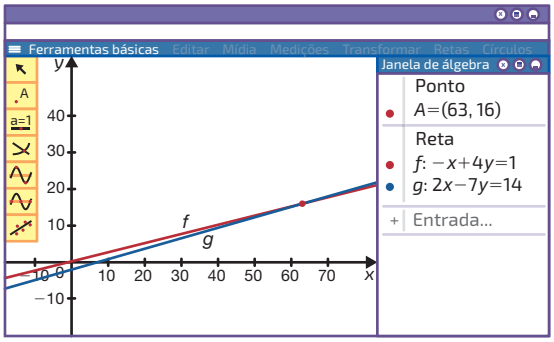
Agora é com você! Resolução

1 a) Espera-se que os alunos respondam que não, pois as retas parecem paralelas, mas podem ter um ponto em comum longe da localização representada.

b) Seria necessário usar a ferramenta Interseção de Dois objetos.

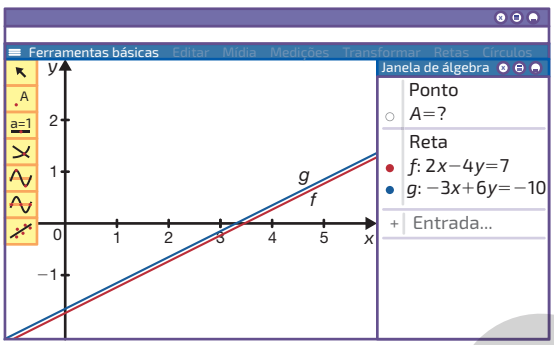
c) O sistema é possível e determinado, visto que as retas se interceptam no ponto $(63, 16)$, conforme a figura a seguir.

MODERNA

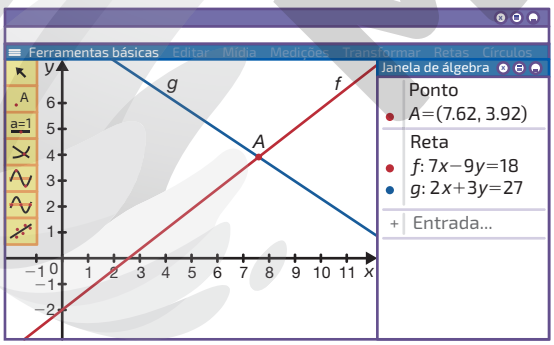


2 Utilizando o *software* de Geometria dinâmica, podemos realizar a representação de cada um desses sistemas e, com a ajuda da ferramenta **Ponto de interseção**, determinar sua solução.

a) O sistema é SI, pois, ao interpretarmos geometricamente, temos duas retas paralelas que não possuem nenhum ponto de interseção, que é representado no *software* pelo ponto de interrogação (?).

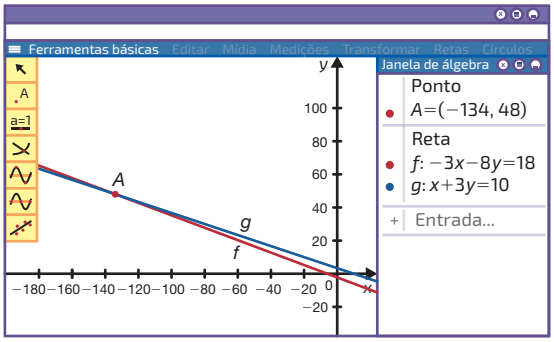


b) O sistema é SPD, porque, ao interpretarmos geometricamente, temos duas retas paralelas que possuem um ponto de interseção, que é representado no *software* pelo ponto $A = (7{,}62; 3{,}92)$.



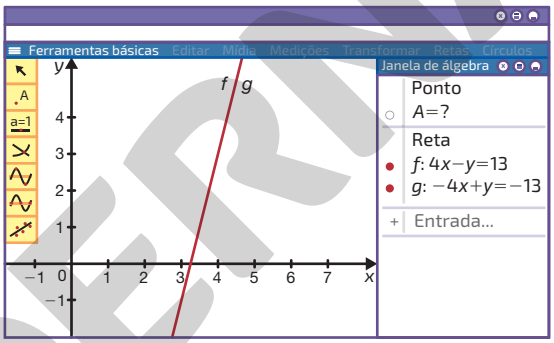
Portanto, $x = 7{,}62$ e $y = 3{,}92$.

c) O sistema é SPD, porque, ao interpretarmos geometricamente, temos duas retas paralelas que possuem um ponto de interseção, que é representado no *software* pelo ponto $A = (-134; 48)$.

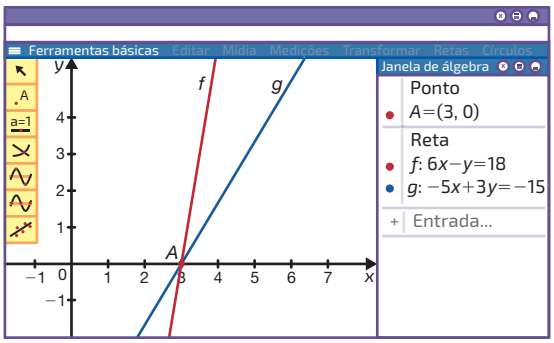


Portanto, $x = -134$ e $y = 48$.

d) O sistema é SPI, porque, ao interpretarmos geometricamente, temos duas retas paralelas e coincidentes. No *software*, a equação $8x - 2y = 26$ tem sua forma simplificada por $4x - y = 13$.



e) O sistema é SPD, pois, ao interpretarmos geometricamente, temos duas retas paralelas que possuem um ponto de interseção, que é representado no *software* pelo ponto $A = (3, 0)$. No *software* a equação $12x - 2y = 36$ tem sua forma simplificada por $6x - y = 18$ e a equação $-10x + 6y = -30$ tem sua forma simplificada por $-5x + 3y = -15$.

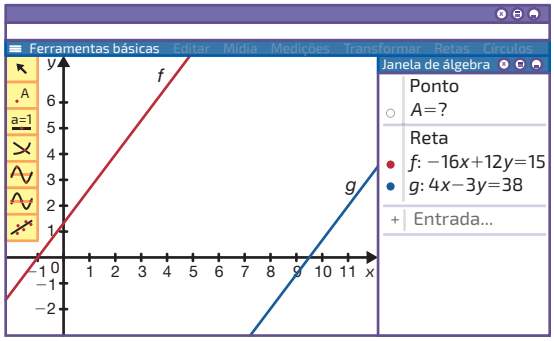


Portanto, $x = 3$ e $y = 0$.

f) O sistema é SI, pois, ao interpretarmos geometricamente, temos duas retas paralelas que não têm nenhum ponto de interseção, que é representado no *software* pelo ponto de interrogação (?).

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

MODERNA



Página 91

BNCC O contexto da tarefa 6 permite abordar o tema contemporâneo transversal Educação alimentar e nutricional. Aproveite o momento para conversar com os alunos sobre a importância de uma alimentação saudável e seus benefícios para o organismo. Se achar conveniente, leia para eles o texto a seguir a respeito dos três princípios de uma alimentação saudável.

[...]

Alimentação saudável é o mesmo que dieta equilibrada ou balanceada e pode ser resumida por três princípios: variedade, moderação e equilíbrio.

Princípios da alimentação saudável

- Variedade: é importante comer diferentes tipos de alimentos pertencentes aos diversos grupos; a qualidade dos alimentos tem que ser observada.
- Moderação: não se deve comer nem mais nem menos do que o organismo precisa; é importante estar atento à quantidade certa de alimentos.
- Equilíbrio: quantidade e qualidade são importantes; o ideal é consumir alimentos variados, respeitando as quantidades de porções recomendadas para cada grupo de alimentos. Ou seja, "comer de tudo um pouco".

[...]

RECINE, Elisabetta; RADAELLI, Patrícia. *Alimentação saudável*. Biblioteca Virtual em Saúde. p. 16. Disponível em: <https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/alimentacao_saudavel.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2020.

Página 92

Sala dos professores

A tarefa **15** possibilita o trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Química**. Nesse trabalho, proponha uma conversa a respeito do átomo, destacando sua estrutura. Além disso, discuta com os alunos os isótopos e sua classificação. Desse modo, aborda-se aspectos da **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

Página 99 Acessando tecnologias

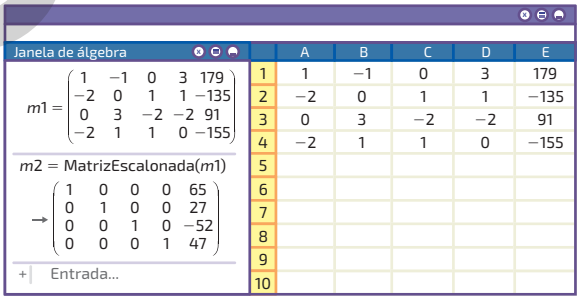
- Para trabalhar com a seção **Acessando tecnologias**, verifique a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! Resolução

1 a) Utilizando o *software* e seguindo os passos apresentados, temos:

Portanto, a solução é $(21, -17, 30)$.

b) Utilizando o *software* e seguindo os passos apresentados, temos:



Portanto, a solução é $(65, 27, -52, 47)$.

Página 101

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

PODERNA

9 Circunferência

Objetivos específicos

- Compreender a circunferência como um lugar geométrico.
- Identificar uma circunferência por meio de sua equação.
- Representar uma circunferência em um plano cartesiano por meio de sua equação, e vice-versa.

Esse tema aborda o conceito de circunferência, destacando como identificá-la por meio de sua equação. Além disso, as páginas de abertura fazem relação entre esse conteúdo e a obtenção de localizações por meio de um GPS.

Ao iniciar o trabalho com esse tema, avalie a necessidade de explicar aos alunos a diferença entre círculo e circunferência, pois é importante verificar as dificuldades deles em relação aos conhecimentos prévios necessários à compreensão do novo conhecimento.

Páginas 102 e 103 Uma constelação de satélites

Sala dos professores

Ao desenvolver o trabalho com as páginas de abertura desse tema, avalie a possibilidade de desenvolver uma aula em conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Geografia**. Assim, o conceito de Geometria analítica pode ser associado ao estudo da orientação e da localização na superfície terrestre. Nessa abordagem, de maneira intuitiva, a ideia de coordenadas de um ponto qualquer é relacionada ao sistema de posicionamento global (GPS).

Peça aos alunos que leiam o texto e respondam às questões propostas, estipulando um tempo para isso (por exemplo, 15 minutos). Em seguida, organize uma conversa com a finalidade de observar se eles assimilaram as informações necessárias para compreender o contexto. Verifique se estabeleceram relações entre as coordenadas dos pontos em um plano cartesiano, abscissa e ordenada, estudadas anteriormente, e as coordenadas de latitude e longitude para a localização de objetos no espaço geográfico.

- Avalie a conveniência de ler para os alunos o texto a seguir, que conta um pouco da história do GPS.

Uma breve história sobre o GPS

A ideia de desenvolver o sistema GPS se inicia com lançamento do satélite Sputnik (1980) pela União Soviética, que apenas alguns dias após ser lançado, pôde ser rastreado por dois cientistas americanos, que rastrearam sua órbita gravando alterações na radiofrequência por satélite. [...]

Em 2000, a seletividade da disponibilidade do GPS foi [...] eliminada, dessa vez por Bill Clinton, e os civis que antes contavam com uma precisão de 100 m, passaram a ter uma precisão de 10 a 15 metros, o que fez com que a produção de dispositivos GPS explodisse. Em 2005 já havia 32 satélites operacionais na constelação GPS, dos quais 24 estão operando, e os demais estão prontos para assumir o controle em caso de falha. Ainda hoje, a tecnologia do GPS está sendo aprimorada e desenvolvida, e de tempos em tempos, novos satélites são enviados ao espaço.

UNICAMP. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. *Como funciona o sistema de posicionamento global (GPS).* Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/o-sistema-gps/>. Acesso em: 13 jul. 2020.

Além disso, verifique a possibilidade de levar os alunos a um laboratório de informática ou usar um projetor em sala de aula para que eles possam assistir a um vídeo sobre o funcionamento do GPS. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=qzOA41vA8Qw&feature=emb_logo>. Acesso em: 13 jul. 2020.

BNCC

O trabalho com essas páginas de abertura permite abordar o tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**. Explique aos alunos que o GPS é dividido em três segmentos: espacial, de controle e de usuários. O segmento espacial é composto por 24 satélites distribuídos em seis planos orbitais igualmente espaçados, que cruzam o centro da Terra. Por outro lado, o segmento de controle é responsável por monitorar, corrigir os relógios e atualizar periodicamente as mensagens de navegação de cada satélite, sendo constituído por cinco estações terrestres estrategicamente distribuídas no globo. Por fim, o segmento de usuários é composto por receptores GPS – a depender da aplicação, o aparelho necessita de um grau maior ou menor de qualidade em seu relógio interno.

Mais informações sobre o GPS podem ser encontradas no artigo "O GPS: unindo ciência e tecnologia em aulas de física", disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172011000200014&script=sci_abstract&tlng=pt>. Acesso em: 13 jul. 2020.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas de abertura, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 104

- Antes de apresentar as equações reduzida e geral da circunferência, relembre os alunos como desenvolver

PROIBIDA

os produtos notáveis quadrado da soma e quadrado da diferença. Escreva na lousa alguns exemplos e desenvolva os produtos em conjunto com a turma.

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) =$$
$$= x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$
$$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) =$$
$$= x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

Página 106

- Após trabalhar os conteúdos dessa página, solicite aos alunos que construam algumas circunferências. Para isso, leve para a sala de aula compassos, réguas e malhas quadriculadas. Escreva na lousa algumas equações de circunferência, como nos exemplos abaixo.

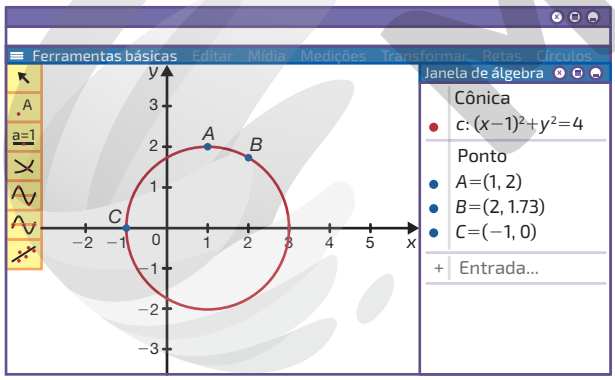
$C_1: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 16$

$C_2: x^2 + (y-1)^2 = 1$

$C_3: x^2 + y^2 - 4(y-x) - 1 = 0$

Página 107

- Na tarefa **4**, caso necessário, mostre para os alunos como é feito o cálculo da área de um círculo. Reforce que é preciso saber o comprimento do raio e a área que é dada pela fórmula $A = \pi r^2$.
- Na tarefa **6**, proponha a utilização de um *software* de Geometria dinâmica, como o GeoGebra, que é livre, gratuito e está disponível para *download* em: <https://www.geogebra.org/download?lang5pt>. Acesso em: 13 jul. 2020. Esse *software* também pode ser utilizado na versão *on-line*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 13 jul. 2020.
- Oriente os alunos a digitar, no campo **Entrada**, os pontos dados na tarefa. Em seguida, utilizando a ferramenta **Círculo definido por três pontos**, eles precisam construir a circunferência que passa por esses três pontos, obtendo a seguinte imagem.



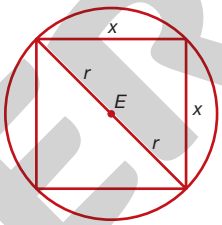
RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

- O uso do GeoGebra e de outros *softwares* nas aulas de Matemática pode auxiliar os alunos no processo de aprendizagem. Nesse sentido, leia o texto a seguir que discorre a respeito do uso nas aulas de Matemática do *software* IGeom, de Geometria Interativa (GI), que pode ser obtido de forma gratuita no *site* disponível em: <http://www.matematica.br/igeom/>. Acesso em: 24 jul. 2020.

> [...]
>
> No ensino de Matemática, os programas de GI podem ajudar o professor a introduzir os conceitos de matemática/geometria utilizando o computador. Além disso, a forma como será apresentado o conteúdo poderá proporcionar um maior aprendizado por parte dos alunos. Pois, [...] as atividades com a GI oferecem ao professor ferramentas para trabalhar com as capacidades de visualizar, transformar, generalizar, refletir e se comunicar com a informação, habilidades consideradas fundamentais para guiar o aluno durante uma atividade matemática. [...]

ISOTANI, Seiji; BRANDAO, Leônidas de Oliveira. O papel do professor e do aluno frente ao uso de um software de geometria interativa: iGeom. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 45, p. 175-176, abr. 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n45/v27n45a09.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2020.

- Na tarefa **10**, caso necessário, retome alguns aspectos sobre polígonos regulares inscritos em uma circunferência. Para isso, desenhe na lousa um quadrado inscrito em uma circunferência, destacando o centro da circunferência e a diagonal do quadrado, conforme a imagem a seguir.



RONALDO INÁCIO

- Utilizando o Teorema de Pitágoras, podemos relacionar o lado do quadrado com o raio da circunferência:

$$x^2 + x^2 = (2r)^2 \Rightarrow 2x^2 = 4r^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2 \Rightarrow x = r\sqrt{2}$$

- Para complementar o trabalho com os conteúdos desse tema, peça aos alunos que resolvam a tarefa a seguir.

- Calcule a distância entre o centro da circunferência de equação $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 12$ e a reta $s: 2x + y - 4 = 0$.

Resolução e comentários

O centro da circunferência é $C(6, -3)$. Utilizando a fórmula que calcula a distância d de um ponto $C(x_C, y_C)$ a uma reta $r: ax + by + c = 0$, temos:

$$d = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) + (-4)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

- Após finalizar o trabalho com os conteúdos do tema, proponha uma tarefa avaliativa para verificar a aprendizagem dos alunos a respeito dos tópicos estudados. Para isso, verifique a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Sorting strips.** Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor.**

MODERNA

10 Circunferência e Arte

Objetivos específicos

- Identificar elementos do estilo das obras do artista Kandinsky, verificando os princípios geométricos empregados em suas composições.
- Resolver problemas envolvendo a circunferência e a Arte.

BNCC

Ao abordar o trabalho do artista russo Wassily Kandinsky e valorizar a produção artístico-cultural para além de limites regionais, esse tema desenvolve a **Competência geral 3** da BNCC. Tratando das concepções formais de um artista que pode ser considerado marco histórico da passagem de duas épocas distintas da história da Arte e examinando as idiossincrasias de Kandinsky com base em critérios geométricos, os alunos podem ampliar suas percepções para manifestações artísticas distintas daquelas a que eventualmente estejam acostumados, contribuindo assim para uma maior fruição das infinitas possibilidades de manifestação da beleza, tanto na Arte como na Matemática.

Páginas 108 e 109 Tudo começa num ponto

- Esse tema trata da vida e obra de Kandinsky, importante artista plástico russo do início do século XX. Tendo produzido uma obra seminal para o que ficou conhecido como abstracionismo, Kandinsky apresentou ao mundo uma arte com motivos geométricos, que se afastava da mera imitação da realidade (mimese), vindo a concentrar mais atenção e sensibilidade em relações formais abstratas entre cores, linhas e superfícies. Com essa concepção artística distinta, ele não tencionava representar com realismo técnico objetos da concretude exterior, mas, sim, explorar o campo das relações abstratas de uma maneira não representacional.

  Kandinsky não foi um artista com princípios criativos isolados, com ideias apartadas de seu tempo. Pelo contrário, encontra-se em um contexto maior de transformação da Arte do século passado, em conformidade com as tendências vanguardistas do Modernismo – conjunto de movimentos culturais que revolucionou estilos e escolas artísticas em todo o mundo, modificando para sempre os modos de fazer, pensar, apreciar e consumir arte e entretenimento. Os movimentos modernistas, apesar de se diferenciarem e até mesmo serem antagonistas, tinham em comum o espírito de questionar as bases das artes clássicas tradicionais, reinterpretando o papel do artista e oferecendo novas perspectivas sobre as quais podiam pautar suas criações.

- Para alcançar seus intentos, os modernistas reexaminavam cada aspecto da existência – da individualidade à política, da religiosidade à sexualidade, do comércio à filosofia, do humanismo ao tecnicismo, da materialidade sólida às brumas do mundo dos sonhos – objetivando abandonar marcas antigas, crenças ultrapassadas e ideias obsoletas para substituí-las por formas mais condizentes com o momento histórico que vivenciavam, repleto de avanços tecnológicos e mudanças sociais, bem como com as novidades nas ciências, como a Física quântica e a Psicanálise, por exemplo, que, de certa forma, ressignificavam o entendimento humano sobre a realidade exterior e a própria essência interna. Em geral, eles acreditavam que eram os primeiros a promover uma série de ataques às tradições ultrapassadas e limitadoras, quebrando tabus, rompendo paradigmas e abrindo caminho para que os artistas do futuro tivessem mais liberdade de criação. Por essa razão, diziam-se ser "de vanguarda", valendo-se da analogia com o termo militar, que se refere aos soldados que vão na linha de frente de uma tropa ou exército, normalmente morrendo em combate, para que o restante dos guerreiros possa vencer a batalha (a escritora modernista Virginia Woolf dizia, sobre seus contemporâneos, que "esta geração tem que quebrar o pescoço para que a próxima tenha tudo mais fácil"). É dessa época o surgimento de vanguardas como o Surrealismo, o Expressionismo, o Cubismo, o Futurismo e o Dadaísmo. No Brasil, teve o ápice de sua representação na Semana de Arte Moderna de 1922, com a participação de expoentes como Mário de Andrade, Oswald de Andrade, Anita Malfatti, Heitor Villa-Lobos e Di Cavalcanti, além de influências indiretas de Tarsila do Amaral.

  Nesse cenário de efervescência cultural de fim do século XIX e primeiras décadas do século XX, Kandinsky despontou com sua plasticidade abstrata repleta de polígonos, linhas, círculos e circunferências, a qual, hoje, podemos apreciar tanto com olhos artísticos quanto matemáticos. Por inclinação própria e influência da época, ele ingressou na escola Bauhaus, programa de ensino cuja filosofia subjacente era a unidade de todas as formas de arte: pintura, escultura, arquitetura, *design* e até música e literatura, entendidos como uma única essência da qual todas as artes e ofícios emanam.

  Nesse tema, por meio da exposição de curiosidades sobre a obra desse pintor de influência decisiva no curso da arte do século XX, expande-se o conhecimento de mundo dos alunos, fazendo-os enxergar a realidade não apenas como aquilo que experimentam em nível mais imediato, mas também como resultado de valores

MODERNA

e princípios, tanto éticos quanto estéticos, que foram e permanecem sendo construídos em nível histórico-cultural. Para tanto, a obra de Kandinsky pode ser entendida como uma época de transição entre diferentes concepções quanto ao papel das artes plásticas, passando de um período mais interessado no realismo mimético para outro em que se valorizam mais as criações de caráter acentuadamente abstrato.

- Em adição, a obra de Kandinsky pode ser utilizada como ponto de partida para tarefas matemáticas, nas quais é possível estudar propriedades de polígonos, retas, círculos e circunferências, tanto em registro geométrico quanto algébrico (Geometria analítica), averiguando como essas propriedades são empregadas em seus quadros e em obras de artistas similares.

> [...] Kandinsky dá preferência aos elementos geométricos às formas expressivas, o seu vocabulário constitui-se de linhas sinuosas e retas, quadrados, triângulos, formas trapezoidais e circulares.
>
> Em 1921, Kandinsky é convidado por Walter Gropius a ministar aulas na Bauhaus em Weimar. A partir dessa experiência didática, o artista passa a estruturar um sistema para a composição com os elementos visuais, que dará origem ao seu tratado *Ponto e Linha sobre o Plano*, publicado em 1925. [...]

MUSEU DE ARTE CONTEMPORÂNEA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (MAC USP) 2004. Disponível em: <http://www.macvirtual.usp.br/mac/templates/projetos/roteiro/PDF/23.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2020.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas de abertura, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sugestão de avaliação

A fim de complementar a questão B e avaliar os conhecimentos dos alunos sobre circunferências, desafie-os a descobrir algebricamente qual(is) é(são) o(s) ponto(s) de interseção entre as circunferências de centro A e de centro G.

Resolução e comentário

Para que um ponto (x, y) esteja na interseção de duas circunferências, ele deve satisfazer simultaneamente as duas equações dessas circunferências. Desse modo, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \\ (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 1;\ y = 3$$

Assim, o único ponto de interseção entre as circunferências de centro A e de centro G é o ponto $(1, 3)$.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Resoluções e comentários

B A equação geral da circunferência é dada por $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, em que a e b são as componentes do par ordenado do ponto central (a, b) e r é o raio da circunferência. O raio r de cada circunferência pode ser obtido pela distância entre um ponto qualquer (c, d) da circunferência e o centro (a, b), utilizando o Teorema de Pitágoras: $r = \sqrt{(c-a)^2 + (d-a)^2}$. Desse modo, temos:

- circunferência de centro A: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.
- circunferência de centro C: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$.
- circunferência de centro G: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$.
- circunferência de centro I: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$.

- Complemente o trabalho com essas páginas mostrando aos alunos outras obras de Kandinsky que apresentam elementos geométricos, como na imagem a seguir, e peça a eles que elenquem as figuras geométricas observadas. Uma sugestão é acessar o *site*. Disponível em: <https://artsandculture.google.com/entity/wassily-kandinsky/m0856z>. Acesso em: 13 jul. 2020.

REPRODUÇÃO – COLEÇÃO PARTICULAR

KANDINSKY, Wassily. *Black and Violet*. 1923. Óleo sobre tela, 77,8 cm × 100,4 cm.

MODERNA

11 Cônicas

Objetivos específicos

- Compreender os diferentes modos para obter as cônicas.
- Ampliar o conhecimento sobre parábola.
- Compreender elipse, hipérbole e parábola como lugares geométricos.
- Identificar as cônicas por meio de suas respectivas equações.
- Representar as cônicas em um plano cartesiano por meio de suas equações, e vice-versa.
- Observar a simetria das curvas cônicas.

Os conteúdos abordados nesse tema são as seções cônicas: elipse, hipérbole e parábola. No tema, apresentam-se como essas curvas podem ser obtidas por meio de seções apropriadas em um cone duplo. Em seguida, essas curvas são definidas à maneira clássica, de modo a fazer os alunos compreendê-las como lugares geométricos. Além disso, são apresentadas as equações gerais para elipses, hipérboles e parábolas, promovendo um trabalho destinado a fazer com que os alunos sejam capazes de registrar algebricamente a representação cartesiana de cada uma das cônicas, e vice-versa, ou seja, traçar no plano cartesiano a curva descrita por dada equação. Ademais, o tema trata das propriedades gerais das cônicas, dando especial ênfase à simetria.

Sugestão de avaliação

Verifique a possibilidade de apresentar aos alunos as cônicas que serão abordadas nesse tema por meio da seguinte experiência.

Materiais necessários

- 1 bola de isopor
- 3 velas de diferentes comprimentos
- 1 mesa

Para realizar essa experiência, as velas devem ter comprimento menor, igual ou maior do que o diâmetro da bola de isopor. Será possível visualizar as cônicas por meio da sombra gerada, em uma mesa, pela incidência da luz da vela sobre a bola. Para isso, posicione uma bola de cada vez em uma mesa, de frente para a vela acesa.

Dessa maneira, ao utilizar a vela de comprimento:

- maior do que o diâmetro da bola, a sombra projetada terá a forma de uma elipse;
- igual ao diâmetro da bola, a sombra projetada terá a forma de uma parábola;
- menor do que o diâmetro da bola, a sombra projetada terá a forma de um dos ramos de uma hipérbole.

Alerte os alunos para os eventuais riscos na realização dessa experiência, garantindo a integridade física das pessoas envolvidas. Além disso, se a tarefa for feita em grupo, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 110 e 111 Cônicas nas construções

- As páginas de abertura se valem da arquitetura de Oscar Niemeyer para introduzir o conteúdo do tema.

  Oscar Niemeyer, tido por muitos especialistas como um dos maiores arquitetos do Brasil e reconhecido mundialmente como um dos artistas mais geniais da arquitetura moderna, nasceu em 15 de dezembro de 1907, na cidade do Rio de Janeiro. Ao longo de seus 104 anos de idade esteve envolvido em mais de uma centena de obras arquitetônicas, muitas das quais de elevado valor artístico, histórico e cultural, como os prédios do Palácio da Alvorada; do Congresso Nacional; do Museu de Arte Contemporânea, em Niterói; do Memorial da América Latina; do Ibirapuera, em São Paulo; e da Sede das Nações Unidas (ONU), em Nova Iorque.

  Em 1988, Niemeyer foi laureado com o Pritzker, prêmio máximo da arquitetura em nível global. Destacam-se dele os projetos dos edifícios cívicos de Brasília, a cidade planejada que se tornou a capital do Brasil em 1960.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Com o intuito de complementar as tarefas com essas páginas, promova trabalhos em conjunto com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **História**. Uma possibilidade é que sejam tratados aspectos históricos sobre a construção da cidade de Brasília, apresentando aos alunos textos e documentários com detalhes dessa empreitada, com enfoque especial às contribuições de Oscar Niemeyer ao projeto.

MODERNA

BNCC Esse tema contempla a **Competência geral 4** da BNCC. O trabalho com seções cônicas envolve a dinamicidade da Geometria analítica mostrando que os alunos podem recorrer tanto a representações gráficas quanto a registros algébricos, efetuando a tradução de uma notação para a outra e interpretando-as de maneira devida. Isso exige flexibilidade e precisão em diferentes linguagens próprias da Matemática e demanda diversas estratégias para encontrar soluções para os problemas.

Na teoria apresentada e nas tarefas propostas, exercita-se a habilidade de esboçar a representação geométrica das elipses, hipérboles e parábolas por meio de suas equações e também, reciprocamente, a de determinar as equações com base no esboço geométrico. Para complementar, é solicitado aos alunos que resolvam e elaborem problemas, em diferentes contextos, utilizando os conceitos estudados. Em adição, são apresentados procedimentos para converter em representações geométricas as equações de elipses, hipérboles e parábolas com a utilização de régua, lápis, barbante e esquadro.

Páginas 112 a 114

- A maneira de desenhar uma elipse indicada no final da página **112** pode ser reproduzida em sala de aula, bastando, para isso, que dois alunos segurem fixamente sobre o papel ou na lousa as pontas de um barbante e um terceiro aluno movimente o lápis ou giz.
- Ao término do trabalho com essas páginas, verifique a possibilidade de fazer na lousa, com os alunos, a dedução da equação geral da elipse, conforme segue, incentivando a participação ativa da turma. Esse tipo de tarefa permite que eles aprimorem a escrita e a leitura da linguagem matemática, bem como adquiram maior familiaridade com o raciocínio matemático demonstrativo.

  Considere a elipse de centro $C(x_0, y_0)$, com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas e cujos focos sejam $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$. Considere, ainda, um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencente à elipse.

  Pelo cálculo da distância entre dois pontos, temos:

  › $PF_1 = \sqrt{\left[x - (x_0 - c)\right]^2 + (y - y_0)^2}$ › $PF_2 = \sqrt{\left[x - (x_0 + c)\right]^2 + (y - y_0)^2}$

  Pela definição de elipse, segue que $PF_1 + PF_2 = 2a$.

  Desenvolvendo essa igualdade, obtemos:

$$\sqrt{\left[x - (x_0 - c)\right]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{\left[x - (x_0 + c)\right]^2 + (y - y_0)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\left[(x - x_0) + c\right]^2 + (y - y_0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{\left[(x - x_0) - c\right]^2 + (y - y_0)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(x - x_0) + c\right]^2 + \cancel{(y - y_0)^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{\left[(x - x_0) - c\right]^2 + (y - y_0)^2} + \left[(x - x_0) - c\right]^2 + \cancel{(y - y_0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(x - x_0)^2} + 2(x - x_0)c + \cancel{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{\left[(x - x_0) - c\right]^2 + (y - y_0)^2} + \cancel{(x - x_0)^2} - 2(x - x_0)c + \cancel{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x - x_0)c - 4a^2 = -4a\sqrt{\left[(x - x_0) - c\right]^2 + (y - y_0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(x - x_0)c - a^2\right]^2 = \left(-a\sqrt{\left[(x - x_0) - c\right]^2 + (y - y_0)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 c^2 - 2a^2 c(x - x_0) + a^4 = a^2\left(\left[(x - x_0) - c\right]^2 + (y - y_0)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 c^2 - \cancel{2a^2 c(x - x_0)} + a^4 = a^2(x - x_0)^2 - \cancel{2a^2 c(x - x_0)} + a^2 c^2 + a^2(y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 - a^2 c^2 = a^2(x - x_0)^2 - (x - x_0)^2 c^2 + a^2(y - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)(x - x_0)^2 c^2 + a^2(y - y_0)^2 \qquad (I)$$

Pelo Teorema de Pitágoras, é válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Desse modo:

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad (II)$$

Substituindo (II) em (I), ficamos com:

$$a^2b^2 = b^2\left(x - x_0\right)^2 + a^2\left(y - y_0\right)^2$$

Como a e b são diferentes de 0, podemos dividir ambos os membros da equação por a^2b^2 e, com isso, obter a equação geral da elipse que possui eixo maior paralelo ao eixo das abscissas da seguinte maneira:

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2\left(x - x_0\right)^2}{a^2b^2} + \frac{a^2\left(y - y_0\right)^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{\left(x - x_0\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y - y_0\right)^2}{b^2} = 1$$

- Ao trabalhar o conceito de excentricidade, desenhe na lousa várias elipses de excentricidades diferentes e peça aos alunos que, visualmente, indiquem quais possuem maiores ou menores excentricidades, reforçando a interpretação de que, quanto menor a excentricidade, mais a elipse se aproxima da circunferência e, quanto maior a excentricidade, mais a elipse se aproxima de um segmento de reta.

Páginas 118 a 120

- Se julgar conveniente, aplique na prática, com os alunos, ou peça a eles que apliquem individualmente, o procedimento para traçar uma hipérbole indicado na página **118**. Ao longo do processo, peça-lhes que tentem explicar por que esse método funciona, isto é, justifiquem como eles podem garantir que a curva traçada é de fato uma hipérbole, e não outra curva qualquer.
- Ao trabalhar com essas páginas, verifique a possibilidade de fazer na lousa, com a ajuda dos alunos, a dedução da equação geral da hipérbole, conforme segue abaixo, incentivando a participação ativa da turma. Esse tipo de tarefa permite que eles aprimorem a escrita e a leitura da linguagem matemática, bem como adquiram maior familiaridade com o raciocínio matemático demonstrativo.

Considere a hipérbole de centro $C\left(x_0, y_0\right)$, com eixo real paralelo ao eixo das abscissas e cujos focos sejam $F_1\left(x_0 - c, y_0\right)$ e $F_2\left(x_0 + c, y_0\right)$. Considere, ainda, um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencente à hipérbole.

Pelo cálculo da distância entre dois pontos, temos:

› $PF_1 = \sqrt{\left[x - \left(x_0 - c\right)\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2}$ › $PF_2 = \sqrt{\left[x - \left(x_0 + c\right)\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2}$

Pela definição de hipérbole, segue que $\left|PF_1 - PF_2\right| = 2a$. Desenvolvendo essa igualdade, obtemos:

$$\left|\sqrt{\left[x - \left(x_0 - c\right)\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2} - \sqrt{\left[x - \left(x_0 + c\right)\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2}\right| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left[\left(x - x_0\right) - c\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2} - \sqrt{\left[\left(x - x_0\right) + c\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2} = \pm 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left[\left(x - x_0\right) + c\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2} = \left(\pm 2a + \sqrt{\left[\left(x - x_0\right) - c\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2}\right)^2 \Rightarrow \left[\left(x - x_0\right) + c\right]^2 + \cancel{\left(y - y_0\right)^2} =$$

$$= 4a^2 \pm 4a\sqrt{\left[\left(x - x_0\right) - c\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2} + \left[\left(x - x_0\right) - c\right]^2 + \cancel{\left(y - y_0\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\left(x - x_0\right)^2} + 2\left(x - x_0\right)c + \cancel{c^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{\left[\left(x - x_0\right) - c\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2} + \cancel{\left(x - x_0\right)^2} - 2\left(x - x_0\right)c + \cancel{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{4}\left(x - x_0\right)c - \cancel{4}a^2 = \pm\cancel{4}a\sqrt{\left[\left(x - x_0\right) - c\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(x - x_0\right)c - a^2\right]^2 = \left(\pm a\sqrt{\left[\left(x - x_0\right) - c\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x - x_0\right)^2c^2 - 2a^2c\left(x - x_0\right) + a^4 = a^2\left(\left[\left(x - x_0\right) - c\right]^2 + \left(y - y_0\right)^2\right) \Rightarrow \left(x - x_0\right)^2c^2 - \cancel{2a^2c\left(x - x_0\right)} + a^4 =$$

$$= a^2\left(x - x_0\right)^2 - \cancel{2a^2c\left(x - x_0\right)} + a^2c^2 + a^2\left(y - y_0\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x - x_0\right)^2c^2 - a^2\left(x - x_0\right)^2 - a^2\left(y - y_0\right)^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(c^2 - a^2\right)\left(x - x_0\right)^2 - a^2\left(y - y_0\right)^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right) \qquad (I)$$

MODERNA

Pelo Teorema de Pitágoras, é válida a relação $c^2 = a^2 + b^2$. Portanto:

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad (II)$$

Substituindo (II) em (I), ficamos com:

$$b^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = a^2b^2$$

Como a e b são diferentes de 0, podemos dividir ambos os membros da equação por a^2b^2 e, com isso, obter a equação geral da hipérbole que possui eixo real paralelo ao eixo das abscissas da seguinte maneira:

$$\frac{b^2(x - x_0)^2}{a^2b^2} - \frac{a^2(y - y_0)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Página 123

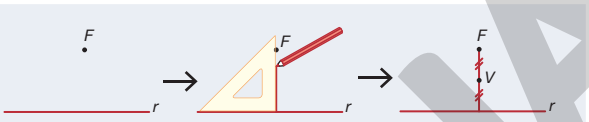
BNCC Ao trabalhar com a cinemática dos corpos, a tarefa **21** leva os alunos a refletir a respeito de situações-problema por meio de procedimentos e linguagens relacionados ao conhecimento científico, abordando aspectos da **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

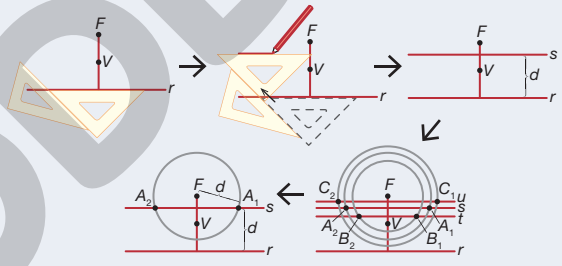
Páginas 124 a 126

- Se julgar conveniente, aplique na prática, com os alunos, ou peça a eles que apliquem individualmente, o procedimento da página **124** para traçar uma parábola. Ao longo do processo, peça-lhes que tentem explicar por que o processo funciona, ou seja, justificar como eles podem garantir que a curva traçada é de fato uma parábola, e não outra curva qualquer.

- Apresente aos alunos a construção de uma parábola, utilizando régua, esquadros e compasso. Para isso, peça-lhes que tracem uma reta r, que será a reta diretriz, e marquem um ponto F, não pertencente a r, que representará o foco. A partir desse ponto, utilizando o esquadro, trace um segmento perpendicular a r. Marque o ponto médio desse segmento, identificando-o pela letra V. Esse ponto será o vértice da parábola.

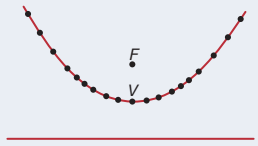


Utilize os esquadros para traçar uma reta s, paralela a r, tal que a distância d entre as retas r e s seja maior do que a distância entre V e r. Para isso, posicione os esquadros conforme mostra a figura. Em seguida, com o compasso centrado em F e com abertura d, trace uma circunferência, determinando os pontos A_1 e A_2, interseção da reta s com a circunferência. Determine outros pontos da parábola procedendo de maneira parecida.



Após repetir o procedimento algumas vezes, obtenha a parábola ligando os pontos e apagando as retas traçadas e as circunferências construídas.

Para esboçar o gráfico de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, basta marcar o ponto F abaixo da reta r.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de usar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

12 A elipse e o cometa Halley

Objetivo específico

- Resolver problemas envolvendo elipse e o cometa Halley.

BNCC O trabalho com esse tema engloba a **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias** da BNCC ao levar os alunos a valorizar e a utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo para entender e explicar a realidade.

Conceitos, estratégias e procedimentos matemáticos, tanto geométricos quanto algébricos, acerca das elipses são empregados para interpretar fatos da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, contribuindo para uma formação ampla, sobretudo no tocante à formação científica.

Além disso, a compreensão da trajetória dessas órbitas, realizando sua descrição por meio da Geometria analítica, promove mais acuidade na análise e na interpretação sobre a dinâmica dos cosmos e possibilita previsões de fenômenos do universo, abordando aspectos da **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis".

Páginas 130 e 131 **A trajetória do cometa**

O tema trata dos movimentos elípticos que são observados nas órbitas de cometas. Com base nisso, pode-se exercitar, de maneira contextualizada, os conhecimentos sobre elipses, relembrando seus elementos (foco, eixo maior, eixo menor, distância focal, excentricidade etc.) e revisando a fórmula de sua equação geral.

Nessas páginas, o conceito matemático de elipse é associado às leis de Kepler e à trajetória dos astros. Nessa abordagem, uma elipse é usada para representar a trajetória do cometa Halley.

Explique aos alunos que o alemão Johannes Kepler (1571-1630) contribuiu para diversas áreas do conhecimento. Em seus estudos sobre os movimentos dos planetas, Kepler formulou três leis que são consideradas marcos na história da Astronomia, entre elas a que descreve como elíptica a trajetória orbital dos planetas, tendo o Sol como um dos focos. Em uma tentativa de justificar essas leis, Isaac Newton (1642-1727) foi induzido a desenvolver a teoria da mecânica celeste moderna.

A constatação de que os planetas se movem em órbitas elípticas, e não circulares, é devida a Kepler, mas foi Newton quem forneceu as bases teóricas para explicar esse fenômeno. À época de Kepler, acreditava-se que todas as órbitas eram perfeitamente circulares, e qualquer observação de que certos movimentos talvez não tivessem esse formato era vista com maus olhos. Essa predisposição de crença entre os cientistas da época se deve à ideia então predominante, com influências inclusive religiosas, de que o universo é perfeito e harmônico e que círculos e esferas são as figuras geométricas mais perfeitas e harmônicas que existem, possuindo simetria em qualquer eixo que se possa considerar. Contudo, Kepler, além de realizar constantes observações dos astros, foi capaz de reunir ao longo de anos a fio tabelas pormenorizadas com medições feitas por vários astrônomos, chegando à conclusão que culminou em sua primeira lei. Porém, essa conclusão se baseava apenas em medições e cálculos brutos, carecendo de uma justificativa teórica. Foi somente com a teoria da gravitação universal de Newton que o fenômeno pôde ser plenamente explicado, sendo que tal teoria foi capaz de abranger todo o conhecimento que se tinha na época sobre a translação dos planetas, a queda de corpos, a trajetória dos cometas e o movimento das marés.

Edmond Halley (1656-1742), que foi amigo de Newton e até mesmo o ajudou a publicar suas três leis da mecânica, foi o primeiro astrônomo a teorizar que cometas seriam objetos com aparições periódicas, vindo a coroar a comprovação da veracidade dessa teoria com a previsão correta do retorno às proximidades da Terra de um cometa que, futuramente, recebeu em sua homenagem o nome de cometa Halley.

Durante a aparição do cometa Halley em 1986, ele se tornou o primeiro cometa a ser observado em detalhes de uma espaçonave, fornecendo os primeiros dados da estrutura de seu núcleo e dos mecanismos da cabeleira e da cauda.

Ter contato com as noções básicas acerca das órbitas dos corpos celestes facilita o estudo das elipses em uma atrativa aplicação prática. O fato de as órbitas dos planetas serem elípticas e terem o Sol em um dos focos é conveniente para trabalhar com a identificação de elementos como eixos maior e menor de uma elipse, foco e distância focal e para averiguar como se calcula e qual é o significado da excentricidade de uma elipse.

Resoluções e comentários

B $2a = 5{,}388 \cdot 10^9 \Rightarrow a = 2{,}694 \cdot 10^9$

$$e = \frac{2{,}606 \cdot 10^9}{2{,}694 \cdot 10^9} \Rightarrow e \simeq 0{,}967$$

Portanto, a excentricidade é aproximadamente 0,967.

C $\underbrace{\left(2{,}694 \cdot 10^9\right)}_{a}^2 = b^2 + \underbrace{\left(2{,}606 \cdot 10^9\right)}_{c}^2 \Rightarrow b \simeq 0{,}683 \cdot 10^9$

$$\frac{x^2}{\left(2{,}694 \cdot 10^9\right)^2} + \frac{y^2}{\left(0{,}683 \cdot 10^9\right)^2} = 1$$

PROIBIDA

13 Transformações geométricas

Objetivos específicos

- Compreender as características de transformações geométricas, isométricas e homotéticas.
- Reconhecer a aplicação de transformações geométricas em obras de arte, na arquitetura e em outras situações do cotidiano.
- Identificar a aplicação de transformações e de composição de transformações sobre polígonos construídos no plano cartesiano.
- Reconhecer a homotetia como uma maneira de reduzir ou aumentar uma imagem mantendo suas proporções.

Esse tema trabalha com o estudo das transformações geométricas rotação, translação, reflexão e homotetia, além da composição entre transformações. Inicialmente, promova uma conversa com toda a turma a respeito dos elementos que compõem o plano cartesiano e as características dos polígonos, de modo a identificar os conhecimentos prévios dos alunos em relação a essa temática.

Além disso, se julgar conveniente, durante os estudos relacionados a cada transformação geométrica, apresente aos alunos exemplos da realidade que possam ser associados às diferentes transformações, como obras de arte e obras arquitetônicas. Outra opção é solicitar aos alunos que façam pesquisas a respeito desses exemplos, em casa como preparação para a aula, ou no laboratório de informática, para que todos possam analisar as características das figuras ou fotos pesquisadas, comparando-as com as definições das transformações geométricas em estudo ou por meio da composição entre transformações.

BNCC Ao longo desse tema, é contemplada a habilidade **EM13MAT105** ao trabalhar com as transformações isométricas e homotéticas, contribuindo para que os alunos reconheçam a aplicação das diferentes transformações em situações diversas, principalmente no que se refere às obras de arte e arquitetônicas e a outras produções humanas ou elementos da natureza. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Páginas 132 e 133 Padrões hipnotizantes

Sala dos professores

Essa seção apresenta uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **Arte**, devido à possibilidade de relação entre os fractais e as obras de arte. Dessa forma, é possível relacionar tanto os aspectos matemáticos, como a identificação de padrões e regularidades, quanto os aspectos artísticos, como o uso de cores, os padrões e a presença em diferentes obras.

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho em associação com o professor do componente curricular **Arte**, visando enriquecer as discussões sobre os fractais e sua presença na natureza e em obras artísticas. Assim, pode ser feito um trabalho inicial no sentido de incentivar os alunos a compreender as principais características que definem os fractais, a fim de que possam, utilizando a internet, fazer pesquisas sobre diferentes tipos de fractais. Além disso, pode ser proposta a construção de fractais utilizando dobraduras e recortes, como os cartões fractais, ou mesmo por desenhos.

Cartão fractal.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a registrar suas dúvidas, durante o estudo da temática, e discutir aos pares esses conteúdos, para que, posteriormente, apresentem as conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 134

- Retome com os alunos o significado do termo "congruente" no contexto da geometria plana, destacando, por exemplo, a possibilidade de construir triângulos com as mesmas dimensões e áreas dispostos em diferentes regiões e sob diferentes posições no plano cartesiano.

Página 136

- Nas tarefas **4** e **5**, conscientize os alunos da utilização adequada da régua e do compasso, de modo que as construções feitas por eles fiquem corretas. É importante que eles desenvolvam a habilidade motora para a utilização desses instrumentos, principalmente na realização das construções características das transformações isométricas e homotéticas.

MODELO

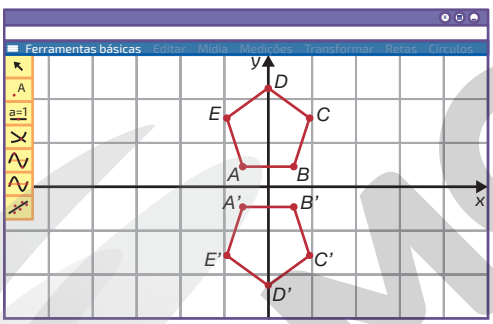
Página 137 Acessando tecnologias

- É possível desenvolver o trabalho com essa seção com o suporte de um *software* de Geometria dinâmica, a fim de relacionar as representações algébricas e geométricas com o auxílio da tecnologia. Uma sugestão de *software* dessa natureza é o GeoGebra, que é livre e gratuito para *download*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang5pt>. Acesso em: 15 jul. 2020. Ele também pode ser acessado na versão *on-line* pelo *link* a seguir. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 15 jul. 2020.

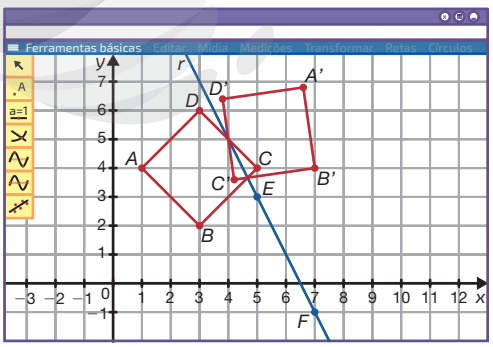
- O trabalho pode ser desenvolvido com a metodologia ativa **Sorting strips**. Para isso, utilize os passos apresentados na seção ou proponha outra construção. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! Resoluções

1 Utilizando os procedimentos empregados na reflexão do hexágono regular, a construção realizada pelos alunos deve ser semelhante à da figura a seguir, com a reflexão realizada em relação ao eixo *x*, de tal maneira que ambos os polígonos possuam comprimento de lado igual a 5 unidades.



2 A imagem do quadrado *ABCD* por reflexão em relação à reta *r* corresponde a um polígono de vértices $A'(6{,}6; 6{,}8)$, $B'(7, 4)$, $C'(4{,}2; 3{,}6)$ e $D'(3{,}8; 6{,}4)$, sendo a construção associada apresentada na imagem a seguir.



Páginas 138 e 139

Sala dos professores

A tarefa **12** da seção **Exercícios e problemas** permite um trabalho articulado com as áreas de **Linguagens e suas Tecnologias** e de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares **Matemática**, **Arte** e **História**. Se julgar conveniente, peça a esses professores que conversem com os alunos a respeito de fatos históricos associados à Catedral de Notre-Dame e sobre os elementos com características das obras artísticas contemporâneas, além de investigar outras obras arquitetônicas que também apresentam vitrais na forma de rosáceas.

Para complementar esse trabalho, avalie a possibilidade de mostrar aos alunos fotos da Catedral de Notre-Dame que mostrem a rosácea, inclusive em outras perspectivas, de modo a auxiliar os alunos a observar os padrões que se repetem, associando-os à transformações geométricas.

Página 140 Acessando tecnologias

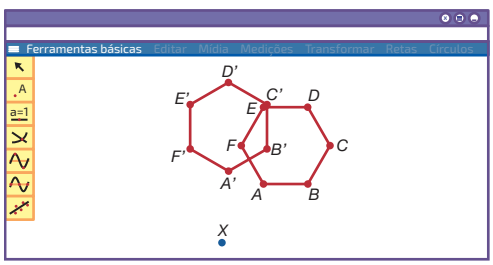
- É possível desenvolver o trabalho com essa seção com o suporte de um *software* de geometria dinâmica, a fim de relacionar as representações algébricas e geométricas com o auxílio da tecnologia. Uma sugestão de *software* dessa natureza é o GeoGebra, que pode ser obtido nos *sites* citados anteriormente.

- O trabalho pode ser desenvolvido com a metodologia ativa **Sorting strips**. Para isso, utilize os passos apresentados na seção ou proponha outra construção. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! Resoluções

1 Considerando o hexágono regular *ABCDEF*, temos:

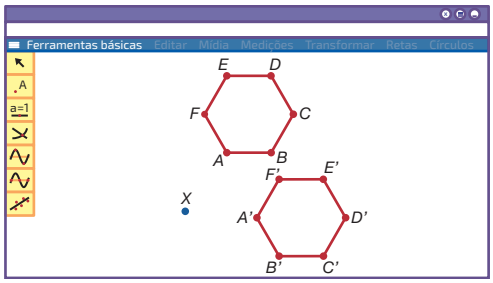
- rotação de 30° no sentido anti-horário:



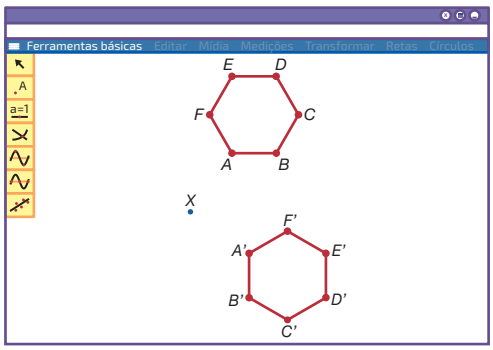
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

MODERNA

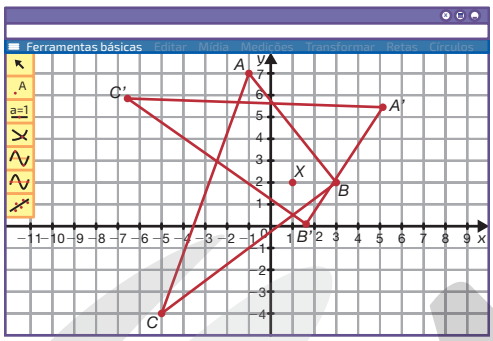
• rotação de 60° no sentido horário:



• rotação de 270° no sentido anti-horário:



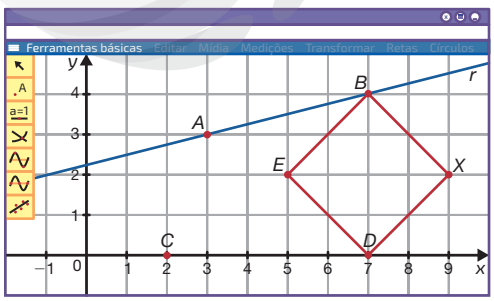
2 A figura a seguir é obtida por rotação de 72° em torno de X no sentido horário, cujos vértices são $A'(5{,}14;\ 5{,}45)$, $B'(1{,}62;\ 0{,}1)$ e $C'(-6{,}56;\ 5{,}85)$.



3 a) $X(9, 2)$

b) $A(3, 3)$ e $B(7, 4)$. $C(2, 0)$ e $D(7, 0)$.

c) Devido às distâncias comuns entre X e os pontos B e D, utilizando a ferramenta **Polígono regular**, tomando o comprimento do lado igual à distância entre os pontos X e B, é possível construir o polígono regular $XBED$, em que $E(5, 2)$, conforme a imagem a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

Página 141

• Para desenvolver o trabalho com a tarefa **R1** da seção **Exercícios e problemas resolvidos** desse tópico, verifique a possibilidade de propor o problema aos alunos antes de apresentar a seção. Para a resolução desse problema, providencie e entregue a cada um deles uma malha quadriculada, e depois oriente-os a fazer nela a construção da imagem solicitada. Além disso, também pode ser utilizado um recurso tecnológico, como o GeoGebra, disponível no endereço eletrônico citado anteriormente.

Página 143 Acessando tecnologias

• É possível desenvolver o trabalho com essa seção com o suporte de um *software* de Geometria dinâmica, a fim de relacionar as representações algébricas e geométricas com o auxílio da tecnologia. Uma sugestão de *software* dessa natureza é o GeoGebra, que pode ser obtido nos *sites* citados anteriormente.

• O trabalho pode ser desenvolvido com a metodologia ativa **Sorting strips**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

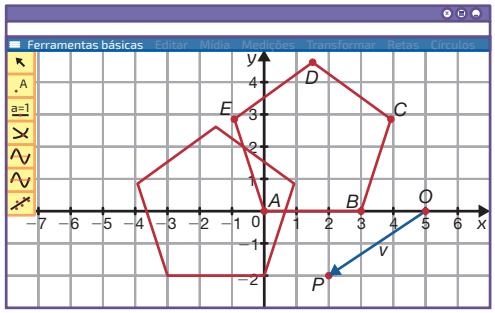
• As tarefas da seção **Acessando tecnologias** favorecem o pensamento computacional. Por meio da construção de polígonos utilizando, no caso, a transformação geométrica de translação, motiva-se a versatilidade em traduzir ideias com o suporte de ferramentas tecnológicas, empregando-as na resolução de problemas. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

• As abordagens das seções **Acessando tecnologias** possibilitam que os alunos entrem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! Resoluções

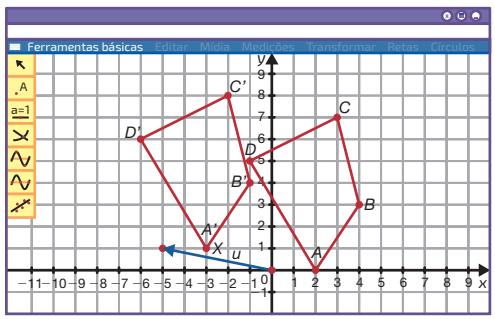
1 A construção deve ser realizada de maneira que o vetor no qual é aplicada a translação é dado por $v = (-3, -2)$, de modo que o resultado seja semelhante ao da figura apresentada a seguir.

MODERNA

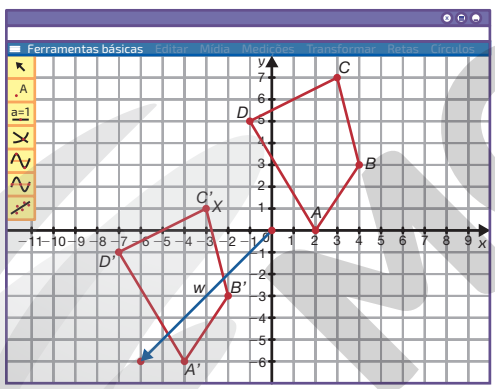


2 Para essa construção, podemos obter quatro opções de translação, visto que os vértices podem ter como imagem o ponto $X(-3, 1)$. A seguir, são indicadas as quatro possibilidades de construções.

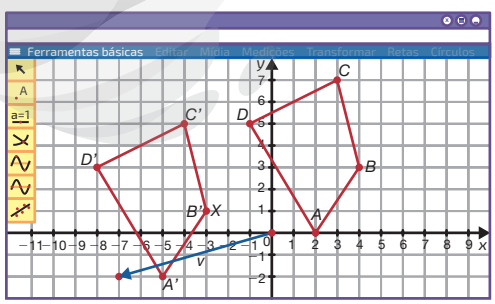
- Translação segundo o vetor $u = (-5, 1)$: imagem do ponto A coincide com X.



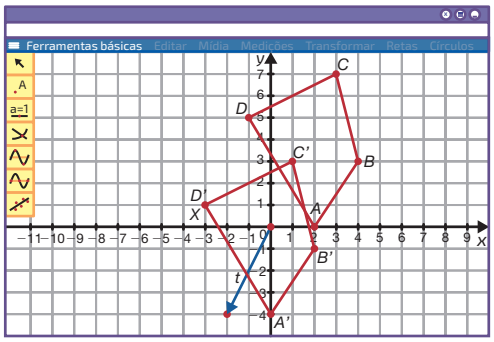
- Translação segundo o vetor $w = (-6, -6)$: imagem do ponto C coincide com X.



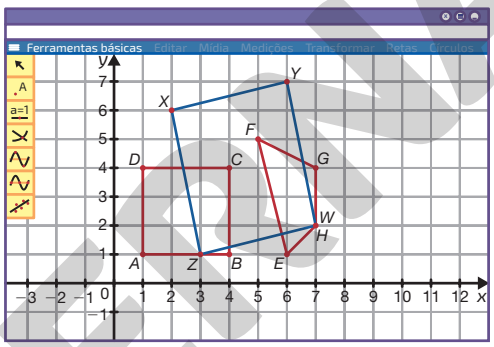
- Translação segundo o vetor $v = (-7, -2)$: imagem do ponto B coincide com X.



- Translação segundo o vetor $t = (-2, -4)$: imagem do ponto D coincide com X.



3 O paralelogramo que pode ser construído é *XYHD*, no qual dois de seus vértices pertencem ao quadrado *ABCD* e ao quadrilátero *EFGH*, conforme a seguinte construção.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

Página 146

- Ao trabalhar com os exercícios da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Nesse sentido, após os alunos resolverem esse problema, pode ser realizada uma apresentação das soluções obtidas para toda a turma e a discussão a respeito das soluções apresentadas. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 147

- Para desenvolver o trabalho com a tarefa **R2** da seção **Exercícios e problemas resolvidos** desse tópico, verifique a possibilidade de propor o problema aos alunos antes de apresentar a seção. Com isso, eles poderão realizar a construção com base nos conceitos estudados para, na sequência, comparar o procedimento utilizado por eles e o resultado obtido com a resolução proposta no livro. Esse trabalho pode ser feito em duplas ou em pequenos grupos, a fim de discutirem a respeito dos procedimentos empregados.

EXCLUSIVA ON-LINE

Converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

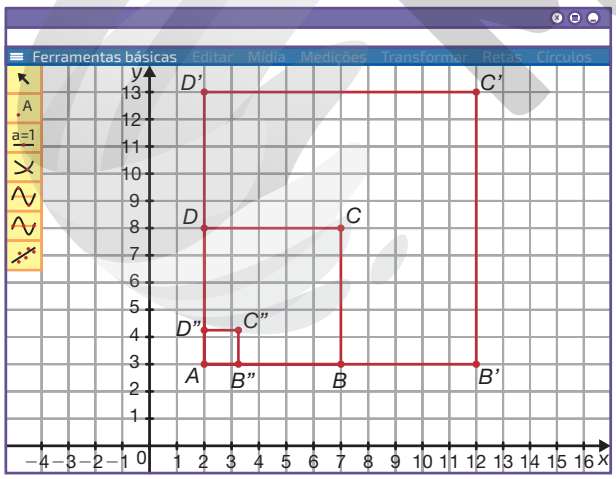
Página 149 Acessando tecnologias

- É possível desenvolver o trabalho com essa seção com o suporte de um *software* de Geometria dinâmica, a fim de relacionar as representações algébricas e geométricas com o auxílio da tecnologia. Uma sugestão de *software* dessa natureza é o GeoGebra, que é livre e gratuito para *download*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download?lang5pt>. Acesso em: 15 jul. 2020. Ele também pode ser acessado na versão *on-line* pelo *link* a seguir. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 15 jul. 2020.

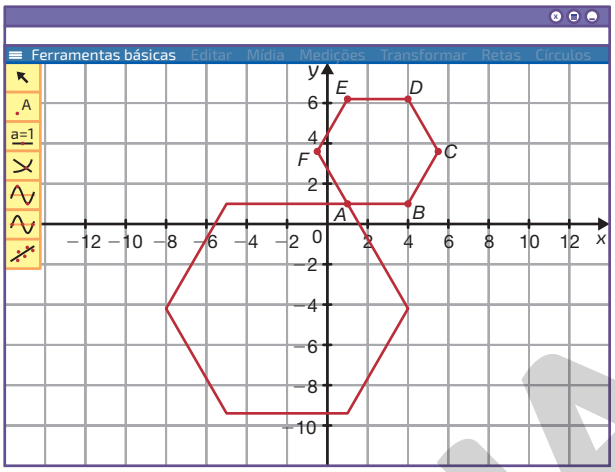
- O trabalho pode ser desenvolvido com a metodologia ativa **Sorting strips**. Para isso, utilize os passos apresentados na seção ou proponha outra construção. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é com você! Resoluções

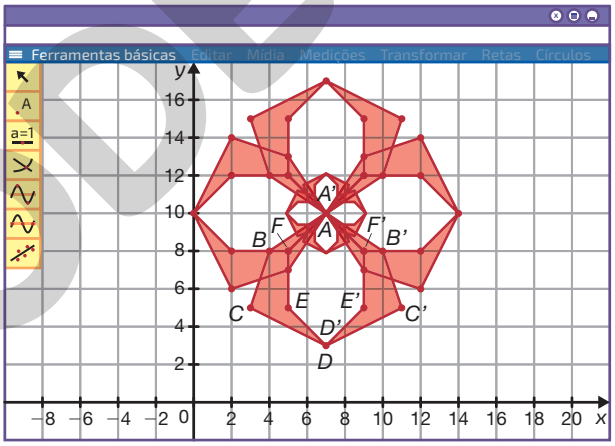
1 Uma possível construção é a ilustrada na figura a seguir, pois, se o vértice *A* estiver fixado no ponto indicado, os demais vértices podem estar em outras regiões do plano, desde que atendendo ao comprimento do lado fixo e igual a 5.



2 O hexágono regular pode ser construído em qualquer região do plano, desde que sua imagem seja construída a partir do ponto *A* indicado e segundo o fator estabelecido. Uma possível construção é indicada a seguir.



3 Resposta pessoal. Uma possível resposta: usar os pontos apresentados na dica para construir o polígono *ABCDEF*. Em seguida, fazer três rotações do polígono com o eixo no ponto *A*. Essas rotações devem ser respectivamente 90°, 180° e 270° no sentido anti-horário. Depois, fazer uma reflexão dos pontos, obtendo um novo polígono *A'B'C'D'E'F'*, e três do novo polígono (90°, 180° e 270°) no sentido horário.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Se possível, organize uma roda de conversa e solicite aos alunos que comentem quais eles pensam ser as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos envolvendo os conteúdos estudados, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

REPRODUÇÃO

14 Transformações geométricas e Arte

Objetivo específico

- Resolver problemas envolvendo transformações geométricas e Arte.

BNCC

As páginas desse tema favorecem o trabalho com a **Competência geral 3** da BNCC e com o tema contemporâneo transversal **Diversidade cultural**. Associar as propriedades matemáticas de transformações geométricas aos princípios procedimentais adotados por um artista de estilo tão peculiar é uma forma de trabalho que nutre o raciocínio transdisciplinar nos alunos, contribuindo para uma apreciação mais plena das belezas e genialidades que podem ser encontradas em manifestações artísticas. Mais do que isso, expande a visão de mundo e a cultura geral dos alunos, fazendo-os notar a multiplicidade de paradigmas e valores artístico-culturais existentes, em uma grande riqueza de diversidade que contribui para o alargamento das percepções culturais entre os povos, gerando aprendizagem mútua e contínua com a troca de experiências e expressões individuais.

Páginas 150 e 151 Os padrões geométricos de Escher

O tema aborda a utilização de transformações geométricas na obra de Maurits Cornelis Escher (1898-1972), em especial na série de composições denominada "Metamorfoses". Nessas composições, o artista emprega duas figuras contrastantes que se encaixam sem lacunas nem sobreposições e, formando um mosaico, as repete ao longo da tela inteira com leves e gradativas mudanças em seus traços, de modo a fazer com que, pouco a pouco, as figuras se metamorfoseiem em outras imagens, isto é, transformem-se em figuras diferentes daquelas que eram no princípio. Nessas sucessões de transformações, Escher segue padrões geométricos precisos que, pela habilidade com que são empregados, causam no apreciador da imagem uma sensação de transformação quase contraditória ou paradoxal, mas sem perder uma beleza formal ímpar e um curioso senso de complementaridade. Algumas de suas imagens em preto e branco evocam à mente algo como uma versão mosaica e poligonal do famoso símbolo chinês *yin-yang,* que representa a harmonia entre as forças fundamentais do universo que se contrapõem e se complementam em perpétua oscilação, havendo a dominação ora de uma, ora de outra, mas nunca a aniquilação ou a dominância completa de alguma delas, apenas transformações.

Encontrar ocorrências da Matemática na Arte e também da Arte na Matemática não é algo raro. Ao contrário disso, é comum que matemáticos profissionais enxerguem uma beleza suprema na Matemática, afirmando que sua criação em nada se distingue da criação artística, senão pelo rigor lógico que caracteriza a primeira em contraponto aos limites menos rígidos da segunda. De outro lado, muitos artistas plásticos e visuais rotineiramente empregam técnicas matemáticas no labor de seus ofícios. Nem sempre, contudo, a relação entre Matemática e Arte é explícita, e até mesmo o artista que utiliza a Matemática e o matemático com inspirações artísticas muitas vezes acabam não se dando conta dessa íntima relação. É o caso de Escher, que afirmava não conseguir acompanhar as descrições matemáticas e as interpretações geométricas que os professores faziam de seus próprios quadros.

> [...]
>
> A Matemática está presente nos diversos campos da atividade humana contribuindo na estrutura do pensamento e do raciocínio dedutivo. Já a Arte propicia a expansão do mundo cultural dos indivíduos abrindo espaço à participação social, mobiliza sentidos e capacidades essenciais para o desenvolvimento humano, como imaginação e observação. A Matemática e a Arte se integram em vários caminhos favorecendo o desenvolvimento do pensamento crítico, da autonomia intelectual, da sensibilidade e da criatividade.
>
> [...]
>
> As aulas que envolvem algum aspecto ligado a Arte assumem concepções de caráter mais expressivo, mostram-se como espaço de invenção, autonomia e descobertas, buscando a espontaneidade, baseando-se principalmente na autoexpressão dos alunos, valorizando assim o crescimento ativo e progressivo destes.
>
> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.
>
> [...]

ROSSI, Gicele da Rocha; BISOGNIN, Eleni. Explorando as transformações geométricas por meio da Arte. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2009, Ijuí. *Anais*... Ijuí: Unijuí, 2-5 jun. 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_3>. Acesso em: 15 jul. 2020.

O indício matemático mais evidente nas construções visuais de Escher são as transformações geométricas, as quais inspiram questionamentos como: quais são as condições necessárias e suficientes para que uma figura, repetida incontáveis vezes, seja capaz de preencher o plano sem sobreposições? Quais propriedades de rotações e translações Escher empregava para alcançar o efeito obtido em suas ilustrações? Seria possível alcançar o mesmo efeito adotando figuras diferentes?

EDIÇÃO MODERNA

1 Coordenadas e distâncias

1. De acordo com o gráfico, as coordenadas dos pontos são: $A(3, 2)$, $B(-6, 0)$, $C(-1, -5)$, $D(4, -4)$, $E(-3, 3)$, $F(5, 6)$ e $G(-5, -6)$.

2. a) As coordenadas do vértice desse quadrilátero, são: $A(1, 3)$, $B(2, -2)$, $C(5, 2)$ e $D(6, -1)$.

b) Uma possível resposta: $(3, 1)$, $(4, 1)$ e $(5, 1)$.

c) $A'(-1, 3)$, $B'(-2, -2)$, $C'(-5, 2)$ e $D'(-6, -1)$

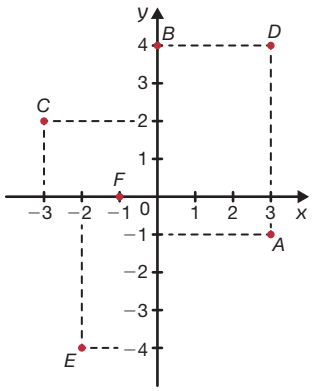
3. a) 1º e 4º quadrantes

b) 3º e 4º quadrantes

c) 2º quadrante

d) 4º quadrante

4.



RONALDO INÁCIO

5. a) Para resolver esse problema, os alunos devem compreender que os paralelos e os meridianos assim como os planos cartesianos, auxiliam na localização de alguns pontos. Além disso, a origem dos eixos nesse caso se dá em 0°.

Ao observarmos o ponto A, verificamos que ele que está representado na reta vertical de 20°.

Portanto, a longitude do ponto A é 20°.

b) O ponto C, ao observarmos a reta horizontal, está representado em 40°.

Portanto, a latitude do ponto C é 40°.

c) $B(-100°, 0°)$; $E(-40°, -40°)$

6. a) De acordo com o gráfico, temos as seguintes coordenadas:

- $A(-2, -2)$
- $B(1, 1)$
- $C(3, 3)$
- $D(-1, 1)$
- $E(1, -1)$
- $F(2, -2)$

b) Na bissetriz do 1º e do 3º quadrantes, a ordenada é igual à abscissa; na bissetriz do 2º e do 4º quadrantes, a ordenada é o oposto da abscissa.

Portanto, $x = -9$ e $y = 7$.

7. Determinamos a distância entre os pontos utilizando o Teorema de Pitágoras:

- $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (8-9)^2} = \sqrt{2}$
- $CD = \sqrt{[-3-(-3)]^2 + (12-5)^2} = \sqrt{49} = 7$
- $PQ = \sqrt{[-2-(-5)]^2 + (7-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
- $MN = \sqrt{(9-0)^2 + (0-12)^2} = \sqrt{225} = 15$

8. a) Observe nesse item que, como A, B e C são colineares, um vértice deverá estar em D.

Portanto, podem ser formados três triângulos.

b) Para classificar os triângulos em relação aos seus lados, devemos determinar o comprimento do lado de cada um deles, então:

$$AB = \left|1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| \Rightarrow AB = \frac{5}{2}$$

$$AC = \left|4 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| \Rightarrow AC = \frac{11}{2}$$

$$AD = \sqrt{\left[\frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + (0-2)^2} \Rightarrow AD = \sqrt{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = 2\sqrt{5}$$

$$BC = |4 - 1| \Rightarrow BC = 3$$

$$BD = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + (0-2)^2} \Rightarrow BD = \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = \frac{5}{2}$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 4\right)^2 + (0-2)^2} \Rightarrow CD = \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = \frac{5}{2}$$

- ΔABD é isósceles, pois $AB = BD \neq AD$.
- ΔACD é escaleno, pois $AC \neq AD$, $AD \neq CD$ e $AC \neq CD$.
- ΔBCD é isósceles, pois $BD = CD \neq BC$.

9. Para determinar o valor de x, utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$QP = 5\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(0-1)^2 + (4-x)^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 33 = 0 \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Assim, como Q está no 4º quadrante, x é -3.

10. Para resolver essa tarefa, informe aos alunos que a soma dos comprimentos de quaisquer dois lados de um triângulo é sempre maior do que o comprimento do terceiro lado.

a) Determinando a distância entre os pontos, temos:

$$AB = \sqrt{(12-0)^2 + [4-(-1)]^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{169} \Rightarrow AB = 13$$

$$AC = \sqrt{(6-0)^2 + \left[\frac{3}{2} - (-1)\right]^2} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{169}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \frac{13}{2}$$

$$BC = \sqrt{(6-12)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2} \Rightarrow BC = \sqrt{\frac{169}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{13}{2}$$

Logo:

$$\frac{13}{2} + \frac{13}{2} = 13$$

Assim, os pontos não formam um triângulo.

MODERNA

b) Determinando a distância entre os pontos, temos:

$$FG = \sqrt{(5-2)^2 + \left(0-3\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FG = \sqrt{36} \Rightarrow FG = 6$$

$$FH = \sqrt{(-1-2)^2 + \left(0-3\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FH = \sqrt{36} \Rightarrow FH = 6$$

$$GH = \sqrt{(-1-5)^2 + (0-0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow GH = \sqrt{36} \Rightarrow BC = 6$$

Logo:

$$6 + 6 > 6$$

Assim, os pontos formam um triângulo.

c) Determinando a distância entre os pontos, temos:

$$LM = \sqrt{(3-4)^2 + (1-6)^2} \Rightarrow LM = \sqrt{26}$$

$$LN = \sqrt{(9-4)^2 + (2-6)^2} \Rightarrow LN = \sqrt{41}$$

$$MN = \sqrt{(9-3)^2 + (2-1)^2} \Rightarrow MN = \sqrt{37}$$

Logo:

$$\underbrace{\sqrt{26} + \sqrt{37}}_{\simeq 11{,}18} > \underbrace{\sqrt{41}}_{\simeq 6{,}4}$$

Assim, os pontos formam um triângulo.

d) Determinando a distância entre os pontos, temos:

$$PQ = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} \Rightarrow PQ = \sqrt{25} \Rightarrow PQ = 5$$

$$PR = \sqrt{(9-1)^2 + (9-3)^2} \Rightarrow PR = \sqrt{100} \Rightarrow PR = 10$$

$$QR = \sqrt{(9-5)^2 + (9-6)^2} \Rightarrow QR = \sqrt{25} \Rightarrow QR = 5$$

Logo:

$$5 + 5 = 10$$

Assim, os pontos não formam um triângulo.

Portanto, as alternativas **b** e **c** formam triângulos.

11. $A(5, -2)$, $B(2, 2)$, $C(1, -5)$, $D(-2, -3)$, $E(-3, 3)$, $R(-1, 1)$

$$AR = \sqrt{(-1-5)^2 + \left[1-(-2)\right]^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$BR = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$CR = \sqrt{(-1-1)^2 + \left[1-(-5)\right]^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$DR = \sqrt{\left[-1-(-2)\right]^2 + \left[1-(-3)\right]^2} = \sqrt{17}$$

$$ER = \sqrt{\left[-1-(-3)\right]^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

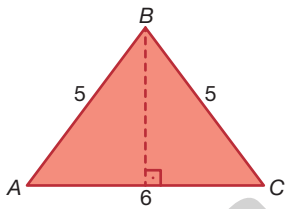
Multiplicando esses valores por 50, obtemos as distâncias, em quilômetros, de cada cidade até a antena. Assim, as distâncias aproximadas são, respectivamente, 335 km, 158 km, 316 km, 206 km e 141 km. Logo, apenas as cidades *B*, *D* e *E* recebem o sinal transmitido.

12. Inicialmente, calculamos as distâncias entre cada um dos lados do triângulo para, em seguida, determinar a área e o perímetro.

$$AB = \sqrt{\left[2-(-1)\right]^2 + (6-2)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{25} \Rightarrow AB = 5$$

$$AC = \sqrt{\left[5-(-1)\right]^2 + (2-2)^2} \Rightarrow AC = \sqrt{36} \Rightarrow AC = 6$$

$$BC = \sqrt{(5-2)^2 + (2-6)^2} \Rightarrow BC = \sqrt{25} \Rightarrow BC = 5$$



RONALDO INÁCIO

$$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$$

- Perímetro: $5 + 6 + 5 = 16$
- Área: $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$

Portanto, o perímetro desse triângulo é 16 u.c. e a área é 12 u.a.

13. Como o triângulo é retângulo, podemos determinar sua área a partir dos catetos.

$$AB = |2-5| \Rightarrow AB = 3$$

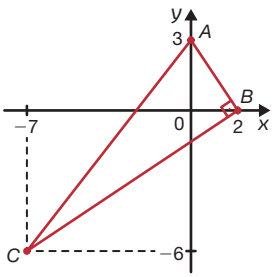
$$AC = |1-4| \Rightarrow AC = 3$$

Assim, calculando a área do triângulo:

$$A = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow A = \frac{3 \cdot 3}{2} \Rightarrow A = \frac{9}{2} \Rightarrow A = 4{,}5$$

Portanto, a área do triângulo é 4,5 u.a.

14. Oriente os alunos a montar o esquema a seguir para resolver a tarefa.



RONALDO INÁCIO

$$AB = \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(-7-0)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{130}$$

$$BC = \sqrt{(-7-2)^2 + (-6-0)^2} = \sqrt{117}$$

Temos $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Logo, os pontos *A*, *B* e *C* são vértices de um triângulo retângulo com hipotenusa $\overline{AC}$. Assim, o ponto *D* deve estar duas unidades para a esquerda e três unidades para cima do ponto *C*, ou seja, suas coordenadas são:

$$(-7-2, -6+3) = (-9, -3)$$

Portanto, as coordenadas do ponto *D* devem ser $(-9, -3)$.

MODERNA

15. De acordo com a relação de equidistância entre os pontos, considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} MP = OP \\ NP = OP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{21}{6}$$

Assim, as coordenadas são $P\left(\frac{1}{2}, \frac{21}{6}\right)$.

16. Resolução na página XCVII.

17. a) $M_{\overline{AB}}\left(\frac{4+1}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = M_{\overline{AB}}\left(\frac{5}{2}, 5\right)$

b) $M_{\overline{AB}}\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = M_{\overline{AB}}(-1, 2)$

c) $M_{\overline{AB}}\left(\frac{-7+(-2)}{2}, \frac{-9+0}{2}\right) = M_{\overline{AB}}\left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

d) $M_{\overline{AB}}\left(\frac{15+(-7)}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = M_{\overline{AB}}(4, 7)$

18. a) Sim, pois $M_{\overline{AC}}\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{7+(-5)}{2}\right) = M_{\overline{AC}}(1, 1)$.

b) • $M_{\overline{AB}}\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{7+1}{2}\right) = M_{\overline{AB}}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

• $M_{\overline{BC}}\left(\frac{1+4}{2}, \frac{1+(-5)}{2}\right) = M_{\overline{BC}}\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

19. Para realizar essa tarefa, verifique se os alunos percebem a necessidade de utilizar as coordenadas do ponto médio seguido da distância entre os pontos.

$$M_{\overline{PQ}}\left(\frac{0+4}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) \Rightarrow M_{\overline{PQ}}(2, -1)$$

$$RM_{\overline{PQ}} = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} \Rightarrow RM_{\overline{PQ}} = \sqrt{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow RM_{\overline{PQ}} = 5$$

Portanto, o comprimento da mediana em relação ao lado $\overline{PQ}$ é 5 u.c.

20. a) Os pontos C e D devem dividir o segmento AB nas proporções $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$ e $\frac{AD}{DB} = 2$, respectivamente.

• Coordenadas do ponto C:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_C - 0}{9 - x_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_C = 3$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y_C - 0}{12 - y_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_C = 4$$

• Coordenadas do ponto D:

$$\frac{AD}{DB} = 2 \Rightarrow \frac{x_D - x_A}{x_B - x_D} = 2 \Rightarrow \frac{x_D - 0}{9 - x_D} = 2 \Rightarrow x_D = 6$$

$$\frac{AD}{DB} = 2 \Rightarrow \frac{y_D - y_A}{y_B - y_D} = 2 \Rightarrow \frac{y_D - 0}{12 - y_D} = 2 \Rightarrow y_D = 8$$

Assim, $C(3, 4)$ e $D(6, 8)$.

b) $AB = \sqrt{9^2 + 12^2} \Rightarrow AB = \sqrt{225} \Rightarrow AB = 15$

Assim, a distância é dada por:

$$15 \cdot 120 = 1\,800$$

Portanto, a distância é 1 800 m.

21. Para resolver essa tarefa, considere os pontos A e B de coordenadas:

$$A(x, 0); B(0, y)$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 3 = \frac{x+0}{2} \Rightarrow x = 6$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{0+y}{2} \Rightarrow y = 8$$

Assim, $A(6, 0)$ e $B(0, 8)$.

22. De acordo com as informações apresentadas na tarefa, montamos as seguintes equações:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -3 = \frac{-6+x}{2} \Rightarrow x = 0$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -2 = \frac{y+(-8)}{2} \Rightarrow y = 4$$

Portanto, $x = 0$ e $y = 4$.

23. Sabendo que o ponto $G(2, -4)$ é o baricentro do triângulo, temos, de acordo com o fórmula do baricentro:

$$x_G = \frac{x_P + x_Q + x_R}{3} \Rightarrow 2 = \frac{-2+5+x}{3} \Rightarrow x = 3$$

$$y_G = \frac{y_P + y_Q + y_R}{3} \Rightarrow -4 = \frac{1+(-6)+y}{3} \Rightarrow y = -7$$

Portanto, $x = 3$ e $y = -7$.

24. Para resolver essa tarefa, considere o ponto $Q(x_Q, y_Q)$.

Assim, temos:

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{x_Q - x_P}{x_R - x_Q} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{x_Q - (-3)}{1 - x_Q} = \frac{2}{5} \Rightarrow x_Q = -\frac{13}{7}$$

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{y_Q - y_P}{y_R - y_Q} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{y_Q - 5}{3 - y_Q} = \frac{2}{5} \Rightarrow y_Q = \frac{31}{7}$$

Assim, $Q\left(-\frac{13}{7}, \frac{31}{7}\right)$.

25. Inicialmente, calculamos a coordenada do ponto médio entre B e C, A e C, A e B, e, em seguida, o comprimento de cada um desses segmentos.

Logo:

a) • $M_{\overline{BC}}\left(\frac{-5+(-3)}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) = M_{\overline{BC}}(-4, -2)$

$$AM_{\overline{BC}} = \sqrt{(-4-0)^2 + [-2-(-1)]^2} = \sqrt{17}$$

• $M_{\overline{AC}}\left(\frac{0+(-3)}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = M_{\overline{AC}}\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

$$BM_{\overline{AC}} = \sqrt{\left[-\frac{3}{2} - (-5)\right]^2 + (0-5)^2} = \sqrt{\frac{149}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{149}}{2}$$

MODERNA

- $M_{\overline{AB}}\left(\frac{0+(-5)}{2}, \frac{-1+(-5)}{2}\right) = M_{\overline{AB}}\left(-\frac{5}{2}, -3\right)$

$CM_{\overline{AB}} = \sqrt{\left[-\frac{5}{2}-(-3)\right]^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

b) $G\left(\frac{0+(-5)+(-3)}{3}, \frac{-1+(-5)+1}{3}\right) = G\left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

26. De acordo com os pontos médios M e N dados, segue que:

- $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-5 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 9$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 3 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 4$

- $x_N = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{-5 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 8$

$y_N = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 0$

Assim, $B(9, 4)$ e $C(8, 0)$.

27. **a)** Calculando o baricentro do triângulo, temos:

$G\left(\frac{-4+(-2)+2}{3}, \frac{-1+4+3}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

Portanto, $G\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$.

b) Calculando a distância entre os pontos, temos:

$GC = \sqrt{\left[2-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]^2 + (3-2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow GC = \sqrt{\frac{109}{9}} \Rightarrow GC = \frac{\sqrt{109}}{3}$

Portanto, a distância entre o baricentro e C é $\frac{\sqrt{109}}{3}$.

28. **a)** Como P, Q e R são pontos médios, temos:

- $P\left(\frac{4+7}{2}, \frac{10+4}{2}\right) = P\left(\frac{11}{2}, 7\right)$
- $Q\left(\frac{4+1}{2}, \frac{10+4}{2}\right) = Q\left(\frac{5}{2}, 7\right)$
- $R\left(\frac{1+7}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = R(4, 4)$

b) Calculando o baricentro, temos:

- $G\left(\frac{4+1+7}{3}, \frac{10+4+4}{3}\right) = G(4, 6)$
- $H\left(\frac{\frac{11}{2}+\frac{5}{2}+4}{3}, \frac{7+7+4}{3}\right) = H(4, 6)$

29. Para resolver esse problema, sugira que o plano cartesiano tenha origem no ponto M. Considerando o ponto A o ponto médio entre a distância $\overline{MT}$, temos $A(40, 0)$. Assim, ao seguir perpendicularmente em direção ao ponto X, determinamos as coordenadas do tesouro em $X(40, 40)$.

2 Matrizes

1. **a)** 2×2 **c)** 1×4
b) 5×3 **d)** 2×4

2. **a)** $a_{11} = 0$ **c)** $a_{31} = \pi$
b) $a_{13} = 5{,}7$ **d)** $a_{24} = \sqrt{7}$

3. **a)** Representando a tabela por uma matriz, temos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 62 & 14 \\ 91 & 261 \\ 160 & 303 \end{bmatrix}.$$

b) • O total de títulos do cinema estrangeiro ou brasileiro lançados em 2017.
- As quantidades de títulos do cinema brasileiro lançados por gênero em 2017 e o seu total.
- A quantidade de títulos de ficção do cinema brasileiro lançados em 2017.

4. **a)** 7 períodos; 18 grupos
b) 8 elementos; 18 elementos
c) De acordo com a tabela periódica, temos:
- C
- Au
- I

d) De acordo com a tabela periódica, temos:
- Zn: período: 4; grupo: 12
- Cl: período: 3; grupo: 17
- Db: período: 7; grupo: 5

5. **a)** Determinando os elementos da matriz, temos:

$a_{11} = 1 - 1 \Rightarrow a_{11} = 0$
$a_{12} = 1 - 2 \Rightarrow a_{12} = -1$
$a_{21} = 2 - 1 \Rightarrow a_{21} = 1$
$a_{22} = 2 - 2 \Rightarrow a_{22} = 0$

Portanto, a matriz obtida é $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Determinando os elementos da matriz, temos:

$b_{11} = (1+1)^2 \Rightarrow b_{11} = 4$
$b_{12} = (1+2)^2 \Rightarrow b_{12} = 9$
$b_{13} = (1+3)^2 \Rightarrow b_{13} = 16$
$b_{21} = (2+1)^2 \Rightarrow b_{21} = 9$
$b_{22} = (2+2)^2 \Rightarrow b_{22} = 16$
$b_{23} = (2+3)^2 \Rightarrow b_{23} = 25$

Portanto, a matriz obtida é $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$.

c) Determinando os elementos da matriz, temos:

$c_{11} = 1$
$c_{12} = 1 + 2 \Rightarrow c_{12} = 3$
$c_{21} = 2 + 1 \Rightarrow c_{21} = 3$
$c_{22} = 2$
$c_{31} = 3 + 1 \Rightarrow c_{31} = 4$
$c_{32} = 3 + 2 \Rightarrow c_{32} = 5$

Portanto, a matriz obtida é $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

MODERNA

6. a) Temos $m \times n = 7$. Como $m, n \in \mathbb{N}^*$, segue que $m = 1$ e $n = 7$ ou $m = 7$ e $n = 1$. Assim, a matriz é de ordem 1×7 ou 7×1.

b) $m \times n = 20$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$, assim, se:

- $m = 1 \Rightarrow n = 20$
- $m = 2 \Rightarrow n = 10$
- $m = 4 \Rightarrow n = 5$
- $m = 5 \Rightarrow n = 4$
- $m = 10 \Rightarrow n = 2$
- $m = 20 \Rightarrow n = 1$

Portanto, as possíveis ordens para a matriz são: 1×20, 20×1, 2×10, 10×2, 4×5 ou 5×4.

- Resposta pessoal.

7. Conforme os dados do problema, temos:

$$a_{11} = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \Rightarrow a_{11} = -1$$

$$a_{12} = 1^2 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \Rightarrow a_{12} = -3$$

$$a_{21} = 2^2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \Rightarrow a_{21} = 3$$

$$a_{22} = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \Rightarrow a_{22} = 2$$

Portanto, a matriz obtida é $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

8. De acordo com os elementos apresentados na matriz, segue que:

$$\big[2 + 6 + (-1) + (-6)\big] - \big[10 + 0 + (-4) + (-5)\big] = 0$$

Portanto, a diferença entre a soma dessas diagonais da matriz dada é 0.

9. a) matriz linha
b) matriz nula
c) matriz quadrada
d) matriz quadrada e triangular
e) matriz quadrada, triangular, diagonal e identidade
f) matriz coluna

10. alternativa **a**

Observe que a matriz M tem na sua diagonal principal a cor preta, ou seja, seus elementos são nulos, pois $i = j$.

A parte triangular inferior da matriz, onde $i < j$, é inteira determinada pelo *pixel* cinza e a parte triangular superior da matriz, onde $i > j$, é inteira determinada pelo *pixel* branco. Como trata-se de uma matriz quadrada, a quantidade de elementos triangulares inferiores é igual à de elementos triangulares superiores.

Logo, as alternativas **b** e **c** estão incorretas, pois o número de *pixels* pretos é igual à quantidade de elementos da diagonal principal. As alternativas **d** e **e** estão incorretas, pois a diagonal é formada somente por *pixels* pretos.
Portanto, a alternativa correta é **a**.

11. Calculando o traço de cada uma das matrizes, ou seja, somando-se os elementos de sua diagonal principal, temos:

- traço da matriz A: $5 + (-9) = -4$
- traço da matriz B: $-1 + 5 + 3 = 7$

12. Uma possível resposta: $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

13. a) Verdadeira.
b) Verdadeira.
c) Falsa, pois nem toda matriz quadrada é triangular superior, porém toda matriz triangular superior (ou inferior) é quadrada.
d) Falsa, pois uma matriz só é denominada nula quando todos os seus elementos forem iguais a 0.
e) Verdadeira.

14. a) $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) • ida:

Rio Branco → Porto Velho → Manaus → Boa Vista

$$3 \cdot 210 = 630$$

• volta:

Boa Vista → Manaus → Rio Branco

$$2 \cdot 210 = 420$$

Assim, o menor custo para a viagem será $\underbrace{\text{R\$ } 1050{,}00}_{630{,}00 + 420{,}00}$.

c) não; não

15. a) Nesse item, x e y são determinados diretamente pela igualdade das matrizes.
Portanto, $x = -3$ e $y = 7$.

b) Nesse item, é possível obter um sistema com as equações determinadas por meio da igualdade entre as matrizes:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 3y \\ 2x = 4 \\ 5y + 3 = 4x \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 1$$

Portanto, $x = 2$ e $y = 1$.

16. • $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}^t \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

• $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 13 \end{bmatrix}^t \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 13 \end{bmatrix}$

17. Conforme as respostas da tarefa **16**, a Matriz B é simétrica, já que $B = B^t$.

3 Operações com matrizes

1. a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ -9 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ -21 & 19 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -6 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -9 \\ -6 & -6 & 11 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

d) $D = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

2. Resolução na página XCVII.

MODERNA

3. a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -\pi \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow -B = \begin{bmatrix} -1 & \pi \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -1 \\ \sqrt[3]{-6} & 2 & 10 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow -C = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 & 1 \\ -\sqrt[3]{-6} & -2 & -10 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow -D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. a) $B + B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow B + B = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B + A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B + A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

c) $A + A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + A^t = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

d) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

5. a) Matriz que apresenta as temperaturas mínimas:

$M = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 18 & 17 & 17 \\ 22 & 20 & 23 & 28 & 27 \\ 25 & 22 & 23 & 23 & 28 \\ 22 & 22 & 22 & 20 & 21 \end{bmatrix}$

Matriz que apresenta as temperaturas máximas:

$N = \begin{bmatrix} 33 & 33 & 32 & 31 & 32 \\ 36 & 36 & 39 & 39 & 40 \\ 40 & 39 & 41 & 41 & 41 \\ 38 & 39 & 37 & 36 & 38 \end{bmatrix}$

b) A variação de temperatura de cada dia é dada pela matriz $B = N - M$

c) $B = N - M \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 17 & 12 & 14 & 14 & 15 \\ 14 & 16 & 16 & 11 & 13 \\ 15 & 17 & 18 & 18 & 13 \\ 16 & 17 & 15 & 16 & 17 \end{bmatrix}$

d) maior variação de temperatura nessa data: Cuiabá - MT
menor variação de temperatura nessa data: Campo Grande - MS

e) No dia 12.

6. De acordo com a soma de matrizes, temos:

$A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -8 & 8 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

7. Resposta pessoal.

8. a) De acordo com a multiplicação por escalar, temos:

$-3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & \pi & \frac{1}{6} \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3\pi & -\frac{1}{2} \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3x \\ 0 & 1 \\ 9x^2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2x \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 6x^2 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

9. Resolução na página XCVIII.

10. Resolvendo a equação por meio das propriedades das operações e da igualdade de matrizes, temos:

$4 \cdot \begin{bmatrix} x & 2 \\ -z & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & 6 \\ 5 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4x & 8 \\ -4z & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & 6 \\ 5 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4x - y & 2 \\ -4z - 5 & 4 - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 3 \\ -4z - 5 = 7 \\ 4 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{4},\ y = 4 \text{ e } z = -3$

11. Observe que a matriz C representa a quantidade de tecido e de botões utilizados na confecção de 3 modelos de camisa. Para escrevermos uma matriz que indica a quantidade necessária para a confecção de 18 camisas de cada modelo, segue que:

$18 \cdot C = 18 \cdot \begin{bmatrix} 0,9 & 0,8 & 1,1 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,2 & 14,4 & 19,8 \\ 90 & 126 & 144 \end{bmatrix}$

Portanto, para a confecção de 18 camisas, são necessários, para o 1º modelo, 16,2 m e 90 botões, para o 2º modelo, 14,4 m e 126 botões e, para o 3º modelo, 19,8 m e 144 botões.

12. Resolução na página XCVIII.

13. Com base nos valores das matrizes A e B das páginas **38** e **39**, temos:

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0,15 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,15 & 0,05 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,05 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 29,9 \\ 18,9 \\ 4,6 \\ 13,9 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 0,2 \cdot 29,9 + 0,1 \cdot 4,6 \\ 0,15 \cdot 29,9 + 0,2 \cdot 18,9 \\ 0,2 \cdot 29,9 + 0,15 \cdot 18,9 + 0,05 \cdot 4,6 \\ 0,2 \cdot 29,9 + 0,05 \cdot 4,6 + 0,25 \cdot 13,9 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 6,44 \\ 8,27 \\ 9,05 \\ 9,69 \end{bmatrix}$

MODERNA

14. a) De acordo com a multiplicação de matrizes, só é possível a multiplicação entre A e B se a quantidade de colunas de A for igual à quantidade de linhas de B.

Como A tem duas colunas e m representa a quantidade de linhas de B, então m é igual a 2.

b) A matriz C, resultado da multiplicação de A por B, tem ordem igual à quantidade de linhas da matriz A e à quantidade de colunas da matriz B, logo a ordem de C é 3×4.

15. Calculando os respectivos produtos, temos:

- $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 22 & -29 \\ 11 & -\frac{23}{2} \end{bmatrix}$

- $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 23 & 19 \end{bmatrix}$

16. Resposta pessoal.

17. a) Montando as matrizes de acordo com os dados da tabela e calculando o produto, temos:

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 3 \\ 11 & 4 & 3 \\ 10 & 6 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 39 \\ 37 \\ 36 \\ 32 \\ 31 \end{bmatrix}$$

b) De acordo com a matriz C resultante no item anterior, o Flamengo obteve 39 pontos e o Corinthians obteve 32 pontos.

18. a) $r_{12} = 3 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-3) \Rightarrow r_{12} = -12$

b) $r_{21} = (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 5 \Rightarrow r_{21} = 19$

c) $r_{23} = (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 2 \Rightarrow r_{23} = 8$

19. a) De acordo com as propriedades das operações com matrizes, temos:

a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 45 \\ 18 & -19 & -18 \end{bmatrix}$

b) $A^t \cdot C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t \cdot C = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C \cdot B = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 18 \\ 20 & -14 & 0 \end{bmatrix}$

d) $(A + C) \cdot B = \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A + C) \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow (A + C) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 21 & 63 \\ 38 & -33 & -18 \end{bmatrix}$

20. Calculando o produto entre as matrizes e igualando à matriz linha, temos:

$$\begin{cases} 1 \cdot x + (-2) \cdot 1 = -5 \\ 1 \cdot 3 + (-2) \cdot y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ e } y = \frac{1}{2}$$

Portanto, $x = -3$ e $y = \frac{1}{2}$.

21. De acordo com as propriedades da multiplicação de matrizes, podemos montar o seguinte esquema para a multiplicação das matrizes A, B e C:

$$A_{p \times q} \cdot B_{3 \times r} \Rightarrow (A \cdot B)_{p \times s}$$

$$(A \cdot B)_{p \times r} \cdot C_{4 \times s} \Rightarrow \left((A \cdot B) \cdot C \right)_{p \times s}$$

Para que a multiplicação entre $(A \cdot B)$ por C seja válida, r deve ser igual ao número de linhas de C e, como a ordem da multiplicação das matrizes é igual a 5×3, então p é igual a 5, q é igual a 3, r é igual a 4 e s é igual a 3.

4 Matriz inversa e determinantes

1. a) $A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ a + 4c & b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ a + 4c = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ b + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$, $c = -\frac{1}{10}$ e $d = \frac{3}{10}$

Assim, $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$.

Verificando que $X \cdot A = I_2$, temos:

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A^{-1} = X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$.

b) Temos $B = I_3$. Como $B \cdot I_3 = I_3 \cdot B = B = I_3$, então

$$B^{-1} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) $\begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 18 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -12a + 6c & -12b + 6d \\ 18a - 9c & 18b - 9d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -12a + 6c = 1 \\ 18a - 9c = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} -12b + 6d = 0 \\ 18b - 9d = 1 \end{cases}$

Os sistemas não possuem solução. Assim, não existe C^{-1}.

d) $D \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4a + 4c & 4b + 4d \\ 8a & 8b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 4c = 1 \\ 8a = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 4b + 4d = 0 \\ 8b = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0$, $b = \frac{1}{8}$, $c = \frac{1}{4}$ e $d = -\frac{1}{8}$

MODERNA

Assim, $X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$.

Verificando que $X \cdot D = I_2$, temos:

$$X \cdot D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $D^{-1} = X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$.

2. $A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} m & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & n \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & mn - 6 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} mn - 6 = 0 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 6$ e $n = 1$

Assim, $m + n = 6 + 1 = 7$.

3. Resolução na página XCIX.

4. a) $X - \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 23 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 23 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 27 & -3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -8 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = -\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

5. X é uma matriz de ordem 2×2. Assim:

$A \cdot X + B = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + c & 3b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 2c = 8 \\ 3a + c = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} b + 2d = 7 \\ 3b + d = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{2}{5}$, $b = 1$, $c = \frac{19}{5}$ e $d = 3$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{19}{5} & 3 \end{bmatrix}$.

6. a) $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} & \text{(I)} \\ Y - X = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} & \text{(II)} \end{cases}$

Somando **I** e **II**, temos:

$(X + Y) + (Y - X) = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2Y = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Substituindo em **I**, temos:

$X + \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 2 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} & \text{(I)} \\ X - 2Y = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \end{bmatrix} & \text{(II)} \end{cases}$

Subtraindo **II** de **I**, temos:

$(X + Y) - (X - 2Y) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3Y = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -2 \end{bmatrix}$

Substituindo em **I**, temos:

$X + \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$

7. X é uma matriz de ordem 2×1. Assim:

$M \cdot X = N \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a \\ 3a - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4a = 6 \\ 3a - b = 9 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{9}{2}$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$.

8. a) Inicialmente, colocamos os dados da tabela em uma matriz e a multiplicamos pela matriz coluna em que x, y e z indicam o peso de cada avaliação.

$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 8 & 8{,}5 & 9{,}5 \\ 9{,}5 & 10 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}8 \\ 8{,}9 \\ 9{,}4 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8x + 9y + 9z \\ 8x + 8{,}5y + 9{,}5z \\ 9{,}5x + 10y + 9z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}8 \\ 8{,}9 \\ 9{,}4 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 8x + 9y + 9z = 88 \\ 8x + 8{,}5y + 9{,}5z = 8{,}9 \\ 9{,}5x + 10y + 9z = 9{,}4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0{,}2$, $y = 0{,}3$ e $z = 0{,}5$

Portanto, o trabalho **1**, o trabalho **2** e a prova possuem, respectivamente, pesos 20%, 30% e 50%.

b) $7 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}5 = 8{,}1$

c) Algumas possíveis respostas: no trabalho **1**: 8, no trabalho **2**: 8 e na prova: 10; no trabalho **1**: 9, no trabalho **2**: 9 e na prova: 9.

MODERNA

9. a) $\det A = -12$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 15 & 14 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 120 - 84 = 36$

c) $\det C = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 10 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 60 + 8 + 2 + 20 - 0 = -30$

d) $\det D = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$

$= 48 + 0 - 18 - 12 - 0 + 126 = 144$

10. Nessa tarefa, os alunos devem compreender a definição do traço de uma matriz que é dado pela soma dos elementos da diagonal principal.

Sendo assim, segue que:

$$2 + 2 + x = 6 \Rightarrow x = 2$$

$$\det A = -61 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ -1 & y & 2 \end{vmatrix} = -61 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - 3 + 0 - 0 - 2y - 48 = -61 \Rightarrow y = 9$$

Portanto, $x = 2$ e $y = 9$.

11. a) De acordo com as propriedades definidas em cada um dos itens, segue que:

$$A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad - bc}_{\det A}$$

b) $k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(k \cdot A) = \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = ka \cdot kd - kb \cdot kc =$$

$$= k^2 \cdot a \cdot d - k^2 \cdot b \cdot c = k^2 \cdot \underbrace{(ad - bc)}_{\det A}$$

12. a) $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 10 + 0 - 21 - 4 + 140 - 0 = 125$

b) $2 \cdot \det A = 2 \cdot 125 = 250$

c) $\det(2A) = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -8 \\ -4 & 14 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 80 + 0 - 168 - 32 + 1\,120 - 0 = 1\,000$

d) $\det(2A^t) = \begin{vmatrix} 10 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 14 \\ -2 & -8 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 80 - 168 + 0 - 32 + 1\,120 - 0 = 1\,000$

13. Inicialmente, resolvemos o determinante da cada uma das matrizes e, em seguida, substituímos os resultados obtidos na equação.

Assim, temos:

- $\det A = \begin{vmatrix} 3 & x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 3 \cdot x^2 - x \cdot x = 2x^2$
- $\det B = \begin{vmatrix} 6x & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = 6x \cdot 1 - x \cdot 2x = 6x - 2x^2$

Assim:

$\det A = 3 \cdot \det B \Rightarrow 2x^2 = 3 \cdot (6x - 2x^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x^2 - 9x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

14. $M \cdot N = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 8 & 3 \\ 6a & 6 & 2 \\ -3a & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(M \cdot N) = -360 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2a & 8 & 3 \\ 6a & 6 & 2 \\ -3a & -3 & 1 \end{vmatrix} = -360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a - 48a - 54a + 54a + 12a - 48a = -360 \Rightarrow a = 5$$

15. • $\begin{vmatrix} 2x & 6 & -1 \\ 2(x-1) & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -2x \end{vmatrix} =$

$= 0 - 24 + 8 - 8x - 0 + 16x - 24x + 24x^2 =$

$= 24x^2 - 16x - 16$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 0 & 3 & 5 \\ 2x & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6x + 10x + 0 - 6x^2 - 20x - 0 = -6x^2 - 4x$$

- Assim:

$$\frac{1}{4} \cdot (24x^2 - 16x - 16) = -6x^2 - 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

16. Utilizando o Teorema de Binet, temos:

$$\begin{matrix} \cdot 3 \\ + \end{matrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{de Jacobi}]{\text{Teorema}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{de Binet}]{\text{Teorema}}$$

$$\xrightarrow[\text{de Binet}]{\text{Teorema}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 14 & 8 \end{bmatrix}$$

- Para $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 14 & 8 \end{bmatrix}$, tem-se $\det A = \det B$.

Portanto, a matriz é $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 14 & 8 \end{bmatrix}$

17. a) $\det A = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 + 6 + 0 - 6 - 0 - 6 = 1$

b) $\begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \end{matrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} + \\ \cdot(-3) \end{matrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \end{matrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. a) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 12 + 0 + 3 - 0 + 4 = -4$

b) $\det A^t = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 2 + 24 - 16 + 9 + 8 = 51$

c) $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 9 + 18 - 1 + 12 = 18$

$\det(A \cdot C) = \det A \cdot \det C = \det A^t \cdot \det C = 51 \cdot 18 = 918$

d) $\det(C \cdot B) = \det C \cdot \det B = 18 \cdot (-4) = -72$

MODERNA

6 O ponto e a reta

1. a) $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & -7 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det A = -7 - 5 + 3 - 7 + 15 + 1 \Rightarrow \det A = 0$

Portanto, os pontos A, B e C estão alinhados.

b) $\begin{vmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det B = 35 + 24 + 27 - 21 - 36 - 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det B = -1 \Rightarrow \det B \neq 0$

Portanto, os pontos D, E e F não estão alinhados.

c) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det C = 12 - 48 + 24 + 12 \Rightarrow \det C = 0$

Portanto, os pontos P, Q e R estão alinhados.

d) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 12 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det D = 45 + 14 + 48 - 63 - 24 - 20 \Rightarrow$

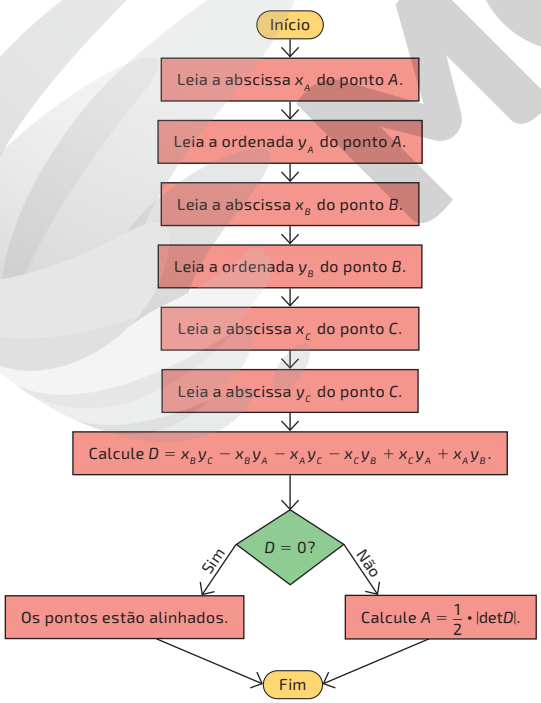
$\Rightarrow \det D = 0$

Portanto, os pontos S, T e U estão alinhados.

2. Algoritmo:

Início
1. Leia a abscissa x_A do ponto A.
2. Leia a ordenada y_A do ponto A.
3. Leia a abscissa x_B do ponto B.
4. Leia a ordenada y_B do ponto B.
5. Leia a abscissa x_C do ponto C.
6. Leia a ordenada y_C do ponto C.
7. Calcule $D = x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B$.
8. Se $D = 0$, os pontos estão alinhados. Se não, calcule $A = \frac{1}{2} \cdot |\det D|$.
Fim

Organizando o algoritmo em um fluxograma, temos:



3. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 7 & r & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 28 - 7 + r - 49 + 1 - 4r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3r - 27 = 0 \Rightarrow r = -9$

Portanto, $r = -9$.

4. a) Nessa tarefa, os alunos devem observar que os pontos S, T e L devem estar alinhados. Além disso, a abscissa do ponto T que representa a Terra está indicada por a. Logo:-

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & \frac{11}{2} & 1 \\ 14 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7a - 77 = 0 \Rightarrow a = 11$$

Portanto, o valor da abscissa a da posição da Terra é 11.

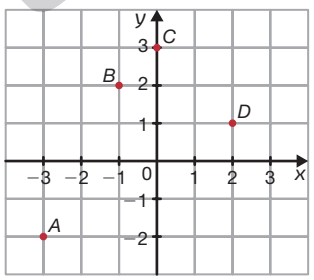
b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 12 & 1 \\ x_T & y_T & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -12x_T + 9y_T = 0 \Rightarrow y_T = \frac{4}{3}x_T$

$ST = 20 \Rightarrow \sqrt{x_T^2 + y_T^2} = 20 \Rightarrow x_T^2 + y_T^2 = 400 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_T^2 + \left(\frac{4}{3}x_T\right)^2 = 400 \Rightarrow x_T = 12$ ou $x_T = -12$

Como T está no 1º quadrante, $x_T = 12$. Substituindo em $y_T = \frac{4}{3}x_T$, obtemos $y_T = 16$. Assim, $T(12, 16)$. Nesse caso, há a ocorrência de um eclipse solar.

5. Para resolver essa tarefa, solicite aos alunos que coloquem os pontos apresentados no plano cartesiano a fim de auxiliar na compreensão dos cálculos. Assim, eles vão observar que, para não ocorrer a situação do problema, os pontos A, B e E e os pontos C, D e E não devem estar alinhados.



RONALDO INÁCIO

Assim, temos as seguintes equações:
Pontos A, B e E:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6 - 2x - y - 2x - 2 + 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x + 2y - 8 = 0$$

Pontos C, D e E:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 2y - 6 = 0$$

Logo, utilizando um sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} -4x + 2y = 8 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ e } y = \frac{10}{3}$$

Portanto, $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

MODERNA

6. a) Inicialmente, calculamos o determinante:

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 9 + 4 + 3 - 6 + 8 = 22$$

Em seguida, calculamos a área da região determinada pelo triângulo:

$$A = \frac{1}{2}|22| \Rightarrow A = 11$$

Portanto, a área do triângulo é 11 u.a.

b) Inicialmente, calculamos o determinante:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 21 + 20 - 7 - 15 + 8 = 25$$

Em seguida, calculamos a área da região determinada pelo triângulo:

$$A = \frac{1}{2}|25| \Rightarrow A = \frac{25}{2}$$

Portanto, a área do triângulo é $\frac{25}{2}$ u.a.

c) Inicialmente, calculamos o determinante:

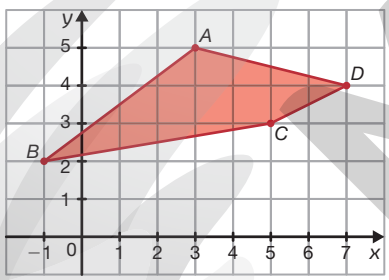
$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 24 + 2 - 12 = 8$$

Em seguida, calculamos a área da região determinada pelo triângulo:

$$A = \frac{1}{2}|8| \Rightarrow A = 4$$

Portanto, a área do triângulo é 4 u.a.

7. Para resolver essa tarefa, sugira aos alunos que indiquem cada um dos pontos no plano cartesiano e identifiquem o quadrilátero formado por esses pontos.



RONALDO INÁCIO

De acordo com o quadrilátero da figura, identificamos dois triângulos: *ABC* e *ACD*.

Desse modo, calculamos a área de cada um desses triângulos:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |14| + \frac{1}{2} \cdot |6| \Rightarrow A_{ABCD} = 10$$

Portanto, a área da região determinada pelo quadrilátero *ABCD* é 10 u.a.

8. Sendo *A*, *B* e *C* os vértices do triângulo, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ \frac{x_A + x_C}{2} = 3 \\ \frac{x_B + x_C}{2} = 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = 4 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = -1 \end{cases}$$

Assim, temos o triângulo com as seguintes coordenadas: $A(3, 7)$; $B(-1, -3)$; $C(3, 1)$.

Calculando a área desse triângulo, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot (-9 + 21 - 1 + 9 + 7 - 3) \Rightarrow A = 12$$

Portanto, a área da região determinada por esse triângulo é 12 u.a.

9. Resolução na página XCIX.

10. a) Como os pontos (x, y), $(0, 4)$ e $(2, 2)$ devem ser colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 2y - 2x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x + y - 4) = 0$$

Portanto, a equação geral da reta é $x + y - 4 = 0$.

b) Como os pontos (x, y), $(-3, 2)$ e $(1, 6)$ devem ser colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y - 18 - 2 + 3y - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y - 4x - 20 \Rightarrow 4(y - x - 5) = 0$$

Portanto, a equação geral da reta é $y - x - 5 = 0$.

c) Como os pontos (x, y), $(0, 0)$ e $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ devem ser colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + \sqrt{3}x = 0$$

Portanto, a equação geral da reta é $\sqrt{3}x + y = 0$.

11. a) Temos os seguintes pontos colineares: (x, y), $(0, 2)$ e $(3, 2)$. Logo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 6 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(y - 2) = 0$$

Portanto, a equação geral da reta é $y - 2 = 0$.

b) Temos os seguintes pontos colineares: (x, y), $(12, 0)$ e $(12, 4)$. Logo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 12 & 0 & 1 \\ 12 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12y + 48 - 12y - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x - 12) = 0$$

Portanto, a equação geral da reta é $x - 12 = 0$.

MODERNA

c) Como a reta passa pelos pontos colineares: (x, y), $(0, 6)$ e $(-3, -9)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 3y + 18 + 9x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(5x - y + 6) = 0$$

Portanto, a equação geral da reta é $5x - y + 6 = 0$.

12. a) Como os três pontos (x, y), $(0, 0)$ e $(1, 6)$ devem ser colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - 6x = 0$$

Portanto, a equação geral da reta é $y = 6x$.

b) De acordo com a equação da reta encontrada no item **a**, temos:

- Se $x_1 = 3$, então $y_1 = 6 \cdot 3 \Rightarrow y_1 = 18$
- Se $x_2 = -2$, então $y_2 = 6 \cdot (-2) \Rightarrow y_2 = -12$

13. Para que o ponto M pertença à reta, os pontos M, N e Q devem ser colineares. Assim, temos:

$$\begin{vmatrix} p & 2p + 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & \frac{22}{5} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6p + \frac{22}{5} - (2p + 1) - \frac{22}{5}p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{5}p + \frac{17}{5} = 0 \Rightarrow p = \frac{17}{2}$$

Portanto, $p = \frac{17}{2}$.

14. alternativa **b**

Para resolver esse problema, os alunos devem primeiro identificar quais pontos pertencem à reta.

Note que os únicos pontos que pertencem à reta são $(-3, 1)$, $(0, 4)$ e $(2, 6)$. Chamando esses pontos por A, B e C, respectivamente, e calculando a distância desses pontos ao ponto P, temos:

$$AP = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (5 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{(-5 + 3)^2 + 16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{4 + 16} \Rightarrow AP = \sqrt{20}$$

$$BP = \sqrt{(-5 - 0)^2 + (5 - 4)^2} \Rightarrow BP = \sqrt{(-5)^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BP = \sqrt{25 + 1} \Rightarrow BP = \sqrt{26}$$

$$CP = \sqrt{(-5 - 2)^2 + (5 - 6)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CP = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CP = \sqrt{49 + 1} \Rightarrow CP = \sqrt{50} \Rightarrow CP = 5\sqrt{2}$$

Portanto, o ponto $(-3, 1)$ tem distância menor do que 5 km.

15. a) Como os pontos (x, y), $(5, 2)$ e $(-1, 3)$ devem ser colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + 15 + 2 - 5y - 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x - 6y + 17 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é $-x - 6y + 17 = 0$.

b) Como os pontos (x, y), $(0, -4)$ e $(1, 6)$ devem ser colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x + y + 4 - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10x + y + 4 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos C e D é $-10x + y + 4 = 0$.

c) Como os pontos (x, y), $(-12, -7)$ e $(-5, 2)$ devem ser colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -12 & -7 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x - 5y - 24 - 35 + 12y - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x + 7y - 59 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos E e F é $-9x + 7y - 59 = 0$.

d) Como os pontos (x, y), $(8, -3)$ e $(-4, -6)$ devem ser colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 8 & -3 & 1 \\ -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x - 4y - 48 - 12 - 8y + 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 12y - 60 = 0 \Rightarrow 3(x - 4y - 20) = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos G e H é $x - 4y - 20 = 0$.

16. alternativa **d**

Como os pontos (x, y), $(5, -39)$ e $(-3, 9)$ devem ser colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & -39 & 1 \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -39x - 3y + 45 - 117 - 5y - 9x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -48x - 8y - 72 = 0 \Rightarrow 8(-6x - y - 9) = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é $y = -6x - 9$.

17 a) De acordo com os pontos $(0, 1\,500)$ e $(2\,000, 1\,800)$ do gráfico, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1\,500 & 1 \\ 2\,000 & 1\,800 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\,500x + 2\,000y - 3\,000\,000 - 1\,800x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -300x + 2\,000y - 3\,000\,000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100(-3x + 20y - 30\,000) = 0$$

Portanto, a equação da reta é $y = 0{,}15x + 1\,500$.

b) Usando a equação do item **a**, temos:

- Se $x_1 = 1\,500$, então $y_1 = 1\,500 + 0{,}15 \cdot 1\,500 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1 = 1\,725$
- Se $x_2 = 2\,800$, então $y_2 = 1\,500 + 0{,}15 \cdot 2\,800 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_2 = 1\,920$

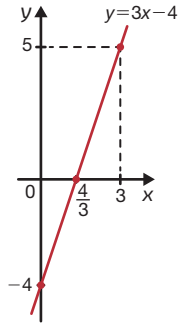
c) $y = 1\,500 + 0{,}15 \cdot x \Rightarrow 2\,500 = 1\,500 + 0{,}15 \cdot x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{20\,000}{3}$$

MODERNA

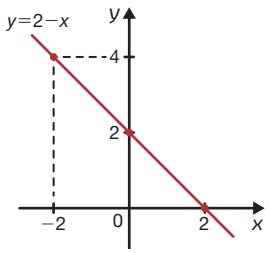
18. a)

x	y
0	−4
$\frac{4}{3}$	0
3	5



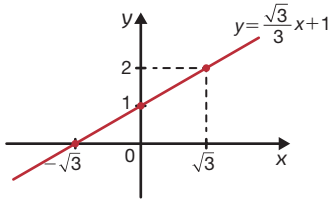
b)

x	y
−2	4
0	2
2	0



c)

x	y
$-\sqrt{3}$	0
0	1
$\sqrt{3}$	2



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

19. Para resolver esse problema, considere os seguintes sistemas lineares, de acordo com os pontos pertencentes a cada uma das retas:

- Os pontos L e K pertencem à reta r, assim:

$$\begin{cases} a_1 \cdot (-16) + b_1 = 8 \\ a_1 \cdot 1 + b_1 = -7 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -\frac{15}{17} \text{ e } b_1 = -\frac{104}{17}$$

$$r: 15x + 17y + 104 = 0$$

- Os pontos L e M pertencem à reta s, assim:

$$\begin{cases} a_2 \cdot (-16) + b_2 = 8 \\ a_2 \cdot 19 + b_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow a_2 = -\frac{6}{35} \text{ e } b_2 = \frac{184}{35}$$

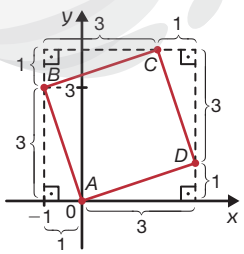
$$s: -6x - 35y + 184 = 0$$

- Os pontos K e M pertencem à reta t, assim:

$$\begin{cases} a_3 \cdot 1 + b_3 = -7 \\ a_3 \cdot 19 + b_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \text{ e } b_3 = -\frac{15}{2}$$

$$t: -x + 2y + 15 = 0$$

20. De acordo com o enunciado, podemos representar o quadrado da seguinte maneira:



RONALDO INÁCIO

Assim, as coordenadas dos outros dois vértices são $C(2, 4)$ e $D(3, 1)$.

- Equação geral da reta que passa por A e C:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$$

- Equação geral da reta que passa por B e D:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

21. a) Para determinar o ponto em que a reta intersecta o eixo x, faremos $y = 0$:

$$2y - 6x + 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Portanto, o ponto é $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) Para determinar o ponto em que a reta intersecta o eixo y, faremos $x = 0$:

$$2y - 6x + 3 = 0 \Rightarrow 2y - 6 \cdot 0 + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

Portanto, o ponto é $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

c) Esse item pode ter várias respostas. Os alunos podem escolher, por exemplo, três diferentes valores de x e determinar o valor de y por meio da equação geral $2y - 6x + 3 = 0$. Uma possível resposta:

- se $x = 1$:

$$2y - 6 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Assim, o ponto é $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

- se $x = -2$:

$$2y - 6 \cdot (-2) + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{15}{2}$$

Assim, o ponto é $\left(-2, -\frac{15}{2}\right)$.

- se $x = -\frac{1}{3}$:

$$2y - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

Assim, o ponto é $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{2}\right)$.

22. Sabendo que o ponto $(7, 5)$ pertence à reta, temos:

$$kx - 5y + 4 = 0 \Rightarrow k \cdot 7 - 5 \cdot 5 + 4 = 0 \Rightarrow k = 3$$

Portanto, $k = 3$.

23. Para resolver essa tarefa, note que a função associada a essa reta é decrescente e seu gráfico passa pelo ponto de coordenadas $(0, 3)$.
Portanto, a alternativa correta é **b**.

24. a) A reta passa pelos pontos de coordenadas $(2, 24)$ e $(5, 60)$. Desse modo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 24 & 1 \\ 5 & 60 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24x + 5y + 120 - 120 - 2y - 60x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -36x + 3y = 0 \Rightarrow 3(-12x + y) = 0$$

Portanto, a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é $-12x + y = 0$.

b) Para $x = 9$ e $y = 110$, temos:

$$-12x + y \Rightarrow -12 \cdot 9 + 110 = 2$$

Como o resultado da substituição é diferente de zero, o ponto $C(9, 110)$ não pertence à reta r.

c) $x = 8 \Rightarrow -12 \cdot 8 + y = 0 \Rightarrow y = 96$

d) $y = 156 \Rightarrow -12x + 156 = 0 \Rightarrow x = 13$

MODERNA

7 Sistemas lineares

1. **a)** coeficientes: 4 e -12; termo independente: 17

b) coeficientes: 1 e $-\sqrt{3}$; termo independente: 0

c) coeficientes: -1 e -5; termo independente: 2

2. **a)** linear

b) não linear

c) linear

d) não linear

3. alternativa **b**

Substituindo ordenadamente os valores de x, y e z na equação, temos:

a) $4 \cdot 1 - 2 + (-5) = -3 \neq 0$

b) $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - (-5) = 1$

4. **a)** Uma possível resposta: $(4, 2)$ e $\left(6, \frac{19}{6}\right)$.

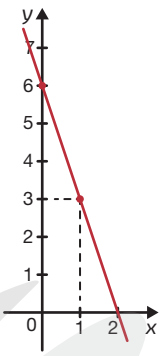
b) Uma possível resposta: $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 4)$.

5. Calculando o valor de α, temos:

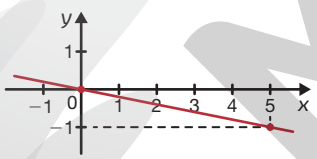
$5 \cdot 4\alpha - 15 \cdot \alpha + (-3\alpha) = -4 \Rightarrow 2\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -2$

Portanto, α é -2.

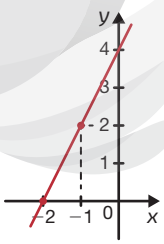
6. **a)**



b)



c)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

7. **a)** II e III; homogêneo

I) $(-1, 5, 0)$: $\begin{cases} 5 \cdot (-1) + 5 + 0 = 0 \\ -1 - 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = -21 \neq 0 \\ 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = -12 \neq 0 \end{cases}$

II) $(0, 0, 0)$: $\begin{cases} 5 \cdot 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \\ 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \end{cases}$

III) $(1, -2, -3)$: $\begin{cases} 5 \cdot 1 - 2 - 3 = 0 \\ 1 - 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = 0 \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) = 0 \end{cases}$

b) II; não homogêneo

I) $(0, 0, 0)$: $\begin{cases} 0 + 0 + 6 \cdot 0 = 0 \\ 0 - 0 - 0 = 0 \neq 5 \\ 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 0 = 0 \neq 5 \end{cases}$

II) $(5, 1, -1)$: $\begin{cases} 5 + 1 + 6 \cdot (-1) = 0 \\ 5 - 1 - (-1) = 5 \\ 2 \cdot 5 - 6 \cdot 1 - (-1) = 5 \end{cases}$

III) $(2, 2, -1)$: $\begin{cases} 2 + 2 + 6 \cdot (-1) = -2 \neq 0 \\ 2 - 2 - (-1) = 1 \neq 5 \\ 2 \cdot 2 - 6 \cdot 2 - (-1) = -7 \neq 5 \end{cases}$

8. **a)** Resolvendo o sistema, temos:

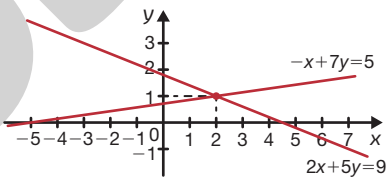
$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 7y = 5 \cdot (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ \underline{-2x + 14y = 10} \end{cases}$$

$$19y = 19 \Rightarrow y = 1$$

Substituindo $y = 1$ em $2x + 5y = 9$, logo:

$2x + 5y = 9 \Rightarrow 2x + 5 = 9 \Rightarrow x = 2$

Portanto, a solução do sistema é $(2, 1)$.



b) Resolvendo o sistema, temos:

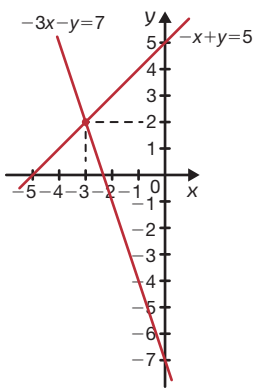
$$\begin{cases} -x + y = 5 \cdot (-3) \\ -3x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = -15 \\ \underline{-3x - y = 7} \end{cases}$$

$$-4y = -8 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo $y = 2$ em $-x + y = 5$, logo:

$-x + y = 5 \Rightarrow -x + 2 = 5 \Rightarrow x = -3$

Portanto, a solução do sistema é $(-3, 2)$.



RONALDO INÁCIO

MODERNA

c) Resolvendo o sistema, temos:

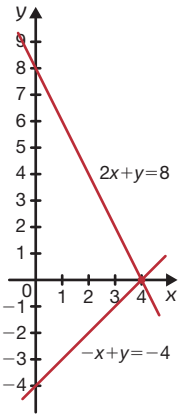
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + y = -4 \cdot (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 8 \\ -2x + 2y = -8 \end{cases}$$

$$4y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Substituindo $y = 0$ em $-x + y = -4$, logo:

$$-x + y = -4 \Rightarrow -x + 0 = -4 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, a solução do sistema é $(4, 0)$.



RONALDO INÁCIO

9. alternativa d

Considerando x a quantidade paga por pessoa e y a despesa total, temos:

$$\begin{cases} 55x = y \\ 50(x - 7) + 510 = y \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda equação, então:

$$50(x - 7) + 510 = y \Rightarrow 50(x - 7) + 510 = 55x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50x - 350 + 510 = 55x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x = -160 \Rightarrow x = 32$$

Como $y = 55x$, logo:

$$y = 55x \Rightarrow y = 55 \cdot 32 \Rightarrow y = 1\,760$$

Portanto, a solução do sistema é $(32, 1\,760)$ e o valor da cota calculada para cada pessoa foi R$ 32,00.

10. Indicando por x a carne do tipo A e por y a carne do tipo B, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 5y = 204 \cdot (-4) \\ 4x + y = 190{,}90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - 20y = -816 \\ 4x + y = 190{,}90 \end{cases}$$

$$-19y = -625{,}1 \Rightarrow y = 32{,}9$$

Substituindo $y = 32{,}9$ em $x + 5y = 204$, temos:

$$x + 5y = 204 \Rightarrow x + 5 \cdot 32{,}9 = 204 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 164{,}5 = 204 \Rightarrow x = 39{,}5$$

Portanto, Ana pagou R$ $\underbrace{197{,}50}_{5 \cdot 39{,}5}$ pela carne.

11. a) De acordo com os dados e as informações do problema, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 2\,000 \\ x = y + 688 \end{cases}$$

b) Resolvendo o sistema linear apresentado no item anterior, temos:

$$x + y = 2\,000 \Rightarrow (y + 688) + y = 2\,000 \Rightarrow y = 656$$

Substituindo esse resultado na segunda equação, obtemos:

$$x = 656 + 688 \Rightarrow x = 1\,344$$

Portanto, a postagem teve 1 344 curtidas e 656 compartilhamentos.

12. alternativa c

Considerando x o preço de um chocolate e y o preço de um pacote de pipocas, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 33 \\ -6x - 4y = -26 \end{cases}$$

$$5y = 7 \Rightarrow y = 1{,}4$$

Portanto, o pacote de pipocas custa R$ 1,40.

13. alternativa e

Observe que o ponto $(-3, 1)$ é o ponto de interseção entre as retas.

Logo, essa deve ser a solução do sistema linear. Resolvendo os sistemas de cada uma das alternativas, temos:

a) $\begin{cases} -3x + 4y = 13 \\ x - 5y = 8 \cdot (3) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = 13 \\ 3x - 15y = 24 \end{cases}$$

$$-11y = 37 \Rightarrow y = -\frac{37}{11}$$

$$x - 5y = 8 \Rightarrow x = 8 - \frac{185}{11} \Rightarrow x = -\frac{97}{11}$$

Portanto, a solução do sistema é $\left(-\frac{97}{11}, -\frac{37}{11}\right)$.

b) $\begin{cases} 4 \cdot (x + y) + 5 = -3 \\ 7 \cdot (x - y) + 14 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = -8 \\ 7x - 7y = 14 \,(:7) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = -8 \\ x - y = 2 \cdot (-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = -8 \\ -4x + 4y = -8 \end{cases}$$

$$8y = -16 \Rightarrow y = -2$$

$$x - y = 2 \Rightarrow x + 2 = 2 \Rightarrow x = 0$$

Portanto, a solução do sistema é $(0, -2)$.

c) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} = 0 \\ x + 4 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = -4 \end{cases}$

$$2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$$x + y = 0 \Rightarrow -2 + y = 0 \Rightarrow y = 2$$

Portanto, a solução do sistema é $(-2, 2)$.

d) $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \cdot (2) \\ -5x + 2y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 14 \\ -5x + 2y = 17 \end{cases}$

$$-x = 31 \Rightarrow x = -31$$

$$2x - y - 7 = 0 \Rightarrow -62 - y - 7 = 0 \Rightarrow y = -69$$

Portanto, a solução do sistema é $(-31, -69)$.

e) $\begin{cases} 5x + 8y = -7 \cdot (2) \\ -2x + 3y = 9 \cdot (5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 16y = -14 \\ -10x + 15y = 45 \end{cases}$

$$31y = 31 \Rightarrow y = 1$$

$$-2x + 3y = 9 \Rightarrow -2x + 3 = 9 \Rightarrow x = -3$$

Portanto, a solução do sistema é $(-3, 1)$.

Assim, o sistema da alternativa e apresenta a solução geométrica dada.

MODERNA

14. a) II) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{31}{12}, 0\right)$

- $\begin{cases} 240 \cdot 0 + 180 \cdot \frac{3}{2} = 270 \\ 0 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 240 \cdot \frac{3}{4} + 180 \cdot \frac{1}{2} = 270 \\ 0{,}3 \cdot \frac{3}{4} + 1{,}1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}775 \end{cases}$
- $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0{,}3 \cdot \frac{31}{12} + 1{,}1 \cdot 0 = 0{,}775 \end{cases}$

b) Calculando o custo para cada um dos itens, temos:

- $\left(0, \frac{3}{2}\right)$: $C = 2{,}3 \cdot 0 + 3{,}8 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow C = 5{,}7$

  Logo, o custo é R$ 5,70.
- $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$: $C = 2{,}3 \cdot \frac{3}{4} + 3{,}8 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow C \simeq 3{,}63$

  Assim, o custo é, aproximadamente, R$ 3,63.
- $\left(\frac{31}{12}, 0\right)$: $C = 2{,}3 \cdot \frac{31}{12} + 3{,}8 \cdot 0 \Rightarrow C \simeq 5{,}94$

  Assim, o custo é, aproximadamente, R$ 5,94.

  Desse modo, podemos perceber que a função assume um mínimo quando $x = \frac{3}{4}$ e $y = \frac{1}{2}$.

  Sendo L a quantia em leite de soja e S a quantia em salada de frutas, temos:
- $x = \frac{3}{4} \Rightarrow L = \underbrace{200}_{200\ m\ell} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow L = 150$

  Assim, temos 150 mℓ de leite de soja.
- $y = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \underbrace{400}_{400\ g} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = 200$

  Assim, temos 200 g de salada de frutas.

Portanto, o custo da refeição será o mínimo se ela for composta de 150 mℓ de leite de soja e 200 g de salada de frutas.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que podemos interpretar geometricamente a solução de cada sistema representando-os, no plano cartesiano, pelo ponto de interseção das retas que correspondem às equações que o compõem.

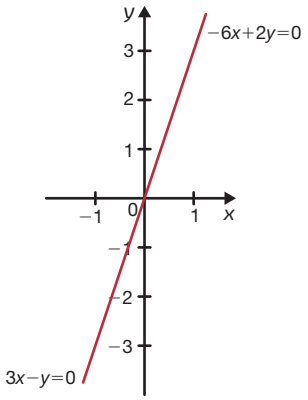
d) Resposta pessoal.

8 Escalonamento de sistemas lineares

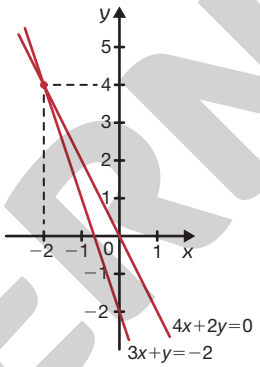
1. a) $\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}$

b) $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos termos independentes}}$

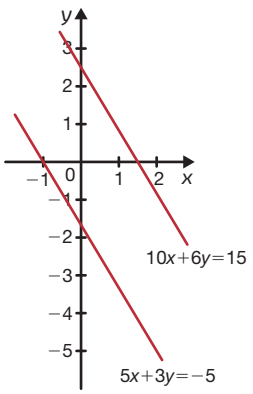
2. a) SPI



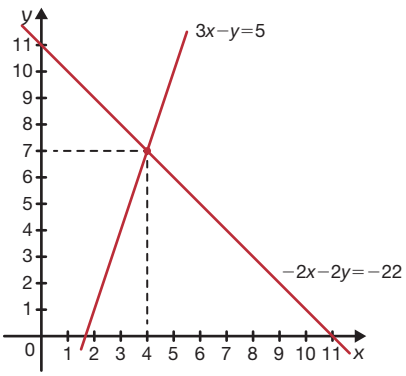
b) SPD



c) SI



d) SPD



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

3. Denotando por x, y e z, respectivamente, as quantidades de vitórias, empates e derrotas, temos:

$$\begin{cases} 3x + y = 27 \\ \frac{2}{3}(15 - y) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 27 \\ 10 - \frac{2}{3}y = x \end{cases} \Rightarrow x = 8 \text{ e } y = 3$$

Como o time disputou 15 partidas, segue que:

$x + y + z = 15 \Rightarrow 8 + 3 + z = 15 \Rightarrow z = 15 - 11 \Rightarrow z = 4$

Portanto, o time obteve 8 vitórias, 3 empates e 4 derrotas.

4. Resolvendo o sistema linear, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \quad \cdot (2) \\ -2x + \alpha y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ \underline{-2x + \alpha y = 0} \end{cases}$$

$$(2 + \alpha)y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2 + \alpha}$$

Na igualdade $y = \frac{6}{2 + \alpha}$, para $\alpha = -2$, o número real y não está definido. Portanto, o sistema é SI, se $\alpha = -2$.

5. De modo a facilitar a resolução dessa tarefa, oriente os alunos a determinar a equação de cada reta, já que não aparece a interseção da reta r com o eixo das abscissas.

- considerando os pontos $(-2, 5)$ e $(0, 6)$ da reta r, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 12 - 6x + 2y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2y = 12$$

- considerando os pontos $(0, 0)$ e $(2, 1)$ da reta s, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y = 0$$

- considerando dois pontos das reta $t \equiv u$, por exemplo, $(0, 3)$ e $(3, 0)$, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow 3(x + y - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = 3$$

a) Sistema representado pelas retas r e t do gráfico e com um ponto em comum (solução do sistema).
Portanto, o sistema tem uma solução: $(-2, 5)$.

b) Sistema representado pelas retas r e s do gráfico e essas retas não têm ponto em comum (são paralelas).
Portanto, o sistema não possui solução.

c) Sistema representado pelas retas s e u do gráfico e com um ponto em comum (solução do sistema).
Portanto, o sistema tem uma solução: $(2, 1)$.

d) Sistema representado pelas retas t e u do gráfico e essas retas são coincidentes.
Portanto, o sistema possui infinitas soluções. Algumas possíveis respostas: $(-2, 5)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$.

e) Sistema representado pelas retas u e r do gráfico e com um ponto em comum (solução do sistema).
Portanto, o sistema tem uma solução: $(-2, 5)$.

6. a) Considerando A a quantidade de sanduíches de frango vendidos e B a quantidade de sanduíches vegetarianos vendidos, temos:

$$\begin{cases} 8A + 12B = 324 \\ A + B = 33 \end{cases}$$

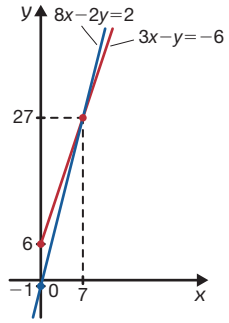
b) $\begin{cases} 8A + 12B = 324 \\ A + B = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{2}{3}A + 27 \text{ (reta } r) \\ B = -A + 33 \quad \text{(reta } s) \end{cases}$

Como $m_r \neq m_s$, o sistema é SPD.

c) $\begin{cases} 8A + 12B = 324 \\ A + B = 33 \end{cases} \Rightarrow A = 18 \text{ e } B = 15$

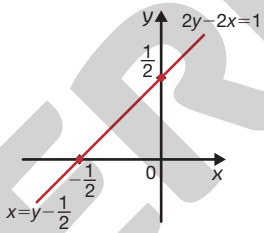
Foram vendidas 18 unidades do sanduíche de frango e 15 unidades do sanduíche vegetariano.

7. a)



Portanto, a solução do sistema é $S = \{(7, 27)\}$.

b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

8. $\begin{cases} y = (a - 1)x + 2 \\ y - 2x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (a - 1)x + 2 \quad \text{(reta } r) \\ y = 2x + b \quad \text{(reta } s) \end{cases}$

a) Para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$, ou seja:

$$\begin{cases} a - 1 = 2 \\ 2 = b \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 2$$

b) Para que o sistema seja possível e determinado, devemos ter $m_r \neq m_s$, ou seja:

$$a - 1 \neq 2 \Rightarrow a \neq 3$$

O número b pode ser qualquer número real.

c) Para que o sistema seja impossível, devemos ter $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, ou seja:

$$\begin{cases} a - 1 = 2 \\ 2 \neq b \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b \neq 2$$

9. a) $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x = 6 \cdot (y + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 2 \\ y = \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$

Como $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, o sistema é SI, ou seja, não existe solução.

b) $\begin{cases} 3y - 2x = 3 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = -\frac{5}{2}x + 2 \end{cases}$

Como $m_r \neq m_s$, o sistema é SPD e sua solução é $x = \frac{6}{19}$ e $y = \frac{23}{19}$.

c) $\begin{cases} 2y - x = 4 \\ y + 2x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$

Como $m_r \neq m_s$, o sistema é SPD e sua solução é $x = -\frac{12}{5}$ e $y = \frac{4}{5}$.

MODERNA

10. Denotando por x a quantidade de etanol e por y, a de gasolina, temos:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow x = 30 \text{ e } y = 10$$

Portanto, o carro foi abastecido com 30 ℓ de etanol e 10 ℓ de gasolina.

11. São correspondentes: o sistema **a** e o gráfico **IV**; o sistema **b** e o gráfico **I**; o sistema **c** e o gráfico **III**; o sistema **d** e o gráfico **II**.

12. alternativa **d**

Considerando x o preço de um lápis e y o preço de um estojo, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$$

Substituindo $x = 3$ em $2x + y = 10$, temos:

$$2x + y = 10 \Rightarrow 6 + y = 10 \Rightarrow y = 4$$

Portanto, a soma dos preços dos dois produtos é de $3 + 4 = 7$, ou seja, R$ 7,00.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2x & y & 3z \\ x & -y & 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = -2 \text{ e } z = -1$$

14. $\begin{cases} 2{,}5L + 1{,}6P = 26{,}70 \\ 4L + 3{,}5P = 54{,}00 \end{cases} \Rightarrow L = 3 \text{ e } P = 12$

Portanto, 1 kg de laranja custa R$ 3,00 e 1 kg de pera custa R$ 12,00.

15. **a)** Chamando de c e h as massas atômicas do carbono e do hidrogênio, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 2c + 4h = 28 \\ 4c + 10h = 58 \end{cases} \Rightarrow c = 12 \text{ e } h = 1$$

Portanto, a massa atômica do carbono é 12 u e a do hidrogênio é 1 u.

b) Não. Espera-se que os alunos respondam que, se obtivermos um sistema de equações por meio dessas informações, ele será possível e indeterminado.

16. Resolvendo cada um dos sistemas, temos:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 3$

b) $\begin{cases} 6x + y = 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ e } y = -2$

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ e } y = -5$

d) $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ x - 4y = -12 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 3$

e) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{5}y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ e } y = -5$

f) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ e } y = -2$

Portanto, são equivalentes os sistemas **a** e **d**, **b** e **f**, **c** e **e**.

17. alternativas **b** e **d**.

Os alunos devem observar que o item **a** não está na forma escalonada, pois o primeiro coeficiente não nulo da 2ª equação não está à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da 3ª equação, e o item **c** não está na forma escalonada porque a 1ª e a 3ª equações possuem a mesma quantidade de coeficientes não nulos.

18. **a)** • $1 - A \neq 0 \Rightarrow A \neq 1$
- $B = 0$
- $C \neq 0$
- $D = 0$
- $E + 1 = 0 \Rightarrow E = -1$

b) • $A - B \neq 0 \Rightarrow A \neq B$
- $1 - B = 0 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A \neq 1$
- $C \neq 0$
- $D = 0$
- $E = 0$

19. **a)** $n > m$, ou seja, SPI

Sendo $z = k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 - k \\ y = 3 - k \end{cases}$$

$$2x - y = 4 - k \Rightarrow 2x - (3 - k) = 4 - k \Rightarrow x = \frac{7}{2} - k$$

Portanto, a solução geral é $\left(\frac{7}{2} - k, 3 - k, k\right)$.

b) $n = m$, ou seja, SPD

- $3z = 12 \Rightarrow z = 4$
- $2y + z = 0 \Rightarrow 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$
- $-x + 2y - z = -9 \Rightarrow -x + 2 \cdot (-2) - 4 = -9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 1$

Portanto, a solução é $(1, -2, 4)$.

c) $n > m$, ou seja, SPI

Sendo $w = k \in \mathbb{R}$, temos:

- $\begin{cases} x + y + z - w = 4 \\ -y - z + w = 0 \\ z + w = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 + k \\ -y - z = -k \\ z = -5 - k \end{cases}$
- $-y - z = -k \Rightarrow -y - (-5 - k) = -k \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 5 + 2k$
- $x + y + z - w = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + (5 + 2k) + (-5 - k) - k = 4 \Rightarrow x = 4$

Portanto, a solução geral é $(4, 5 + 2k, -5 - k, k)$.

20. Considerando a quantidade de gols feitos antes da próxima rodada por Gil como x e por João como y, temos:

$$\begin{cases} x = y + 6 \\ (x + 1) = 3(y + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ -2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Substituindo $y = 2$ em $x = y + 6$, temos $x = 8$. Além disso, $x + 1 = 8 + 1 = 9$ e $y + 1 = 2 + 1 = 3$.

Portanto, Gil terá feito 9 gols e João terá feito 3 gols.

21. **a)** $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ \frac{7}{3}y + \frac{5}{3}z = \frac{26}{3} \quad (\cdot 3) \\ \frac{5}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{16}{3} \quad (\cdot 3) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ 7y + 5z = 26 \\ 5y + z = 16 \end{cases} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ 7y + 5z = 26 \\ -\frac{18}{7}z = -\frac{18}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2,\ y = 3 \text{ e } z = 1$$

MODERNA

b)

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z = \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2}y + \frac{7}{2}z = \frac{9}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z = \frac{9}{2} \\ 9z = \frac{36}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 3,\ y = -1 \text{ e } z = 2$$

22. Considerando x o total de passagens vendidas para Lisboa, y o total de passagens vendidas para Paris e z o total de passagens vendidas para Roma, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 78 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ -x + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 78 \\ 3y = 156 \\ y + 3z = 82 \end{cases} \xrightarrow{\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 78 \\ 3y = 156 \\ 3z = 30 \end{cases}$$

Da terceira equação, $3z = 30 \Rightarrow z = 10$, ou seja, 10 passagens foram vendidas para Roma.

Da segunda equação, $3y = 156 \Rightarrow y = 52$, ou seja, 52 passagens foram vendidas para Paris.

Substituindo $y = 52$ e $z = 10$ em $x + y + z = 78$ obtemos $x + 62 = 78 \Rightarrow x = 16$, ou seja, foram vendidas 16 passagens para Lisboa.

Portanto, foram vendidas $52 + 10 = 62$ passagens, conjuntamente, para Paris e Roma.

23. Chamando t_A o tempo de chegada do carro A ao ponto X, t_1 e t_2, respectivamente, os tempos de chegada do carro B antes e depois do aumento de 20% em sua velocidade inicial V_1, sendo $V_2 = 1{,}2 \cdot V_1$ e d a distância entre o carro B e o ponto X, temos:

- $t_1 = t_A + 10 \Rightarrow t_1 - t_A = 10$ (I)
- $\underbrace{V_2}_{1{,}2V_1} = \frac{d}{t_1} \Rightarrow 1{,}2\underbrace{V_1}_{\frac{d}{t_1}} = \frac{d}{t_2} \Rightarrow 1{,}2\frac{d}{t_1} = \frac{d}{t_2} \Rightarrow t_1 = 1{,}2t_2$ (II)
- $t_2 = t_A \Rightarrow t_2 - t_A = 0$ (III)

Substituindo II em I e utilizando I e III, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1{,}2t_2 - t_A = 10 \\ t_2 - t_A = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1{,}2)} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}2t_2 - t_A = 10 \\ 0{,}2t_A = 10 \end{cases} \Rightarrow t_A = 50$$

Portanto, o carro A chegará ao ponto X em 50 segundos.

24. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

25. Considere x, y e z as quantidades de caixas amarelas, verdes e azuis, respectivamente. De acordo com as informações do problema, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 8x + 20y + 10z = 72 \\ 10x + 16y + 14z = 84 \end{cases} \Rightarrow x = 4;\ y = 1;\ z = 2$$

Portanto, a mãe comprou 4 caixas amarelas, 1 verde e 2 azuis.

26. Denotando por x, y e z cada uma das dimensões desse paralelepípedo e, de acordo com as informações do problema, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 18{,}1 \\ x + 4y + 2z = 29 \\ 2x + y + 3z = 33{,}1 \end{cases} \Rightarrow x = 7{,}2;\ y = 2{,}8;\ z = 5{,}3$$

Assim, as dimensões do paralelepípedo são 7,2 cm, 2,8 cm e 5,3 cm. Desse modo, calculando o volume, temos:

$$V = 7{,}2 \cdot 2{,}8 \cdot 5{,}3 \Rightarrow V = 106{,}848$$

Portanto, o volume desse paralelepípedo é $\underbrace{106{,}848}_{7{,}2 \cdot 2{,}8 \cdot 5{,}3}$ cm³.

27. a) $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = a - 2$

- $a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ (SPD)
- $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

Substituindo $a = 2$, temos:

$$\begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x - 2y = -8 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(2)} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 4 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$ (SPI)

b) $D = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^3 + 3$

$a^2 + 3 \neq 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$ (SPD)

c) $D = \begin{vmatrix} a & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -a - a = -2a$

- $-2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ (SPD)
- $-2a = 0 \Rightarrow a = 0$

Substituindo $a = 0$, temos:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 18 \\ x - y = 4 \end{cases}$$ (SI)

d) $D = \begin{vmatrix} a + 1 & 0 \\ 4 & a \end{vmatrix} = a^2 + a$

- $a^2 + a \neq 0 \begin{cases} a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq -1 \end{cases}$ (SPD)
- $a^2 + a = 0 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \end{cases}$

Substituindo $a = 0$, temos:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 4x = 4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-4)} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 0x = -8 \end{cases}$$ (SI)

Substituindo $a = -1$, temos:

$$\begin{cases} 0x = 3 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$$ (SI)

28. $\begin{cases} 5x - 6y = k_1 \\ -10x + 12y = k_2 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(2)} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 6y = k_1 \\ 0x + 0y = 2k_1 + k_2 \end{cases}$

$2k_1 + k_2 \neq 0 \Rightarrow k_2 \neq -2k_1$

MODERNA

29. $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ a-1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 1 - 1 - a + 1 - 1 - 1 - a + 1 = -2a$

- $-2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \quad (\text{SPD})$
- Uma possível resposta: $a = 1$.

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -y + z = 12 \\ x + y - z = 9 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{cases} x - y - z = 1 \\ -y + z = 12 \\ 2y = 8 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ -y + z = 12 \\ 2z = 32 \end{cases}$$

$2z = 32 \Rightarrow z = 16$

$-y + z = 12 \Rightarrow -y + 16 = 12 \Rightarrow y = 4$

$x - y - z = 1 \Rightarrow x - 4 - 16 = 1 \Rightarrow x = 21$

Portanto, a solução é $(21, 4, 16)$.

30. $D = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6a$

- $3 + 6a \neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{2} \quad (\text{SPD})$
- $3 + 6a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Substituindo $a = -\frac{1}{2}$, temos:

$$\begin{cases} 3x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 6x + y = b \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \Rightarrow \begin{cases} 3x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 0x + 0y = b - 4 \end{cases}$$

$b - 4 \neq 0 \Rightarrow b \neq 4 \quad (\text{SI})$

$b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4 \quad (\text{SPI})$

31. $D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & a \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 + 0 - 6a + 0 + 4 = 20 - 6a$

$20 - 6a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{10}{3}$

32. $\begin{cases} x + y = z \\ 3x - y = -z \\ -x + 5y = 10z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ -x + 5y - 10z = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -10 \end{vmatrix} =$

$= 10 - 1 - 15 + 1 - 5 + 30 = 20 \neq 0 \quad (\text{SPD})$

33. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & p & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 6 + 0 + p + 6 = 0 \Rightarrow p + 1 = 0 \Rightarrow p = -1$

9 Circunferência

1. Indicando como O e r, respectivamente, o centro e o comprimento do raio da circunferência, temos:

a) $r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$

Assim, $O(0, 2)$ e $r = 3$.

b) $x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 7 = 1 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 8 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$

Assim, $O(-1, 0)$ e $r = 2\sqrt{2}$.

c) $x^2 + 6x + y^2 + y = -\frac{33}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x + y^2 + y = -\frac{33}{4} + 9 - 9 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + y + \frac{1}{4} = -\frac{33}{4} + 9 + \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$

Assim, $O\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ e $r = 1$.

d) $y^2 + 8(y - x) + x^2 + 28 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 + 8y - 8x + x^2 + 28 = 16 - 16 + 16 - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 = 32 - 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 2^2$

Assim, $O(4, -4)$ e $r = 2$.

2. **a)** $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = \underbrace{49}_{7^2}$

b) $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = \underbrace{3}_{\left(\sqrt{3}\right)^2}$

c) $(x + 5)^2 + y^2 = \underbrace{16}_{4^2}$

d) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = \underbrace{25}_{5^2}$

3. Seja $O(a, b)$ as coordenadas do centro da circunferência.

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

$$b = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Logo, $O(-2, 3)$.

A medida do raio é $r = OA = OB$, ou seja:

$$OA = \sqrt{(-5 + 2)^2 + (2 - 3)^2} \Rightarrow r^2 = 10$$

Portanto, a equação da circunferência é $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$.

4. **a)** Calculando a área, temos:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 25^2 \Rightarrow A = 1\,962{,}5$$

Portanto, a área é 1 962,5 m².

b) Como o centro da circunferência é $(5, 2)$ e seu raio tem 25 metros, a equação reduzida da circunferência é $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 625$.

5. $5x^2 + 5y^2 + 40x - 10y + 55 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot \left(x^2 + 8x + y^2 - 2y + 11\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 8x + y^2 - 2y + 11 = 16 - 16 + 1 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 6$

6. Resolução na página C.

7. Como o raio é a medida da distância de A a C, temos:

$$r = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 - 1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{1 + 16} \Rightarrow r^2 = 17$$

Portanto, a equação geral da circunferência é:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 17 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y = 7$$

MODERNA

8. Como $\sqrt{8^2} = 8$, a equação reduzida da circunferência é:

$$(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 8$$

Substituindo as coordenadas dos pontos na equação, temos:

- $P(3, -1)$

$$(3 + 6)^2 + (-1 - 4)^2 \neq 8$$

- $Q(-8, 6)$

$$(-8 + 6)^2 + (6 - 4)^2 = 8$$

- $R(-2, -8)$

$$(-2 + 6)^2 + (-8 - 4)^2 \neq 8$$

- $S(-4, 2)$

$$(-4 + 6)^2 + (2 - 4)^2 = 8$$

Portanto, Q e S pertencem à circunferência.

9. **a)** Como a medida do raio da circunferência é AC, temos:

$$AC = \sqrt{(1 - 3)^2 + (1 - 1)^2} \Rightarrow AC = 2$$

Portanto, a equação reduzida é dada por:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

b) Como a medida do raio da circunferência é BC, temos:

$$BC = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-7 + 3)^2} \Rightarrow AC = 5$$

Portanto, a equação reduzida é dada por:

$$x^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

10. **a)** O comprimento ℓ é dado por:

$$\ell = AB = BC = CD = DA$$

Assim:

$$AB = \sqrt{(1 - 1)^2 + (4 - 2)^2} \Rightarrow AB = 2$$

Portanto, o comprimento do lado do quadrado é 2 u.c.

b) Seja $O(a, b)$ as coordenadas do centro da circunferência, que é o ponto médio de uma das diagonais do quadrado, $\overline{BD}$ ou $\overline{AC}$.

Ponto médio de $\overline{BD}$:

$$a = \frac{1 + 3}{2} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = \frac{2 + 4}{2} \Rightarrow b = 3$$

Logo, $O(2, 3)$.

A medida do raio é $r = OA = OB = OC = OD$, ou seja:

$$OA = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 4)^2} \Rightarrow r^2 = 2$$

Portanto, a equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2.$$

c) $A_c = 2\pi$ e $A_q = \underset{\sqrt{2}^2}{2}$, então:

$$\frac{A_c}{A_q} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, a razão entre a área do círculo limitado pela circunferência e a área da região determinada pelo quadrado é $\frac{\pi}{2}$.

11. $5x^2 + 5y^2 + 10 \cdot (x - 5y) + 80 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot (x^2 + y^2 + 2x - 10y + 16) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 10y + 16 = 1 - 1 + 25 - 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$

Como a coordenada do centro da circunferência é negativa para a abscissa e positiva para a ordenada, então o centro está localizado no 2º quadrante.

12. $x^2 + 10x + y^2 - 6y + m = 0 \Rightarrow$

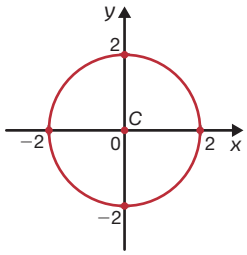
$\Rightarrow x^2 + 10x + y^2 - 6y + m = 25 - 25 + 9 - 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 34 - m$

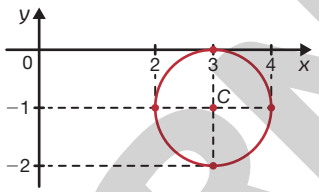
Como a medida do raio deve ser maior do que zero, temos:

$$34 - m > 0 \Rightarrow m < 34$$

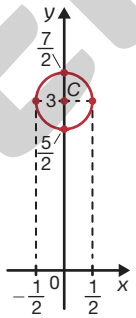
13. **a)** Centro $C(0, 0)$ e raio de comprimento $\underset{\sqrt{4}}{2}$.



b) Centro $C(3, -1)$ e raio de comprimento $\underset{\sqrt{1}}{1}$.



c) Centro $C(0, 3)$ e raio de comprimento $\underset{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}}$.

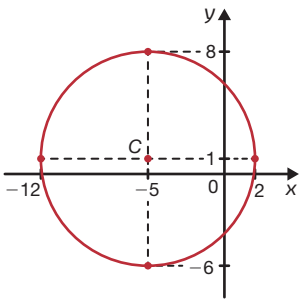


d) $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 23 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 10x + y^2 - 2y - 23 = 25 - 25 + 1 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 49$

Centro $C(-5, 1)$ e raio de comprimento $\underset{\sqrt{49}}{7}$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

14. A equação reduzida da circunferência é $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2$.

Substituindo as coordenadas de A na equação, temos:

$(2 - 1)^2 + (k - 4)^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + k^2 - 8k + 16 = 2 \Rightarrow k^2 - 8k + 15 = 0 \begin{cases} k = 3 \\ \text{ou} \\ k = 5 \end{cases}$

Portanto, o ponto A pertence a essa circunferência se $k = 3$ ou $k = 5$.

MODERNA

1. a) O eixo maior está sobre o eixo y, tal que $a = 5$, $b = 3$ e $c = 4$.

Como a elipse possui centro $C(0, 0)$ e $q_1 < q_2$, a equação é dada por:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

b) O eixo maior está sobre o eixo y, tal que $a = \sqrt{10}$ e $b = 1$.

Como a elipse possui centro $C(0, 3)$ e $q_1 < q_2$, a equação é dada por:

$$x^2 + \frac{(y-3)^2}{10} = 1$$

c) O eixo maior é paralelo ao eixo x, tal que $c = 2$ e $a = 4$. Logo,

$$4^2 = b^2 + 2^2 \Rightarrow b^2 = 12$$

Como a elipse possui centro $C(2, 1)$ e $q_1 > q_2$, a equação é dada por:

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

d) O eixo maior está sobre o eixo x, tal que $a = 4$ e $b = 2$. Como a elipse possui centro $C(-4, 0)$ e $q_1 > q_2$, a equação é dada por:

$$\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

2. a) Temos uma elipse com centro $C(-4, 6)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo x, pois $100 > 36$. Logo,

$$100 = 36 + c^2 \Rightarrow c = 8$$

Assim, as coordenadas dos focos são:

$$F_1(\underbrace{-12}_{x_0 - c}, 6) \text{ e } F_2(\underbrace{4}_{x_0 + c}, 6).$$

b) De acordo com a equação dada, temos:

$$9y^2 + 16x^2 + 18y = 135 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

Temos uma elipse com centro $C(0, -1)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo y, pois $16 > 9$. Logo,

$$16 = 9 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

Assim, as coordenadas dos focos são:

$$F_1\left(0, \underbrace{-1 + \sqrt{7}}_{y_0 + c}\right) \text{ e } F_2\left(0, \underbrace{-1 - \sqrt{7}}_{y_0 - c}\right).$$

3. a) Temos uma elipse de centro $C(-5, -1)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo y, pois $8 > 3$. Logo:

$$8 = 3 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Eixo maior:

$$a = \sqrt{8} \Rightarrow 2a = 4\sqrt{2}$$

Eixo menor:

$$b = \sqrt{3} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{3}$$

Distância focal:

$$2c = 2\sqrt{5}$$

Excentricidade:

$$e = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

b) Temos uma elipse de centro $C(0, 3)$, cujo eixo maior está sobre o eixo x, pois $5 > 4$. Logo:

$$5 = 4 + c^2 \Rightarrow c = 1$$

Eixo maior:

$$a = \sqrt{5} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{5}$$

Eixo menor:

$$b = \sqrt{4} \Rightarrow 2b = 4$$

Distância focal:

$$2c = 2$$

Excentricidade:

$$e = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

c) $9(x-9)^2 + 6(y-7)^2 = 54 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x-9)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{9} = 1$$

Temos uma elipse de centro $C(9, 7)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo y, pois $9 > 6$. Logo:

$$9 = 6 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

Eixo maior:

$$a = \sqrt{9} \Rightarrow 2a = 6$$

Eixo menor:

$$b = \sqrt{6} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{6}$$

Distância focal:

$$2c = 2\sqrt{3}$$

Excentricidade:

$$e = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

d) Temos uma elipse de centro $C(3, 2)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo y.

$$\underbrace{3^2}_{5-2} = \underbrace{1^2}_{4-3} + c^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$$

Eixo maior:

$$a = 3 \Rightarrow 2a = 6$$

Eixo menor:

$$b = 1 \Rightarrow 2b = 2$$

Distância focal:

$$2c = 4\sqrt{2}$$

Excentricidade:

$$e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

e) Temos uma elipse de centro $C(0, 0)$, cujo eixo maior está sobre o eixo x.

$$a^2 = 10^2 + 6^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{34}$$

Eixo maior:

$$2a = 4\sqrt{34}$$

Eixo menor:

$$2b = 20$$

Distância focal:

$$2c = 12$$

Excentricidade:

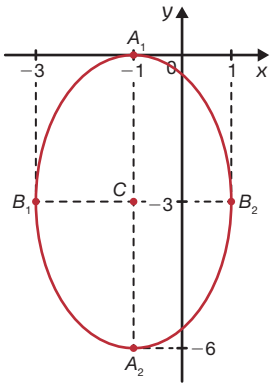
$$e = \frac{6}{2\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

MODERNA

4. **a)** Temos uma elipse de centro $C(-1, -3)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo y, pois $9 > 4$, tal que $a = 3$ e $b = 2$.

Segue que:

$$A_1(\underbrace{-1}_{x_0}, \underbrace{0}_{y_0+a}); A_2(\underbrace{-1}_{x_0}, \underbrace{-6}_{y_0-a}); B_1(\underbrace{-3}_{x_0-b}, -3); B_2(\underbrace{1}_{x_0+b}, -3)$$

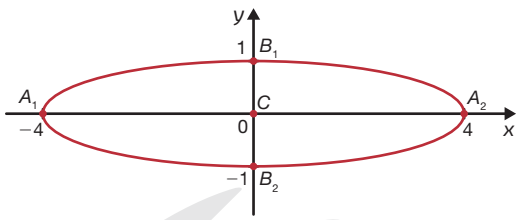


b) $x^2 + 16y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + y^2 = 1$

Temos uma elipse de centro $C(0, 0)$, cujo eixo maior está sobre o eixo x, tal que $a = 4$ e $b = 1$.

Segue que:

$$A_1(\underbrace{-4}_{x_0-a}, 0); A_2(\underbrace{4}_{x_0+a}, 0); B_1(0, \underbrace{1}_{y_0+b}); B_2(0, \underbrace{-1}_{y_0-b})$$



5. alternativa **d**

Como o centro é $C(0, 0)$ e o foco está em um dos eixos, consideramos $A_1(0, 13)$ e $B_2(5, 0)$. Desse modo, $a = 13$ e $b = 5$. Assim, sendo a distância focal $2c$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = 5^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 144 \Rightarrow c = 12$$

Portanto, os focos são $(0, 12)$ e $(0, -12)$.

6. **a)** Temos uma elipse de centro $C(0, 0)$, cujo eixo maior está sobre o eixo y. Logo:

$$7^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}$$

$$F_1(\underbrace{0, 2\sqrt{10}}_{y_0+c}) \text{ e } F_2(\underbrace{0, -2\sqrt{10}}_{y_0-c})$$

b) Temos uma elipse de centro $C(\underbrace{-1}_{\frac{-8+6}{2}}, \underbrace{2}_{\frac{4+0}{2}})$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo x.

$$\underbrace{7^2}_{6-(-1)} = \underbrace{2^2}_{4-2} + c^2 \Rightarrow c = 3\sqrt{5}$$

$$F_1(\underbrace{-1 - 3\sqrt{5}}_{x_0-c}, 2) \text{ e } F_2(\underbrace{-1 + 3\sqrt{5}}_{x_0+c}, 2)$$

7. Como F_1 e F_2 possuem mesma abscissa, o eixo maior dessa elipse é paralelo ao eixo y e o centro é $C(\underbrace{-4}_{\frac{-4+(-4)}{2}}, \underbrace{5}_{\frac{2+8}{2}})$.

$$c = \underbrace{8}_{\substack{\text{ordenada}\\ \text{de } F_2}} - \underbrace{5}_{\substack{\text{ordenada}\\ \text{de } C}} = 3$$

A equação da elipse é do tipo:

$$\frac{(x+4)^2}{b^2} + \frac{(y-5)^2}{a^2} = 1$$

Substituindo as coordenadas de P, temos:

$$\frac{(0+4)^2}{b^2} + \frac{(5-5)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow b = 4$$

Logo:

$$a^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow a = 5$$

Portanto, a equação da elipse é dada por:

$$\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

8. alternativa **b**

Espera-se que os alunos respondam que é a elipse mais semelhante à circunferência, logo sua excentricidade está mais próxima de 0.

9. Como a distância focal é 6, então:

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

Assim:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 9$$

$$9^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b^2 = 72$$

Os focos estão sobre o eixo x, consequentemente, o eixo maior da elipse também. Portanto, a equação é dada por:

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1$$

10. **a)** sobre o eixo x

b) paralelo ao eixo y

c) $25y^2 + 50y - 16x^2 = 375 \Rightarrow \frac{(y+1)^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

Portanto, está sobre o eixo y.

d) $x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

Portanto, está sobre o eixo x.

11. As Alternativas **b** e **c** apresentam hipérbole.

a) $9x^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Não representa hipérbole.

b) $8x^2 - 6y^2 - 32x + 36y - 70 = 0$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y-3)^2}{8} = 1$$

c) $6y^2 - 4x^2 - 64x - 280 = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{(x+8)^2}{6} = 1$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

12. **a)** O eixo real da hipérbole está sobre o eixo y, tal que $a = 2$ e $c = \sqrt{13}$. Logo:

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 2^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 9$$

Como a hipérbole possui centro em $C(2, 0)$, a equação é dada por:

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

b) O eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo x, tal que $b = 3$ e $c = 6$. Logo:

$$6^2 = a^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 27$$

Como a hipérbole possui centro em $C(10, 10)$, a equação é dada por:

$$\frac{(x-10)^2}{27} - \frac{(y-10)^2}{9} = 1$$

13. Como F_1 e F_2 possuem mesma ordenada, o eixo real é paralelo ao eixo x. Logo:

$$x_0 = \frac{6 + (-8)}{2} = -1$$

$$y_0 = 1$$

$$C(-1, 1)$$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$2c = 6 - (-8) \Rightarrow c = 7$$

$$7^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 24$$

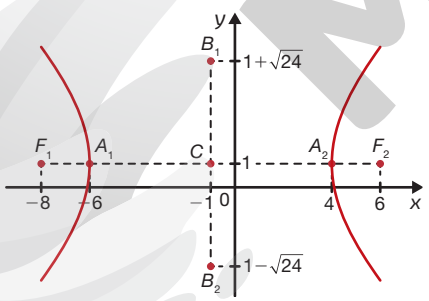
A equação é dada por:

$$\frac{(x+1)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{24} = 1$$

$$A_1\underbrace{(-6}_{x_0-a}, 1); A_2\underbrace{(4}_{x_0+a}, 1)$$

$$B_1\left(-1, \underbrace{1+\sqrt{24}}_{y_0+b}\right)$$

$$B_2\left(-1, \underbrace{1-\sqrt{24}}_{y_0-b}\right)$$



RONALDO INÁCIO

14. Temos uma hipérbole de centro $C(-7, 3)$ e eixo real paralelo ao eixo y, tal que $a^2 = 36$ e $b^2 = 4$.

Uma das assíntotas passa pelo ponto K, que possui abscissa de B_1 e ordenada de A_1, e pelo centro da hipérbole.

$$B_1\underbrace{(-9}_{x_0-b}, 3)$$

$$A_1(-7, \underbrace{9}_{y_0+a})$$

Basta determinarmos a reta que passa por $K(-9, 9)$ e $C(-7, 3)$.

$$m = \frac{3+9}{-7+9} \Rightarrow m = -3$$

$$y - 3 = -3(x+7) \Rightarrow 3x + y + 18 = 0$$

A outra assíntota passa pelo ponto N, que possui abscissa de B_2 e ordenada de A_1, e pelo centro da hipérbole.

$$B_2\underbrace{(-5}_{x_0+b}, 3)$$

Agora, vamos determinar a reta que passa por $N(-5, 9)$ e $C(-7, 3)$.

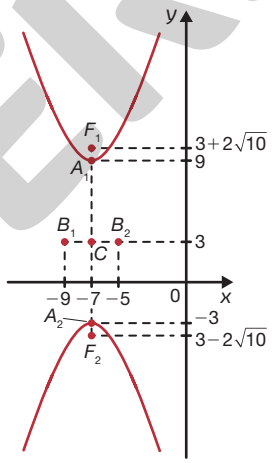
$$m = \frac{3-9}{-7+5} \Rightarrow m = 3$$

$$y - 3 = 3(x+7) \Rightarrow 3x - y + 24 = 0$$

Como conhecemos as coordenadas do centro C, A_1, B_1 e B_2, basta determinarmos A_2, F_1 e F_2 para esboçar o gráfico.

$$c^2 = 36 + 4 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}$$

$$A_2\underbrace{(-7, -3}_{y_0-a}); F_1\left(-7, \underbrace{3+2\sqrt{10}}_{y_0+c}\right); F_2\left(-7, \underbrace{3-2\sqrt{10}}_{y_0-c}\right)$$



RONALDO INÁCIO

15. $3y^2 + 36y - 4x^2 + 32x + 8 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(y+6)^2}{12} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$$

Temos uma hipérbole de centro $C(-4, -6)$, cujo eixo real é paralelo ao eixo y.

a) $a^2 = 12 \Rightarrow 2a = 4\sqrt{3}$

b) $b^2 = 9 \Rightarrow 2b = 6$

c) $c^2 = 12 + 9 \Rightarrow 2c = 2\sqrt{21}$

d) $e = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{7}}{2}$

16. $2b = 12 \Rightarrow b = 6$

$2a = 16 \Rightarrow a = 8$

Como o eixo real está sobre o eixo y e o centro é $C(0, 4)$, segue que:

$$\frac{(y-4)^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$$

MODERNA

17. Como a ordenada dos focos é igual, temos uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo x e centro $C(\underbrace{8}_{\substack{\text{abscissa}\\ \text{de } C}}, -4)$.

$$c = \underbrace{12}_{\substack{\text{abscissa}\\ \text{de } F_1}} - \underbrace{8}_{\frac{4+12}{2}} = 4$$

A equação é do tipo:

$$\frac{(x-8)^2}{a^2} - \frac{(y+4)^2}{b^2} = 1$$

Substituindo as coordenadas de P, temos:

$$\frac{(5-8)^2}{a^2} - \frac{(-4+4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$4^2 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 7$$

$$\frac{(x-8)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{7} = 1$$

18. **a)** $a^2 = 16$; $b^2 = 20$

$c^2 = 16 + 20 \Rightarrow c = 6$

$e = \frac{6}{4} \Rightarrow e = \frac{3}{2}$

b) $3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

$a^2 = 1$; $b^2 = 3$

$c^2 = 1 + 3 \Rightarrow c = 2$

$e = \frac{2}{1} \Rightarrow e = 2$

c) $a = 1$; $b = 1$

$c^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}$

$e = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow e = \sqrt{2}$

d) $2a = 6 - (-2) \Rightarrow a = 4$

$C(-3, \underbrace{2}_{6-4})$; $F_1(x_0, y_0 + c) \Rightarrow 2 + c = 9 \Rightarrow c = 7$

$e = \frac{7}{4}$

19. De acordo com as informações do problema, temos:

$a = 4$; $b = 6$; $C(0, 0)$

$c^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow c = 2\sqrt{13}$

$F_1(0, \underbrace{2\sqrt{13}}_{y_0 + c})$ e $F_2(0, \underbrace{-2\sqrt{13}}_{y_0 - c})$

$e = \frac{2\sqrt{13}}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

20. Como o eixo real da hipérbole está sobre o eixo x, temos:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-0)^2}{15^2} - \frac{(y-0)^2}{20^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{400} = 1$$

21. **a)** 260 km

b) Sendo c_f a metade da distância focal, temos:

$2c_f = 260 \Rightarrow c_f = 130$

$t = \frac{\overbrace{S}^{2a}}{3 \cdot 10^5} \Rightarrow 8 \cdot 10^{-4} = \frac{2a}{3 \cdot 10^5} \Rightarrow a = 120$

$e = \frac{130}{120} \Rightarrow e = 1,08\overline{3}$

c) $S = 2 \cdot 120 = 240$

Portanto, a constante hiperbólica é 240 km.

d) A equação é do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Portanto, a equação da hipérbole é dada por:

$$130^2 = 120^2 + b^2 \Rightarrow b = 50$$

$$\frac{x^2}{120^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$$

e) Resposta pessoal.

22. **a)** A equação da parábola é da forma $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, tal que $V(0, 1)$ e $F(0, 3)$.

Calculando p, temos:

$$p = 2\sqrt{(0+0)^2 + (1-3)^2} \Rightarrow p = 4$$

Portanto, a equação da parábola é dada por:

$$x^2 = 8(y - 1)$$

b) A equação da parábola é da forma $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, tal que $V(-2, -2)$ e $F(-5, -2)$.

Calculando p, temos:

$$p = 2\sqrt{(-2+5)^2 + (-2+2)^2} \Rightarrow p = 6$$

Portanto, a equação da parábola é dada por:

$$(y+2)^2 = -12(x+2)$$

c) A equação da parábola é da forma $y^2 = 2px$, tal que $V(0, 0)$ e $F(4, 0)$.

Calculando p, temos:

$$p = 2\sqrt{(4-0)^2 + (0-0)^2} \Rightarrow p = 8$$

Portanto, a equação da parábola é dada por:

$$y^2 = 16x$$

d) A equação da parábola é da forma $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$, tal que $V(5, 3)$ e $F(5, -2)$.

Calculando p, temos:

$$p = 2\sqrt{(5-5)^2 + (3+2)^2} \Rightarrow p = 10$$

Portanto, a equação da parábola é dada por:

$$(x-5)^2 = -20(y-3)$$

23. **a)** A parábola possui a diretriz paralela ao eixo y, com vértice em $V(-3, 8)$ à esquerda da diretriz e $p = 3$, pois $2p = 6$. Segue que:

$$\text{foco: } F\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right) \Rightarrow F\left(-\frac{9}{2}, 8\right)$$

$$\text{reta diretriz: } x = x_0 + \frac{p}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

b) $(x-8)^2 - 12y + 96 = 0 \Rightarrow (x-8)^2 = 12(y-8)$

A parábola possui a diretriz paralela ao eixo x, com vértice $V(8, 8)$ acima da diretriz e $p = 6$, pois $2p = 12$. Segue que:

$$\text{foco: } F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right) \Rightarrow F(8, 11)$$

$$\text{reta diretriz: } y = y_0 - \frac{p}{2} \Rightarrow y = 5$$

MODERNA

c) $x^2 + 6x - 16y + 25 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 16(y - 1)$

A parábola possui a diretriz paralela ao eixo x, com vértice $V(-3, 1)$ acima da diretriz e $p = 8$, pois $2p = 16$.

Segue que:

$$\text{foco: } F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right) \Rightarrow F(-3, 5)$$

$$\text{reta diretriz: } y = y_0 - \frac{p}{2} \Rightarrow y = -3$$

24. Temos uma parábola que possui diretriz paralela ao eixo y, pois a reta é determinada por $x = 9$, o vértice está à esquerda da diretriz, pois 9 é maior do que a abscissa do foco $(9 > 3)$.
A equação é do tipo:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

A abscissa entre o foco e a reta diretriz é p, então:

$$p = \frac{|1 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) - 9|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \Rightarrow p = 6$$

Logo, o vértice é $V\left(\underset{3 + \frac{P}{2}}{6}, -4\right)$.

Portanto, a equação é dada por:

$$(y + 4)^2 = -12(x - 6)$$

Substituindo as coordenadas dos pontos, temos:

- $A(0, 0)$

$$(0 + 4)^2 = -12(0 - 6) \Rightarrow 16 \neq 72$$

- $B(3, 2)$

$$(2 + 4)^2 = -12(3 - 6) \Rightarrow 36 = 36$$

- $C(8, -9)$

$$(-9 + 4)^2 = -12(8 - 6) \Rightarrow 25 \neq 24$$

- $D\left(\frac{2}{3}, 4\right)$

$$(4 + 4)^2 = -12\left(\frac{2}{3} - 6\right) \Rightarrow 64 = 64$$

Portanto, os pontos B e D pertencem à parábola.

25. $32x + 16y^2 - 8y + 33 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = -2(x + 1)$$

O vértice é $V\left(-1, \frac{1}{4}\right)$.

26. alternativa **a**

Como $x = -1$ e $x = 0$ são raízes da parábola, ela é do tipo:

$$y = a(x + 1) \cdot x \Rightarrow y = a(x^2 + x)$$

Como o triângulo equilátero está inscrito na circunferência, então a altura do triângulo tem medida igual a $\frac{3}{4}$ do diâmetro da circunferência, assim:

$$h = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

Desse modo, a parábola e a circunferência se intersectam no ponto de abscissa 0,5.

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Como o ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertence à parábola, temos:

$$y = a(x^2 + x) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = a\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

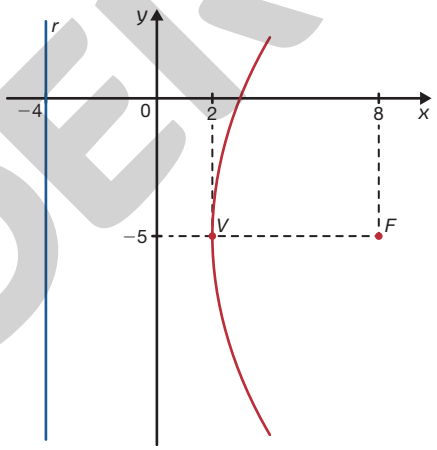
Portanto, a parábola tem equação $y = \frac{2\sqrt{3}}{2}(x^2 + x)$. Logo, a alternativa correta é **a**.

27. a) A parábola possui diretriz paralela ao eixo y, com vértice $V(2, -5)$ à direita da diretriz e $p = 12$, pois $2p = 24$.

Segue que:

$$\text{foco: } F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right) \Rightarrow F(8, -5)$$

$$\text{reta diretriz: } x = x_0 - \frac{p}{2} \Rightarrow x = -4$$



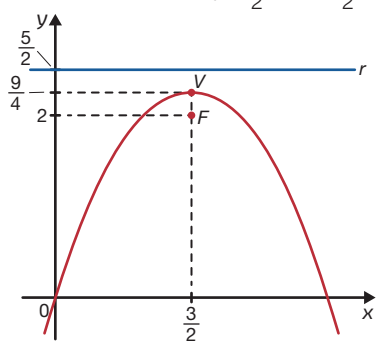
b) $y = 3x - x^2 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -1\left(y - \frac{9}{4}\right)$

A parábola possui diretriz paralela ao eixo x, com vértice $V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ abaixo da diretriz e $p = \frac{1}{2}$, pois $2p = 1$.

Segue que:

$$\text{foco: } F\left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right) \Rightarrow F\left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\text{reta diretriz: } y = y_0 + \frac{p}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

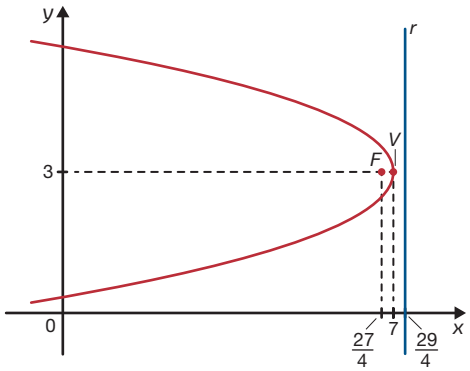
MODERNA

c) $x = 6y - y^2 - 2 \Rightarrow (y-3)^2 = -1(x-7)$

A parábola possui diretriz paralela ao eixo y, com vértice $V(7, 3)$ à esquerda da diretriz e $p = \frac{1}{2}$, pois $2p = 1$. Segue que:

$$\text{foco: } F\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right) \Rightarrow F\left(\frac{27}{4}, 3\right)$$

$$\text{reta diretriz: } x = x_0 + \frac{p}{2} \Rightarrow x = \frac{29}{4}$$



RONALDO INÁCIO

28. Supondo que a equação seja do tipo $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ e substituindo as coordenadas dos pontos, temos:

$$\begin{cases} (0 - x_0)^2 = 2p(3 - y_0) \\ (6 - x_0)^2 = 2p(0 - y_0) \\ (-2 - x_0)^2 = 2p(8 - y_0) \end{cases} \Rightarrow x_0 = 4, y_0 = -1 \text{ e } p = 2$$

Portanto, a equação da parábola é dada por:

$$(x-4)^2 = 4(y+1)$$

29. $x = 2y^2 - 16y + 25 \Rightarrow (y-4)^2 = \frac{1}{2}(x+7)$

a) $(-7, 4)$

b) $2p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$

c) $x = x_0 - \frac{p}{2} \Rightarrow x = -\frac{57}{8}$

30. alternativas a e c

Observe que, em b e d, ao traçarmos retas paralelas ao eixo y, elas intersectam o gráfico em mais de um ponto, o que não caracteriza uma função de x em y.

31. alternativa e

Analisando a imagem do problema, podemos perceber que a parábola apresenta uma raiz real. Sendo assim:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 - 6c = 0 \Rightarrow c = 6$$

Portanto, a altura do líquido contido na taça é 6 cm.

13 Transformações geométricas

1. alternativa a

2. a) $A(-3, 1)$, $B(-3, 3)$, $C(-1, 2)$, $D(-2, 5)$, $E(-5, 4)$, $F(-5, 2)$

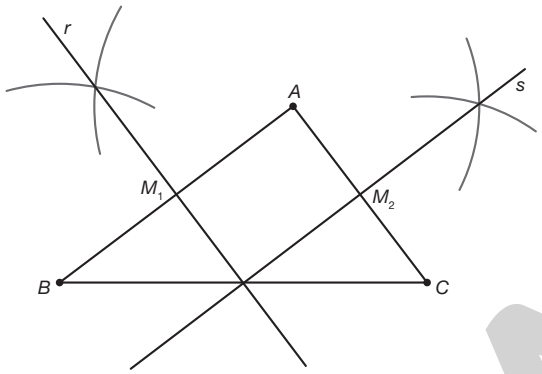
b) Observando cada um dos eixos, temos:

- eixo das abcissas: $A'(3, 1)$, $B'(3, 3)$, $C'(1, 2)$, $D'(2, 5)$, $E'(5, 4)$, $F'(5, 2)$
- eixo das ordenadas: $A''(-3, -1)$, $B''(-3, -3)$, $C''(-1, -2)$, $D''(-2, -5)$, $E''(-5, -4)$, $F''(-5, -2)$

3. alternativa b

4. Resposta pessoal.

5. Seguindo as instruções, obtemos:



RONALDO INÁCIO

6. Sim. A reta r deve ser vertical, passando pelo centro da imagem, para obter a transformação de reflexão.

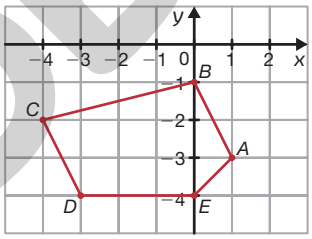
7. Sim. Caso os alunos apresentem dificuldades para identificar a reflexão, oriente-os a construir um esboço dessa fachada.

8. alternativa b

9. a) $A(-1, 3)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$, $D(3, 4)$, $E(0, 4)$

b) $A'(1, -3)$, $B'(0, -1)$, $C'(-4, -2)$, $D'(-3, -4)$, $E'(0, -4)$

c)



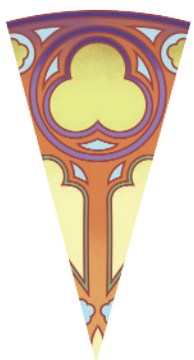
RONALDO INÁCIO

10. a) Transformação de reflexão e de rotação.

b) Sim. Na figura A.

11. Não. Espera-se que os alunos percebam que para obter essa imagem aplicando transformações sobre a figura apresentada é necessário utilizar, além da transformação de rotação, a transformação de reflexão.

12. Uma possível resposta:



HELOÍSA PINTARELLI

MODERNA

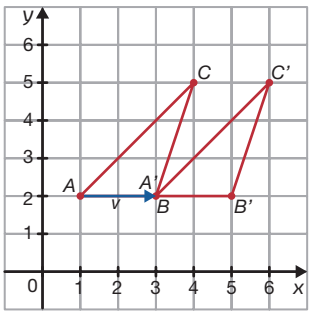
13. alternativa **a**

14. Calculamos o comprimento vetor associado à translação da imagem, indicando por x, por meio da distância entre A e A', então:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, o comprimento associado a essa transformação é 5 u.c.

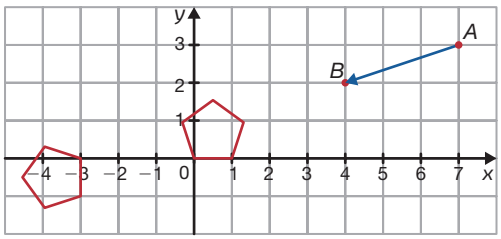
15.



RONALDO INÁCIO

16. $A'(0, -1), B'(2, -3), C'(1, -6), D'(-1, -3), E'(-2, -3)$

17. Uma possível resposta:

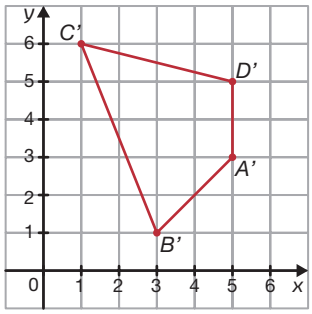


RONALDO INÁCIO

18. **a)** Espera-se que os alunos respondam que são as transformações de reflexão, rotação e translação.

b) Resposta pessoal.

19. **a)** Uma possível resposta: aplicando a rotação de 180° no ponto B seguida de uma reflexão em torno do eixo x.



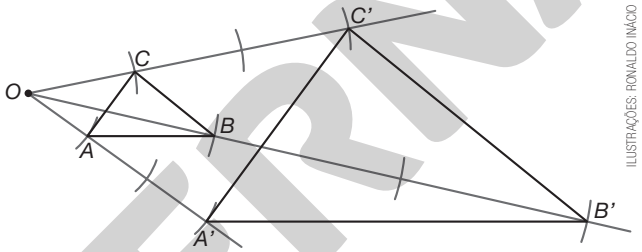
RONALDO INÁCIO

b) Espera-se que os alunos respondam que sim, aplicando sobre $ABCD$, por exemplo, uma reflexão em torno do eixo y.

20. **a)** Transformação de rotação, transformação de translação, transformação de reflexão seguida de translação.

b) Resposta pessoal.

21. Conforme as informações do problema, temos:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

22 **a)** Sim. Algumas possíveis respostas: homotetia, rotação, translação e reflexão.

b) Sim. Espera-se que os alunos percebam que para construir a figura **1a** é possível aplicar, por exemplo, uma homotetia seguida de uma reflexão. Já no caso da figura **1b**, é possível, por exemplo, aplicar uma rotação.

Resolução do tema 1

16. alternativa **e**

Os alunos podem apresentar alguma dificuldade na resolução dessa tarefa. Caso ache necessário, oriente-os na elaboração do sistema.

Para resolver esse problema, considere a torre $X(x, y)$.

Desse modo, sabemos que $AX = BX = CX$. Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} AX = BX \\ CX = BX \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-30)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(x-70)^2 + (y-20)^2} \\ \sqrt{(x-60)^2 + (y-50)^2} = \sqrt{(x-70)^2 + (y-20)^2} \end{cases}$$

$x = 50$ e $y = 30$

Logo, a torre deve estar localizada no ponto de coordenada $(50, 30)$.

Portanto, a alternativa correta é **e**.

Resoluções do tema 3

2. **a)** Determinando T, temos:

$$T = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{bmatrix}}_{J} + \underbrace{\begin{bmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{bmatrix}}_{F} + \underbrace{\begin{bmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{bmatrix}}_{M} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 55 & 74 & 64 & 67 \\ 65 & 57 & 63 & 63 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz obtida é $T = \begin{bmatrix} 55 & 74 & 64 & 67 \\ 65 & 57 & 63 & 63 \end{bmatrix}$.

b) Para resolver esse item, identificamos, por meio da matriz T do item anterior, o plano **I** na linha **1** e o plano **II** na linha **2**. Como cada uma das colunas representam os bairros **A**, **B**, **C** e **D**, respectivamente, concluímos que o plano **I** teve o maior número de vendas no bairro **B** e o plano **II**, vendeu mais no bairro **A**.

MODERNA

9. Oriente os alunos na construção das matrizes A e B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Considerando α um número real, temos:

a) $\alpha(A + B) = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(a_{11} + b_{11}) & \alpha(a_{12} + b_{12}) & \cdots & \alpha(a_{1n} + b_{1n}) \\ \alpha(a_{21} + b_{21}) & \alpha(a_{22} + b_{22}) & \cdots & \alpha(a_{2n} + b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(a_{m1} + b_{m1}) & \alpha(a_{m2} + b_{m2}) & \cdots & \alpha(a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + b_{11} & \alpha a_{12} + \alpha b_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} + \alpha b_{1n} \\ \alpha a_{21} + \alpha b_{21} & \alpha a_{22} + \alpha b_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} + \alpha b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} + \alpha b_{m1} & \alpha a_{m2} + \alpha b_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} + \alpha b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha b_{11} & \alpha b_{12} & \cdots & \alpha b_{1n} \\ \alpha b_{21} & \alpha b_{22} & \cdots & \alpha b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha b_{m1} & \alpha b_{m2} & \cdots & \alpha b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \alpha A + \alpha B$$

b) $(\alpha \cdot A)^t = \left[\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \right]^t = \left[\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} \right]^t =$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{21} & \cdots & \alpha a_{m1} \\ \alpha a_{12} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{1n} & \alpha a_{2n} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \alpha \cdot A^t$$

12. a) De acordo com as propriedades das operações com matrizes, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \\ (-6) \cdot 1 + 3 \cdot 2 & (-6) \cdot 3 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 & (-1) \cdot 2 + 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -9 \\ 0 & -9 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 0 \cdot (-9) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-9) + 0 \cdot (-1) \\ (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 9 \cdot 0 & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 9 \cdot (-9) & (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-9) + 9 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) + 1 \cdot (-9) & 0 \cdot 0 + 9 \cdot (-9) + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 18 \\ 8 & -94 & -36 \\ 18 & -36 & -82 \end{bmatrix}$$

MODERNA

d) $D = \begin{bmatrix} 6 & 8 & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \left[6 \cdot (-4) + 8 \cdot 2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 7\right] \Rightarrow D = [9]$

e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow E = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \end{bmatrix} \Rightarrow E = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 8 & 12 \\ 14 & 21 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Resolução do tema **4**

3. a) $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 383 & 277 & 79 & 451 & 141 & 577 & 273 \\ 305 & 211 & 61 & 355 & 109 & 451 & 218 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} \cdot C = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot B = I_2 \cdot B = B$

c) Números primos são os números naturais que têm somente dois divisores distintos: o 1 e ele mesmo.

d) Inicialmente, vamos calcular A^{-1}.

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4a + 5c & 4b + 5d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 5c = 1 \\ 3a + 4c = 0 \end{cases} \text{e} \begin{cases} 4b + 5d = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 4,\ b = -5,\ c = -3 \text{ e } d = 4$$

Assim, $X = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Verificando que $X \cdot A = I_2$, temos:

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A^{-1} = X = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Segue que a mensagem decodificada é dada por $A^{-1} \cdot M$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 187 & 151 & 299 & 639 & 367 & 227 & 63 & 83 & 278 \\ 141 & 115 & 225 & 497 & 293 & 171 & 50 & 63 & 209 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 29 & 71 & 71 & 3 & 53 & 2 & 17 & 67 \\ 3 & 7 & 3 & 71 & 71 & 3 & 11 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo, de acordo com a relação de letras e símbolos, a mensagem é: missão fracassada.

e) Resposta pessoal.

Resolução do tema **6**

9. Inicialmente, identificamos as regiões formadas pelas seguintes regiões triangulares: A_{ABC}, A_{ACD}, A_{AED} e A_{AEF}.
Desse modo, $A = A_{ABC} + A_{ACD} + A_{AED} + A_{AEF}$. Logo:

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |-7| + \frac{1}{2} \cdot |-7| + \frac{1}{2} \cdot |7| + \frac{1}{2} \cdot |-9| \Rightarrow A_{ABCD} = 15$$

Portanto, a área da figura é 15 u.a.

MODERNA

Resolução do tema **9**

6. Como a circunferência passa pelos pontos *P*, *Q* e *R*, a distância do centro $C\left(x_C, y_C\right)$ a cada um desses pontos é a mesma, então:

$$CP = \sqrt{\left(x_C - 1\right)^2 + \left(y_C - 2\right)^2} \Rightarrow CP = \sqrt{x_C^{\,2} + y_C^{\,2} - 2x_C - 4y_C + 5}$$

$$CQ = \sqrt{\left(x_C - 2\right)^2 + \left(y_C - \sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow CQ = \sqrt{x_C^{\,2} + y_C^{\,2} - 4x_C - 2\sqrt{3}y_C + 7}$$

$$CR = \sqrt{\left(x_C + 1\right)^2 + \left(y_C - 0\right)^2} \Rightarrow CR = \sqrt{x_C^{\,2} + y_C^{\,2} + 2x_C + 1}$$

$$\begin{cases} CP = CQ \\ CP = CR \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_C^{\,2} + y_C^{\,2} - 2x_C - 4y_C + 5} = \sqrt{x_C^{\,2} + y_C^{\,2} - 4x_C - 2\sqrt{3}y_C + 7} \\ \sqrt{x_C^{\,2} + y_C^{\,2} - 2x_C - 4y_C + 5} = \sqrt{x_C^{\,2} + y_C^{\,2} + 2x_C + 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_C - 4y_C + 5 = -4x_C - 2\sqrt{3}y_C + 7 \\ -2x_C - 4y_C + 5 = 2x_C + 1 \end{cases}$$

$$x_C = 1 \text{ e } y_C = 0$$

Calculando a medida do raio, temos:

$$r = CR = \sqrt{\left(1 + 1\right)^2 + \left(0 + 0\right)^2} = 2$$

Portanto, a equação geral da circunferência é dada por:

$$\left(x - 1\right)^2 + \left(y - 0\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

MODERNA

Sugestões ao professor

- Nesta seção, apresentamos sugestões de livros e *sites* que podem ser consultados com o objetivo de complementar os conteúdos tratados neste volume, bem como obter subsídios teórico-metodológicos para o trabalho em sala de aula. É importante, também, que seja consultada a seção **Ampliando seus conhecimentos**, onde há sugestões de livros e *sites* para os alunos.

Leituras sobre o ensino de Matemática

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; SILVA, Karina Pessoa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

  Este artigo apresenta algumas considerações a respeito da aplicação de uma tarefa sob a ótica da Modelagem matemática para uma turma de 1º ano do Ensino Médio, abordando conceitos de Geometria plana.

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; *et al*. *Práticas de modelagem matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2015.

  Este livro aborda aspectos da Modelagem matemática, apresentando resultados de pesquisas e experiências em sala de aula e destacando a possibilidade de trabalhar com essa metodologia na perspectiva da Educação Matemática.

- ARAÚJO, Jussara de Loiola. *Educação matemática crítica*: reflexões e diálogos. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2007.

  Este livro traz reflexões e diálogos sobre a Educação Matemática crítica, como uma preocupação educacional, incluindo sugestões sobre o que isso pode significar visando à justiça social.

- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.) *Educação matemática*: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

  Nesta obra os autores tratam a respeito da ambiguidade gerada no processo de pesquisa. Embora os textos de vários autores expressem diferentes perspectivas, no geral convergem para o mesmo significado.

- BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

  O livro apresenta explicações sobre modelo matemático e Modelagem matemática. Também traz algumas orientações sobre como o professor pode proceder para utilizar a Modelagem no ensino de Matemática.

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Este livro trata da informática educativa, abordando aspectos que vão desde as políticas governamentais até as questões epistemológicas e pedagógicas. São apresentados exemplos de como usar informática com alunos e professores, bem como questões referentes ao uso de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

  O livro descreve um conjunto de princípios que buscam ajudar os professores a planejar e implementar trabalhos com projetos. Contém, ainda, exemplos de projetos e mostra como desenvolvê-los em sala de aula.

- CAINELLI, Marlene Rosa; TOMAZINI, Elizabete Cristina de Souza. A aula-oficina como campo metodológico para a formação de professores em história: um estudo sobre o Pibid/História/UEL. *História & Ensino*, Londrina, v. 23, n. 2, p. 11-33, 2017.

  Este estudo apresenta a aula-oficina como possibilidade de exercício da docência com base em relatórios e entrevistas concedidas por alunos de iniciação científica do curso de História da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

- CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Na vida dez, na escola zero*. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2015.

  O livro traz considerações sobre o motivo pelo qual muitas pessoas são capazes de utilizar a Matemática para resolver problemas em situações de seu cotidiano, mas, quando se trata da Matemática escolar, elas apresentam dificuldades.

- CURY, Helena Noronha. *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro é apresentada uma visão geral sobre a análise de erros, que, segundo a autora, pode ser encarada como uma abordagem de pesquisa e como uma metodologia de ensino, em ambos os casos, utilizada com o intuito de auxiliar na prática em sala de aula. Também são indicadas pesquisas e sugestões sobre como os erros dos alunos podem ser utilizados nas aulas de Matemática.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

  Nesta obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações sobre aspectos da cognição, da natureza da Matemática e das questões teóricas

MODERNA

da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

• _____. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 189-204, set./dez. 2018. p. 189. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300189>. Acesso em: 13 jun. 2020.

Este artigo discute as contribuições da Etnomatemática para a formação de indivíduos capazes de produzir conhecimentos e de se comunicarem, colaborando para a superação das desigualdades sociais e garantindo dignidade a todos os cidadãos, independentemente das classes sociais nas quais estão inseridos, e voltados à preservação da natureza por meio da adoção de uma postura que defenda a sustentabilidade.

- FERREIRA, Mariana Kawall Leal (Org.). *Ideias matemáticas de povos culturalmente distintos*. São Paulo: Global, 2002. (Série Antropologia e Educação).

  O livro aborda tópicos relacionados à educação e à Matemática do cotidiano. Também trata a respeito da organização social e da Matemática de povos indígenas no Brasil, e da aritmética e da ornamentação geométrica no Brasil e na África.

- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

  Esta obra é destinada a professores e pesquisadores em Educação Matemática, pois orienta esses profissionais sobre como iniciar uma pesquisa nessa área. O livro traz orientações a respeito do processo de investigação na área, além do surgimento e do desenvolvimento desse componente curricular no Brasil.

- GARDNER, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Trad. Maria A. V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

  Neste trabalho, o autor explica as ideias fundamentais que desencadeiam uma revolução na aprendizagem e mostra como elas podem ser aplicadas em toda sala de aula onde se espera que os alunos pensem.

- KNIJNIK, Gelsa et al. *Etnomatemática em movimento*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro apresenta textos, discussões e reflexões sobre a trajetória e os rumos dos estudos e pesquisas no âmbito da Etnomatemática, tendo como principal referência o professor Ubiratan D'Ambrosio.

- LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

  Este livro pode servir de referência aos professores no sentido de propor uma reflexão sobre a avaliação da aprendizagem escolar em termos sociais e pedagógicos.

- MENDES, Iran Abreu. *Investigação histórica no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

  O livro trata do uso de projetos de investigação histórica como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática. As experiências de tarefas investigativas apresentadas no livro evidenciam a relevância dessa abordagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

- MENDES, Iran Abreu. *Matemática e investigação em sala de aula*: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro contém perspectivas didáticas que buscam contribuir para o ensino e aprendizagem mais significativo da Matemática, ampliando o conhecimento a respeito desse campo.

- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria M. M. S. *A formação matemática do professor*: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro aborda questões referentes à formação do professor de Matemática, trazendo aspectos do conhecimento acadêmico e do conhecimento escolar. Para ilustrar sua posição, os autores apresentam como os conjuntos numéricos são trabalhados no nível escolar acadêmico e básico.

- ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa em Educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999.

  Este trabalho busca valorizar a interação tanto entre professor e aluno quanto entre os próprios alunos no processo de ensino e aprendizagem, apontando para a importância de as tarefas matemáticas propostas em sala de aula assumirem uma natureza problemática. Além disso, trata da necessidade de o professor ser capaz de estabelecer um ambiente de trabalho estimulante, que propicie a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

- PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Este livro levanta questões e propõe reflexões sobre aspectos metodológicos do ensino de Matemática, levando em consideração o saber matemático e os desafios de seu ensino e aprendizagem.

- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. e adapt. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

  Neste livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propos-

MODELO

tos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

- _____. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

  Este trabalho tece comentários a respeito das maneiras de resolver um problema, no qual o processo de solução é mais importante do que a própria solução em si. Para tanto, Polya estabelece as quatro fases da resolução de um problema: compreendendo o problema, elaborando um plano, executando o plano e fazendo o retrospecto.

- RIBEIRO, Alessandro J.; CURY, Helena N. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro, os autores discutem a respeito do ensino e da aprendizagem da Álgebra, com enfoque especial aos assuntos relacionados a equações e funções, fazendo uma breve revisão histórica e apresentando pesquisas relacionadas ao tema.

- SADOVSKY, Patricia. *O ensino de matemática hoje*: enfoques, sentidos e desafios. Trad. Antonio de Padua Danesi. São Paulo: Ática, 2007. (Educação em Ação).

  Neste livro são apresentadas propostas para rever e analisar a Matemática e, assim, reformular a relação entre professor e aluno.

- SKOVSMOSE, O. *Educação matemática crítica*: a questão da democracia. Trad. Abgail Lins e Jussara L. Araújo. Campinas: Papirus, 2017.

  O autor aborda a Educação Matemática por meio de uma perspectiva democrática, propondo que trabalhos com projetos de modelagem possam ser encarados como uma possível saída para a questão democrática na sala de aula.

- TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro as autoras esclarecem como lidar com a interdisciplinaridade no ensino de Matemática. São tratadas, ainda, situações com diferentes abordagens interdisciplinares sobre os conteúdos escolares que possibilitam ao professor refletir sobre como a Matemática e os demais componentes curriculares auxiliam na formação do aluno como cidadão.

- ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf>. Acesso em: 26 maio 2020.

  A tese apresentada neste documento disserta, entre outros assuntos pedagógicos, a respeito da importância do professor como elemento mediador entre as concepções pessoais e a prática pedagógica.

Leituras sobre a História da Matemática

- ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

  Neste livro, o autor relata as expedições – que duraram sete anos – de Pierre François André Méchain e Jean Baptiste Joseph Delambre, que, com o intuito de medir o planeta e estabelecer um padrão comum de medida, seguiram em direções opostas. Nesse contexto foi definida uma nova medida – o metro – como sendo a décima milionésima parte da distância entre o Polo Norte e a linha do Equador.

- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  A História da Matemática é abordada neste livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, e finalmente chegando aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

- CANE, Philip. *Gigantes da ciência*. Rio de Janeiro: Ediouro, [s.d.].

  Biografia de 50 dos grandes nomes da humanidade, incluindo Pitágoras, Aristóteles, Arquimedes, Galileu, Einstein, Leonardo da Vinci, Euclides, bem como alguns inventos relacionados a esses gênios.

- CARVALHO, Luiz Mariano et al. (Org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

  O livro apresenta uma coleção de artigos que relaciona o uso de recursos tecnológicos e a História da Matemática ao ensino de Matemática.

- Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual.

  Nesta coleção, em que os volumes são assinados por autores diferentes, são abordados conteúdos matemáticos, como Geometria, Álgebra e Trigonometria, com base em seus aspectos históricos.

- DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *O sonho de Descartes*: o mundo de acordo com a matemática. Trad. Mário

MODERNA

C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

O livro trata de René Descartes e de quatro séculos de avanço matemático após o sonho desse estudioso francês sobre a matematização do mundo. Nesse contexto, são abordados conteúdos matemáticos presentes no cotidiano, como é o caso da utilização da linguagem computacional.

- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

  O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para a resolução.

- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

  No volume 1, a história dos algarismos é apresentada considerando a origem da representação simbólica dos números em diversas civilizações, como os gregos, os romanos e os maias. Já no volume 2, é explicado por que a civilização indiana é considerada o berço da numeração moderna e são refeitos os caminhos que levaram o homem a inventar o computador.

- _____. *Os números*: a história de uma grande invenção. 11. ed. Trad. Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 2005.

  O livro aborda uma resumida História da Matemática e acompanha a evolução da arte de calcular, contada desde a Pré-História.

- LEAVITT, David. *O homem que sabia demais*: Alan Turing e a invenção do computador. Ribeirão Preto: Novo Conceito, 2011.

  O livro traz a biografia do matemático Alan Turing, que, por meio da proposta de uma máquina ainda imaginária, abriu as portas para a era dos computadores.

- LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. Abakós, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

  Neste livro, os autores defendem o uso da História da Matemática como metodologia em sala de aula, realizando uma abordagem histórica dos conteúdos como meio de facilitar o entendimento da Matemática.

- MAOR, Eli. *e*: a história de um número. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

  O livro traz em ordem cronológica desde o cálculo com logaritmos até descobertas mais recentes relacionadas ao número *e*.

- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação matemática*: propostas e desafios. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Neste livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

- MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

  O texto apresenta as principais questões e os momentos mais significativos do ensino da Matemática ao longo dos tempos.

- SINGH, Simon. *O livro dos códigos*: a ciência do sigilo: do antigo Egito à criptografia quântica. 7. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2010.

  O texto é uma narrativa sobre códigos e criptografia, bem como sobre os campos onde os códigos são e foram utilizados.

- STEWART, Ian. *Uma história da simetria na Matemática*. Trad. Cláudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  O livro apresenta a busca por soluções de equações algébricas, relatando essa história por meio de uma linha do tempo que vai desde a antiga Babilônia até chegar à Física do século XXI.

Leituras sobre os conteúdos deste volume

- BARBOSA, João Lucas M. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Este livro dá ao professor uma visão ampliada do que ensina em sala de aula, mostrando a Geometria euclidiana plana de um ponto de vista que vai além dos tópicos do Ensino Básico.

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal*: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro apresenta um estudo dos fractais voltado para a sala de aula, além de conter características artísticas sem perder a precisão e o rigor matemático.

- *Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 2013.

  Esta coleção abarca uma grande variedade de conteúdos e conceitos, dispostos em dez volumes e direcionados a alunos dos Ensinos Médio e Superior.

- COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). *As ideias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

  Esta obra comenta a prontidão para conceitos, equações, expressões, resolução de problemas, uti-

MODERNA

lização de computadores e calculadoras voltados ao aprendizado da Álgebra, entre outros temas de grande importância.

- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.

  Este volume é composto de teorias, exercícios de aplicação e testes de vestibular que envolvem Geometria plana, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, sempre acompanhados de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre a história da Matemática relacionados aos temas abordados.

- GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

  Em meio a uma rede de intrigas envolvendo a máfia, sequestros e enigmas intelectuais, este romance desafia o leitor a compreender e organizar a história do pensamento matemático, desde a Antiguidade até os dias atuais.

- IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar*: trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 3.

  Este volume é composto de teorias e exercícios de aplicação, testes de vestibular referentes a Trigonometria, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Uma coleção de crônicas e comentários em torno de um tema comum: a Matemática estudada nos últimos três anos que antecedem a universidade.

- LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).

  O foco desta obra é o trabalho com as funções de uma variável, estudadas sem o uso do cálculo infinitesimal. Tal abordagem elementar traz noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números, como os naturais, os inteiros, os racionais e os reais. Na segunda parte do livro são apresentadas funções variadas: afins, quadráticas, polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar P.; GUIMARÃES FILHO, Florêncio F. *Coordenadas no plano*: com as soluções dos exercícios. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).

  O tema abordado no livro é o uso de coordenadas como método para estudar Geometria plana. A primeira parte contém uma simplificação da Geometria analítica plana; a segunda, uma introdução aos vetores; e na terceira parte, as coordenadas e vetores são utilizados com a finalidade de estudar as transformações geométricas simples.

- WAGNER, Eduardo. *Construções geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

  Este livro visa mostrar que as construções geométricas são um importante instrumento no ensino da Geometria e da Álgebra. O texto explora as propriedades geométricas das figuras e a construção a partir da solução algébrica.

Sugestões de *sites* para o professor

- **Centro de Informação e Biblioteca em Educação**

  Disponível em: <http://inep.gov.br/pesquisa-ao-acervo>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  O acervo da biblioteca do Cibec é composto de livros, periódicos, teses, dissertações, folhetos e relatórios de pesquisa, materiais de multimídia, além de obras raras e especiais e documentos a respeito da educação brasileira.

- **Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática João Affonso Pascarelli**

  Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* tem por objetivo a prestação de serviços para professores e, por meio dele, é possível se inscrever e participar de cursos de atualização profissional, oficinas, palestras e seminários.

- **Domínio Público – Biblioteca Digital Desenvolvida em *Software* Livre**

  Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Com este *site*, o Governo Federal visa disponibilizar conhecimentos, colocando à disposição de todos uma biblioteca virtual. Alunos e professores podem utilizá-la para estudos, pesquisas e desenvolvimento profissional.

- **Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec)**

  Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/index.php>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* contém *softwares* disponíveis para *download*, artigos e atividades que tratam da tecnologia informática no âmbito da educação matemática escolar.

- **Educação Matemática em Revista**

  Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr>. Acesso em: 5 ago. 2020.

EM MODERNA

Essa revista tem como foco o trabalho do professor em sua prática de educador matemático.

- **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE**

  Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Com este *site* o Ministério da Educação busca prover ações para o desenvolvimento da educação, proporcionando ao professor uma fonte de informações sobre os programas gerenciados pelo FNDE, os financiamentos escolares, os projetos e as ações educacionais.

- **Geometria Analítica**

  Disponível em: <https://podcasts.google.com/feed/aHR0cHM6Ly9hbmNob3luZm0vcy8yYzMzNDNkMC9wb2RjYXN0L3Jzcw/episode/YWYwMjE3YzktODk0MC00Y2FkLWFiODItN2FkZDQ0YTgwYmI3>. Acesso em: 12 abr. 2021.

- **Geometria não euclidiana**

  Disponível em: <https://www.deviante.com.br/podcasts/scicast-362/>. Acesso em: 27 jun. 2020.

- **Mathema**

  Disponível em: <https://mathema.com.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Neste *site* o professor encontrará informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação Matemática.

- **Ministério da Educação**

  Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* apresenta informações sobre o órgão governamental responsável pela Educação no Brasil (MEC). Além disso, o professor tem acesso aos projetos desenvolvidos pelo governo para a educação no país.

- **Nova Escola**

  Disponível em: <https://novaescola.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A edição *on-line* da revista Nova Escola proporciona ao leitor o acesso a diversas informações sobre a educação em várias áreas do conhecimento. Neste *site* pode-se ter acesso às edições da revista e pesquisar artigos publicados.

- **Portal do Núcleo de Pesquisas das Novas Tecnologias de Comunicação Aplicadas à Educação – Escola do Futuro USP**

  Disponível em: <https://www.futuro.usp.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* proporciona ao professor acesso a novas tecnologias da informação e comunicação, bem como a projetos de pesquisa e a produções científicas.

- **Revista Brasileira de Educação – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**

  Disponível em: <https://anped.org.br/site/rbe>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  A revista é voltada à publicação de artigos acadêmico-científicos, visando fomentar e facilitar o intercâmbio acadêmico nos âmbitos nacional e internacional. Por meio do *site*, é possível ter acesso às edições da revista, pesquisar, enviar artigos etc.

- **Revista do Professor de Matemática**

  Disponível em: <http://rpm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* abrange informações sobre a publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. A revista é destinada àqueles que ensinam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No *site*, estão disponíveis artigos, edições da revista e informações a respeito da publicação de artigos.

- **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**

  Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Tem como finalidade congregar profissionais (pesquisadores, professores e alunos) da área de Educação Matemática e de áreas afins. No *site*, podem ser encontradas diversas informações sobre a Educação Matemática no Brasil e no exterior.

- **Sociedade Brasileira de Matemática**

  Disponível em: <https://www.sbm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* busca estimular o desenvolvimento da pesquisa e do ensino da Matemática no Brasil. Nele, estão disponíveis ao professor informações sobre eventos e atividades da área.

- **Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência**

  Disponível em: <http://portal.sbpcnet.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* disponibiliza informações, eventos, publicações, vídeos, notícias, entre outras atividades relacionadas à Ciência.

Referências bibliográficas

- ABRAMOVAY, Miriam; SILVA, Ana Paula da; FIGUEIREDO, Eleonora. *Guia para diretores e professores*: reflexões e práticas sobre violência e convivência escolar: faça você mesmo. Rio de Janeiro: Flacso Brasil/BID, 2018.

  Guia que apresenta orientações aos professores sobre

MODELO

os principais temas da contemporaneidade, relacionados à violência e à convivência escolar, de maneira reflexiva e prática.

- ACTIVE learning strategies. *Berkeley Center for Teaching & Learning.* Disponível em: <https://teaching.berkeley.edu/active-learning-strategies>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Página elaborada pelo Centro de Ensino e Aprendizagem da Universidade da Califórnia, em Berkeley, nos Estados Unidos, que apresenta definições, organização e exemplos de diversas estratégias associadas às metodologias ativas.

- ARAÚJO, Luciene da Costa; VIEIRA, Kay F. L.; COUTINHO, Maria da Penha de Lima. Ideação suicida na adolescência: um enfoque psicossociológico no contexto do ensino médio. *Psico-USF*, Itatiba, v. 15, n. 1, p. 47-57, jan./abr. 2010.

  Artigo que apresenta um estudo sobre as representações sociais da ideação suicida e a presença desse fenômeno em adolescentes do Ensino Médio.

- BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

  Este livro reúne artigos de professores que apresentam conceitos, reflexões, experiências e possibilidades de implementação do ensino híbrido nas escolas.

- BARCA, Isabel. Aula oficina: do projeto à avaliação. In: *Para uma educação de qualidade*: atas da Quarta Jornada de Educação Histórica. Braga, Centro de Investigação em Educação (CIED) / Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, 2004. p. 131-144.

  Artigo que apresenta, de maneira objetiva e estruturada, as etapas de uma aula-oficina.

- BARCELOS, Thiago Schumacher; SILVEIRA, Ismar Frango. Pensamento computacional e educação matemática: relações para o ensino de computação na educação básica. In: *WORKSHOP* SOBRE EDUCAÇÃO EM COMPUTAÇÃO, 20., 2012, Curitiba. *Anais*... Curitiba: SBC, 2012. p. 1-10. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/256439343_Pensamento_Computacional_e_Educacao_Matematica_Relacoes_para_o_Ensino_de_Computacao_na_Educacao_Basica/link/0deec5228dfbb4d377000000/download>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Artigo que busca discutir as relações entre conhecimento, habilidades e atitudes possíveis de serem estabelecidas entre Matemática e Ciência da Computação.

- _____. Relações entre o pensamento computacional e a matemática através da construção de jogos digitais. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE *GAMES* E ENTRETENIMENTO DIGITAL, 12., 2013, São Paulo. *Anais*... São Paulo: SBC, 2013. p. 52-55. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/wei/article/view/10222>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Esta pesquisa busca estudar a relação entre a Matemática aprendida no Ensino Básico e o sucesso nos cursos de introdução à Ciência da Computação, analisando o modo pelo qual os alunos estimulam as competências matemáticas no processo de desenvolvimento do pensamento computacional, tomando como base as atividades práticas de desenvolvimento de jogos digitais.

- BEFORE, during, or after reading: reflection quick write. *Lakehead University*. Disponível em: <https://teachingcommons.lakeheadu.ca/sites/default/files/inline-files/Quick%20Writes%20explanation.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Texto que apresenta um breve resumo a respeito da metodologia ativa **Quick writing**, publicado na página da Universidade de Lakehead, localizada no Canadá.

- BENINCASA, Miria; REZENDE, Manuel Morgado. Tristeza e suicídio entre adolescentes: fatores de risco e proteção. *Boletim de Psicologia*, São Paulo, v. 55, n. 124, p. 93-110, jun. 2006.

  Artigo que apresenta informações sobre os fatores de risco e proteção relacionados ao suicídio.

- BOUCINHA, Rafael Marimon et al. Construção do pensamento computacional através do desenvolvimento de *games*. *Renote*, v. 15, n. 1, p. 1-10, jul. 2017. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/75146>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo apresenta uma proposta metodológica que busca desenvolver o pensamento computacional nos alunos por meio do desenvolvimento de *games*.

- BRACKMANN, Christian Puhlmann. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Trabalho que busca verificar a possibilidade do desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica por meio de atividades exclusivamente desplugadas, ou seja, sem o uso de aparatos eletrônicos.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018a. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas

MODERNA

e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018b. p. 21-24. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/dcnem.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Esta resolução atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicadas em 2012. Nela, são apresentadas as mudanças necessárias para a implementação da proposta do Novo Ensino Médio.

- _____. Ministério da Educação. *Diretrizes para a Educação Básica*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/323-secretarias-112877938/orgaos-vinculados-82187207/12992-diretrizes-para-a-educacao-basica>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Conjunto de pareceres e resoluções que regulamentam a Educação Básica no Brasil.

- _____. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência Enem*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Matriz de referência é um termo utilizado especificamente no contexto das avaliações em larga escala para indicar habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização e orientar a elaboração de itens de testes e provas, bem como a construção de escalas de proficiência que definem o que e o quanto o aluno realiza no contexto da avaliação.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 30 maio 2020.

  As diretrizes reunidas neste documento estabelecem a base nacional comum, que orienta a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino do país.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

  Nessa obra, voltada à formação de professores, são discutidos diversos temas relacionados ao Ensino Médio. Em um primeiro momento, discute-se o conceito de juventude com o objetivo de propor mudanças nas maneiras de conceber essa faixa etária. Esses textos buscam valorizar o papel do jovem como sujeito de sua história. Em seguida, os textos destacam temas como juventude e tecnologia, questão do mercado de trabalho e projeto de vida, além do papel da escola no processo de formação dos jovens.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este documento apresenta o histórico dos Temas Contemporâneos Transversais, sua divisão em seis grandes áreas e a importância desses temas para os currículos da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000.

  Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional.

- _____. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Ações Programáticas e Estratégicas. *Proteger e cuidar da saúde de adolescentes na atenção básica*. 2. ed. Brasília 2018c. Disponível em: <https://bvsms.saude.gov.br/bvspublicacoesproteger_cuidar_adolescentes_atencao_basica_2ed.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2020.

  Este documento do Ministério da Saúde foi elaborado para auxiliar as Equipes de Atenção Básica/Saúde da Família no trabalho com adolescentes, propondo o cuidado com a saúde e a adoção de hábitos saudáveis.

- CAJADO, Ane Ferrari Ramos; DORNELLES, Thiago; PEREIRA, Amanda Camylla. *Eleições no Brasil*: uma história de 500 anos. Brasília: Tribunal Superior Eleitoral, 2014. p. 72-73. Disponível em: <http://www.tse.jus.br/hotsites/catalogo-publicacoes/pdf/tse-eleicoes-no-brasil-uma-historia-de-500-anos-2014.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2020.

EM OBRA

Este documento pretende reconstruir parte da história eleitoral brasileira, destacando os principais marcos relacionados ao voto no país, desde o período do Brasil Colônia até os dias atuais, como a evolução do acesso ao voto no Brasil. Também apresenta imagens do acervo histórico relacionado às cédulas e urnas utilizadas no país.

- CAMARGO, Fausto; DAROS, Thuinie. *A sala de aula inovadora*: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018.

  Este livro é organizado em duas partes: a primeira apresenta reflexões dos autores sobre possibilidades de inovação em sala de aula; a segunda aborda mais de 40 estratégias que contribuem para a aplicação dessas metodologias.

- CAMPOS, Herculano Ricardo; CARDOSO, Samia Dayana J. Violência na escola: uma reflexão sobre o *bullying* e a prática educativa. *Em Aberto*, Brasília, v. 23, n. 83, p. 107-128, mar. 2010.

  Artigo que apresenta informações estatísticas sobre o *bullying* na escola e o papel do professor diante de situações como essa.

- CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  O objetivo deste currículo é oferecer diretrizes e orientações que visam apoiar as escolas a incluir em suas propostas curriculares os temas tecnologia e computação, potencializando o uso da tecnologia na aprendizagem.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

  O autor propicia uma análise do papel da Matemática na cultura ocidental e da noção de que a Matemática é apenas uma forma de Etnomatemática.

- DAYRELL, Juarez (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

  Juarez Dayrell é um pesquisador que investiga questões sobre a juventude e a educação, analisando a importância das culturas juvenis na construção de um cenário educativo mais democrático e significativo. Nessa obra, ele traz algumas experiências vivenciadas no projeto Observatório da Juventude, da Universidade Federal de Minas Gerais (UGMG), que trabalha desde 2003 com a formação de professores e discussões envolvendo a juventude.

- DRIEU, Didier; PROIA-LELOUEY, Nadine; ZANELLO, Fabrice. Ataques ao corpo e traumatofilia na adolescência. *Ágora*, Rio de Janeiro, v. 14, n. 1, p. 9-20, jan./jun. 2011.

  Artigo que apresenta um estudo sobre a relação entre as mudanças que ocorrem na puberdade e os comportamentos suicidas.

- FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa*. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

  Este livro traz aplicações práticas e estratégias de trabalho com diversos tipos de metodologias que apresentam elementos de inovação nas práticas de ensino e aprendizagem, chamadas pelas autoras de metodologias "inov-ativas".

- FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: *SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009*, Ponta Grossa. *Anais...* Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1013-1026.

  Aborda, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, a utilização de recursos de Tecnologia da Informação e Comunicação como tendência em Educação Matemática.

- FORTES, Isabel; MACEDO, Mônica Medeiros Kother. Automutilação na adolescência: – rasuras na experiência de alteridade. *Psicogente*, Barranquilla, v. 20, n. 38, p. 353-367, jul./dez. 2017. Disponível em: <http://revistas.unisimon.edu.co/index.php/psicogente/article/view/2556>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo de reflexão teórica que aborda aspectos do comportamento de automutilação, propondo-se a analisar o tema com base em algumas narrativas em *blogs* de adolescentes.

- FRANÇA, Rozelma; TEDESCO, Patrícia. Desafios e oportunidades ao ensino do pensamento computacional na educação básica no Brasil. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4., 2015, Maceió. *Anais...* Maceió: SBC, 2015. p. 1464-1473. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/283347058_Desafios_e_oportunidades_ao_ensino_do_pensamento_computacional_na_educacao_basica_no_Brasil>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Este trabalho busca discutir os desafios do ensino do pensamento computacional na Educação Básica, apontando alguns dos principais desafios a serem vencidos, bem como oportunidades de pesquisa na área.

- FRANCISCO, Marcos Vinicius; LIBÓRIO, Renata Maria C. Um estudo sobre *bullying* entre escolares do Ensino Fundamental. *Psicologia*: reflexão e crítica, Porto Alegre, v. 22, n. 2, p. 200-207, 2009.

MODERNA

Artigo que busca caracterizar o *bullying* em escolas públicas, destacando os efeitos tanto sobre o comportamento quanto sobre o sentimento dos vitimados.

- ILLERIS, Knud (Org.). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Porto Alegre: Penso, 2013.

  Nesta obra, o pesquisador Knud Illeris reúne diferentes autores e teorias da aprendizagem que têm sido desenvolvidas na contemporaneidade e apresenta um conjunto de textos que tratam sobre o tema. Cada pesquisador contribui com suas reflexões, buscando caminhos na compreensão sobre o conceito de educar e sobre como funciona o complexo processo de ensino e aprendizagem na atualidade.

- INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC). Como funciona o sistema de posicionamento global (GPS). Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/o-sistema-gps/>. Acesso em: 13 jul. 2020.

  Esta reportagem apresenta as características do sistema de posicionamento global (GPS), iniciando com uma abordagem histórica sobre o desenvolvimento desse sistema até sua estrutura atual. Além disso, fornece explicações a respeito dos conhecimentos matemáticos que permitem a compreensão do funcionamento desse sistema para a localização de pontos sobre a superfície terrestre.

- ISOTANI, Seiji; BRANDÃO, Leônidas de Oliveira. O papel do professor e do aluno frente ao uso de um *software* de geometria interativa: iGeom. *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 45, p. 165-192, abr. 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n45/v27n45a09.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2020.

  Neste artigo, os autores discutem o uso da Geometria Interativa (GI) para o ensino de Geometria, apresentando exemplos de abordagens nesse contexto, com destaque para experiências realizadas em turmas de licenciatura em Matemática e cursos de extensão para professores nos quais foi utilizado o *software* iGeom.

- LEAL, Edvalda Araújo; MIRANDO, Gilberto José; CASA NOVA, Silvia Pereira de Castro. *Revolucionando a sala de aula*: como envolver o estudante aplicando técnicas de metodologias ativas de aprendizagem. São Paulo: Atlas, 2017.

  Este livro aborda algumas metodologias ativas de aprendizagem utilizando tanto estratégias tradicionais quanto estratégias contemporâneas e inovadoras.

- LINHARES, Fernando R. da C. *Os objetivos das visitas escolares a um observatório astronômico na visão dos professores*. 2011. 239 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011. p. 149.

  Esta pesquisa discute a respeito dos trabalhos desenvolvidos por professores que realizam visitas regulares a um observatório astronômico localizado na região metropolitana de Belo Horizonte. Por meio dos dados coletados e analisados, percebeu-se que o observatório assumiu o papel de espaço de ensino (educação formal) e de divulgação de Astronomia (educação não formal).

- MENTAL healt atlas 2017. Genebra: World Health Organization, 2018.

  Documento que reúne uma compilação de dados sobre a saúde mental da população em nível mundial.

- MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, Lilian; MORAN, José (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 2-25.

  Este artigo apresenta práticas pedagógicas baseadas em metodologias ativas que valorizam o protagonismo dos alunos.

- _____. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Org.). *Convergências midiáticas*, educação e cidadania: aproximações jovens. Ponta Grossa: Foca Foto/Proex/UEPG, 2015. v. 2. (Mídias Contemporâneas).

  Esse texto aborda as diferentes facetas das tecnologias educacionais, trazendo reflexões sobre a educação no mundo contemporâneo e as novas concepções de ensino relacionadas às metodologias ativas.

- MORENO, Montserrat et al. *Falemos de sentimentos*: a afetividade como um tema transversal. Trad. Maria Cristina de Oliveira. São Paulo: Moderna, 1999. (Educação em Pauta: Temas Transversais).

  Relacionando aspectos cognitivos e afetivos, este trabalho afirma que é possível aprender em sala de aula características relacionadas à solidariedade, à ajuda mútua e à luta contra a discriminação, com base em ações e reflexões sobre os próprios sentimentos e comportamentos.

- MUSEU DE ARTE CONTEMPORÂNEA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (MAC-USP). *Acervo*: roteiros de visita. 2004. Disponível em: <http://www.macvirtual.usp.br/mac/templates/projetos/roteiro/PDF/23.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2020.

  Esta ficha é parte do roteiro de visitas ao acervo do Museu de Arte Contemporânea da Universidade de São Paulo (MAC-USP), voltado a professores, relativo à exposição do artista Wassily Kandinsky. Nesse

MODERNA

documento, são apresentadas orientações que podem contribuir para o trabalho pedagógico desenvolvido com base em uma obra desse artista, inclusive com exemplos de questões que podem ser propostas aos alunos durante a análise da obra.

- PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Nesta obra é apresentada uma coletânea de ensaios que tratam da inserção da informática na educação escolar, promovendo articulações entre o uso dessa tecnologia e o fenômeno da cognição.

- PARA UMA ABORDAGEM multicultural: o Programa Etnomatemática. Nuno Vieira entrevista Ubiratan D'Ambrosio. Revista Lusófona de Educação, Lisboa, n. 11, p. 163-168, 2008.

  Entrevista realizada com o precursor da Etnomatemática, Professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio.

- PAULINO FILHO, Lucival Bento; PELLOSO, João Augusto Grecco; CAETANO, Willyan da Silva. Debates orientados: uma abordagem da aprendizagem ativa no desafio da formação integral. In: ENCONTRO NACIONAL DE JOVENS INVESTIGADORES, 4., 2019, Salvador. *Anais...* Salvador: 2019. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57573> Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo apresentado em evento promovido pela Universidade do Estado da Bahia (Uneb), que aborda a realização de debates sob a perspectiva da aprendizagem ativa.

- PENSAMENTO computacional e programação como ferramentas de aprendizagem. *Instituto Ayrton Senna*, 13 set. 2019. Disponível em: <https://www.institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Nesse texto, o pensamento computacional e a programação são indicados como estratégias eficazes na busca por práticas pedagógicas que promovam o desenvolvimento pleno.

- PIVA JUNIOR, Dilermando. *Sala de aula digital*: uma introdução à cultura digital para educadores. São Paulo: Saraiva, 2013.

  Esta obra discute questões relacionadas à utilização de recursos tecnológicos em ambiente escolar, oferecendo ferramentas para que os educadores possam fundamentar e utilizar a cultura digital a serviço de sua principal atividade: a arte de educar.

- PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

  Nesta obra, os autores apresentam os possíveis modos de introduzir em sala de aula as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos, apontando as vantagens e desvantagens no trabalho com essa perspectiva. Também são analisados os papéis dos alunos e professores em sala de aula ao lidar com problemas relacionados às áreas de Geometria, Estatística e Aritmética.

- RAABE, André. Pensamento computacional na educação: para tod*s, por tod*s! *Computação Brasil,* Porto Alegre, Sociedade Brasileira de Computação (SBC), v. 34, n. 2, p. 54-63, jul. 2017. Disponível em: <https://www.sbc.org.br/component/flippingbook/book/35/1?page=54>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Com o intuito de apontar para a grande importância da ampliação do pensamento computacional no Ensino Básico, o autor discorre, neste artigo, a respeito dos esforços e das dificuldades encontradas no processo de valorização da Ciência da Computação como área de conhecimento.

- RECINE, Elisabetta; RADAELLI, Patrícia. Alimentação saudável. *Biblioteca Virtual em Saúde*. p. 16. Disponível em: <https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/alimentacao_saudavel.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2020.

  Este material faz uma abordagem geral a respeito da alimentação saudável, desde as definições envolvendo calorias, macronutrientes e micronutrientes à caracterização de alimentação saudável, discutindo também a pirâmide alimentar e apresentando orientações a respeito da importância dos hábitos saudáveis para a manutenção da saúde individual.

- REIS, Angelina Fatima Moreno Vaz dos; BARRETO, Maria Auxiliadora Motta. *Uma experiência com think pair share no Ensino Fundamental I*. Práxis, Volta Redonda, v. 9, n. 17, p. 55-67, jun. 2017.

  Este artigo apresenta definições e a organização da estratégia **Think-pair-share** por meio da aplicação dessa abordagem em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental.

- ROCHA, Julciane. *Design thinking* na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

  O objetivo é apresentar aos professores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar e, com isso, trazer benefícios para o dia a dia da sala de aula, como engajamento, maior aproveitamento, personalização, comunicação e outros.

- ROCHA, Ricael Spirandeli; CARDOSO, Iara Maria Dâmaso; MOURA, Monthelli Aparecida Estevão de. O uso

MODERNA

da *gallery walk* como metodologia ativa em sala de aula: uma análise sistemática no processo de ensino-aprendizagem. *Revista Sítio Novo*, Palmas, v. 4, n. 1, p. 162-170, jan./mar. 2020.

Este artigo apresenta possibilidades de aplicação da estratégia **Gallery walk** por meio da análise documental de publicações de sete experiências vivenciadas em salas de aula de Uberaba-MG.

- ROSSI, Gicele da Rocha; BISOGNIN, Eleni. Explorando as transformações geométricas por meio da Arte. In: EN-CONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. *Anais*... Ijuí: Unijuí, 2-5 jun. 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_3>. Acesso em: 15 jul. 2020.

  Neste artigo, as autoras exploram diferentes transformações geométricas no plano, com base em uma obra arquitetônica localizada no Rio Grande do Sul, com o auxílio do *software* Cabri Gèométre II, analisando a relação que pode ser estabelecida entre Arte e Matemática no estudo desses conceitos no Ensino Fundamental.

- SOUZA, Maria Helena. 21 *teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.

  Este livro apresenta uma viagem pela história dos teoremas desde os primórdios da humanidade, de modo a estabelecer relações com outras áreas do conhecimento. Nessa viagem, incorpora, por exemplo, a beleza no teorema dos fractais e a possibilidade de obter a medida de distâncias inalcançáveis por meio do teorema de Tales.

- TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. 17. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

  O livro traz considerações e reflexões sobre os saberes docentes que servem de base para o trabalho dos professores, bem como sobre os fundamentos sociocognitivos do ensino e a análise do trabalho e da formação dos professores.

- TOKARNIA, Mariana. Um em cada dez estudantes no Brasil é vítima frequente de *bullying. Agência Brasil,* 19 abr. 2017. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-04/um-em-cada-dez-estudantes-no-brasil-e-vitima-frequente-de-bullying>. Acesso em: 27 abr. 2020.

  Diante da realidade das escolas brasileiras, esta reportagem apresenta um levantamento de dados a respeito da ocorrência de situações de *bullying* em escolas da Educação Básica, sustentada por informações coletadas do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) de 2015. O texto discute as causas e consequências envolvendo esse tipo de situação e a atuação de pais, professores e demais estudantes no enfrentamento do *bullying*.

- VALENTE, Jonas. Agência Brasil explica: o que é a tecnologia 5G. *Agência Brasil*, 30 mar. 2020. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2020-03/agencia-brasil-explica-o-que-e-tecnologia-5g>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Esta reportagem mostra as principais características da tecnologia 5G, considerando os benefícios que podem ser obtidos com a implantação dessa nova tecnologia, em diversas áreas da sociedade, além de apresentar as perspectivas para seu desenvolvimento em relação à implantação no Brasil.

- VALENTE, José Armando. Integração do pensamento computacional no currículo da educação básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. *e-Curriculum*, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 864-897, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/curriculum/article/view/29051/20655>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Neste artigo, o autor busca analisar as diferentes estratégias de implantação do pensamento computacional no currículo da Educação Básica. Essas estratégias foram classificadas em três categorias: a inclusão de temas relacionados à Ciência da Computação, a inserção de componentes curriculares que exploram os conceitos do pensamento computacional por meio de tecnologias e, por fim, a exploração dos conceitos do pensamento computacional de maneira transversal ao currículo do aluno.

- VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

  Relatório que busca fornecer dados atualizados sobre a violência escolar e *bullying*, destacando sua natureza, abrangência e impactos, assim como apresentar iniciativas para enfrentar esses problemas.

- WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia,* Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/4711/pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo traz uma discussão a respeito do pensamento computacional, enfatizando sua importância como habilidade analítica que deve ser desenvolvida nos alunos do Ensino Básico, auxiliando na resolução de quaisquer tipos de problemas.

MODELO

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

GEOMETRIA ANALÍTICA, SISTEMAS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e
Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática
pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática
pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37384 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Para conhecer seu livro

Olhar o mundo à nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos de nossa sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações, tomar decisões com base em constatações matemáticas e lidar com os recursos tecnológicos são exemplos da importância da Matemática em nossa vida.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a esta etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos, exercícios e problemas resolvidos, seguidos de propostas de exercícios e problemas que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que tratam do uso de *softwares* e de linguagem de programação.

Por fim, desejamos a você, aluno ou aluna, que desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações de seu professor, faça uso deste material com dedicação, protagonismo e entusiasmo.

Bom estudo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

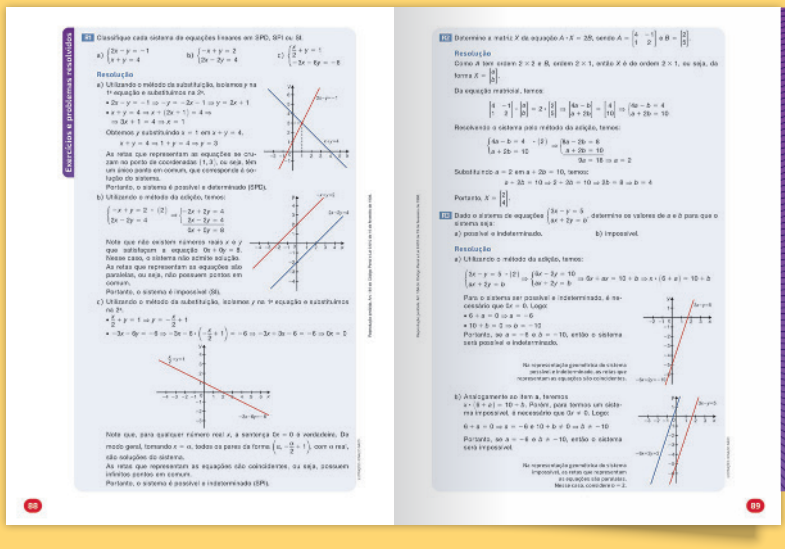
MODERNA

1 Coordenadas e distâncias

Caça ao tesouro

Abertura

Na abertura de cada tema você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversas temáticas.

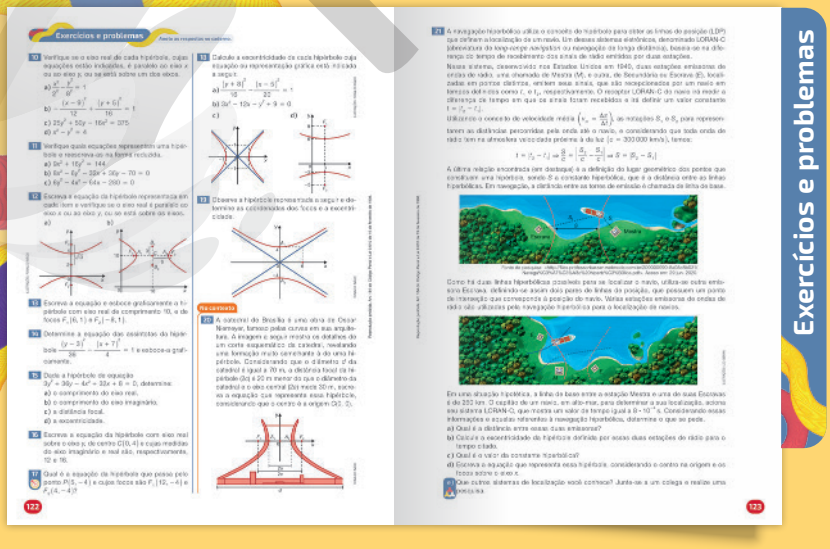


Exercícios e problemas resolvidos

Estes exercícios e problemas auxiliam a exercitar habilidades, competências e estratégias para resolver todas as outras tarefas propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

Resolvendo por etapas

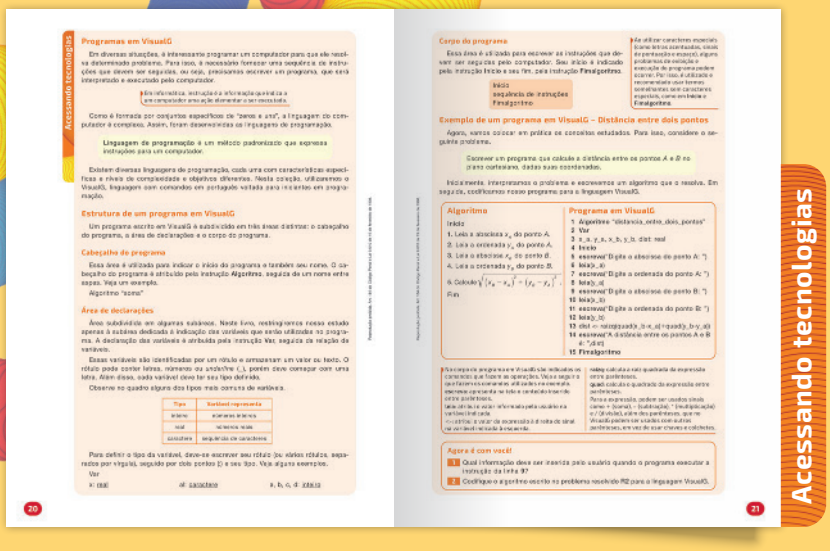
Esta seção apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Espera-se que, a partir dela, você seja capaz de desenvolver estratégias para resolver diversos problemas, matemáticos ou não.



Exercícios e problemas

Esta seção apresenta exercícios e problemas diversificados para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Vários deles apresentam relações com outras áreas do conhecimento e outros componentes curriculares, além de questões de provas, como vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Acessando tecnologias

Nesta seção, você vai encontrar exemplos e tarefas que complementam o que foi estudado nos temas, utilizando *softwares*, linguagem de programação e aplicativos disponíveis em *sites*.

Esta seção apresenta sugestões de livros, vídeos, *sites* e *podcasts* para você conhecer mais sobre o que foi estudado nos temas e para ampliar seus conhecimentos.

Ampliando seus conhecimentos

Calculadora

As tarefas com destaque **Calculadora** exploram procedimentos para usar os recursos dessa ferramenta.

Desafio

As tarefas com destaque **Desafio** possuem caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

No contexto

As tarefas com destaque **No contexto** estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.

Este ícone indica que as cores dos objetos retratados não correspondem às reais.

Em grupo

As tarefas com destaque **Em grupo** serão mais proveitosas se realizadas com a colaboração de um ou mais colegas.

Elaborando

As tarefas com destaque **Elaborando** exploram o desenvolvimento da escrita, da imaginação, da investigação e da reflexão.

Ser consciente

Nas tarefas com destaque **Ser consciente** você refletirá a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde, cidadania, entre outros, possibilitando uma avaliação cidadã e social da temática abordada.

Este ícone indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

No final do livro, você vai encontrar as **Referências bibliográficas** usadas neste volume e a seção **Ampliando seus conhecimentos**, contendo referências complementares de livros, *sites* e *podcasts* para ampliar seus conhecimentos sobre os temas estudados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Objetivos

A finalidade deste volume é ampliar seus conhecimentos a respeito de **Geometria analítica**, **Sistemas e Transformações geométricas**. Os conteúdos nele abordados são apresentados de maneira simples e precisa, visando seu protagonismo na aprendizagem e a construção de uma visão integrada da Matemática em diversos contextos.

No que se refere à **Geometria analítica**, o objetivo é que você amplie sua compreensão das noções de coordenadas na reta e no plano, motivando seu aprendizado sobre matrizes, determinantes e relações entre o ponto e a reta, como a condição de alinhamento de três pontos e a equação geral da reta.

Com relação a **Sistemas**, o objetivo é que você desenvolva sua aprendizagem para resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares por meio de técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

E no que se refere às **Transformações geométricas**, o objetivo é ampliar sua compreensão sobre as noções de translação, reflexão e rotação, além das transformações homotéticas de modo a construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas, como os fractais, construções civis, obras de arte e outras.

Além disso, durante o desenvolvimento dos conteúdos você será desafiado a propor estratégias para modelar soluções de determinados problemas e escrevê-las em uma linguagem de programação.

Base Nacional Comum Curricular – BNCC

Em toda a coleção, visando favorecer o desenvolvimento das Competências Gerais da Educação Básica, das Competências Específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades relacionadas a cada uma delas, serão propostas tarefas (problemas, vivências, investigações etc.) para que você as resolva de maneira reflexiva.

A seguir apresentaremos quais dessas competências e habilidades serão desenvolvidas neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Competências específicas

1. **CE1CNT:** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.
2. **CE2CNT:** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.
3. **CE3CNT:** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matemática e suas Tecnologias: Competências específicas e habilidades

1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

EM13MAT105: Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

EM13MAT301: Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT315: Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

EM13MAT405: Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

EM13MAT105

- O primeiro par de letras indica a etapa do **Ensino Médio**.
- O primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio.
- A segunda sequência de letras indica a área ou o componente curricular: **MAT** = Matemática e suas Tecnologias.
- Os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

SUMÁRIO

1 Coordenadas e distâncias 10

Estudando Geometria analítica 12
Coordenadas na reta 12
Coordenadas no plano 13
Distância entre dois pontos 14
Exercícios e problemas 18
Acessando tecnologias
Programas em VisualG 20
Coordenadas do ponto médio de um segmento 22
Baricentro de um triângulo 23
Exercícios e problemas 27

2 Matrizes 28

Estudando matrizes 30
Exercícios e problemas 32
Alguns tipos de matriz 34
Matriz quadrada 34
Matriz triangular 34
Matriz diagonal 34
Matriz identidade 34
Matriz nula 35
Matriz linha 35
Matriz coluna 35
Igualdade de matrizes 35
Matriz transposta 36
Matriz simétrica 36
Exercícios e problemas 36

3 Operações com matrizes 38

Adição e subtração de matrizes 40
Adição de matrizes 40
Subtração de matrizes 41
Exercícios e problemas 42
Multiplicação de um número real por uma matriz 43
Exercícios e problemas 43
Multiplicação de matrizes 44
Acessando tecnologias
Adição, subtração e multiplicação de matrizes em planilhas eletrônicas 45
Exercícios e problemas 49

4 Matriz inversa e determinantes 50

Matriz inversa 52
Exercícios e problemas 52
Equações envolvendo matrizes 54
Exercícios e problemas 55
Determinante de uma matriz 56
Determinante de uma matriz de ordem 1 56
Determinante de uma matriz de ordem 2 56
Determinante de uma matriz de ordem 3 56
Exercícios e problemas 57
Teorema de Jacobi e Teorema de Binet 58
Exercícios e problemas 58
Acessando tecnologias
Matriz inversa e determinante de uma matriz 59

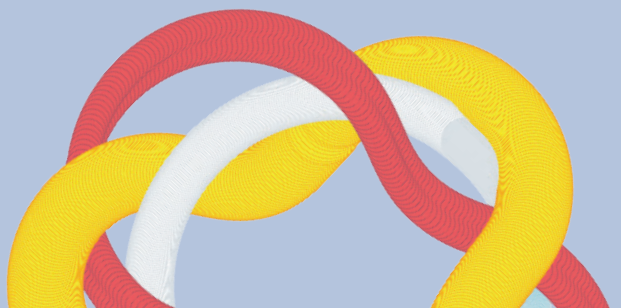
5 Uma aplicação de matrizes 60

6 O ponto e a reta 62

Condição de alinhamento de três pontos 64
Área da região determinada por um triângulo 65
Acessando tecnologias
Condições no VisualG 66
Exercícios e problemas 68
Equação da reta 70
Equação geral da reta 70
Exercícios e problemas 72

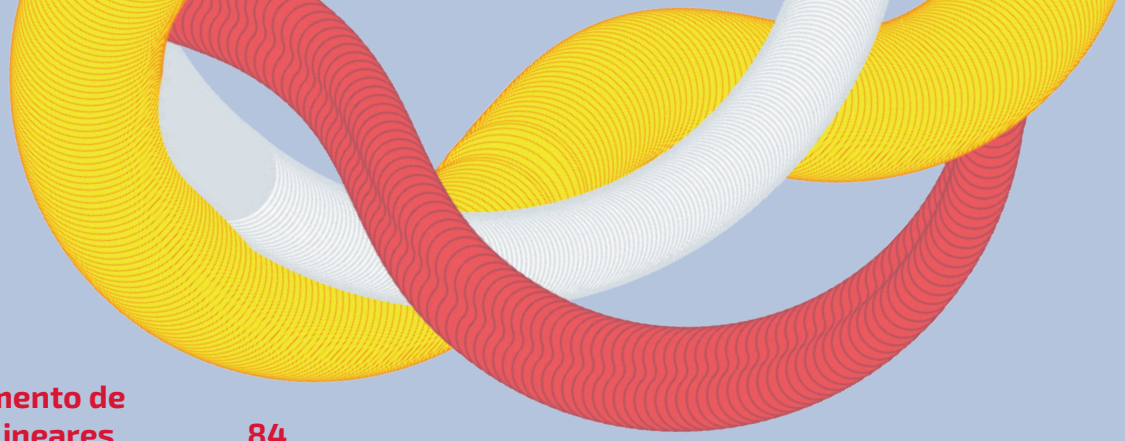
7 Sistemas lineares 74

Introdução aos sistemas lineares 76
Equação linear 76
Exercícios e problemas 77
Sistema linear 78
Solução de um sistema linear 78
Sistema linear homogêneo 78
Exercícios e problemas 82



MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



8 Escalonamento de sistemas lineares 84

Matrizes associadas a um sistema linear 86
Classificação de um sistema linear 86
Acessando tecnologias
Resolvendo sistemas lineares 90
Exercícios e problemas 91
Escalonamento de um sistema linear 93
Sistemas lineares equivalentes 93
Sistema linear escalonado 94
Exercícios e problemas 95
Procedimentos para escalonar um sistema linear 96
Exercícios e problemas 98
Acessando tecnologias
Escalonando sistemas 99
Discussão de um sistema linear 100
Exercícios e problemas 101

9 Circunferência 102

A circunferência 104
Exercícios e problemas 107

10 Circunferência e Arte 108

11 Cônicas 110

Estudando as cônicas 112
Elipse 112
Exercícios e problemas 116
Hipérbole 118
Exercícios e problemas 122
Parábola 124
Exercícios e problemas 128

12 A elipse e o cometa Halley 130

13 Transformações geométricas 132

Estudando transformações geométricas 134
Reflexão 134
Exercícios e problemas 135
Acessando tecnologias
Transformação de reflexão 137
Rotação 138
Exercícios e problemas 138
Acessando tecnologias
Transformação de rotação 140
Translação 141
Exercícios e problemas 142
Acessando tecnologias
Transformação de translação 143
Composição de transformações 144
Exercícios e problemas 146
Homotetia 147
Exercícios e problemas 148
Acessando tecnologias
Ampliando e reduzindo polígonos 149

14 Transformações geométricas e Arte 150

Ampliando seus conhecimentos 152
Respostas 153
Referências bibliográficas 160
Lista de siglas 160

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 Coordenadas e distâncias

Caça ao tesouro

Imagine que estamos em certa ilha do Caribe e descobrimos um manuscrito do pirata Barba Negra descrevendo a localização de um rico tesouro enterrado por ele. Será que a Matemática pode contribuir para a interpretação desse manuscrito e a localização do tesouro?

BNCC
- EM13MAT315
- EM13MAT405
- CE3CNT

Qualquer um que desembarque nesta ilha verá imediatamente um morro pontiagudo na face leste, que chamarei de *M*, uma grande palmeira, que chamarei de *P*, e duas grandes pedras em formato de tartaruga, que chamarei de *T*. Eu enterrei o tesouro em um ponto *X* que pode ser encontrado da seguinte maneira:

- caminhe de *P* para *M*, em linha reta, no sentido da montanha, contando seus passos;
- chegando em *M*, vire para a esquerda e dê exatamente a mesma quantidade de passos para chegar ao ponto *A*;
- volte ao ponto *P*, caminhe de *P* para *T*, em linha reta, no sentido da pedra, contando seus passos;
- chegando em *T*, vire para a direita e dê exatamente a mesma quantidade de passos para chegar ao ponto *B*;
- o ponto *X* fica na reta que liga *A* e *B* e está à mesma distância desses dois pontos.

FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.LILIGRAPHIE/SHUTTERSTOCK; 2.LIGHT FIELD STUDIOS/SHUTTERSTOCK; 3.BILLION PHOTOS/SHUTTERSTOCK; 4.NIK MERKULOV/SHUTTERSTOCK; 5.NAOKI KIM/SHUTTERSTOCK; 6.BOLTENKOFF/SHUTTERSTOCK; 7.ERIC ISSELEE/SHUTTERSTOCK; 8.GS PLANET/SHUTTERSTOCK; 9.FENG YU/SHUTTERSTOCK; 10.AL.ZAY/SHUTTERSTOCK; 11.ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK; 12.LUCAS SIQUEIRA/SHUTTERSTOCK; 13.PHOTOONGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 14.E71LENA/SHUTTERSTOCK; 15.FER GREGORY/SHUTTERSTOCK; 16.NASIDASTUDIO/SHUTTERSTOCK; 17.ANNA TIMOSHENKO/SHUTTERSTOCK

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Que estratégia você utilizaria para encontrar o tesouro, com o auxílio do manuscrito, se a palmeira já não existisse mais no local? Resposta pessoal.

B Você provavelmente já estudou o plano cartesiano e as coordenadas cartesianas em anos anteriores. Explique-os com suas palavras.

C Elabore um manuscrito que descreva a localização de um tesouro utilizando como referência alguns elementos da sala de aula. Em seguida, troque seu manuscrito com o de um colega e elabore o mapa do tesouro com base nas descrições presentes nesse manuscrito. Ao final, troque ideias com seu colega a respeito da validade dos mapas construídos e das dificuldades enfrentadas nesse processo. Resposta pessoal.

Depois de tantos anos, o morro pontiagudo (M) e as grandes pedras em formato de tartaruga (T) lá estavam, mas a palmeira (P) já tinha desaparecido completamente. Ainda assim conseguiríamos encontrar o tesouro considerando as informações presentes no manuscrito e no esquema do mapa?

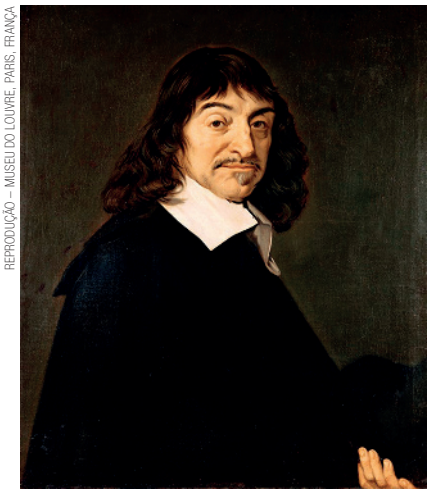
A resposta é sim! Por meio de conhecimentos da Geometria analítica, podemos resolver esse problema sem conhecer, necessariamente, a posição da palmeira (P). Uma maneira de fazer isso é usando **coordenadas no plano** e **distância entre dois pontos**, assuntos que serão estudados nas próximas páginas. Nesse caso, considerando o ponto A na origem e contando os passos em linha reta entre os pontos M e T, supondo que seja de 80 passos, pode-se utilizar as conexões entre a Geometria e a Álgebra para mostrar que é preciso caminhar 40 passos na direção de M para T e depois virar à direita e caminhar mais 40 passos para encontrar o tesouro. A localização do tesouro se torna independente da palmeira.

B) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que um plano cartesiano consiste em dois eixos graduados e perpendiculares entre si, que dividem o plano em quatro regiões. O eixo horizontal x é denominado eixo das **abscissas**, e o vertical y, eixo das **ordenadas**. O ponto em que esses eixos se cruzam é denominado **origem**. As **coordenadas cartesianas consistem** em um par ordenado $P(a, b)$, em que a é a abscissa, e b, a ordenada do ponto, ambos números reais.

Esse problema foi adaptado do livro *A Matemática do Ensino Médio*, dos autores Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, publicado em 1998 pela Sociedade Brasileira de Matemática.

NOVA

Estudando Geometria analítica



REPRODUÇÃO – MUSEU DO LOUVRE, PARIS, FRANÇA

De acordo com uma lenda, Descartes teve a ideia que originou o sistema de coordenadas cartesianas ao observar uma mosca no forro de seu quarto e supor que seu caminho poderia ser descrito relacionando as distâncias dela às paredes adjacentes.
Artista: Frans Hals. Paris, França, cerca de 1649-1700.

Muitos estudiosos consideram o início do estudo do que denominamos Geometria analítica como um dos maiores progressos da Matemática. A Geometria analítica tem entre suas características a realização de conexões entre a Geometria e a Álgebra, pois, por exemplo, permite compreender as soluções de um sistema linear de duas incógnitas por meio de retas em um plano, ou, então, representar por meio de uma equação uma figura bidimensional ou tridimensional. Não há consenso sobre quando se deu início ao estudo da Geometria analítica.

Alguns historiadores defendem que práticas que levam a esse ramo da Matemática já eram do conhecimento de gregos, egípcios e romanos. Outros creditam aos franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) o início do estudo sistemático dessa ciência. A maior contribuição de Descartes foi publicada em sua famosa obra **Discurso do método**. Essa obra era acompanhada de três apêndices, sendo o último deles intitulado **La géométrie**, que apresentava as ideias que fundamentaram o estudo da Geometria analítica. Já Fermat, que trabalhava paralelamente e independentemente de Descartes, realizou estudos relacionados a equações que representavam curvas matemáticas em um plano.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Neste tema, estudaremos os conceitos de ponto e reta na Geometria analítica. Porém, inicialmente, vamos apresentar a definição de valor absoluto (ou módulo) de um número real.

A fim de simplificar a escrita, não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, utilizaremos expressões do tipo "a distância entre os pontos A e B é 5 cm" quando, na realidade, queremos nos referir à medida da distância entre os pontos A e B que, nesse caso, é 5 cm.

O valor absoluto ou módulo de um número real a, indicado por $|a|$, é definido como o próprio número a, se $a \geqslant 0$, ou como $-a$, se $a < 0$. Em resumo:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Coordenadas na reta

Considere fixada uma unidade de medida de comprimento. A cada par de pontos A e B quaisquer, o comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ denomina-se **distância** entre os pontos A e B, a qual indicaremos por AB.

A distância entre dois pontos é um número real não negativo. Assim, por convenção, a distância entre A e ele mesmo é 0.

Algumas propriedades da distância entre pontos estão apresentadas a seguir.

1) $AB \geqslant 0$

2) $AB = BA$

3) Se A, B e C são pontos sobre a mesma reta e C está entre A e B, então:

$$AB = AC + CB$$

Uma reta é dita **orientada** quando sobre ela referenciamos um sentido de percurso, chamado **positivo**. O sentido inverso ao positivo é chamado **negativo**. Dizemos que um ponto B está à direita de um ponto A quando o sentido de percurso de A para B coincide com o sentido positivo escolhido.

Um **eixo** é uma reta orientada na qual fixou-se um ponto O, chamado **origem**. A cada ponto X no eixo corresponde um número real.

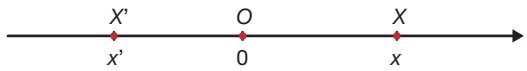
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- A origem O do eixo corresponde ao número zero.
- A cada ponto X no eixo situado à direita de O corresponde um número real positivo x, tal que $x = OX$.
- A cada ponto X no eixo situado à esquerda de O corresponde um número real negativo x', tal que $x' = -OX$.

O número real x, correspondente ao ponto X do eixo, é denominado coordenada do ponto X.

Na imagem a seguir, temos $x = OX$ e $x' = -OX'$.

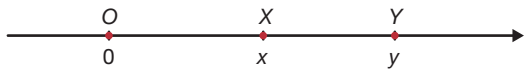


Agora, vamos demonstrar que se x e y são as coordenadas dos pontos X e Y do eixo E, respectivamente, então:

$$XY = |y - x| = |x - y|$$

Se $X = Y$, não há o que demonstrar. Suponha que X esteja à esquerda de Y, ou seja, $x < y$. Assim, devemos analisar três casos.

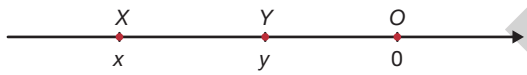
Caso 1. X e Y estão à direita da origem, isto é, $0 < x < y$.



Nessa situação, X está entre O e Y. Além disso, temos $OX = x$ e $OY = y$. Assim:

$$OY = OX + XY \Rightarrow y = x + XY \Rightarrow$$
$$\Rightarrow XY = y - x = |y - x|$$

Caso 2. X e Y estão à esquerda da origem, isto é, $x < y < 0$.



Nessa situação, Y está entre O e X. Além disso, temos $OX = -x$ e $OY = -y$. Assim:

$$OX = OY + XY \Rightarrow -x = -y + XY \Rightarrow$$
$$\Rightarrow XY = -x + y = y - x = |y - x|$$

Caso 3. X e Y estão em lados opostos da origem, isto é, $x < 0 < y$.

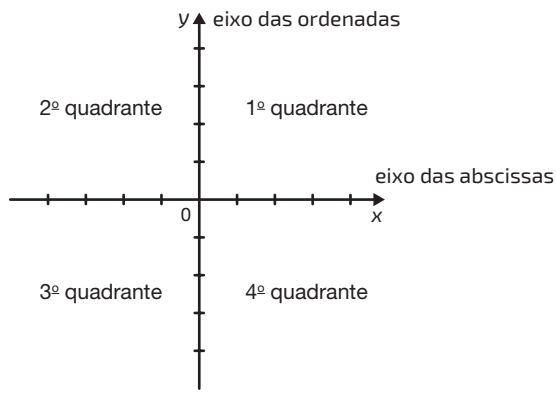
Nessa situação, O está entre X e Y. Além disso, temos $OX = -x$ e $OY = y$. Assim:

$$XY = OX + OY \Rightarrow XY = -x + y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow XY = y - x = |y - x|$$

Se X estiver à direita de Y, a demonstração é análoga.

Coordenadas no plano

O **plano cartesiano ortogonal** consiste em um plano com dois eixos perpendiculares graduados na mesma unidade, x e y, que o dividem em quatro regiões. O eixo horizontal x é denominado **eixo das abscissas**, e o eixo vertical y, **eixo das ordenadas**. O ponto em que esses eixos se cruzam é denominado **origem**.



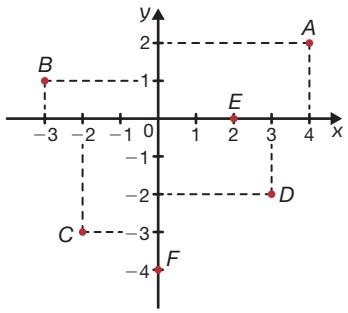
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No plano cartesiano, localizamos um ponto P utilizando um par ordenado (a, b) com a e b números reais, que são as coordenadas do ponto. O número a é a abscissa e o número b, a ordenada do ponto P.

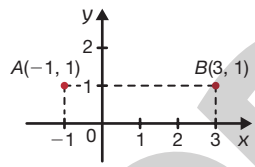
No plano cartesiano a seguir, estão indicados os pontos $A(4, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(3, -2)$, $E(2, 0)$ e $F(0, -4)$.



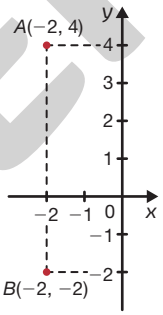
Se um ponto P pertence ao eixo x, então a ordenada de P é zero. De maneira semelhante, se P pertence ao eixo y, a abscissa de P é zero. Veja no exemplo ao lado os pontos E e F.

Distância entre dois pontos

De acordo com o que foi estudado anteriormente, podemos determinar AB quando a reta que contém A e B é paralela ao eixo x ou ao eixo y da seguinte maneira.

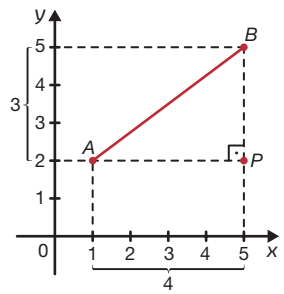


$$AB = |3 - (-1)| = 4$$



$$AB = |4 - (-2)| = 6$$

Para determinar a distância entre dois pontos cuja reta que os contém não é paralela ao eixo x ou ao eixo y, utilizaremos o Teorema de Pitágoras. Observe, por exemplo, como determinar a distância entre os pontos $A(1, 2)$ e $B(5, 5)$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Note que $AB = 5$, pois $AB > 0$.

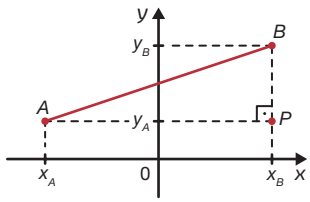
Note que o triângulo ABP é retângulo em P, $AP = |5 - 1| = 4$ e $BP = |5 - 2| = 3$. Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow (AB)^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Deduziremos uma fórmula por meio da qual seja possível calcular a distância entre dois pontos quaisquer. Para isso, considere os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ em um plano cartesiano.



Como $\overleftrightarrow{AP}$ é paralela ao eixo x e $\overleftrightarrow{BP}$ é paralela ao eixo y, então $AP = |x_B - x_A|$ e $BP = |y_B - y_A|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABP, temos:

Denotaremos a reta AB por $\overleftrightarrow{AB}$.

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 \Rightarrow (AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Note que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, pois $AB \geqslant 0$.

Exemplos

- Distância entre os pontos $A(-3, 1)$ e $B(4, -2)$.

$$AB = \sqrt{[4 - (-3)]^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

- Distância entre os pontos $C(7, -3)$ e $D(-5, 2)$.

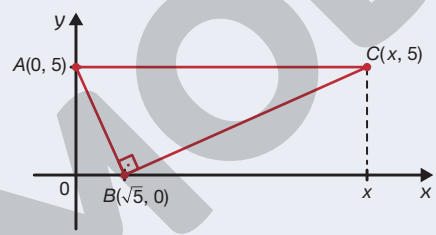
$$CD = \sqrt{(-5 - 7)^2 + [2 - (-3)]^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Sabendo que $A(0, 5)$, $B(\sqrt{5}, 0)$ e $C(x, 5)$, em que x é um número real positivo, são vértices de um triângulo retângulo, determine valor de x.

Resolução

De acordo com as informações apresentadas, temos:



Agora, vamos determinar AB, BC e AC.

- $AB = \sqrt{(0 - \sqrt{5})^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + 5^2} = \sqrt{30}$
- $BC = \sqrt{(x - \sqrt{5})^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 + 5^2} = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{5}x + 30}$
- $AC = |x - 0| = x$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, segue que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow x^2 = \left(\sqrt{30}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2 - 2\sqrt{5}x + 30}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 30 + x^2 - 2\sqrt{5}x + 30 \Rightarrow 2\sqrt{5}x = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{60}{2\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

Portanto, $x = 6\sqrt{5}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 Escreva um algoritmo que possibilite determinar as ordenadas dos pontos $A(x, y)$ e $B(x', 5y)$, com $y > 0$, dada a distância entre eles e suas abscissas. Em seguida, organize esse algoritmo em um fluxograma.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para a construção de um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

Um **algoritmo** é uma sequência finita de passos (instruções) para resolver determinado problema. Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Em seguida, é preciso responder às seguintes questões:

1) Quais são os **dados de entrada**, ou seja, os dados fornecidos no problema?
   Dados de entrada: distância entre os pontos A e B e suas abscissas.
2) Quais são os **dados de saída**, ou seja, os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?
   Dados de saída: ordenadas dos pontos A e B.
3) Conhecendo os dados de entrada e saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?

Para responder à questão **3**, utilizaremos a fórmula que possibilita calcular a distância entre dois pontos quaisquer, ou seja:

$$AB = \sqrt{(x' - x)^2 + (5y - y)^2}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, segue que:

$$AB^2 = (x' - x)^2 + (5y - y)^2 \Rightarrow AB^2 - (x' - x)^2 = 16y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{AB^2 - (x' - x)^2}{16} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{AB^2 - (x' - x)^2}{16}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{AB^2 - (x' - x)^2}}{4}$$

Assim, para determinar a ordenada do ponto A, devemos calcular $\frac{\sqrt{AB^2 - (x' - x)^2}}{4}$ e para calcular a ordenada do ponto B, $5 \cdot \frac{\sqrt{AB^2 - (x' - x)^2}}{4}$.

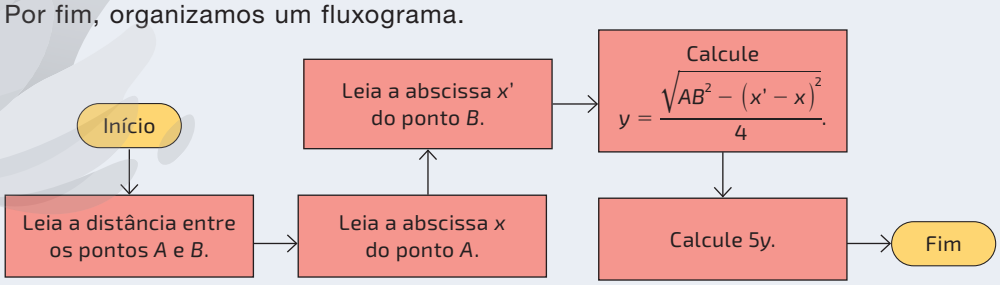
Agora, escrevemos o algoritmo.

Início

1. Leia a distância entre os pontos A e B.
2. Leia a abscissa x do ponto A.
3. Leia a abscissa x' do ponto B.
4. Calcule $y = \frac{\sqrt{AB^2 - (x' - x)^2}}{4}$.
5. Calcule $5y$.

Fim

Por fim, organizamos um fluxograma.



Em um fluxograma, cada tipo de figura possui um significado. No fluxograma apresentado, por exemplo, foram utilizadas as figuras a seguir.

Figura utilizada para indicar o início e o fim do fluxograma.

Figura utilizada para indicar uma ação a ser tomada.

MODERNA

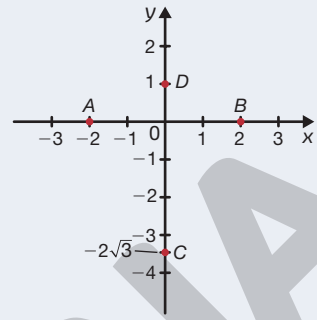
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R3 Os pontos $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C\left(0, -2\sqrt{3}\right)$ e $D(0, 1)$ são vértices dos triângulos indicados a seguir. Classifique cada triângulo em isósceles, equilátero ou escaleno.

a) triângulo ABC b) triângulo ABD c) triângulo ACD

Resolução

Inicialmente, calculamos a medida de cada lado dos triângulos.



- $AB = |2 - (-2)| = |4| = 4$
- $AC = \sqrt{\left[0 - (-2)\right]^2 + \left(-2\sqrt{3} - 0\right)^2} = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$
- $AD = \sqrt{\left[0 - (-2)\right]^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- $BC = \sqrt{(0 - 2)^2 + \left(-2\sqrt{3} - 0\right)^2} = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$
- $BD = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- $CD = \left|1 - \left(-2\sqrt{3}\right)\right| = |1 + 2\sqrt{3}| = 1 + 2\sqrt{3}$

a) Como $AB = AC = BC$, segue que o triângulo ABC é equilátero.

b) Como $AD = BD \neq AB$, segue que o triângulo ABD é isósceles.

c) Como $AC \neq AD$, $AC \neq CD$ e $AD \neq CD$, segue que o triângulo ACD é escaleno.

R4 O **circuncentro** de um triângulo é o centro da circunferência que passa por seus vértices. Com base nessa informação, determine as coordenadas do circuncentro C do triângulo de vértices $P(0, 5)$, $Q(3, 6)$ e $R(8, 1)$.

Resolução

Calculando a distância de cada ponto (P, Q e R) ao centro $C(x_C, y_C)$ da circunferência, temos:

- $PC = \sqrt{(x_C - 0)^2 + (y_C - 5)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25}$
- $QC = \sqrt{(x_C - 3)^2 + (y_C - 6)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 6x_C - 12y_C + 45}$
- $RC = \sqrt{(x_C - 8)^2 + (y_C - 1)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 16x_C - 2y_C + 65}$

Na imagem abaixo, note que o comprimento do raio da circunferência é dado por $r = PC = QC = RC$. Assim, escrevemos e resolvemos o seguinte sistema de equações:

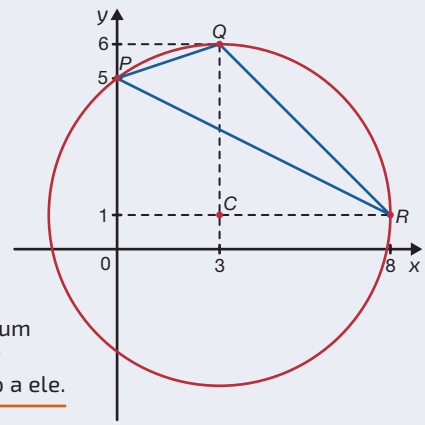
$$\begin{cases} PC = QC \\ PC = RC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 6x_C - 12y_C + 45} & \text{(I)} \\ \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 16x_C - 2y_C + 65} & \text{(II)} \end{cases}$$

Elevando os membros de **I** e **II** ao quadrado, temos:

$$\begin{cases} x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25 = x_C^2 + y_C^2 - 6x_C - 12y_C + 45 \\ x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25 = x_C^2 + y_C^2 - 16x_C - 2y_C + 65 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_C + 2y_C = 20 \quad \cdot(4) \\ 16x_C - 8y_C = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x_C + 8y_C = 80 \\ 16x_C - 8y_C = 40 \end{cases}$$

$$40x_C = 120 \Rightarrow x_C = 3$$



Substituindo x_C por 3 na equação $6x_C + 2y_C = 20$:

$6 \cdot 3 + 2y_C = 20 \Rightarrow 2y_C = 2 \Rightarrow y_C = 1$

Portanto, as coordenadas do circuncentro do triângulo PQR são $x = 3$ e $y = 1$.

O circuncentro de um triângulo pode ser interno ou externo a ele.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

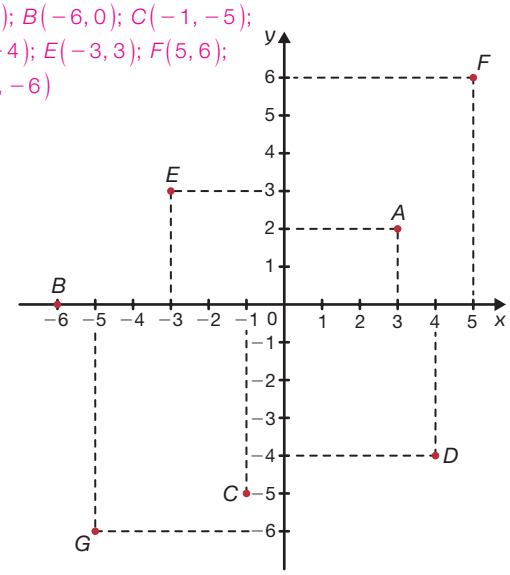
MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

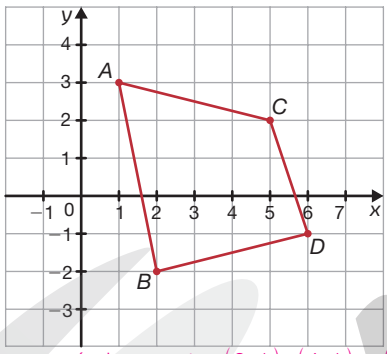
1 Determine as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.

$A(3, 2)$; $B(-6, 0)$; $C(-1, -5)$; $D(4, -4)$; $E(-3, 3)$; $F(5, 6)$; $G(-5, -6)$



RONALDO INÁCIO

2 Observe o quadrilátero $ABCD$ representado no plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO

b) Uma possível resposta: $(3, 1)$, $(4, 1)$ e $(5, 1)$.

a) Quais são as coordenadas dos vértices desse quadrilátero? $A(1, 3)$, $B(2, -2)$, $C(5, 2)$ e $D(6, -1)$

b) Escreva as coordenadas de três pontos do plano, internos a esse quadrilátero.

c) Quais devem ser as coordenadas dos vértices de um quadrilátero $A'B'C'D'$ para que ele seja simétrico ao quadrilátero $ABCD$ em relação ao eixo y? $A'(-1, 3)$, $B'(-2, -2)$, $C'(-5, 2)$ e $D'(-6, -1)$

3 Em um plano cartesiano, em qual quadrante os pontos têm:

a) abscissa positiva? 1º e 4º quadrantes

b) ordenada negativa? 3º e 4º quadrantes

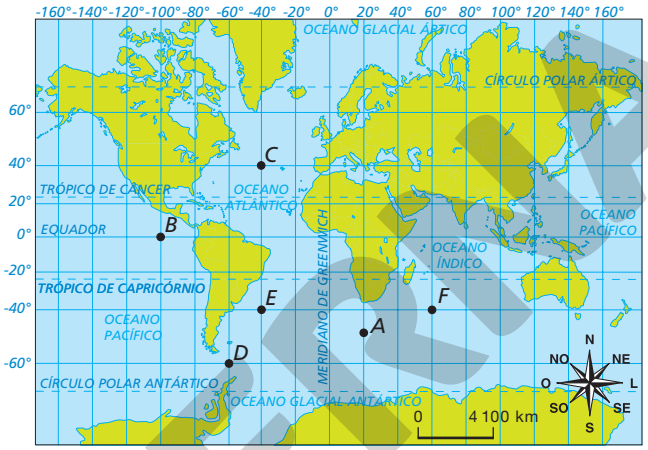
c) abscissa negativa e ordenada positiva? 2º quadrante

d) abscissa positiva e ordenada negativa? 4º quadrante

4 Construa um plano cartesiano e indique os pontos $A(3, -1)$, $B(0, 4)$, $C(-3, 2)$, $D(3, 4)$, $E(-2, -4)$ e $F(-1, 0)$. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do Suplemento para o professor.

5 Neste sistema de mapeamento da Terra, as linhas horizontais são os paralelos, que indicam a latitude, sendo a linha do equador a referência, equivalendo ao eixo das abscissas. As linhas verticais são os meridianos, que indicam a longitude, com o meridiano de Greenwich sendo o eixo das ordenadas.

Paralelos e meridianos



KEITHY MOSTACHI

Fonte de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. 8 ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 23.

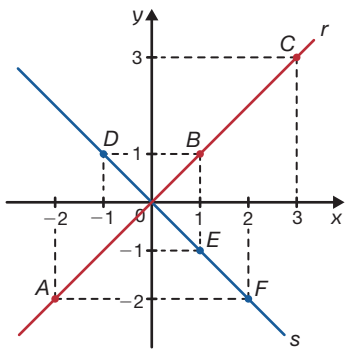
De acordo com o mapa, escreva:

a) a longitude do ponto A. 20°

b) a latitude do ponto C. 40°

c) as coordenadas geográficas, longitude e latitude, dos pontos B e E. $B(-100°, 0°)$; $E(-40°, -40°)$

6 As retas r e s são, respectivamente, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes e do 2º e do 4º quadrantes.



RONALDO INÁCIO

a) Escreva as coordenadas dos pontos:

- A $A(-2, -2)$
- B $B(1, 1)$
- C $C(3, 3)$
- D $D(-1, 1)$
- E $E(1, -1)$
- F $F(2, -2)$

b) Considerando os pontos $P(7, y)$ e $Q(x, 9)$, determine x e y para que P pertença à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes, e Q, à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes. $x = -9$; $y = 7$

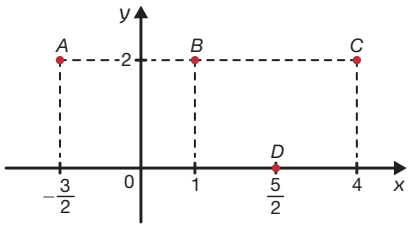
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

7 Calcule a distância entre os pontos:

- $A(1, 9)$ e $B(2, 8)$. $\sqrt{2}$
- $C(-3, 5)$ e $D(-3, 12)$ 7
- $P(-5, 4)$ e $Q(-2, 7)$. $3\sqrt{2}$
- $M(0, 12)$ e $N(9, 0)$. 15

8 De acordo com os pontos indicados no plano cartesiano, resolva.



RONALDO INÁCIO

a) Quantos triângulos podem ser formados? 3 triângulos

b) Nomeie e classifique cada triângulo em escaleno, isósceles ou equilátero.
ΔABD: isósceles; ΔACD: escaleno; ΔBCD: isósceles

9 Sabendo que $Q(1, x)$ é um ponto do 4º quadrante e que a distância de Q ao ponto $P(0, 4)$ é $5\sqrt{2}$, calcule o valor de x. $x = -3$

10 Em quais itens os pontos dados formam um triângulo? alternativas **b** e **c**

Lembre os alunos de que, se $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são lados de um triângulo, então a soma dos comprimentos de quaisquer dois desses lados é sempre maior do que o comprimento do terceiro lado.

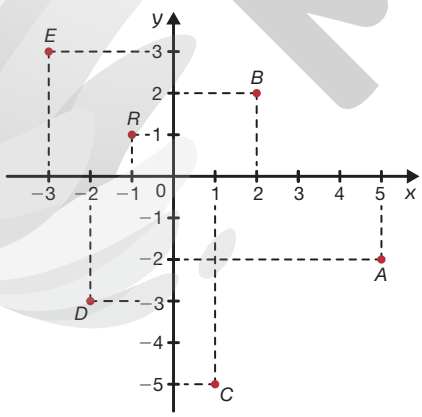
a) $A(0, -1)$, $B(12, 4)$ e $C\left(6, \frac{3}{2}\right)$.

b) $F\left(2, 3\sqrt{3}\right)$, $G(5, 0)$ e $H(-1, 0)$.

c) $L(4, 6)$, $M(3, 1)$ e $N(9, 2)$.

d) $P(1, 3)$, $Q(5, 6)$ e $R(9, 9)$.

11 Observe o esquema que representa a localização das cidades A, B, C, D e E, e de uma antena de transmissão de sinal de rádio, R.



RONALDO INÁCIO

Sabendo que o raio de transmissão dessa antena é 220 km e que cada unidade representada no esquema corresponde a 50 km, quais cidades recebem o sinal transmitido? B; D; E

12 Calcule o perímetro e a área de uma região determinada pelo triângulo cujos vértices são $A(-1, 2)$, $B(2, 6)$ e $C(5, 2)$.
perímetro: 16 u.c.; área: 12 u.a.

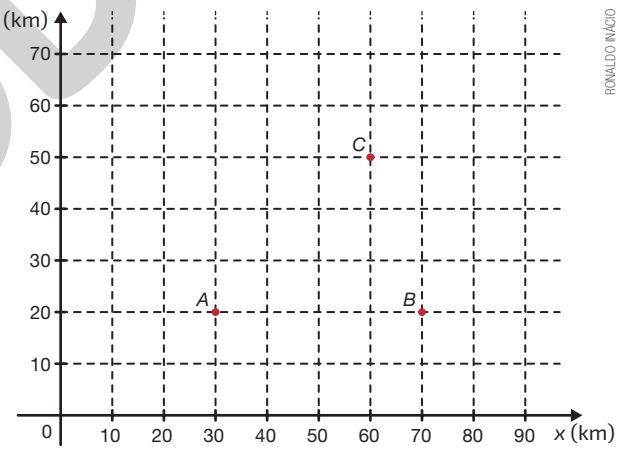
13 Considerando o triângulo de vértices $A(4, 5)$, $B(4, 2)$ e $C(1, 5)$, retângulo em A, calcule sua área. 4,5 u.a.

14 Dados os pontos $A(0, 3)$, $B(2, 0)$ e $C(-7, -6)$, determine as coordenadas do ponto D, para que esses pontos sejam vértices de um retângulo.
$D(-9, -3)$

15 Determine as coordenadas de $P(x, y)$, sabendo que ele é equidistante aos pontos $M(3, 6)$, $N(4, 3)$ e $O(0, 0)$. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{21}{6}\right)$

16 Desafio

(Enem, 2013) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



RONALDO INÁCIO

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas: alternativa **e**

a) $(65; 35)$

b) $(53; 30)$

c) $(45; 35)$

d) $(50; 20)$

e) $(50; 30)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Programas em VisualG

Em diversas situações, é interessante programar um computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Em informática, instrução é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

Linguagem de programação é um método padronizado que expressa instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Nesta coleção, utilizaremos o VisualG, linguagem com comandos em português voltada para iniciantes em programação.

Estrutura de um programa em VisualG

Um programa escrito em VisualG é subdividido em três áreas distintas: o cabeçalho do programa, a área de declarações e o corpo do programa.

Cabeçalho do programa

Essa área é utilizada para indicar o início do programa e também seu nome. O cabeçalho do programa é atribuído pela instrução **Algoritmo**, seguida de um nome entre aspas. Veja um exemplo.

Algoritmo "soma"

Área de declarações

Área subdividida em algumas subáreas. Neste livro, restringiremos nosso estudo apenas à subárea dedicada à indicação das variáveis que serão utilizadas no programa. A declaração das variáveis é atribuída pela instrução **Var**, seguida da relação de variáveis.

Essas variáveis são identificadas por um rótulo e armazenam um valor ou texto. O rótulo pode conter letras, números ou *underline* (_), porém deve começar com uma letra. Além disso, cada variável deve ter seu tipo definido.

Observe no quadro alguns dos tipos mais comuns de variáveis.

Tipo	Variável representa
inteiro	números inteiros
real	números reais
caractere	sequência de caracteres

Para definir o tipo da variável, deve-se escrever seu rótulo (ou vários rótulos, separados por vírgula), seguido por dois pontos (:) e seu tipo. Veja alguns exemplos.

Var

x: real al: caractere a, b, c, d: inteiro

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Corpo do programa

Essa área é utilizada para escrever as instruções que devem ser seguidas pelo computador. Seu início é indicado pela instrução **Inicio** e seu fim, pela instrução **Fimalgoritmo**.

```
Inicio
sequência de instruções
Fimalgoritmo
```

Ao utilizar caracteres especiais (como letras acentuadas, sinais de pontuação e espaço), alguns problemas de exibição e execução do programa podem ocorrer. Por isso, é utilizado e recomendado usar termos semelhantes sem caracteres especiais, como em **Inicio** e **Fimalgoritmo**.

Exemplo de um programa em VisualG – Distância entre dois pontos

Agora, vamos colocar em prática os conceitos estudados. Para isso, considere o seguinte problema.

> Escrever um programa que calcule a distância entre os pontos *A* e *B* no plano cartesiano, dadas suas coordenadas.

Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo que o resolva. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1. Leia a abscissa x_A do ponto *A*.
2. Leia a ordenada y_A do ponto *A*.
3. Leia a abscissa x_B do ponto *B*.
4. Leia a ordenada y_B do ponto *B*.
5. Calcule $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Fim

Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "distancia_entre_dois_pontos"
2  Var
3  x_a, y_a, x_b, y_b, dist: real
4  Inicio
5  escreva("Digite a abscissa do ponto A: ")
6  leia(x_a)
7  escreva("Digite a ordenada do ponto A: ")
8  leia(y_a)
9  escreva("Digite a abscissa do ponto B: ")
10 leia(x_b)
11 escreva("Digite a ordenada do ponto B: ")
12 leia(y_b)
13 dist <- raizq(quad(x_b-x_a)+quad(y_b-y_a))
14 escreva("A distância entre os pontos A e B
   é: ",dist)
15 Fimalgoritmo
```

No corpo do programa em VisualG são indicados os comandos que fazem as operações. Veja a seguir o que fazem os comandos utilizados no exemplo.

escreva: apresenta na tela o conteúdo inserido entre parênteses.

leia: atribui o valor informado pelo usuário na variável indicada.

<-: atribui o valor da expressão à direita do sinal na variável indicada à esquerda.

raizq: calcula a raiz quadrada da expressão entre parênteses.

quad: calcula o quadrado da expressão entre parênteses.

Para a expressão, podem ser usados sinais como + (soma), – (subtração), * (multiplicação) e / (divisão), além dos parênteses, que no VisualG podem ser usados com outros parênteses, em vez de usar chaves e colchetes.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Qual informação deve ser inserida pelo usuário quando o programa executar a instrução da linha **9**?

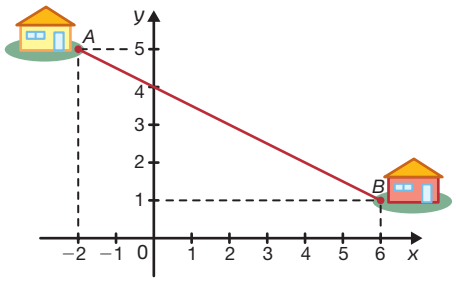
2 Codifique o algoritmo escrito no problema resolvido **R2** para a linguagem VisualG.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

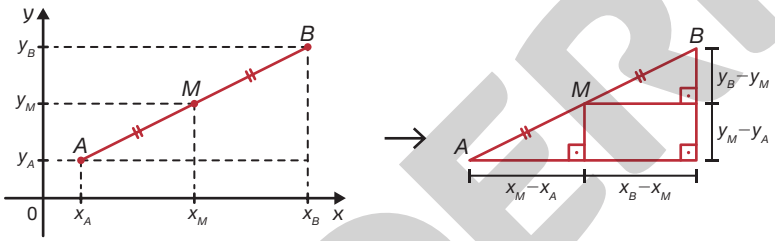
Coordenadas do ponto médio de um segmento

No plano cartesiano, os pontos A e B representam duas casas de uma propriedade rural. Deseja-se perfurar um poço equidistante às casas, de maneira que essa distância seja a menor possível. Quais devem ser as coordenadas do ponto M onde o poço deve ser construído?



Para resolver esse problema, temos de determinar o ponto médio de $\overline{AB}$.

Vamos deduzir as coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ de $\overline{AB}$, sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.



Note que as coordenadas do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ correspondem à média aritmética das correspondentes coordenadas de A e B.

Por semelhança de triângulos, temos:

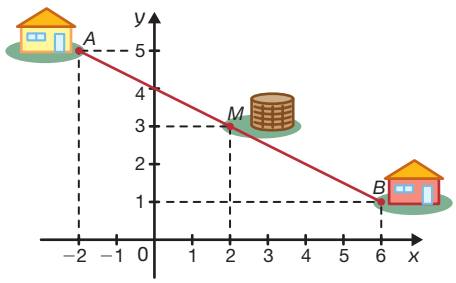
- $\frac{AM}{MB} = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \Rightarrow 1 = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \Rightarrow x_B - x_M = x_M - x_A \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$
- $\frac{AM}{MB} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_M} \Rightarrow 1 = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_M} \Rightarrow y_B - y_M = y_M - y_A \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Portanto, o ponto médio M de $\overline{AB}$, em que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, é $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Em relação ao problema apresentado, as coordenadas do ponto em que o poço deve ser perfurado são dadas por:

- $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$
- $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$

Assim, o poço deve ser construído no ponto $M(2, 3)$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Respostas no Suplemento para o professor.

A Escreva um algoritmo que possibilite determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento, dadas as coordenadas dos extremos desse segmento. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

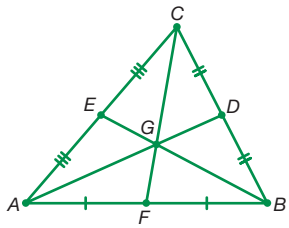
B Codifique o algoritmo escrito por você na questão anterior para a linguagem VisualG.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

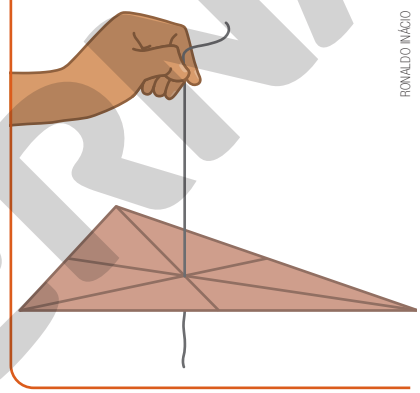
MODERNA

Baricentro de um triângulo

Em um triângulo, as medianas correspondem aos segmentos de reta cujas extremidades são o ponto médio de um dos lados e o vértice oposto a esse lado. As três medianas do triângulo se cruzam em um único ponto denominado **baricentro**. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos. O segmento cujas extremidades são o vértice do triângulo e o baricentro tem o dobro do comprimento do outro, cujas extremidades são o baricentro e o ponto médio do lado oposto ao vértice considerado. No exemplo apresentado, $AG = 2 \cdot GD$, $BG = 2 \cdot GE$ e $CG = 2 \cdot GF$.

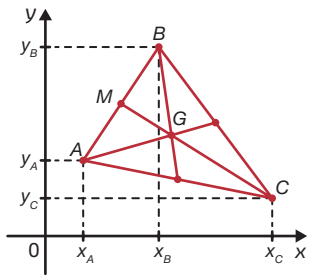


O baricentro é o centro de equilíbrio de um triângulo. Ao desenharmos um triângulo em uma cartolina e determinarmos seu baricentro, podemos recortá-lo e, pelo baricentro, passar um barbante como mostra a figura. Ao suspender o triângulo pelo baricentro, ele se manterá em equilíbrio.



RONALDO INÁCIO

Dados três pontos não colineares $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, determinaremos as coordenadas do baricentro G do triângulo ABC.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, temos $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, ou seja, $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$. Além disso, da propriedade apresentada, temos $CG = 2 \cdot GM$. Consequentemente, pelo Teorema de Tales:

- $x_C - x_G = 2 \cdot (x_G - x_M)$
- $y_C - y_G = 2 \cdot (y_G - y_M)$

Assim, segue que:

- $x_C - x_G = 2 \cdot (x_G - x_M) \Rightarrow x_C - x_G = 2x_G - 2x_M \Rightarrow 3x_G = 2x_M + x_C \Rightarrow$
  $\Rightarrow 3x_G = 2 \cdot \frac{x_A + x_B}{2} + x_C \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$
- $y_C - y_G = 2 \cdot (y_G - y_M) \Rightarrow y_C - y_G = 2y_G - 2y_M \Rightarrow 3y_G = 2y_M + y_C \Rightarrow$
  $\Rightarrow 3y_G = 2 \cdot \frac{y_A + y_B}{2} + y_C \Rightarrow y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Portanto, o baricentro G do triângulo ABC, em que $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, é $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Exemplo

Vamos determinar o baricentro G do triângulo *de vértices* $A(7, -2)$, $B(-1, 5)$ e $C(9, -4)$.

- $x_G = \frac{7 + (-1) + 9}{3} = \frac{15}{3} = 5$
- $y_G = \frac{-2 + 5 + (-4)}{3} = -\frac{1}{3}$

Portanto, o baricentro do triângulo ABC é $G\left(5, -\frac{1}{3}\right)$.

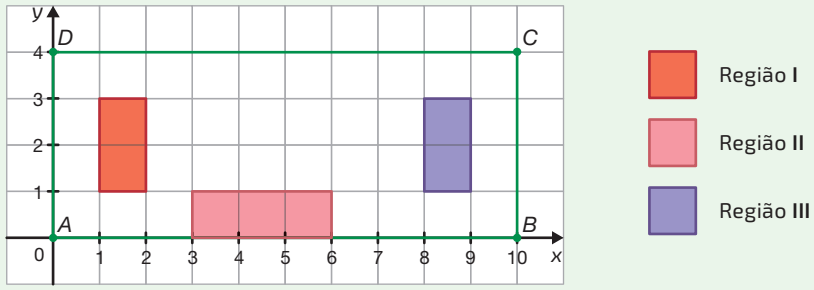
Note que as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC correspondem à média aritmética das correspondentes coordenadas de A, B e C.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

Em uma gincana, alguns objetos serão escondidos em diferentes lugares. A figura a seguir apresenta um modelo matemático do local onde a gincana será realizada com algumas regiões retangulares destacadas nas quais serão escondidos os objetos.



RONALDO INÁCIO

A organização da gincana esconderá os objetos de acordo com as seguintes orientações.

- Cada objeto deve pertencer a apenas uma das regiões destacadas no modelo.
- A localização do objeto da região **I** deve ser equidistante dos pontos *A* e *D*.
- A localização do objeto da região **II** deve ser equidistante dos pontos *A* e *B*.
- A localização do objeto da região **III** deve ser equidistante dos pontos *B* e *C*.

Utilizando as coordenadas do plano cartesiano do modelo matemático, determine um possível ponto em que o objeto será escondido em cada uma das regiões.

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

Uma possível localização do objeto que será escondido em cada uma das regiões.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

A representação de um modelo matemático indicando o local onde a gincana está sendo realizada em um plano cartesiano; a delimitação das regiões **I**, **II** e **III**; a informação de que os objetos escondidos nas regiões **I**, **II** e **III** devem ser equidistantes, respectivamente, dos pontos *A* e *D*, *A* e *B*, *B* e *C*.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, determinamos um ponto no interior da região **I** que seja equidistante dos pontos *A* e *D*. Para isso, traçamos a mediatriz de $\overline{AD}$ e, em seguida, escolhemos um ponto da mediatriz que pertença à região **I** e indicamos suas coordenadas. De maneira semelhante, determinamos os pontos pertencentes às regiões **II** e **III** equidistantes dos pontos *A* e *B*, *B* e *C*, respectivamente, e indicamos suas coordenadas.

√ Escolhendo as notações.

- S_1: possível ponto em que o objeto será escondido na região **I**.
- S_2: possível ponto em que o objeto será escondido na região **II**.
- S_3: possível ponto em que o objeto será escondido na região **III**.
- $M_1(x_1, y_1)$: ponto médio do segmento $\overline{AD}$.
- $M_2(x_2, y_2)$: ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- $M_3(x_3, y_3)$: ponto médio do segmento $\overline{BC}$.
- r_1: mediatriz do segmento $\overline{AD}$.
- r_2: mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
- r_3: mediatriz do segmento $\overline{BC}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

C Executando o plano

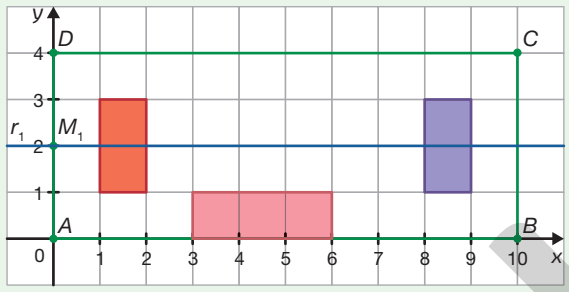
Passo 1

Inicialmente, determinamos as coordenadas de M_1. Como $A(0,0)$ e $D(0,4)$, então:

$$x_{M_1} = \frac{0+0}{2} = 0 \qquad y_{M_1} = \frac{0+4}{2} = 2$$

Assim, $M_1(0,2)$. Agora, traçamos r_1 e escolhemos um ponto pertencente a ela e à região **I**.

Note que a ordenada de um possível ponto em que o objeto será escondido é 2 e a abscissa deve ser maior ou igual a 1 e menor ou igual a 2. Desse modo, um possível ponto é $S_1(1{,}5;\ 2)$.



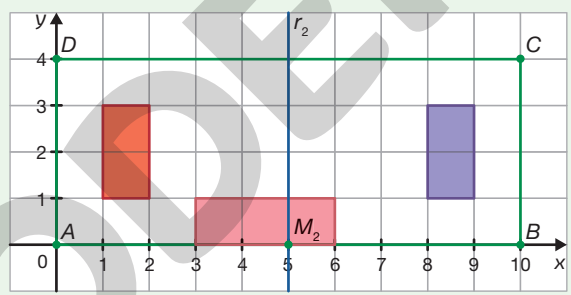
Passo 2

Determinamos as coordenadas de M_2. Como $A(0,0)$ e $B(10,0)$, então:

$$x_{M_2} = \frac{0+10}{2} = 5 \qquad y_{M_2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

Assim, $M_2(5,0)$. Na sequência, traçamos r_2 e escolhemos um ponto pertencente a ela e à região **II**.

Note que a abscissa de um possível ponto em que o objeto será escondido é 5 e a ordenada deve ser maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1. Desse modo, um possível ponto é $S_2(5;\ 0{,}75)$.

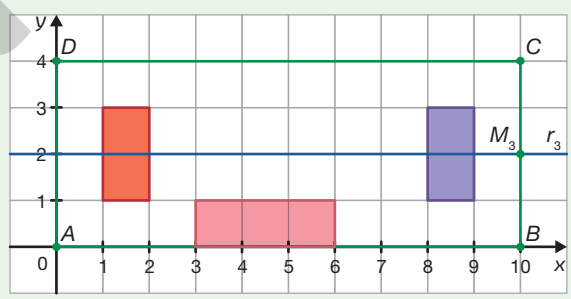


Passo 3

Determinamos as coordenadas de M_3. Como $B(10,0)$ e $C(10,4)$, então:

$$x_{M_3} = \frac{10+10}{2} = 10$$

$$y_{M_3} = \frac{0+4}{2} = 2$$



Assim, $M_3(10,2)$. Por fim, traçamos r_3 e escolhemos um ponto pertencente a ela e à região **III**.

Note que a ordenada de um possível ponto em que o objeto será escondido é 2 e a abscissa deve ser maior ou igual a 8 e menor ou igual a 9. Desse modo, um possível ponto é $S_3(8{,}1;\ 2)$.

Portanto, um possível ponto em que o objeto será escondido na região **I** é $S_1(1{,}5;\ 2)$, na região **II** é $S_2(5;\ 0{,}75)$ e na região **III** é $S_3(8{,}1;\ 2)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Oriente os alunos a verificar se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de algumas tarefas semelhantes propostas na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

R5 Dados os pontos $A(3, 4)$ e $C(15, 20)$, determine as coordenadas do ponto B que divide $\overline{AC}$ na proporção $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$.

Resolução

Calculando a abscissa do ponto B, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x_B - 3}{15 - x_B} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_B - 9 = 15 - x_B \Rightarrow 4x_B = 24 \Rightarrow x_B = 6$$

A ordenada do ponto B é dada por:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y_B - 4}{20 - y_B} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y_B - 12 = 20 - y_B \Rightarrow 4y_B = 32 \Rightarrow y_B = 8$$

Portanto, $B(6, 8)$.

R6 Qual é o comprimento de cada mediana do triângulo de vértices $A(-4, 4)$, $B(6, -2)$ e $C(8, 8)$?

Resolução

Sejam $M_{\overline{AB}}$, $M_{\overline{AC}}$ e $M_{\overline{BC}}$ os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Logo:

- coordenadas de $M_{\overline{AB}}$:

$$x_{M_{\overline{AB}}} = \frac{-4 + 6}{2} = 1 \quad y_{M_{\overline{AB}}} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

- coordenadas de $M_{\overline{AC}}$:

$$x_{M_{\overline{AC}}} = \frac{-4 + 8}{2} = 2 \quad y_{M_{\overline{AC}}} = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

- coordenadas de $M_{\overline{BC}}$:

$$x_{M_{\overline{BC}}} = \frac{6 + 8}{2} = 7 \quad y_{M_{\overline{BC}}} = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

Ou seja, $M_{\overline{AB}}(1, 1)$, $M_{\overline{AC}}(2, 6)$ e $M_{\overline{BC}}(7, 3)$.

Por fim, calculando o comprimento de cada mediana, temos:

- mediana $\overline{CM}_{\overline{AB}}$:

$$CM_{\overline{AB}} = \sqrt{(1 - 8)^2 + (1 - 8)^2} =$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = 7\sqrt{2}$$

- mediana $\overline{BM}_{\overline{AC}}$:

$$BM_{\overline{AC}} = \sqrt{(2 - 6)^2 + [6 - (-2)]^2} =$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

- mediana $\overline{AM}_{\overline{BC}}$:

$$AM_{\overline{BC}} = \sqrt{[7 - (-4)]^2 + (3 - 4)^2} =$$

$$= \sqrt{11^2 + (-1)^2} = \sqrt{122}$$

R7 Determine as coordenadas do vértice B do triângulo ABC, em que $A(4, 9)$ e $C(-2, 6)$, sabendo que $G(2, 3)$ é o baricentro do triângulo.

Resolução

Como G é o baricentro do triângulo ABC, temos:

- $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 = \frac{4 + x_B + (-2)}{3} \Rightarrow$$

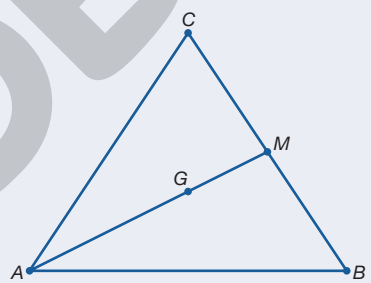
$$\Rightarrow 2 + x_B = 6 \Rightarrow x_B = 4$$

- $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 3 = \frac{9 + y_B + 6}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 15 + y_B = 9 \Rightarrow y_B = -6$$

Portanto, $B(4, -6)$.

R8 No triângulo ABC, M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e G é o baricentro do triângulo. Sabendo que as coordenadas dos pontos B, G e M são, respectivamente, $(5, 1)$, $(3, 2)$ e $\left(4, \frac{5}{2}\right)$, determine as coordenadas dos vértices A e C.



RONALDO INACIO

Resolução

Como M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$, temos:

- $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{5 + x_C}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 5 + x_C = 8 \Rightarrow x_C = 3$$

- $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{1 + y_C}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 + 2y_C = 10 \Rightarrow y_C = 4$$

Como G é o baricentro do triângulo ABC, temos:

- $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow 3 = \frac{x_A + 5 + 3}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_A + 8 = 9 \Rightarrow x_A = 1$$

- $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 2 = \frac{y_A + 1 + 4}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_A + 5 = 6 \Rightarrow y_A = 1$$

Portanto, $A(1, 1)$ e $C(3, 4)$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

18. a) Sim, pois $M_{\overline{AC}} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{7+(-5)}{2}\right) = M_{\overline{AC}}(1, 1)$.

17 Dados os pontos A e B, para cada item, determine as coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$.

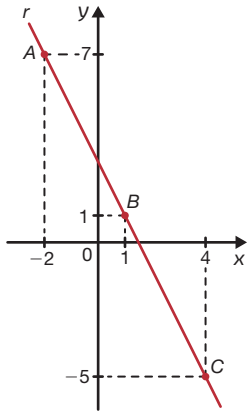
a) $A(4, 3)$ e $B(1, 7)$. $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$

b) $A(2, -1)$ e $B(-4, 5)$. $(-1, 2)$

c) $A(-7, -9)$ e $B(-2, 0)$. $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

d) $A(15, 6)$ e $B(-7, 8)$. $(4, 7)$

18 Observe a reta r em um plano cartesiano e responda.



RONALDO INÁCIO

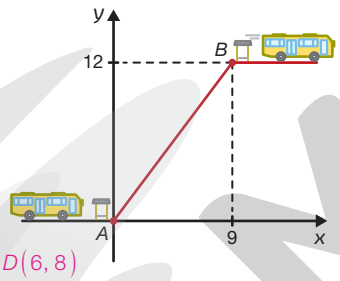
a) O ponto B é o ponto médio de $\overline{AC}$? Justifique sua resposta.

b) Determine as coordenadas do ponto médio de:

- $\overline{AB}$. $M_{\overline{AB}}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$
- $\overline{BC}$. $M_{\overline{BC}}\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

19 Sabendo que $P(0, 1)$, $Q(4, -3)$ e $R(5, 3)$ são vértices de um triângulo, determine o comprimento da mediana em relação ao lado $\overline{PQ}$. 5 u.c.

20 Observe no esquema parte da rota de um ônibus. Entre os pontos de parada A e B, deseja-se instalar outros dois pontos, C e D, tal que a distância entre os pontos adjacentes seja a mesma.



RONALDO INÁCIO

$C(3, 4)$; $D(6, 8)$

a) Determine as coordenadas dos pontos C e D.

b) Sabendo que cada unidade do esquema representa 120 m, qual é a distância, em metros, entre os pontos A e B? 1 800 m

21 Seja $M(3, 4)$ o ponto médio de $\overline{AB}$. Sabendo que A está sobre o eixo das abscissas, e B, sobre o eixo das ordenadas, determine as coordenadas de A e B. $A(6, 0)$; $B(0, 8)$

22 Determine x e y, sabendo que $M(-3, -2)$ é o ponto médio do segmento com extremidades $A(-6, y)$ e $B(x, -8)$. $x = 0$; $y = 4$

23 Sabendo que $G(2, -4)$ é o baricentro do triângulo de vértices $P(-2, 1)$, $Q(5, -6)$ e $R(x, y)$, calcule x e y. $x = 3$; $y = -7$

24 Obtenha as coordenadas do ponto Q que divide o segmento de extremos $P(-3, 5)$ e $R(1, 3)$ na proporção $\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{5}$. $Q\left(-\frac{13}{7}, \frac{31}{7}\right)$

25 Dado o triângulo de vértices $A(0, -1)$, $B(-5, -5)$ e $C(-3, 1)$, determine:

a) o comprimento das medianas. Resposta no final do livro.

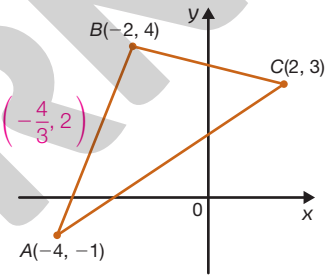
b) as coordenadas do baricentro. $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

26 Seja $A(-5, 2)$ um dos vértices do triângulo ABC. Sabendo que $M(2, 3)$ e $N\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, determine as coordenadas de B e C. $B(9, 4)$; $C(8, 0)$

27 Observe o triângulo ABC em um plano cartesiano.

a) Determine as coordenadas do baricentro desse triângulo. $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

b) Calcule a distância entre o baricentro e C. $\frac{\sqrt{109}}{3}$

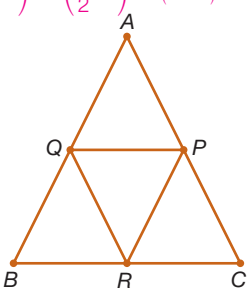


RONALDO INÁCIO

28 No triângulo ABC, de vértices $A(4, 10)$, $B(1, 4)$ e $C(7, 4)$, foi inscrito o triângulo PQR, tal que P, Q e R são os pontos médios de $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. a) $P\left(\frac{11}{2}, 7\right)$; $Q\left(\frac{5}{2}, 7\right)$; $R(4, 4)$

a) Quais são as coordenadas dos pontos P, Q e R?

b) Determine as coordenadas do ponto G, baricentro do triângulo ABC, e do ponto H, baricentro do triângulo PQR. $G(4, 6)$; $H(4, 6)$



RONALDO INÁCIO

No contexto

29 Desafio

Vimos nas páginas 10 e 11 um problema envolvendo caça ao tesouro. Além disso, questionou-se a possibilidade de encontrar o tesouro considerando as informações presentes no manuscrito e o esquema do mapa, sabendo que a palmeira (P) já tinha desaparecido completamente.

Supondo que, em linha reta, a distância entre os pontos M e T seja de 80 passos, mostre que é preciso caminhar 40 passos na direção de M para T e depois virar à direita e caminhar mais 40 passos para encontrar o tesouro.

29. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**. Se julgar necessário, oriente os alunos a estabelecer um sistema de coordenadas com origem em M e com o ponto T no eixo x.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 Matrizes

Quantos *pixels*?

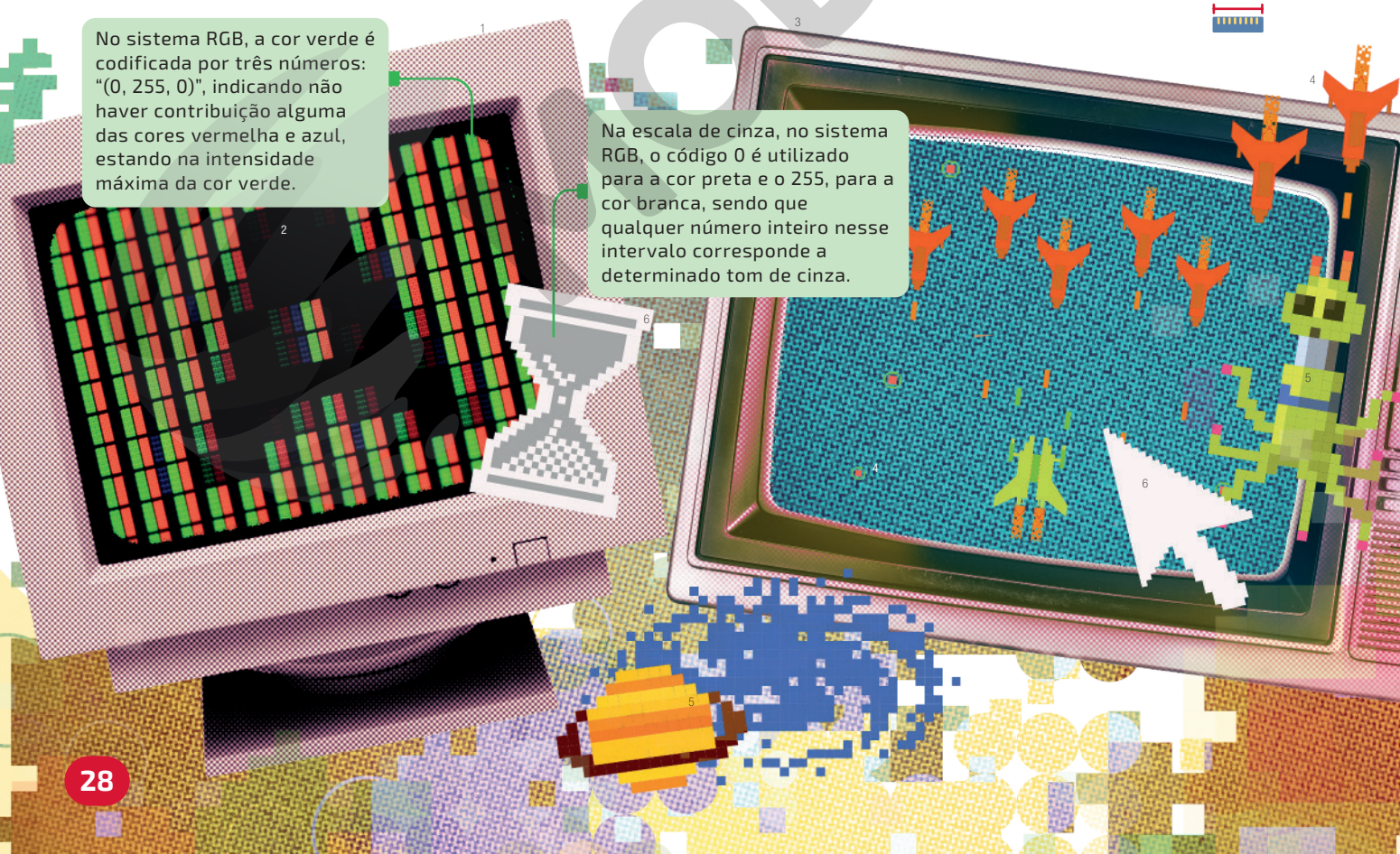
Você já deve ter ouvido falar em resoluções *HD*, *Full HD*, 4K e afins. Mas, afinal, o que é resolução? Qual a diferença entre essas resoluções? Existe uma relação entre a resolução da imagem e o tamanho da tela?

Toda imagem que aparece na tela dos dispositivos eletrônicos é dividida em milhares ou milhões de minúsculos pontos luminosos chamados *pixels*. Talvez você consiga vê-los se aproximar bem os olhos de um televisor ou monitor, principalmente os maiores, mas são praticamente imperceptíveis na tela de *smartphones*, *tablets* ou *smartwatches*. A imagem é formada porque eles são dispostos em linhas e colunas justapostas e podem assumir diferentes cores, em diferentes tonalidades.

Não podemos confundir **resolução de uma imagem** com o **tamanho da tela**. Se um pequeno monitor de 15" e um grande televisor de 50" suportam resolução máxima *Full HD*, então eles têm a mesma quantidade de *pixels*. Nesse caso, a quantidade de *pixels* por polegada, ou PPI, é diferente em cada um, consequentemente, o tamanho de cada *pixel* também.

Por convenção popular, a resolução nada mais é do que a quantidade de *pixels* em cada linha e em cada coluna da tela, por exemplo, uma imagem exibida com resolução $1\,920 \times 1\,080$, também conhecida por *Full HD*, é formada por $2\,073\,600$ *pixels*. Por conveniência, o primeiro número indica a quantidade de colunas. A posição de um *pixel* na imagem permite que ele seja codificado por uma descrição exata e minuciosa de sua localização e uma intensidade de cor, possibilitando que sejam realizadas, por exemplo, alterações e que haja o reconhecimento de padrões nesse tipo de imagem.

Em relação às cores, duas representações são frequentemente utilizadas para um *pixel*. Uma delas é o sistema RGB, cuja combinação em diferentes intensidades resulta em outra cor do espectro luminoso, com variações entre o preto (ausência de cor) e o branco (intensidade máxima). A outra representação corresponde à escala de cinza. Em ambos os casos, a intensidade de uma cor é definida por números inteiros de 0 a 255.



PROIBIDA

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Cite alguns aparelhos que geram imagens digitais. Algumas possíveis respostas: câmera fotográfica digital; tela de *smartphone*; monitor de computador; escâner.

B Como os *pixels* são dispostos na composição de uma imagem digital? De que modo participam da constituição da imagem? Os *pixels* são dispostos em linhas e colunas, de modo que o arranjo ordenado de vários deles, com diferentes intensidades de cor, constitui a imagem digital.

C Conhecendo o número de linhas e de colunas de *pixels* em uma imagem, que procedimento pode ser realizado para determinar a quantidade de *pixels* que compõe essa imagem? Multiplicar o número de linhas pelo número de colunas.

D Pesquise sobre as demais resoluções citadas no início do texto (HD e 4K) e calcule a quantidade de *pixels* que forma uma imagem em cada uma delas.
HD: 1 280 × 720, totalizando 921 600 *pixels*; 4K: 3 840 × 2 160, totalizando 8 294 400 *pixels*.

E Escreva semelhanças e diferenças entre o sistema RGB e a escala de cinza.

Nas páginas a seguir, vamos estudar as **matrizes**, suas características, propriedades e operações, assuntos que estão diretamente relacionados à análise de imagens digitais e aos demais contextos cujos valores são dispostos em uma grande quantidade de linhas e de colunas.

Veja o significado e a tradução de algumas abreviaturas:

Pixel: *picture element*, do inglês, elemento de imagem.

Full HD: *full high definition*, do inglês, alta definição completa.

PPI: *pixel per inches*, do inglês, *pixels* por polegadas.

RGB: *red*, *green*, *blue*, do inglês, vermelho, verde, azul.

E) Algumas possíveis respostas: semelhanças: sistemas de cores utilizados para *pixels*, em ambos os sistemas de cores a intensidade de uma cor é definida por números inteiros de 0 a 255; diferenças: no sistema RGB é possível obter qualquer cor do espectro luminoso por meio da combinação das cores vermelha, verde e azul, em diferentes tons de cinza; no sistema RGB, a cor é codificada por três números e, na escala de cinza, apenas por um.

FOTOMONTAGEM DE MARIANA COAN. FOTOS: 1.DARREN PULLMAN/SHUTTERSTOCK; 2.A DAILY ODYSSEY/SHUTTERSTOCK; 3.SANTA DHONGNIPHON/SHUTTERSTOCK; 4.JEMA STOCK/SHUTTERSTOCK; 5.ARTUR BALYTSKYI/SHUTTERSTOCK; 6.VECTOR FOREVER/SHUTTERSTOCK; 7.ANDREY_POPOV/SHUTTERSTOCK; 8.NIKOLAY SOLIDCREATURE/SHUTTERSTOCK; 9.ARTUR BALYTSKYI/SHUTTERSTOCK; 10.MARISH/SHUTTERSTOCK

No sistema RGB, a cor branca é representada pelos números "(255, 255, 255)". Já a cor preta é representada pelos números "(0, 0, 0)".

Estudando matrizes

Para auxiliar na representação de informações ou facilitar cálculos complexos, é comum a utilização de tabelas numéricas retangulares. Essas tabelas, compostas de certa quantidade de **linhas** (fileiras horizontais) e de **colunas** (fileiras verticais), são chamadas na Matemática de **matrizes**.

As matrizes são amplamente utilizadas em diversas áreas, como Computação Gráfica, Engenharia, Física e Administração.

Observe a tabela abaixo.

População rural e urbana no Brasil, em milhões de habitantes

	Ano				
	1970	**1980**	**1991**	**2000**	**2010**
Rural	41,6	39,1	36	31,8	29,8
Urbana	52,9	82	110,9	138	160,9
Total	94,5	121,1	146,9	169,8	190,7

Fonte de pesquisa: IBGE. *Censo Demográfico 2010*. Rio de Janeiro: IBGE, 2011. Disponível em: <https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados58>. Acesso em: 3 jun. 2020.

Podemos representar essa tabela pela seguinte matriz.

$$\begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & 36 & 31{,}8 & 29{,}8 \\ 52{,}9 & 82 & 110{,}9 & 138 & 160{,}9 \\ 94{,}5 & 121{,}1 & 146{,}9 & 169{,}8 & 190{,}7 \end{bmatrix}$$

Convencionou-se que a ordenação das linhas de uma matriz seja dada de cima para baixo, e a ordenação das colunas, da esquerda para a direita.

Como essa matriz possui 3 linhas e 5 colunas, dizemos que é de ordem (ou tipo) 3×5 (lê-se: "três por cinco"). Nela, as linhas correspondem à população brasileira em cada categoria: rural, urbana e total. Já as colunas indicam o ano da pesquisa. A 1ª linha, por exemplo, indica a população rural em cada ano pesquisado, e a 3ª coluna, a população rural, urbana e total em 1991.

1ª linha ⟶ $\begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & 36 & 31{,}8 & 29{,}8 \\ 52{,}9 & 82 & 110{,}9 & 138 & 160{,}9 \\ 94{,}5 & 121{,}1 & 146{,}9 & 169{,}8 & 190{,}7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & 36 & 31{,}8 & 29{,}8 \\ 52{,}9 & 82 & 110{,}9 & 138 & 160{,}9 \\ 94{,}5 & 121{,}1 & 146{,}9 & 169{,}8 & 190{,}7 \end{bmatrix}$ ← 3ª coluna

O elemento da matriz localizado na 1ª linha e na 3ª coluna corresponde à população rural brasileira em 1991.

3ª coluna →

1ª linha ⟶ $\begin{bmatrix} 41{,}6 & 39{,}1 & 36 & 31{,}8 & 29{,}8 \\ 52{,}9 & 82 & 110{,}9 & 138 & 160{,}9 \\ 94{,}5 & 121{,}1 & 146{,}9 & 169{,}8 & 190{,}7 \end{bmatrix}$

Uma matriz de ordem $m \times n$, com m e n sendo números naturais não nulos, é toda tabela composta de $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

- Matriz de ordem 2×3: duas linhas e três colunas.

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 3×2: três linhas e duas colunas.

$$\begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 12 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 1×4: uma linha e quatro colunas.

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de ordem 2×1: duas linhas e uma coluna.

$$\begin{bmatrix} -21 \\ 64 \end{bmatrix}$$

Indicaremos as matrizes por uma letra maiúscula e cada um de seus elementos pela mesma letra, porém minúscula, acompanhada de dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna em que o elemento está localizado.

Considerando, por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}$, temos o elemento da:

- 1ª linha e 1ª coluna: $a_{11} = 7$ (lê-se: "a um um é igual a sete").
- 1ª linha e 2ª coluna: $a_{12} = -5$ (lê-se: "a um dois é igual a menos cinco").
- 2ª linha e 1ª coluna: $a_{21} = 13$ (lê-se: "a dois um é igual a treze").
- 2ª linha e 2ª coluna: $a_{22} = 9$ (lê-se: "a dois dois é igual a nove").

Vamos representar genericamente uma matriz A de ordem $m \times n$, ou seja, com m linhas e n colunas, da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

No elemento a_{ij}, o índice i indica a linha, e o j, a coluna em que o elemento está localizado. O elemento a_{32}, por exemplo, tem $i = 3$ e $j = 2$, ou seja, está localizado na 3ª linha e na 2ª coluna.

Essa matriz também pode ser indicada por $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Uma matriz possui 32 elementos e a quantidade de colunas é o dobro da quantidade de linhas. Qual é a ordem dessa matriz?

Resolução

A ordem da matriz é dada por $m \times n$, tal que $m \cdot n = 32$.

Como a quantidade de colunas é o dobro da quantidade de linhas, temos $n = 2m$. Ou seja:

$$m \cdot n = 32 \Rightarrow m \cdot 2m = 32 \Rightarrow m^2 = 16 \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \quad \text{(impossível)} \end{cases}$$

Substituindo $m = 4$ na igualdade $m \cdot n = 32$, obtemos:

$$m \cdot n = 32 \Rightarrow 4 \cdot n = 32 \Rightarrow n = 8$$

Portanto, a ordem da matriz é 4×8.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 Escreva a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{1\times 3}$, tal que $a_{ij} = 3i - 2j$.

Resolução

A ordem da matriz A é 1×3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores de i e j na lei de formação, temos:

$a_{11} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$

$a_{12} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$

$a_{13} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 3 - 6 = -3$

Portanto, a matriz é $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

R3 Escreva a matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{3\times 2}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} (-1)^j, \text{se } i \leqslant j \\ 2i + j, \text{se } i > j \end{cases}$.

Resolução

A ordem da matriz B é 3×2.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Temos duas sentenças que definem a matriz B:

- se $i \leqslant j$: $b_{11} = (-1)^1 = -1$; $b_{12} = (-1)^2 = 1$; $b_{22} = (-1)^2 = 1$.
- se $i > j$: $b_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$; $b_{31} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$; $b_{32} = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

Portanto, a matriz é $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Escreva a ordem de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ 2×2

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ \sqrt{2} & 15 & -4{,}3 \\ 1 & 7 & 10 \\ -9 & \pi & 0{,}5 \end{bmatrix}$ 5×3

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 & 13 \end{bmatrix}$ 1×4

d) $D = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{5} & x^3 & -3 \\ 1 & \sqrt[3]{-8} & 4 & x+1 \end{bmatrix}$ 2×4

2 Na matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5{,}7 & -3 & 2 \\ 4 & 15 & 3 & \sqrt{7} & 6 \\ \pi & -9 & 10 & -2 & 8 \end{bmatrix}$, determine o valor do elemento:

a) a_{11} 0 b) a_{13} 5,7 c) a_{31} π d) a_{24} $\sqrt{7}$

3 Observe a tabela e resolva o que se pede.

Quantidade de títulos do cinema lançados por gênero, em 2017

	Lançamentos brasileiros	Lançamentos estrangeiros
Animação	7	28
Documentário	62	14
Ficção	91	261
Total	160	303

Fonte de pesquisa: Agência Nacional do Cinema. *Anuário Estatístico do Cinema Brasileiro*, Brasília, Ancine, 2017. p. 32. Disponível em: <https://oca.ancine.gov.br/sites/default/files/repositorio/pdf/anuario_2017.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.

a) $\begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 62 & 14 \\ 91 & 261 \\ 160 & 303 \end{bmatrix}$

a) Represente a tabela por uma matriz 4×2.

b) Nessa matriz, o que representa:

- a 4ª linha? O total de títulos do cinema brasileiro ou estrangeiro lançados em 2017.
- a 1ª coluna? As quantidades de títulos do cinema brasileiro lançados por gênero em 2017 e seu total.
- o elemento da 3ª linha com a 1ª coluna? A quantidade de títulos de ficção do cinema brasileiro lançados em 2017.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 A tabela periódica apresenta a distribuição dos elementos químicos de acordo com suas características e propriedades. As linhas da tabela periódica, numeradas de cima para baixo, são chamadas períodos, e as colunas, numeradas da esquerda para a direita, são denominadas grupos.

A distribuição dos elementos é feita da seguinte maneira: os elementos que têm o mesmo número de camadas de elétrons estão em um mesmo período, e os elementos que possuem características físicas e químicas semelhantes estão no mesmo grupo.

Verifique se os alunos perceberam que os períodos não possuem a mesma quantidade de elementos e que o mesmo ocorre com os grupos.

Tabela periódica dos elementos

Com massas atômicas referidas ao isótopo 12 do carbono

Períodos \ Grupos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 H Hidrogênio 1,01																	2 He Hélio 4,00
2	3 Li Lítio 6,94	4 Be Berílio 9,01											5 B Boro 10,81	6 C Carbono 12,01	7 N Nitrogênio 14,01	8 O Oxigênio 16,00	9 F Flúor 19,00	10 Ne Neônio 20,18
3	11 Na Sódio 22,99	12 Mg Magnésio 24,31											13 Al Alumínio 26,98	14 Si Silício 28,09	15 P Fósforo 30,97	16 S Enxofre 32,06	17 Cl Cloro 35,45	18 Ar Argônio 39,95
4	19 K Potássio 39,10	20 Ca Cálcio 40,08	21 Sc Escândio 44,96	22 Ti Titânio 47,87	23 V Vanádio 50,94	24 Cr Crômio 52,00	25 Mn Manganês 54,94	26 Fe Ferro 55,85	27 Co Cobalto 58,93	28 Ni Níquel 58,69	29 Cu Cobre 63,55	30 Zn Zinco 65,38	31 Ga Gálio 69,72	32 Ge Germânio 72,63	33 As Arsênio 74,92	34 Se Selênio 78,97	35 Br Bromo 79,90	36 Kr Criptônio 83,80
5	37 Rb Rubídio 85,47	38 Sr Estrôncio 87,62	39 Y Ítrio 88,91	40 Zr Zircônio 91,22	41 Nb Nióbio 92,91	42 Mo Molibdênio 95,95	43 Tc Tecnécio (98)	44 Ru Rutênio 101,07	45 Rh Ródio 102,91	46 Pd Paládio 106,42	47 Ag Prata 107,87	48 Cd Cádmio 112,41	49 In Índio 114,82	50 Sn Estanho 118,71	51 Sb Antimônio 121,76	52 Te Telúrio 127,60	53 I Iodo 126,90	54 Xe Xenônio 131,29
6	55 Cs Césio 132,91	56 Ba Bário 137,33	57 - 71 Lantanídios	72 Hf Háfnio 178,49	73 Ta Tântalo 180,95	74 W Tungstênio 183,84	75 Re Rênio 186,21	76 Os Ósmio 190,23	77 Ir Irídio 192,22	78 Pt Platina 195,08	79 Au Ouro 196,97	80 Hg Mercúrio 200,59	81 Tl Tálio 204,38	82 Pb Chumbo 207,20	83 Bi Bismuto 208,98	84 Po Polônio (209)	85 At Astato (210)	86 Rn Radônio (222)
7	87 Fr Frâncio (223)	88 Ra Rádio (226)	89 - 103 Actinídios	104 Rf Rutherfórdio (267)	105 Db Dúbnio (268)	106 Sg Seabórgio (269)	107 Bh Bóhrio (270)	108 Hs Hássio (269)	109 Mt Meitnério (278)	110 Ds Darmstádtio (281)	111 Rg Roentgênio (280)	112 Cn Copernício (285)	113 Nh Nihônio (286)	114 Fl Fleróvio (289)	115 Mc Moscóvio (289)	116 Lv Livermório (293)	117 Ts Tennesso (294)	118 Og Oganessônio (294)

6	57 La Lantânio 138,91	58 Ce Cério 140,12	59 Pr Praseodímio 140,91	60 Nd Neodímio 144,24	61 Pm Promécio (145)	62 Sm Samário 150,36	63 Eu Európio 151,96	64 Gd Gadolínio 157,25	65 Tb Térbio 158,93	66 Dy Disprósio 162,50	67 Ho Hólmio 164,93	68 Er Érbio 167,26	69 Tm Túlio 168,93	70 Yb Itérbio 173,05	71 Lu Lutécio 174,97
7	89 Ac Actínio (227)	90 Th Tório 232,04	91 Pa Protactínio 231,04	92 U Urânio 238,03	93 Np Netúnio (237)	94 Pu Plutônio (244)	95 Am Amerício (243)	96 Cm Cúrio (247)	97 Bk Berquélio (247)	98 Cf Califórnio (251)	99 Es Einstênio (252)	100 Fm Férmio (257)	101 Md Mendelévio (258)	102 No Nobélio (259)	103 Lr Laurêncio (262)

Número atômico
Símbolo
Nome
Massa atômica

Tabela periódica atual: períodos e grupos.

Os dados contidos nesta tabela periódica estão de acordo com as recomendações de 01 de dezembro de 2018 da IUPAC e da RSC (International Union of Pure and Applied Chemistry/Royal Society of Chemistry ou, em português, União Internacional de Química Pura e Aplicada/Sociedade Real de Química, respectivamente).

Hidrogênio; Metais; Metais de transição interna; Não metais; Gases nobres; Classificação desconhecida

CYNTHIA SEKIGUCHI

Ilustração elaborada com base em: SBQ. *Tabela periódica dos elementos*. 2019. Disponível em: <http://www.sbq.org.br/anexos/tabela_periodica_SBQ_6nov2019.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.

a) Qual é o número de períodos da tabela periódica? E de grupos? 7 períodos; 18 grupos

b) Quantos elementos pertencem ao período 3? E ao período 5? 8 elementos; 18 elementos

c) Qual é o símbolo do elemento do:

- período 2 e grupo 14 C
- período 6 e grupo 11? Au
- período 5 e grupo 17? I

d) Indique a que período e grupo pertence o elemento de símbolo:

- Zn. período 4, grupo 12
- Cℓ. período 3, grupo 17
- Db. período 7, grupo 5

5 Escreva as matrizes.

a) $A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 2}$, tal que $a_{ij} = i - j$.

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \left(b_{ij}\right)_{2\times 3}$, tal que $b_{ij} = (i+j)^2$. $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$

c) $C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 2}$, tal que $c_{ij} = \begin{cases} i, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$. $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6 Resolva as questões.

a) Qual é a ordem de uma matriz formada por 7 elementos? Possíveis respostas: 1×7 ou 7×1.

b) Qual é a ordem de uma matriz formada por 20 elementos?

- Compare suas respostas com as de um colega. Resposta pessoal. Possíveis respostas: 1×20, 20×1, 2×10, 10×2, 4×5 ou 5×4.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Alguns tipos de matriz

Estudaremos agora algumas matrizes que, por apresentarem certas características, recebem uma nomenclatura diferenciada.

Matriz quadrada

Denominamos **matriz quadrada** toda matriz A de ordem $m \times n$, em que $m = n$, ou seja, a quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas. Nesse caso, dizemos simplesmente que a matriz A é de **ordem** n, indicada por A_n.

Em uma matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i = j$, formam a **diagonal principal**. Já os elementos em que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**.

Nos exemplos apresentados, os elementos da diagonal secundária:
- em B_3 têm $i + j = \underbrace{4}_{n+1}$ $(b_{13}, b_{22}$ e $b_{31})$.
- em C_4 têm $i + j = \underbrace{5}_{n+1}$ $(c_{14}, c_{23}, c_{32}$ e $c_{41})$.

Exemplos

- $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 3 & -4 & 7 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz quadrada de ordem 3
  diagonal secundária; diagonal principal
- $C_4 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 2 & -4 \\ 9 & 8 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ Matriz quadrada de ordem 4
  diagonal secundária; diagonal principal

Matriz triangular

Uma matriz quadrada de ordem n é denominada **matriz triangular** quando todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

Denomina-se **matriz triangular superior** toda matriz triangular cujos elementos nulos estão abaixo da diagonal principal. Do mesmo modo, a **matriz triangular inferior** é toda matriz triangular cujos elementos nulos estão acima da diagonal principal.

Nos exemplos acima, A_2 e C_3 são matrizes triangulares inferiores e B_3 é uma matriz triangular superior.

Exemplos

- $A_2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ -32 & 14 \end{bmatrix}$ diagonal principal
  Matriz triangular de ordem 2
- $B_3 = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ diagonal principal
  Matriz triangular de ordem 3
- $C_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ diagonal principal
  Matriz triangular de ordem 3

Matriz diagonal

Converse com os alunos acerca das diferenças nas definições de matrizes triangulares e matrizes diagonais. Verifique se eles perceberam que a matriz diagonal é um caso particular de matriz triangular.

Denominamos **matriz diagonal** toda matriz quadrada na qual os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplos

- $D_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Matriz diagonal de ordem 3
  diagonal principal
- $E_4 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Matriz diagonal de ordem 4
  diagonal principal

Matriz identidade

A matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são nulos é denominada **matriz identidade**. Indicamos uma matriz identidade de ordem n por I_n.

Note que em uma matriz identidade I_n temos:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Exemplos

- $I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ diagonal principal
  Matriz identidade de ordem 1
- $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ diagonal principal
  Matriz identidade de ordem 2
- $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ diagonal principal
  Matriz identidade de ordem 3

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matriz nula

Denominamos **matriz nula** aquela que possui todos os elementos iguais a zero. Indicamos uma matriz nula de ordem $m \times n$ por $0_{m \times n}$ ou, se a matriz nula for quadrada, por 0_n.

Exemplos

- $0_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz nula de ordem 2×4
- $0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz nula de ordem 3

Matriz linha

Toda matriz que possui apenas uma linha é denominada **matriz linha**, ou seja, a matriz de ordem $m \times n$ é uma matriz linha se $m = 1$.

Exemplos

- $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ Matriz linha de ordem 1×5
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz linha de ordem 1×2
- $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Matriz linha de ordem 1×3

Matriz coluna

Toda matriz que possui apenas uma coluna é denominada **matriz coluna**, ou seja, a matriz de ordem $m \times n$ é uma matriz coluna se $n = 1$.

Exemplos

- $\begin{bmatrix} -8 \\ 17 \\ 34 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ Matriz coluna de ordem 5×1
- $\begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ \pi \end{bmatrix}$ Matriz coluna de ordem 3×1
- $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Matriz coluna de ordem 2×1

Igualdade de matrizes

Quando duas matrizes A e B de mesma ordem têm os elementos correspondentes (de mesma posição) iguais, então dizemos que essas matrizes são iguais, ou seja, $A = B$. De maneira semelhante, se duas matrizes A e B têm ordens diferentes ou os elementos correspondentes não são todos iguais, então $A \neq B$.

Em notação matemática, se, para todo $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, temos $a_{ij} = b_{ij}$, então $A_{m \times n} = B_{m \times n}$.

Exemplos

- Considere as matrizes de mesma ordem $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{2 \times 3}$, tal que $b_{ij} = 2i - j^2$.

  Obtendo os elementos de B, temos:

  - $b_{11} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$
  - $b_{12} = 2 \cdot 1 - 2^2 = -2$
  - $b_{13} = 2 \cdot 1 - 3^2 = -7$
  - $b_{21} = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3$
  - $b_{22} = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0$
  - $b_{23} = 2 \cdot 2 - 3^2 = -5$

  Assim, segue que:

  - $a_{11} = b_{11}$
  - $a_{12} = b_{12}$
  - $a_{13} = b_{13}$
  - $a_{21} = b_{21}$
  - $a_{22} = b_{22}$
  - $a_{23} = b_{23}$

  Portanto, $A = B$.

- Dadas as matrizes $C = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, verificamos que C e D têm a mesma ordem, mas $c_{12} \neq d_{12}$.

  Assim, $C \neq D$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Matriz transposta

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, denomina-se **matriz transposta** de A, indicada por A^t, a matriz de ordem $n \times m$ cujas linhas são ordenadamente iguais às colunas de A.

Observe que, para todo $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $A^t = (b_{ij})_{n \times m}$, tal que $a_{ij} = b_{ji}$.

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} \Rightarrow D^t = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$

Matriz simétrica

Quando uma matriz quadrada A é igual à sua transposta A^t $(A = A^t)$, dizemos que A é uma **matriz simétrica**.

Em uma matriz simétrica, os elementos simétricos em relação à diagonal principal são iguais, ou seja, se uma matriz $A = (a_{ij})_n$ é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Exemplo

Veja as matrizes A e sua transposta A^t.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A^t = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $A = A^t$, então A é uma matriz simétrica.

Exercícios e problemas resolvidos

R4 Determine os valores de x e y para que a matriz $M = \begin{bmatrix} 3x + 10 & 0 \\ 0 & 4y - 9 \end{bmatrix}$ seja igual à matriz I_2.

Resolução

De acordo com o enunciado, devemos ter a seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} 3x + 10 & 0 \\ 0 & 4y - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que as matrizes possuem a mesma ordem. Então, basta calcular x e y de maneira que os elementos correspondentes sejam iguais.

- $3x + 10 = 1 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -3$
- $4y - 9 = 1 \Rightarrow 4y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

7 Escreva a matriz quadrada A de ordem 2, tal que $a_{ij} = i^2 - 3j + i \cdot j$.

$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

8 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & 6 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, calcule a diferença entre a soma dos elementos da diagonal principal e a dos elementos da diagonal secundária. 0

9 Classifique cada matriz em quadrada, triangular, diagonal, identidade, nula, linha ou coluna.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ linha

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nula

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & \pi & 0 \\ 0 & 12 & -4 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ quadrada

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ quadrada e triangular

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ quadrada, triangular, diagonal e identidade

f) $F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ coluna

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No contexto

10 (Fatec-SP) Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um ***pixel*** na tela.

Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada *pixel*, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255).

Suponha que na figura estejam representados 25 *pixels* de uma tela.

REPRODUÇÃO

Pixel: menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir uma cor.

A matriz numérica que corresponde às cores da figura apresentada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

Uma matriz $M = (a_{ij})$ quadrada de ordem 5, em que i representa o número da linha e j representa o número da coluna, é definida da seguinte maneira.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{se } i = j \\ 127, \text{se } i > j \\ 255, \text{se } i < j \end{cases}$$

A matriz M corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela. alternativa **a**

Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela

a) terá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas.
b) terá o mesmo número de *pixels* brancos e pretos.
c) terá o mesmo número de *pixels* pretos e cinzas.
d) terá uma diagonal com cinco *pixels* brancos.
e) terá uma diagonal com cinco *pixels* cinzas.

11 O **traço** de uma matriz quadrada é igual à soma dos elementos da diagonal principal. Calcule o traço da matriz:

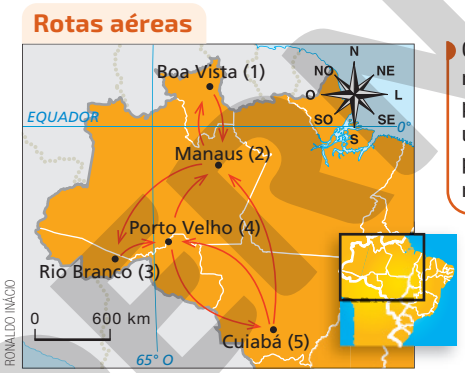
- $A = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$. -4
- $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 3 \end{bmatrix}$. 7

12 Escreva uma matriz diagonal de ordem 4 cujo traço seja 25. Resposta no final do livro.

13 Classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

a) Toda matriz quadrada nula é triangular. verdadeira
b) A matriz identidade é um exemplo de matriz diagonal. verdadeira
c) Toda matriz quadrada é triangular superior. falsa
d) Quando pelo menos um elemento da matriz é igual a 0, então a matriz é denominada nula. falsa
e) O traço da matriz identidade é numericamente igual à sua ordem. verdadeira

14 O mapa apresenta as rotas, indicadas pelas setas vermelhas, oferecidas por uma companhia aérea que atua em certa região do Brasil.



Considere que não existe percurso de uma cidade para ela mesma.

Fonte de pesquisa: *Atlas Geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 140.

a) Escreva a matriz $C = (c_{ij})_{5 \times 5}$, tal que:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se existe percurso direto da cidade } i \text{ para } j \\ 0, \text{ se não existe percurso direto da cidade } i \text{ para } j \end{cases}$$

Resposta no final do livro.

b) Sabendo que a passagem para cada percurso custa R$ 210,00, qual é o menor custo para uma viagem de ida e volta de Rio Branco a Boa vista? R$ 1 050,00

c) A matriz C é uma matriz triangular? É uma matriz diagonal? não; não

15 Determine os valores de x e y em cada item.

a) $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ $x = -3$; $y = 7$

b) $\begin{bmatrix} 2x-1 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 5y+3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y & 0 & -5 \\ 0 & 2x & 6 \\ 4x & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $x = 2$; $y = 1$

16 Escreva a transposta de cada matriz. Respostas no final do livro.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

17 Qual das matrizes apresentadas na tarefa anterior é simétrica? B

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 Operações com matrizes

8 fatias de empreendedorismo

Você conhece alguém que começou ou tem vontade de começar o próprio negócio? Diversas pessoas têm esse desejo, muitas vezes motivadas pela dificuldade em encontrar um emprego na área de formação aliada à vontade de empreender. Um ramo no qual muitos homens e mulheres aventuram-se é o da pizzaria, no entanto, para terem sucesso e obter lucro é necessário que, além de experiência e prática na produção de *pizzas*, aprendam a administrar recursos e a calcular custos mensais.

Veja algumas informações importantes com as quais os empreendedores precisam lidar nesse ramo.

Previsão de demanda: é importante para a gestão do estoque, principalmente no caso de produtos alimentícios, a estimativa da demanda de pedidos para determinado período. O histórico de vendas, por exemplo, pode ser utilizado para acompanhar o crescimento da empresa e fazer a análise de diversos controles, como fluxo de caixa, planejamento de produção, pagamento de salários e impostos etc.

Divulgação: para se destacar da concorrência e atrair clientes, é importante pensar em estratégias de divulgação. As redes sociais são um novo meio de divulgação para qualquer negócio, principalmente os que oferecem entrega.

Fidelização dos clientes: a fidelidade dos clientes deve ser sempre um objetivo da empresa, pois, além de voltar a consumir, eles podem recomendar o estabelecimento. Um sistema de cadastro pode agilizar o atendimento ao fornecer informações como endereço, histórico de pedidos, preferências e observações gerais.

Matérias-primas: para gerenciar o custo da principal mercadoria vendida pela empresa, é importante fazer um rigoroso controle da qualidade e do prazo de validade de várias matérias-primas, que podem ser obtidas de diferentes fornecedores.

Embalagens: as embalagens são itens que, além de preservar a *pizza* quente, ainda podem ser um excelente material de divulgação na modalidade de entregas. Elas podem variar no formato (redondas, octogonais e quadradas), no material e na personalização da estampa.

Preço de venda: o preço dos produtos é um dos fatores fundamentais para a saúde financeira da pizzaria. Saber exatamente o custo para produzir a *pizza* é a base para definir o preço de venda mais adequado. Demandas e receitas altas não representam necessariamente a obtenção de lucro.

Em relação às matérias-primas, uma dica é pesquisar preços e começar com os ingredientes previamente pesados e particionados. Considere, por exemplo, os principais ingredientes e o custo de produção de quatro sabores de *pizza*.

Sabor	Ingredientes (*pizza* média)			
	Muçarela ralada	Calabresa fatiada	Tomate fatiado	Frango desfiado
Muçarela	200 g	-	100 g	-
Calabresa	150 g	200 g	-	-
Mista	200 g	150 g	50 g	-
Frango	200 g	-	50 g	250 g

Produto	Preço (kg)
Muçarela	R$ 29,90
Calabresa	R$ 18,90
Tomate	R$ 4,60
Peito de frango	R$ 13,90

Podemos representar esses quadros pelas seguintes matrizes.

Matriz (kg):

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}05 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

Matriz (R$):

$$B = \begin{bmatrix} 29{,}9 \\ 18{,}9 \\ 4{,}6 \\ 13{,}9 \end{bmatrix}$$

Considerando uma única *pizza* média de sabor Mista, podemos calcular o custo total com os principais ingredientes, em reais, realizando o seguinte cálculo:

$$0{,}2 \cdot 29{,}9 + 0{,}15 \cdot 18{,}9 + 0{,}05 \cdot 4{,}6 + 0 \cdot 13{,}9 \simeq 9{,}05$$

Portanto, o custo total com os ingredientes é aproximadamente R$ 9,05.

Imagine como esses cálculos podem ficar trabalhosos se forem considerados vários outros fatores de custo, como embalagens, aluguel, impostos etc., mesmo para um cardápio com poucas opções e baixa demanda. As tabelas e as matrizes podem ajudar na representação e no cálculo de uma grande quantidade de informações.

Oriente os alunos a escrever a resposta no caderno.

A Cite algumas vantagens e desvantagens do uso de matrizes na representação e na organização de dados.

B Considerando apenas os principais ingredientes, calcule o custo unitário para os demais sabores de *pizza* de tamanho médio.

O cálculo do custo individual desses quatro sabores de *pizza*, por exemplo, está diretamente relacionado à ideia de multiplicação das matrizes *A* e *B*. Nas próximas páginas, estudaremos essa e as demais operações com matrizes, o que pode auxiliar na interpretação e na obtenção de novos dados com base em informações previamente conhecidas.

A) Algumas possíveis respostas: em relação às vantagens, tem-se a utilização de uma representação simplificada e que envolve apenas os dados de interesse, permitindo um enfoque nessas informações; em relação às desvantagens, existe a necessidade de compreender o significado de cada um dos dados, visto que nas matrizes não são apresentadas legendas.

B) Muçarela: $0{,}2 \cdot 29{,}9 + 0 \cdot 18{,}9 + 0{,}1 \cdot 4{,}6 + 0 \cdot 13{,}9 = 6{,}44$ (R$ 6,44)
Calabresa: $0{,}15 \cdot 29{,}9 + 0{,}2 \cdot 18{,}9 + 0 \cdot 4{,}6 + 0 \cdot 13{,}9 \simeq 8{,}27$ (aproximadamente R$ 8,27)
Frango: $0{,}2 \cdot 29{,}9 + 0 \cdot 18{,}9 + 0{,}05 \cdot 4{,}6 + 0{,}25 \cdot 13{,}9 \simeq 9{,}69$ (aproximadamente R$ 9,69)

Infraestrutura: a localização do ponto comercial é um dos fatores que mais influenciam no sucesso das pizzarias, principalmente aquelas que oferecem consumo local. Os melhores pontos são os que oferecem grande circulação de pessoas e de veículos, mas o valor do aluguel costuma ser mais alto. Além disso, há uma grande variedade de equipamentos os quais devem ser considerados, desde os mais básicos aos mais tecnológicos.

Entregas: na modalidade de entregas, os pedidos precisam chegar com rapidez. É possível montar uma estrutura própria com entregadores fixos, utilizar os vários serviços de aplicativos de entrega que operam no país ou optar pela combinação dessas táticas. Em todo caso, é importante compreender os custos para definir a taxa de entrega mais adequada para cada região atendida.

FOTOMONTAGEM DE MAURÍCIO PLANEL. FOTOS: 1.STRATFORD PRODUCTIONS/SHUTTERSTOCK; 2.PICS FIVE/SHUTTERSTOCK; 3.SPACE_MICROBE/SHUTTERSTOCK; 4.FLIPSER/SHUTTERSTOCK; 5. SEREGAM/SHUTTERSTOCK; 6.MIMAGE PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 7. MIKHAYLOVSKIY/SHUTTERSTOCK; 8.PHOTO MELON/SHUTTERSTOCK; 9.BILLION PHOTOS/SHUTTERSTOCK; 10.KERDKANNO/SHUTTERSTOCK; 11.MAXX-STUDIO/SHUTTERSTOCK; 12.DAVID TADEVOSIAN/SHUTTERSTOCK; 13.BRENDA ROCHA/SHUTTERSTOCK; 14.NACIMERT/SHUTTERSTOCK; 15.SERGEY RYZHOV/SHUTTERSTOCK; 16.STEKLO/SHUTTERSTOCK; 17.VICTOR JOSAN/SHUTTERSTOCK; 18.IRYNA DENYSOVA/SHUTTERSTOCK; 19.LUIS MOLINERO/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Adição e subtração de matrizes

Adição de matrizes

ARQUIVO/ESTADÃO CONTEÚDO

A paulistana Carlota Pereira de Queirós (1892-1982) foi a primeira mulher eleita deputada federal no Brasil, em 1934.

O direito igualitário ao voto entre homens e mulheres no Brasil é uma conquista que as mulheres obtiveram com muita luta ao longo de nossa história. Para elas, o direito de votar e de receber votos foi instituído apenas a partir de 1932.

Contudo, percebe-se ainda a necessidade de um avanço significativo na participação da mulher na composição dos políticos eleitos no Brasil.

Observe a quantidade de homens e de mulheres eleitos deputados federais e senadores da república no Brasil em duas eleições.

Quantidade de candidatos eleitos para a Câmara Federal do Brasil

Ano da eleição	Mulher	Homem
2014	51	462
2018	77	436

Quantidade de candidatos eleitos para o Senado Federal do Brasil

Ano da eleição	Mulher	Homem
2014	5	22
2018	7	47

Fontes de pesquisa: <https://www12.senado.leg.br/noticias/especiais/eleicoes-2014/materias/veja-os-eleitos-para-o-senado>. Acesso em: 26 fev. 2020. <http://www.tse.jus.br/imprensa/noticias-tse/2014/Outubro/eleicoes-2014-numero-de-deputadas-federais-cresce-13-33-em-relacao-a-2010>. Acesso em: 26 fev. 2020. <https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2018/10/08/veja-quais-sao-os-senadores-eleitos-em-2018>. Acesso em: 26 fev. 2020. <https://www.camara.leg.br/internet/agencia/infograficos-html5/composicaocamara2019/index.html#_>. Acesso em: 26 fev. 2020.

Com base nas tabelas, podemos construir as matrizes $A = \begin{bmatrix} 51 & 462 \\ 77 & 436 \end{bmatrix}$, para Câmara Federal, e $B = \begin{bmatrix} 5 & 22 \\ 7 & 47 \end{bmatrix}$, para o Senado Federal. Ao adicionarmos os elementos de mesma posição nas matrizes A e B, obtemos uma matriz que representa o total de candidatos eleitos por sexo no Brasil para a Câmara Federal e para o Senado Federal nos anos de 2014 e 2018.

$$\begin{bmatrix} 51+5 & 462+22 \\ 77+7 & 436+47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & 484 \\ 84 & 483 \end{bmatrix}$$

Ao adicionarmos os elementos correspondentes das matrizes A e B, estamos adicionando essas matrizes, ou seja, calculando $A + B$.

Consideremos as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$. A soma $A + B$ é igual à matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Matriz oposta

Observe a adição das matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -6 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -6 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+(-5) & 4+(-4) & -6+6 \\ -3+3 & 1+(-1) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, como $A + B$ resulta em uma matriz nula, dizemos que B é a matriz oposta de A, e vice-versa.

Dada uma matriz A, denominamos **matriz oposta** de A, indicada por $-A$, a matriz cuja adição a A resulta em uma matriz nula de mesma ordem, ou seja, $A_{m \times n} + (-A_{m \times n}) = 0_{m \times n}$. Nas matrizes A e $-A$, os elementos correspondentes são opostos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELNA

Propriedades da adição de matrizes

A adição de matrizes tem as mesmas propriedades básicas da adição de números reais, uma vez que foi definida por meio da adição de seus elementos correspondentes. Assim, considerando A, B e C matrizes de mesma ordem $m \times n$, temos:

- propriedade comutativa: $A + B = B + A$
- propriedade associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- elemento neutro: $A_{m\times n} + 0_{m\times n} = A_{m\times n}$
- elemento oposto: $A_{m\times n} + (-A_{m\times n}) = 0_{m\times n}$

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$, denominamos diferença entre A e B, indicada por $A - B$, a matriz C obtida ao calcularmos a adição de A com o oposto de B, ou seja, $A - B = A + (-B) = C$.

Exemplo

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$, segue que:

$$A - B = A + (-B) = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}}_{-B} = \begin{bmatrix} 8 + (-5) & 4 + (-4) \\ 3 + 7 & -5 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$$

Sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{m\times n}$, com $A - B = C$, temos que $a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$. Assim, também podemos calcular $A - B$ subtraindo de cada elemento de A o elemento correspondente de B.

Exemplo

Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -1 \\ 9 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -8 \end{bmatrix}$, temos:

$$A - B = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -1 \\ 9 & -4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 4 & 7 - 0 & -1 - 5 \\ 9 - (-6) & -4 - 2 & 5 - (-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -6 \\ 15 & -6 & 13 \end{bmatrix}$$

Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem, $A - B = B - A$? Justifique sua resposta.

Não, pois se $A - B = C$, então $B - A = -C$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, calcule $[A + (-B)] + (-A) + C$.

Resolução

Utilizando as propriedades da adição de matrizes, temos:

$$[A + (-B)] + (-A) + C \overset{\text{aplicando as propriedades comutativa e associativa}}{=} [A + (-A)] + (-B) + C \overset{\text{aplicando o elemento oposto da adição}}{=} 0_2 + (-B) + C \overset{\text{aplicando o elemento neutro da adição}}{=} -B + C$$

Note que $A + (-A) = 0_2$, que corresponde à matriz nula de ordem 2 (elemento neutro da adição).

Segue que:

$$[A + (-B)] + (-A) + C = -B + C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Note que, da propriedade comutativa e do elemento neutro, temos: $0_n + (-B_n) = (-B_n) + 0_n = -B_n$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Calcule.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ -9 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 17 & 18 \\ -21 & 19 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -6 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -9 \\ -6 & -6 & 11 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

2 Uma empresa de telefonia fixa oferece a seus clientes duas opções de planos residenciais. As matrizes J, F e M indicam, respectivamente, as vendas desses planos em uma área de cobertura que compreende quatro bairros nos meses de janeiro, fevereiro e março. Em cada uma delas, as linhas indicam os tipos de plano I e II (de cima para baixo) e as colunas, os bairros A, B, C e D (da esquerda para a direita).

$J = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{bmatrix}$

$F = \begin{bmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{bmatrix}$

a) Escreva a matriz $T_{2\times 4}$ que representa o total de vendas dos planos I e II em cada bairro no trimestre apresentado. Resposta no final do livro.

b) Em qual bairro foram vendidas mais unidades do plano I? E do plano II? bairro B; bairro A

3 Escreva a oposta de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ $-A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -\pi \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $-B = \begin{bmatrix} -1 & \pi \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -1 \\ \sqrt[3]{-6} & 2 & 10 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $-C = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 & 1 \\ -\sqrt[3]{-6} & -2 & -10 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $-D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $B + B$

b) $B + A$

c) $A + A^t$

d) $A - B$

Respostas no final do livro.

5 Observe a previsão de temperatura para algumas cidades brasileiras.

Previsão de temperatura mínima para setembro de 2019

Cidade \ Dia	12	13	14	15	16
Brasília - DF	16 °C	21 °C	18 °C	17 °C	17 °C
Campo Grande - MS	22 °C	20 °C	23 °C	28 °C	27 °C
Cuiabá - MT	25 °C	22 °C	23 °C	23 °C	28 °C
Goiânia - GO	22 °C	22 °C	22 °C	20 °C	21 °C

Fonte de pesquisa: <http://tempo.cptec.inpe.br>. Acesso em: 10 set. 2019.

Previsão de temperatura máxima para setembro de 2019

Cidade \ Dia	12	13	14	15	16
Brasília - DF	33 °C	33 °C	32 °C	31 °C	32 °C
Campo Grande - MS	36 °C	36 °C	39 °C	39 °C	40 °C
Cuiabá - MT	40 °C	39 °C	41 °C	41 °C	41 °C
Goiânia - GO	38 °C	39 °C	37 °C	36 °C	38 °C

Fonte de pesquisa: <http://tempo.cptec.inpe.br>. Acesso em: 10 set. 2019.

a) Escreva as matrizes M e N que apresentam, respectivamente, as temperaturas mínimas e máximas segundo o dia e a cidade. Resposta no final do livro.

b) A variação de temperatura de cada dia é dada pela matriz: B

- $A = M + N$
- $B = N - M$
- $C = M - N$

c) Escreva a matriz que você escolheu no item b. Resposta no final do livro.

d) Para qual cidade estava prevista a maior variação de temperatura em 15 de setembro de 2019? E a menor? Cuiabá; Campo Grande

e) Em qual dia Brasília apresentou a maior previsão de variação de temperatura? dia 12

6 Sabendo que $A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, em que I_3 é a matriz identidade de ordem 3, determine a matriz A. Resposta no final do livro.

7 Em grupo

Junte-se a um colega e estabeleçam quatro matrizes, A, B, C e 0, de mesma ordem, e verifiquem numericamente a validade das seguintes propriedades. Resposta pessoal.

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $A + 0 = A$

d) $A + (-A) = 0$

A matriz nula $0_{m\times n}$ está representada por 0.

Explique aos alunos que os itens desta tarefa não correspondem a demonstrações, apenas a verificações numéricas.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, e um número real k, então $k \cdot A$ é uma matriz $B = (b_{ij})$ também de ordem $m \times n$, tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -16 & 13 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$, temos:

- $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 21 & -3 \\ -9 & 12 & 33 \end{bmatrix}$
- $-\frac{1}{4} \cdot B = -\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -16 & 13 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \cdot (-16) & -\frac{1}{4} \cdot 13 \\ -\frac{1}{4} \cdot 10 & -\frac{1}{4} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{13}{4} \\ -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$\overbrace{1{,}1 \cdot B}^{100\% + 10\%} = 1{,}1 \cdot \begin{bmatrix} 29{,}9 \\ 18{,}9 \\ 4{,}6 \\ 13{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1 \cdot 29{,}9 \\ 1{,}1 \cdot 18{,}9 \\ 1{,}1 \cdot 4{,}6 \\ 1{,}1 \cdot 13{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32{,}89 \\ 20{,}79 \\ 5{,}06 \\ 15{,}29 \end{bmatrix}$

No contexto

Considere a matriz B, apresentada na página **39**, relacionada aos preços dos principais ingredientes de quatro sabores de *pizza*. Supondo que houve um reajuste de 10% nos quatro ingredientes, represente os cálculos para obter a matriz com o preço dos ingredientes após o reajuste.

Exercícios e problemas resolvidos

R2 Seja $A_{2 \times 2}$ uma matriz qualquer. Mostre que $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$, sendo α e β números reais.

Resolução

$$(\alpha + \beta) \cdot A = (\alpha + \beta) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta) \cdot a_{11} & (\alpha + \beta) \cdot a_{12} \\ (\alpha + \beta) \cdot a_{21} & (\alpha + \beta) \cdot a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} + \beta \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} + \beta \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} + \beta \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} + \beta \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \cdot a_{11} & \beta \cdot a_{12} \\ \beta \cdot a_{21} & \beta \cdot a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

Portanto, $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.

Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem, e dois números reais α e β, são válidas as propriedades:

- $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$
- $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

8 Calcule. Respostas no final do livro

a) $-3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & \pi & \frac{1}{6} \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3x \\ 0 & 1 \\ 9x^2 & -2 \end{bmatrix}$

9 Considerando duas matrizes quaisquer $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ e um número real α, mostre que:

a) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

b) $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

Respostas na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

Antes de resolver o problema, estabeleça duas matrizes A e B de mesma ordem e um número real α. Depois, verifique numericamente a validade dessas propriedades.

10 Determine os valores de x, y e z de modo que $4 \cdot \begin{bmatrix} x & 2 \\ -z & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & 6 \\ 5 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$. $x = \frac{7}{4}$; $y = 4$; $z = -3$

11 Na matriz C, a 1ª linha indica a quantidade de tecido (em metros quadrados) e a 2ª, a quantidade de botões usados na confecção de 3 modelos diferentes de camisa, correspondentes a cada uma das colunas.

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 & 1{,}1 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Escreva a matriz que indica a quantidade necessária desses materiais para a confecção de 18 camisas de cada modelo.

Resposta no final do livro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ao trabalhar com essa página, relembre os alunos que nas páginas 38 e 39 a ideia envolvendo multiplicação de matrizes já foi apresentada, e que agora, esse assunto será consolidado.

Multiplicação de matrizes

Em certa fábrica, duas máquinas **X** e **Y** produzem cada uma dois tipos de peça: **I** e **II**. Observe a proporção de cada tipo de peça produzida pelas máquinas e as quantidades de peças produzidas em certo mês.

As informações apresentadas nas tabelas são fictícias.

Proporção na produção total das peças em agosto de 2020

Máquina \ Peça	I	II
X	0,25	0,60
Y	0,75	0,40

Fonte: Administração da fábrica.

Produção total por tipo de peça em agosto de 2020

Peça	Quantidade
I	680
II	590

Fonte: Administração da fábrica.

Podemos calcular o total de peças produzidas pelas máquinas **X** e **Y** naquele mês por meio dos seguintes cálculos:

- máquina **X**: $0{,}25 \cdot 680 + 0{,}60 \cdot 590 = 524$, ou seja, 524 peças.
- máquina **Y**: $0{,}75 \cdot 680 + 0{,}40 \cdot 590 = 746$, ou seja, 746 peças.

Produção por máquina em agosto de 2020

Máquina	Quantidade
X	524
Y	746

Fonte: Administração da fábrica.

Assim, podemos expressar a produção de cada máquina conforme indicado ao lado.

O cálculo $A \cdot B$ é possível, pois a quantidade de colunas de A é igual à quantidade de linhas de B. O cálculo $B \cdot A$ não é possível, pois a quantidade de colunas de B é diferente da quantidade de linhas de A. A ordem da matriz $A \cdot B$ é 4×1 e cada linha representa o custo unitário, em reais, dos principais ingredientes do sabor de *pizza* correspondente.

Se considerarmos as matrizes A, B e C correspondentes, respectivamente, à proporção na produção total das peças, à produção total por tipo de peça e à produção por máquina, os cálculos realizados correspondem ao que se define como sendo a **multiplicação de matrizes**.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}60 \\ 0{,}75 & 0{,}40 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 680 \\ 590 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \cdot 680 + 0{,}60 \cdot 590 \\ 0{,}75 \cdot 680 + 0{,}40 \cdot 590 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 524 \\ 746 \end{bmatrix}}_{C = A \cdot B}$$

No contexto

De acordo com as matrizes A e B, apresentadas na página **39**, relacionadas aos ingredientes dos quatro sabores de *pizza*, é possível calcular o produto $A \cdot B$? E o produto $B \cdot A$? Em caso afirmativo, qual a ordem e o significado de cada linha dessa matriz resultante?

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, e $B = (b_{ij})$, de ordem $n \times p$, o produto $A \cdot B$ é a matriz $C = (c_{ij})$, de ordem $m \times p$, na qual cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i de A e da coluna j de B, e adicionando as parcelas correspondentes aos produtos das multiplicações.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Note que, pela definição apresentada, o produto de duas matrizes A e B existe somente se a quantidade de colunas de A for igual à quantidade de linhas de B, sendo que a matriz $A \cdot B$ obtida tem a mesma quantidade de linhas de A e a mesma quantidade de colunas de B.

Na multiplicação de matrizes, podemos destacar as seguintes propriedades.

- Propriedade I (associativa): $\left(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}\right) \cdot C_{p \times r} = A_{m \times n} \cdot \left(B_{n \times p} \cdot C_{p \times r}\right)$
- Propriedade II (distributiva): $\left(A_{m \times n} + B_{m \times n}\right) \cdot C_{n \times p} = A_{m \times n} \cdot C_{n \times p} + B_{m \times n} \cdot C_{n \times p}$ e $A_{m \times n} \cdot \left(B_{n \times p} + C_{n \times p}\right) = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} + A_{m \times n} \cdot C_{n \times p}$
- Propriedade III (elemento neutro): $A_{m \times n} \cdot I_n = A_{m \times n}$ e $I_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$, sendo I a matriz identidade
- Propriedade IV: $\left(k \cdot A_{m \times n}\right) \cdot B_{n \times p} = A_{m \times n} \cdot \left(k \cdot B_{n \times p}\right) = k \cdot \left(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}\right)$, com $k \in \mathbb{R}$
- Propriedade V: $\left(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}\right)^t = B^t_{p \times n} \cdot A^t_{n \times m}$

Diga aos alunos que as propriedades apresentadas podem ser demonstradas. No entanto, optou-se por não o fazer neste livro.

Além disso, vale lembrar que a propriedade comutativa não é válida para a multiplicação de matrizes. Existindo a multiplicação de matrizes $A \cdot B$, temos as seguintes possibilidades:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$
- $A \cdot B = B \cdot A$
- não existe $B \cdot A$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Adição, subtração e multiplicação de matrizes em planilhas eletrônicas

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Além disso, elas possibilitam a organização de dados e possuem recursos para realizar cálculos, construir gráficos, restringir dados, preencher campos automaticamente, entre outras funções. É importante destacar que uma planilha é dividida em regiões retangulares, denominadas células, as quais são localizadas pelo cruzamento de uma linha (indicada por um número) com uma coluna (indicada por uma letra). As planilhas eletrônicas são úteis para facilitar cálculos envolvendo matrizes.

Apresentaremos a seguir um exemplo de adição e multiplicação de matrizes. Para isso, vamos utilizar o Calc, que é uma das planilhas eletrônicas disponíveis.

Veja mais informações sobre o Calc no Suplemento para o professor.

A Em uma planilha eletrônica, digite as matrizes $A = \begin{bmatrix} 20 & -3 & -9 \\ 18 & 22 & 61 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 35 \\ 13 & -7 & 1 \\ 8 & 15 & 17 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, conforme apresentado ao lado.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Matriz A				Matriz B		
2	20	−3	−9		−5	−2	35
3	18	22	61		13	−7	1
4	10	0	2		8	15	17
5							
6	Matriz C			Matriz D			
7	0	−3		0	−1	1	
8	−2	1		−4	2	3	
9	5	8					
10	1	2					

B Para obter a matriz $A_{3\times3} + B_{3\times3}$ de ordem 3×3 no intervalo **I2:K4**, inicialmente, digite $= A2 + E2$ na célula **I2** e pressione ***Enter*** para obter o resultado de $a_{11} + b_{11}$. Em seguida, selecione a célula **I2**, clique sobre a **Guia de autopreenchimento** e arraste-a até a célula **I4**. Com o intervalo **I2:I4** selecionado, clique novamente na **Guia de autopreenchimento** e arraste-a até a célula **K4**.

C Para obter a matriz $C_{4\times2} \cdot D_{2\times3}$ de ordem 4×3, selecione o intervalo **H7:J10**, contendo 4 linhas e 3 colunas. Depois, clique em **Inserir** e selecione a opção **Função...** No campo **Categoria** selecione **Matriz** e marque a opção **Matricial** e, em seguida, na lista de funções selecione **MATRIZ.MULT**. Na sequência, no campo matriz 1, digite **A7:B10** (correspondente ao intervalo da matriz *C*) e no campo matriz 2, digite **D7:F8** (correspondente ao intervalo da matriz *D*). Por fim, clique em **OK.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Matriz A				Matriz B				Soma		
2	20	−3	−9		−5	−2	35		15	−5	26
3	18	22	61		13	−7	1		31	15	62
4	10	0	2		8	15	17		18	15	19
5											
6	Matriz C			Matriz D				Produto			
7	0	−3		0	−1	1		12	−6	−9	
8	−2	1		−4	2	3		−4	4	1	
9	5	8						−32	11	29	
10	1	2						−8	3	7	

Auxilie os alunos a usar a **Guia de autopreenchimento**, orientando-os a clicar no quadrado preto no canto inferior direito da célula e arrastá-lo sobre as células em que se deseja reaplicar o conteúdo ou as fórmulas.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 A subtração é análoga à soma, basta alterar, por exemplo, a fórmula da célula I2 para $= A2 - E2$. Consideradas as matrizes, utilize a planilha para obter a matriz $A_{3\times3} - B_{3\times3}$.

2 Ainda considerando as matrizes, utilize a planilha para obter a matriz $D_{2\times3} \cdot B_{3\times3}$.

3 Considerando as matrizes $E = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -10 \\ 0 & -3 & 8 \\ 1 & 15 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, utilize a planilha para obter a matriz $(E \cdot F) + G$.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x-3 & 0 \\ x-2 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, determine o número real x para que $A \cdot B - C = I_2$, em que I_2 é a matriz identidade de ordem 2×2.

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

O valor de x nos elementos das matrizes A e B para que a expressão $A \cdot B - C$ resulte na matriz identidade de ordem 2×2.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

As matrizes A, B e C.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, calculamos $A \cdot B$ e subtraímos C desse resultado, obtendo, em alguns termos, uma expressão com a incógnita x. Em seguida, igualamos essa matriz resultante à matriz identidade de ordem 2×2 para comparar os elementos de mesma posição, obtendo, em alguns deles, uma equação com a incógnita x. Depois disso, resolvemos essas equações a fim de obter o valor de x que satisfaz todas as equações.

√ Escolhendo as notações.

a_{ij}: elemento da linha i e coluna j de uma matriz.

C Executando o plano

Passo 1

Primeiro, fazemos a multiplicação $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-3 & 0 \\ x-2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x-1)\cdot(x-3)+2\cdot(x-2) & (x-1)\cdot 0+2\cdot 2 \\ x\cdot(x-3)+0\cdot(x-2) & x\cdot 0+0\cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x^2-3x-1x+3)+(2x-4) & 4 \\ x^2-3x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2-2x-1 & 4 \\ x^2-3x & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 2

Agora, subtraímos C.

$$A \cdot B - C = \begin{bmatrix} x^2-2x-1 & 4 \\ x^2-3x & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2-2x-1-6 & 4-4 \\ x^2-3x-4 & 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2-2x-7 & 0 \\ x^2-3x-4 & 1 \end{bmatrix}$$

Passo 3

Lembrando que I_2 é a matriz identidade de ordem 2×2, ou seja, que $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, vamos escrever a igualdade $A \cdot B - C = I_2$ e comparar os elementos de mesma posição.

$$\begin{bmatrix} x^2-2x-7 & 0 \\ x^2-3x-4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtemos as seguintes equações:

a_{11}: $x^2-2x-7=1$ $\quad$ a_{21}: $x^2-3x-4=0$ $\quad$ a_{12}: $0=0$ $\quad$ a_{22}: $1=1$

Note que os elementos das posições a_{12} e a_{22} não nos dão informação sobre o valor de x. Então, precisamos resolver as equações referentes aos elementos nas posições a_{11} e a_{21}.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 4

Para resolver a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, referente à posição a_{11}, podemos aplicar a fórmula resolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, na qual $\Delta = b^2 - 4ac$:

$x^2 - 2x - 7 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$
$a = 1;\ b = -2;\ c = -8$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2 - 6}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{2 + 6}{2} = 4 \end{cases}$$

Para essa equação, existem dois resultados possíveis para x, sendo eles $x_1 = -2$ e $x_2 = -4$.

Passo 5

Aplicamos novamente a fórmula resolutiva, dessa vez para resolver a equação referente à posição a_{21}:

$x^2 - 3x - 4 = 0$
$a = 1;\ b = -3;\ c = -4$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3 - 5}{2} = -1 \\ x_4 = \frac{3 + 5}{2} = 4 \end{cases}$$

Para essa equação existem dois resultados possíveis para x, sendo eles $x_3 = -1$ e $x_4 = 4$.

O único valor que satisfaz simultaneamente as equações referentes às posições a_{11} e a_{21} é $x = 4$. Portanto, $x = 4$ é o único valor possível para que se verifique a igualdade $A \cdot B - C = I_2$.

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de algumas tarefas similares propostas na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

D Verificando a solução obtida

Para verificar a solução obtida, substituímos o valor $x = 4$ na expressão $A \cdot B - C$:

$$A \cdot B - C = \begin{bmatrix} x - 1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 3 & 0 \\ x - 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Agora é você quem resolve! Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema.**

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ x - 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -x & 0 \\ x + 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2x & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule o valor do número real x tal que $A \cdot B = 2 \cdot C$.

2 **É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta para esse problema?**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R3 Nas páginas **38** e **39**, vimos algumas dicas para quem deseja investir no ramo das pizzarias, por exemplo, a importância da gestão das matérias-primas e dos preços de custo e de venda. Devido à dificuldade em encontrar um emprego na área de formação e inspirado em sua experiência com artesanatos, Sandro começou seu negócio de produção de pulseiras. Uma de suas estratégias para facilitar a administração dos recursos e evitar o excesso, a falta ou o desperdício de matéria-prima é produzi-las por encomenda, ou seja, ele só produz o que vai vender.

Além disso, Sandro sabe exatamente os custos envolvidos na produção das pulseiras, de tal maneira que o comprador pode escolher entre várias opções de estilos, cores, tamanhos e materiais naturais. No entanto, os preços de custo e de venda são limitados a apenas quatro opções, conforme o quadro ao lado.

	Preço de custo	Preço de venda
Tipo A	R$ 0,25	R$ 3,00
Tipo B	R$ 0,40	R$ 3,50
Tipo C	R$ 0,60	R$ 5,00
Tipo D	R$ 1,00	R$ 8,00

Sandro trabalha de maneira informal e, em uma semana que precisou trabalhar os sete dias, anotou todas as quantidades de pulseiras vendidas, como indicado no quadro abaixo.

Dia	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Tipo D
Domingo	15	20	10	5
Segunda-feira	3	5	4	0
Terça-feira	2	0	6	5
Quarta-feira	5	2	1	7
Quinta-feira	0	3	9	1
Sexta-feira	8	5	10	4
Sábado	10	15	20	15

a) Escreva duas matrizes, A e B, com os números apresentados no primeiro e no segundo quadro, respectivamente. Depois, calcule a matriz $B \cdot A$.

b) Qual é o significado de cada coluna da matriz $B \cdot A$?

c) É possível calcular o produto $A \cdot B$? Justifique sua resposta.

Resolução

a) Escrevendo as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 3 \\ 0{,}4 & 3{,}5 \\ 0{,}6 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \\ 8 & 5 & 10 & 4 \\ 10 & 15 & 20 & 15 \end{bmatrix}_{7 \times 4}$, a matriz $B \cdot A$ será:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 15 \cdot 0{,}25 + 20 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 1 & 15 \cdot 3 + 20 \cdot 3{,}5 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \\ 3 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}6 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3{,}5 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 8 \\ 2 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 3{,}5 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \\ 5 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 + 7 \cdot 1 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3{,}5 + 1 \cdot 5 + 7 \cdot 8 \\ 0 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 3 \cdot 3{,}5 + 9 \cdot 5 + 1 \cdot 8 \\ 8 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 1 & 8 \cdot 3 + 5 \cdot 3{,}5 + 10 \cdot 5 + 4 \cdot 8 \\ 10 \cdot 0{,}25 + 15 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 0{,}6 + 15 \cdot 1 & 10 \cdot 3 + 15 \cdot 3{,}5 + 20 \cdot 5 + 15 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22{,}75 & 205 \\ 5{,}15 & 46{,}5 \\ 9{,}1 & 76 \\ 9{,}65 & 83 \\ 7{,}6 & 63{,}5 \\ 14 & 123{,}5 \\ 35{,}5 & 302{,}5 \end{bmatrix}$$

b) A 1ª coluna da matriz $B \cdot A$ representa o preço de custo de todas as pulseiras vendidas no dia da semana correspondente. Já a 2ª coluna representa o preço de venda de todas as pulseiras vendidas no dia da semana correspondente.

c) Não. A ordem da matriz A é 4×2 e a da matriz B é 7×4, ou seja, a quantidade de colunas da matriz A é diferente da quantidade de linhas da matriz B, impossibilitando o produto $A \cdot B$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

12 Calcule.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -9 \\ 0 & -9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 8 & 18 \\ 8 & -94 & -36 \\ 18 & -36 & -82 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 6 & 8 & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 7 \end{bmatrix} [9]$

e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 8 & 12 \\ 14 & 21 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 13. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 6{,}44 \\ 8{,}27 \\ 9{,}05 \\ 9{,}69 \end{bmatrix}$

No contexto

13 Vimos nas páginas **38** e **39** algumas informações relacionadas aos ingredientes principais de quatro sabores de *pizza*. Escreva a matriz $A \cdot B$ e verifique que as linhas representam, cada uma, o custo unitário, em reais, dos principais ingredientes do sabor de *pizza* correspondente.

14 Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ e $B = (b_{ij})_{m \times 4}$.

a) Determine o valor de m para que exista o produto $A \cdot B$. $m = 2$

b) Considerando o valor de m obtido no item **a**, qual é a ordem da matriz $C = A \cdot B$. 3×4

15 Sendo as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Resposta no final do livro.

16 Em grupo

Junte-se a um colega e estabeleçam três matrizes quadradas, A, B e C, de ordem 2 e verifiquem numericamente a validade das propriedades a seguir. Resposta pessoal

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

c) $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$

d) $(k \cdot A) \cdot B = k \cdot (A \cdot B)$, com $k \in \mathbb{R}$

e) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

17 Veja parte da tabela de classificação da série *A* do Campeonato Brasileiro de Futebol, de 2019, em determinada rodada.

Classificação do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2019 na 18ª rodada

Time \ Resultado	Vitórias	Empates	Derrotas
Flamengo	12	3	3
Santos	11	4	3
Palmeiras	10	6	2
Corinthians	8	8	2
São Paulo	8	7	3

Fonte de pesquisa: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a#.VlXr3tKrQdW>. Acesso em: 10 set. 2019.

Note que a quantidade de vitórias, empates e derrotas de cada time pode ser representada pela matriz a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 3 \\ 11 & 4 & 3 \\ 10 & 6 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Para obter a pontuação dos times, são atribuídos 3 pontos para vitória, 1 para empate e 0 para derrota, formando a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine a matriz C que fornece o total de pontos de cada time até essa rodada. Resposta no final do livro.

b) Qual foi a pontuação obtida pelo Flamengo? E pelo Corinthians? 39 pontos; 32 pontos

18 Dadas as matrizes $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $R = (r_{ij})$, com $R = P \cdot Q$, escreva o elemento:

a) r_{12} -12 b) r_{21} 19 c) r_{23} 8

19 Sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A \cdot B$

b) $A^t \cdot C$

c) $C \cdot B$

d) $(A + C) \cdot B$

Respostas no final do livro.

20 Calcule os valores de x e y de modo que a igualdade $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix}$ seja verdadeira. $x = -3$; $y = \frac{1}{2}$

21 Dadas as matrizes $A_{p \times q}$, $B_{3 \times r}$ e $C_{4 \times s}$, determine os valores de p, q, r e s sabendo que o produto $A \cdot B \cdot C$ é da ordem 5×3. $p = 5$; $q = 3$; $r = 4$; $s = 3$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

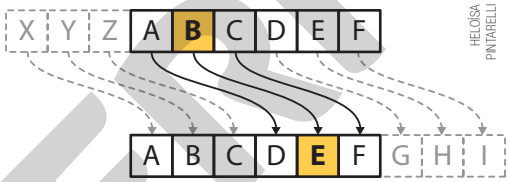
MODERNA

4 Matriz inversa e determinantes

Criptografia

A palavra **criptografia** tem origem grega (*kripto*: escondido, oculto; *grapho*: grafia) e define a técnica, ou o conjunto de técnicas, para escrever mensagens em códigos (cifrar). O código capaz de cifrar e decifrar uma informação é chamado **chave** e está disponível somente para pessoas autorizadas. Já imaginou como essa chave era importante em tempos de guerra, para evitar que o inimigo descobrisse o significado das mensagens codificadas caso fosse interceptada? E como a criptografia é importante hoje em dia, para evitar que dados pessoais, senhas, informações bancárias e até mesmo mensagens em programas de comunicação instantânea possam ser utilizados para cometer atos ilícitos?

Uma das primeiras e mais simples técnicas de criptografia é conhecida como **Cifra de César**, que recebeu esse nome de tanto ser utilizada pelo imperador romano Júlio César (100 a.C. a 44 a.C.) durante o Império Romano. Essa criptografia tinha como característica a troca de cada letra no texto original para a letra do alfabeto três casas à frente, como mostra a figura ao lado. Mas, por ser muito simples e eventualmente decifrada, perdeu sua utilidade.



HELOÍSA PINTARELLI

Fonte de pesquisa: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/4865_3761_ID.pdf>. Acesso em: 19 maio 2020.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.NINAM/SHUTTERSTOCK; 2.ARTISTDESIGN29/SHUTTERSTOCK; 3.3DMAVR/SHUTTERSTOCK; 4.TETIANA SUKHORUKOVA/SHUTTERSTOCK; 5.MORPHART CREATION/SHUTTERSTOCK; 6.LIVE VECTOR/SHUTTERSTOCK; 7.TOMISLAV FORGO/SHUTTERSTOCK; 8.ARCADY/SHUTTERSTOCK; 9.M.STASY/SHUTTERSTOCK; 10.RAY-BON/SHUTTERSTOCK; 11.ACID2728K/SHUTTERSTOCK; 12.BLAN-K/SHUTTERSTOCK; 13.PILGRRIM/SHUTTERSTOCK; 14.WORLD OF STOCK/SHUTTERSTOCK; 15.DOOMU/SHUTTERSTOCK; 16.ANATOLIR/SHUTTERSTOCK; 17.VISUAL GENERATION/SHUTTERSTOCK; 18.INK DROP/SHUTTERSTOCK

PODEMA

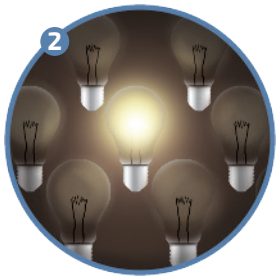
Com o passar dos anos, métodos mais eficazes de criptografia foram desenvolvidos, culminando em um dos equipamentos mais conhecidos da Segunda Guerra Mundial, a Máquina Enigma, cujos códigos também foram eventualmente decifrados pelos aliados.

Máquina enigma

A máquina enigma, que possui um sistema de combinações mecânicas e elétricas, foi utilizada na Segunda Guerra Mundial para criptografar e descriptografar mensagens. Veja a seguir algumas características dessa máquina.

Rotores

É um conjunto de discos rotativos com movimento contínuo que resulta em diversas combinações na criptografia.



Placa de luzes

A luz que acende codifica a letra que foi pressionada no teclado.

Teclado

O operador tecla a mensagem a ser criptografada. Consequentemente, o circuito fecha e a corrente elétrica flui pelos rotores até chegar à placa de luzes.

ILUSTRAÇÕES: HELOISA PINTARELLI

GRANGER, NYC/GLOW IMAGES

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Apresente exemplos de situações que necessitam da criptografia para a comunicação confidencial de informações. Algumas possíveis respostas: compras pela internet e movimentações bancárias.

B Qual é a função de uma chave criptográfica? É utilizada para cifrar (codificar) e decifrar (decodificar) mensagens.

C Decifre a mensagem a seguir utilizando a Cifra de César e a chave numérica quatro, ou seja, trocando cada letra no texto original para quatro casas à frente:

GVMTXSKVEJME

criptografia

D Utilizando a Cifra de César e a chave numérica três, codifique uma palavra, de até dez letras. Depois, troque sua palavra codificada com um colega e decodifique a palavra dele. Por fim, confira sua resposta com a palavra original dele. Resposta pessoal.

Com a chegada dos computadores, a criptografia passou a utilizar cálculos matemáticos avançados para obter um modelo praticamente indecifrável. Porém, podemos usar conceitos de **matrizes inversas** para criar uma criptografia básica. Para completar esse tema, também estudaremos **equações envolvendo matrizes** e **determinante de uma matriz** de ordem 1 até ordem 3.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matriz inversa

De maneira geral, quanto maior a ordem de uma matriz quadrada, mais cálculos são necessários para obter a sua inversa. Nesse sentido, programas específicos de computador costumam ser empregados nessa tarefa, como a planilha eletrônica Calc.

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, denominamos a matriz quadrada B, também de ordem n, de **matriz inversa** de A, se $A \cdot B = I_n$ e $B \cdot A = I_n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n. De maneira geral, indicamos a inversa de A por A^{-1}. Quando uma matriz quadrada possui inversa, dizemos que essa matriz é **invertível** (ou inversível). Já quando a matriz não possui inversa, dizemos que ela é **não invertível** (ou não inversível).

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível, e sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, pois:

- $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$
- $A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Caso exista, determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Resolução

Se existir, a inversa da matriz A é do tipo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot X = I_2$, ou seja:

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 5a + 2c & 5b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, temos os sistemas:

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \cdot (-2) \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a - 2c = -2 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases}$$

Caso um dos sistemas fosse impossível, a matriz A não seria invertível.

$$-a = -2 \Rightarrow a = 2$$

$$3a + c = 1 \Rightarrow 3 \cdot 2 + c = 1 \Rightarrow c = -5$$

$$\begin{cases} 3b + d = 0 \cdot (-2) \\ 5b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6b - 2d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases}$$

$$-b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$3b + d = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1) + d = 0 \Rightarrow d = 3$$

Em seguida, verificamos se $X \cdot A = I_2$.

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 5 & (-5) \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Como $A \cdot X = X \cdot A = I_2$, segue que a matriz A é invertível, e sua inversa é $A^{-1} = X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Obtenha, caso exista, a inversa de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}$ não existe C^{-1}

d) $D = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

2 Sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$ a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} m & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule o valor de $m + n$. 7

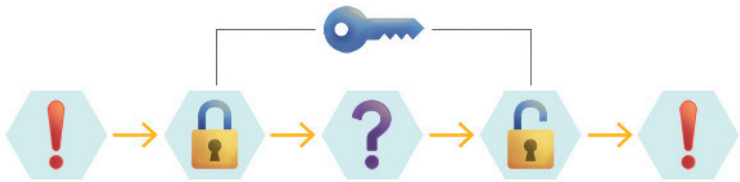
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No contexto

3 Vimos anteriormente que a palavra criptografia é derivada de *kriptos*, que em grego significa oculto, escondido. Contudo, a criptografia não tem como objetivo ocultar a existência de uma mensagem, mas esconder o seu significado.

De acordo com uma chave, estabelecida previamente pelo receptor e pelo transmissor, o texto é codificado para tornar a mensagem incompreensível a terceiros. O receptor torna a mensagem compreensível ao decodificá-la por meio da chave.



HELOÍSA PINTARELLI

Um dos métodos utilizados para criptografar mensagens é por meio de matrizes. Para isso, podemos, por exemplo, relacionar as letras do alfabeto e o símbolo #, que representa um espaço em branco, a números primos da seguinte maneira:

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103

Convertendo a mensagem CÓDIGO SECRETO para a forma numérica mostrada acima, obtemos:

C	O	D	I	G	O	#	S	E	C	R	E	T	O
7	53	11	29	19	53	2	71	13	7	67	13	73	53

Suponha que a chave utilizada seja a matriz quadrada invertível $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Como essa matriz é de ordem 2, organizamos a sequência de números como elementos de uma matriz B com duas linhas, ou seja:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{bmatrix}$$

Ao realizar a multiplicação $A \cdot B$, obtemos a matriz C, que será enviada ao receptor. Recebida a mensagem, ele a decodifica multiplicando a inversa da chave por C, ou seja, $A^{-1} \cdot C = B$. Por fim, o receptor, utilizando a associação entre letras e números, poderá obter a mensagem original.

a) Determine a matriz C enviada ao receptor no exemplo apresentado. Resposta no final do livro.

b) Mostre que a mensagem codificada no item **a**, ao ser decodificada, gera a mensagem original. Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

c) Acima, foram relacionados números primos às letras do alfabeto. Explique o que são números primos. Resposta no final do livro.

d) Suponha que chegou até um receptor a seguinte matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 187 & 151 & 299 & 639 & 367 & 227 & 63 & 83 & 278 \\ 141 & 115 & 225 & 497 & 293 & 171 & 50 & 63 & 209 \end{bmatrix}$$

Sabendo que essa mensagem foi criptografada usando a mesma relação de letras e símbolos apresentada acima, cuja chave é a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, qual a mensagem que está codificada? missão fracassada

e) Escolha outra maneira para relacionar letras a números, defina uma matriz-chave e escreva uma mensagem a ser codificada por meio de uma matriz. Envie essa matriz a um colega, disponibilizando a ele a matriz-chave e a relação letra/número. Peça a ele que decodifique a mensagem. Por fim, verifiquem se a mensagem secreta foi obtida. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Equações envolvendo matrizes

Existem equações cuja incógnita é uma matriz. Em geral, para resolver equações com essa característica, utilizamos as operações de adição, subtração e multiplicação, além do conceito de matriz inversa, estudados anteriormente.

Exercícios e problemas resolvidos

R2 Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, e X uma matriz 3×2, resolva a equação matricial $X + A = B$.

Resolução

Utilizando as propriedades operatórias da adição, temos:

$$X + A = B \Rightarrow X + A + (-A) = B + (-A) \Rightarrow X + 0_{3\times 2} = B - A \Rightarrow X = B - A$$

Segue que: $X = B - A \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Portanto, a solução da equação é $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

R3 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 19 \\ 31 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Resolução

Podemos resolver a equação de duas maneiras.

1ª maneira

A ordem da matriz X é 2×1, pois $A_{2\times 2} \cdot X_{2\times 1} = B_{2\times 1}$. A matriz X é do tipo $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot X = B$, ou seja:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 31 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + b \\ 5a + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, temos o sistema:

$$\begin{cases} 3a + b = 19 \\ 5a + 2b = 31 \end{cases} \cdot(-2) \Rightarrow \begin{cases} -6a - 2b = -38 \\ 5a + 2b = 31 \end{cases}$$

$$-a = -7 \Rightarrow a = 7$$

$$3a + b = 19 \Rightarrow 3 \cdot 7 + b = 19 \Rightarrow b = -2$$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

2ª maneira

Multiplicamos por A^{-1} pela esquerda os membros da equação $A \cdot X = B$.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Utilizando as propriedades operatórias das matrizes, segue que:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_2} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underbrace{I_2 \cdot X}_{X} = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Devemos calcular o produto da inversa da matriz A por B. Calculando inicialmente A^{-1}, obtemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Logo:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 19 + (-1) \cdot 31 \\ (-5) \cdot 19 + 3 \cdot 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Note que foi possível utilizar a 2ª maneira porque a matriz A é invertível.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R4 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, resolva o sistema $\begin{cases} -X + 2Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$.

Resolução

Temos:

$$\begin{cases} -X + 2Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$$
$$Y = A + B$$

Logo:

$$Y = A + B \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Isolando X e substituindo Y na igualdade $X - Y = B$, segue que:

$$X - Y = B \Rightarrow X - Y + Y = B + Y \Rightarrow X = B + Y \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema é $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Substitua as matrizes X e Y no sistema e verifique a igualdade.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

4 Determine a matriz X em cada item.

a) $X - \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 23 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 27 & -3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -8 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

5 Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, determine X tal que a igualdade $A \cdot X + B = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$ seja verdadeira.

Resposta no final do livro.

6 Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \\ Y - X = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$ $X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 2 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \\ X - 2Y = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \end{cases}$ $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -2 \end{bmatrix}$

7 Sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $M \cdot X = N$.

Resposta no final do livro.

8 Em certa escola, a nota final dos alunos é obtida por meio de dois trabalhos e uma prova, sendo que cada avaliação tem um peso diferente. Observe ao lado as notas de alguns alunos.

As informações apresentadas na tabela são fictícias.

Fonte: Secretaria da escola.

Notas de Língua Portuguesa – 1º bimestre de 2020

Aluno \ Avaliação	Trabalho 1	Trabalho 2	Prova	Nota final
André	8,0	9,0	9,0	8,8
Bianca	8,0	8,5	9,5	8,9
Carolina	9,5	10,0	9,0	9,4

a) Determine, em porcentagem, o peso de cada avaliação. trabalho 1: peso 20%; trabalho 2: peso 30%; prova: peso 50%

b) Qual a nota final de um aluno que obteve as notas 7, 9 e 8 no trabalho 1, no trabalho 2 e na prova, respectivamente? 8,1

c) Sabe-se que a nota final de um aluno foi 9. Quais são as possíveis notas obtidas por ele em cada avaliação? Algumas possíveis respostas: no trabalho 1: 8, no trabalho 2: 8 e na prova: 10; no trabalho 1: 9, no trabalho 2: 9 e na prova: 9.
Nomeie os pesos dos trabalhos 1 e 2 e da prova de x, y e z, respectivamente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Determinante de uma matriz

Para toda matriz quadrada de números reais é possível associar um número real denominado **determinante**. O estudo dos determinantes está associado, por exemplo, ao estudo de sistemas lineares, assunto do tema 7 deste livro. Indicamos o determinante de uma matriz A por $\det A$.

Determinante de uma matriz de ordem 1

É importante observar que não existe determinante de matrizes que não sejam quadradas.

Em uma matriz quadrada de ordem 1, ou seja, que possui um único elemento, o determinante é, por definição, o próprio elemento. Se $A = [a_{11}]$, então $\det A = a_{11}$.

Exemplo

Dadas as matrizes $A = [7]$ e $B = [-13]$, temos:

- $\det A = 7$
- $\det B = -13$

Determinante de uma matriz de ordem 2

Podemos indicar o determinante de uma matriz A com os elementos dessa matriz limitados por duas barras.

Em uma matriz quadrada de ordem 2, o determinante é dado pela diferença do produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplo

Sendo a matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = -4 \cdot 8 - 7 \cdot (-6) = -32 + 42 = 10$$

Determinante de uma matriz de ordem 3

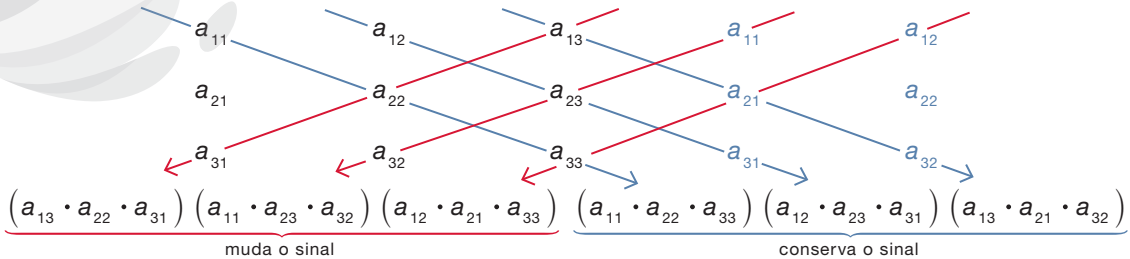
Em uma matriz quadrada de ordem 3 dada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o determinante é obtido por meio dos seguintes cálculos:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Podemos obter os seis produtos acima por meio de um dispositivo denominado **regra de Sarrus**.

Nessa regra, à direita da matriz, repetimos suas duas primeiras colunas. Em seguida, realizamos as multiplicações conforme indicado, conservando os sinais dos produtos obtidos no sentido da diagonal principal e mudando os sinais dos produtos obtidos no sentido da diagonal secundária.



Ao adicionarmos esses resultados, obtemos o determinante da matriz:

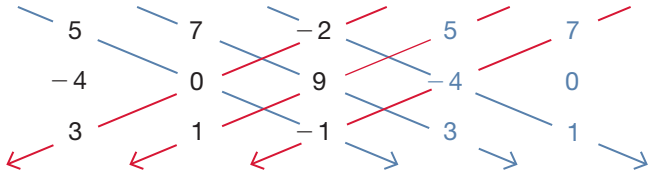
$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -4 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é:



$-2 \cdot 0 \cdot 3 \quad 5 \cdot 9 \cdot 1 \quad 7 \cdot (-4) \cdot (-1) \quad 5 \cdot 0 \cdot (-1) \quad 7 \cdot 9 \cdot 3 \quad (-2) \cdot (-4) \cdot 1$

$$\det A = 5 \cdot 0 \cdot (-1) + 7 \cdot 9 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot 9 \cdot 1 - 7 \cdot (-4) \cdot (-1) =$$
$$= 0 + 189 + 8 + 0 - 45 - 28 = 124$$

Exercícios e problemas resolvidos

R5 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine o valor de x, de modo que $\det A = \det B$.

Resolução

Calculando os determinantes das matrizes A e B, temos:

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot x = 3 - 2x$
- $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 2 - 3 + x - 0 = x - 3$

Segue que:

$$\det A = \det B \Rightarrow 3 - 2x = x - 3 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$$

Note que $A \neq B$, porém, para $x = 2$, $\det A = \det B$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

9 Calcule o determinante das matrizes a seguir.

a) $A = \begin{bmatrix} -12 \end{bmatrix}$ -12

b) $B = \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 36

c) $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 10 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ -30

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 144

10 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ -1 & y & x \end{bmatrix}$, calcule os valores de x e y para que o traço de A seja 6 e $\det A = -61$.

$x = 2$; $y = 9$

11 Mostre que são válidas as seguintes propriedades para uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a) $\det A = \det A^t$.

b) $\det (k \cdot A) = k^2 \cdot \det A$, com k um número real.

De modo geral, as propriedades $\det A = \det A^t$ e $\det (k \cdot A) = k^n \cdot \det A$ são válidas para uma matriz quadrada qualquer de ordem n.

12 Sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det A$ 125

b) $2 \cdot \det A$ 250

c) $\det (2A)$ $1\,000$

d) $\det (2A^t)$ $1\,000$

13 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6x & x \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$, em que x é um número real, quais valores de x tornam verdadeira a igualdade $\det A = 3 \cdot \det B$?

$x = 0$ ou $x = \frac{9}{4}$

14 Sabendo que $M = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\det (M \cdot N) = -360$, determine o valor de a.

5

15 Determine os valores de x na igualdade a seguir.

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2x & 6 & -1 \\ 2(x-1) & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 0 & 3 & 5 \\ 2x & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. a) $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad - bc}_{\det A}$

11. b) $k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow \det (k \cdot A) = \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = ka \cdot kd - kb \cdot kc = k^2 \cdot a \cdot d - k^2 \cdot b \cdot c = k^2 \cdot \underbrace{(ad - bc)}_{\det A}$

10. Lembre aos alunos que o traço de uma matriz quadrada corresponde à soma dos elementos da diagonal principal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Teorema de Jacobi e Teorema de Binet

No estudo dos determinantes podemos destacar duas propriedades importantes: Teorema de Jacobi e Teorema de Binet.

- Teorema de Jacobi

As propriedades apresentadas nesta página podem ser demonstradas, porém não apresentaremos essas demonstrações neste livro.

Ao adicionarmos a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada A, outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz B tal que $\det A = \det B$.

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 28 + 0 + 6 + 0 + 28 = 14$$

Se, por exemplo, adicionarmos à 2ª linha da matriz A a 3ª linha multiplicada por 2, obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calculando o determinante de B, temos:

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 56 + 0 + 6 + 0 + 0 = 14$$

Note que a matriz B foi obtida a partir da matriz A de acordo com o Teorema de Jacobi e, portanto, $\det A = \det B = 14$.

Note que na matriz B:

- $b_{21} = a_{21} + 2 \cdot a_{31} = 2 + 2 \cdot (-1) = 0$
- $b_{22} = a_{22} + 2 \cdot a_{32} = 6 + 2 \cdot 0 = 6$
- $b_{23} = a_{23} + 2 \cdot a_{33} = -4 + 2 \cdot (-2) = -8$

- Teorema de Binet

Dadas as matrizes quadradas A e B de mesma ordem, temos $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

16 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, escreva uma matriz B diferente de A, tal que $\det A = \det B$.
Resposta no final do livro.

17 Sendo $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, resolva.

a) Calcule $\det A$. 1

b) Obtenha a matriz I_3 a partir da matriz A.
Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

Solicite aos alunos que comparem os procedimentos utilizados na resolução do item **b** desta tarefa com aqueles utilizados por um colega.

18 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det B$ -4

b) $\det A^t$ 51

c) $\det(A \cdot C)$ 918

d) $\det(C \cdot B)$ -72

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Acessando tecnologias

Matriz inversa e determinante de uma matriz

Vimos anteriormente que as planilhas eletrônicas disponibilizam algumas ferramentas para facilitar os cálculos com matrizes. Nesta seção, com o auxílio dessas ferramentas, determinaremos, quando existir, a inversa de uma matriz quadrada e seu determinante. Para isso, vamos utilizar o Calc, que é uma das planilhas eletrônicas disponíveis.

A Na planilha, digite a matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, conforme apresentado.

	A	B	C
1	Matriz E		
2	1	−1	2
3	4	−6	8
4	−1	4	0

Veja mais informações sobre a planilha eletrônica Calc no Suplemento para o professor.

B Determine a matriz inversa de E. Para isso, selecione o intervalo **E2:G4**, digite $= \text{MATRIZ.INVERSO}(\text{A2 : C4})$ e pressione **Ctrl**+**Shift**+**Enter**. Desse modo, será apresentada a matriz inversa de E no intervalo **E2:G4**.

Informe aos alunos que, geralmente, as planilhas eletrônicas calculam a matriz inversa com uma precisão de, aproximadamente, 16 dígitos.

Note que o intervalo **E2:G4** tem a mesma quantidade de linhas e colunas que o intervalo **A2:C4**. De maneira geral, se a matriz possuísse n linhas e n colunas, o intervalo selecionado também teria de ter n linhas e n colunas.

C Calcule o determinante da matriz E. Para isso, digite, na célula **A7**, $= \text{MATRIZ.DETERM}(\text{A2 : C4})$ e pressione a tecla **Enter**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Matriz E				Matriz inversa de E		
2	1	−1	2		8	−2	−1
3	4	−6	8		2	−0,5	0
4	−1	4	0		−2,5	0,75	0,5
5							
6	det E						
7	−4						

Se a matriz não possuir inversa, a planilha eletrônica vai exibir uma mensagem de erro.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Calcule o determinante da matriz inversa de E.

2 Entre as matrizes apresentadas a seguir, quais possuem inversa?

$$R = \begin{bmatrix} 25 & -4 \\ -12 & 2 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 26 & 14 & -5 \\ 0 & -16 & -4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 1 & -6 \\ 5 & 26 & 10 & 8 \\ -9 & -1 & 0 & -1 \\ 12 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Calcule $\det(A \cdot B)$, sabendo que $A = \begin{bmatrix} 30 & 25 & -2 \\ -16 & 20 & 28 \\ -18 & -4 & 10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -15 & 29 & -21 \\ 19 & 7 & 3 \\ -20 & 11 & -13 \end{bmatrix}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

MODERNA

5 Uma aplicação de matrizes

Muito salgado?

Afinal, o sal de cozinha faz mal para os seres humanos? Como muitos outros alimentos, a resposta é: em excesso, sim!

O cloreto de sódio, popularmente conhecido como sal de cozinha, realça os sabores das preparações como poucos ingredientes e é um excelente conservante de alimentos. No entanto, porções exageradas provocam a retenção de líquidos pelas células, exigindo do coração mais esforço em bombear o sangue para o corpo. Seu uso em excesso também pode ser relacionado ao aumento da pressão arterial.

A Organização Mundial da Saúde (OMS) colocou o sal entre as substâncias que precisam ser reduzidas na alimentação e limitou o consumo a menos de 5 g diárias. Tais valores são preocupantes, pois estudos mostraram que a ingestão média do brasileiro é de 12 g de sal por dia, e o hipertenso chega a consumir diariamente 17,4 g. Para se ter ideia, 1 g de sal contém 400 mg de sódio.

BNCC
•CE3CNT

FOTOMONTAGEM DE JULIANA DEL ANHOL AZEVEDO.
FOTOS: 1.AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 2.VLDKONT/SHUTTERSTOCK; 3.HORT IMAGES/SHUTTERSTOCK; 4.MARA ZE/SHUTTERSTOCK; 5.NATALIIA K/SHUTTERSTOCK; 6.ANDRE POLVANI/SHUTTERSTOCK; 7.CRISTI180884/SHUTTERSTOCK; 8.PROSTOCK-STUDIO/SHUTTERSTOCK; 9.IFONG/SHUTTERSTOCK; 10.YUMMY BUUM/SHUTTERSTOCK; 11.SCISETTI ALFIO/SHUTTERSTOCK; 12.STUDIO BY THE SEA/SHUTTERSTOCK; 13.VALENTINA RAZUMOVA/SHUTTERSTOCK; 14.MARA ZE/SHUTTERSTOCK; 15.COLOA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 16.MARA ZE/SHUTTERSTOCK; 17.MARIAN WEYO/SHUTTERSTOCK; 18.ARTISHOK/SHUTTERSTOCK; 19.ERMOLAEV ALEXANDER/SHUTTERSTOCK; 20.BAIBAZ/SHUTTERSTOCK; 21.NYS/SHUTTERSTOCK; 22.PAPERLY STUDIO/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O recomendado é que a ingestão de alimentos ricos em sódio, como enlatados, conservas, frios, temperos e salgadinhos, seja evitada, assim como deixar o saleiro na mesa, para impedir o acréscimo de sal extra. Contudo, a ingestão de alimentos ricos em potássio é permitida. O potássio exerce efeito anti-hipertensivo e protege o corpo humano contra danos cardiovasculares. É recomendável que a ingestão diária de potássio seja de no mínimo 3 510 mg, que podem ser obtidos por meio de uma alimentação rica em vegetais frescos e frutas.

Procure substituir o sal por ervas e hortaliças, pois elas ajudam o paladar a se adaptar à comida menos salgada. O alho e a cebola contêm substâncias protetoras das artérias; o limão acrescenta vitamina C na refeição e atenua a vontade de comer sal; as ervas (alecrim, cebolinha, coentro, manjericão, pimenta etc.) contribuem para o bom funcionamento de todo o organismo.

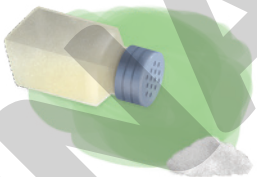
Veja a quantidade aproximada de sódio em alguns alimentos (porção de 100 g)

Evite consumir

hambúrguer: 1 252 mg
batata *chips*: 607 mg
macarrão instantâneo: 1 516 mg
maionese industrializada: 787 mg
azeitona verde: 1 347 mg
tablete de caldo de carne: 22 180 mg
presunto: 1 077 mg
salame: 1 574 mg
requeijão: 558 mg

Consuma com moderação

gelatina: 235 mg
biscoito recheado de chocolate: 239 mg
milho em lata: 301 mg
paçoca: 167 mg
atum em conserva: 362 mg
leite integral em pó: 323 mg
molho de tomate industrializado: 418 mg
mistura para bolo: 463 mg
amêndoa torrada e salgada: 279 mg



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Aproveite para consumir

iogurte natural: 52 mg
salmão grelhado: 85 mg*
arroz: 1 mg*
abóbora: 1 mg*
batata-doce: 3 mg*
alho: 5 mg
aveia: 7 mg
cenoura: 8 mg*
mamão: 2 mg
*alimento não temperado

Fonte de pesquisa: <https://www.who.int/elena/titles/sodium_cvd_adults/es/#>. Acesso: em 19 maio 2020. <http://www.blog.saude.gov.br/index.php/34989-aprenda-a-substituir-o-sal-por-temperos-frescos-e-saudaveis>. Acesso em: 19 maio 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Observe as quantidades de sódio e potássio contidas em 1 g de pão francês e em 1 g de leite.

	Pão francês	Leite
Sódio	6,48 mg	0,51 mg
Potássio	1,42 mg	1,40 mg

Por meio de uma equação matricial, determine a quantidade aproximada de pão francês e de leite que uma pessoa deve ingerir para obter 780 mg de sódio e 500 mg de potássio.
pão francês: 100 g; leite: 255 g.

B Considerando a quantidade recomendada de sódio que uma pessoa pode ingerir diariamente, calcule a quantidade dessa substância que ainda pode ser consumida por uma pessoa que já ingeriu 780 mg de sódio. 1 220 mg.

Ser consciente

C Entre as opções de alimentos apresentados acima, escolha a combinação de café da manhã, almoço, lanche e jantar de sua preferência. Em seguida, adicione as quantidades de sódio correspondentes e compare ao recomendado pela OMS. Por fim, converse com os colegas sobre a importância do controle da quantidade de sódio no consumo de alimentos. Resposta pessoal.

Assim como na situação da questão **A**, diversas situações, em áreas como Nutrição, Economia e Engenharia, que envolvem diferentes quantidades de itens variados, podem ser modeladas e resolvidas usando conceitos de matrizes e de equação matricial.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6 O ponto e a reta

Esconde-esconde com astros

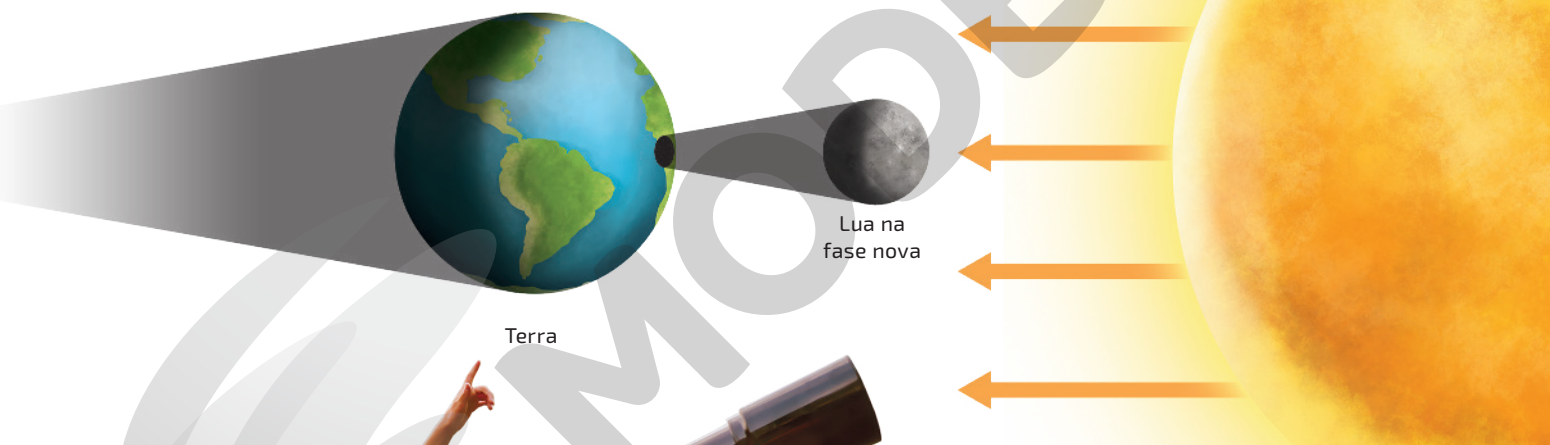
Você já observou um eclipse lunar? E um eclipse solar? Chamamos eclipse o obscurecimento (parcial ou total) de um astro pela interposição de outro, ou seja, um astro fica posicionado entre um observador e outro astro, projetando uma sombra. Os eclipses mais conhecidos são o **lunar** e o **solar**.

O alinhamento entre Sol, Lua e Terra acontece durante duas fases da Lua: na fase nova, quando ela fica posicionada entre o Sol e a Terra; e na fase cheia, quando a Terra fica entre o Sol e a Lua. No entanto, o plano de rotação da Lua ao redor da Terra tem uma inclinação em relação ao plano de rotação da Terra ao redor do Sol, o que impossibilita um eclipse lunar e um eclipse solar a cada mudança de fase da Lua. Na maioria dos anos, ocorrem apenas dois eclipses solares e dois eclipses lunares.

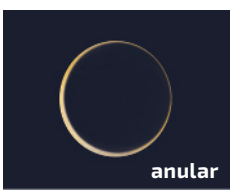
BNCC
- EM13MAT315
- EM13MAT405
- CE3CNT

Eclipse solar

No eclipse solar, temos o alinhamento Sol-Lua-Terra, ou seja, a Lua projeta sua sombra na Terra. Diferentemente dos eclipses lunares, o eclipse solar só pode ser observado em estreitas faixas na Terra, pois a Lua não é grande o suficiente para impedir que todos os raios solares cheguem à superfície terrestre.



Os eclipses solares podem ser classificados em eclipse **parcial**, **anular** e **total**. Quando a curvatura da Terra faz com que o eclipse seja observado como anular em alguns locais e total em outros, ele é denominado **híbrido**.

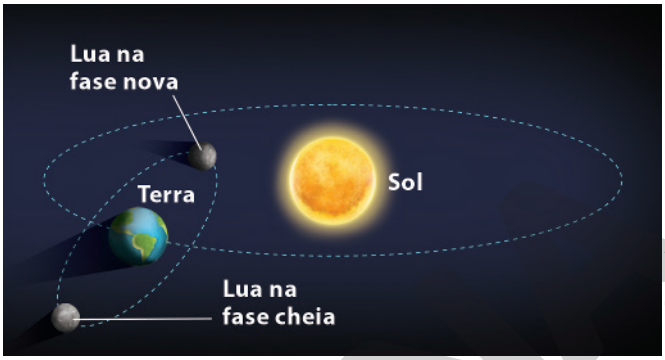


ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

MODERNA

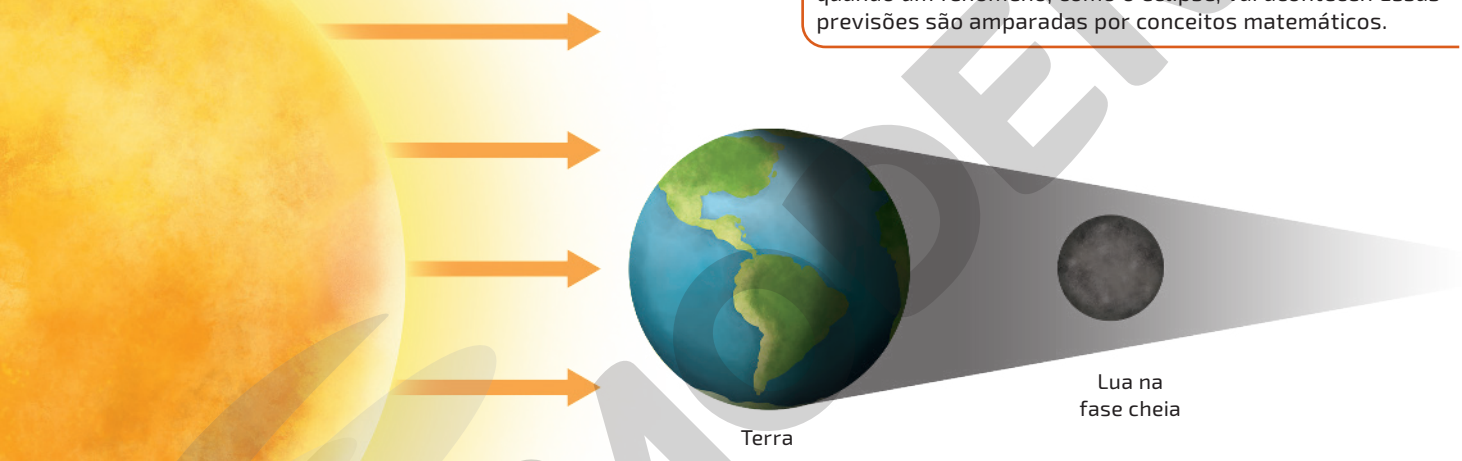
FOTOMONTAGEM DE MARIANA COAN. FOTOS: 1.VH-STUDIO/SHUTTERSTOCK; 2.HERRIEYNAHA/SHUTTERSTOCK; 3.ARQUIVO PESSOAL DA ARTISTA; 4.TRIFF/SHUTTERSTOCK; 5.19 STUDIO/SHUTTERSTOCK

Esses planos de rotação possuem dois pontos em comum, e o eclipse acontece quando a Lua está próxima a um deles, pois assim os três astros encontram-se alinhados em um mesmo plano, fazendo um projetar sombra no outro. Uma curiosidade: a sombra circular que a Terra projeta na Lua durante um eclipse lunar foi, para Pitágoras e Aristóteles, a prova de que a Terra era esférica.



ILUSTRAÇÕES: HELOISA PINTARELLI

Agências espaciais, como a NASA (do inglês, National Aeronautics and Space Administration – Administração Nacional do Espaço e da Aeronáutica), monitoram as atividades no espaço e conseguem prever com antecedência quando um fenômeno, como o eclipse, vai acontecer. Essas previsões são amparadas por conceitos matemáticos.



Eclipse lunar

No eclipse lunar, a Terra posiciona-se entre o Sol e a Lua, gerando uma sombra sobre a Lua. Devido às dimensões da Terra em relação à Lua, esse eclipse, que pode ser total ou parcial, é visualizado em toda a parte da Terra em que é noite.

Fonte de pesquisa: MOURÃO, Ronaldo Rogério de Freitas. *Dicionário enciclopédico de astronomia e astronáutica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995. p. 247-250.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Durante quais fases da Lua acontecem os eclipses? Durante a fase nova ocorre o eclipse solar e durante a fase cheia ocorre o eclipse lunar.

B Porque não ocorrem eclipses a cada mudança de fase da Lua?

C Pesquise as datas dos próximos eclipses que poderão ser vistos do Brasil. A resposta depende do ano vigente.

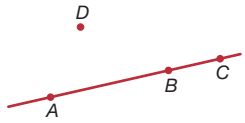
B) Porque o plano de rotação da Lua ao redor da Terra tem uma inclinação em relação ao plano de rotação da Terra ao redor do Sol.

Se esboçarmos um esquema simplificado representando o Sol, a Terra e a Lua com um ponto cada, os eclipses ocorrem quando os três pontos encontram-se alinhados em um mesmo plano, isto é, quando for possível construir uma reta passando por esses três pontos, assunto que será estudado nas próximas páginas. Também estudaremos a área de um triângulo e a equação geral da reta e sua relação com a condição de alinhamento de três pontos.

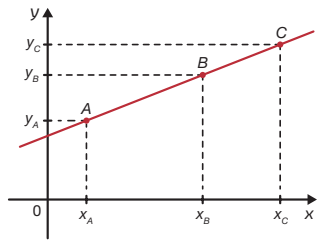
MODERNA

Condição de alinhamento de três pontos

Quando três ou mais pontos estão alinhados, ou seja, quando é possível construir uma reta passando por eles, dizemos que esses pontos são **colineares**. Na figura abaixo, os pontos *A*, *B* e *C* são colineares. Já os pontos *A*, *B* e *D*, por exemplo, não são colineares.



A partir das coordenadas de três pontos, é possível verificar se eles são colineares. Para isso, considere os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, representados no plano cartesiano.



De acordo com o Teorema de Tales, se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

Se os pontos *A*, *B* e *C* são colineares, temos, pelo Teorema de Tales:

- $\frac{AB}{AC} = \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A}$
- $\frac{AB}{AC} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$

Assim, segue que:

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow (x_B - x_A)(y_C - y_A) = (x_C - x_A)(y_B - y_A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A = x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B = 0$$

O 1º membro dessa igualdade corresponde ao determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

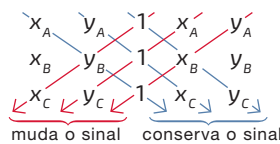
Portanto, se três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são colineares, então:

abscissas dos pontos

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ordenadas dos pontos

Lembre-se de que:



$$D = -x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A + x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C =$$
$$= x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B$$

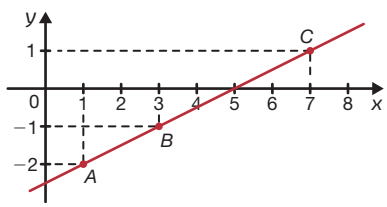
Se realizarmos o processo inverso, verificaremos que, se $D = 0$, então $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares.

Exemplo

Vamos verificar se os pontos $A(1, -2)$, $B(3, -1)$ e $C(7, 1)$ estão alinhados.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 1 + 6 - 1 - 14 + 3 = 0$$

Portanto, os pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

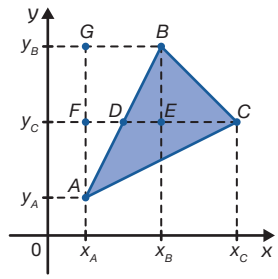
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área da região determinada por um triângulo

Dadas as coordenadas de três pontos não colineares, é possível calcular a área da região determinada pelo triângulo cujos vértices são esses pontos.

Para verificar como realizar esse cálculo, considere a região determinada pelo triângulo *ABC* ao lado, em que $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.



A área dessa região é igual à soma das áreas das regiões determinadas pelos triângulos *ACD* e *BCD*.

Inicialmente, determinaremos a abscissa x_D do ponto *D* em função das coordenadas de *A*, *B* e *C*. Como os triângulos *ABG* e *ADF* são semelhantes, temos:

$$\frac{BG}{DF} = \frac{AG}{AF} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_D - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow x_D = x_A + \frac{(x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A}$$

Agora, determinamos *CD*:

$$CD = |x_C - x_D| = \left| x_C - x_A - \frac{(x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right|$$

Por fim, calculamos a área da região determinada pelo triângulo *ABC*.

$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AF + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot \overbrace{(AF + FG)}^{AG} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AG =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right| \cdot |y_B - y_A| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| - (x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C) \right| =$$

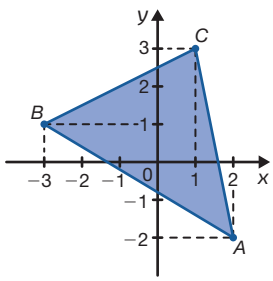
$$= \frac{1}{2} \cdot |x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C|$$

Note que $x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C$ corresponde a $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Portanto, a área da região determinada pelo triângulo *ABC* é dada por $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$.

Exemplo

Para calcular a área da região determinada pelo triângulo *ABC*, em que $A(2, -2)$, $B(-3, 1)$ e $C(1, 3)$, calculamos inicialmente a determinante *D*.



$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 - 6 + 2 - 9 - 2 = -22$$

Segue que:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-22| = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11$$

Portanto, a área do triângulo *ABC* é 11 u.a. (unidades de área).

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Condições no VisualG

Em diversas situações cotidianas, formulamos proposições do tipo: **se** Luiz obtiver uma nota superior a 7,5, **então** ele será aprovado na disciplina; **se** eu receber meu salário hoje, **então** irei ao cinema, **senão** lerei um livro. Essa estrutura, além de estar presente em nosso cotidiano, é útil e, muitas vezes, necessária em programação. Ela indica para o sistema se o programa deve ou não executar certa sequência de instruções, dependendo se a condição atribuída é verdadeira ou falsa. Para isso, no VisualG, podemos utilizar as seguintes instruções.

```
se(condição)entao
sequência de instruções
fimse
```

```
se(condição)entao
sequência de instruções 1
senao
sequência de instruções 2
fimse
```

Note que, para indicar o fim da sequência de instruções com condição deve-se adicionar a instrução **fimse**.

A instrução **se()entao** tem por finalidade tomar uma decisão e executar determinada sequência de instruções, caso a condição, descrita entre os parênteses, seja verdadeira. Se a condição for falsa, a sequência de instruções deve ser desprezada. Assim como a instrução **se()entao**, a instrução **se()entao...senao** tem por finalidade tomar decisão e realizar um desvio no processamento. Se a condição descrita entre os parênteses for verdadeira, a sequência de instruções 1 será executada e a sequência de instruções 2, desprezada. Caso a condição seja falsa, a sequência de instruções 1 será desprezada e a sequência de instruções 2, executada.

Para as condições, são utilizados os seguintes operadores relacionais para testar a relação entre dois ou mais termos.

Comando	=	>	>=	<	<=	<>
Significado	igual	maior do que	maior ou igual	menor do que	menor ou igual	diferente

Além disso, é possível utilizar dois ou mais operadores relacionais em uma mesma condição, por meio de operadores lógicos como **e**, **ou** e **nao**.

Exemplo de um programa em VisualG – Condição de alinhamento de três pontos

Utilizando os conceitos de programação estudados, vamos resolver o problema a seguir.

Escreva um programa que determine se os pontos A, B e C estão alinhados, dadas as coordenadas de cada um deles.

Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1. Leia a abscissa x_A do ponto A.
2. Leia a ordenada y_A do ponto A.
3. Leia a abscissa x_B do ponto B.
4. Leia a ordenada y_B do ponto B.
5. Leia a abscissa x_C do ponto C.
6. Leia a ordenada y_C do ponto C.
7. Calcule

$$D = x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B.$$

8. Se $D = 0$, então os pontos estão alinhados. Caso contrário, os pontos não estão alinhados.

Fim

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Programa em *VisualG*

```
1  Algoritmo "alinhamento"
2  Var
3  x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c, det: real
4  Inicio
5  escreva("Digite a abscissa do ponto A: ")
6  leia(x_a)
7  escreva("Digite a ordenada do ponto A: ")
8  leia(y_a)
9  escreva("Digite a abscissa do ponto B: ")
10 leia(x_b)
11 escreva("Digite a ordenada do ponto B: ")
12 leia(y_b)
13 escreva("Digite a abscissa do ponto C: ")
14 leia(x_c)
15 escreva("Digite a ordenada do ponto C: ")
16 leia(y_c)
17 det <- x_b*y_c-x_b*y_a-x_a*y_c
   -x_c*y_b+x_c*y_a+x_a*y_b
18 se(det = 0)entao
19 escreva("A, B e C estão alinhados.")
20 senao
21 escreva("A, B e C não estão alinhados.")
22 fimse
23 Fimalgoritmo
```

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Qual condição deve ser satisfeita para que a instrução da linha **21** seja executada?

2 Escreva um programa em VisualG que determine se os pontos A, B e C estão alinhados, dadas as coordenadas de cada um deles, e, caso não estejam, calcule a área da região determinada pelo triângulo de vértices A, B e C.

No VisualG, para se obter o módulo de um número, pode-se utilizar a função **abs()**.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Sejam $P(a, 2)$, $Q(4, -3)$ e $R(b, -6)$ pontos de uma mesma reta. Determine a e b, sabendo que $a + b = 10$.

Resolução

Os pontos P, Q e R são colineares, logo:

$$D = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ b & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3b + 6a - 8 - 3a + 2b - 24 = 0 \Rightarrow 3a + 5b = 32$$

Como $a + b = 10$, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ 3a + 5b = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 10 \quad \cdot(-3) \\ 3a + 5b = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - 3b = -30 \\ 3a + 5b = 32 \end{cases}$$

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$a + b = 10 \Rightarrow a + 1 = 10 \Rightarrow a = 9$$

Portanto, $a = 9$ e $b = 1$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 Determine os valores de m de modo que os pontos $A(m^2 - 3, -1)$, $B(1, 2)$ e $C(5, 6)$ sejam vértices de um triângulo.

Resolução

Para que A, B e C sejam vértices de um triângulo, eles não podem ser colineares, ou seja:

$$\begin{vmatrix} m^2 - 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Assim:

$$-10 - 6m^2 + 18 + 1 + 2m^2 - 6 - 5 + 6 \neq 0 \Rightarrow -4m^2 + 4 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 1$$

Portanto, para m real, tal que $m \neq 1$ ou $m \neq -1$, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Verifique em quais itens os pontos estão alinhados. alternativas a, c e d

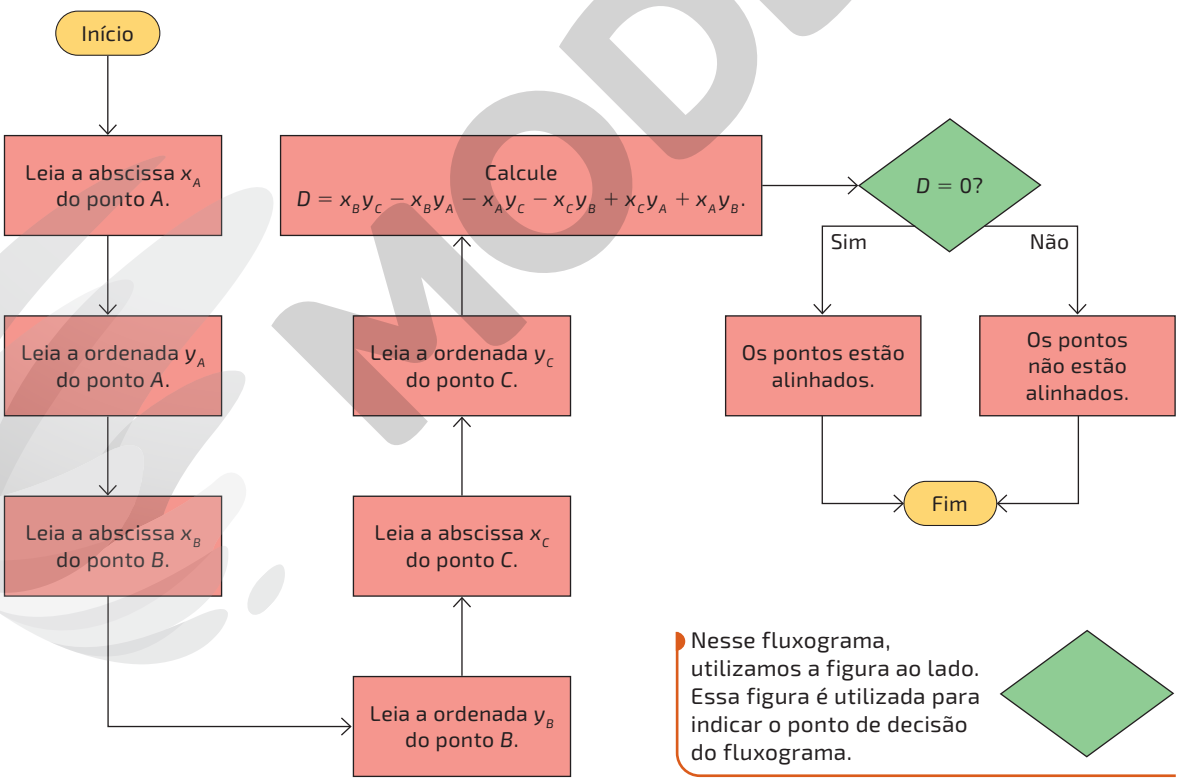
a) $A(1, 5)$, $B(-3, -7)$ e $C(-1, -1)$

b) $D(5, 9)$, $E(4, 7)$ e $F(3, 6)$

c) $P(4, 6)$, $Q(-2, 3)$ e $R(-8, 0)$

d) $S(5, 2)$, $T(12, 9)$ e $U(7, 4)$

2 O professor de Matemática solicitou aos alunos que organizassem o algoritmo apresentado na seção **Acessando tecnologias** em um fluxograma. Veja o resultado de um dos alunos.



Nesse fluxograma, utilizamos a figura ao lado. Essa figura é utilizada para indicar o ponto de decisão do fluxograma.

Organize em um fluxograma o algoritmo que determina se os pontos A, B e C estão alinhados, dadas as coordenadas de cada um deles. Caso não estejam, calcule a área da região determinada pelo triângulo de vértices A, B e C. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

Lembre os alunos de que na questão 2 do **Agora é com você!** da seção **Acessando tecnologias** da página 67, eles escreveram um programa que determina se os pontos A, B e C estão alinhados, dadas as coordenadas de cada um deles, e, caso não estejam, calcula a área da região determinada pelo triângulo de vértices A, B e C.

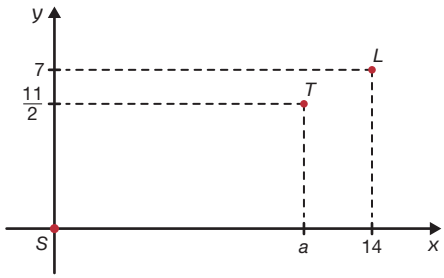
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

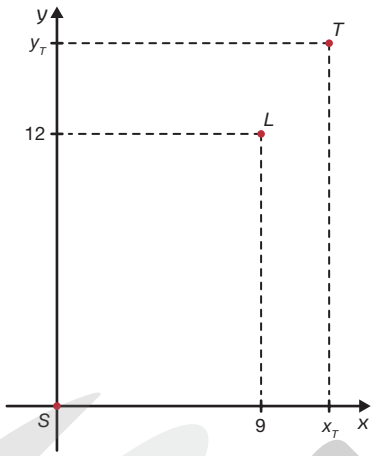
3 Sabendo que os pontos $A(4, -1)$, $B(1, 7)$ e $C(7, r)$ são colineares, determine o valor de r. $r = -9$

No contexto

4 Utilizando a posição do Sol (S) como origem, foram construídos dois planos cartesianos, **I** e **II**, que representam as posições da Lua (L) e da Terra (T) em dois momentos.



plano cartesiano **I**



plano cartesiano **II**

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

De acordo com o que foi estudado anteriormente sobre eclipses solares e lunares, resolva as questões.

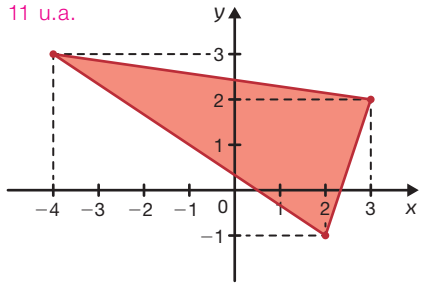
a) Considerando que o plano cartesiano **I** representa a posição dos astros durante um eclipse lunar, calcule o valor da abscissa a da posição da Terra. $a = 11$

b) Sabendo que, no plano cartesiano **II**, a distância entre o Sol e a Terra é 20 unidades de comprimento, determine as coordenadas da posição da Terra para que os astros estejam alinhados. Nesse caso, há a ocorrência de um eclipse? Se sim, de qual tipo? $T(12, 16)$; sim; eclipse solar

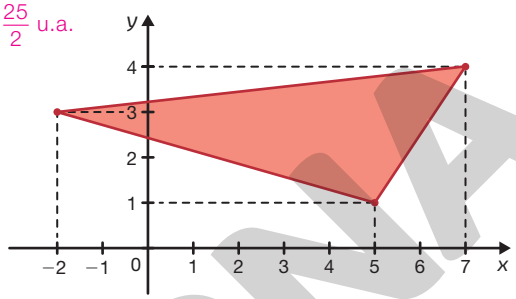
5 Dados os pontos $A(-3, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 3)$ e $D(2, 1)$, determine as coordenadas do ponto $E(x, y)$ de modo que não seja possível construir os triângulos ABE e CDE. $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$

6 Em cada item, calcule a área das regiões triangulares.

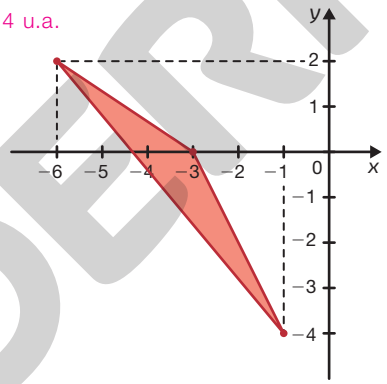
a) 11 u.a.



b) $\frac{25}{2}$ u.a.



c) 4 u.a.

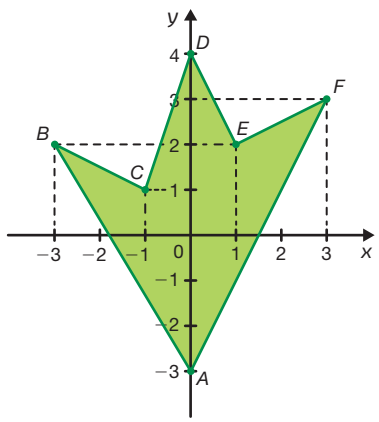


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

7 Calcule a área da região determinada pelo quadrilátero $ABCD$ cujas coordenadas dos vértices são $A(3, 5)$, $B(-1, 2)$, $C(5, 3)$ e $D(7, 4)$. 10 u.a.

8 Sejam $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (3, 4)$ e $M_3 = (1, -1)$ os pontos médios dos lados de um triângulo. Calcule a área da região determinada por esse triângulo. 12 u.a.

9 Calcule a área da figura. 15 u.a.



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Equação da reta

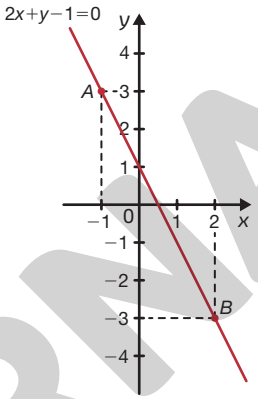
No estudo da Geometria analítica, é possível associar a cada reta uma equação, denominada **equação da reta**. Neste tópico, estudaremos a equação geral da reta.

Equação geral da reta

Podemos escrever para qualquer reta uma equação na forma $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são os coeficientes, sendo a e b não nulos simultaneamente. Chamamos essa equação de **equação geral da reta**.

Uma maneira de determinar a equação geral da reta a partir de dois de seus pontos é por meio da verificação do alinhamento de três pontos.

Considere, por exemplo, três pontos colineares: $P(x, y)$, $A(-1, 3)$ e $B(2, -3)$. Como esses pontos estão alinhados, temos:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 3 - 6 + 3x + y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(2x + y - 1) = 0 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, podemos determinar a equação geral da reta que passa por A e B por meio de $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Exercícios e problemas resolvidos

R3 Dada a reta de equação $y = -2x + 5$, determine as coordenadas do ponto:

a) em que a reta intersecta o eixo y.
b) em que a reta intersecta o eixo x.
c) de abscissa 6.
d) de ordenada 3.

Note que, nesse problema, a equação geral da reta foi reescrita na forma $y = ax + c$.

Resolução

a) A reta intersecta o eixo y no ponto em que $x = 0$, ou seja:

$$y = -2 \cdot 0 + 5 \Rightarrow y = 5$$

Logo, as coordenadas do ponto são $(0, 5)$.

b) A reta intersecta o eixo x no ponto em que $y = 0$, ou seja:

$$0 = -2x + 5 \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto são $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

c) Substituindo $x = 6$ na equação da reta, temos:

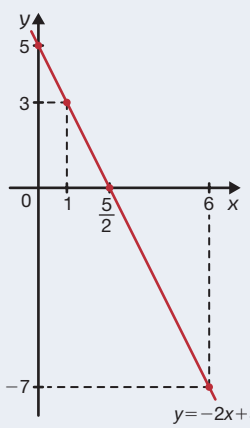
$$y = -2 \cdot 6 + 5 \Rightarrow y = -7$$

Logo, as coordenadas do ponto são $(6, -7)$.

d) Substituindo $y = 3$ na equação da reta, temos:

$$3 = -2x + 5 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

Logo, as coordenadas do ponto são $(1, 3)$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R4 Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(3, -2)$ e $B(5, 4)$.

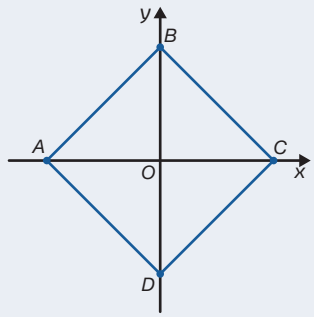
Resolução

Alinhando os pontos A e B a um ponto genérico $P(x, y)$ pelo determinante a seguir:

$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 5y + 12 + 10 - 4x - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-3x + y + 11) = 0 \Rightarrow \boxed{-3x + y + 11 = 0}$$

R5 Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado $3\sqrt{2}$ e centro em $O(0, 0)$. Escreva a equação geral das retas que contêm cada lado do quadrado.



RONALDO INÁCIO

Resolução

Como $ABCD$ é um quadrado com centro em O, a distância de cada vértice à origem é a mesma, ou seja, $OA = OB = OC = OD$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AOB, temos:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (\underbrace{OB}_{OA})^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{2}\right)^2 = (OA)^2 + (OA)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 = 2(OA)^2 \Rightarrow (OA)^2 = 9 \Rightarrow OA = 3$$

Assim, a distância de cada vértice à origem O é 3. Logo, as coordenadas dos vértices desse quadrado são $A(-3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(3, 0)$ e $D(0, -3)$.

Segue que:

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{AB}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -0 + 3y - 3x + 0 + 0 - 9 = 0 \Rightarrow 3y - 3x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{-x + y - 3 = 0}$$

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{BC}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9 - 0 - 0 + 3x + 3y + 0 = 0 \Rightarrow 3y + 3x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - 3 = 0}$$

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{CD}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -0 - 3y + 3x + 0 + 0 - 9 = 0 \Rightarrow 3y + 3x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x - y - 3 = 0}$$

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{AD}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -0 + 3y + 3x + 0 + 0 + 9 = 0 \Rightarrow 3y + 3x + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + 3 = 0}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

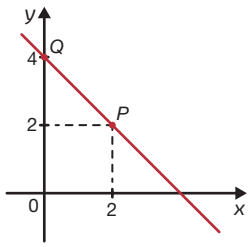
MODERNA

Exercícios e problemas

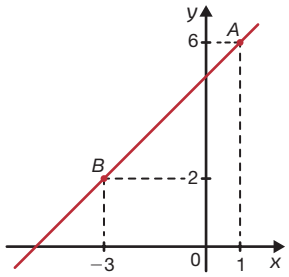
Anote as respostas no caderno.

10 Escreva a equação geral da reta apresentada em cada item.

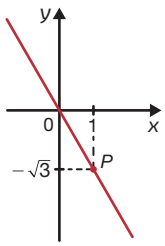
a) $x + y - 4 = 0$



b) $y - x - 5 = 0$



c) $\sqrt{3}x + y = 0$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

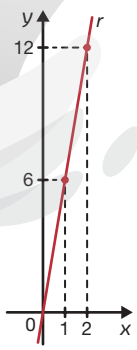
11 Qual é a equação geral da reta que:

a) passa pelo ponto $A(3, 2)$ e é paralela ao eixo das abscissas? $y - 2 = 0$

b) passa pelo ponto $C(12, 4)$ e é paralela ao eixo das ordenadas? $x - 12 = 0$

c) passa pelos pontos $D(0, 6)$ e $E(-3, -9)$? $5x - y + 6 = 0$

12 Considere a reta r indicada a seguir.



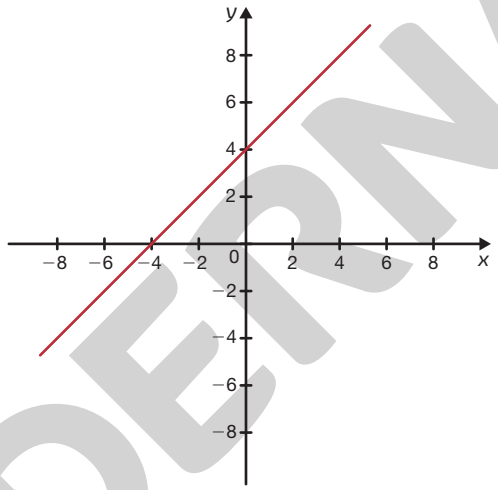
RONALDO INÁCIO

a) Escreva a equação da reta r. $y = 6x$

b) Dados os pontos $A(3, y_1)$ e $B(-2, y_2)$ pertencentes a r, determine os valores de y_1 e y_2. $y_1 = 18$; $y_2 = -12$

13 Para qual valor de p o ponto $M(p, 2p + 1)$ pertence à reta que passa pelos pontos $N(1, 6)$ e $Q\left(0, \frac{22}{5}\right)$? $p = \frac{17}{2}$

14 (Enem, 2011) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



RONALDO INÁCIO

A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto: alternativa b

a) $(-5, 0)$

b) $(-3, 1)$

c) $(-2, 1)$

d) $(0, 4)$

e) $(2, 6)$

15 Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos: Respostas no final do livro.

a) $A(5, 2)$ e $B(-1, 3)$.

b) $C(0, -4)$ e $D(1, 6)$.

c) $E(-12, -7)$ e $F(-5, 2)$.

d) $G(8, -3)$ e $H(-4, -6)$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

16 Se os pontos $A(5, -39)$ e $B(-3, 9)$ pertencem à reta r, então a equação de r é: alternativa **d**

a) $y = 9x + 6$

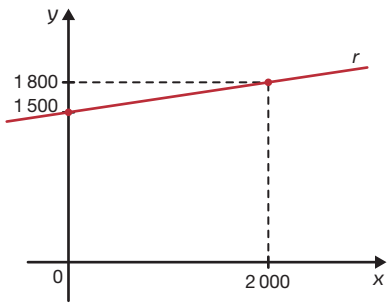
b) $y = -9x - 6$

c) $y = 6x - 9$

d) $y = -6x - 9$

e) $y = -2x - 3$

17 Observe a reta r em um plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO

a) Escreva a equação da reta r. $y = 0{,}15x + 1\,500$

b) Dados os pontos $A(1\,500, y_1)$ e $B(2\,800, y_2)$ pertencentes a r, determine os valores de y_1 e y_2. $y_1 = 1\,725$; $y_2 = 1\,920$

c) Determine o valor de x para $y = 2\,500$. $\frac{20\,000}{3}$

18 Represente cada reta indicada em um plano cartesiano. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

a) $y = 3x - 4$

b) $y = 2 - x$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$

19 Considere as retas r, s e t distintas. Determine as equações gerais de cada uma delas sabendo que o ponto:

- $L(-16, 8)$ pertence às retas r e s;
- $K(1, -7)$ pertence às retas r e t;
- $M(19, 2)$ pertence às retas s e t.

19. r: $15x + 17y + 104 = 0$; s: $-6x - 35y + 184 = 0$; t: $-x + 2y + 15 = 0$

20 Desafio

Escreva a equação geral das retas que passam pelos vértices opostos de um quadrado localizado acima do eixo das abscissas e cujos pontos $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$ são vértices consecutivos. $2x - y = 0$; $x + 2y - 5 = 0$

21 Considerando a reta r, cuja equação geral é $2y - 6x + 3 = 0$, determine:

a) o ponto em que a reta intersecta o eixo x. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

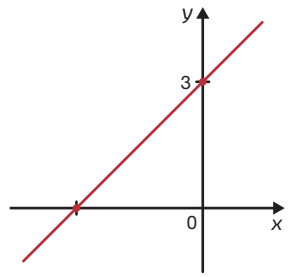
b) o ponto em que a reta intersecta o eixo y. $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

c) três pontos que pertencem a r. Resposta no final do livro.

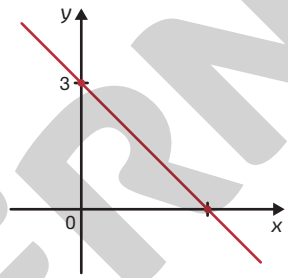
22 Considere a reta de equação $kx - 5y + 4 = 0$. Sabendo que o ponto $(7, 5)$ pertence a essa reta, determine o valor de k. $k = 3$

23 Qual alternativa apresenta a reta de equação $x + y - 3 = 0$? alternativa **b**

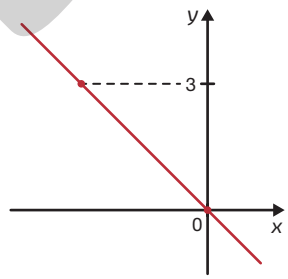
a)



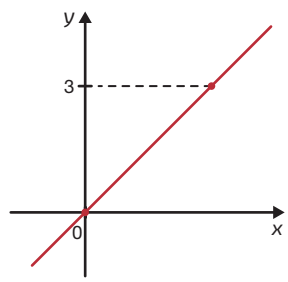
b)



c)



d)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

24 Sabendo que os pontos $A(2, 24)$ e $B(5, 60)$ pertencem a reta r, determine:

a) a equação geral da reta r. $-12x + y = 0$

b) se o ponto $C(9, 110)$ pertence a r. não

c) o valor de y para $x = 8$. 96

d) o valor de x para $y = 156$. 13

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7 Sistemas lineares

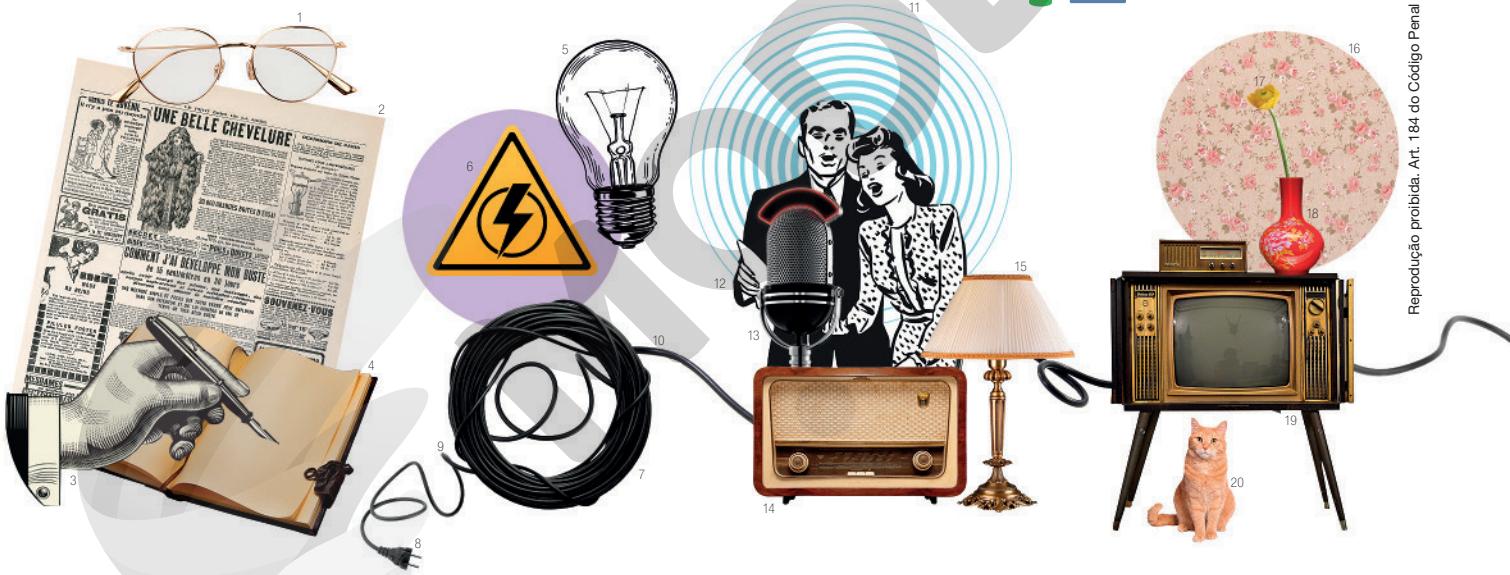
Um mundo conectado

Você usa aplicativos de mensagens? Se usa, costuma ficar ansioso(a) quando alguém recebe e visualiza suas mensagens, mas não responde de imediato? As ferramentas de comunicação e informação permitem que as pessoas, mesmo que se encontrem em lugares diferentes e distantes, continuem comunicando-se de modo quase instantâneo. O processo de evolução dessas ferramentas passou por várias fases e invenções que acabaram se tornando de grande importância para grande parte da sociedade.

Há algumas décadas, uma das principais maneiras de comunicação a distância eram as cartas. Escritas à mão, podiam demorar meses para chegar ao destinatário. O rei de Portugal, por exemplo, só ficou sabendo do descobrimento do Brasil, em 1500, após receber a carta de Pero Vaz de Caminha, dezenas de dias depois. Nela, não havia fotos de paisagens naturais, áudios narrativos, vídeos de animais ou memes sobre a interação dos portugueses com os índios, como aconteceria se fosse hoje.

Veja algumas informações sobre outras maneiras de comunicação e informação.

BNCC
- EM13MAT301
- CE2CNT



FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.DZHA33/SHUTTERSTOCK; 2.LILIGRAPHIE/SHUTTERSTOCK; 3.MAISEI RAMAN/SHUTTERSTOCK; 4.IRA_EVVA/SHUTTERSTOCK; 5.NAVALNYI/SHUTTERSTOCK; 6.OMERIS/SHUTTERSTOCK; 7.ANTON STARIKOV/SHUTTERSTOCK; 8.ELNUR/SHUTTERSTOCK; 9.ELNUR/SHUTTERSTOCK; 10.PARICHAT PHOTO/SHUTTERSTOCK; 11.ANNA_KOVA/SHUTTERSTOCK; 12.RETRO CLIP ART/SHUTTERSTOCK; 13.TANHAUZER/SHUTTERSTOCK; 14.GALLO FOTO/SHUTTERSTOCK; 15.STUDIO SMART/SHUTTERSTOCK; 16.ANDERS PHOTO/SHUTTERSTOCK; 17.UNITED PHOTO STUDIO/SHUTTERSTOCK; 18.PRAPHAB LOUILARPPRASERT/SHUTTERSTOCK; 19.VIVANVU/SHUTTERSTOCK; 20.HAPPY AUTHOR/SHUTTERSTOCK; 21.FABRIKA SIMF/SHUTTERSTOCK; 22.IVECTOR/SHUTTERSTOCK; 23.EVERETT COLLECTION/SHUTTERSTOCK; 24.ANTEROVIUM/SHUTTERSTOCK; 25.MARTIAL RED/SHUTTERSTOCK; 26.SAVCHENKO LIUDMYLA/SHUTTERSTOCK; 27.ARTIST DESIGN29/SHUTTERSTOCK; 28.RASHAD ASHUR/SHUTTERSTOCK; 29.TELE52/SHUTTERSTOCK; 30.CINCILA/SHUTTERSTOCK; 31.MONSTAR STUDIO/SHUTTERSTOCK; 32.YELLOW CAT/SHUTTERSTOCK

Jornal

O jornal era um complemento às cartas, trazendo informações sobre temas locais, nacionais ou globais. A invenção da máquina de impressão de Johannes Gutenberg, no século XV, ajudou a popularizar os jornais.

Eletricidade

Entre o final do século XIX e o início do século XX, com os avanços tecnológicos no campo da eletricidade, surgiram o rádio, o telefone e a televisão. Esses três inventos dominaram o século XX, reduzindo distâncias entre pessoas.

Rádio

O rádio dominou os meios de comunicação no começo do século XX, entre as décadas de 1920 e 1950.

Televisão

A televisão popularizou-se após a Segunda Guerra Mundial, tornando-se mais popular do que o rádio a partir da metade do século.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Contudo, temos de ficar atentos, pois, de maneira geral, os planos de internet móvel são oferecidos de acordo com a quantidade de dados disponíveis no período, em gigabaites (GB), tanto no serviço pré-pago quanto no pós-pago. Veja o que é possível fazer com aproximadamente 1 GB de dados em certa velocidade de transferência.

Enviar mais de 340 000 e-mails ou mensagens de texto em aplicativo de mensagens instantâneas.

Assistir via *streaming* 2 horas de vídeo em resolução 480p.

Ouvir rádio pela internet por 17 horas e 4 minutos.

Fazer o *download* ou ouvir via *streaming* 205 músicas.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Quais meios de comunicação você utiliza? Resposta pessoal.

B Cite alguns benefícios que os meios de comunicação mais recentes proporcionam.

C Certa operadora de telefonia cobra R$ 10,00 por gigabaite de dados consumidos. Se uma pessoa escutar 90 músicas, que valor será cobrado pelos dados consumidos? R$ 4,39

B) Algumas possíveis respostas: acesso mais rápido às informações; maior diversidade no tipo de informação comunicada (vídeo, texto, áudio etc.), maior mobilidade na comunicação.

Ainda em relação à oferta de planos de internet móvel, alguns planos são oferecidos por valores fixos acrescidos de uma taxa para cada gigabaite que exceder a franquia. Com base nessas informações, é possível calcular, assim como na questão **C**, o valor pago por meio da resolução de uma equação de primeiro grau com uma incógnita, assunto abordado nas páginas seguintes, ou ainda, comparar os valores de dois planos diferentes, de acordo com o consumo de dados, por meio da resolução de um sistema com duas equações e duas incógnitas, assunto que também será estudado nas páginas seguintes.

Meme: imagens ou vídeos relacionados ao humor e que se espalham na internet.

5G: quinta geração das tecnologias relacionadas à internet móvel.

***Download*:** recebimento de dados de um sistema remoto para um dispositivo local.

***Streaming*:** sistema de distribuição digital em que o usuário acessa o conteúdo disponível a qualquer momento sem a necessidade de armazenar os arquivos em seu dispositivo.

480p: tipo de resolução de exibição de vídeo comum que possui 480 linhas de *pixels*.

Franquia: é uma quantia fixa, em gigabaites, que representa um limite para o consumo de dados.

Telefone com fio

Os primeiros telefones com fio precisavam de uma telefonista para completar a ligação.

Internet

A internet foi inventada em 1969 para fins militares, mas ganhou popularidade apenas na década de 1990, saindo dos corredores das universidades e sendo disponibilizada para o mundo, possibilitando uma revolução cultural. Atualmente, é possível estudar, comunicar-se, informar-se, comprar, trabalhar, entre outros, sem sair da frente de um computador ou, mais recentemente, de um *smartphone*.

Telefone móvel

Mais recentemente, a acessibilidade à internet móvel nos *smartphones* tornou a comunicação entre as pessoas ainda mais ágil. A implementação das redes 5G de telefonia pode levar a uma nova velocidade de transmissão de dados igual à 20 vezes a anterior.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

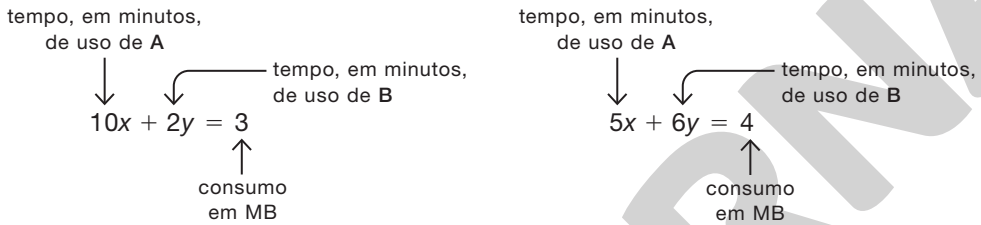
MODERNA

Introdução aos sistemas lineares

Nas páginas anteriores, foram apresentadas algumas informações sobre o consumo de dados quando utilizamos internet móvel. Com base nessas informações, considere o seguinte problema:

Ao realizar uma pesquisa, Paulo constatou que, utilizando certo aplicativo **A** por 10 min e um aplicativo **B** por 2 min, consome 3 MB de seu plano de dados. Porém, quando utiliza **A** por 5 min e **B** por 6 min, consome 4 MB. Quantos megabaites por minuto consome cada um desses aplicativos?

Para resolver esse problema, podemos escrever um sistema de equações do 1º grau ou **sistema linear**, assunto que você provavelmente já estudou. Se chamarmos de x o consumo de dados por minuto do aplicativo **A** e de y o do aplicativo **B**, temos as seguintes equações:



Utilizando essas equações, podemos escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 10x + 2y = 3 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$$

Neste tema, estudaremos sistemas lineares, assim como métodos para resolvê-los.

O sistema linear apresentado, por exemplo, tem como solução $x = 0{,}2$ e $y = 0{,}5$, ou seja, os aplicativos **A** e **B** consomem, por minuto, 0,2 MB e 0,5 MB, respectivamente.

Nesse sistema, diga aos alunos que, para resolvê-lo, é preciso determinar os valores de x e y que satisfazem simultaneamente as duas equações. No decorrer do estudo deste tema, retome o problema apresentado para que os alunos possam resolvê-lo. Se achar oportuno, resolva-o na lousa nesse momento junto com os alunos.

Equação linear

Toda equação do 1º grau com uma ou mais incógnitas é denominada **equação linear**.

De maneira geral:

Chamamos equação linear aquelas que podem ser escritas na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, em que:

- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais denominados **coeficientes**;
- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as **incógnitas**;
- b é uma constante real denominada **termo independente**.

Alguns exemplos de equações lineares são:

- $3x - 2y = 8$

  Nesse caso, 3 e -2 são os coeficientes; x e y são as incógnitas; e 8 é o termo independente.

- $-x + \frac{2}{5}y + 4z - 13w = -7$

  Nesse caso, -1, $\frac{2}{5}$, 4 e -13 são os coeficientes; x, y, z e w são as incógnitas; e -7 é o termo independente.

As equações lineares em que o termo independente é igual a zero são denominadas **equações lineares homogêneas**. A equação linear $-7x + 4y = 0$, por exemplo, é homogênea.

Para uma equação ser linear, cada termo, com exceção do independente (que não possui incógnita), deve ser composto por apenas uma incógnita, cujo expoente é 1. Alguns exemplos de equações **não lineares**:

- $8x + 3xy = -1$
- $5x^2 - 2y + z = 6$
- $3\sqrt{x} = 12$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A **solução** de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ é toda ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que, ao substituir ordenadamente x_1, x_2, x_3, ..., x_n na equação, torna a igualdade verdadeira.

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = b$$

Exemplos

- $-2x + 5y = -1$

  Nessa equação, $(3, 1)$ é solução, pois: $-2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -1$. O par $(8, 3)$ também é solução, pois: $-2 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = -1$. Porém, $(1, 3)$ não é solução, pois: $\underbrace{-2 \cdot 1 + 5 \cdot 3}_{13} \neq -1$.

- $3x - 2y + 5z = 4$

  Nessa equação, a terna $(-1, 4, 3)$ é solução, pois: $3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 4$. Porém, a terna $(2, -4, 1)$ não é solução, pois: $\underbrace{3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 1}_{19} \neq 4$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Determine o valor de α, de modo que a terna $(\alpha, -2\alpha, 1 - \alpha)$ seja solução da equação linear $5x + y - 2z = 13$.

Resolução

Substituindo ordenadamente os valores de x, y e z na equação, temos:

$5\alpha + (-2\alpha) - 2 \cdot (1 - \alpha) = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\alpha - 2\alpha - 2 + 2\alpha = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\alpha = 15 \Rightarrow \alpha = 3$

Substitua $\alpha = 3$ na terna dada e verifique que ela é solução da equação linear.

Portanto, $\alpha = 3$.

R2 Verifique se os pares ordenados $(-4, 1)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$ e $(8, 5)$ são solução da equação $y - \frac{x}{2} = 1$. Em seguida, represente geometricamente essa solução.

Resolução

O par ordenado:

- $(-4, 1)$ não é solução, pois:

  $1 - \frac{(-4)}{2} = 1 \Rightarrow 3 \neq 1$

- $(-2, 0)$ é solução, pois:

  $0 - \frac{(-2)}{2} = 1 \Rightarrow 1 = 1$

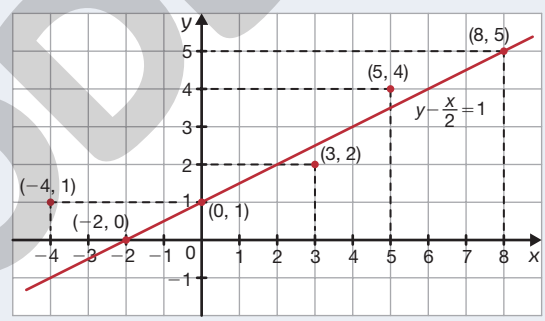
- $(0, 1)$ é solução, pois:

  $1 - \frac{0}{2} = 1 \Rightarrow 1 = 1$

- $(8, 5)$ é solução, pois:

  $5 - \frac{8}{2} = 1 \Rightarrow 1 = 1$

Geometricamente, a equação $y - \frac{x}{2} = 1$ é uma reta que passa pelos pontos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ e $(8, 5)$. Assim, temos:



RONALDO INÁCIO

No caso de uma equação linear de três incógnitas, cada terna (x, y, z) representa um ponto no espaço.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Escreva os coeficientes e o termo independente de cada equação linear. Respostas no final do livro.

a) $4x - 12y = 17$ b) $x - \sqrt{3}y = 0$ c) $-r - 5t = 2$

2 Classifique cada equação em **linear** ou **não linear**.

a) $x + 3y = 15$ linear

b) $r^3 - s^2 = 0$ não linear

c) $15r - 2^2t = 0$ linear

d) $xy = 1$ não linear

3 Qual equação tem como solução a terna $(1, 2, -5)$?

a) $4x - y + z = 0$ b) $2x - 3y - z = 1$

alternativa b

4 Para cada equação, escreva duas soluções reais.

a) $7x - 12y = 4$ b) $3x + y - z = 0$

5 Para qual valor de α a terna $(4\alpha, \alpha, -3\alpha)$ é solução da equação linear $5x - 15y + z = -4$? $\alpha = -2$

6 Represente geometricamente cada equação linear e escreva, para cada uma delas, duas soluções reais. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

a) $3x + y = 6$ b) $x + 5y = 0$ c) $-2x + y = 4$

4. a) Uma possível resposta: $(4, 2)$ e $\left(6, \frac{19}{6}\right)$.

4. b) Uma possível resposta: $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 4)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sistema linear

Denomina-se **sistema linear** $m \times n$ o conjunto S formado por m equações e n incógnitas, que pode ser indicado da seguinte maneira:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

No sistema linear S, por exemplo:

- a_{11} é o coeficiente da incógnita x_1 na 1ª equação
- a_{23} é o coeficiente da incógnita x_3 na 2ª equação
- a_{m2} é o coeficiente da incógnita x_2 na m-ésima equação

Exemplos

- $\begin{cases} -x - y = -5 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$

  Sistema linear 2×2 nas incógnitas x e y.

- $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 4x + y = 3 \\ -x + y = -2 \end{cases}$

  Sistema linear 3×2 nas incógnitas x e y.

- $\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 7 \end{cases}$

  Sistema linear 2×3 nas incógnitas x, y e z.

Solução de um sistema linear

A solução de um sistema linear $m \times n$ é toda ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que é solução de cada uma das m equações desse sistema.

Exemplos

- $\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ -2x + y = -11 \end{cases}$ (I)

  O par $(9, 7)$ é solução do sistema, pois $\begin{cases} 4 \cdot 9 - 5 \cdot 7 = 1 \\ -2 \cdot 9 + 7 = -11 \end{cases}$.

  O par $(4, 3)$ não é solução do sistema, pois $\begin{cases} 4 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 1 \\ -2 \cdot 4 + 3 \neq -11 \end{cases}$.

- $\begin{cases} 2x + 3y + 6z = 15 \\ -x + 4y + z = 24 \\ 3x - y + 7z = -7 \end{cases}$ (II)

  A terna $(-3, 5, 1)$ é solução do sistema, pois $\begin{cases} 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 15 \\ -(-3) + 4 \cdot 5 + 1 = 24 \\ 3 \cdot (-3) - 5 + 7 \cdot 1 = -7 \end{cases}$.

Em relação ao sistema linear **I**, note que $(4, 3)$ não é solução, pois satisfaz apenas uma das equações. Já o par $(9, 7)$ é solução, pois satisfaz as duas equações simultaneamente.

Sistema linear homogêneo

Se necessário, lembre os alunos que as equações lineares homogêneas são aquelas em que o termo independente é igual a zero.

Denomina-se sistema linear homogêneo aquele em que todas as equações lineares são homogêneas.

Em um sistema linear homogêneo, a ênupla $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ é uma das soluções, denominada solução trivial ou nula. Além da trivial, esse tipo de sistema pode ter outras soluções, chamadas não triviais.

Um exemplo de sistema linear homogêneo é $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 2y - 6z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$. Além da solução trivial $(0, 0, 0)$, esse sistema admite soluções não triviais como, por exemplo, $(-4, 3, -1)$.

Realize os cálculos necessários e verifique que a terna $(-4, 3, -1)$ é solução do sistema ao lado.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R3 Represente geometricamente a solução do sistema linear $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$.

Resolução

Vamos resolver o sistema linear utilizando o método da adição.

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \cdot (3) \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

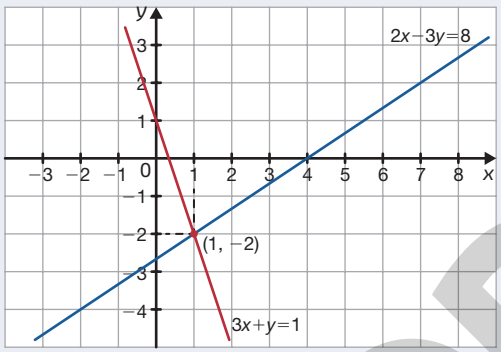
$$11x = 11 \Rightarrow x = 1$$

$$3x + y = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 + y = 1 \Rightarrow y = -2$$

Provavelmente você já estudou como é a resolução de sistemas lineares 2×2 por meio dos métodos da **adição** e da **substituição**.

Portanto, a solução do sistema é $(1, -2)$.

Para representar geometricamente a solução desse sistema, traçamos, inicialmente, as retas que representam cada uma de suas equações. Em seguida, marcamos o ponto de interseção entre elas, que é a representação geométrica da solução do sistema.



Retas concorrentes indicam que existe um único ponto que corresponde à solução do sistema.

RONALDO INÁCIO

R4 Para tornar o campeonato brasileiro de futebol mais competitivo, a Confederação Brasileira de Futebol (CBF) adotou em 2003 o sistema de pontuação por pontos corridos, no qual são atribuídos 3 pontos para o time vencedor ou 1 ponto para cada time, no caso de empate, sendo campeão o time que, ao final do campeonato, acumular o maior número de pontos.

Considere um time que apenas ganhou ou empatou os 19 primeiros jogos que disputou no campeonato. Quantos jogos esse time empatou, sabendo que ele acumulou 37 pontos?

Resolução

Sendo x e y o número de jogos vencidos e empatados, respectivamente, temos o sistema $\begin{cases} x + y = 19 \\ 3x + y = 37 \end{cases}$. A solução do sistema corresponde ao ponto onde as retas r: $x + y = 19$ e s: $3x + y = 37$ se cruzam. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 19 \cdot (-1) \\ 3x + y = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = -19 \\ 3x + y = 37 \end{cases}$$

$$2x = 18 \Rightarrow x = 9$$

$$x + y = 19 \Rightarrow 9 + y = 19 \Rightarrow y = 10$$

Portanto, o time venceu 9 partidas e empatou 10.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

(UFJF-MG, 2018) Um funcionário da UFJF gastou 106 reais ao comprar 20 lápis, 4 borrachas, 10 canetas e uma mochila para seu filho. Ao chegar em casa, ele percebeu que o valor da mochila é igual a 10 vezes o valor de cada lápis mais 8 vezes o valor de cada borracha e mais 6 vezes o valor de cada caneta. Sabendo-se que o gasto com os lápis é igual ao dobro do gasto com as canetas mais o dobro do gasto com as borrachas, e que o gasto com as borrachas é igual ao gasto com as canetas, determine o preço de cada produto.

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

O preço de cada um dos produtos comprados pelo funcionário da UFJF.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

O valor total gasto na compra, as quantidades de cada produto comprado e as relações entre os valores e as quantidades dos produtos.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, escrevemos equações com as quantidades e os valores de cada produto comprado e com o valor total gasto. Na sequência, utilizando o método da adição ou o da substituição, reescrevemos as equações em termos de uma única incógnita. Dessa maneira, determinaremos o valor de cada um dos produtos comprados pelo funcionário da UFJF.

√ Escolhendo as notações.

Denotaremos os preços de cada borracha, lápis, caneta e mochila, respectivamente, por meio das letras B, L, C e M, fazendo referência à inicial do nome de cada produto comprado. Assim, temos:

- L: preço do lápis;
- B: preço da borracha;
- C: preço da caneta;
- M: preço da mochila.

C Executando o plano

Passo 1

Nosso primeiro passo é escrever equações com base nas informações fornecidas no enunciado e utilizando as notações que escolhemos. Dessa forma, podemos formular as seguintes equações:

- Equação **1**: $20L + 4B + 10C + M = 106$
- Equação **2**: $M = 10L + 8B + 6C$
- Equação **3**: $20L = 2 \cdot 10C + 2 \cdot 4B \Rightarrow 20L = 20C + 8B$
- Equação **4**: $4B = 10C$

Passo 2

Combinaremos, inicialmente, as equações **3** e **4**, uma vez que ambas são equações menores se comparadas à equação **1** e possuem dois termos em comum, B e C. Além disso, a equação **3** pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$20L = 20C + 8B \Rightarrow 20L = 20C + 4B + 4B$$

Substituindo a equação **4** na equação **3**, temos:

$$20L = 20C + \underbrace{4B}_{10C} + \underbrace{4B}_{10C} \Rightarrow 20L = 20C + 10C + 10C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20L = 40C \Rightarrow L = \frac{40C}{20} = 2C$$

Desse modo, obtemos a equação **5**: $L = 2C$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 3

Reescrevendo a equação **2**, temos:

$$M = 10L + 8B + 6C \Rightarrow M = 10L + 4B + 4B + 6C$$

Em seguida, substituindo as equações **4** e **5** na equação **2**, temos:

$$M = 10\underbrace{L}_{2C} + \underbrace{4B}_{10C} + \underbrace{4B}_{10C} + 6C \Rightarrow M = 10 \cdot 2C + 10C + 10C + 6C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = 20C + 10C + 10C + 6C = 46C$$

Dessa forma, obtemos a equação **6**: $M = 46C$.

Passo 4

Substituindo as equações **4**, **5** e **6** na equação **1**, temos:

$$20\underbrace{L}_{2C} + \underbrace{4B}_{10C} + 10C + \underbrace{M}_{46C} = 106 \Rightarrow 20 \cdot 2C + 10C + 10C + 46C = 106 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 40C + 10C + 10C + 46C = 106 \Rightarrow 106C = 106 \Rightarrow C = \frac{106}{106} = 1$$

Por fim, substituindo $C = 1$ nas equações **4**, **5** e **6**, obtemos:

Equação **4**:
$4B = 10C$
$4B = 10 \cdot 1$
$B = \frac{10}{4}$
$B = 2{,}5$

Equação **5**:
$L = 2C$
$L = 2 \cdot 1$
$L = 2$

Equação **6**:
$M = 46C$
$M = 46 \cdot 1$
$M = 46$

Assim, cada borracha custa R$ 2,50, cada lápis custa R$ 2,00, cada caneta custa R$ 1,00 e a mochila custa R$ 46,00.

D Verificando a solução obtida

Substituindo os valores de cada produto na equação **1**, obtemos:

$$20L + 4B + 10C + M = 106$$
$$20 \cdot 2 + 4 \cdot 2{,}5 + 10 \cdot 1 + 46 = 106$$
$$40 + 10 + 10 + 46 = 106$$
$$106 = 106$$

Portanto, verificamos que a equação **1** foi satisfeita. O mesmo acontece se substituirmos os valores de cada produto nas equações **2**, **3**, **4**, **5** e **6**.

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de algumas tarefas semelhantes propostas na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Agora é você quem resolve! Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema**

Segundo os cálculos de Paula, em certa loja, 2 blusas, 2 calças, 3 pares de sapatos e uma bolsa, custam, ao todo, R$ 380,00. Além disso, ela percebeu que o preço de 2 bolsas equivale ao preço de 3 blusas, uma calça e um par de sapatos. Ela também percebeu que o valor de um par de sapatos equivale aos valores de uma blusa e uma calça e, ainda, que o valor de uma calça equivale ao dobro do valor de uma blusa. De acordo com essas informações, determine o preço de cada produto.

2 **É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta desse problema?**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

7 Em cada item, verifique quais das ternas são soluções do sistema e classifique-o em homogêneo ou não homogêneo.

a) $\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ II e III; homogêneo

I) $(-1, 5, 0)$
II) $(0, 0, 0)$
III) $(1, -2, -3)$

b) $\begin{cases} x + y + 6z = 0 \\ x - y - z = 5 \\ 2x - 6y - z = 5 \end{cases}$ II; não homogêneo

I) $(0, 0, 0)$
II) $(5, 1, -1)$
III) $(2, 2, -1)$

8 Resolva cada sistema linear e represente geometricamente sua solução. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 7y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = 5 \\ -3x - y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases}$

9 (Enem, 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas? alternativa d

a) R$ 14,00
b) R$ 17,00
c) R$ 22,00
d) R$ 32,00
e) R$ 57,00

10 João, Luciano e Ana se reuniram para organizar um churrasco com os colegas de trabalho e decidiram comprar dois tipos de carne. João pagou R$ 204,00 por 1 kg da carne do tipo A e 5 kg da carne do tipo B; Luciano pagou R$ 190,90 por 4 kg da carne do tipo A e 1 kg da carne do tipo B; e Ana comprou 5 kg de carne do tipo A e não comprou carne do tipo B. Sabendo que as carnes de um mesmo tipo têm o mesmo preço por quilograma, qual foi o valor que Ana pagou pela carne? R$ 197,50

No contexto

11. a) $\begin{cases} x + y = 2\,000 \\ x = y + 688 \end{cases}$

11 Nas páginas anteriores, vimos que a tecnologia está cada vez mais avançada, possibilitando um mundo conectado. Uma das características do momento tecnológico que vivemos é o crescente uso das redes sociais para fins como entretenimento, comunicação, compartilhamento de mensagens e reação a postagens.

Em uma rede social na internet, uma postagem teve 688 curtidas a mais do que a quantidade de compartilhamentos, e a soma da quantidade de curtidas com a de compartilhamentos foi 2 000.

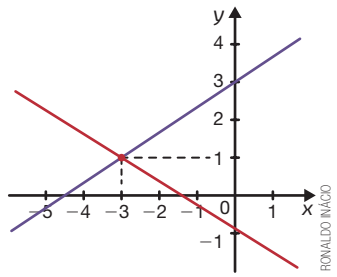
a) Chamando de x e y a quantidade de curtidas e a de compartilhamentos, respectivamente, escreva um sistema de equações que represente a situação.

b) Determine a quantidade de compartilhamentos e de curtidas que a postagem teve. 1 344 curtidas; 656 compartilhamentos

12 (Uece, 2015) José quer comprar chocolates e pipocas com os R$ 11,00 de sua mesada. Tem dinheiro certo para comprar dois chocolates e três pacotes de pipocas, mas faltam-lhe dois reais para comprar três chocolates e dois pacotes de pipocas. Nestas condições, podemos afirmar corretamente que um pacote de pipocas custa alternativa c

a) R$ 2,00.
b) R$ 1,60.
c) R$ 1,40.
d) R$ 1,20.

13 Observe as retas no plano cartesiano.



Qual dos sistemas abaixo apresenta a solução geométrica dada? alternativa e

a) $\begin{cases} -3x + 4y = 13 \\ x - 5y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4 \cdot (x + y) + 5 = -3 \\ 7 \cdot (x - y) + 14 = 28 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} = 0 \\ x + 4 = y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ -5x + 2y = 17 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x + 8y = -7 \\ -2x + 3y = 9 \end{cases}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

14 Um método que tem sido utilizado por diversas áreas do conhecimento na resolução de problemas que envolvem a otimização de custos, atendendo a alguns requisitos, é denominado programação linear. Em Nutrição, por exemplo, esse método tem sido empregado na elaboração de dietas que possuam custo mínimo, seguindo determinadas restrições.

Para exemplificar, considere que um indivíduo deva seguir uma dieta alimentar na qual seu lanche da tarde esteja restrito a leite de soja e uma salada de frutas com cereais. Abaixo estão representadas as quantidades desses nutrientes nos referidos alimentos e sua necessidade para a refeição em questão.

	Leite de soja (copo de 200 mℓ)	Salada de frutas (porção de 400 g)	Requisito nutricional mínimo
Cálcio	240 mg	180 mg	270 mg
Vitamina B2	0,3 mg	1,1 mg	0,775 mg

Sabemos que o custo de um copo de leite de soja (200 mℓ) é R$ 2,30, e o da porção de salada de frutas (400 g) é R$ 3,80. Denotando por x a quantidade de leite de soja (em copos) e por y a quantidade de salada de frutas (em porções), a função que representa o custo total dessa refeição é dada por $C = 2{,}3x + 3{,}8y$, denominada função objetivo no método de programação linear. A finalidade desse método consiste em, a partir das restrições apresentadas, obter valores para x e y que tornem mínimo o valor da função objetivo.

As restrições impostas para o lanche da tarde são:

$240x + 180y \geqslant 270$ (restrição de cálcio), $0{,}3x + 1{,}1y \geqslant 0{,}775$ (restrição de vitamina B2), $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ (visto que as quantidades de leite e salada de frutas não podem ser negativas).

Algumas combinações de leite de soja e salada de frutas

420 mg de cálcio e 1,4 mg de vitamina B2

Atende ao requisito nutricional mínimo.

300 mg de cálcio e 1,25 mg de vitamina B2

Atende ao requisito nutricional mínimo.

210 mg de cálcio e 0,7 mg de vitamina B2

Não atende ao requisito nutricional mínimo.

ILUSTRAÇÕES: LEO GIBRAN

Não foi levado em consideração o custo. Existem outras combinações para as quantidades de leite de soja e salada de frutas que atendem ao requisito nutricional mínimo.

De acordo com o método de programação linear, o custo mínimo dessa refeição será dado pela resolução de um dos seguintes sistemas:

$\begin{cases} 240x + 180y = 270 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 240x + 180y = 270 \\ 0{,}3x + 1{,}1y = 0{,}775 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ 0{,}3x + 1{,}1y = 0{,}775 \end{cases}$

14. c) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que podemos interpretar geometricamente a solução de cada sistema representando-os no plano cartesiano, pelo ponto de interseção das retas que representam as equações que o compõem.

A solução do sistema que resultar no menor valor, quando substituída na função objetivo, representará as quantidades dos alimentos que fornecem o custo mínimo da refeição, seguindo as restrições impostas pela dieta.

a) A alternativa que possui os pares ordenados que correspondem às soluções dos sistemas lineares na ordem em que foram apresentados é: alternativa II

I) $\left(0, \frac{17}{10}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{10}\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ II) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{31}{12}, 0\right)$ III) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

b) Qual é a quantidade de cada alimento que resultará em um custo mínimo para a refeição?
150 mℓ de leite de soja e 200 g de salada de frutas

c) De que maneira podemos interpretar geometricamente a solução dos sistemas?

d) Pesquise acerca da utilização do método de programação linear em outras áreas do conhecimento. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

8 Escalonamento de sistemas lineares

A corrida dos elétrons

Você usa muitos equipamentos elétricos? Isso só é possível graças aos circuitos desses equipamentos e às correntes elétricas que os circulam. Esses circuitos elétricos normalmente possuem três componentes básicos: um dispositivo que funciona com energia elétrica, como um motor, um eletrodoméstico ou uma lâmpada; fios condutores, como os fios de cobre; e uma fonte de energia elétrica, como uma pilha, uma bateria ou as tomadas elétricas, que permitem acesso à energia elétrica produzida em uma usina.

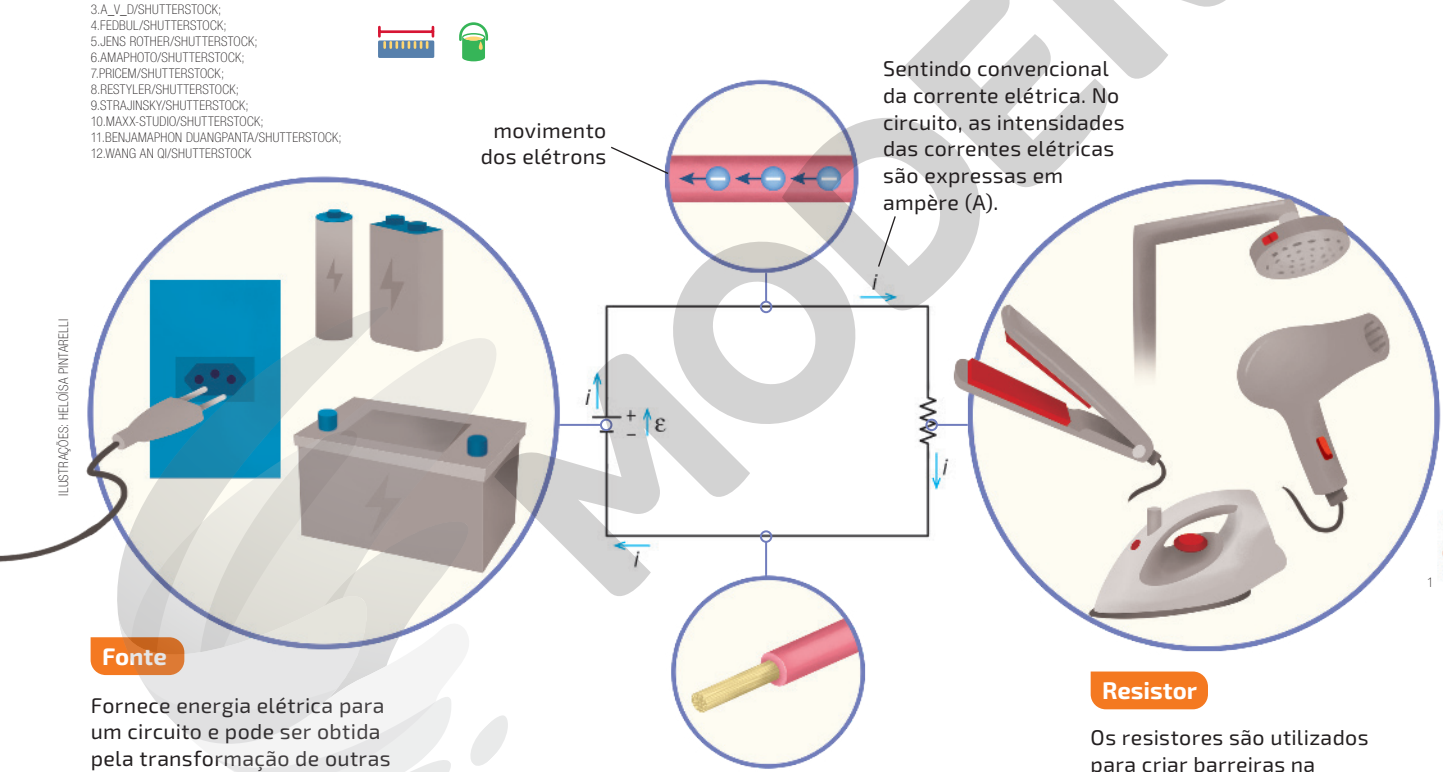
Em 1845, o físico alemão Gustav Kirchhoff (1824-1887) descreveu duas leis que permitiram representar circuitos elétricos por meio de equações lineares, facilitando a análise dos circuitos, principalmente em aplicações reais que aparecem mais circuitos complexos, com muitos caminhos para a corrente percorrer. Nessa abordagem, basta utilizar um sistema linear para determinar as intensidades das correntes elétricas de um circuito.

Veja um esquema simplificado de circuito elétrico com esses três componentes básicos em que a corrente elétrica percorre apenas um caminho.

BNCC

- EM13MAT301
- CE1CNT
- CE2CNT

FOTOMONTAGEM DE MAURÍCIO PLANEL.
FOTOS: 1.ULKASTUDIO/SHUTTERSTOCK; 2.TECHNICSORN STOCKER/SHUTTERSTOCK; 3.A_V_D/SHUTTERSTOCK; 4.FEDBUL/SHUTTERSTOCK; 5.JENS ROTHER/SHUTTERSTOCK; 6.AMAPHOTO/SHUTTERSTOCK; 7.PRICEM/SHUTTERSTOCK; 8.RESTYLER/SHUTTERSTOCK; 9.STRAJINSKY/SHUTTERSTOCK; 10.MAXX-STUDIO/SHUTTERSTOCK; 11.BENJAMAPHON DUANGPANTA/SHUTTERSTOCK; 12.WANG AN QI/SHUTTERSTOCK



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Fonte

Fornece energia elétrica para um circuito e pode ser obtida pela transformação de outras formas de energia (química, mecânica, solar, entre outras). No circuito, as forças eletromotrizes pelas quais as cargas elétricas são transportadas são expressas em volts (V).

Condutor

Todo material capaz de transportar elétrons é chamado condutor elétrico. Ele é responsável pelo transporte da carga elétrica. A quantidade de carga elétrica que atravessa uma seção transversal desse condutor em determinado intervalo de tempo é chamada **intensidade** de corrente elétrica.

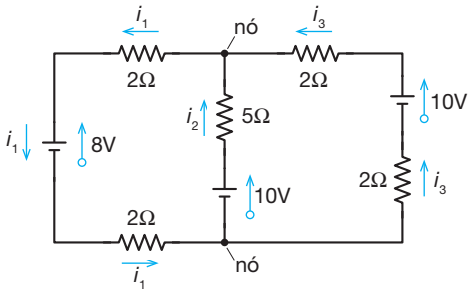
Resistor

Os resistores são utilizados para criar barreiras na passagem da corrente elétrica fornecida pela fonte, convertendo-a em energia térmica (calor), pois os elétrons colidem com os átomos do fio, gerando calor. No circuito, as resistências são expressas em ohms (Ω).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Veja um exemplo de circuito elétrico com mais de um caminho para a corrente elétrica e o sistema linear correspondente obtido por meio da aplicação das **Leis de Kirchhoff**.



RONALDO INÁCIO

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ -4i_1 - 5i_2 = -2 \\ -5i_2 + 4i_3 = 0 \end{cases}$$

Fonte de pesquisa: HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. *Fundamentos da física*: eletromagnetismo. Trad. e rev. téc. Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 3.

Primeira Lei de Kirchhoff (lei dos nós):
A soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem dele.

Segunda Lei de Kirchhoff (lei das malhas):
A soma algébrica das variações de potencial encontradas ao percorrer uma malha fechada é sempre zero.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Qual terna abaixo é a solução desse sistema? alternativa III

I) $i_1 = \frac{45}{100}$, $i_2 = \frac{1}{5}$ e $i_3 = \frac{5}{20}$

II) $i_1 = \frac{9}{16}$, $i_2 = -\frac{1}{4}$ e $i_3 = -\frac{5}{16}$

III) $i_1 = \frac{9}{28}$, $i_2 = \frac{1}{7}$ e $i_3 = \frac{5}{28}$

IV) $i_1 = \frac{7}{4}$, $i_2 = -\frac{1}{2}$ e $i_3 = -\frac{5}{8}$

B Cite exemplos de fontes de energia elétrica, condutores e dispositivos que podem ser utilizados para compor um circuito elétrico. Algumas possíveis respostas: fontes de energia elétrica: pilhas, baterias, usinas; condutores: cobre, ouro; dispositivos: aparelhos eletrônicos, eletrodomésticos, lâmpadas, motores.

Note que, na questão **A**, a solução já foi dada entre as alternativas. No entanto, para resolver sistemas como o apresentado, um método muito utilizado é o chamado **escalonamento**. Nas próximas páginas, estudaremos como esse método funciona e como ele pode ser prático, principalmente nos casos envolvendo mais de duas equações e duas incógnitas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nos circuitos que representam a distribuição elétrica nas residências, por exemplo, é importante calcular as intensidades das correntes elétricas para dimensionar corretamente o uso de dispositivos de segurança. Os mais comuns são os disjuntores, que detectam alterações anormais e picos de energia, interrompendo o fluxo da corrente elétrica quando ela ultrapassa os níveis de intensidade adequados.

Matrizes associadas a um sistema linear

Utilizando conhecimentos acerca de matrizes, vamos associar, por exemplo, o sistema $\begin{cases} -3x + 2y = 16 \\ x + 3y = 13 \end{cases}$ à equação matricial $A \cdot X = B$, sendo:

- $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ a **matriz dos coeficientes**;
- $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a **matriz das incógnitas**;
- $B = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \end{bmatrix}$ a **matriz dos termos independentes**.

Escrevendo a equação matricial $A \cdot X = B$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Dado um sistema linear $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

associamos a ele a seguinte equação matricial:

$$A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Essa maneira de representar um sistema linear é denominada **forma matricial do sistema**.

No contexto

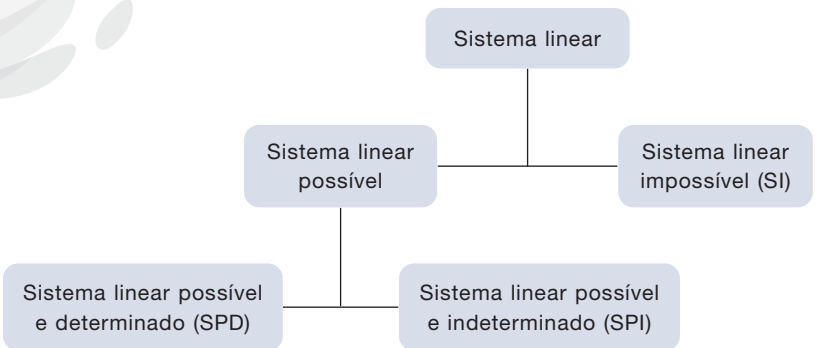
Na página anterior, vimos um sistema linear obtido a partir da aplicação das Leis de Kirchhoff em certo circuito elétrico. Escreva a equação matricial associada ao sistema apresentado.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Classificação de um sistema linear

De acordo com o número de soluções que um sistema linear possui, ele pode ser classificado em: **possível e determinado**, quando possui uma única solução; **possível e indeterminado**, quando possui infinitas soluções; ou **impossível**, quando não possui solução.

Representando essa classificação em um esquema, temos:



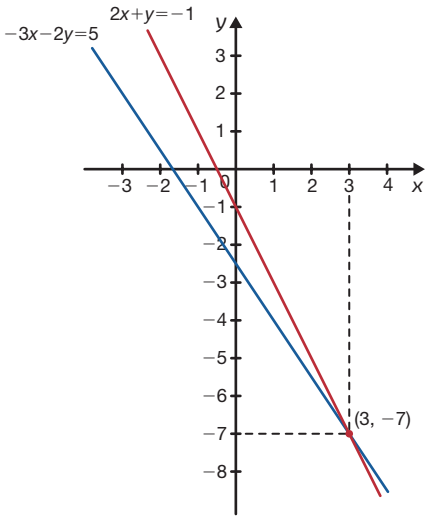
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

- $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -3x - 2y = 5 \end{cases}$

Sistema possível e determinado (SPD), pois possui apenas a solução $(3, -7)$.

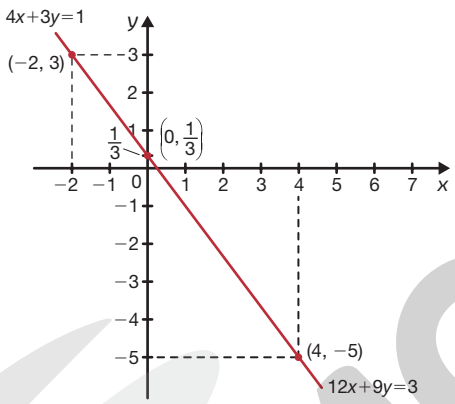
Na representação geométrica do sistema possível e determinado, as retas que representam as equações se cruzam em um único ponto, cujas coordenadas correspondem à única solução.



- $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 12x + 9y = 3 \end{cases}$

Sistema possível e indeterminado (SPI), pois possui infinitas soluções, tais como $(-2, 3)$, $(4, -5)$ e $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

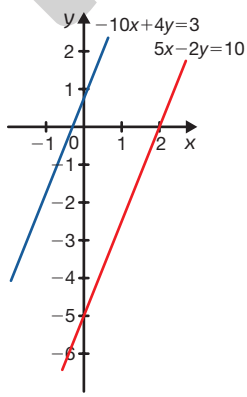
Na representação geométrica do sistema possível e indeterminado, as retas que representam as equações são coincidentes, ou seja, existem infinitos pontos comuns.



No exemplo do sistema apresentado, note que cada termo na 2ª equação corresponde ao triplo do termo correspondente na 1ª, ou seja, $3 \cdot 4x = 12x$; $3 \cdot 3y = 9y$; $3 \cdot 1 = 3$.

- $\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ -10x + 4y = 3 \end{cases}$

Sistema impossível (SI), pois não possui solução.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Na representação geométrica do sistema impossível, as retas que representam as equações são paralelas; consequentemente, não se cruzam.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R1 Classifique cada sistema de equações lineares em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 1 \\ -3x - 6y = -6 \end{cases}$

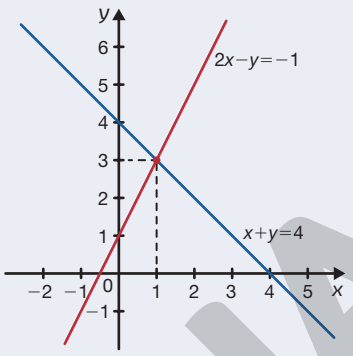
Resolução

a) Utilizando o método da substituição, isolamos y na 1ª equação e substituímos na 2ª.

- $2x - y = -1 \Rightarrow -y = -2x - 1 \Rightarrow y = 2x + 1$
- $x + y = 4 \Rightarrow x + (2x + 1) = 4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 3x + 1 = 4 \Rightarrow x = 1$

Obtemos y substituindo $x = 1$ em $x + y = 4$.

$$x + y = 4 \Rightarrow 1 + y = 4 \Rightarrow y = 3$$



As retas que representam as equações se cruzam no ponto de coordenadas $(1, 3)$, ou seja, têm um único ponto em comum, que corresponde à solução do sistema.

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

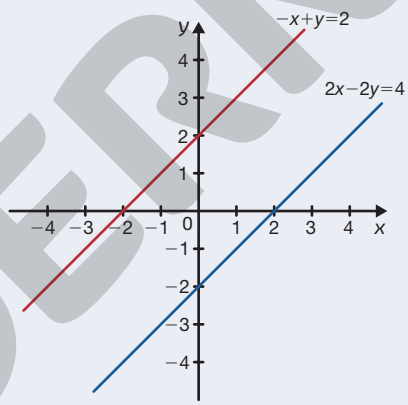
b) Utilizando o método da adição, temos:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \cdot (2) \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 4 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$0x + 0y = 8$$

Note que não existem números reais x e y que satisfaçam a equação $0x + 0y = 8$. Nesse caso, o sistema não admite solução.

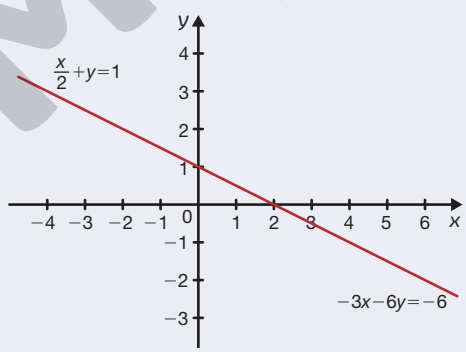
As retas que representam as equações são paralelas, ou seja, não possuem pontos em comum.



Portanto, o sistema é impossível (SI).

c) Utilizando o método da substituição, isolamos y na 1ª equação e substituímos na 2ª.

- $\frac{x}{2} + y = 1 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 1$
- $-3x - 6y = -6 \Rightarrow -3x - 6 \cdot \left(-\frac{x}{2} + 1\right) = -6 \Rightarrow -3x + 3x - 6 = -6 \Rightarrow 0x = 0$



Note que, para qualquer número real x, a sentença $0x = 0$ é verdadeira. De modo geral, tomando $x = \alpha$, todos os pares da forma $\left(\alpha, -\frac{\alpha}{2} + 1\right)$, com α real, são soluções do sistema.

As retas que representam as equações são coincidentes, ou seja, possuem infinitos pontos em comum.

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

R2 Determine a matriz X da equação $A \cdot X = 2B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Resolução

Como A tem ordem 2×2 e B, ordem 2×1, então X é de ordem 2×1, ou seja, da forma $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Da equação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a - b \\ a + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a - b = 4 \\ a + 2b = 10 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} 4a - b = 4 \quad \cdot (2) \\ a + 2b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a - 2b = 8 \\ a + 2b = 10 \end{cases}$$

$$9a = 18 \Rightarrow a = 2$$

Substituindo $a = 2$ em $a + 2b = 10$, temos:

$$a + 2b = 10 \Rightarrow 2 + 2b = 10 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

R3 Dado o sistema de equações $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ ax + 2y = b \end{cases}$, determine os valores de a e b para que o sistema seja:

a) possível e indeterminado.

b) impossível.

Resolução

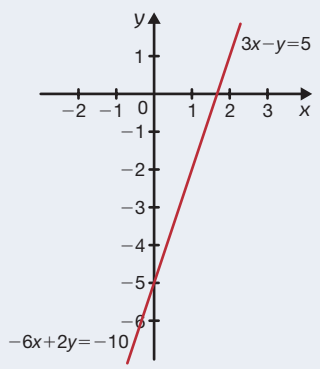
a) Utilizando o método da adição, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \quad \cdot (2) \\ ax + 2y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 10 \\ ax + 2y = b \end{cases} \Rightarrow 6x + ax = 10 + b \Rightarrow x \cdot (6 + a) = 10 + b$$

Para o sistema ser possível e indeterminado, é necessário que $0x = 0$. Logo:

- $6 + a = 0 \Rightarrow a = -6$
- $10 + b = 0 \Rightarrow b = -10$

Portanto, se $a = -6$ e $b = -10$, então o sistema será possível e indeterminado.

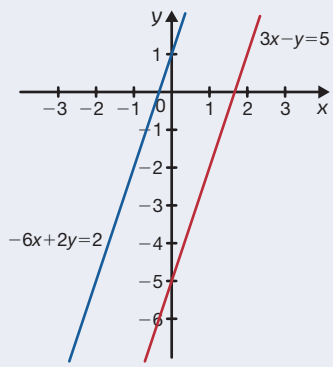


Na representação geométrica do sistema possível e indeterminado, as retas que representam as equações são coincidentes.

b) Analogamente ao item a, teremos $x \cdot (6 + a) = 10 + b$. Porém, para termos um sistema impossível, é necessário que $0x \neq 0$. Logo:

$6 + a = 0 \Rightarrow a = -6$ e $10 + b \neq 0 \Rightarrow b \neq -10$

Portanto, se $a = -6$ e $b \neq -10$, então o sistema será impossível.



Na representação geométrica do sistema impossível, as retas que representam as equações são paralelas. Nesse caso, considere $b = 2$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo sistemas lineares

Nessa seção, vamos utilizar o GeoGebra, *software* de Geometria dinâmica, para analisar a solução de um sistema com duas equações e duas incógnitas.

Veja mais informações sobre o GeoGebra no Suplemento para o professor.

A Na **Janela de Álgebra**, digite uma equação do sistema e depois tecle **Enter**. Faça o mesmo procedimento para outra equação do sistema.

B Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** e, em seguida, clique na reta formada pela 1ª equação e depois clique na reta formada pela 2ª equação.
Na **Janela de Álgebra** aparecerá, se existir, o ponto de interseção das retas.

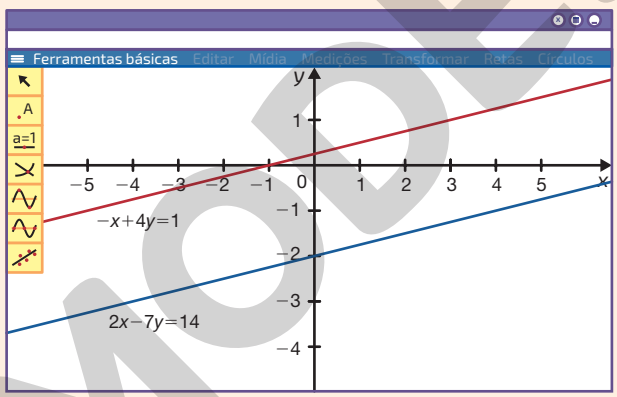
Comente com os alunos que, no caso do GeoGebra, aparece um ponto de interrogação tanto para a interseção de sistemas impossíveis quanto de sistemas possíveis e indeterminados.

Devemos ficar atentos às seguintes questões ao analisarmos a solução de sistemas de equações dada pelo GeoGebra.

- O ponto de interseção mostrado pode ser uma aproximação do ponto de interseção real.
- Caso o sistema seja impossível ou possível e indeterminado, aparecerá um erro na interseção das retas na **Janela de Álgebra**. Sendo assim, é necessário analisar a **Janela de Visualização** para descobrir se o sistema é SPI ou SI.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 O sistema $\begin{cases} -x + 4y = 1 \\ 2x - 7y = 14 \end{cases}$ foi representado graficamente no GeoGebra resultando em uma imagem como a representada abaixo.



a) Podemos afirmar que o sistema é impossível?

b) Nesse caso, o que seria necessário para ter certeza se existe ou não a intercessão das retas?

c) Classifique esse sistema em SPD, SPI ou SI.

2 Classifique os sistemas abaixo em SPD, SPI ou SI e dê a solução dos sistemas possíveis e determinados.

a) $\begin{cases} 2x - 4y = 7 \\ -3x + 6y = -10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 9y = 18 \\ 2x + 3y = 27 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x - 8y = 18 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x - 2y = 26 \\ -4x + y = -13 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 12x - 2y = 36 \\ -10x + 6y = -30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -16x + 12y = 15 \\ 4x - 3y = 38 \end{cases}$

MODERNA

RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Escreva a equação matricial associada a cada sistema linear.

a) $\begin{cases} -x + 5y = 7 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$

2 Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI. Em seguida, represente-o geometricamente.

a) $\begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$

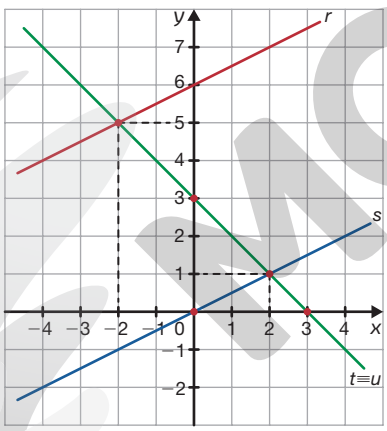
c) $\begin{cases} 5x + 3y = -5 \\ 10x + 6y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x - 2y = -22 \end{cases}$

3 No exercício resolvido **R4** da página **79**, vimos como funciona o sistema de pontuação adotado pela CBF desde 2003. Nesse sistema, são atribuídos 3 pontos para o time vencedor ou 1 ponto para cada time, no caso de empate. Utilizando esse sistema, certo time disputou 15 partidas, das quais saiu vitorioso em dois terços das partidas em que não houve empate, e obteve 27 pontos. Determine o número de vitórias, empates e derrotas desse time. 8 vitórias; 3 empates; 4 derrotas.

4 Determine o valor de α para o qual o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + \alpha y = 0 \end{cases}$ seja impossível. $\alpha = -2$

5 Observe a representação das retas r, s, t e u em um mesmo plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO

r: $-x + 2y = 12$
s: $-x + 2y = 0$
t: $x + y = 3$
u: $-x - y = -3$

Sem realizar cálculos, determine quantas soluções possui cada sistema abaixo e, em seguida, escreva-as. Caso o sistema possua infinitas soluções, escreva apenas algumas delas.

a) $\begin{cases} -x + 2y = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$ uma solução; $(-2, 5)$

b) $\begin{cases} -x + 2y = 12 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ não possui solução

c) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x - y = -3 \end{cases}$ uma solução; $(2, 1)$

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x - y = -3 \\ -x + 2y = 12 \end{cases}$ uma solução; $(-2, 5)$

d) infinitas soluções; Algumas possíveis respostas: $(-2, 5)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$

1. a) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

6 Na cantina de uma escola, são oferecidos dois tipos de sanduíches, frango e vegetariano, cujos preços estão indicados abaixo. Em um determinado dia, essa cantina arrecadou R$ 324,00 na venda de 33 sanduíches.

2. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

ILUSTRAÇÕES: LEO GIBRAN

a) Nomeando cada sanduíche de frango e vegetariano de A e B, respectivamente, escreva um sistema de equações que represente essa situação. $\begin{cases} 8A + 12B = 324 \\ A + B = 33 \end{cases}$

b) Classifique o sistema que você escreveu no item **a** em SPD, SPI ou SI. SPD

c) Quantas unidades de cada sanduíche foram vendidas no final de semana? frango: 18 unidades; vegetariano: 15 unidades

7 Represente geometricamente os sistemas de equações e, caso eles sejam SPD, determine sua solução. Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

a) $\begin{cases} 8x - 2y = 2 \\ 3x - y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2y - 2x = 1 \\ x = y - \frac{1}{2} \end{cases}$

8 Dado o sistema de equações com coeficientes reais $\begin{cases} y = (a - 1) \cdot x + 2 \\ y - 2x = b \end{cases}$, determine a e b para que o sistema seja:

a) possível e indeterminado $a = 3$; $b = 2$

b) possível e determinado $a \neq 3$; $b \in \mathbb{R}$

c) impossível $a = 3$; $b \neq 2$

9 Calcule a solução dos sistemas de equações, caso exista.

a) $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x = 6(y + 1) \end{cases}$ não existe solução

b) $\begin{cases} 3y - 2x = 3 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$ $x = \frac{6}{19}$; $y = \frac{23}{19}$

c) $\begin{cases} 2y - x = 4 \\ y + 2x = -4 \end{cases}$ $x = -\frac{12}{5}$; $y = \frac{4}{5}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

10 Certo motorista abasteceu seu carro com uma mistura de etanol e gasolina, totalizando 40 ℓ. Sabendo que a quantidade de etanol colocada foi 3 vezes a de gasolina, calcule a quantidade de cada combustível com que o carro foi abastecido. etanol: 30 ℓ; gasolina: 10 ℓ

11 Em cada item, o sistema foi classificado em SPD, SPI ou SI.

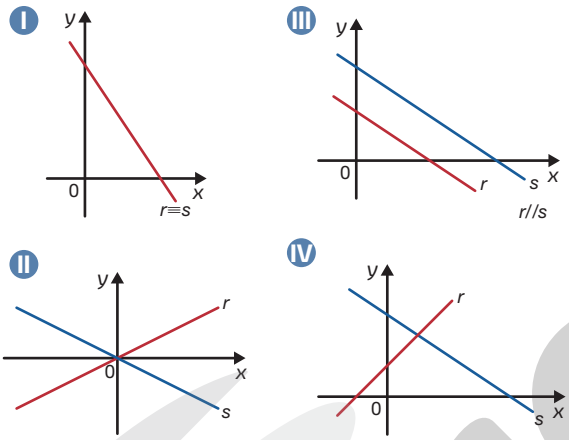
a) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (SPD)

b) $\begin{cases} a_3x + b_3y = c_3 \\ a_4x + b_4y = c_4 \end{cases}$ (SPI)

c) $\begin{cases} a_5x + b_5y = c_5 \\ a_6x + b_6y = c_6 \end{cases}$ (SI)

d) $\begin{cases} a_7x + b_7y = 0 \\ a_8x + b_8y = 0 \end{cases}$ (SPD)

Associe cada sistema a um dos gráficos abaixo, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a–IV; b–I; c–III; d–II



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

12 (Unifesp, 2004) Numa determinada livraria, a soma dos preços de aquisição de dois lápis e um estojo é R$ 10,00. O preço do estojo é R$ 5,00 mais barato que o preço de três lápis. A soma dos preços de aquisição de um estojo e de um lápis é alternativa d

a) R$ 3,00. c) R$ 6,00. e) R$ 12,00.
b) R$ 4,00. d) R$ 7,00.

13 Resolva a seguinte equação matricial.

$x = 3$;
$y = -2$;
$z = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

14 Em certa banca de feira, 2,5 kg de laranjas (L) mais 1,6 kg de peras (P) custam R$ 26,70. Nessa mesma banca, 4 kg de laranjas mais 3,5 kg de peras custam R$ 54,00. Com base nessas informações, escreva e resolva um sistema linear cuja solução forneça o preço de 1 kg de laranjas e 1 kg de peras.

$\begin{cases} 2{,}5L + 1{,}6P = 26{,}70 \\ 4L + 3{,}5P = 54{,}00 \end{cases}$; L = R$ 3,00; P = R$ 12,00

15 O átomo é considerado a unidade fundamental de um elemento químico. O conceito de átomo é um dos mais importantes da Química e por meio dele é possível explicar diversos fenômenos da natureza.

A massa do átomo é expressa em unidades de massa atômica, sendo representada pela letra **u** e tendo como referência a massa do isótopo mais abundante do carbono, denominado carbono-12 $\left({}^{12}C\right)$. Uma unidade de massa atômica corresponde a $\frac{1}{12}$ da massa desse isótopo do carbono. A massa atômica é de fundamental importância , pois é por meio dela que é possível obter as massas moleculares e as fórmulas químicas. Além disso, é utilizada na construção constante da tabela periódica, com o objetivo de organizar e direcionar as informações científicas sobre os elementos químicos.

A massa de uma molécula pode ser determinada adicionando-se as massas de seus átomos componentes. Para determinar, por exemplo, a massa de uma molécula de SO_2 (dióxido de enxofre), que é composta por 1 átomo de enxofre (S) e 2 de oxigênio (O), deve-se adicionar a massa atômica do enxofre a duas vezes a massa atômica do oxigênio.

Fonte de pesquisa: RUSSEL, John B. *Química geral*. Trad. e rev. tec. Márcia Guekezian *et al*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. v. 1.

Isótopo: o isótopo de um elemento químico possui átomos com o mesmo número de prótons, porém com diferente número de nêutrons.

A massa atômica de cada elemento é encontrada na tabela periódica. Veja como calcular a massa da molécula de SO_2.

7	8	9	10	
N	O	F	Ne	
Nitrogênio	Oxigênio	Flúor	Neônio	
14,01	16,00	19,00	20,18	16,00 u (massa atômica)
15	16	17	18	
P	S	Cl	Ar	
Fósforo	Enxofre	Cloro	Argônio	
30,97	32,06	35,45	39,95	32,06 u (massa atômica)

Massa atômica de uma molécula de SO_2:
$1 \cdot 32{,}06\ u + 2 \cdot 16{,}00\ u = 64{,}06\ u$

RONALDO INÁCIO

Ilustração elaborada com base em: SBQ. Tabela periódica dos elementos. 2019. Disponível em: <http://www.sbq.org.br/anexos/tabela_periodica_SBQ_6nov2019.pdf>. Acesso em: 30 jun. 2020.

a) Sabendo que a massa de uma molécula de C_2H_4 (etileno) corresponde a 28 u, e a massa de uma molécula de C_4H_{10} (butano) corresponde a 58 u, determine a massa atômica do carbono (C) e do hidrogênio (H). carbono: 12 u; hidrogênio: 1 u

b) Conhecendo apenas a massa de uma molécula de $C_4H_8O_2$ (ácido butírico), que corresponde a 88 u, produzido quando a manteiga se deteriora, e de uma molécula de $C_8H_{10}O_2N_4$ (cafeína), que corresponde a 194 u, é possível determinar a massa atômica do C, H, O e N (nitrogênio)? Justifique sua resposta. Não. Espera-se que os alunos respondam que se obtivermos um sistema de equações a partir dessas informações, ele será possível e indeterminado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Escalonamento de um sistema linear

Um método muito utilizado para resolver e classificar um sistema linear é o chamado **escalonamento**. Neste tópico, estudaremos o que é um sistema escalonado e como escalonar um sistema linear.

Sistemas lineares equivalentes

Quando dois sistemas lineares apresentam as mesmas soluções, dizemos que eles são **equivalentes**.

Os sistemas $\begin{cases} 2x - y + 4z = 3 \\ -x + 3y - 2z = 6 \\ 3x - y + 5z = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = 3 \\ -3y + 5z = 1 \end{cases}$, por exemplo, são equivalentes, pois ambos admitem como única solução a terna $(-1, 3, 2)$. Já os sistemas $\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ 5x + 2y - z = 3 \\ x - y + 4z = -5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 6 \\ y - z = -1 \end{cases}$ não são equivalentes, pois admitem soluções únicas e distintas, sendo estas, respectivamente, $(0{,}1, -1)$ e $(2{,}2, -3)$.

Após trabalhar os procedimentos para escalonar um sistema linear, peça aos alunos que resolvam os sistemas apresentados nesta página.

Ao multiplicar uma equação de um sistema linear S_1 por uma constante real não nula, obtemos um sistema linear S_2, equivalente a S_1.

Exemplo

Multiplicando por 3 a 1ª equação do sistema $S_1 = \begin{cases} 2x + 3y - 4z = -6 \\ -3x + y + z = -7 \\ 5x - 2y + 9z = 23 \end{cases}$, obtemos o sistema $S_2 = \begin{cases} 6x + 9y - 12z = -18 \\ -3x + y + z = -7 \\ 5x - 2y + 9z = 23 \end{cases}$, equivalente a S_1. Esses sistemas têm como única solução a terna $(2, -2, 1)$.

Ao permutarmos duas equações de um sistema linear S_1, obtemos um sistema linear S_2, equivalente a S_1.

Exemplo

Permutando a 1ª com a 3ª equação do sistema $S_1 = \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ -6x - 2y + 2z = 4 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}$, obtemos o sistema $S_2 = \begin{cases} x + y + 2z = -2 \\ -6x - 2y + 2z = 4 \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$, equivalente a S_1. Esses sistemas têm como única solução a terna $(-3, 5, -2)$.

Ao substituirmos uma equação de um sistema linear S_1 pela soma dela com qualquer outra equação desse sistema multiplicada por uma constante diferente de zero, obtemos um sistema linear S_2 equivalente a S_1.

Exemplo

Substituindo a 2ª equação do sistema $S_1 = \begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ pela soma dela com a 1ª equação, obtemos o sistema $S_2 = \begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$, equivalente a S_1. Esses sistemas têm como única solução o par $(4, 3)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Sistema linear escalonado

Dizemos que um sistema linear, com incógnitas escritas na mesma ordem em todas as equações, está na forma escalonada se o primeiro coeficiente não nulo de cada equação está à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da equação seguinte. Além disso, se os coeficientes de uma equação são todos nulos, escrevemos essa equação abaixo das demais, ou a omitimos desde que o termo independente também seja nulo.

São exemplos de sistemas escalonados:

- $\begin{cases} -3x + y - 2z = 0 \\ 0x - 3y + z = -1 \\ 0x + 0y - z = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -3x + y - 2z = 0 \\ -3y + z = -1 \\ -z = 5 \end{cases}$

- $\begin{cases} 2x - 4y + 5z - 3w = 11 \\ 0x + 3y - 4z + w = 7 \\ 0x + 0y + 3z - 2w = -8 \\ 0x + 0y + 0z - 0w = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x - 4y + 5z - 3w = 11 \\ 3y - 4z + w = 7 \\ 3z - 2w = -8 \end{cases}$

Note que o sistema linear a seguir não está na forma escalonada, pois a 2ª e a 3ª equação possuem a mesma quantidade de coeficientes não nulos.

$\begin{cases} -x + 3y + 7z = -3 \\ -y - 4z = 2 \\ 5y - z = 9 \end{cases}$

Um sistema escalonado pode ter o mesmo número de equações e incógnitas ou mais incógnitas do que equações.

Veja um exemplo de como resolver um sistema escalonado em que o número de equações e de incógnitas são iguais.

- $\begin{cases} -x + 2y + 4z = 3 \\ -2y + z = 5 \\ -3z = -9 \end{cases}$

Inicialmente, resolvemos a 3ª equação e obtemos o valor de z.

$$-3z = -9 \Rightarrow z = 3$$

Substituímos $z = 3$ na 2ª equação e obtemos o valor de y.

$$-2y + z = 5 \Rightarrow -2y + 3 = 5 \Rightarrow y = -1$$

Substituímos $z = 3$ e $y = -1$ na 1ª equação e obtemos o valor de x.

$$-x + 2y + 4z = 3 \Rightarrow -x + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 3 \Rightarrow x = 7$$

Portanto, o sistema tem como única solução a terna $(7, -1, 3)$.

Se um sistema linear escalonado tem o número de equações igual ao de incógnitas, então ele é possível e determinado (SPD).

Agora, veja como podemos resolver um sistema escalonado que possui mais incógnitas do que equações.

- $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2y - 8z = 0 \end{cases}$

Nos sistemas com essa característica, as incógnitas que não aparecem no início de nenhuma equação são denominadas incógnitas livres. No exemplo apresentado, a incógnita livre é z.

Para determinarmos a **solução geral** desse sistema, consideramos $z = k$, sendo k um número real.

Substituindo $z = k$ na 2ª equação, temos:

$$2y - 8z = 0 \Rightarrow 2y - 8k = 0 \Rightarrow y = 4k$$

Substituindo $z = k$ e $y = 4k$ na 1ª equação, temos:

$$x + y - 2z = 0 \Rightarrow x + 4k - 2k = 0 \Rightarrow x = -2k$$

Portanto, a solução geral do sistema é $(-2k, 4k, k)$, com k real.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Se em um sistema linear escalonado o número de incógnitas é maior do que o de equações, então esse sistema é possível e indeterminado (SPI). O **grau de indeterminação** de um sistema depende da quantidade de incógnitas livres, ou seja, se o sistema tem uma incógnita livre, dizemos que ele tem grau de indeterminação 1.

O número de incógnitas livres de um sistema escalonado com m equações e n incógnitas é dado por $n - m$.

Para obtermos soluções particulares do sistema escalonado, atribuímos valores a k e efetuamos os cálculos. Para $k = 1$, por exemplo, temos:

$$(-2k, 4k, k) = (-2 \cdot 1, 4 \cdot 1, 1) = (-2, 4, 1)$$

Na solução geral do sistema apresentado, atribua outro valor para k e obtenha outra solução particular.

Exercícios e problemas resolvidos

R4 Resolva e classifique o sistema $\begin{cases} x + 2y - z + w = 3 \\ y + z - w = -1 \end{cases}$.

Resolução

O sistema está na forma escalonada e possui duas equações e quatro incógnitas. Logo, são duas incógnitas livres e o grau de indeterminação é dois.

Fazendo $z = \alpha$ e $w = \beta$, com α e β reais, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 3 \\ y + z - w = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - \alpha + \beta = 3 \\ y + \alpha - \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 + \alpha - \beta \quad \text{(I)} \\ y = -1 - \alpha + \beta \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo **II** em **I**, segue que:

$$x + 2 \cdot (-1 - \alpha + \beta) = 3 + \alpha - \beta \Rightarrow x - 2 - 2\alpha + 2\beta = 3 + \alpha - \beta \Rightarrow x = 5 + 3\alpha - 3\beta$$

Logo, a solução geral do sistema é $(5 + 3\alpha - 3\beta, -1 - \alpha + \beta, \alpha, \beta)$.

Portanto, o sistema é SPI.

Atribuindo, por exemplo, $\alpha = \beta = 1$, obtemos uma das soluções do sistema:
$(5 + 3\alpha - 3\beta, -1 - \alpha + \beta, \alpha, \beta) = (5 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1, -1 - 1 + 1, 1, 1) = (5, -1, 1, 1)$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

16 Determine quais são os pares de sistemas lineares equivalentes. a–d; b–f; c–e

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x + y = 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ x - 4y = -12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{5}y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$

17 Determine quais sistemas estão na forma escalonada. alternativas b e d

a) $\begin{cases} x - y + 6z = 0 \\ x - z = 1 \\ 3z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z + w = 7 \\ -y - z + 3w = 6 \\ z + 5w = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 6y = 0 \\ 5x - 4y - z = 5 \\ 3y + z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x = 6 \\ 2x = 8 \end{cases}$

18 Em cada item, determine as condições sobre as constantes A, B, C, D e E para que o sistema fique na forma escalonada. Respostas no final do livro.

a) $\begin{cases} 5x + (1 - A)y + z = 0 \\ Bx + 4y + Cz = 4 \\ Dx + (E + 1)y + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (A - B)x + 6y + z = 8 \\ (1 - B)x + Cy - z = 5 \\ Dx + Ey - (2 - C)z = 0 \end{cases}$

19 Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI. Em seguida, resolva-os.

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 2y - z = -9 \\ 2y + z = 0 \\ 3z = 12 \end{cases}$ SPD; $(1, -2, 4)$

c) $\begin{cases} x + y + z - w = 4 \\ -y - z + w = 0 \\ z + w = -5 \end{cases}$

a) SPI; solução geral: $\left(\frac{7}{2} - k, 3 - k, k\right)$, com k real

c) SPI; solução geral: $(4, 5 + 2k, -5 - k, k)$, com k real

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Procedimentos para escalonar um sistema linear

Lembre-se de que sistemas equivalentes possuem as mesmas soluções. Portanto, ao resolver um sistema escalonado equivalente a um sistema linear S dado, estamos resolvendo também S.

Por meio de operações elementares, podemos, a partir de um sistema linear dado, obter um sistema equivalente na forma escalonada, o que auxilia na resolução e na classificação desse sistema.

Para se escalonar um sistema linear, as operações elementares são:

- trocar a ordem das equações do sistema;
- substituir uma equação do sistema por outra equação, resultante de sua soma com outra equação do mesmo sistema multiplicada por um número diferente de zero;
- multiplicar qualquer equação por um número diferente de zero.

Exemplo 1

- $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = -9 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases}$

Inicialmente, transformamos a 2ª e a 3ª equação, de maneira a obter equações com o coeficiente de x igual a zero.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = -9 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 8y + 3z = 1 \end{cases}$$

Por fim, no novo sistema, podemos substituir a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por 4.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 8y + 3z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 4} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 7z = -35 \end{cases}$$

Note que o sistema obtido está na forma escalonada e é equivalente ao sistema linear dado inicialmente. Resolvendo esse sistema escalonado, estamos também resolvendo o sistema inicial.

- $7z = -35 \Rightarrow z = -5$
- $-2y + z = -9 \Rightarrow -2y + (-5) = -9 \Rightarrow y = 2$
- $2x - 3y - z = 0 \Rightarrow 2x - 3 \cdot 2 - (-5) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD) e possui como solução a terna $\left(\frac{1}{2}, 2, -5\right)$.

Exemplo 2

- $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -2x - y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -2x - y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -4 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 3y - 5z = -11 \\ 3y - 5z = -11 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 3y - 5z = -11 \\ 0y - 0z = 0 \end{cases}$$

Como na 3ª equação o coeficiente de cada incógnita é igual a zero, e o termo independente também é igual a zero, essa equação é válida para quaisquer valores de x, y e z. Dessa maneira, ela não contribui para a resolução do sistema, podendo ser desconsiderada e fazendo com que o sistema obtido fique na forma escalonada.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 3y - 5z = -11 \\ 0y - 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 3y - 5z = -11 \end{cases}$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Note que o sistema escalonado obtido tem mais incógnitas do que equações e, portanto, é um sistema possível e indeterminado (SPI). Nesse caso, o sistema escalonado obtido possui uma incógnita livre (z). Considerando $z = k$, com k real, podemos determinar a solução geral do sistema:

- $3y - 5z = -11 \Rightarrow 3y - 5k = -11 \Rightarrow y = \dfrac{-11 + 5k}{3}$
- $x + 2y - 3z = -7 \Rightarrow x + 2 \cdot \dfrac{-11 + 5k}{3} - 3k = -7 \Rightarrow x = \dfrac{1 - k}{3}$

Portanto, a solução geral do sistema é $\left(\dfrac{1 - k}{3}, \dfrac{-11 + 5k}{3}, k\right)$.

A partir da solução geral ao lado, determine uma das soluções particulares do sistema utilizando $k = 4$.

$\left(\dfrac{1 - 4}{3}, \dfrac{-11 + 5 \cdot 4}{3}, 4\right) = (-1, 3, 4)$

Exemplo 3

- $\begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -x + 2y - z = 5 \\ 3x - 10y + 7z = -3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -x + 2y - z = 5 \\ 3x - 10y + 7z = -3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -y + z = 1 \\ -y + z = 9 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -y + z = 1 \\ 0y + 0z = 8 \end{cases}$$

Nesse caso, a 3ª equação do sistema obtido não é satisfeita, sejam quais forem os valores de x, y e z. Portanto, o sistema é impossível (SI).

Exercícios e problemas resolvidos

R5 Fabiana monta e vende *kits* com produtos de higiene pessoal. Atualmente, ela possui três opções.

- Opção **1**: 1 creme dental, 2 desodorantes e 6 sabonetes custa R$ 62,00.
- Opção **2**: 2 cremes dentais, 2 desodorantes e 5 sabonetes custa R$ 65,00.
- Opção **3**: 3 cremes dentais, 4 desodorantes e 4 sabonetes custa R$ 92,00.

Ela pretende montar outra opção de *kit* com 1 creme dental, 1 desodorante e 5 sabonetes. Sabendo que cada creme dental, cada desodorante e cada sabonete custam, respectivamente, c, d e s, determine qual deve ser o preço dessa nova opção de *kit*.

Resolução

Considerando as opções **1**, **2** e **3**, obtemos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 2c + 2d + 5s = 65 \\ 3c + 4d + 4s = 92 \end{cases}$$

Agora, calculamos o preço de cada produto. Para isso, escalonamos o sistema.

$$\begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 2c + 2d + 5s = 65 \\ 3c + 4d + 4s = 92 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \Rightarrow \begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 0c - 2d - 7s = -59 \\ 3c + 4d + 4s = 92 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)} \Rightarrow \begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 0c - 2d - 7s = -59 \\ 0c - 2d - 14s = -94 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \Rightarrow \begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 0c - 2d - 7s = -59 \\ 0c - 0d - 7s = -35 \end{cases}$$

Na sequência, resolvemos o sistema escalonado.

$$-7s = -35 \qquad -2d - 7 \cdot (5) = -59 \qquad c + 2 \cdot (12) + 6 \cdot (5) = 62$$
$$s = \frac{-35}{-7} \qquad -2d - 35 = -59 \qquad c + 24 + 30 = 62$$
$$s = 5 \qquad -2d = -24 \qquad c = 8$$
$$d = \frac{-24}{-2}$$
$$d = 12$$

Substituindo os valores para obter o preço da opção **4**, temos:

$$c + d + 5s = 8 + 12 + 5 \cdot (5) = 45$$

Portanto, o preço da opção **4** deve ser R$ 45,00.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

A tarefa **24** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

20 Em um campeonato de futebol, Gil fez 6 gols a mais do que João. Se na próxima rodada cada um fizer um gol, Gil terá feito o triplo da quantidade de gols de João no campeonato. Se isso acontecer, quantos gols cada um terá feito no campeonato? Gil: 13 gols; João: 3 gols

21 Resolva os sistemas lineares.

a) $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$ $x = 2;\ y = 3;\ z = 1$

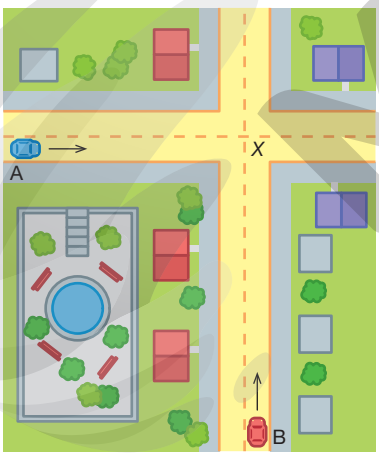
b) $\begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$ $x = 3;\ y = -1;\ z = 2$

22 (Fuvest-SP, 2020) Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma? alternativa d

a) 26 b) 38 c) 42 d) 62 e) 68

23 Desafio

Dois carros, A e B, trafegando em ruas diferentes, dirigem-se em linha reta para um mesmo cruzamento, no ponto X, a uma mesma velocidade constante. Nessas condições, o carro B vai passar por X, 10 s após o carro A. Mas, se o carro B aumentar sua velocidade em 20%, ele vai chegar ao cruzamento no mesmo instante que o carro A.



SERGIO L. FILHO

De acordo com as informações apresentadas, e supondo que os carros mantenham velocidade constante, determine em quantos segundos o carro A chegará ao ponto X. 50 s

Lembre-se de que, nesse caso, velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

24 Elaborando

Escreva um problema em cuja resolução seja necessário utilizar o sistema linear abaixo. Em seguida, proponha o problema que você elaborou a um colega e resolva o problema proposto por ele.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 35 \\ 3x + 5y = 57 \end{cases}$$

25 (UEL-PR) Uma mãe, com o intuito de organizar os brinquedos dos seus filhos, teve a ideia de colocá-los em caixas coloridas. Ela classificou os brinquedos em três categorias, de acordo com seus tamanhos, sendo elas: brinquedos pequenos, médios e grandes. Para a organização, a mãe utilizou caixas de acrílico amarelas, verdes e azuis, as quais comportam as seguintes quantidades de brinquedos:

- Caixas Amarelas: 2 grandes, 8 médios e 10 pequenos.
- Caixas Verdes: 2 grandes, 20 médios e 16 pequenos.
- Caixas Azuis: 1 grande, 10 médios e 14 pequenos.

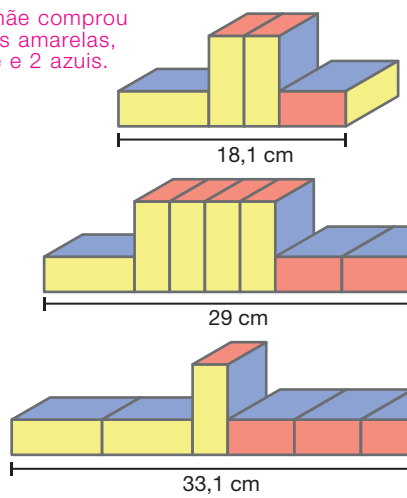
Considere que as crianças possuem 12 brinquedos grandes, 72 brinquedos de tamanho médio e 84 pequenos e que foi colocada, em cada caixa, exatamente a quantidade de brinquedos de cada categoria que ela comporta.

Quantas caixas de cada cor esta mãe utilizou para acomodar todos os brinquedos de seus filhos?

Apresente os cálculos realizados na resolução da questão.

25. A mãe comprou 4 caixas amarelas, 1 verde e 2 azuis.

26 Nas figuras abaixo os paralelepípedos reto retângulos têm as mesmas dimensões, assim como suas faces retangulares de mesma cor.



RONALDO INÁCIO

Qual é o volume de um desses paralelepípedos? 106,848 cm³

24. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Escalonando sistemas

Nesta seção, vamos resolver um sistema linear utilizando a planilha eletrônica do GeoGebra, que é um *software* de Geometria dinâmica. Para isso, vamos utilizar a matriz denominada **matriz aumentada** do sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Matriz aumentada.

A Na opção **Exibir**, desabilite a **Janela de Visualização** e habilite a **Janela de Álgebra** e a **Planilha**.

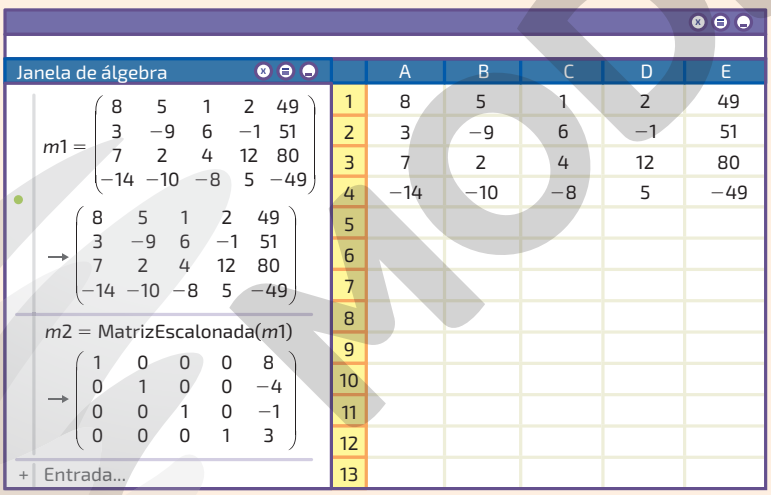
B Na planilha, digite a matriz aumentada do seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} 8a + 5b + c + 2d = 49 \\ 3a - 9b + 6c - d = 51 \\ 7a + 2b + 4c + 12d = 80 \\ -14a - 10b - 8c + 5d = -49 \end{cases} \longrightarrow$$

	A	B	C	D	E
1	8	5	1	2	49
2	3	−9	6	−1	51
3	7	2	4	12	80
4	−14	−10	−8	5	−49

C Selecione o intervalo **A1:E4** e, em seguida, a ferramenta **Matriz**. Na janela **Matriz**, nomeie a matriz (por exemplo, m1) e clique em **Criar**.

D No campo de **Entrada...**, digite **MatrizEscalonada(m1)** e pressione **Enter**. Deste modo, obtém-se a matriz aumentada do sistema na forma escalonada.



No GeoGebra, as matrizes são representadas utilizando parênteses.

Portanto, obtemos, de maneira imediata, que a solução do sistema é $(8, -4, -1, 3)$.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Determine a solução dos seguintes sistemas lineares.

a) $\begin{cases} 8a + b + 5c = 301 \\ -7a + 6b + 2c = -189 \\ 2a - 4b - 10c = -190 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 3w = 179 \\ -2x + z + w = -135 \\ 3y - 2z - 2w = 91 \\ -2x + y + z = -155 \end{cases}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Discussão de um sistema linear

Dado um sistema linear em que um ou mais coeficientes são dados por um parâmetro real, podemos classificar esse sistema em SI, SPD ou SPI em função desses parâmetros.

Uma das maneiras de discutir um sistema linear é utilizando o método do escalonamento.

Exemplo

Vamos discutir o sistema $\begin{cases} x + 3y + 5z = 12 \\ -2x + 2y + 3z = 3 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$ em função de a. Para isso, inicialmente escalonamos o sistema.

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 12 \\ -2x + 2y + 3z = 3 \\ x - y + az = 1 \end{cases} \xrightarrow[\cdot 2]{\cdot (-1)} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = 12 \\ 8y + 13z = 27 \\ -4y + (a - 5)z = -11 \end{cases} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = 12 \\ 8y + 13z = 27 \\ (2a + 3)z = 5 \end{cases}$$

De acordo com o sistema escalonado obtido, ele pode ser SPD, se $2a + 3 \neq 0$, ou SI, se $2a + 3 = 0$. Segue que:

- $2a + 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{3}{2}$

  Para qualquer a real diferente de $-\frac{3}{2}$.
- $2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

  Para $a = -\frac{3}{2}$, o sistema é SI, pois nesse caso o coeficiente de z na 3ª equação será zero; consequentemente, essa equação não será satisfeita, seja qual for z pertencente aos reais.

Para discutir um sistema linear que tem o mesmo número de incógnitas e de equações, podemos utilizar determinantes. Para isso, calculamos o determinante D da matriz dos coeficientes:

- se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado (SPD);
- se $D = 0$, o sistema pode ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI). Nesse caso, temos de fazer uma análise mais detalhada.

Exemplos

- $\begin{cases} 6x - 2ay + 3z = 1 \\ 3x + y + z = 4 \\ -x + ay - z = 1 \end{cases}$

  Calculamos inicialmente o determinante D da matriz dos coeficientes.

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -2a & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2a + 9a + 3 - 6a - 6a = -a - 3$$

  Para que o sistema seja SPD, temos $-a - 3 \neq 0$, ou seja, $a \neq -3$.

  Para verificar a classificação do sistema quando $a = -3$, substituímos esse valor no sistema e resolvemos.

$$\begin{cases} 6x + 6y + 3z = 1 \\ 3x + y + z = 4 \\ -x - 3y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow[\cdot \frac{1}{3}]{\cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 6y + 3z = 1 \\ 4y + z = -7 \\ -8y - 2z = 7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 6y + 3z = 1 \\ 4y + z = -7 \\ 0y + 0z = -7 \end{cases}$$

  Como a 3ª equação do sistema obtido não é satisfeita para quaisquer y e z reais, o sistema é impossível se $a = -3$.

  Em resumo, o sistema é SPD se $a \neq -3$ e SI se $a = -3$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- $\begin{cases} 2ax - 8y = 12 \\ -3x + 3ay = -9 \end{cases}$ $\qquad D = \begin{vmatrix} 2a & -8 \\ -3 & 3a \end{vmatrix} = 6a^2 - 24$

Para que o sistema seja SPD, é preciso que $6a^2 - 24 \neq 0$, ou seja, $a \neq 2$ e $a \neq -2$.
Considerando $a = 2$, temos:

$$\begin{cases} 4x - 8y = 12 & \cdot 3 \\ -3x + 6y = -9 & \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 24y = 36 \\ -12x + 24y = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 24y = 36 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Portanto, para $a = 2$, o sistema é SPI.
Agora, considerando $a = -2$, temos:

$$\begin{cases} -4x - 8y = 12 & \cdot(-3) \\ -3x - 6y = -9 & \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 24y = -36 \\ -12x - 24y = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 24y = -36 \\ 0x + 0y = -72 \end{cases}$$

Portanto, para $a = -2$, o sistema é SI.
Em resumo, o sistema é SPD para $a \neq 2$ e $a \neq -2$, SPI para $a = 2$ e SI para $a = -2$.

Exercícios e problemas resolvidos

R6 Classifique o sistema homogêneo $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$.

Resolução

Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 4 - 1 + 4 - 2 = 0$$

Como $D = 0$, o sistema pode ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI). Por outro lado, o sistema admite a solução trivial $(0, 0, 0)$, pois é homogêneo. Portanto, o sistema é SPI.

Explique aos alunos que, como todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial (0,0,...,0), então um sistema linear homogêneo é SPD se $D \neq 0$ e SPI se $D = 0$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

27. d) SPD: $a \neq 0$ e $a \neq -1$; SI: $a = 0$ ou $a = -1$

27 Discuta os sistemas lineares em função do parâmetro a.

a) $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x - ay = -8 \end{cases}$ SPD: $a \neq 2$; SPI: $a = 2$

b) $\begin{cases} ax - y = -2 \\ 3x + ay = 6 \end{cases}$ SPD: para qualquer a pertencente aos reais.

c) $\begin{cases} ax + ay = 18 \\ x - y = 4 \end{cases}$ SPD: $a \neq 0$; SI: $a = 0$

d) $\begin{cases} (a + 1)x = 3 \\ 4x + ay = 4 \end{cases}$

28 Qual deve ser a relação entre as constantes k_1 e k_2 para que o sistema $\begin{cases} 5x - 6y = k_1 \\ -10x + 12y = k_2 \end{cases}$ seja SI? $k_2 \neq -2k_1$

29 Determine o valor da constante a de modo que o sistema seja possível e determinado. Em seguida, a partir dessa restrição, atribua um valor para a e resolva o sistema. $a \neq 0$; Uma possível resposta: $a = 1$ e $(21, 4, 16)$.

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ (a - 1)x - y + z = 12 \\ x + y - z = 9 \end{cases}$$

30 Discuta o sistema linear indicado abaixo, sabendo que a e b são constantes reais. SPD: $a \neq -\frac{1}{2}$; SPI: $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 4$; SI: $a = -\frac{1}{2}$ e $b \neq 4$

$$\begin{cases} 3x - ay = 2 \\ 6x + y = b \end{cases}$$

31 Determine o valor de a para que a equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & 4 & a \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ admita somente a solução trivial. $a \neq \frac{10}{3}$

32 O sistema linear $\begin{cases} x + y = z \\ 3x - y = -z \\ -x + 5y = 10z \end{cases}$ é SPD, SPI ou SI? SPD

33 Determine o valor real de p para que o sistema homogêneo não admita apenas a solução trivial. $p = -1$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 2x + py - z = 0 \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

9 Circunferência

Uma constelação de satélites

Você usa ou já usou um receptor GPS?

O GPS (do inglês, *Global Positioning System* – Sistema de Posicionamento Global) foi desenvolvido na década de 1970 pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos para fins militares. Na década de 1980, seu uso foi liberado para outros países, nos mais variados segmentos civis, como navegação, aviação, topografia, controle de frotas e agricultura. Apesar do avanço tecnológico, alguns erros fazem parte do sistema e variam em função da precisão do aparelho receptor.

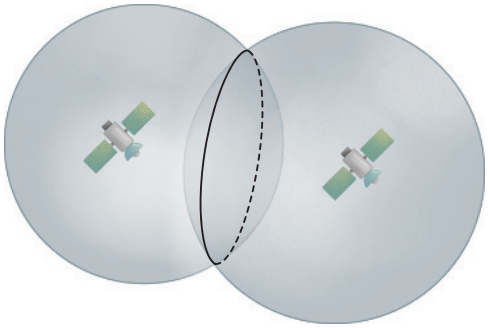
Atualmente, receptores de GPS são populares e acessíveis, podendo ser encontrados em veículos, computadores, celulares ou mesmo relógios inteligentes. Eles são utilizados em diferentes situações, por exemplo, para rastrear animais, obter a posição de veículos, orientar motoristas, obter informações sobre a altitude durante a prática de esportes, como alpinismo, indicar a posição de drones, entre outros.

Por meio da medida do intervalo de tempo entre a emissão e o recebimento do sinal, o receptor calcula a distância que está de cada satélite. Com o auxílio desses dados, o receptor utiliza um princípio matemático denominado **triangulação das distâncias**, ou simplesmente **trilateração**, para obter a latitude e a longitude do ponto em que se encontra. Utilizando informações de um quarto satélite, é possível determinar também sua altitude.

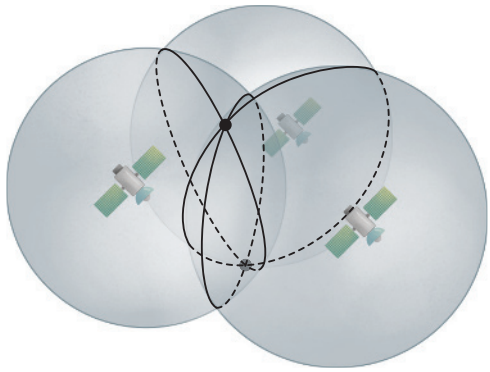
Para obter a medida de tempo de forma precisa, cada satélite contém relógios atômicos. Entretanto, o aparelho receptor pode trabalhar com relógios de quartzo, que são menos precisos e podem induzir a possíveis erros de alguns metros.

FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS:
1.MECHANIK/SHUTTERSTOCK;
2.ANTON FOLTIN/SHUTTERSTOCK;
3.GALAPAGOS PHOTO/SHUTTERSTOCK;
4.MDBILDES/SHUTTERSTOCK;
5.ANGIEYEOH/SHUTTERSTOCK;
6.ARTISTE2D3D/SHUTTERSTOCK;
7.GULIVERIS/SHUTTERSTOCK;
8.VADIM GEORGIEV/SHUTTERSTOCK;
9.SPAXIAX/SHUTTERSTOCK;
10.ANUCHA TIEMSOM/SHUTTERSTOCK;
11.ADIKE/SHUTTERSTOCK;
12.© 2020/GOOGLE MAPS

Trilateração



É como se o aparelho criasse esferas hipotéticas em torno de cada satélite, onde o objeto a ser localizado estaria. Considerando que o objeto esteja simultaneamente na superfície das duas esferas, ele poderá ser localizado na interseção dessas esferas, ou seja, em uma circunferência.



Considerando que o objeto esteja também na superfície de uma terceira esfera, ele poderá ser localizado em apenas dois pontos, que surgem da interseção dessa esfera com a circunferência já obtida anteriormente. Um dos pontos, geralmente, estará situado no subsolo ou na atmosfera, o outro corresponderá à localização do objeto e do receptor.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Fonte de pesquisa: *Veja*, Abril, São Paulo, ano 39, n. 84, p. 64-65, dez. 2006. Edição especial.

Para o funcionamento do GPS, existem 24 satélites posicionados em 6 órbitas em torno da Terra de forma sincronizada e otimizada. Com isso, pelo menos quatros deles podem monitorar um mesmo ponto no globo terrestre.

O receptor GPS – que pode ser um computador, celular ou mesmo um relógio inteligente – envia e recebe sinais na frequência de rádio para esses satélites.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Para utilizar o princípio da trilateração, de que tipo de medida o receptor GPS necessita? A medida do intervalo de tempo entre a emissão e o recebimento do sinal entre o receptor e os satélites.

B Saber a que distância o receptor está de um satélite é suficiente para obter sua posição na superfície terrestre? Justifique sua resposta.
Não, pois há mais de uma posição na superfície terrestre com a mesma distância do satélite.

C De acordo com o esquema, que figura geométrica foi obtida pela interseção das duas esferas? E dessa figura com a outra esfera? uma circunferência; dois pontos.

D Que informações podem ser obtidas por meio de um aparelho receptor GPS, visando à orientação no espaço terrestre? A latitude, a longitude e a altitude referentes a um ponto qualquer na Terra.

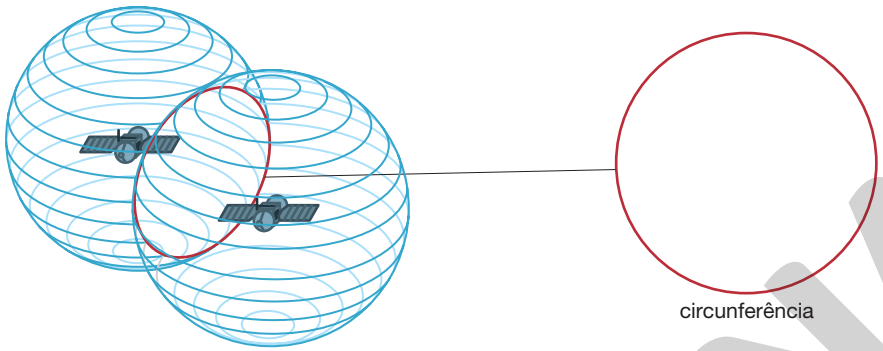
E Pesquise outras situações nas quais os receptores GPS podem ser utilizados. Resposta pessoal.

Nas páginas a seguir, estudaremos os elementos e as características da **circunferência** por meio de uma abordagem analítica, ou seja, vamos escrever a equação algébrica que define essa figura no plano cartesiano. Essas equações nos permitem calcular distâncias envolvendo pontos das circunferências, de modo parecido com o cálculo realizado pelos receptores GPS utilizando o princípio da trilateração.

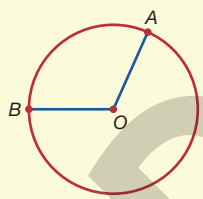
MOEDA

A circunferência

Vimos anteriormente que no funcionamento do GPS é utilizado um princípio matemático chamado trilateração, a fim de obter as coordenadas geográficas em que determinado ponto se encontra na superfície da Terra. No esquema apresentado na ocasião, que detalha a trilateração, vimos que a interseção de duas esferas determina uma circunferência.

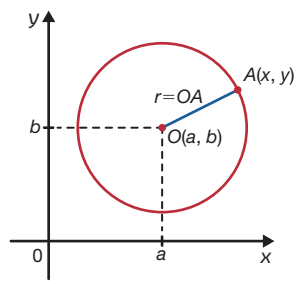


A **circunferência** é uma linha fechada em um plano, em que todos os pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, denominado **centro**. Cada segmento de reta com uma extremidade no centro e outra na circunferência é chamado **raio**.



centro: O
raios: $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$

Neste tópico, faremos o estudo analítico da circunferência no plano cartesiano. Para isso, considere inicialmente a circunferência de centro $O(a, b)$ e raio r e um ponto $A(x, y)$ pertencente a ela.



Nessa circunferência, o comprimento r do raio é dado pela distância entre os pontos O e A, ou seja, $r = OA$:

$$OA = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2} \longleftarrow \text{equação reduzida}$$

A equação obtida é denominada **equação reduzida** da circunferência.

Desenvolvendo essa equação, obtemos a **equação geral** da circunferência:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0} \longleftarrow \text{equação geral}$$

A fim de simplificar a escrita, vamos dizer, em alguns contextos, "segmento m" quando, na realidade, queremos nos referir à medida do comprimento de tal segmento, que, nesse caso, é m. Por exemplo, em vez de dizer "raio cuja medida do comprimento é r", diremos "raio r".

No caso em que o centro da circunferência é a origem $O(0, 0)$, a equação reduzida é dada por $x^2 + y^2 = r^2$, e a equação geral, por $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Vamos obter as equações reduzida e geral da circunferência de centro $O(4, 5)$ e raio 3.

- equação reduzida:

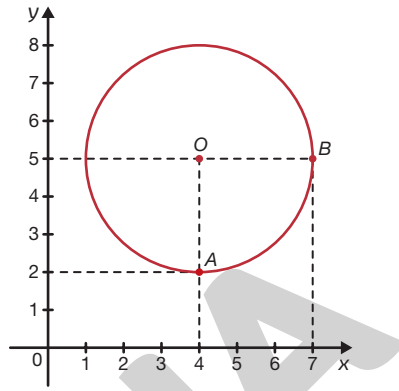
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9}$

- equação geral:

$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0}$



Nesse caso, os pontos cuja distância de $O(4, 5)$ é de 3 unidades pertencem à circunferência e satisfazem sua equação. Alguns desses pontos são:

- $A(4, 2)$: $(4 - 4)^2 + (2 - 5)^2 = 9 \Rightarrow 0^2 + (-3)^2 = 9 \Rightarrow 9 = 9$
- $B(7, 5)$: $(7 - 4)^2 + (5 - 5)^2 = 9 \Rightarrow 3^2 + 0^2 = 9 \Rightarrow 9 = 9$

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Determine as coordenadas do centro e o comprimento do raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$.

Resolução

Podemos obter as coordenadas do centro e o comprimento do raio da circunferência de duas maneiras.

- 1ª maneira: completando quadrados.

O método de completar quadrados consiste em escrever a equação na forma reduzida $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + y^2 - 6y - 3 = \underbrace{4 - 4 + 9 - 9}_{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overbrace{x^2 + 4x + 4}^{(x + 2)^2} + \overbrace{y^2 - 6y + 9}^{(y - 3)^2} = 4 + 9 + 3 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

Portanto, a equação representa uma circunferência com centro em $(-2, 3)$ e raio 4.

- 2ª maneira: método da comparação.

O método da comparação consiste em comparar, termo a termo, os coeficientes da equação geral da circunferência.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2$$

Logo:

$-2a = 4 \Rightarrow a = -2$

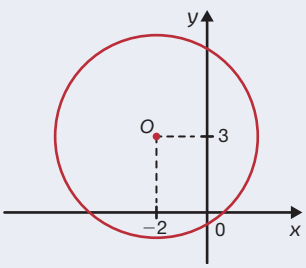
$-2b = -6 \Rightarrow b = 3$

$a^2 + b^2 - r^2 = -3 \Rightarrow (-2)^2 + 3^2 - r^2 = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + 9 - r^2 = -3 \Rightarrow r^2 = 16 \begin{cases} r = 4 \\ r = -4 \text{ (impossível)} \end{cases}$

Note que $r = 4$, pois r é uma medida de comprimento.

Portanto, a equação representa uma circunferência com centro em $(-2, 3)$ e raio 4.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

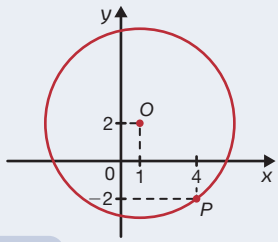
R2 Determine a equação geral da circunferência de centro $O(1, 2)$ que passa pelo ponto $P(4, -2)$.

Resolução

Como o comprimento do raio da circunferência é OP, temos:

$$OP = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} \Rightarrow (OP)^2 = 3^2 + (-4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (OP)^2 = 25 \Rightarrow r^2 = 25$$



Assim, a equação geral da circunferência é dada por:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0}$$

R3 Qual é a área do círculo limitado pela circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 31 = 0$?

Resolução

Utilizando o método do completamento de quadrados, temos:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 31 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y - 31 = \underbrace{1 - 1 + 4 - 4}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overbrace{x^2 + 2x + 1}^{(x+1)^2} + \overbrace{y^2 - 4y + 4}^{(y-2)^2} = 31 + 1 + 4 \Rightarrow$$

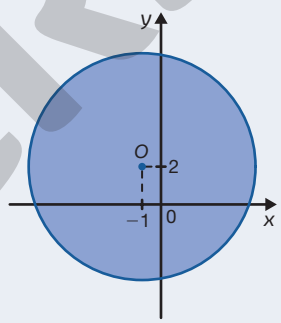
$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 6^2$$

Logo, a equação representa uma circunferência com centro em $(-1, 2)$ e raio 6.

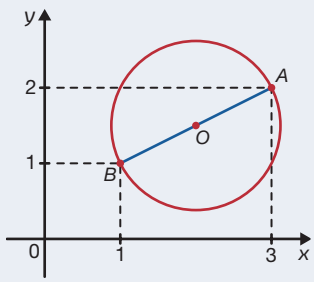
Assim:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$$

Portanto, a área do círculo é 36π u.a.



R4 Na circunferência ao lado, os pontos A e B são extremidades de um diâmetro. Escreva, na forma reduzida, a equação dessa circunferência.



Resolução

Seja $O(a, b)$ o centro da circunferência. Como $\overline{AB}$ é um diâmetro, o ponto O é o ponto médio de $\overline{AB}$. Assim:

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad b = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Logo, $O\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

O comprimento do raio da circunferência é $r = OA = OB$. Assim, temos:

$$r = OA = \sqrt{(3-2)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow r^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{5}{4}$$

Logo, a equação da circunferência é:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Determine as coordenadas do centro O e o comprimento do raio r da circunferência de cada equação a seguir.

a) $x^2 + (y-2)^2 = 9$ $O(0,2)$; $r = 3$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$ $O(-1,0)$; $r = 2\sqrt{2}$

c) $x^2 + 6x + y^2 + y = -\frac{33}{4}$ $O\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$; $r = 1$

d) $y^2 + 8(y-x) + x^2 + 28 = 0$ $O(4,-4)$; $r = 2$

2 Escreva a equação reduzida da circunferência que tem o centro C e o comprimento do raio r indicados em cada item. Respostas no final do livro.

a) $C(1,4)$ e $r = 7$.

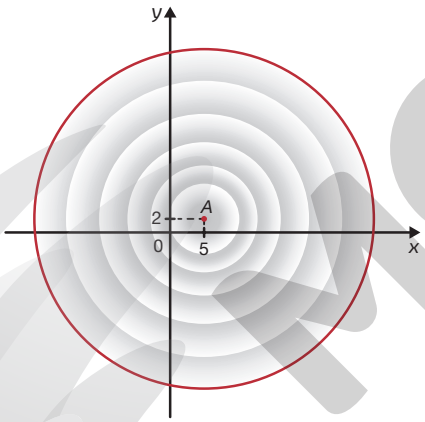
b) $C(-2,-6)$ e $r = \sqrt{3}$.

c) $C(-5,0)$ e $r = 4$.

d) $C(3,-1)$ e $r = 5$.

3 Dados os pontos $A(-5,2)$ e $B(1,4)$, escreva a equação reduzida da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$

4 No plano cartesiano a seguir, em que cada unidade representa 1 m, o ponto $A(5,2)$ representa uma fonte sonora cujo som produzido se propaga em todas as direções, atingindo uma distância máxima de 25 m.



RONALDO INÁCIO

a) Determine a área atingida por essa fonte sonora. Para isso, admita $\pi = 3{,}14$. 1 962,5 m²

b) Escreva a equação reduzida da circunferência que limita a área atingida por essa fonte sonora. $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 625$

5 Escreva na forma reduzida a equação da circunferência $5x^2 + 5y^2 + 40x - 10y + 55 = 0$. $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 6$

6 Determine a equação geral da circunferência que passa pelos pontos $P(1,2)$, $Q\left(2, \sqrt{3}\right)$ e $R(-1,0)$. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

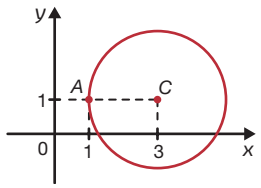
7 Qual é a equação geral da circunferência que passa pelo ponto $A(2,1)$ e tem centro no ponto $C(1,-3)$? $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 7$

8 Verifique quais pontos pertencem à circunferência de centro $C(-6,4)$ e raio $\sqrt{8}$. Q e S

- $P(3,-1)$
- $R(-2,-8)$
- $Q(-8,6)$
- $S(-4,2)$

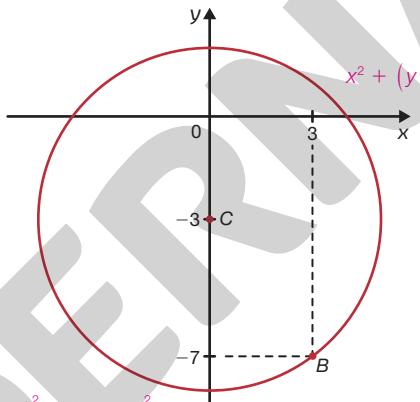
9 Escreva a equação reduzida que representa cada circunferência.

a)



$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

b)



$x^2 + (y+3)^2 = 25$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

10. b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$

10 O quadrado de vértices $A(1,4)$, $B(1,2)$, $C(3,2)$ e $D(3,4)$ está inscrito em uma circunferência.

a) Qual é o comprimento do lado do quadrado? 2 u.c.

b) Escreva a equação reduzida da circunferência.

c) Calcule a razão entre a área do círculo limitado pela circunferência e a área da região determinada pelo quadrado. $\frac{\pi}{2}$

11 Escreva na forma reduzida a equação da circunferência $5x^2 + 5y^2 + 10(x-5y) + 80 = 0$. Em qual quadrante está localizado o centro da circunferência? $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 10$; 2º quadrante

12 Para quais valores de m a equação $x^2 + 10x + y^2 - 6y + m = 0$ representa uma circunferência? $m < 34$

13 Represente graficamente as soluções de cada equação a seguir. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$

c) $x^2 + (y-3)^2 = \frac{1}{4}$

d) $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 23 = 0$

14 Calcule o valor de k para que o ponto $A(2,k)$ pertença à circunferência de centro $C(1,4)$ e raio $\sqrt{2}$. $k = 3$ ou $k = 5$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

10 Circunferência e Arte

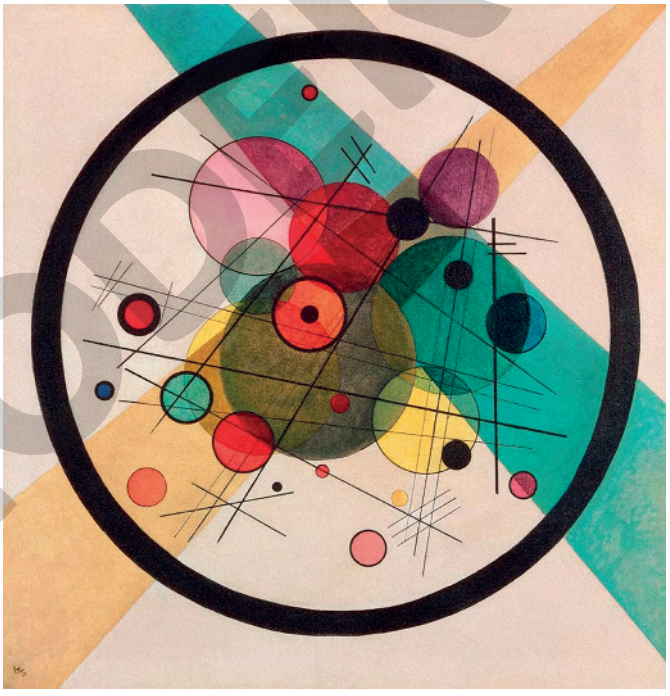
Tudo começa num ponto

Nascido em Moscou, na Rússia, Wassily Wassilyevich Kandinsky (1866-1944) teve aulas de Música e Artes plásticas quando era criança, mas passou a dedicar-se exclusivamente à Arte aos 30 anos, depois de estudar Direito e Economia na Universidade de Moscou. Ele abandonou a carreira de professor de Direito e mudou-se para Munique, na Alemanha, onde passou a estudar Arte.

Naquela época, as pessoas acreditavam que os desenhos e as pinturas deveriam representar a realidade, ou seja, quanto mais realista, melhor a obra e o artista. Ao explorar traços geométricos e cores contrastantes, Kandinsky foi o primeiro a distanciar-se definitivamente dessa concepção, tornando-se um dos pioneiros da arte abstrata.

Wassily Kandinsky.

A maioria de suas obras possui a composição de triângulos, quadrados, retângulos, linhas e, principalmente, círculos e circunferências, como é o caso da obra *Círculos em um círculo*.



KANDINSKY, Wassily. *Círculos em um círculo*. 1923. Óleo sobre tela, 60 cm × 61 cm.

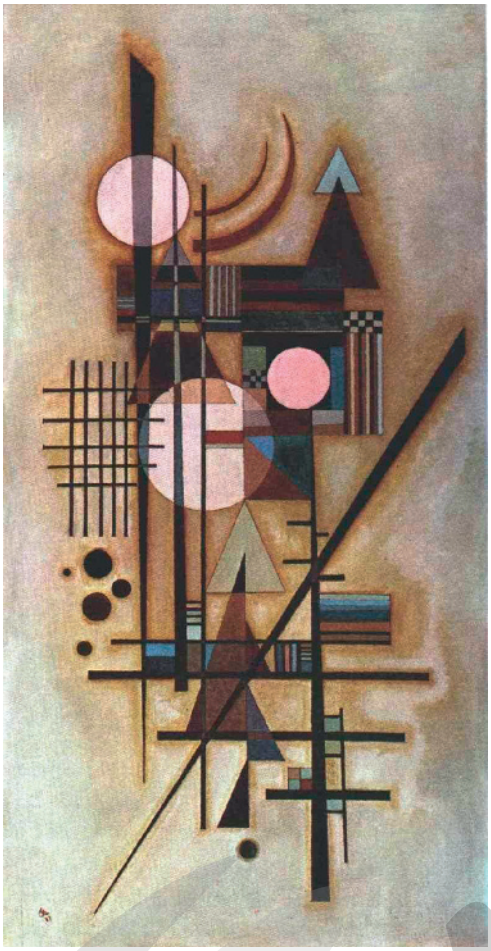
REPRODUÇÃO – MUSEU DE ARTE DA FILADÉLFIA, PENSILVÂNIA, EUA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

FOTOMONTAGEM DE GUSTAVO PEDROSA. FOTOS: 1.JARNBEER19/SHUTTERSTOCK; 2.AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 3.VVOE/SHUTTERSTOCK; 4.AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 5.SENSVECTOR/SHUTTERSTOCK; 6.CHINGRAPH/SHUTTERSTOCK; 7.OPTIMARC/SHUTTERSTOCK; 8.MARCOVARRO/SHUTTERSTOCK; 9.IRIN-K/SHUTTERSTOCK; 10.RT DESIGN STUDIO/SHUTTERSTOCK

Kandinsky poderia ter sido um professor de Direito ou seguido carreira jurídica, como tantos outros. Entretanto, ele percebeu que a Arte não deveria se resumir a imitar a natureza. Nas palavras do artista: "Tudo começa num ponto". Ele também era músico e pensava nas cores e nas formas como se fossem melodias (os quadros mais simples) e sinfonias (os mais complexos). Veja outras composições desse artista em que é possível identificar formas circulares que lembram círculos e circunferências.

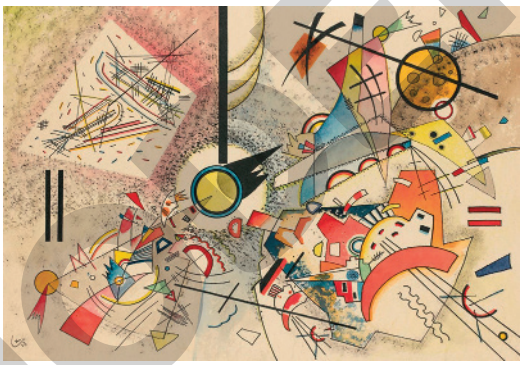


REPRODUÇÃO – COLEÇÃO PARTICULAR

KANDINSKY, Wassily. *Dur et mou*. 1927. Óleo sobre tela, 100 cm × 50 cm.

REPRODUÇÃO – CENTRO GEORGES POMPIDOU, PARIS, FRANÇA

KANDINSKY, Wassily. *Sobre os pontos*. 1928. Óleo sobre tela, 140 cm × 140 cm.



REPRODUÇÃO – COLEÇÃO PARTICULAR

KANDINSKY, Wassily. *Aquarela movimentada*. 1923. Óleo sobre tela, 75 cm × 108 cm.

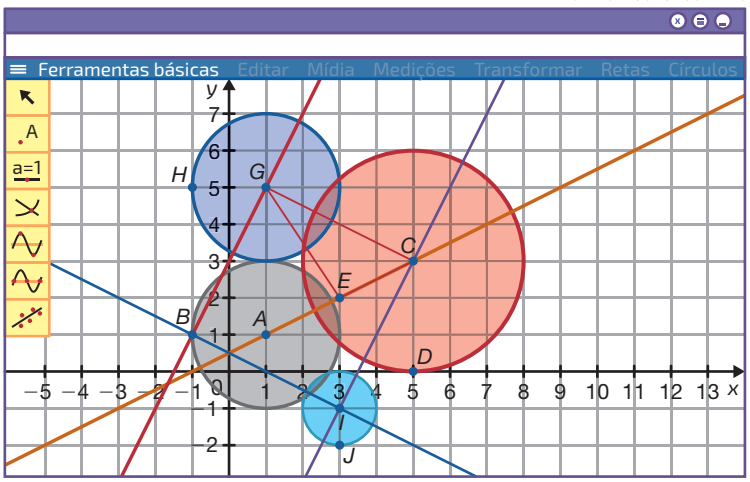
Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Junte-se a um colega e pesquise com ele mais informações sobre a arte abstrata. Expliquem por que ela surgiu em contraposição à arte figurativa, citando outros artistas representantes, como František Kupka, Kasimir Malevich, e Robert Delaunay. Resposta pessoal.

B Inspirado nas obras do artista, certo aluno utilizou o *software* de Geometria dinâmica GeoGebra para criar uma composição de figuras geométricas. Ele usou a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos** para construir as circunferências de centro em $A(1, 1)$, $C(5, 3)$, $G(1, 5)$ e $I(3, -1)$ que passam pelos respectivos pontos $B(-1, 1)$, $D(5, 0)$, $H(-1, 5)$ e $J(3, -2)$, conforme a figura ao lado. Escreva a equação reduzida dessas circunferências.

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$; $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$;
$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$; $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$

RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO



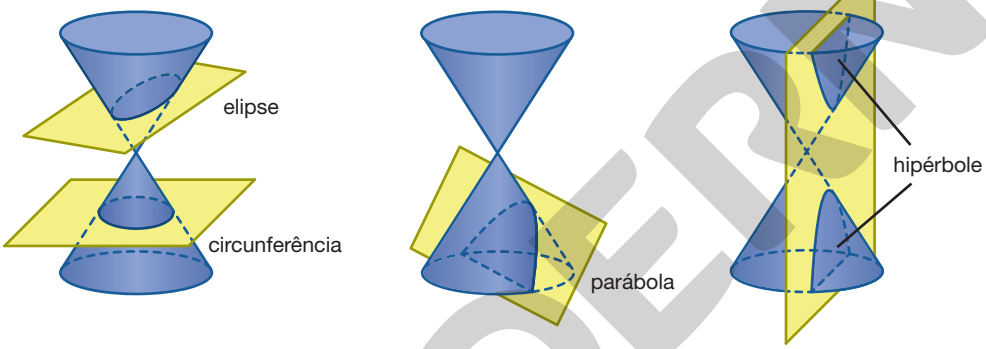
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11 Cônicas

BNCC
• CE3CNT

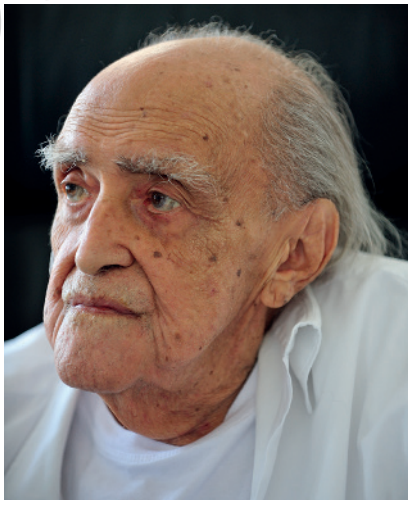
Cônicas nas construções

Devido às suas contribuições, podemos destacar três grandes matemáticos que viveram por volta do século III a.C.: Euclides, Arquimedes e Apolônio. Embora menos famoso que os dois primeiros, Apolônio, que nasceu por volta de 262 a.C., em Perga, no sul da Ásia Menor, realizou diversas contribuições à Matemática. Em sua obra mais famosa, intitulada *Cônicas*, Apolônio apresentou as curvas cônicas com detalhes, superando os tratados escritos anteriormente relacionados a esse assunto. Nessa obra, as cônicas são obtidas a partir de seções da superfície de um cone duplo. Os nomes *elipse*, *parábola* e *hipérbole* foram introduzidos por Apolônio, com base em outros termos, possivelmente pitagóricos, utilizados para designar elementos matemáticos.



RONALDO INÁCIO

Se Apolônio definiu, o arquiteto brasileiro Oscar Ribeiro de Almeida Niemeyer Soares Filho, mais conhecido como Oscar Niemeyer, considerado um dos maiores gênios da arquitetura moderna, usou as curvas cônicas em vários de seus projetos.



T.PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK
© NIEMEYER, OSCAR/AUTVIS, BRASIL, 2020

Oscar Niemeyer faleceu em 5 de dezembro de 2012, no Rio de Janeiro, aos 104 anos de idade.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Só em Brasília, Niemeyer projetou o Congresso Nacional, a Catedral de Brasília, os prédios dos ministérios, o Palácio do Planalto, entre outros prédios residenciais e comerciais. Uma das características de suas obras é a forma curva e arredondada. Mas de todas as curvas geométricas possíveis, as formas parabólica e hiperbólica estão presentes em várias de suas construções.

061. FILMES/SHUTTERSTOCK © NIEMEYER, OSCAR/AUTVIS, BRASIL, 2020

As hipérboles das cúpulas invertidas do Congresso Nacional, casa da Câmara dos Deputados e do Senado Federal, em Brasília (DF), mostram, de forma sutil, o tema da "inversão", usada por Niemeyer em alguns projetos.

CRISTIANO A COSTA/SHUTTERSTOCK © NIEMEYER, OSCAR/AUTVIS, BRASIL, 2020

Na Catedral de Brasília, em Brasília (DF), Niemeyer optou pela hipérbole para o formato dos 16 pilares de 30 m de altura cada. Na concepção, eram 21 pilares de 40 m de altura, mas foram reduzidos por questões de estética.

DIEGO GRANDI/SHUTTERSTOCK © NIEMEYER, OSCAR/AUTVIS, BRASIL, 2020

O efeito desejado por Niemeyer na fachada do Palácio da Alvorada, em Brasília (DF), foi criar pilares que recebessem a carga da laje com efeito decorativo e formatos curvos.

Fonte de pesquisa: <https://periodicos.unb.br/index.php/paranoa/article/download/11302/9944/>. Acesso em: 28 maio 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Você já viu alguma construção projetada por Oscar Niemeyer? Em caso afirmativo, qual foi a construção e quais suas principais características? Resposta pessoal.

B Pesquise outras obras de Niemeyer no Brasil e no resto do mundo, além das apresentadas, e descreva algumas características geométricas dessas obras e da presença de linhas curvas nelas. Resposta pessoal.

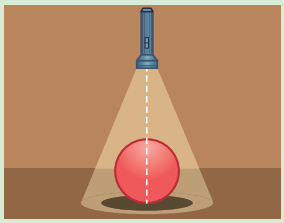
Existem outras diversas obras arquitetônicas, dispersas pelo mundo, e que empregam as curvas cônicas em seu formato. Essas são apenas algumas das aplicações das curvas cônicas em situações reais, as quais são empregadas também na construção de espelhos, no estudo da Astronomia, entre outros. Nas próximas páginas, estudaremos as **seções cônicas** no plano cartesiano e as equações algébricas que as representam.

FOTOMONTAGEM DE GUSTAVO PEDROSA. FOTOS: 1.ANFISA FOCUSOVA/SHUTTERSTOCK; 2.ANN1911/SHUTTERSTOCK; 3.RON DALE/SHUTTERSTOCK; 4.PHOTKA/SHUTTERSTOCK; 5.CALLAHAN/SHUTTERSTOCK; 6.P A/SHUTTERSTOCK; 7.HCHJJL/SHUTTERSTOCK; 8.WINDAWAKE/SHUTTERSTOCK; 9.MIKHAIL GRACHIKOV/SHUTTERSTOCK; 10.PISCARI/SHUTTERSTOCK; 11.SOBAKAPAVLOVA/SHUTTERSTOCK; 12.PERATEK/SHUTTERSTOCK; 13.BIBADASH/SHUTTERSTOCK; 14.LAGUI/SHUTTERSTOCK; 15.FBF/SHUTTERSTOCK; 16.DIANA TALIUN/SHUTTERSTOCK

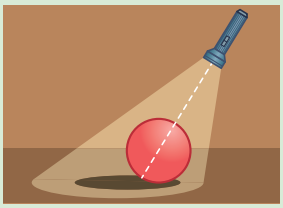
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando as cônicas

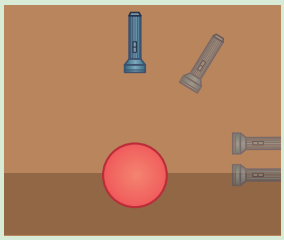
Nas páginas anteriores, vimos que o matemático Apolônio obteve as curvas cônicas a partir de secções da superfície de um cone duplo. Outra maneira é obter as curvas cônicas de maneira prática, a partir da sombra de uma bola obtida com diferentes posições de uma lanterna ou outra fonte de luz. Veja a seguir cada um dos casos.



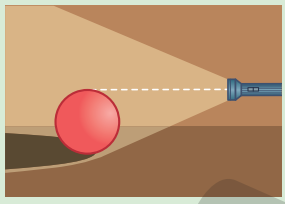
Posicionando uma lanterna verticalmente acima da bola, obteremos uma sombra cujo formato lembra uma região limitada por uma **circunferência**.



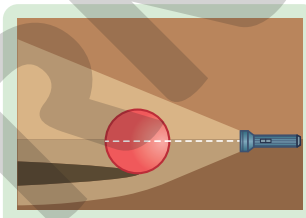
Posicionando uma lanterna obliquamente acima da bola, obteremos uma sombra cujo formato lembra uma região limitada por uma **elipse**.



Considere um ambiente pouco iluminado e uma bola em cima de uma mesa, onde podemos posicionar uma lanterna em diferentes posições.



Posicionando uma lanterna horizontalmente na altura da bola, obteremos uma sombra cujo formato lembra uma região limitada por uma **parábola**.

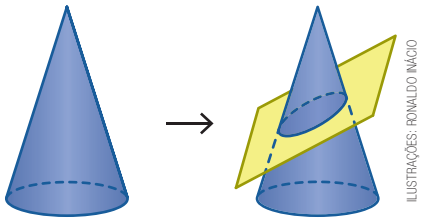


Posicionando uma lanterna horizontalmente abaixo da altura da bola, obteremos uma sombra cujo formato lembra uma região limitada por uma **hipérbole**.

Nos tópicos a seguir, estudaremos um pouco mais sobre a elipse, a hipérbole e a parábola, também chamadas seções cônicas, ou simplesmente cônicas.

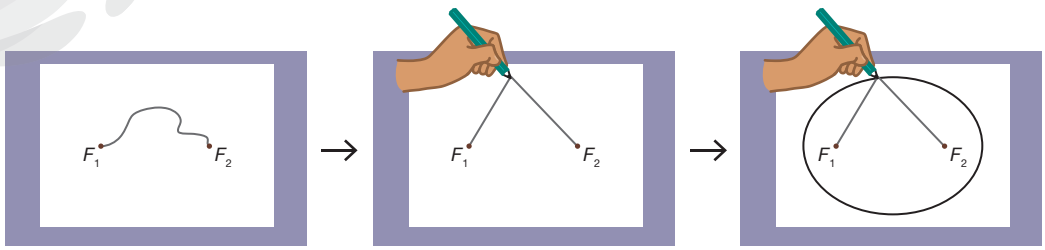
Elipse

Considere a superfície de um cone e um plano que o secione não paralelamente à sua base. Se o plano for concorrente a todas as geratrizes do cone, a seção cônica obtida será a **elipse**.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Para esboçarmos uma elipse, marcamos dois pontos sobre uma folha de papel $(F_1$ e $F_2)$ e fixamos nesses pontos as extremidades de um barbante. Com um lápis na posição indicada, traçamos a curva contínua, de maneira que o barbante permaneça constantemente esticado, obtendo-se ao final uma **elipse**.



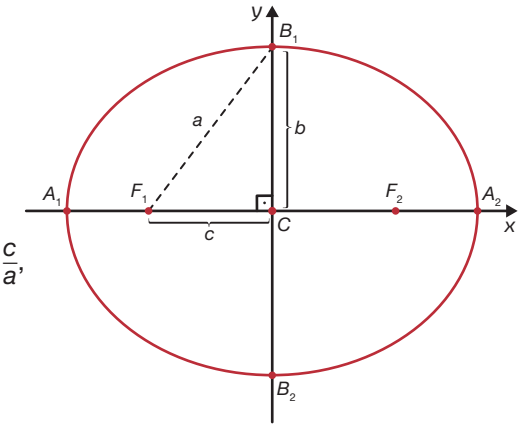
RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

Note que a soma das distâncias de F_1 e F_2 a qualquer ponto da elipse é constante. Nesse caso, igual ao comprimento do barbante.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

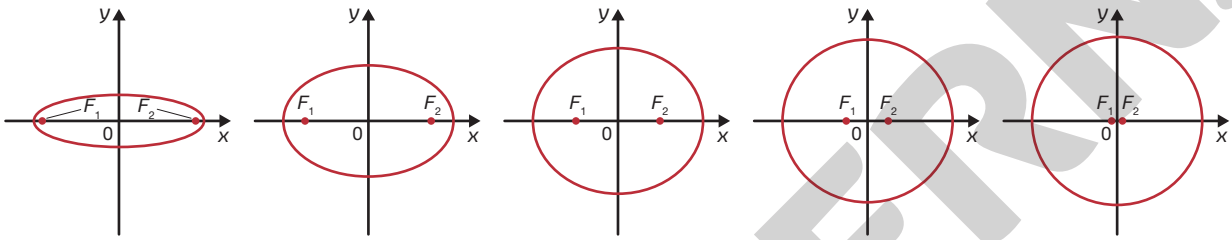
Observe a elipse e seus elementos.

- focos: F_1 e F_2.
- distância focal: $F_1F_2 = 2c$.
- centro: C.
- eixo maior: $\overline{A_1A_2}$, com $A_1A_2 = 2a$.
- eixo menor: $\overline{B_1B_2}$, com $B_1B_2 = 2b$.
- excentricidade: corresponde ao número $e = \frac{c}{a}$, com $0 < e < 1$.



O centro C de uma elipse corresponde ao ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{F_1F_2}$ e de $\overline{B_1B_2}$.

Quanto mais próxima de 1 for a excentricidade de uma elipse, mais "achatada" ela será. Já quanto mais próxima de 0 for a excentricidade, mais ela se assemelhará a uma circunferência.



Ainda de acordo com a figura, note que o triângulo CF_1B_1 é retângulo em C. Assim, a partir do Teorema de Pitágoras, podemos escrever a seguinte relação:

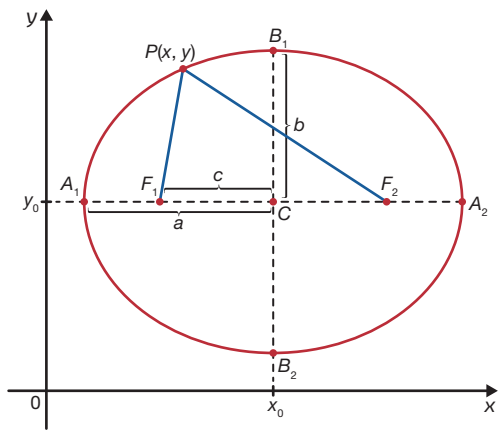
$$a^2 = b^2 + c^2$$

A elipse é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, denominados focos $(F_1$ e $F_2)$, é constante e igual a $2a$, de maneira que $2a$ seja maior que a distância focal $2c$, ou seja, $2a > 2c$.

Para realizarmos o estudo analítico da elipse, consideramos em um plano cartesiano uma elipse com o eixo maior paralelo ao eixo x e um ponto qualquer $P(x, y)$, pertencente a ela.

Desenvolvendo a igualdade $PF_1 + PF_2 = 2a$, utilizando a relação $a^2 = b^2 + c^2$ e efetuando uma grande quantidade de cálculos, obtemos a equação reduzida da elipse de centro $C(x_0, y_0)$, que possui eixo maior paralelo ao eixo x:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

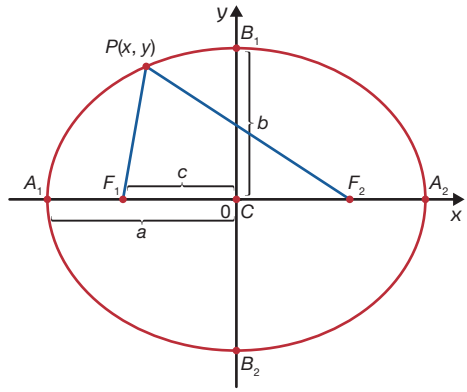


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

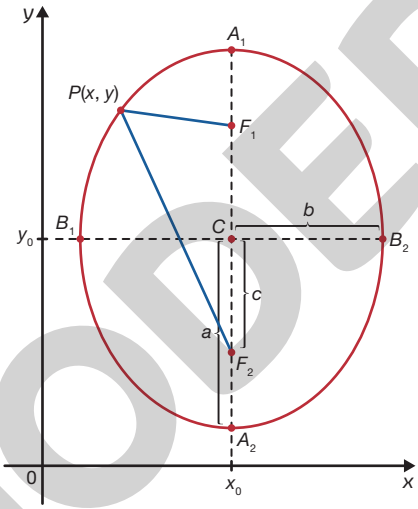
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

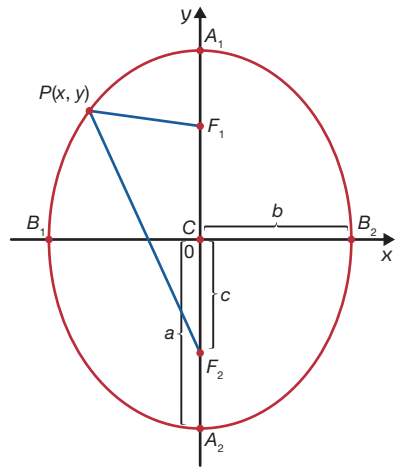
Caso o centro da elipse seja a origem $C(0, 0)$ e os focos F_1 e F_2 pertençam ao eixo x, a equação será dada por: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Ao considerarmos em um plano cartesiano uma elipse com o eixo maior paralelo ao eixo y e centro $C(x_0, y_0)$, obtemos a equação reduzida: $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$.



No caso em que o centro da elipse é a origem $C(0, 0)$, e os focos F_1 e F_2 pertencem ao eixo y, a equação será dada por: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

R1 Esboce no plano cartesiano as elipses cujas equações estão indicadas a seguir.

a) $\dfrac{(x+3)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{8} = 1$

Resolução

a) Nesse caso, temos uma elipse com centro $C(-3, 1)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo x, pois $25 > 16$. Logo:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

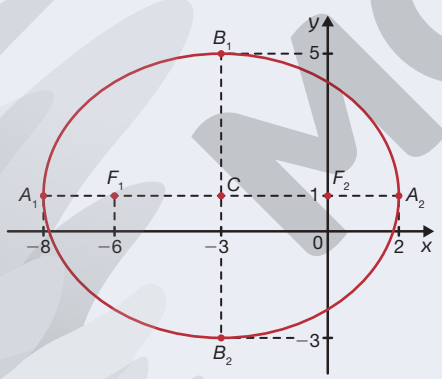
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

Segue que:

- $F_1(x_0 - c, y_0) \Rightarrow F_1(-6, 1)$
- $F_2(x_0 + c, y_0) \Rightarrow F_2(0, 1)$
- $A_1(x_0 - a, y_0) \Rightarrow A_1(-8, 1)$
- $A_2(x_0 + a, y_0) \Rightarrow A_2(2, 1)$
- $B_1(x_0, y_0 + b) \Rightarrow B_1(-3, 5)$
- $B_2(x_0, y_0 - b) \Rightarrow B_2(-3, -3)$

Indicando os pontos C, F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2 em um plano cartesiano e esboçando a elipse, temos:



b) Nesse caso, temos uma elipse com centro $C(1, 2)$, cujo eixo maior é paralelo ao eixo y, pois $4 < 8$. Logo:

$a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

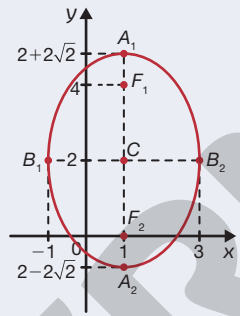
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 8 = 4 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

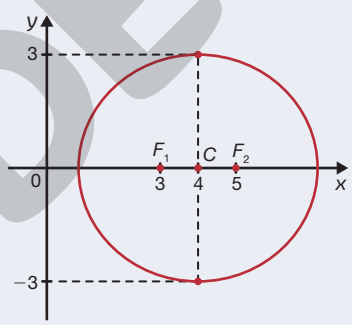
Segue que:

- $F_1(x_0, y_0 + c) \Rightarrow F_1(1, 4)$
- $F_2(x_0, y_0 - c) \Rightarrow F_2(1, 0)$
- $A_1(x_0, y_0 + a) \Rightarrow A_1(1, 2 + 2\sqrt{2})$
- $A_2(x_0, y_0 - a) \Rightarrow A_2(1, 2 - 2\sqrt{2})$
- $B_1(x_0 - b, y_0) \Rightarrow B_1(-1, 2)$
- $B_2(x_0 + b, y_0) \Rightarrow B_2(3, 2)$

Indicando os pontos C, F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2 em um plano cartesiano e esboçando a elipse, temos:



R2 Determine a equação da elipse indicada no plano cartesiano.



Resolução

O eixo maior da elipse está sobre o eixo x, tal que $c = 1$ e $b = 3$. Logo:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 9 + 1 \Rightarrow a^2 = 10$

Como a elipse possui centro $C(4, 0)$ e o eixo maior está sobre o eixo x, a equação é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$$

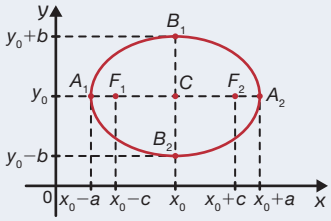
Qual é a excentricidade dessa elipse? $e = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

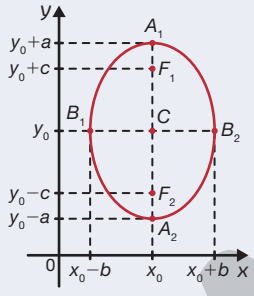
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

- Quando o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo x, temos:
  - $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
  - $F_1(x_0-c, y_0)$
  - $F_2(x_0+c, y_0)$
  - $A_1(x_0-a, y_0)$
  - $A_2(x_0+a, y_0)$
  - $B_1(x_0, y_0+b)$
  - $B_2(x_0, y_0-b)$



- Quando o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo y, temos:
  - $\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$
  - $F_1(x_0, y_0+c)$
  - $F_2(x_0, y_0-c)$
  - $A_1(x_0, y_0+a)$
  - $A_2(x_0, y_0-a)$
  - $B_1(x_0-b, y_0)$
  - $B_2(x_0+b, y_0)$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Uma equação do 2º grau nas incógnitas x e y representa uma elipse se for redutível à forma $\frac{(x-x_0)^2}{q_1}+\frac{(y-y_0)^2}{q_2}=1$, com $q_1>0$, $q_2>0$ e $q_1\neq q_2$.

- $q_1<q_2$, $q_1=b^2$ e $q_2=a^2$, então o eixo maior é vertical.
- $q_1>q_2$, $q_1=a^2$ e $q_2=b^2$, então o eixo maior é horizontal.

R3 Escreva a equação da elipse de focos $F_1(-2,0)$ e $F_2(2,0)$ e excentricidade $e=\frac{1}{3}$.

Resolução

Como o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ é $(0,0)$, a elipse possui centro na origem. Como F_1 e F_2 estão sobre o eixo x, então o eixo maior é sobre o eixo x. De $F_1F_2=2c$, segue que:

$$\sqrt{\left[2-(-2)\right]^2+(0-0)^2}=2c \Rightarrow \sqrt{16}=2c \Rightarrow c=2$$

Utilizando as relações $e=\frac{c}{a}$ e $a^2=b^2+c^2$, calculamos a e b^2.

- $e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{2}{a} \Rightarrow a=6$
- $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 6^2=b^2+2^2 \Rightarrow b^2=32$

Portanto, a equação da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$$

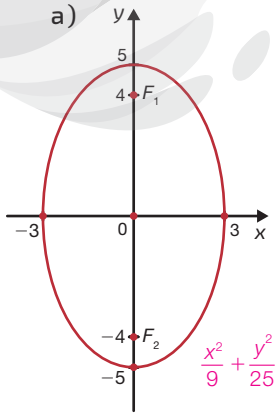
A equação da elipse também pode ser escrita como $8x^2+9y^2=288$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

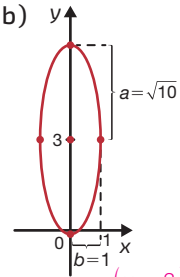
1 Escreva a equação da elipse representada em cada item.

a)



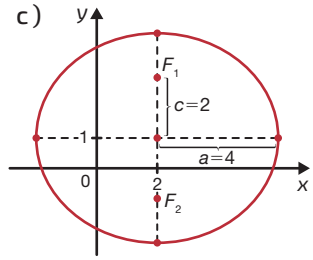
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

b)



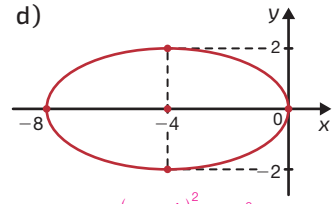
$x^2+\frac{(y-3)^2}{10}=1$

c)



$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{12}=1$

d)



$\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 Determine as coordenadas dos focos das elipses cujas equações estão indicadas.

a) $\frac{(x+4)^2}{100} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$ $F_1(-12, 6)$ e $F_2(4, 6)$

b) $9y^2 + 16x^2 + 18y = 135$ $F_1\left(0, -1+\sqrt{7}\right)$ e $F_2\left(0, -1-\sqrt{7}\right)$

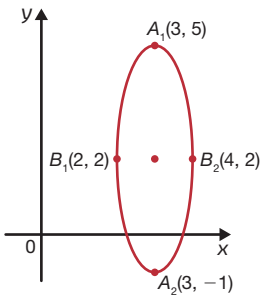
3 Para cada elipse cuja equação ou representação no plano cartesiano está indicada a seguir, calcule a medida do eixo maior, do eixo menor, a distância focal e a excentricidade.

a) $\frac{(x+5)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$ $2a = 4\sqrt{2}$; $2b = 2\sqrt{3}$; $2c = 2\sqrt{5}$; $e = \frac{\sqrt{10}}{4}$

b) $\frac{x^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ $2a = 2\sqrt{5}$; $2b = 4$; $2c = 2$; $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $9(x-9)^2 + 6(y-7)^2 = 54$ $2a = 6$; $2b = 2\sqrt{6}$; $2c = 2\sqrt{3}$; $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d)



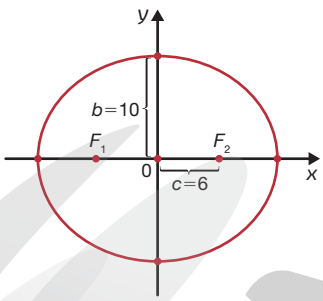
$2a = 6$;

$2b = 2$;

$2c = 4\sqrt{2}$;

$e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

e)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

$2a = 4\sqrt{34}$;

$2b = 20$;

$2c = 12$;

$e = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

4 Esboce no plano cartesiano a elipse de equação:

a) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

b) $x^2 + 16y^2 = 16$

Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

5 Considerando uma elipse com centro na origem, focos em um dos eixos coordenados e passando pelos pontos $(5, 0)$ e $(0, 13)$, determine os focos da elipse. alternativa **d**

a) $(13, 0)$ e $(-13, 0)$

b) $(0, 13)$ e $(0, -13)$

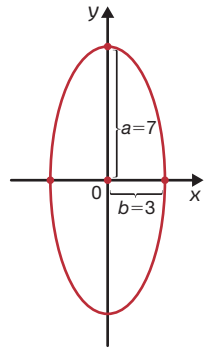
c) $(12, 0)$ e $(-12, 0)$

d) $(0, 12)$ e $(0, -12)$

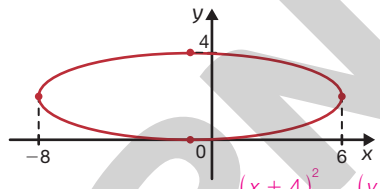
e) $(5, 0)$ e $(-5, 0)$

6 Determine as coordenadas dos focos da elipse indicada em cada item.

a) $F_1\left(0, 2\sqrt{10}\right)$ e $F_2\left(0, -2\sqrt{10}\right)$



b) $F_1\left(-1-3\sqrt{5}, 2\right)$ e $F_2\left(-1+3\sqrt{5}, 2\right)$



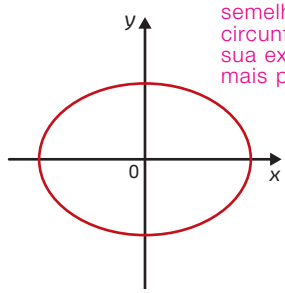
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

7. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

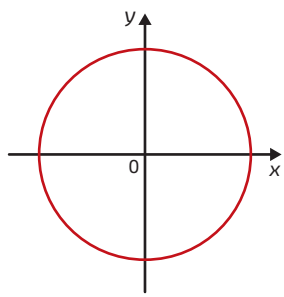
7 Escreva a equação da elipse de focos $F_1(-4, 2)$ e $F_2(-4, 8)$ que passa pelo ponto $P(0, 5)$.

8 Qual das elipses apresentadas tem excentricidade de menor valor, sabendo que os eixos coordenados estão em uma mesma escala? Justifique sua resposta. alternativa **b**; Espera-se que os alunos respondam que essa é a elipse mais semelhante a uma circunferência, logo, sua excentricidade está mais próxima de 0.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

9 Escreva a equação da elipse de centro na origem, com excentricidade $\frac{1}{3}$ e cujos focos estão sobre o eixo das abscissas e distam 6 unidades de comprimento um do outro. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

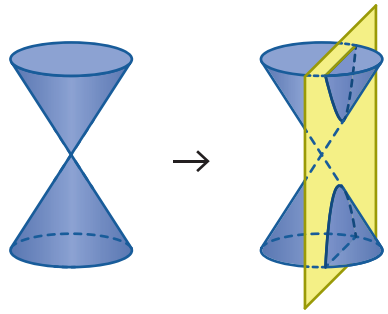
MODERNA

Hipérbole

É importante não confundir o elemento geométrico hipérbole com sua homônima, que consiste em uma figura de linguagem que busca definir de maneira exagerada algo que se queira expressar. Alguns exemplos dessa figura de linguagem na língua portuguesa são:

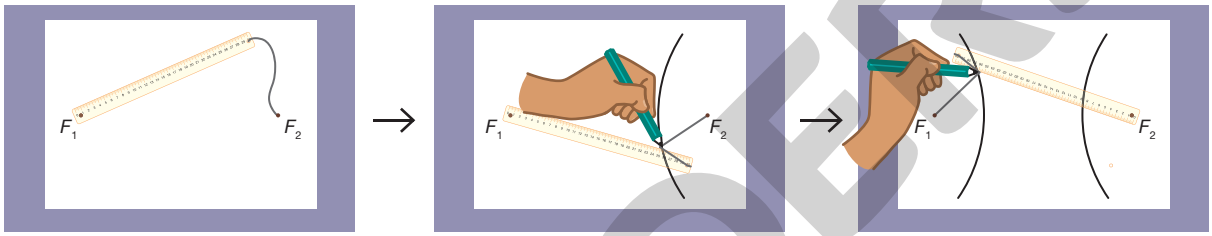
- A plateia morreu de rir.
- Eu já lhe falei um bilhão de vezes.
- Ela chorou um rio de lágrimas de saudade.

Um cone duplo, ao ser secionado nas duas folhas por um plano que não passa pelo seu vértice, determina em sua superfície a seção cônica **hipérbole**.



RONALDO INÁCIO

Para esboçarmos uma hipérbole, marcamos dois pontos sobre uma folha de papel $(F_1$ e $F_2)$. Em F_1, fixamos uma régua por um furo em uma das suas extremidades. Na outra extremidade da régua, fixamos um barbante, que por sua vez tem a outra extremidade fixada em F_2 (a diferença em módulo entre o comprimento do barbante e o da régua deve ser menor que F_1F_2). Com a ponta de um lápis na régua, de modo que o barbante fique sempre esticado, giramos a régua desenhando um dos ramos da hipérbole. Procedendo de maneira semelhante, obtemos o outro ramo da hipérbole.

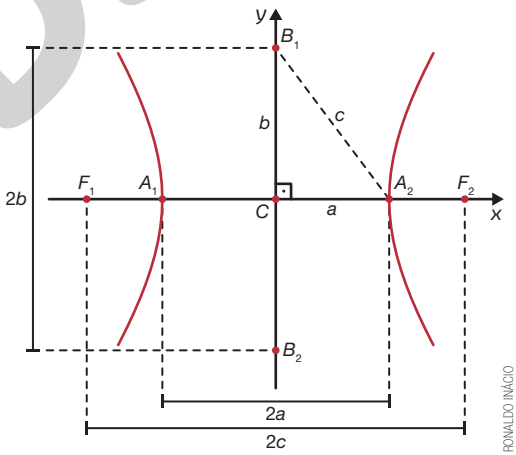


RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

Note que a diferença em módulo das distâncias de F_1 e F_2 a qualquer ponto da hipérbole é constante e menor que F_1F_2.

Observe a hipérbole ao lado e seus elementos.

- focos: F_1 e F_2
- distância focal: $F_1F_2 = 2c$.
- centro: C.
- eixo real ou transverso: $\overline{A_1A_2}$, com $A_1A_2 = 2a$.
- eixo imaginário ou não transverso: $\overline{B_1B_2}$, com $B_1B_2 = 2b$, em que, por definição, b é um número tal que $b^2 = c^2 - a^2$.
- excentricidade: corresponde ao número $e = \frac{c}{a}$, com $e > 1$.



RONALDO INÁCIO

O centro C de uma hipérbole corresponde ao ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.

Nessa hipérbole, note que o triângulo CB_1A_2 é retângulo em C. Assim, a partir do Teorema de Pitágoras, podemos escrever a seguinte relação:

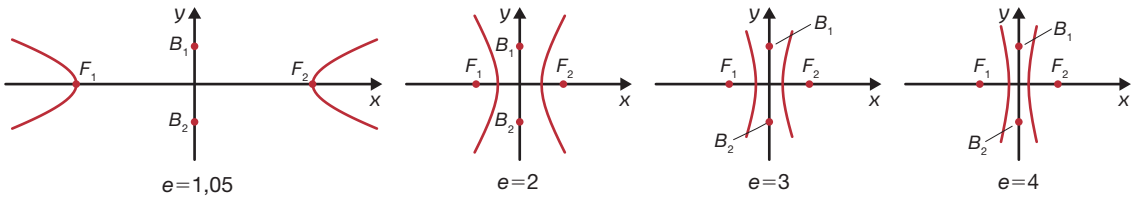
$$c^2 = a^2 + b^2$$

A hipérbole é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja diferença em módulo da distância de cada um deles aos focos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, de maneira que $2a$ seja menor que a distância focal $2c$, ou seja, $2a < 2c$.

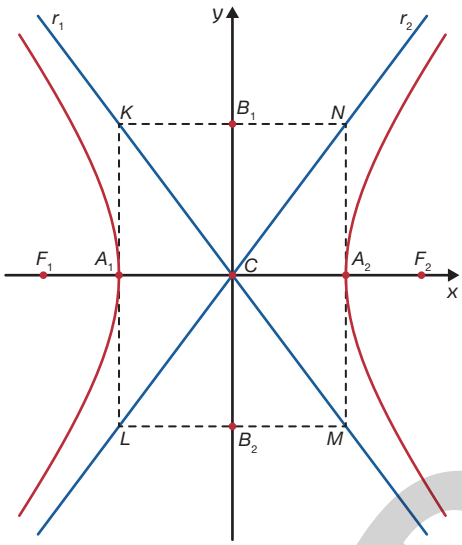
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Observe, na sequência de figuras a seguir, alterações nas características da hipérbole quando a excentricidade é alterada.

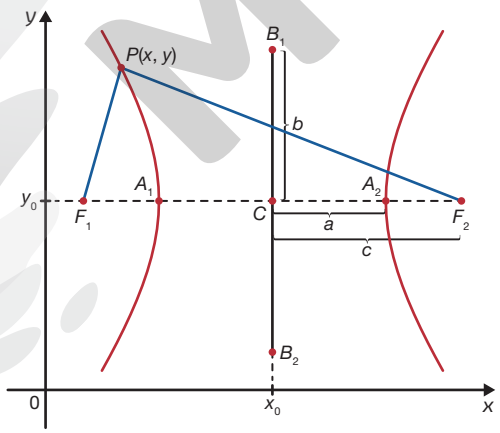


Um elemento importante no estudo das hipérboles são as suas **assíntotas**. Na imagem abaixo, o retângulo *KLMN* tem os lados passando por A_1, A_2, B_1 e B_2, e medidas $2a$ e $2b$. As retas r_1 e r_2, que contêm as diagonais desse retângulo, são as assíntotas da hipérbole.



À medida que escolhemos um ponto da hipérbole mais distante de seu centro, mais próximo esse ponto estará de uma assíntota. Contudo, a hipérbole nunca toca a assíntota.

Para realizarmos o estudo analítico da hipérbole, consideramos em um plano cartesiano uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo x e um ponto qualquer $P(x, y)$, pertencente a ela.

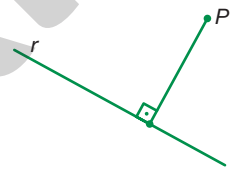


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Desenvolvendo a igualdade $|PF_1 - PF_2| = 2a$ e utilizando a relação $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos a equação reduzida da hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$ que possui eixo real paralelo ao eixo x:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

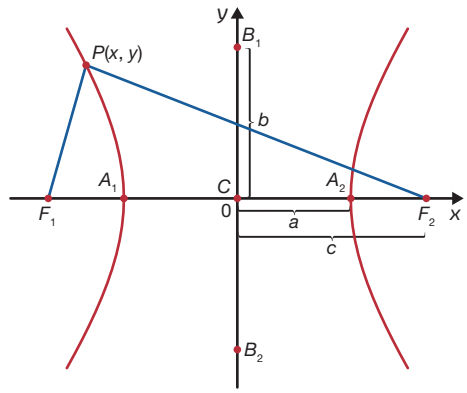
A distância de um ponto *P* a uma reta *r*, é igual ao comprimento do segmento perpendicular a *r* que tem extremidades em *P* e em um ponto de *r*.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

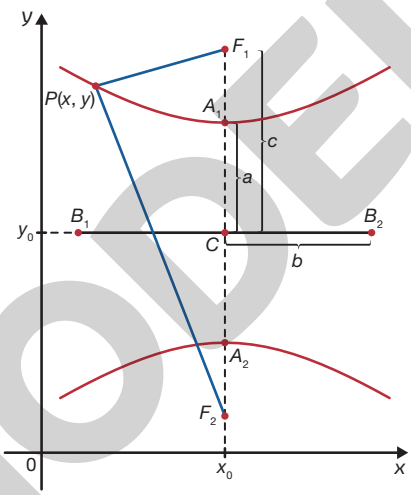
MODERNA

Caso o centro da hipérbole seja a origem $C(0, 0)$ e os focos F_1 e F_2 pertençam ao eixo x, a equação será dada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

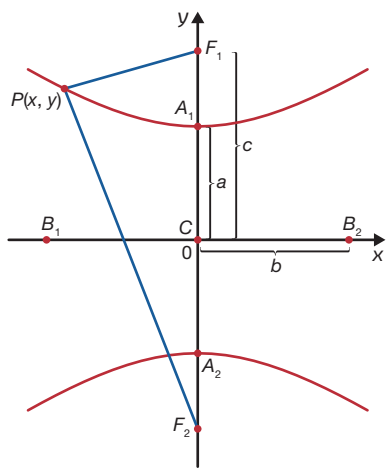


Ao considerarmos em um plano cartesiano uma hipérbole com o eixo real paralelo ao eixo y, de centro $C(x_0, y_0)$, obtemos a equação reduzida:

$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$.



No caso em que o centro da hipérbole é a origem $C(0, 0)$, e os focos F_1 e F_2 pertencem ao eixo y, a equação será dada por: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.



MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

R4 Esboce no plano cartesiano a hipérbole cuja equação é:

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Resolução

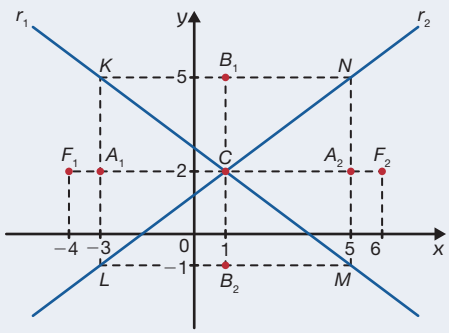
De acordo com a equação, temos uma hipérbole com centro $C(1, 2)$, cujo eixo real é paralelo ao eixo x. Logo:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ $\quad$ $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ $\quad$ $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

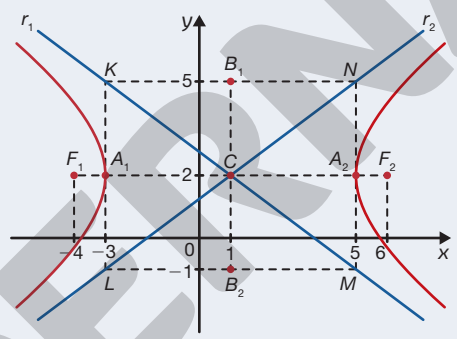
Segue que:

- $F_1(x_0 - c, y_0) \Rightarrow F_1(-4, 2)$
- $A_1(x_0 - a, y_0) \Rightarrow A_1(-3, 2)$
- $B_1(x_0, y_0 + b) \Rightarrow B_1(1, 5)$
- $F_2(x_0 + c, y_0) \Rightarrow F_2(6, 2)$
- $A_2(x_0 + a, y_0) \Rightarrow A_2(5, 2)$
- $B_2(x_0, y_0 - b) \Rightarrow B_2(1, -1)$

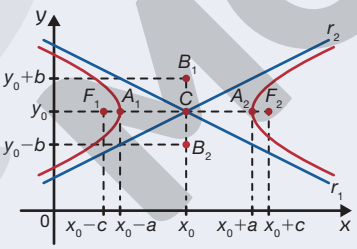
Para esboçar a hipérbole, indicamos no plano cartesiano os pontos C, F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2, e traçamos as assíntotas r_1 e r_2.



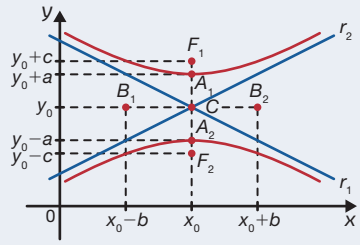
Por fim, esboçamos a hipérbole $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.



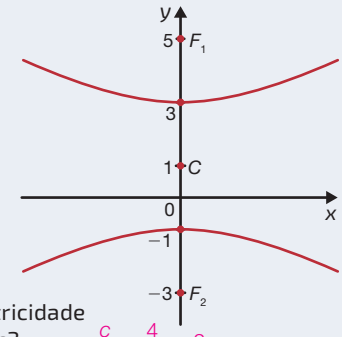
- Quando o eixo maior da hipérbole é paralelo ao eixo x, temos:
  - $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
  - $F_1(x_0 - c, y_0)$
  - $F_2(x_0 + c, y_0)$
  - $A_1(x_0 - a, y_0)$
  - $A_2(x_0 + a, y_0)$
  - $B_1(x_0, y_0 + b)$
  - $B_2(x_0, y_0 - b)$



- Quando o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo y, temos:
  - $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$
  - $F_1(x_0, y_0 + c)$
  - $F_2(x_0, y_0 - c)$
  - $A_1(x_0, y_0 + a)$
  - $A_2(x_0, y_0 - a)$
  - $B_1(x_0 - b, y_0)$
  - $B_2(x_0 + b, y_0)$



R5 Determine a equação da hipérbole indicada ao lado.



Resolução

O eixo real da hipérbole está sobre o eixo y, tal que $c = 4$ e $a = 2$. Logo:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 4^2 = 2^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12$$

Como a hipérbole possui centro em $C(0, 1)$ e eixo real sobre o eixo y, a equação é dada por:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$

Qual é a excentricidade dessa hipérbole? $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

10 Verifique se o eixo real de cada hipérbole, cujas equações estão indicadas, é paralelo ao eixo x ou ao eixo y, ou se está sobre um dos eixos.

a) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$ sobre o eixo x

b) $-\frac{(x-9)^2}{12} + \frac{(y+5)^2}{16} = 1$ paralelo ao eixo y

c) $25y^2 + 50y - 16x^2 = 375$ sobre o eixo y

d) $x^2 - y^2 = 4$ sobre o eixo x

11 Verifique quais equações representam uma hipérbole e reescreva-as na forma reduzida. alternativas b e c

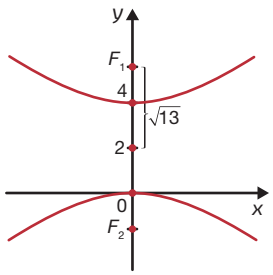
a) $9x^2 + 16y^2 = 144$

b) $8x^2 - 6y^2 - 32x + 36y - 70 = 0$

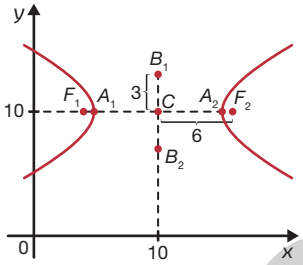
c) $6y^2 - 4x^2 - 64x - 280 = 0$ $\frac{y^2}{4} - \frac{(x+8)^2}{6} = 1$

12 Escreva a equação da hipérbole representada em cada item e verifique se o eixo real é paralelo ao eixo x ou ao eixo y, ou se está sobre os eixos.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

13 Escreva a equação e esboce graficamente a hipérbole com eixo real de comprimento 10, e de focos $F_1(6, 1)$ e $F_2(-8, 1)$. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

14 Determine a equação das assíntotas da hipérbole $\frac{(y-3)^2}{36} - \frac{(x+7)^2}{4} = 1$ e esboce-a graficamente. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

15 Dada a hipérbole de equação $3y^2 + 36y - 4x^2 + 32x + 8 = 0$, determine:

a) o comprimento do eixo real. $4\sqrt{3}$

b) o comprimento do eixo imaginário. 6

c) a distância focal. $2\sqrt{21}$

d) a excentricidade. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

16 Escreva a equação da hipérbole com eixo real sobre o eixo y, de centro $C(0, 4)$ e cujas medidas do eixo imaginário e real são, respectivamente, 12 e 16. $\frac{(y-4)^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

17 Qual é a equação da hipérbole que passa pelo ponto $P(5, -4)$ e cujos focos são $F_1(12, -4)$ e $F_2(4, -4)$? $\frac{(x-8)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{7} = 1$

12. a) $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$; sobre o eixo y

12. b) $\frac{(x-10)^2}{27} - \frac{(y-10)^2}{9} = 1$; paralelo ao eixo x

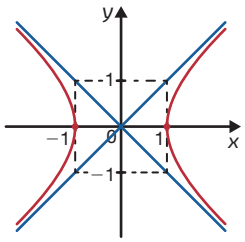
11. b) $\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y-3)^2}{8} = 1$

18 Calcule a excentricidade de cada hipérbole cuja equação ou representação gráfica está indicada a seguir.

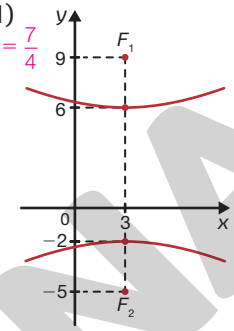
a) $\frac{(y+8)^2}{16} - \frac{(x-5)^2}{20} = 1$ $e = \frac{3}{2}$

b) $3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0$ $e = 2$

c) $e = \sqrt{2}$

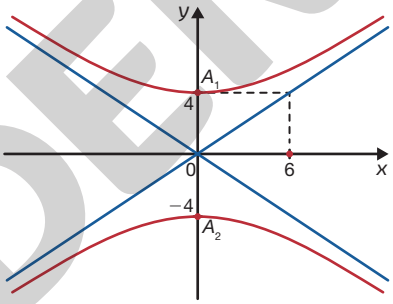


d) $e = \frac{7}{4}$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

19 Observe a hipérbole representada a seguir e determine as coordenadas dos focos e a excentricidade. $F_1(0, 2\sqrt{13})$ e $F_2(0, -2\sqrt{13})$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

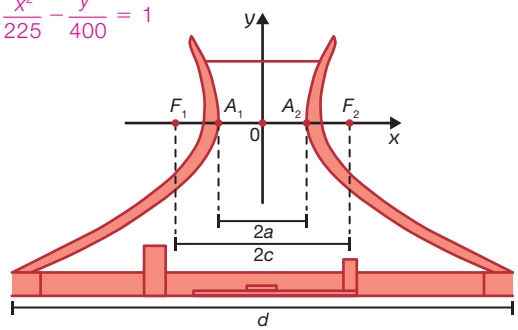


RONALDO INÁCIO

No contexto

20 A catedral de Brasília é uma obra de Oscar Niemeyer, famoso pelas curvas em sua arquitetura. A imagem a seguir mostra os detalhes de um corte esquemático da catedral, revelando uma formação muito semelhante à de uma hipérbole. Considerando que o diâmetro d da catedral é igual a 70 m, a distância focal da hipérbole ($2c$) é 20 m menor do que o diâmetro da catedral e o eixo central ($2a$) mede 30 m, escreva a equação que representa essa hipérbole, considerando que o centro é a origem $C(0, 0)$.

$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{400} = 1$



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

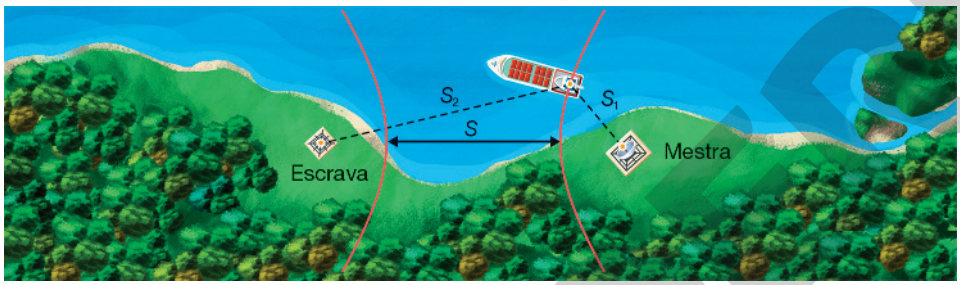
21 A navegação hiperbólica utiliza o conceito de hipérbole para obter as linhas de posição (LDP) que definem a localização de um navio. Um desses sistemas eletrônicos, denominado LORAN-C (abreviatura de *long-range navigation* ou navegação de longa distância), baseia-se na diferença do tempo de recebimento dos sinais de rádio emitidos por duas estações.

Nesse sistema, desenvolvido nos Estados Unidos em 1940, duas estações emissoras de ondas de rádio, uma chamada de Mestra (M), e outra, de Secundária ou Escrava (E), localizadas em pontos distintos, emitem seus sinais, que são recepcionados por um navio em tempos definidos como t_1 e t_2, respectivamente. O receptor LORAN-C do navio irá medir a diferença de tempo em que os sinais foram recebidos e irá definir um valor constante $t = |t_2 - t_1|$.

Utilizando o conceito de velocidade média $\left(v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$, as notações S_1 e S_2 para representarem as distâncias percorridas pela onda até o navio, e considerando que toda onda de rádio tem na atmosfera velocidade próxima à da luz $(c = 300\,000 \text{ km/s})$, temos:

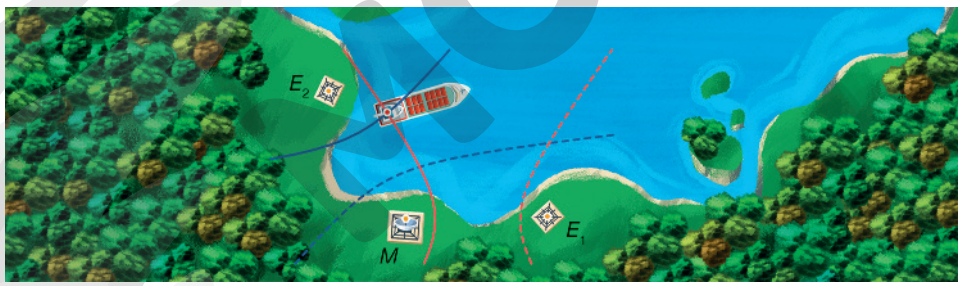
$$t = |t_2 - t_1| \Rightarrow \frac{S}{c} = \left|\frac{S_2}{c} - \frac{S_1}{c}\right| \Rightarrow S = |S_2 - S_1|$$

A última relação encontrada (em destaque) é a definição do lugar geométrico dos pontos que constituem uma hipérbole, sendo S a constante hiperbólica, que é a distância entre as linhas hiperbólicas. Em navegação, a distância entre as torres de emissão é chamada de linha de base.



Fonte de pesquisa: <http://files.professorbarzan.webnode.com.br/200000090-8a08c8b031/Navega%C3%A7%C3%A3o%20hiperb%C3%B3lica.pdf>. Aceso em: 29 jun. 2020.

Como há duas linhas hiperbólicas possíveis para se localizar o navio, utiliza-se outra emissora Escrava, definindo-se assim dois pares de linhas de posição, que possuem um ponto de interseção que corresponde à posição do navio. Várias estações emissoras de ondas de rádio são utilizadas pela navegação hiperbólica para a localização de navios.



ILUSTRAÇÕES: LEO GIBRAN

Em uma situação hipotética, a linha de base entre a estação Mestra e uma de suas Escravas é de 260 km. O capitão de um navio, em alto-mar, para determinar a sua localização, aciona seu sistema LORAN-C, que mostra um valor de tempo igual a $8 \cdot 10^{-4}$ s. Considerando essas informações e aquelas referentes à navegação hiperbólica, determine o que se pede.

a) Qual é a distância entre essas duas emissoras? 260 km

b) Calcule a excentricidade da hipérbole definida por essas duas estações de rádio para o tempo citado. $e = 1{,}08\overline{3}$

c) Qual é o valor da constante hiperbólica? 240 km

d) Escreva a equação que representa essa hipérbole, considerando o centro na origem e os focos sobre o eixo x.

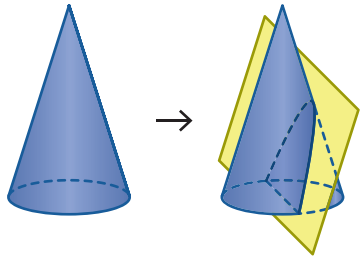
e) Que outros sistemas de localização você conhece? Junte-se a um colega e realize uma pesquisa. Resposta pessoal.

d) $\frac{x^2}{120^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

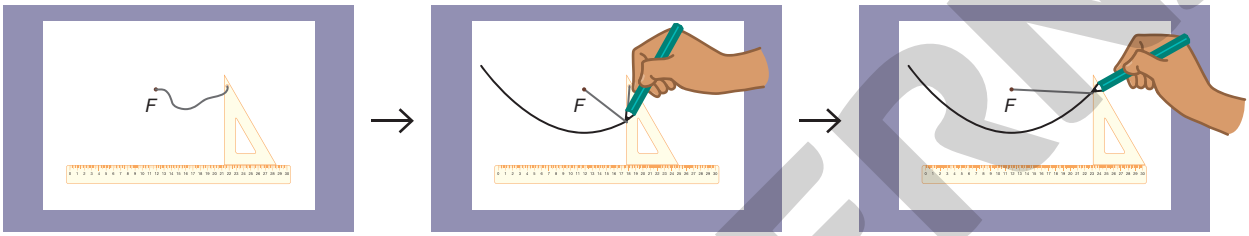
Parábola

Ao secionar a superfície de um cone por um plano paralelo a uma das geratrizes, a seção cônica obtida será a **parábola**.



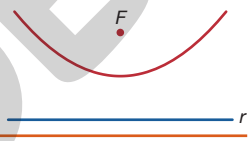
RONALDO INÁCIO

Para esboçarmos uma parábola, marcamos um ponto F em uma folha de papel, fixando nele uma das extremidades de um barbante e a outra, em um esquadro. Com o auxílio de uma régua, deslizamos o esquadro, mantendo o barbante esticado, e traçamos com um lápis a parábola, como indicado na figura.



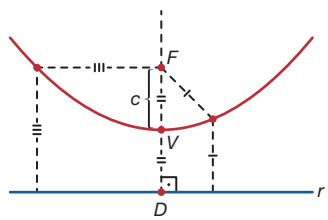
RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

É possível traçar uma reta em que a distância de cada ponto da parábola ao foco seja igual à distância do ponto a essa reta.



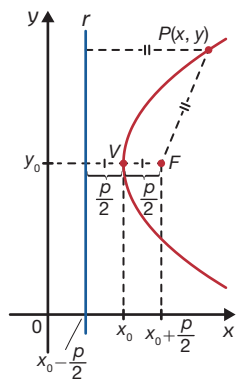
Observe a parábola ao lado e seus elementos.

- foco: F.
- reta diretriz: r.
- vértice: V.
- eixo de simetria: $\overleftrightarrow{FV}$ (reta perpendicular a r).
- parâmetro: $p = FD = 2c$.



A parábola é o conjunto de todos os pontos em um plano cuja distância a uma ponto fixo F é sempre igual à distância a uma reta dada.

Para realizarmos o estudo analítico da parábola, consideramos em um plano cartesiano uma parábola com reta diretriz paralela ao eixo y, vértice $V(x_0, y_0)$ à direita da diretriz, foco $F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$ e um ponto qualquer $P(x, y)$, pertence a ela.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Utilizando o fato de que a distância entre o ponto P e o foco F é igual à distância entre o ponto P e a reta r, obtemos a equação reduzida da parábola que possui a diretriz paralela ou sobre o eixo y e vértice V à direita da diretriz:

$$\left(y - y_0\right)^2 = 2p\left(x - x_0\right)$$

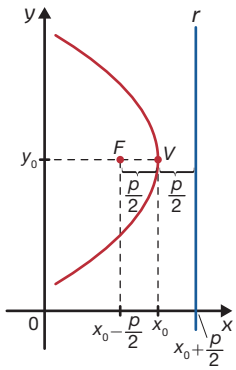
foco: $F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$

reta diretriz: $x = x_0 - \frac{p}{2}$

Outras possibilidades de equações de parábolas são:

- Diretriz paralela ou sobre o eixo y e vértice V à esquerda da diretriz.

$$\left(y - y_0\right)^2 = -2p\left(x - x_0\right)$$

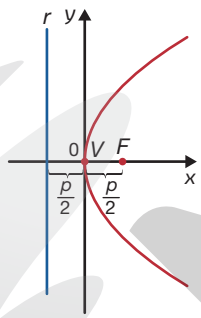


foco: $F\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right)$

reta diretriz: $x = x_0 + \frac{p}{2}$

- Diretriz paralela ao eixo y e vértice $V(0, 0)$ na origem e à direita da diretriz.

$$y^2 = 2px$$

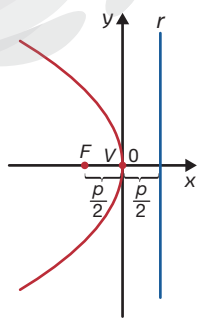


foco: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

reta diretriz: $x = -\frac{p}{2}$

- Diretriz paralela ao eixo y e vértice $V(0, 0)$ na origem e à esquerda da diretriz.

$$y^2 = -2px$$



foco: $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$

reta diretriz: $x = \frac{p}{2}$

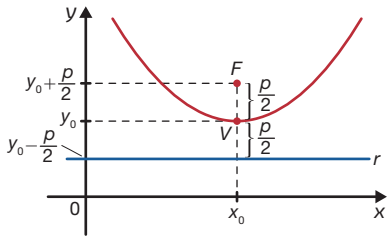
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

• Diretriz paralela ou sobre o eixo x e vértice V acima da diretriz.

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

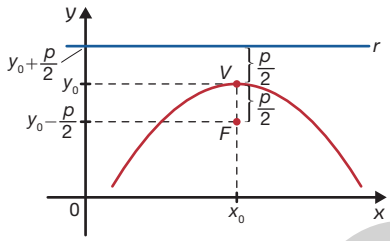


foco: $F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$

reta diretriz: $y = y_0 - \frac{p}{2}$

• Diretriz paralela ou sobre o eixo x e vértice V abaixo da diretriz.

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

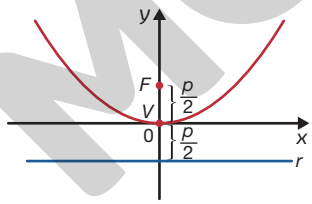


foco: $F\left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right)$

reta diretriz: $y = y_0 + \frac{p}{2}$

• Diretriz paralela ao eixo x e vértice $V(0, 0)$ na origem e acima da diretriz.

$$x^2 = 2py$$

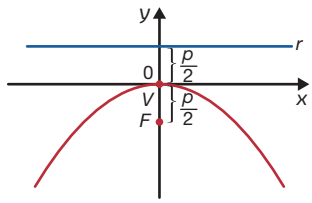


foco: $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$

reta diretriz: $y = -\frac{p}{2}$

• Diretriz paralela ao eixo x e vértice $V(0, 0)$ na origem e abaixo da diretriz.

$$x^2 = -2py$$



foco: $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$

reta diretriz: $y = \frac{p}{2}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R6 Esboce no plano cartesiano as parábolas cujas equações estão indicadas.

a) $y^2 + 6y - 4x + 29 = 0$

b) $x^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

c) $y^2 - 4y + 2x + 12 = 0$

d) $x^2 + 8x - 12y - 44 = 0$

Resolução

a) Utilizando o método de completar quadrados, temos:

$$y^2 + 6y - 4x + 29 = 0 \Rightarrow \underbrace{y^2 + 6y + 9}_{(y+3)^2} = 4x - 20 \Rightarrow$$

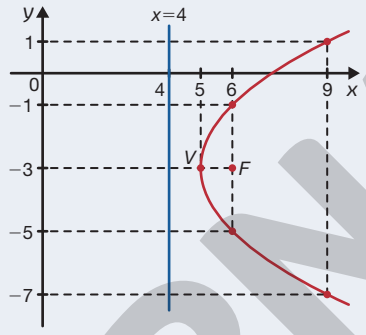
$$\Rightarrow (y+3)^2 = 4(x-5) \Rightarrow \big[y-(-3)\big]^2 = 2 \cdot 2(x-5)$$

Logo, a parábola possui a diretriz paralela ao eixo y, com vértice em $V(5, -3)$ à direita da diretriz e $p = 2$.

Segue que:

- foco: $F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$, ou seja, $F(6, -3)$
- reta diretriz: $x = x_0 - \frac{p}{2}$, ou seja, $x = 4$

x	y
6	−5
6	−1
9	−7
9	1



b) Utilizando o método de completar quadrados, temos:

$$x^2 - 8x + 8y + 32 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 8x + 16}_{(x-4)^2} = -8y - 16 \Rightarrow$$

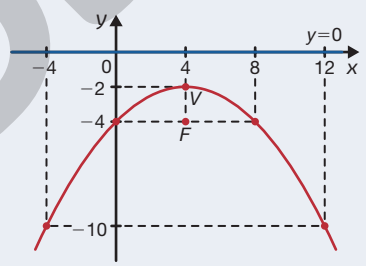
$$\Rightarrow (x-4)^2 = -8(y+2) \Rightarrow (x-4)^2 = -2 \cdot 4\big[y-(-2)\big]$$

Logo, a parábola possui a diretriz sobre o eixo x, com vértice em $V(4, -2)$ abaixo da diretriz e $p = 4$.

Segue que:

- foco: $F\left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right)$, ou seja, $F(4, -4)$
- reta diretriz: $y = y_0 + \frac{p}{2}$, ou seja, $y = 0$

x	y
−4	−10
0	−4
8	−4
10	10



c) Utilizando o método de completar quadrados, temos:

$$y^2 - 4y + 2x + 12 = 0 \Rightarrow \underbrace{y^2 - 4y + 4}_{(y-2)^2} = -2x - 8 \Rightarrow$$

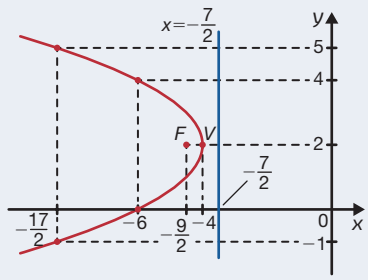
$$\Rightarrow (y-2)^2 = -2(x+4) \Rightarrow (y-2)^2 = -2 \cdot 1\big[x-(-4)\big]$$

Logo, a parábola possui a diretriz paralela ao eixo y, com vértice em $V(-4, 2)$ à esquerda da diretriz e $p = 1$.

Segue que:

- foco: $F\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right)$, ou seja, $F\left(-\frac{9}{2}, 2\right)$
- reta diretriz: $x = x_0 + \frac{p}{2}$, ou seja, $x = -\frac{7}{2}$

x	y
$-\frac{17}{2}$	−1
$-\frac{17}{2}$	5
−6	0
−6	4



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

d) Utilizando o método de completar quadrados, temos:

$$x^2 + 8x - 12y - 44 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{(x+4)^2} - 16 = 12y + 44 \Rightarrow$$

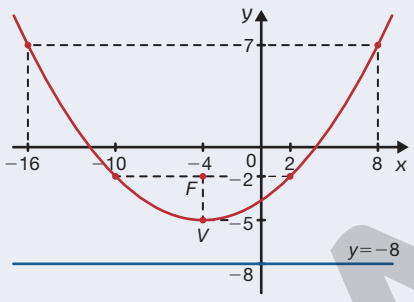
$$\Rightarrow (x+4)^2 = 12(y+5) \Rightarrow \left[x-(-4)\right]^2 = 2 \cdot 6\left[y-(-5)\right]$$

Logo, a parábola possui a diretriz paralela ao eixo x, com vértice em $V(-4, -5)$ a cima da diretriz e $p = 6$.

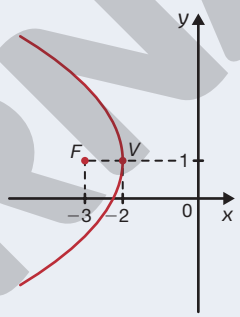
Segue que:

- foco: $F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$, ou seja, $F(-4, -2)$
- reta diretriz: $y = y_0 - \frac{p}{2}$, ou seja, $y = -8$

x	y
−16	7
−10	−2
2	−2
8	7



R7 Determine a equação da parábola representada ao lado.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Resolução

A equação da parábola é da forma $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, tal que $V(-2, 1)$ e $F(-3, 1)$.

Calculando p, temos:

$$p = 2 \cdot FV = 2 \cdot \left(\sqrt{\left[-3-(-2)\right]^2 + (1-1)^2}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

Portanto, a equação da parábola é dada por:

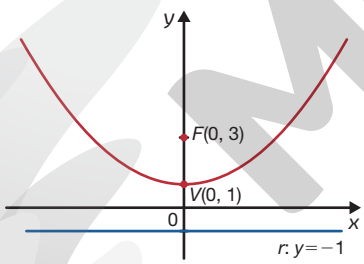
$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0) \Rightarrow (y-1)^2 = -4(x+2)$$

Exercícios e problemas

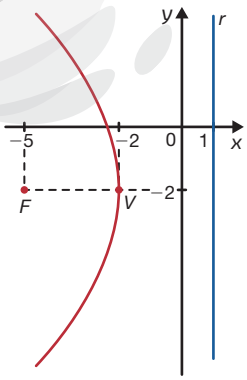
Anote as respostas no caderno.

22 Escreva a equação da parábola representada em cada item.

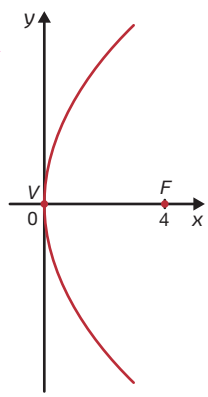
a) $x^2 = 8(y-1)$



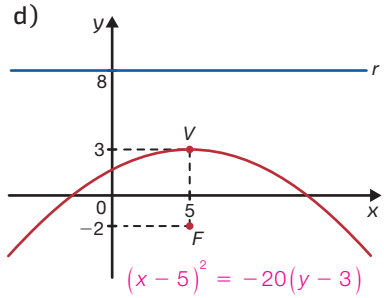
b) $(y+2)^2 = -12(x+2)$



c) $y^2 = 16x$



d) $(x-5)^2 = -20(y-3)$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

23 Determine o foco F e a reta diretriz da parábola de equação:

a) $(y-8)^2 = -6(x+3)$ $F\left(-\frac{9}{2}, 8\right)$; $x = -\frac{3}{2}$

b) $(x-8)^2 - 12y + 96 = 0$ $F(8, 11)$; $y = 5$

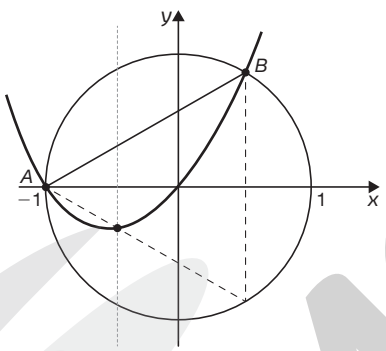
c) $x^2 + 6x - 16y + 25 = 0$ $F(-3, 5)$; $y = -3$

24 Verifique quais pontos pertencem à parábola cujo foco é o ponto $F(3, -4)$ e a reta diretriz é $x = 9$. *B*; *D*

- $A(0, 0)$
- $B(3, 2)$
- $C(8, -9)$
- $D\left(\frac{2}{3}, 4\right)$

25 Qual é o vértice da parábola descrita pela equação $32x + 16y^2 - 8y + 33 = 0$? $V\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

26 (UFMA, 2018) No plano cartesiano, como se vê na figura abaixo, uma parábola intersecta a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ nos pontos A e B, e passa pela origem do sistema de coordenadas. Além disso, o eixo de simetria da parábola é perpendicular ao eixo x. Se o segmento $\overline{AB}$ é o lado de um triângulo equilátero inscrito na circunferência, qual é a equação da parábola? alternativa **a**



RONALDO INÁCIO

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}(x^2 + x)$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}(x^2 - x)$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + x)$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - x)$

e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2$

27 Esboce em um plano cartesiano as parábolas cujas equações estão indicadas. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

a) $(y+5)^2 = 24(x-2)$

b) $y = 3x - x^2$

c) $x = 6y - y^2 - 2$

28 Determine a equação da parábola que passa pelos pontos $A(0, 3)$, $B(6, 0)$ e $C(-2, 8)$ e tem eixo de simetria vertical. $(x-4)^2 = 4(y+1)$

29 Dada a cônica de equação $x = 2y^2 - 16y + 25$, determine:

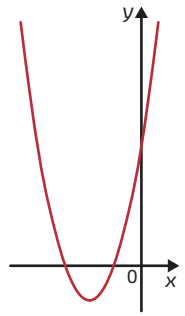
a) as coordenadas do vértice. $(-7, 4)$

b) a medida do parâmetro p. $p = \frac{1}{4}$

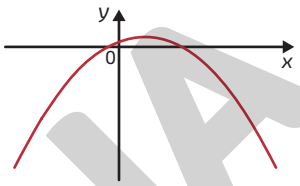
c) a equação da reta diretriz. $x = -\frac{57}{8}$

30 Quais parábolas a seguir representam uma função de x em y? alternativas **a** e **c**

a)

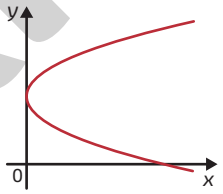


c)



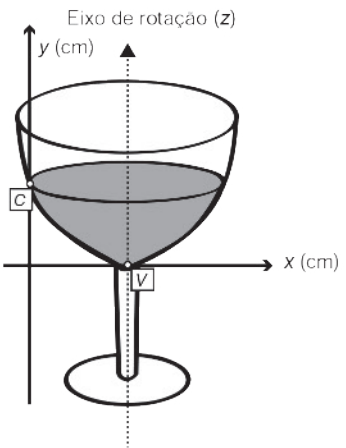
b)

d)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

31 (Enem, 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



REPRODUÇÃO

A função real que expressa a parábola, plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é: alternativa **e**

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

12 A elipse e o cometa Halley

BNCC
• CE2CNT

A trajetória do cometa

Edmond Halley (1656-1742), astrônomo e matemático britânico, estudando as órbitas de cometas em torno do Sol e com base nas leis de Kepler e na lei da gravitação de Newton, verificou que a órbita de um cometa visto em 1682 coincidia com a órbita de cometas observados em 1531 e em 1607. Concluindo que se tratava do mesmo astro celeste, Halley previu, para os fins de 1758, uma nova aparição do cometa, estimando, assim, um período de translação de aproximadamente 76 anos, ou seja, em média, a cada 76 anos ele completa uma volta em torno do Sol. O cometa correspondeu à previsão de Halley, que infelizmente não estava mais vivo para observar o espetáculo. Esse cometa é chamado de Halley, em homenagem a seu descobridor, e suas aparições se repetiram em 1835, 1910 e em 1986.

As conclusões de Halley também comprovaram a veracidade da 1ª Lei de Kepler, que afirma que as trajetórias dos astros em torno do Sol são elípticas, estando este em um dos focos. As extremidades do eixo maior dessa elipse são chamadas de periélio (ponto orbital mais próximo do Sol) e afélio (ponto orbital mais distante do Sol).

A 2ª Lei de Kepler afirma que os astros, em seus movimentos elípticos, descrevem áreas iguais em tempos iguais. Para que isso seja verdade, é necessário que eles acelerem quando se aproximam do Sol, estando com a maior velocidade no periélio, e retardem seu movimento quando se afastam do Sol, estando com a menor velocidade no afélio.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Como é denominado o ponto da órbita do cometa Halley mais distante do Sol? E o mais próximo? afélio; periélio

B Qual é a excentricidade da elipse descrita pelo cometa Halley? $e \simeq 0{,}967$

C Qual é a equação dessa elipse considerando o centro na origem e o eixo maior horizontal?

D De acordo com a 2ª Lei de Kepler e o período de translação do cometa, você afirmaria que em 2025 ele estará acelerando ou desacelerando em sua órbita? Por quê?
Desacelerando, pois o cometa estará se afastando do Sol, ou seja, indo em direção ao afélio.

E Em que ano, aproximadamente, o cometa Halley será visto aqui da Terra novamente? Por quê? Em 2062, pois o cometa pode ser visto da Terra a cada 76 anos, e sua mais recente aparição foi em 1986.

F Pesquise outros cometas que são periódicos e sua periodicidade. Resposta pessoal.

Fonte de pesquisa: MATSUURA, Oscar T. Bem-vindo Halley! *Ciência Hoje*, Rio de Janeiro, v. 4, n. 21, p. 32-46, nov./dez. 1985.

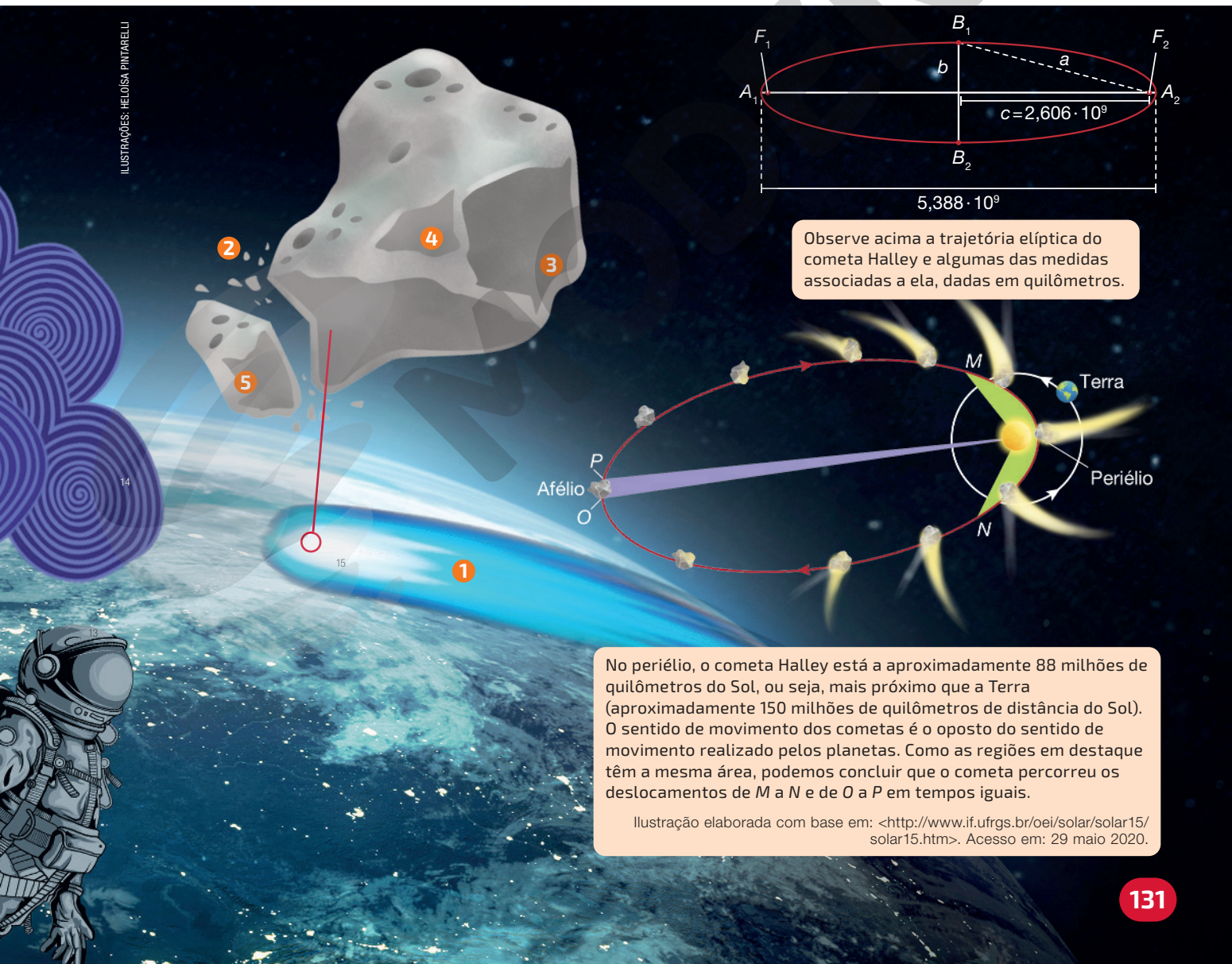
C) $\frac{x^2}{\left(2{,}694 \cdot 10^9\right)^2} + \frac{y^2}{\left(0{,}683 \cdot 10^9\right)^2} = 1$

O que compõe um cometa

1. A cauda do cometa é resultado de sua aproximação com o Sol, que causa a vaporização dos gases e a liberação da poeira de seu núcleo, podendo se estender por até 100 milhões de quilômetros. A cauda está sempre apontada na direção oposta ao Sol.
2. Uma nuvem luminosa de gás e poeira envolve o núcleo do cometa. Essa região, chamada de coma (ou cabeleira), pode ter vários milhões de quilômetros de diâmetro.
3. A camada externa é bastante escura, refletindo de 3% a 4% da luz solar recebida.
4. O núcleo é formado principalmente de água, monóxido de carbono e dióxido de carbono.
5. Alguns cometas se despedaçam durante a trajetória, devido à sua frágil estrutura.

FOTOMONTAGEM DE JULIANA DEL ANHOL AZEVEDO. FOTOS: 1.ORTIS/SHUTTERSTOCK; 2.TIM UR/SHUTTERSTOCK; 3.MEJORANA/SHUTTERSTOCK; 4.MORPHART CREATION/SHUTTERSTOCK; 5.PICTORIAL PRESS/ALAMY/FOTOARENA; 6.NUBENAMO/SHUTTERSTOCK; 7.SCOTT CHAN/SHUTTERSTOCK; 8.GOOD STUDIO/SHUTTERSTOCK; 9.NACI YAVUZ/SHUTTERSTOCK; 10.MEOWU/SHUTTERSTOCK; 11.MAGNIA/SHUTTERSTOCK; 12.YULIA OGNEVA/SHUTTERSTOCK; 13.ZINSMUTE/SHUTTERSTOCK; 14.DIMA ZEL/SHUTTERSTOCK; 15.MIKHAIL GRACHIKOV/SHUTTERSTOCK

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI



Observe acima a trajetória elíptica do cometa Halley e algumas das medidas associadas a ela, dadas em quilômetros.

No periélio, o cometa Halley está a aproximadamente 88 milhões de quilômetros do Sol, ou seja, mais próximo que a Terra (aproximadamente 150 milhões de quilômetros de distância do Sol). O sentido de movimento dos cometas é o oposto do sentido de movimento realizado pelos planetas. Como as regiões em destaque têm a mesma área, podemos concluir que o cometa percorreu os deslocamentos de *M* a *N* e de *O* a *P* em tempos iguais.

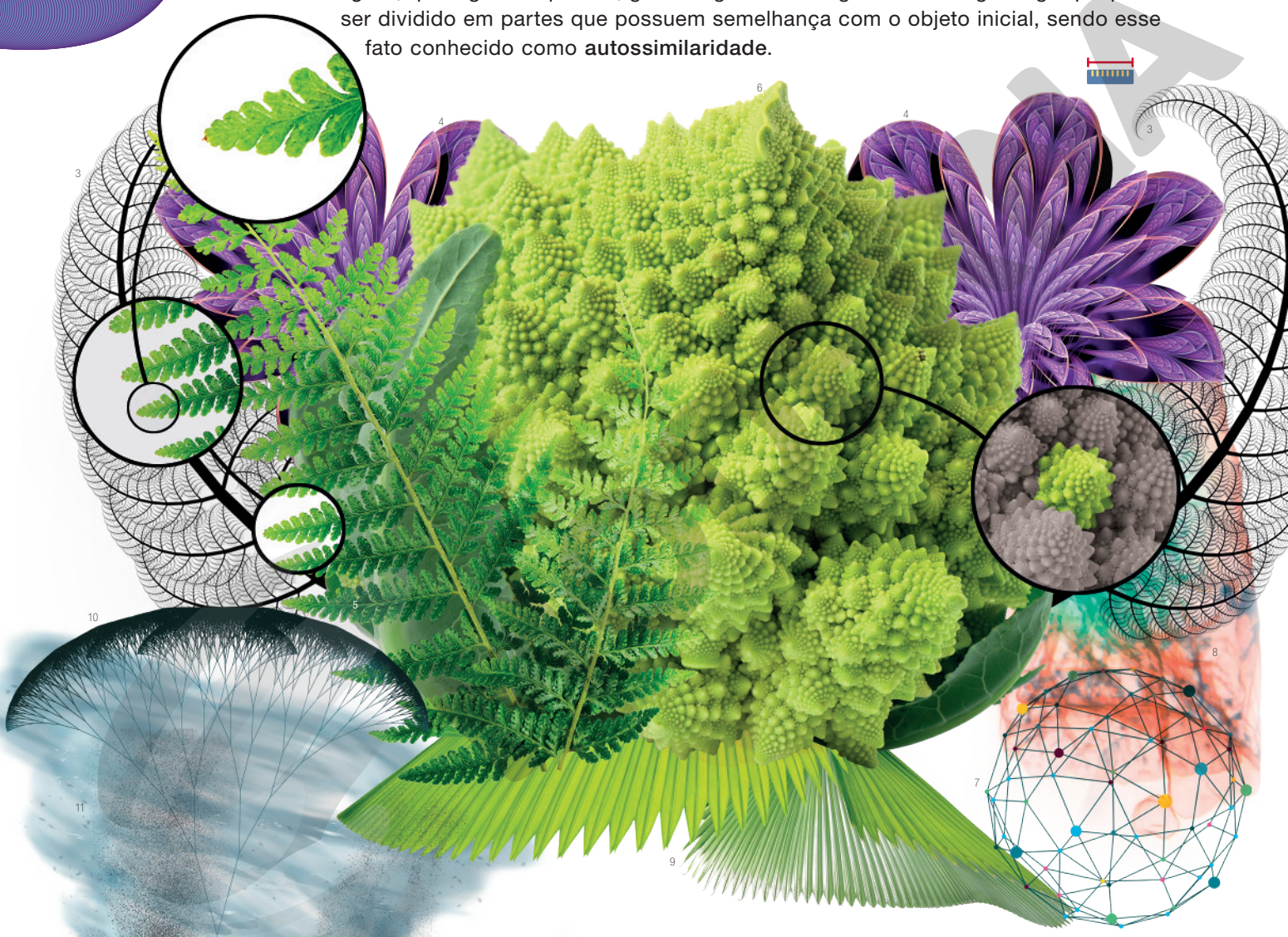
Ilustração elaborada com base em: <http://www.if.ufrgs.br/oei/solar/solar15/solar15.htm>. Acesso em: 29 maio 2020.

13 Transformações geométricas

Padrões hipnotizantes

O que a samambaia e o brócolis romanesco têm em comum? Ao tomar partes menores da folha da samambaia ou da flor do brócolis, podemos observar um padrão que é semelhante ao desenho completo. Essa é uma característica dos **fractais**.

O termo **fractal** – originado da palavra latina *fractus*, adjetivo relacionado ao verbo *frangere*, que significa quebrar, gerar fragmentos irregulares – designa algo que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial, sendo esse fato conhecido como **autossimilaridade**.



Apesar de ser um tema de estudo importante para os matemáticos, os fractais podem ser observados também nos estudos relativos a outras ciências, como: as características de algumas plantas na Biologia; a estrutura do pulmão e as ramificações dos neurônios na Medicina; a elaboração de figuras e a produção de músicas, na Arte; os dobramentos de camadas de rochas que formam o solo na Geografia e o comportamento da bolsa de valores na Economia.

BNCC
• EM13MAT105

A geometria dos fractais

A Geometria Fractal, que se refere ao estudo dos fractais, permite descrever aproximações para formas irregulares, bem como estudar suas propriedades. Um dos principais matemáticos a estudar os fractais foi Benoît Mandelbrot, por volta da década de 1970. Veja as primeiras repetições do processo que descreve três fractais propostos pelos matemáticos Wacław Sierpiński (1882-1969), Helge Von Koch (1870-1924) e Georg Cantor (1845-1918).

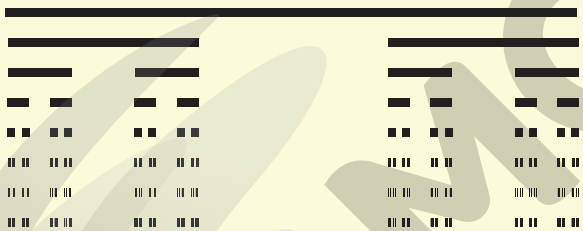
Triângulo de Sierpiński

De maneira sucessiva, divide-se cada triângulo equilátero em quatro triângulos congruentes e remove-se o triângulo central.

Floco de neve de Koch

De maneira sucessiva, divide-se cada lado do triângulo equilátero em três partes de mesma medida e, na parte central, acrescenta-se um novo triângulo equilátero cujo lado mede a terça parte da medida do lado do triângulo anterior.

Poeira de Cantor



De maneira sucessiva, divide-se cada segmento em três partes de mesma medida e remove-se a parte central.

ILUSTRAÇÕES: CARLOS BORIN

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Você conhece outros tipos de fractais? Cite-os. Resposta pessoal.

B Pesquise sobre o Tapete de Sierpiński e descreva o procedimento para sua obtenção.
De maneira sucessiva, divide-se cada quadrado em nove quadrados iguais e remove-se o quadrado central.

C Pesquise uma imagem do Cubo de Sierpiński. Aparentemente, cada face desse fractal é semelhante a qual outro fractal?
Cada face do Cubo de Sierpiński é semelhante a um Tapete de Sierpiński.

Uma maneira de construir fractais é por meio da aplicação de transformações **isométricas** e **homotéticas**, assunto abordado nas próximas páginas. Por exemplo, reduzindo um triângulo equilátero na razão 1 : 3 e, depois, aplicando rotações e translações de modo que todo novo triângulo fique adjacente ao triângulo anterior, sucessivamente, obtemos o floco de neve de Koch, figura semelhante a um floco de neve. Outros padrões semelhantes, definidos por regras simples, mas igualmente hipnotizantes, se formam como o recurso às transformações isométricas e homotéticas.

FOTOMONTAGEM DE MAURÍCIO PLANEL.
FOTOS: 1.MARTIN CAPEK/SHUTTERSTOCK;
2.SAM SERIUS/SHUTTERSTOCK;
3.ZITA/SHUTTERSTOCK;
4.JAGERION CAIPH/SHUTTERSTOCK;
5.DEWIN ID/SHUTTERSTOCK;
6.RAVL/SHUTTERSTOCK;
7.GRAL/SHUTTERSTOCK;
8.PRAISAENG/SHUTTERSTOCK;
9.QUANG HO/SHUTTERSTOCK;
10.ZITA/SHUTTERSTOCK;
11.VECTOR THINGS/SHUTTERSTOCK;
12.SERGIO34/SHUTTERSTOCK;
13.CLAUDIO DIVIZIA/SHUTTERSTOCK

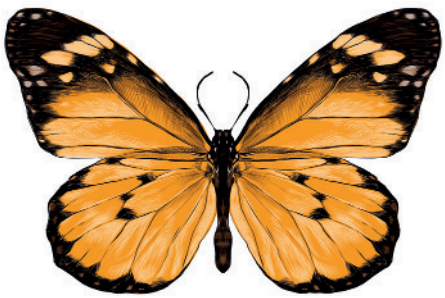
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Estudando transformações geométricas

A noção de transformações geométricas está presente em vários elementos da natureza, como nas asas de algumas borboletas, e em produções humanas, como em algumas peças da cerâmica marajoara, considerada a arte em cerâmica mais antiga do Brasil.

É possível demonstrar que em uma transformação isométrica a figura inicial e seu "transformado" são congruentes.



SERAFIMA DASHKEVICH/SHUTTERSTOCK

Borboleta.

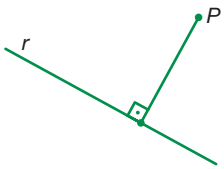
GERSON GERLOFF/PULSAR IMAGENS

Cerâmica marajoara produzida na Oficina do Mestre Anísio, em Belém, no Pará, em 2015.

Neste tema, estudaremos a **reflexão**, a **rotação** e a **translação**, que são transformações isométricas, isto é, preservam as distâncias entre pontos e amplitude dos ângulos, e a transformação denominada **homotetia**.

Antes de iniciarmos nossos estudos sobre transformações geométricas, vamos definir a distância entre ponto e reta.

A distância de um ponto P a uma reta r, a qual denotaremos por $d(P, r)$, é igual ao comprimento do segmento perpendicular a r que tem extremidades em P e em um ponto de r.



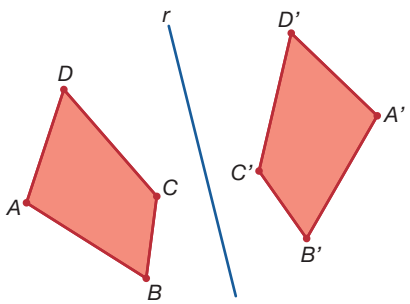
Reflexão

Dada uma reta r, dizemos que o ponto X' é o simétrico do ponto X em relação a r, quando $\overline{XX'}$ é perpendicular a r e $d(X, r) = d(X', r)$.

Quando X pertencer à reta r, diremos que seu simétrico em relação à reta r é ele próprio.

No plano, a **reflexão** em torno de uma reta r é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X', simétrico a X em relação a r.

Na imagem a seguir, a figura $A'B'C'D'$ foi obtida por reflexão da figura $ABCD$ em torno da reta r.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

A figura $A'B'C'D'$ é denominada **imagem** da figura $ABCD$ por reflexão em torno da reta r.

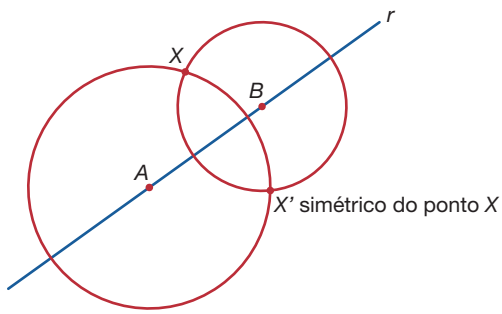
> As figuras $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são congruentes? Justifique sua resposta.
> Sim, pois a figura $A'B'C'D'$ é a imagem da figura $ABCD$ por reflexão em torno de r e a transformação de reflexão é isométrica.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Utilizando régua e compasso, podemos construir o simétrico de X em relação a uma reta r, realizando os seguintes procedimentos.

1. Marque o ponto X e, com o auxílio da régua, trace a reta r.
2. Marque dois pontos quaisquer A e B sobre a reta r.
3. Com o compasso, construa uma circunferência de centro A passando por X e uma segunda circunferência de centro B passando por X. O ponto em que essas circunferências se intersectam, além de X, é o simétrico do ponto X em relação à reta r, o qual indicaremos por X'.



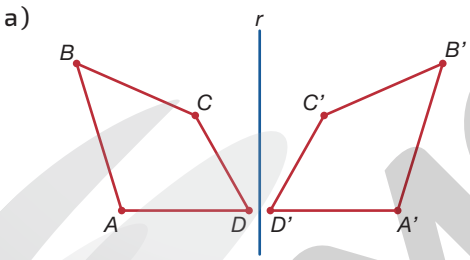
RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas

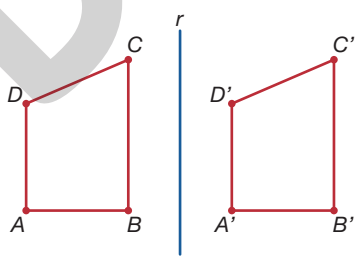
Anote as respostas no caderno.

1 Determine em qual item a figura $A'B'C'D'$ é a imagem da figura $ABCD$ por reflexão em torno da reta r. alternativa a

a)

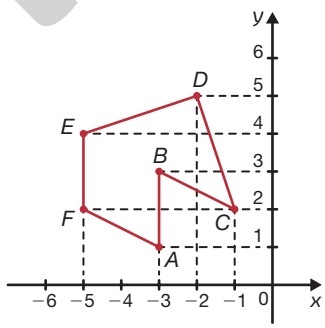


b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

2 Observe o polígono $ABCDEF$ representado no plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO

a) Quais são as coordenadas dos vértices do polígono $ABCDEF$?
$A(-3, 1)$, $B(-3, 3)$, $C(-1, 2)$, $D(-2, 5)$, $E(-5, 4)$ e $F(-5, 2)$

b) Determine as coordenadas dos vértices da imagem do polígono $ABCDEF$ por reflexão em torno do:

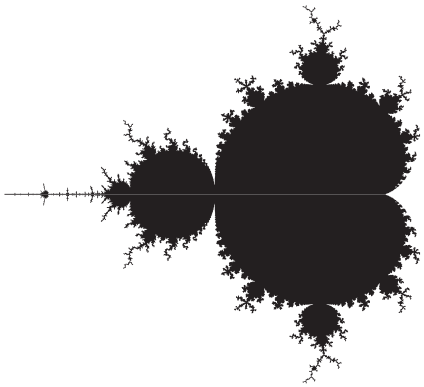
- eixo das abscissas.
  $A'(3, 1)$, $B'(3, 3)$, $C'(1, 2)$, $D'(2, 5)$, $E'(5, 4)$ e $F'(5, 2)$
- eixo das ordenadas.
  $A''(-3, -1)$, $B''(-3, -3)$, $C''(-1, -2)$, $D''(-2, -5)$, $E''(-5, -4)$ e $F''(-5, -2)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

No contexto

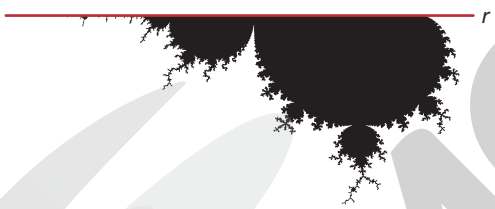
3 Vimos, anteriormente, algumas informações sobre a geometria dos fractais. Abaixo, é apresentado o conjunto de Mandelbrot.



Dentre os itens a seguir, qual é o que possibilita obter o conjunto de Mandelbrot acima, aplicando uma transformação de reflexão em torno da reta *r*? alternativa b

a)

b)



c)

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

4 Com o auxílio de uma régua, construa um pentágono *ABCDE* qualquer e trace uma reta *r*. Em seguida, utilizando régua e compasso, construa a imagem do pentágono *ABCDE* por reflexão em torno da reta *r*. Resposta pessoal.

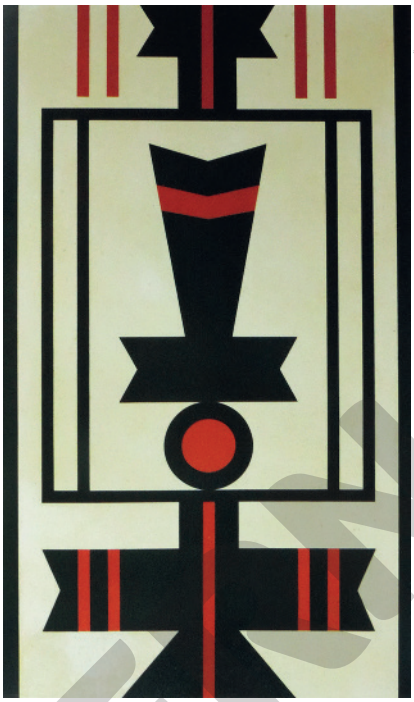
5 Desafio

Utilizando uma régua, construa as retas concorrentes *r* e *s*. Em seguida, utilizando régua, compasso e seus conhecimentos sobre transformação de reflexão construa o triângulo *ABC* de maneira que o ponto de interseção entre:

- $\overline{AB}$ e a reta *r* seja ponto médio de $\overline{AB}$;
- $\overline{AC}$ e a reta *s* seja ponto médio de $\overline{AC}$.

Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** no **Suplemento para o professor**.

6 A imagem a seguir é uma das obras de Rubem Valentim (1922-1991), escultor, pintor, gravador e professor brasileiro.



ROMULO FIALDINI/TEMPO COMPOSTO – PINACOTECA DO ESTADO DE SÃO PAULO

VALENTIM, Rubem. *Emblema 5*. 1969.
Óleo sobre duratex. 120 cm × 73 cm.

É possível identificar transformação de reflexão nessa obra? Em caso afirmativo, descreva a localização da reta *r* que possibilita a reflexão dessa obra. Sim. A reta *r* deve ser vertical, passando pelo centro da imagem, para que possa se obter a transformação de reflexão.

7 Localizado na Índia, o Taj Mahal é um dos monumentos mais famosos do país.

NICOLA PULLHAM/SHUTTERSTOCK

Taj Mahal, na Índia, em 2020.

Na fachada desse monumento, é possível identificar transformação de reflexão? Converse com os colegas e professor sobre o assunto.
Sim. Caso os alunos apresentem dificuldades para identificar a reflexão, oriente-os a construir um esboço dessa fachada.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

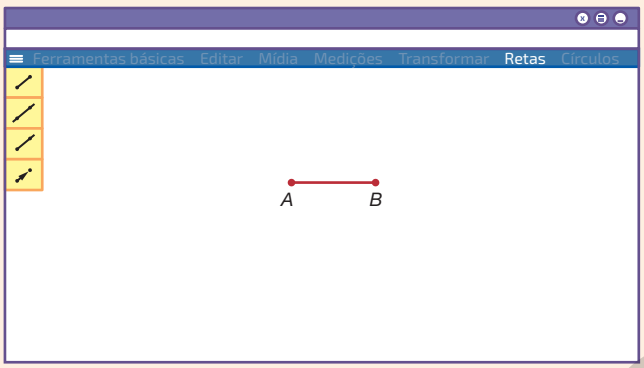
MODELO

Transformação de reflexão

Nesta seção, vamos obter, com auxílio do *software* de Geometria dinâmica GeoGebra, a imagem de um hexágono regular por reflexão em torno de uma reta.

A Selecione a ferramenta **Ponto** e marque o ponto A.

B Com a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**, construa o segmento $\overline{AB}$ com, por exemplo, $AB = 2$. Para isso, clique sobre o ponto A e, na janela **Segmento com Comprimento Fixo**, digite o comprimento do segmento, nesse caso, 2.



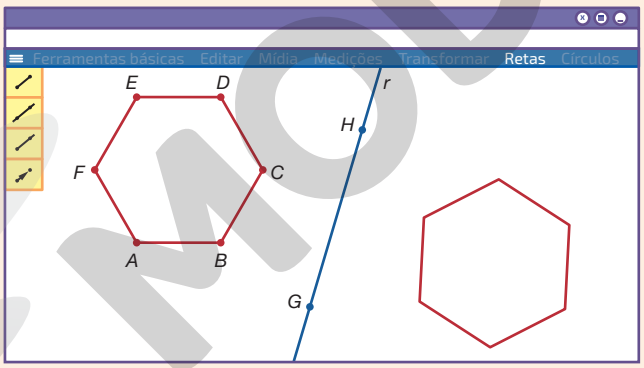
Veja mais informações sobre o GeoGebra no Suplemento para o professor.

C Selecione a ferramenta **Polígono Regular** e construa o hexágono regular *ABCDEF*. Para isso, clique na ferramenta **Polígono Regular** sobre os pontos A e B e, na janela, digite a quantidade de vértices do polígono, nesse caso, 6.

D Construa a reta r selecionando a ferramenta **Reta** e marque dois pontos.

E Selecione a ferramenta **Reflexão em Relação a uma Reta**, clique sobre o hexágono e sobre a reta r, nessa ordem.

A seguir, é apresentado o polígono *ABCDEF* e sua imagem por reflexão em torno da reta r.



Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Construa um pentágono regular de lado 5. Em seguida, obtenha a imagem desse pentágono por reflexão em torno do eixo das abscissas.

2 Construa um quadrado *ABCD* cujas coordenadas dos vértices são $A(1, 4)$, $B(3, 2)$, $C(5, 4)$ e $D(3, 6)$ e uma reta r que passa pelos pontos $E(5, 3)$ e $F(7, -1)$. Em seguida, obtenha a imagem do quadrado *ABCD* por reflexão em torno da reta r.

Para marcar o ponto A, por exemplo, digite, no campo **Entrada...**, $A = (1, 4)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

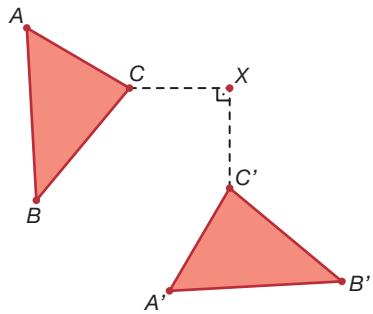
Rotação

Uma rotação pode ser no sentido horário ou anti-horário.

Indicaremos um ângulo e sua medida utilizando o mesmo símbolo.

No plano, uma **rotação** de centro A e ângulo α é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X' tal que $AX = AX'$ e $X\widehat{A}X' = \alpha$.

Na imagem a seguir, a figura $A'B'C'$ foi obtida por rotação de 90° da figura ABC em torno do ponto X, no sentido anti-horário.



RONALDO INÁCIO

A figura $A'B'C'$ é denominada **imagem** da figura ABC por rotação de centro X.

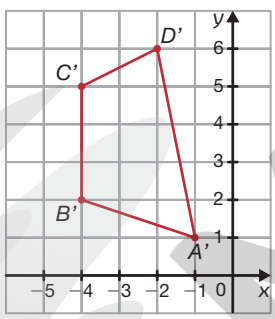
> As figuras ABC e $A'B'C'$ são congruentes?
> Sim, pois a figura $A'B'C'$ é a imagem da figura ABC por rotação de centro X e a transformação de rotação é isométrica.

Exercícios e problemas

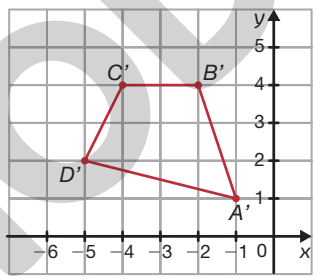
Anote as respostas no caderno.

8 Considere o polígono $ABCD$, cujas coordenadas dos vértices são $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(4, 4)$ e $D(2, 5)$. Dentre as alternativas a seguir, identifique aquela em que é apresentada a imagem de $ABCD$ por rotação de 90° em torno do ponto $(0, 0)$, no sentido anti-horário. alternativa b

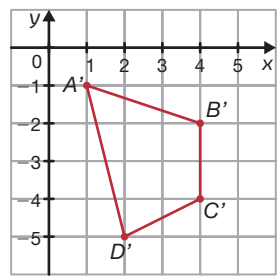
a)



b)

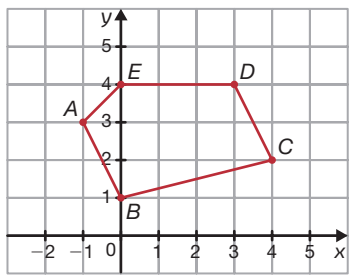


c)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

9 Considere o polígono $ABCDE$, representado no plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO

a) Quais são as coordenadas dos vértices do polígono $ABCDE$? $A(-1, 3)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$, $D(3, 4)$ e $E(0, 4)$

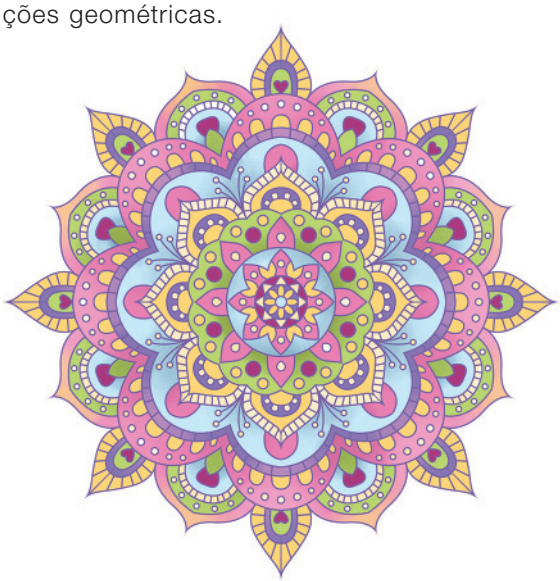
b) Quais são as coordenadas dos vértices da imagem de $ABCDE$ por rotação de 180° em torno da origem do plano cartesiano no sentido anti-horário?
$A'(1, -3)$, $B'(0, -1)$, $C'(-4, -2)$, $D'(-3, -4)$ e $E'(0, -4)$

c) Construa a imagem de $ABCDE$ por rotação de 180° em torno da origem do plano cartesiano no sentido anti-horário. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento para o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

10 As mandalas são figuras que podem ser encontradas em diversas culturas. Em muitas delas, podemos identificar a aplicação de transformações geométricas.



a) Dentre as transformações geométricas estudadas até o momento, quais podemos identificar na mandala apresentada?

Transformação de reflexão e de rotação.

b) Observe as figuras.

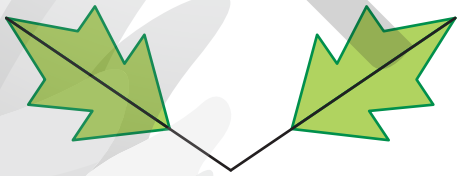
Figura **A**.

Figura **B**.

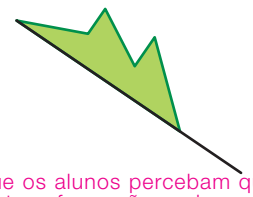
ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Aplicando transformações de rotação em apenas uma dessas figuras, é possível construir a mandala apresentada? Em caso afirmativo, em qual figura? sim; na figura A

11 Observe a imagem construída por Flávia.



É possível que Flávia tenha construído essa imagem aplicando, sobre a figura apresentada a seguir, apenas transformações de rotação? Converse com os colegas e professor sobre essa construção.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Não. Espera-se que os alunos percebam que para obter essa imagem aplicando transformações sobre a figura apresentada, é necessário utilizar, além da transformação de rotação, a transformação de reflexão.

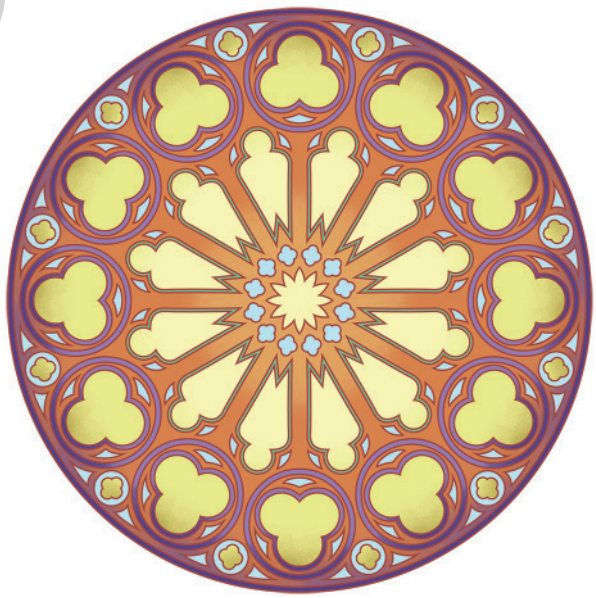
12 A Catedral de Notre-Dame, localizada em Paris, na França, é um monumento histórico rico em detalhes, alguns dos quais, mesmo após o incêndio ocorrido em abril de 2019, permaneceram intactos. Nela, podemos observar a presença de rosáceas, nas quais existem alguns padrões que se repetem.

JORISVO/SHUTTERSTOCK

Rosácea presente na fachada da Catedral de Notre-Dame em Paris, na França, em 2019.

Essa rosácea corresponde a uma região circular que pode ser decomposta em partes, semelhantes entre si, o que nos permite interpretar seu processo de construção como a repetição de um desenho, por meio de rotação, em torno do ponto central da rosácea.

Para um trabalho artístico, Maria construiu, utilizando um *software* de Geometria dinâmica e transformações geométricas, a seguinte rosácea.



HELOÍSA PINTARELLI

Desenhe um esboço da menor figura que possibilite a construção da rosácea feita por Maria utilizando transformações de rotação.

Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** no **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Acessando tecnologias

Transformação de rotação

Nesta seção, vamos obter, com auxílio do *software* de Geometria dinâmica GeoGebra, a imagem de uma figura por rotação em torno de um ponto.

A Selecione a ferramenta **Polígono** e construa um polígono qualquer.

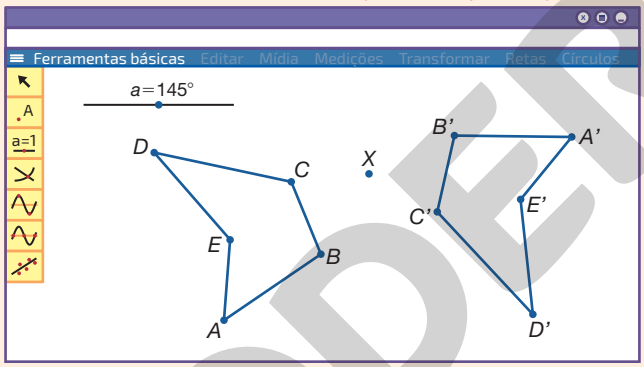
B Com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto *X*, externo ao polígono.

C Crie o controle deslizante com variação entre 0° e 360°. Para isso, selecione a ferramenta **Controle Deslizante** e escolha uma posição na **Janela de Visualização**. Em seguida, na janela **Controle Deslizante**, selecione o formato ângulo, nomeie o controle por *a* e defina os valores máximo e mínimo, nesse caso, 360° e 0°, respectivamente.

D Selecione a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto**, clique sobre o polígono e sobre o ponto *X*, nessa ordem. Na janela **Rotação em Torno de um Ponto**, defina o ângulo como *a*, mantendo o sentido da rotação como anti-horário.

E Altere o valor de *a* no controle deslizante e observe que o polígono sofrerá uma rotação em torno do ponto *X* segundo a medida assumida por *a*.

A seguir, é apresentado o polígono *ABCDE* e sua imagem por rotação de 145° em torno do ponto *X* no sentido anti-horário. Veja mais informações sobre o GeoGebra no Suplemento para o professor.



Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

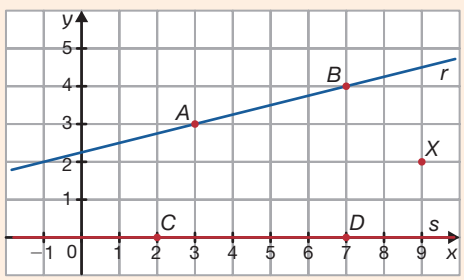
1 Construa um hexágono regular *ABCDEF* e um ponto *X*, externo ao hexágono. Em seguida, obtenha a imagem desse hexágono por rotação de centro *X* e ângulo de:

- 30° no sentido anti-horário.
- 60° no sentido horário.
- 270° no sentido anti-horário.

2 Construa o ponto $X(1,2)$ e o triângulo *ABC* cujas coordenadas dos vértices são $A(-1,7)$, $B(3,2)$ e $C(-5,-4)$. Em seguida, obtenha a imagem desse triângulo por rotação de 72° em torno do ponto *X*, no sentido horário.

3 Desafio

Veja na imagem ao lado o ponto *X* e as retas *r* e *s*.



a) Quais são as coordenadas do ponto *X*?

b) Quais são as coordenadas dos pontos *A* e *B* pertencentes à reta *r*? E dos pontos *C* e *D* pertencentes à reta *s*?

c) Construa o ponto *X* e as retas *r* e *s*. Em seguida, utilizando seus conhecimentos sobre transformação de rotação, construa um quadrado *XYZW*, de maneira que *Y* pertença a *r* e *Z* pertença a *s*.

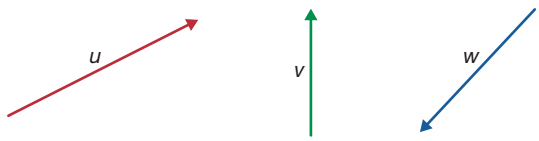
RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
RONALDO INÁCIO

Translação

Antes de iniciarmos o estudo sobre translação, vamos apresentar alguns conceitos importantes.

Um segmento de reta é dito **orientado** quando é estipulado qual de suas extremidades é a inicial. Nesse caso, a outra extremidade é a final. Quando dissermos "o segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$", fica subentendido que A é o ponto inicial e B, o final.

Um **vetor** é um segmento de reta orientado que possui comprimento, direção e sentido. Veja alguns exemplos.

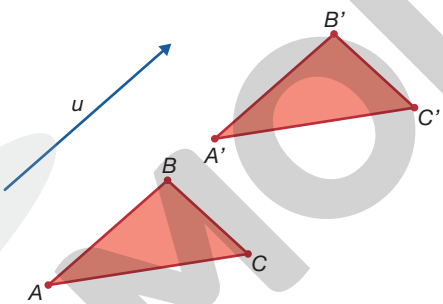


Quando dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são paralelos ou colineares, têm o mesmo comprimento e o mesmo sentido, dizemos que eles representam o mesmo vetor v. Nesse caso, escrevemos $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

A noção de translação está intimamente relacionada com o conceito de vetor (do latim ***vehere***, que significa transportar).

No plano, a **translação** associada ao vetor v, a qual indicaremos por T_v, faz corresponder a cada ponto P um ponto P' tal que $v = \overrightarrow{PP'}$.

Na imagem a seguir, a figura $A'B'C'$ foi obtida aplicando T_u na figura ABC.



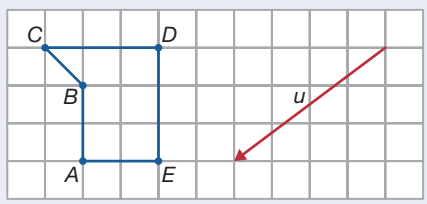
A figura $A'B'C'$ é denominada **imagem** da figura ABC por translação associada ao vetor u.

> As figuras ABC e $A'B'C'$ são congruentes?

Sim, pois a figura $A'B'C'$ é a imagem da figura ABC por translação associada ao vetor u e a transformação de translação é isométrica.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Construa a imagem do polígono $ABCDE$ por T_u.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

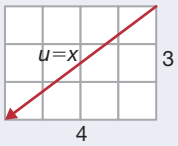
MODERNA

Resolução

Para construir a imagem de $ABCDE$ por T_u, inicialmente, determinamos o comprimento do vetor u. Para isso, indicamos por x o comprimento de u e utilizamos o Teorema de Pitágoras.

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

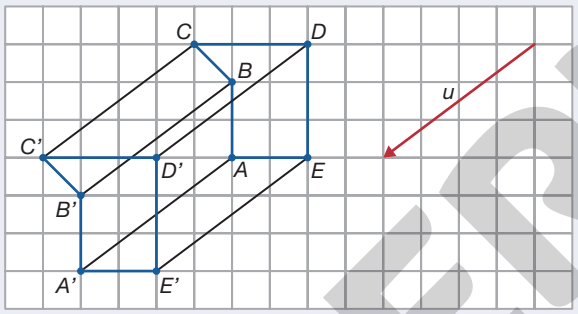
Note que $x = 5$, pois $x > 0$.



Assim, o comprimento do vetor u é 5 u.c. (unidades de comprimento). Agora, construímos os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$, com:

$$AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = 5 \text{ u.c.}$$

Por fim, traçamos os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$ e $\overline{A'E'}$, obtendo, assim, o polígono $A'B'C'D'E'$, que é a imagem de $ABCDE$ pela translação associada ao vetor u.



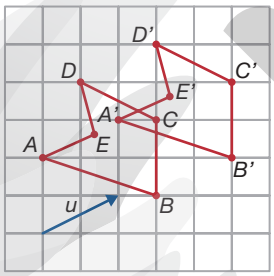
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas

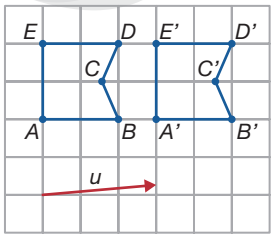
Anote as respostas no caderno.

13 Em qual item o polígono $A'B'C'D'E'$ é a imagem do polígono $ABCDE$ pela translação associada ao vetor u? alternativa a

a)

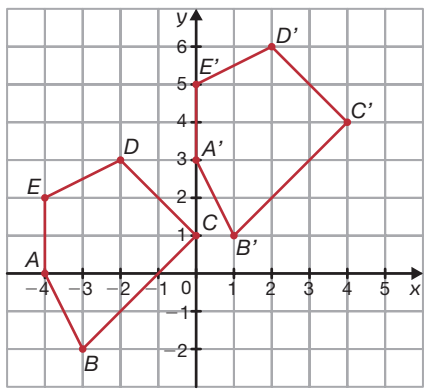


b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

14 A figura $A'B'C'D'E'$ é a imagem da figura $ABCDE$ por translação.



RONALDO INÁCIO

Qual é o comprimento do vetor associado a essa transformação geométrica? 5 u.c.

15 Em um plano cartesiano, construa o triângulo ABC cujas coordenadas dos vértices são $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ e $C(4, 5)$. Em seguida, construa a imagem de ABC pela translação associada ao vetor $v = \overrightarrow{AB}$.

Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento para o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Transformação de translação

Nesta seção, vamos obter, com auxílio do *software* de Geometria dinâmica GeoGebra, a imagem de um polígono pela translação associada a um vetor.

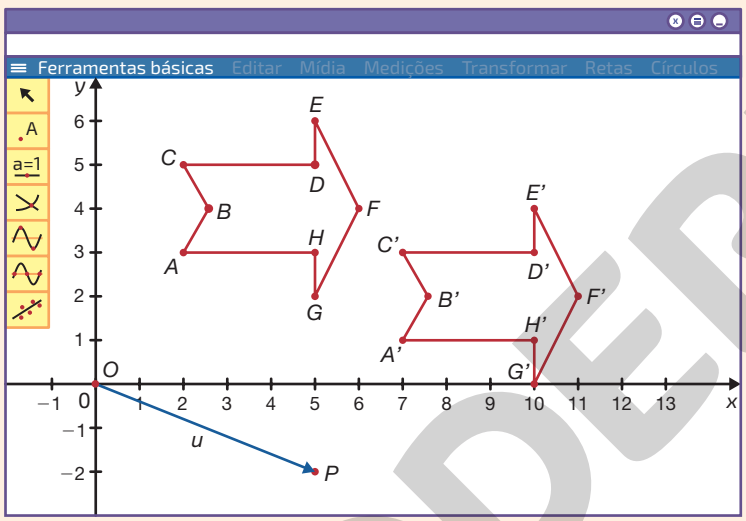
A Com a ferramenta **Ponto**, construa os pontos $O(0, 0)$ e $P(5, -2)$.

B Selecione a ferramenta **Vetor** e, em seguida, clique nos pontos O e P, nessa ordem.

C Com a ferramenta **Polígono**, construa um polígono qualquer.

D Selecione a ferramenta **Translação por um Vetor**, clique sobre o polígono e, em seguida, sobre o vetor $\overrightarrow{OP}$.

A seguir, é apresentado o polígono *ABCDEFGH* e sua imagem por translação associada ao vetor $u = \overrightarrow{OP}$. Veja mais informações sobre o GeoGebra no Suplemento para o professor.



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

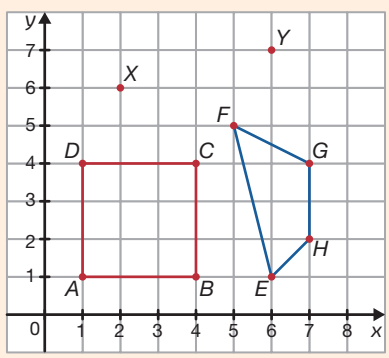
Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Construa um pentágono regular *ABCDE* de lado 3. Em seguida, obtenha a imagem do pentágono *ABCDE* pela translação associada ao vetor $v = \overrightarrow{OP}$, com $O(5, 0)$ e $P(2, -2)$.

2 Construa o quadrilátero *ABCD* cujas coordenadas dos vértices são $A(2, 0)$, $B(4, 3)$, $C(3, 7)$ e $D(-1, 5)$. Obtenha a imagem *A'B'C'D'* do quadrilátero *ABCD* por translação de modo que um de seus vértices coincida com o ponto $X(-3, 1)$.

3 Desafio

Utilizando seus conhecimentos sobre transformação de translação, construa um paralelogramo *XYZW*, de maneira que *Z* esteja sobre um dos lados do quadrado *ABCD* e *W* sobre um dos lados do quadrilátero *EFGH*.



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

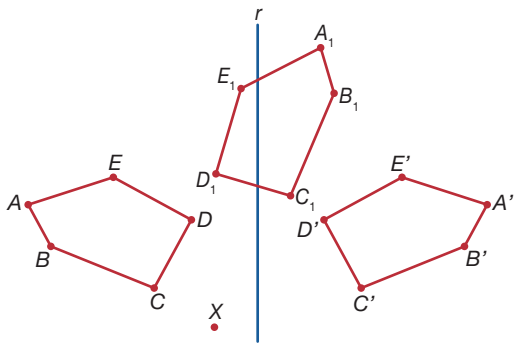
Composição de transformações

Observe que a composição de transformações isométricas é, também, uma transformação isométrica.

Estudamos as transformações de reflexão, rotação e translação. Agora, vamos analisar algumas combinações dessas transformações.

- **Reflexão e rotação**

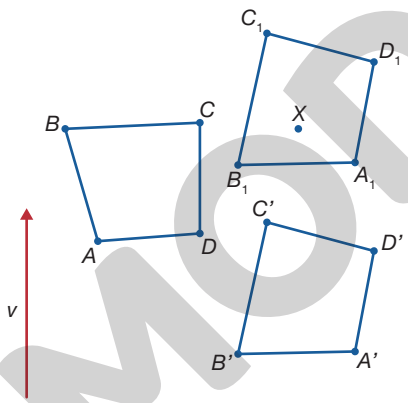
Seja o polígono *ABCDE*, a reta *r* e o ponto *X*. Ao aplicarmos, no polígono *ABCDE*, uma reflexão em torno da reta *r* seguida de uma rotação de 45° em torno do ponto *X* no sentido anti-horário, obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1E_1$.



Aplicando ao polígono *ABCDE* a reflexão em torno da reta *r* obtemos o polígono *A'B'C'D'E'* e, aplicando a este polígono uma rotação de centro *X* obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1E_1$.

- **Rotação e translação**

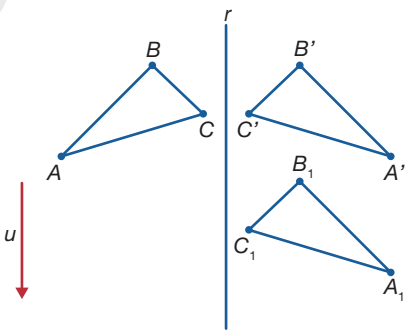
Seja o polígono *ABCD*, o ponto *X* e o vetor *v*. Ao aplicarmos, no polígono *ABCD*, uma rotação de 75° em torno do ponto *X*, no sentido anti-horário, seguida de uma translação associada ao vetor *v*, obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1$.



Aplicando ao polígono *ABCD* a rotação de centro *X* obtemos o polígono *A'B'C'D'* e, aplicando a este polígono uma translação associada ao vetor *v* obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1$.

- **Reflexão e translação**

Seja o polígono *ABC*, a reta *r* e o vetor *u*. Ao aplicarmos, no polígono *ABC*, uma transformação de reflexão em torno da reta *r* seguida de uma translação associada ao vetor *u*, obtemos o polígono $A_1B_1C_1$.



Aplicando ao polígono *ABC* a reflexão em torno da reta *r* obtemos o polígono *A'B'C'* e, aplicando a este polígono uma translação associada ao vetor *u* obtemos o polígono $A_1B_1C_1$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

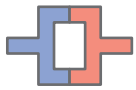
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

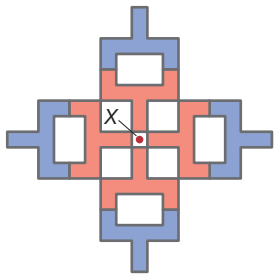
Utilizando uma composição de transformações de reflexão, rotação e translação, podemos construir figuras. Veja, por exemplo, a figura construída utilizando uma composição de transformações.

Nessa construção, foram utilizados os seguintes procedimentos.

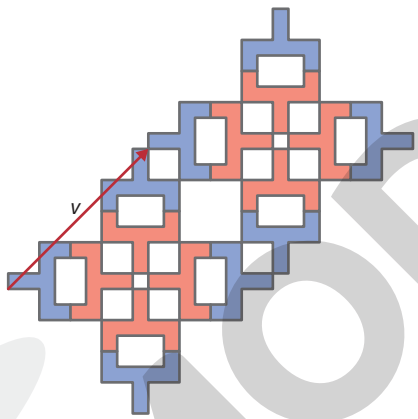
1 Construiu-se a seguinte figura.



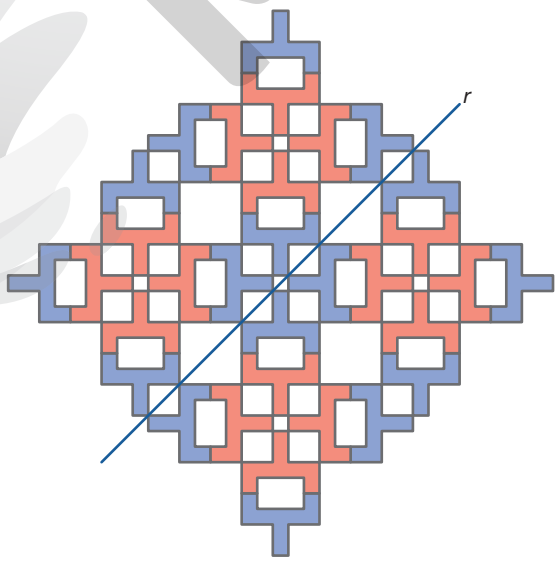
2 Em seguida, aplicou-se, nessa figura, três transformações de rotação em torno do ponto *X*: uma de 90°, uma de 180° e uma de 270°, todas no sentido anti-horário.



3 Na sequência, aplicou-se, na figura obtida no passo **2**, uma transformação de translação associada ao vetor *v*.



4 Por fim, aplicou-se, na figura obtida no passo **3**, uma transformação de reflexão em torno da reta *r*.



Em geral, trocando a ordem das transformações o resultado é diferente.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

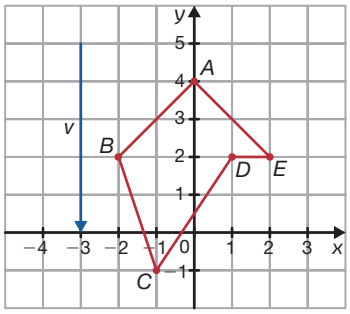
MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

17. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** no **Suplemento para o professor.**

16 Considere o polígono *ABCDE* e o vetor *v*.



RONALDO INÁCIO

Para facilitar a resolução, você pode construir o polígono *ABCDE* em um plano cartesiano e depois aplicar as transformações indicadas.

Ao aplicarmos uma reflexão em torno do eixo *y* seguida de uma translação associada ao vetor *v*, obtemos o polígono *A'B'C'D'E'*. Quais são as coordenadas dos vértices desse polígono?

$A'(0, -1)$, $B'(2, -3)$, $C'(1, -6)$, $D'(-1, -3)$ e $E'(-2, -3)$

17 Em um plano cartesiano, construa um pentágono regular com um dos vértices sendo $O(0, 0)$. Em seguida, obtenha a imagem desse pentágono aplicando, sobre ele, uma rotação de 90° em torno da origem do plano cartesiano, no sentido anti-horário, seguida de uma translação associada ao vetor $v = \overrightarrow{AB}$, com $A(7, 3)$ e $B(4, 2)$.

18 Vimos, anteriormente, que é possível identificar transformações geométricas na arte marajoara, que se caracteriza por padrões decorativos que se repetem com traços gráficos simétricos e cores da decoração marajoara. Podemos observar alguns desses padrões nas cerâmicas apresentadas a seguir.

FABIO COLOMBINI

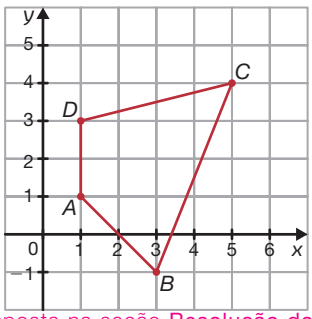
Cerâmicas marajoaras expostas no mercado, em Belém, no Pará, em 2004.

a) Que transformações geométricas (reflexão, rotação ou translação) você identifica nas cerâmicas apresentadas?

b) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, crie um desenho baseando-se na arte marajoara. Resposta pessoal.

18. a) Espera-se que os alunos respondam que são as transformações de reflexão, rotação e translação.

19 Observe o polígono *ABCD*.



RONALDO INÁCIO

b) Espera-se que os alunos respondam que sim, aplicando sobre *ABCD*, por exemplo, uma reflexão em torno do eixo *y*.

Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** no **Suplemento para o professor.**

a) Em um plano cartesiano, construa o polígono *ABCD*. Em seguida, obtenha a imagem *A'B'C'D'* desse polígono aplicando, sobre ele, uma rotação de 180° seguida de uma reflexão em torno do eixo *x*.

b) É possível obter a figura *A'B'C'D'* aplicando, sobre o polígono *ABCD*, uma transformação ou composição de transformações diferente da descrita no item **a**?

20 Maurits Cornelis Escher (1898-1972), mais conhecido como M. C. Escher, foi um dos mais famosos artistas gráficos do mundo. Em algumas de suas obras, é possível identificar transformações geométricas.

© 2020 THE M.C. ESCHER COMPANY-THE NETHERLANDS. ALL RIGHTS RESERVED

ESCHER, Maurits Cornelis. Desenho simétrico (E59). 1942. Aquarela. Coleção particular. 237 mm × 224 mm.

a) Escreva que transformações (reflexão, rotação ou translação) ou composições dessas transformações podem ser identificadas na obra de arte de Escher acima.

b) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, construa uma imagem utilizando transformações geométricas. Resposta pessoal.

20. a) Transformação de rotação, transformação de translação, transformação de reflexão seguida de translação.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Homotetia

As redes sociais estão cada vez mais presentes no cotidiano das pessoas. Com isso, a preocupação em compartilhar informações e, principalmente, imagens, vem ganhando espaço na comunicação entre os indivíduos, o que vem expandindo o trabalho com *softwares* e aplicativos de edição de fotos.

Uma maneira de reduzir ou ampliar uma foto mantendo as proporções da imagem, evitando distorções, é aplicar, sobre a foto, uma transformação geométrica denominada homotetia.

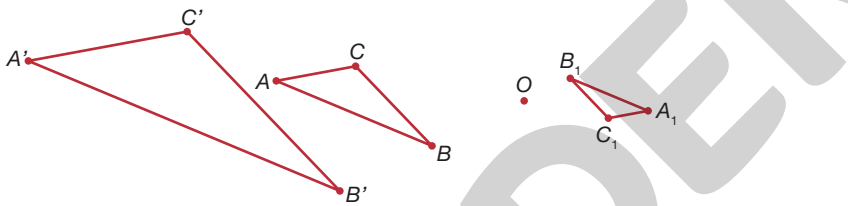
Uma **homotetia** de centro O e razão k é a transformação que a cada ponto P faz corresponder o ponto P' tal que:

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$$

Se $k > 0$, então $OP' = k \cdot OP$ e os segmentos orientados $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OP'}$ têm o mesmo sentido. Se $k < 0$, então $OP' = |k| \cdot OP$ e os segmentos orientados $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OP'}$ têm sentidos opostos.

É possível demonstrar que a homotetia transforma qualquer figura F em uma figura F' semelhante a F.

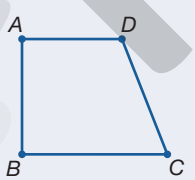
Veja a seguir, as imagens de um triângulo ABC pelas homotetias de centro O e razão 2 e de centro O e razão $-\frac{1}{2}$.



O triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC pela homotetia de centro O e razão 2. Já o triângulo $A_1B_1C_1$ é a imagem do triângulo ABC pela homotetia de centro O e razão $-\frac{1}{2}$.

Exercícios e problemas resolvidos

R2 Usando régua e compasso, construa uma ampliação do polígono $ABCD$ com razão de proporcionalidade 2.



O quociente comum entre o comprimento dos lados correspondentes do polígono original e sua imagem é denominado **razão de proporcionalidade**.

Resolução

Para essa construção, vamos realizar os seguintes procedimentos.

A Dado o polígono $ABCD$, marque o ponto O exterior a esse polígono.

B Com o auxílio da régua, trace as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$.

C Usando o compasso, marque sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$ o ponto A', com $OA' = 2 \cdot OA$. Para isso, com a abertura do compasso igual a OA e a ponta-seca em A, marque o ponto A', de maneira que os segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AA'}$ tenham o mesmo sentido.

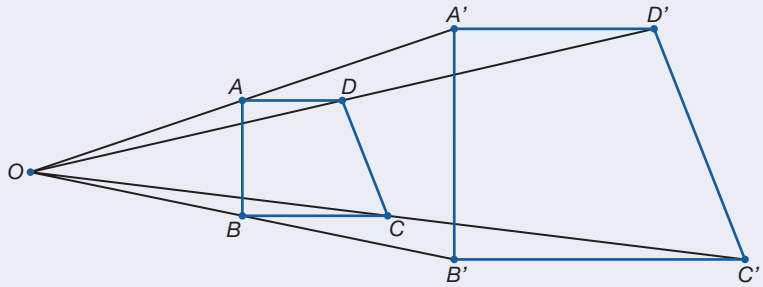
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

D De maneira semelhante à apresentada no passo **C**, marque, sobre as semirretas $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, respectivamente, os pontos B', C' e D', com $OB' = 2 \cdot OB$, $OC' = 2 \cdot OC$ e $OD' = 2 \cdot OD$.

E Por fim, construa o polígono $A'B'C'D'$, que é a imagem de $ABCD$ pela homotetia de centro O e razão 2.



RONALDO INÁCIO

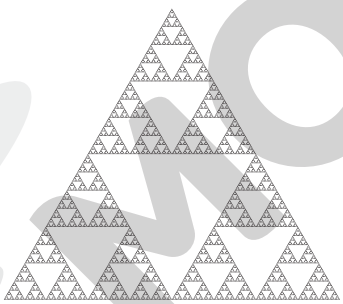
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

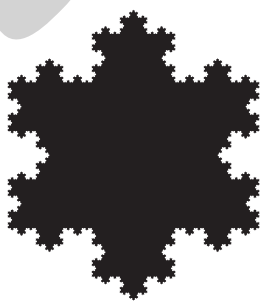
21 Construa um triângulo ABC com $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm e $AC = 3$ cm. Em seguida, utilizando régua e compasso, construa uma ampliação desse triângulo cuja razão de proporcionalidade é 3. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** no **Suplemento para o professor**.

No contexto

22 Vimos anteriormente o triângulo de Sierpiński e o floco de neve de Koch.



Triângulo de Sierpiński



Floco de neve de Koch

a) Ao analisar esses fractais, é possível identificar transformações geométricas? Em caso afirmativo, quais? Sim. Algumas possíveis respostas: homotetia, rotação, translação e reflexão.

b) É possível construir as figuras **1a** e **1b** aplicando transformações geométricas na figura **1**? Converse com os colegas e professor sobre essas construções.

Figura 1

Figura 1a

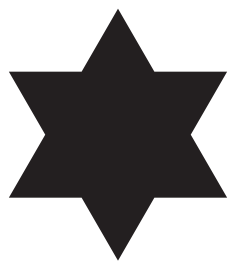


Figura 1b

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Sim. Espera-se que os alunos percebam que para construir a figura **1a** é possível aplicar, por exemplo, uma homotetia seguida por reflexões ou translações. Já no caso da figura **1b**, é possível, por exemplo, aplicar uma rotação.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ampliando e reduzindo polígonos

Nesta seção, com auxílio do *software* de Geometria dinâmica GeoGebra, vamos ampliar e reduzir um polígono utilizando homotetia.

A Selecione a ferramenta **Polígono** e construa um polígono qualquer.

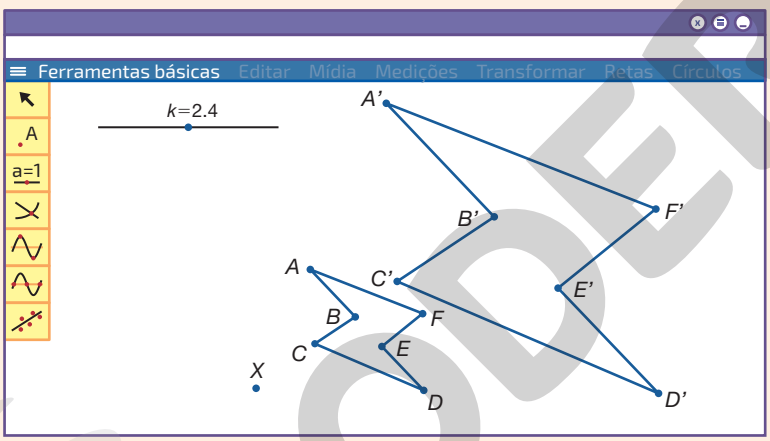
B Crie o controle deslizante *k*. Para isso, com a ferramenta **Controle Deslizante**, selecione uma posição na **Janela de Visualização**. Em seguida, na janela **Controle Deslizante**, nomeie o controle por *k*, selecione o formato **número** e defina os valores máximo e mínimo, por exemplo, 10 e – 10, respectivamente.

C Com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto *X*. Esse ponto será o centro da homotetia.

D Selecione a ferramenta **Homotetia**, clique sobre o polígono e sobre o ponto *X*. Em seguida, na janela **Homotetia**, defina o fator como *k*.

E Para ampliar, reduzir ou reproduzir $(k = 1)$, altere o valor de *k* no controle deslizante.

A seguir, é apresentada a imagem do polígono *ABCDEF* pela homotetia de centro *X* e razão 2,4. Veja mais informações sobre o GeoGebra no Suplemento para o professor.



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Construa um quadrado *ABCD* de lado 5, com $A(2, 3)$. Em seguida, obtenha uma:

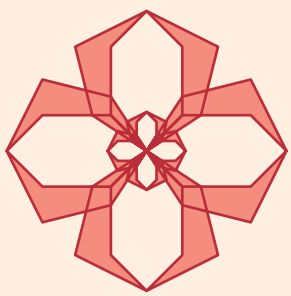
- ampliação do quadrado *ABCD* com razão de proporcionalidade 2.
- redução do quadrado *ABCD* com razão de proporcionalidade $\frac{1}{4}$.

2 Construa um hexágono regular de lado 3 e o ponto $A(1, 1)$. Em seguida, construa a imagem desse hexágono pela homotetia e centro *A* e razão -2.

3 Em grupo

Junte-se a um colega e converse sobre possíveis procedimentos para construir, utilizando transformações geométricas, a imagem apresentada ao lado. Em seguida, construa-a.

Dica: uma possibilidade é construir, inicialmente, o polígono *ABCDEF*, com $A(7, 10)$, $B(4, 8)$, $C(3, 5)$, $D(7, 3)$, $E(5, 5)$ e $F(5, 8)$.



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

14 Transformações geométricas e Arte

Os padrões geométricos de Escher

A Matemática, principalmente a Geometria, é fonte de inspiração de diversos pintores, escultores e arquitetos. Um dos principais artistas a utilizar transformações geométricas para a composição de suas obras é o holandês Maurits Cornelis Escher, citado na tarefa **20** da página **146**. Suas obras são exemplos da arte que explora uma grande variedade de conceitos matemáticos. Veja algumas curiosidades a respeito desse artista.

1

Não foi um aluno excepcional. Suas notas eram boas em desenho, mas medianas em Matemática.

1

Enquanto viajava pelo continente europeu, visitou alguns palácios na Espanha e ficou fascinado pelos mosaicos. Ele achou muito interessante a forma como uma figura se entrelaçava a outra e se repetia, formando padrões geométricos. Escher então copiou os desenhos e, inspirado pelos conceitos matemáticos que envolvem a divisão do plano, começou a estudar simetria.

2

3

5

A xilogravura e a litografia foram as principais técnicas utilizadas pelo artista. A primeira consiste em aplicar tinta sobre relevos em um bloco de madeira. Na segunda, usa-se um pedaço de pedra plana e desenha-se por cima dele.

4

A relação de suas obras com a Matemática era tamanha que um professor acadêmico convidou o artista para assistir uma de suas aulas. No entanto, Escher não conseguia acompanhar os conceitos e as teorias que o professor relacionava a suas próprias obras, mesmo que de maneira intuitiva.

6

Em algumas obras, Escher criava ilusões de ótica por meio do desenho de objetos ou de estruturas impossíveis de serem construídos materialmente.

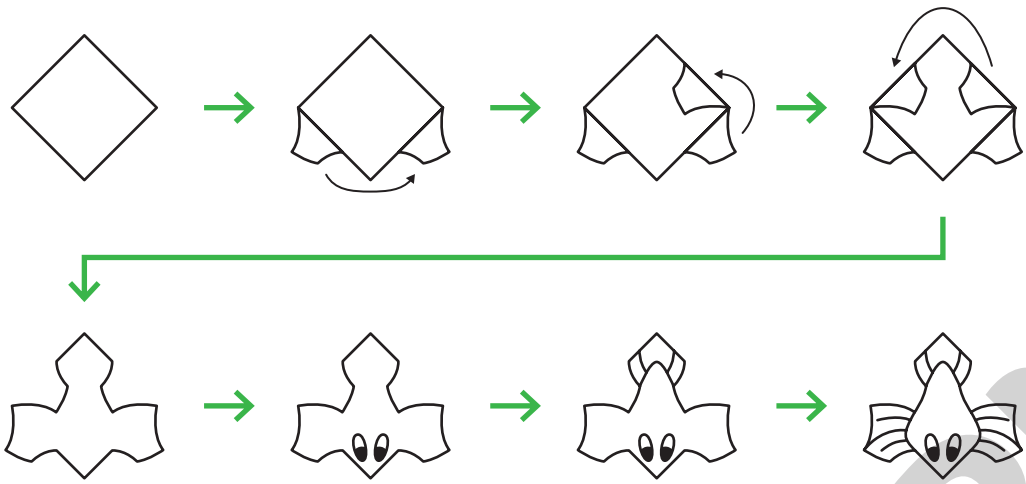
1

7

FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.FLAS100/SHUTTERSTOCK; 2.ELFINADESIGN/SHUTTERSTOCK; 3.BETACAM-SP/SHUTTERSTOCK; 4.IRYNA KUZNETSOVA/SHUTTERSTOCK; 5.KEYKIE/SHUTTERSTOCK; 6.VYACHESLAV MOTSERENKOV/SHUTTERSTOCK; 7.STANISLAV KHOKHOLKOV/SHUTTERSTOCK; 8.KUES/SHUTTERSTOCK

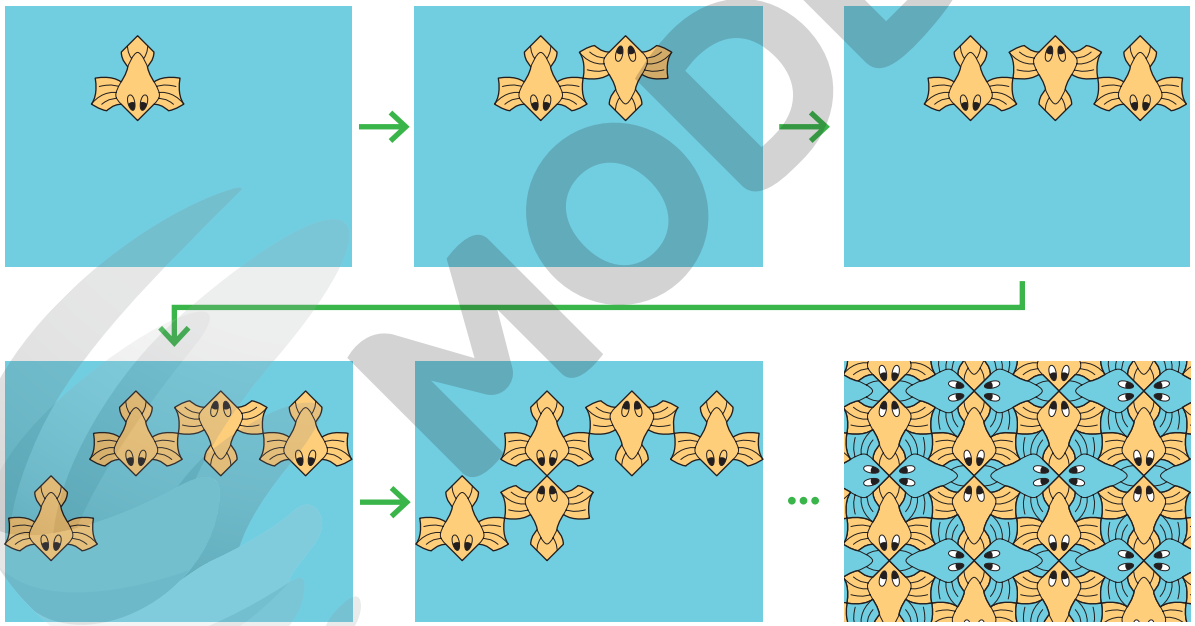
Fontes de pesquisa: <https://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2020. <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_uem_mat_pdp_simone_cristina_romao.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2020.

Escher deu uma atenção especial para o que chamou de “metamorfoses”, em que as formas mudam e interagem umas com as outras. Mas para ter um resultado estético preciso, ele utilizava uma malha de triângulos equiláteros, de quadrados ou de hexágonos regulares. Contudo, quando olhamos para os padrões de Escher, não reconhecemos esses polígonos. Isso porque ele recortava e acrescentava partes para transformar um quadrado em um peixe de mesma área, por exemplo.



Outras obras do artista podem ser consultadas no *site*. Disponível em: <https://mcescher.com/gallery/>. Acesso em: 15 jul. 2020.

Desse modo surgiam figuras de homens, peixes, aves, lagartos, todos envolvidos de tal forma que nenhum poderia mais se mexer, ou seja, cobriam o plano completamente, sem áreas livres ou sobreposições. Veja como essa cobertura pode ser obtida aplicando transformações geométricas na figura inicial abaixo.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Para surgir as figuras de homens, peixes, aves e lagartos, o artista recortava e acrescentava partes em figuras com formato de triângulo equilátero, quadrado ou hexágono regular. Por que ele utilizava esses polígonos regulares?

A) Porque somente com triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares é possível cobrir o plano completamente, sem áreas livres ou sobreposições.

B Escolha duas figuras no esquema apresentado para a cobertura do plano e identifique exemplos de rotações, translações e/ou reflexões na figura do peixe. Resposta pessoal.

C Pesquise outras obras de Escher e descreva-as. Entre essas obras, cite outros padrões que ele usou para a cobertura do plano e outras figuras que apresentam a ideia de ilusão de ótica. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ampliando seus conhecimentos

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de livros, *sites* e *podcasts* que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula, envolvendo conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

Para ler

- **A Matemática das coisas**

  CRATO, Nuno. *A Matemática das coisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro apresenta diversos exemplos da importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

- **A Matemática nas profissões**

  BARELLA, Elaine S.; MARTINS, Laura M. R. (Org.). *A Matemática nas profissões*. São Paulo: Portal Editora, 2010.

  Resultado de pesquisas e entrevistas, o livro apresenta o relato de profissionais de diversas áreas sobre a relação deles com a Matemática em suas rotinas de trabalho.

- **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**

  GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro é um relato de quatro milênios da história da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

- **O universo e a xícara de chá**

  COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá*. Trad. Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

  O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como enxergar a lógica presente nessas situações, cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

Para navegar

- **Edumatec**

  Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

- **Enem**

  Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível fazer a inscrição para o Enem e acessar os resultados, os simulados e as provas aplicadas em anos anteriores, assim como a matriz de referência dos conhecimentos avaliados no exame.

Para ouvir

- **Resumov**

  Disponível em: <https://www.resumov.com.br/podcast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Criado por Susane Ribeiro, o Resumov é um *podcast* que dá dicas de estudos para quem deseja ter uma boa nota no Enem ou passar nos vestibulares mais difíceis do país.

- **Scicast**

  Disponível em: <https://www.deviante.com.br/podcasts/scicast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Esse *podcast* é voltado para aquele que precisa dar um gás nos estudos da área de Ciências exatas e naturais. Nele, o apresentador utiliza de situações do dia a dia para explicar Matemática, Química e Física de uma maneira mais didática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Coordenadas e distâncias

1 $A(3, 2)$; $B(-6, 0)$; $C(-1, -5)$; $D(4, -4)$; $E(-3, 3)$; $F(5, 6)$; $G(-5, -6)$

2 a) $A(1, 3)$, $B(2, -2)$, $C(5, 2)$ e $D(6, -1)$

b) Uma possível resposta: $(3, 1)$, $(4, 1)$ e $(5, 1)$.

c) $A'(-1, 3)$, $B'(-2, -2)$, $C'(-5, 2)$ e $D'(-6, -1)$

3 a) 1º e 4º quadrantes

b) 3º e 4º quadrantes

c) 2º quadrante

d) 4º quadrante

5 a) 20°

b) 40°

c) $B(-100°, 0°)$; $E(-40°, -40°)$

6 a) $A(-2, 2)$; $B(1, 1)$; $C(3, 3)$; $D(-1, 1)$; $E(1, -1)$; $F(2, -2)$;

b) $x = -9$; $y = 7$

7
- $\sqrt{2}$
- 7
- $3\sqrt{2}$
- 15

8 a) 3 triângulos

b) $\triangle ABD$: isósceles;
$\triangle ACD$: escaleno;
$\triangle BCD$: isósceles

9 $x = -3$

10 alternativas b e c

11 B; D; E

12 perímetro: 16 u.c.; área: 12 u.a.

13 4,5 u.a.

14 $D(-9, -3)$

15 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{21}{6}\right)$

16 alternativa e

17 a) $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$ c) $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

b) $(-1, 2)$ d) $(4, 7)$

18 a) Sim, pois:

$$M_{\overline{AC}} = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{7 + (-5)}{2}\right) =$$

$$= M_{\overline{AC}}(1, 1)$$

b) • $M_{\overline{AB}}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

• $M_{\overline{BC}}\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

19 5 u.c.

20 a) $C(3, 4)$; $D(6, 8)$

b) 1 800 m

21 $A(6, 0)$; $B(0, 8)$

22 $x = 0$; $y = 4$

23 $x = 3$; $y = -7$

24 $Q\left(-\frac{13}{7}, \frac{31}{7}\right)$

25 a) • $AM_{\overline{BC}} = \sqrt{17}$

• $BM_{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{149}}{2}$

• $CM_{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

b) $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

26 $B(9, 4)$; $C(8, 0)$

27 a) $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

b) $\frac{\sqrt{109}}{3}$

28 a) $P\left(\frac{11}{2}, 7\right)$; $Q\left(\frac{5}{2}, 7\right)$; $R(4, 4)$

b) $G(4, 6)$; $H(4, 6)$

2 Matrizes

1 a) 2×2

b) 5×3

c) 1×4

d) 2×4

2 a) 0

b) 5,7

c) π

d) $\sqrt{7}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 a) $\begin{bmatrix} 7 & 28 \\ 62 & 14 \\ 91 & 261 \\ 160 & 303 \end{bmatrix}$

b) • O total de títulos do cinema brasileiro ou estrangeiro lançados em 2017.
• As quantidades de títulos do cinema brasileiro lançados por gênero em 2017 e seu total.
• A quantidade de títulos de ficção do cinema brasileiro lançados em 2017.

4 a) 7 períodos; 18 grupos

b) 8 elementos; 18 elementos

c) • C
• Au
• I

d) • período 4, grupo 12
• período 3, grupo 17
• período 7, grupo 5

5 a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6 a) Possíveis respostas: 1×7 ou 7×1.

b) Possíveis respostas: 1×20, 20×1, 2×10, 10×2, 4×5 ou 5×4.

7 $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

8 0

9 a) linha

b) nula

c) quadrada

d) quadrada e triangular

e) quadrada, triangular, diagonal e identidade

f) coluna

10 alternativa a

11 • -4
• 7

12 Uma possível resposta: $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

13 a) verdadeira
b) verdadeira
c) falsa
d) falsa
e) verdadeira

14 a) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) R$ 1 050,00

c) não; não

15 a) $x = -3$; $y = 7$

b) $x = 2$; $y = 1$

16 • $A^t = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$

• $B^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 13 \end{bmatrix}$

17 B

3 Operações com matrizes

1 a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 17 & 18 \\ -21 & 19 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -9 \\ -6 & -6 & 11 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

2 a) $T = \begin{bmatrix} 55 & 74 & 64 & 67 \\ 65 & 57 & 63 & 63 \end{bmatrix}$

b) bairro B; bairro A

3 a) $-A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $-B = \begin{bmatrix} -1 & \pi \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $-C = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 & 1 \\ -\sqrt[3]{-6} & -2 & -10 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $-D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 a) $B + B = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B + A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

c) $A + A^t = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

d) $A - B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

5 a) $M = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 18 & 17 & 17 \\ 22 & 20 & 23 & 28 & 27 \\ 25 & 22 & 23 & 23 & 28 \\ 22 & 22 & 22 & 20 & 21 \end{bmatrix}$ e

$N = \begin{bmatrix} 33 & 33 & 32 & 31 & 32 \\ 36 & 36 & 39 & 39 & 40 \\ 40 & 39 & 41 & 41 & 41 \\ 38 & 39 & 37 & 36 & 38 \end{bmatrix}$

b) B

c) $B = \begin{bmatrix} 17 & 12 & 14 & 14 & 15 \\ 14 & 16 & 16 & 11 & 13 \\ 15 & 17 & 18 & 18 & 13 \\ 16 & 17 & 15 & 16 & 17 \end{bmatrix}$

d) Cuiabá; Campo Grande

e) dia 12

6 $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -8 & 8 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

8 a) $\begin{bmatrix} 3 & -3\pi & -\frac{1}{2} \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -4 & 2x \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 6x^2 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

10 $x = \frac{7}{4}$; $y = 4$; $z = -3$

11 $\begin{bmatrix} 16{,}2 & 14{,}4 & 19{,}8 \\ 90 & 126 & 144 \end{bmatrix}$

12 a) $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -5 & 8 & 18 \\ 8 & -94 & -36 \\ 18 & -36 & -82 \end{bmatrix}$

d) $[9]$

e) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 8 & 12 \\ 14 & 21 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

13 $A \cdot B = \begin{bmatrix} 6{,}44 \\ 8{,}27 \\ 9{,}05 \\ 9{,}69 \end{bmatrix}$

14 a) $m = 2$

b) 3×4

15 • $A \cdot B = \begin{bmatrix} 22 & -29 \\ 11 & -\frac{23}{2} \end{bmatrix}$

• $B \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 23 & 19 \end{bmatrix}$

17 a) $C = \begin{bmatrix} 39 \\ 37 \\ 36 \\ 32 \\ 31 \end{bmatrix}$

b) 39 pontos; 32 pontos

18 a) -12

b) 19

c) 8

19 a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 45 \\ 18 & -19 & -18 \end{bmatrix}$

b) $A^t \cdot C = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C \cdot B = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 18 \\ 20 & -14 & 0 \end{bmatrix}$

d) $(A + C) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 21 & 63 \\ 38 & -33 & -18 \end{bmatrix}$

20 $x = -3$; $y = \frac{1}{2}$

21 $p = 5$; $q = 3$; $r = 4$; $s = 3$

4 Matriz inversa e determinantes

1 a) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) não existe C^{-1}

d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

2 7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 a) $C =$

$= \begin{bmatrix} 383 & 277 & 79 & 451 & 141 & 577 & 273 \\ 305 & 211 & 61 & 355 & 109 & 451 & 218 \end{bmatrix}$

c) Números primos são os números naturais que têm somente dois divisores distintos: o 1 e ele mesmo.

d) missão fracassada

4 a) $\begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 27 & -3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

5 $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{19}{5} & 3 \end{bmatrix}$

6 a) $X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 2 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -2 \end{bmatrix}$

7 $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$

8 a) trabalho 1: peso 20%; trabalho 2: peso 30%; prova: peso 50%

b) 8,1

c) Algumas possíveis respostas: no trabalho 1: 8, no trabalho 2: 8 e na prova 10; no trabalho 1: 9, no trabalho 2: 9 e na prova: 9.

9 a) -12 c) -30

b) 36 d) 144

10 $x = 2$; $y = 9$

11 a) $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad - bc}_{\det A}$

b) $k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow \det(k \cdot A) =$

$= \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = ka \cdot kd - kb \cdot kc =$

$= k^2 \cdot a \cdot d - k^2 \cdot b \cdot c = k^2 \cdot \underbrace{(ad - bc)}_{\det A}$

12 a) 125 c) 1 000

b) 250 d) 1 000

13 $x = 0$ ou $x = \frac{9}{4}$

14 5

15 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

16 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 14 & 8 \end{bmatrix}$

17 a) 1

18 a) -4 c) 918

b) 51 d) -72

6 O ponto e a reta

1 alternativas a, c e d

3 $r = -9$

4 a) $a = 11$

b) $T(12, 16)$; sim; eclipse solar

5 $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$

6 a) 11 u.a. b) $\frac{25}{2}$ u.a. c) 4 u.a.

7 10 u.a. **8** 12 u.a. **9** 15 u.a.

10 a) $x + y - 4 = 0$ c) $\sqrt{3}x + y = 0$

b) $y - x - 5 = 0$

11 a) $y - 2 = 0$

b) $x - 12 = 0$

c) $5x - y + 6 = 0$

12 a) $y = 6x$

b) $y_1 = 18$; $y_2 = -12$

13 $p = \frac{17}{2}$

14 alternativa b

15 a) $-x - 6y + 17 = 0$

b) $-10x + y + 4 = 0$

c) $-9x + 7y - 59 = 0$

d) $x - 4y - 20 = 0$

16 alternativa d

17 a) $y = 0{,}15x + 1\,500$

b) $y_1 = 1\,725$; $y_2 = 1\,920$

c) $\frac{20\,000}{3}$

19 r: $15x + 17y + 104 = 0$;
s: $-6x - 35y + 184 = 0$;
t: $-x + 2y + 15 = 0$

20 $2x - y = 0$; $x + 2y - 5 = 0$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

21 a) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

c) Uma possível resposta: $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(-2, -\frac{15}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{2}\right)$.

22 $k = 3$

23 alternativa **b**

24 a) $-12x + y = 0$ c) 96
b) não d) 13

7 Sistemas lineares

1 a) coeficientes: 4 e -12; termo independente: 17
b) coeficientes: 1 e $-\sqrt{3}$; termo independente: 0
c) coeficientes: -1 e -5; termo independente: 2

2 a) linear c) linear
b) não linear d) não linear

3 alternativa **b**

4 a) Uma possível resposta: $(4, 2)$ e $\left(6, \frac{19}{6}\right)$.

b) Uma possível resposta: $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 4)$.

5 $\alpha = -2$

7 a) II e III; homogêneo
b) II; não homogêneo

9 alternativa **d**

10 R$ 197,50

11 a) $\begin{cases} x + y = 2\,000 \\ x = y + 688 \end{cases}$

b) 1 344 curtidas; 656 compartilhamentos

12 alternativa **c**

13 alternativa **e**

14 a) II

b) 150 mℓ de leite de soja e 200 g de salada de frutas.

8 Escalonamento de sistemas lineares

1 a) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

3 8 vitórias; 3 empates; 4 derrotas

4 $\alpha = -2$

5 a) uma solução; $(-2, 5)$
b) não possui solução
c) uma solução; $(2, 1)$
d) infinitas soluções; Algumas possíveis respostas: $(-2, 5)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$
e) uma solução; $(-2, 5)$

6 a) $\begin{cases} 8A + 12B = 324 \\ A + B = 33 \end{cases}$

b) SPD

c) frango: 18 unidades; vegetariano: 15 unidades

8 a) $a = 3$; $b = 2$

b) $a \neq 3$; $b \in \mathbb{R}$

c) $a = 3$; $b \neq 2$

9 a) não existe solução

b) $x = \frac{6}{19}$; $y = \frac{23}{19}$

c) $x = -\frac{12}{5}$; $y = \frac{4}{5}$

10 etanol: 30 ℓ; gasolina: 10 ℓ

11 a-IV; b-I; c-III; d-II

12 alternativa **d**

13 $x = 3$; $y = -2$; $z = -1$

14 $\begin{cases} 2{,}5L + 1{,}6P = 26{,}70 \\ 4L + 3{,}5P = 54{,}00 \end{cases}$;

L = R$ 3,00; P = R$ 12,00

15 a) carbono: 12 u; hidrogênio: 1 u

b) não

16 a-d; b-f; c-e

17 alternativas **b** e **d**

18 a) $A \neq 1$; $B = 0$; $C \neq 0$; $D = 0$; $E = -1$

b) $A \neq 1$; $B = 1$; $C \neq 0$; $D = 0$; $E = 0$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

19 a) SPI; solução geral: $\left(\frac{7}{2} - k, 3 - k, k\right)$, com k real

b) SPD; $(1, -2, 4)$

c) SPI; solução geral: $(4, 5 + 2k, -5 - k, k)$, com k real

20 Gil: 9 gols; João: 3 gols

21 a) $x = 2$; $y = 3$; $z = 1$

b) $x = 3$; $y = -1$; $z = 2$

22 alternativa d

23 50 s

25 A mãe comprou 4 caixas amarelas, 1 verde e 2 azuis.

26 106,848 cm^3

27 a) SPD: $a \neq 2$; SPI: $a = 2$

b) SPD: para qualquer a pertencente aos reais

c) SPD: $a \neq 0$; SI: $a = 0$

d) SPD: $a \neq 0$ e $a \neq -1$; SI: $a = 0$ ou $a = -1$

28 $k_2 \neq -2k_1$

29 $a \neq 0$; Uma possível resposta: $a = 1$ e $(21, 4, 16)$.

30 SPD: $a \neq -\frac{1}{2}$; SPI: $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 4$;

SI: $a = -\frac{1}{2}$ e $b \neq 4$

31 $a \neq \frac{10}{3}$ **32** SPD **33** $p = -1$

9 Circunferência

1 a) $O(0, 2)$; $r = 3$

b) $O(-1, 0)$; $r = 2\sqrt{2}$

c) $O\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$; $r = 1$

d) $O(4, -4)$; $r = 2$

2 a) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = \underbrace{49}_{7^2}$

b) $(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = \underbrace{3}_{(\sqrt{3})^2}$

c) $(x + 5)^2 + y^2 = \underbrace{16}_{4^2}$

d) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = \underbrace{25}_{5^2}$

3 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$

4 a) 1 962,5 m^2

b) $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 625$

5 $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 6$

6 $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

7 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 7$

8 Q e S

9 a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

b) $x^2 + (y + 3)^2 = 25$

10 a) 2 u.c.

b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$

c) $\frac{\pi}{2}$

11 $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$; 2º quadrante

12 $m < 34$ **14** $k = 3$ ou $k = 5$

11 Cônicas

1 a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

b) $x^2 + \frac{(y - 3)^2}{10} = 1$

c) $\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{12} = 1$

d) $\frac{(x + 4)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

2 a) $F_1(-12, 6)$ e $F_2(4, 6)$

b) $F_1\left(0, -1 + \sqrt{7}\right)$ e $F_2\left(0, -1 - \sqrt{7}\right)$

3 a) $2a = 4\sqrt{2}$; $2b = 2\sqrt{3}$;
$2c = 2\sqrt{5}$; $e = \frac{\sqrt{10}}{4}$

b) $2a = 2\sqrt{5}$; $2b = 4$;
$2c = 2$; $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $2a = 6$; $2b = 2\sqrt{6}$;
$2c = 2\sqrt{3}$; $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $2a = 6$; $2b = 2$; $2c = 4\sqrt{2}$; $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

e) $2a = 4\sqrt{34}$; $2b = 20$;
$2c = 12$; $e = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

5 alternativa d

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

6 a) $F_1\left(0, 2\sqrt{10}\right)$ e $F_2\left(0, -2\sqrt{10}\right)$

b) $F_1\left(-1 - 3\sqrt{5}, 2\right)$ e $F_2\left(-1 + 3\sqrt{5}, 2\right)$

7 $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

8 alternativa b

9 $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{72} = 1$

10 a) sobre o eixo x c) sobre o eixo y

b) paralelo ao eixo y d) sobre o eixo x

11 alternativas b e c

b) $\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y-3)^2}{8} = 1$

c) $\frac{y^2}{4} - \frac{(x+8)^2}{6} = 1$

12 a) $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$; sobre o eixo y

b) $\frac{(x-10)^2}{27} - \frac{(y-10)^2}{9} = 1$; paralelo ao eixo x

15 a) $4\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{21}$

b) 6 d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

16 $\frac{(y-4)^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

17 $\frac{(x-8)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{7} = 1$

18 a) $e = \frac{3}{2}$ c) $e = \sqrt{2}$

b) $e = 2$ d) $e = \frac{7}{4}$

19 $F_1\left(0, 2\sqrt{13}\right)$ e $F_2\left(0, -2\sqrt{13}\right)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

20 $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{400} = 1$

21 a) 260 km c) 240 km

b) $e = 1{,}08\overline{3}$ d) $\frac{x^2}{120^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$

22 a) $x^2 = 8(y-1)$

b) $(y+2)^2 = -12(x+2)$

c) $y^2 = 16x$

d) $(x-5)^2 = -20(y-3)$

23 a) $F\left(-\frac{9}{2}, 8\right)$; $x = -\frac{3}{2}$

b) $F(8, 11)$; $y = 5$

c) $F(-3, 5)$; $y = -3$

24 B; D

25 $V\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

26 alternativa a

28 $(x-4)^2 = 4(y+1)$

29 a) $(-7, 4)$ b) $p = \frac{1}{4}$ c) $x = -\frac{57}{8}$

30 alternativas a e c

31 alternativa e

13 Transformações geométricas

1 alternativa a

2 a) $A(-3, 1)$, $B(-3, 3)$, $C(-1, 2)$, $D(-2, 5)$, $E(-5, 4)$ e $F(-5, 2)$

b) • $A'(3, 1)$, $B'(3, 3)$, $C'(1, 2)$, $D'(2, 5)$, $E'(5, 4)$ e $F'(5, 2)$

• $A''(-3, -1)$, $B''(-3, -3)$, $C''(-1, -2)$, $D''(-2, -5)$, $E''(-5, -4)$ e $F''(-5, -2)$

3 alternativa b

6 Sim. A reta r deve ser vertical, passando pelo centro da imagem, para que possa se obter a transformação de reflexão.

7 Sim

8 alternativa b

9 a) $A(-1, 3)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$, $D(3, 4)$ e $E(0, 4)$

b) $A'(1, -3)$, $B'(0, -1)$, $C'(-4, -2)$, $D'(-3, -4)$ e $E'(0, -4)$

10 a) Transformação de reflexão e de rotação.

b) sim; na figura A

11 Não

13 alternativa a **14** 5 u.c.

16 $A'(0, -1)$, $B'(2, -3)$, $C'(1, -6)$, $D'(-1, -3)$ e $E'(-2, -3)$

20 a) Transformação de rotação, transformação de translação, transformação de reflexão seguida de translação.

22 a) Sim. Algumas possíveis respostas: homotetia, rotação, translação e reflexão.

b) Sim.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).
  Este livro aborda a informática educativa, com aspectos que vão desde as políticas governamentais até as questões epistemológicas e pedagógicas. São apresentados exemplos do uso da informática com alunos e professores, bem como questões referentes ao uso de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
  A História da Matemática é abordada neste livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, e finalmente chegando aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 3 jun. 2020.
  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

- EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.
  O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, a obra apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para que sejam resolvidas.

- GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.
  Em meio a uma rede de intrigas envolvendo a máfia, sequestros e enigmas intelectuais, este romance desafia o leitor a compreender e organizar a história do pensamento matemático, desde a Antiguidade até os nossos dias.

- IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática elementar*: Geometria analítica. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 7.
  Este volume é composto por teorias e exercícios de aplicação sobre Geometria analítica, com testes de vestibular selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática elementar*: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 4.
  Este volume é composto por teorias e exercícios de aplicação sobre sequências, matrizes, determinantes, sistemas de equações, contendo testes de vestibulares selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- LIMA, Elon Lages. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).
  Coleção de crônicas e comentários em torno de um tema comum: a Matemática estudada nos últimos três anos que antecedem a universidade.

- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar P.; GUIMARÃES FILHO, Florêncio F. *Coordenadas no plano*: com as soluções dos exercícios. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).
  Aborda o uso de coordenadas como método para estudar Geometria plana. A primeira parte do livro contém uma simplificação da Geometria analítica plana; a segunda, uma introdução aos vetores; e, na terceira parte, as coordenadas e vetores são utilizados com a finalidade de estudar as transformações geométricas simples.

- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. adap. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
  Neste livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

Lista de siglas

ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio

FATEC-SP: Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina

UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora

UFMA: Universidade Federal do Maranhão

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ISBN 978-65-5779-077-9